Funções

Max Jauregui

8 de agosto de 2022

1 Definições básicas

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma *relação* de A em B é um conjunto arbitrário de pares ordenados (x, y), em que $x \in A$ e $y \in B$. Uma *função* f de A em B é uma relação especial de A em B que tem as seguintes propriedades:

1. para cada $x \in A$ existe $y \in B$ tal que (x, y) pertence à relação;
2. se (x, y) e (x, z) pertencem à relação, então $y = z$.

Em outras palavras, cada $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$, o qual será denotado por $f(x)$ e será chamado de *valor da função* f no ponto x.

Exemplo 1.1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 5, 7\}$.

1. A relação $F = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\}$ é uma função de A em B.
2. A relação $R = \{(1, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ não é uma função de A em B pois $2 \in A$ não está relacionado com nenhum $y \in B$;
3. A relação $S = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 7)\}$ não é uma função de A em B, pois $(3, 5)$ e $(3, 7)$ pertencem à relação.

Uma função f de A em B é denotada de forma simbólica por $f : A \to B$. O conjunto A é chamado de *domínio* de f e o conjunto B de *contradomínio* de f.

Exemplo 1.2. No exemplo 1.1 foi definida uma função $F : A \to B$. Nesse caso, tem-se que $F(1) = 3$, $F(2) = 3$, $F(3) = 5$ e $F(4) = 5$.

Uma função $f : A \to B$ é chamada de uma *função real de uma variável real* quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Essa classe de funções será o nosso principal objeto de estudo neste curso.

Embora que para definir uma função seja necessário conhecer o seu domínio, na prática, comumente definem-se funções simplesmente por equações da forma

$$f(x) = \text{expressão envolvendo a variável } x\,.$$

Nesse caso, assume-se que o domínio da função f é o conjunto de todos os números $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão do lado direito faz sentido.

Exemplo 1.3.

1. A equação $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ define uma função f cujo domínio é $\mathbb{R}$, pois a expressão do lado direito faz sentido para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

2. A equação $g(x) = \dfrac{3}{x+5} - 3x^3$ define uma função g cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \{-5\}$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \neq -5$;

3. A equação $h(x) = 6\sqrt{3-2x}$ define uma função h cujo domínio é o intervalo $(-\infty, 3/2]$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \leq 3/2$.

Exercício 1.4. No exemplo anterior vimos que a função $h(x) = 6\sqrt{3-2x}$ tem como domínio o intervalo $(-\infty, 3/2]$. Determine os valores da função nos pontos $3/2, 0, -3$ e $1-t$, em que $t > 0$.

Define-se a *imagem* de uma função f como o conjunto de todos os valores $f(x)$, com x no domínio de f.

Exemplo 1.5. Vamos determinar o domínio e a imagem da função definida pela equação

$$f(x) = \sqrt{4-2x} + 5\,.$$

Como a expressão do lado direito só faz sentido se $4 - 2x \geq 0$, segue que o domínio de f é o intervalo $(-\infty, 2]$. Para determinamos a imagem de f começamos notando que, independentemente do valor de $x \in (-\infty, 2]$, $\sqrt{4-2x} \geq 0$ e, por conseguinte, $f(x) \geq 5$. Isso quer dizer que a imagem de f está contida no intervalo $[5, \infty)$. Para concluir que todo esse intervalo é a imagem de f, devemos mostrar que para qualquer $y \in [5, \infty)$ podemos achar $x \in (-\infty, 2]$ tal que $y = \sqrt{4-2x} + 5$. Resolvendo essa equação, obtemos que

$$x = \frac{4-(y-5)^2}{2} = 2 - \frac{(y-5)^2}{2}\,.$$

Segue daqui que, independentemente do valor de $y \in [5, \infty)$, $x \in (-\infty, 2]$. Portanto, a imagem de f é o intervalo $[5, \infty)$.

Uma função f pode ser representada graficamente marcando os pontos $(x, f(x))$, com x no domínio de f, no plano cartesiano. Em geral, esse processo gera uma curva, a qual é chamada de *gráfico* de f. Como cada x no domínio de f está associado a um único valor de $f(x)$, o gráfico de f é uma curva tal que qualquer reta vertical corta a curva em no máximo um ponto (veja a figura online).

Exercício 1.6. Esboce o gráfico da função definida no exemplo 1.5 e determine os interceptos com os eixos.

2 Funções monótonas, pares e ímpares

Há quatro tipos de funções monótonas:

1. Uma função f é *monótona crescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$.

2. Uma função f é *monótona não-decrescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

3. Uma função f é *monótona decrescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

4. Uma função f é dita *monótona não-crescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

O gráfico de uma função monótona crescente é uma curva que sobe quando olhada de esquerda para a direita. Por outro lado, o gráfico de uma função monótona decrescente é uma curva que desce quando olhada de esquerda para a direita.

