

# Funções

Max Jauregui

19 de julho de 2022

## 1 Definições básicas

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer. Uma *relação* de  $A$  em  $B$  é um conjunto arbitrário de pares ordenados  $(x, y)$ , em que  $x \in A$  e  $y \in B$ . Uma *função*  $f$  de  $A$  em  $B$  é uma relação especial de  $A$  em  $B$  que tem as seguintes propriedades:

1. para cada  $x \in A$  existe  $y \in B$  tal que  $(x, y)$  pertence à relação;
2. se  $(x, y)$  e  $(x, z)$  pertencem à relação, então  $y = z$ .

Em outras palavras, cada  $x \in A$  está associado a um único elemento  $y \in B$ , o qual será denotado por  $f(x)$  e será chamado de *valor da função*  $f$  no ponto  $x$ .

**Exemplo 1.1.** Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{3, 5, 7\}$ .

1. A relação  $F = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\}$  é uma função de  $A$  em  $B$ .
2. A relação  $R = \{(1, 3), (3, 5), (4, 7)\}$  não é uma função de  $A$  em  $B$  pois  $2 \in A$  não está relacionado com nenhum  $y \in B$ ;
3. A relação  $S = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 7)\}$  não é uma função de  $A$  em  $B$ , pois  $(3, 5)$  e  $(3, 7)$  pertencem à relação.

Uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é denotada de forma simbólica por  $f : A \rightarrow B$ . O conjunto  $A$  é chamado de *domínio* de  $f$  e o conjunto  $B$  de *contradomínio* de  $f$ .

**Exemplo 1.2.** No exemplo 1.1 foi definida uma função  $F : A \rightarrow B$ . Nesse caso, tem-se que  $F(1) = 3$ ,  $F(2) = 3$ ,  $F(3) = 5$  e  $F(4) = 5$ .

Uma função  $f : A \rightarrow B$  é chamada de uma *função real de uma variável real* quando  $A \subset \mathbb{R}$  e  $B \subset \mathbb{R}$ . Essa classe de funções será o nosso principal objeto de estudo neste curso.

Embora que para definir uma função seja necessário conhecer o seu domínio, na prática, comumente definem-se funções simplesmente por equações da forma

$$f(x) = \text{expressão envolvendo a variável } x.$$

Nesse caso, assume-se que o domínio da função  $f$  é o conjunto de todos os números  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a expressão do lado direito faz sentido.

**Exemplo 1.3.**

1. A equação  $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$  define uma função  $f$  cujo domínio é  $\mathbb{R}$ , pois a expressão do lado direito faz sentido para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .
2. A equação  $g(x) = \frac{3}{x+5} - 3x^3$  define uma função  $g$  cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{R} - \{-5\}$ , pois a expressão do lado direito só faz sentido se  $x \neq -5$ ;
3. A equação  $h(x) = 6\sqrt{3-2x}$  define uma função  $h$  cujo domínio é o intervalo  $(-\infty, 3/2]$ , pois a expressão do lado direito só faz sentido se  $x \leq 3/2$ .

Define-se a *imagem* de uma função  $f$  como o conjunto de todos os valores  $f(x)$ , com  $x$  no domínio de  $f$ .

**Exemplo 1.4.** Vamos determinar o domínio e a imagem da função definida pela equação

$$f(x) = \sqrt{4-2x} + 5.$$

Como a expressão do lado direito só faz sentido se  $4-2x \geq 0$ , segue que o domínio de  $f$  é o intervalo  $(-\infty, 2]$ . Para determinarmos a imagem de  $f$  começamos notando que, independentemente do valor de  $x \in (-\infty, 2]$ ,  $\sqrt{4-2x} \geq 0$  e, por conseguinte,  $f(x) \geq 5$ . Isso quer dizer que a imagem de  $f$  está contida no intervalo  $[5, \infty)$ . Para concluir que todo esse intervalo é a imagem de  $f$ , devemos mostrar que para qualquer  $y \in [5, \infty)$  podemos achar  $x \in (-\infty, 2]$  tal que  $y = \sqrt{4-2x} + 5$ . Resolvendo essa equação, obtemos que

$$x = \frac{4 - (y-5)^2}{2} = 2 - \frac{(y-5)^2}{2}.$$

Segue daqui que, independentemente do valor de  $y \in [5, \infty)$ ,  $x \in (-\infty, 2]$ . Portanto, a imagem de  $f$  é o intervalo  $[5, \infty)$ .

Uma função  $f$  pode ser representada graficamente marcando os pontos  $(x, f(x))$ , com  $x$  no domínio de  $f$ , no plano cartesiano. Em geral, esse processo gera uma curva, a qual é chamada de *gráfico* de  $f$ . Como cada  $x$  no domínio de  $f$  está associado a um único valor de  $f(x)$ , o gráfico de  $f$  é uma curva tal que qualquer reta vertical corta a curva em no máximo um ponto.

**Exercício 1.5.** Esboce o gráfico da função definida no exemplo 1.4.

## 2 Funções monótonas, pares e ímpares

Há quatro tipos de funções monótonas:

1. Uma função  $f$  é *monótona crescente* em um intervalo  $I$  se, dados  $x_1, x_2 \in I$  com  $x_1 < x_2$ , tem-se que  $f(x_1) < f(x_2)$ .

2. Uma função  $f$  é *monótona não-decrescente* em um intervalo  $I$  se, dados  $x_1, x_2 \in I$  com  $x_1 < x_2$ , tem-se que  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .
3. Uma função  $f$  é *monótona decrescente* em um intervalo  $I$  se, dados  $x_1, x_2 \in I$  com  $x_1 < x_2$ , tem-se que  $f(x_1) > f(x_2)$ .
4. Uma função  $f$  é dita *monótona não-crescente* em um intervalo  $I$  se, dados  $x_1, x_2 \in I$  com  $x_1 < x_2$ , tem-se que  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

O gráfico de uma função monótona crescente é uma curva que sobe quando olhada de esquerda para a direita. Por outro lado, o gráfico de uma função monótona decrescente é uma curva que desce quando olhada de esquerda para a direita.

**Exemplo 2.1.** Consideremos a função  $f$  definida pela equação  $f(x) = x^2$ . Vamos mostrar que  $f$  é monótona crescente no intervalo  $[0, \infty)$  e é monótona decrescente no intervalo  $(-\infty, 0]$ . Dados  $x_1, x_2 \in [0, \infty)$  com  $x_1 < x_2$ , temos que  $x_1^2 < x_2^2$ , ou seja,  $f(x_1) < f(x_2)$ . Portanto,  $f$  é monótona crescente no intervalo  $[0, \infty)$ . Por outro lado, dados  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$  com  $x_1 < x_2$ , temos que  $-x_1 > -x_2 \geq 0$ . Logo,  $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$ , o que implica que  $x_1^2 > x_2^2$ , ou seja,  $f(x_1) > f(x_2)$ . Portanto,  $f$  é monótona decrescente no intervalo  $(-\infty, 0]$ .

O exemplo anterior revela que uma função pode ser monótona crescente em um intervalo e conjuntamente ser monótona decrescente em outro.

Diz-se que uma função  $f$  é *par* se  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  no domínio de  $f$  (isso implica tacitamente que  $-x$  também pertence ao domínio de  $f$ ). Por outro lado, diz-se que uma função  $g$  é *ímpar* se  $g(-x) = -g(x)$  para todo  $x$  no domínio de  $g$ . Dessas definições, pode-se concluir diretamente que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo  $y$  enquanto que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

### Exemplo 2.2.

1. A função  $f(x) = x^4 - 3$  é uma função par, pois

$$f(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x).$$

2. A função  $g(x) = x^7 - 5x^3 + x$  é uma função ímpar, pois

$$g(-x) = (-x)^7 - 5(-x)^3 + (-x) = -x^7 + 5x^3 - x = -g(x).$$

3. A função  $h(x) = 5x^2 + 3x - 7$  não é uma função par nem é uma função ímpar, pois podemos achar um valor de  $x$  no domínio de  $h$  (por exemplo,  $x = 1$ ) tal que  $h(-x) \neq h(x)$  e  $h(-x) \neq -h(x)$ .

### 3 Operações com funções

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções.

1. Define-se a função  $f + g$  pela equação  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ . O domínio de  $f + g$  é a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$ .
2. Define-se a função  $f - g$  pela equação  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ . O domínio de  $f - g$  é a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$ .
3. Define-se a função  $fg$  pela equação  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ . O domínio de  $fg$  é a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$ .
4. Define-se a função  $f/g$  pela equação  $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ . O domínio de  $f/g$  é a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$  excluindo os pontos  $x$  nos quais  $g(x) = 0$ .

**Exemplo 3.1.** Sejam as funções  $f(x) = 3x^2 + 5$  e  $g(x) = \sqrt{2x - 7}$ . Nesse caso, a função  $f/g$  está definida por

$$(f/g)(x) = \frac{3x^2 + 5}{\sqrt{2x - 7}}.$$

O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$  e o domínio de  $g$  é o intervalo  $[7/2, \infty)$ . Logo, a interseção dos domínios é  $[7/2, \infty)$ . Além disso, como  $g(7/2) = 0$ , o domínio da função  $f/g$  é o intervalo  $(7/2, \infty)$ .

### 4 Composição de funções

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  duas funções. Se a imagem de  $f$  é um subconjunto de  $C$ , pode-se definir a *função composta*  $g \circ f : A \rightarrow D$  por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Exemplo 4.1.** Consideremos as funções  $f(x) = 5x^2 + 3$  e  $g(x) = 2x - 1$ . O domínio de ambas as funções é  $\mathbb{R}$ . Logo, a imagem de qualquer uma das funções está contida no domínio da outra e, por conseguinte, as funções compostas  $g \circ f$  e  $f \circ g$  podem ser definidas. Vamos encontrar as expressões dessas funções compostas. Temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x^2 + 3) = 2(5x^2 + 3) - 1 = 10x^2 + 5.$$

A expressão de  $(g \circ f)(x)$  também pode ser obtida da seguinte maneira:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 2(5x^2 + 3) - 1 = 10x^2 + 5.$$

Por outro lado, temos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5[g(x)]^2 + 3 = 5(2x - 1)^2 + 3 = 5(4x^2 - 4x + 1) + 3 = 20x^2 - 20x + 8.$$

Assim, notamos que mesmo quando as funções compostas  $g \circ f$  e  $f \circ g$  podem ser definidas, elas em geral são diferentes funções. Em outras palavras, a operação de composição de funções não é comutativa.

**Exercício 4.2.** A energia cinética de uma partícula de massa  $m$  que se move com uma velocidade  $v$  é dada por

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Se a partícula realiza um movimento de queda livre, a sua velocidade em cada instante de tempo  $t$  é dada por

$$v = v_0 - gt,$$

em que  $v_0$  e  $g$  são constantes. Determine a expressão da energia cinética da partícula para qualquer instante de tempo  $t$ .