Exemplo 2.1. Consideremos a função f definida pela equação $f(x) = x^2$. Vamos mostrar que f é monótona crescente no intervalo $[0, \infty)$ e é monótona decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$. Dados $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ com $x_1 < x_2$, temos que $x_1^2 < x_2^2$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, f é monótona crescente no intervalo $[0, \infty)$. Por outro lado, dados $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ com $x_1 < x_2$, temos que $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Logo, $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, o que implica que $x_1^2 > x_2^2$, ou seja, $f(x_1) > f(x_2)$. Portanto, f é monótona decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

O exemplo anterior revela que uma função pode ser monótona crescente em um intervalo e conjuntamente ser monótona decrescente em outro.

Diz-se que uma função f é *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x no domínio de f (isso implica tacitamente que $-x$ também pertence ao domínio de f). Por outro lado, diz-se que uma função g é *ímpar* se $g(-x) = -g(x)$ para todo x no domínio de g. Dessas definições, pode-se concluir diretamente que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y enquanto que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo 2.2.

1. A função $f(x) = x^4 - 3$ é uma função par, pois
$$f(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)\,.$$

2. A função $g(x) = x^7 - 5x^3 + x$ é uma função ímpar, pois
$$g(-x) = (-x)^7 - 5(-x)^3 + (-x) = -x^7 + 5x^3 - x = -g(x)\,.$$

3. A função $h(x) = 5x^2 + 3x - 7$ não é uma função par nem é uma função ímpar, pois podemos achar um valor de x no domínio de h (por exemplo, $x = 1$) tal que $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$.

3 Operações com funções

Sejam f e g duas funções.

1. Define-se a função $f+g$ pela equação $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. O domínio de $f+g$ é a interseção dos domínios de f e g.

2. Define-se a função $f-g$ pela equação $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$. O domínio de $f-g$ é a interseção dos domínios de f e g.

3. Define-se a função fg pela equação $(fg)(x) = f(x)g(x)$. O domínio de fg é a interseção dos domínios de f e g.

4. Define-se a função f/g pela equação $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. O domínio de f/g é a interseção dos domínios de f e g excluíndo os pontos x nos quais $g(x)=0$.

Exemplo 3.1. Sejam as funções $f(x) = 3x^2+5$ e $g(x) = \sqrt{2x-7}$. Nesse caso, a função f/g está definida por

$$(f/g)(x) = \frac{3x^2+5}{\sqrt{2x-7}}\,.$$

O domínio de f é $\mathbb{R}$ e o domínio de g é o intervalo $[7/2,\infty)$. Logo, a interseção dos domínios é $[7/2,\infty)$. Além disso, como $g(7/2)=0$, o domínio da função f/g é o intervalo $(7/2,\infty)$.

4 Composição de funções

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas funções. Se a imagem de f é um subconjunto de C, pode-se definir a *função composta* $g \circ f : A \to D$ por

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Exemplo 4.1. Consideremos as funções $f(x) = 5x^2+3$ e $g(x) = 2x-1$. O domínio de ambas as funções é $\mathbb{R}$. Logo, a imagem de qualquer uma das funções está contida no domínio da outra e, por conseguinte, as funções compostas $g\circ f$ e $f \circ g$ podem ser definidas. Vamos encontrar as expressões dessas funções compostas. Temos que

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x^2+3) = 2(5x^2+3)-1 = 10x^2+5\,.$$

A expressão de $(g\circ f)(x)$ também pode ser obtida da seguinte maneira:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x)-1 = 2(5x^2+3)-1 = 10x^2+5\,.$$

Por outro lado, temos que

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 5[g(x)]^2+3 = 5(2x-1)^2+3 = 5(4x^2-4x+1)+3 = 20x^2-20x+8\,.$$

Assim, notamos que mesmo quando as funções compostas $g\circ f$ e $f\circ g$ podem ser definidas, elas em geral são diferentes funções. Em outras palavras, a operação de composição de funções não é comutativa.

Exercício 4.2. A energia cinética de uma partícula de massa m que se move com uma velocidade v é dada por

$$E = \frac{mv^2}{2} .$$

Se a partícula realiza um movimento de queda livre, a sua velocidade em cada instante de tempo t é dada por

$$v = v_0 - gt ,$$

em que v_0 e g são constantes. Determine a expressão da energia cinética da partícula para qualquer instante de tempo t.

5 Funções elementares

5.1 Funções lineares

Uma *função linear* é definida pela equação $f(x) = ax + b$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Se $a = 0$, a função linear $f(x) = b$ é chamada de uma *função constante*. O domínio de qualquer função linear é $\mathbb{R}$. Em relação ao gráfico de uma função linear $f(x) = ax + b$, temos os seguintes casos (veja a figura online):

1. se $a > 0$, o gráfico de f é uma reta que sobe quando olhada de esquerda para a direita;

2. se $a = 0$, o gráfico de f é uma reta horizontal;

3. se $a < 0$, o gráfico de f é uma reta que desce quando olhada de esquerda para a direita.

Exercício 5.1. Esboce os gráficos das funções lineares $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = -\frac{x}{4} + 2$.

Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de uma reta, a *inclinação* da reta é definida por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Como o gráfico de uma função linear $f(x) = ax + b$ é uma reta, podemos determinar a sua inclinação. Para isso, escolhendo, por exemplo, os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$, vamos ter que a inclinação da reta é

$$m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{a + b - b}{1} = a .$$

Assim concluímos que o gráfico da função linear $f(x) = ax+b$ é uma reta com inclinação a.

Exemplo 5.2. Vamos encontrar a função linear cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(11, -4)$ e $(-4, 5)$. A inclinação da reta é

$$m = \frac{5 - (-4)}{-4 - 11} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5} .$$

Logo, a função linear deve ter a forma $f(x) = -\frac{3}{5}x + b$. Para encontrar o valor de b, usamos o fato de que $f(11) = -4$. Logo,

$$-4 = -\frac{3}{5}(11) + b$$

e, por conseguinte, $b = 13/5$. Portanto, a função linear desejada é $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$.

Exercício 5.3. Determine a função linear cujo gráfico é uma reta que interseta o eixo x no valor $x = 2$ e interseta o eixo y no valor $y = 5$.

5.2 Funções polinomiais

Uma *função polinomial* é definida pela equação

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são constantes. O domínio de qualquer função polinomial é $\mathbb{R}$. Se $a_n \neq 0$, diz-se que a função polinomial f tem *grau* n e que a_n é o seu *coeficiente líder*. Uma função polinomial de grau 2 é chamada de uma *função quadrática*. Uma função polinomial de grau 3 é chamada de uma *função cúbica*.

Exemplo 5.4. O gráfico da função polinomial $f(x) = x^n$ para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$ pode ser visto em uma figura online. A partir disso é possível concluir o seguinte:

1. A imagem de f é $\mathbb{R}$ se n é impar e é o intervalo $[0, \infty)$ se n é par.

2. A função f é par se n é par e é ímpar se n é ímpar.

3. A função f é monótona crescente em $\mathbb{R}$ se n é ímpar.

4. Se $x > 1$, tem-se que $x^n < x^{n+1}$.

5. Se $0 < x < 1$, tem-se que $x^{n+1} < x^n$.

Diz-se que um número $a \in \mathbb{R}$ é uma *raiz* de uma função polinomial f se $f(a) = 0$.

Exemplo 5.5. Vamos encontrar as raízes da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$. Para isso, devemos resolver a equação

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0\,.$$

Reescrevendo essa equação como

$$x(x^2 - 3x - 4) = 0\,,$$

obtemos que $x = 0$ ou $x^2 - 3x - 4 = 0$. Logo, o número 0 é uma raiz de f. Para determinar outras (caso existam), devemos resolver a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$. Fazendo isso, temos que

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1\,. \end{cases}$$

Portanto, as raízes de f são $-1, 0$ e 4.

Dada uma função f, diz-se que $f(x)$ *tende para L quando x tende para infinito* e escreve-se $f(x) \to L$ quando $x \to \infty$ se $f(x)$ assume valores próximos do número L desde que se considerem valores positivos de x suficientemente grandes. Analogamente pode-se definir a situação $f(x) \to L$ quando $x \to -\infty$.

Exemplo 5.6. Se $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$, temos que $f(x) \to 2$ quando $x \to \infty$ e também quando $x \to -\infty$.

Dada uma função f, diz-se que $f(x)$ *tende para infinito quando x tende para infinito* e escreve-se $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ se $f(x)$ assume valores positivos muito grandes desde que se considerem valores positivos de x suficientemente grandes. Outras situações podem ser definidas de forma análoga.

Exemplo 5.7. Se $f(x) = x^2$, temos que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e também quando $x \to -\infty$.

Para fazer um esboço do gráfico de uma função polinomial f é conveniente realizar previamente as seguintes tarefas:

1. determinar as raízes de f;
2. descobrir o comportamento de $f(x)$ quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

Exemplo 5.8. No exemplo 5.5 foram determinadas as raízes da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$. Para descobrir o comportamento de $f(x)$ quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$, escrevemos a expressão de $f(x)$ como

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right) .$$

Se $x \to \pm\infty$, as expressões $3/x$ e $4/x^2$ claramente tendem para 0. Assim, a expressão entre parênteses tende para 1. Por outro lado, $x^3 \to \infty$ quando $x \to \infty$ e $x^3 \to -\infty$ quando $x \to -\infty$. Portanto, temos que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$ (ver figura online).

Exercício 5.9. Esboce o gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ determinando previamente as suas raízes e o comportamento de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$. O gráfico de uma função quadrática qualquer é uma curva chamada de *parábola* (veja figura online).

5.3 Funções algébricas

Uma função f é dita uma função algébrica se a expressão de $f(x)$ envolve operações elementares, potências inteiras ou radiciação.

Exemplo 5.10. As seguintes expressões definem funções algébricas:

1. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + 4x^3$;

2. $g(x) = 5(3x^2 - 7)^{1/3}$;

3. $h(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{7x+1}}$.

Exercício 5.11. Determine o domínio das funções algébricas do exemplo 5.10.

Exercício 5.12. Mostre que o domínio da função algébrica

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5} + \frac{3x^2}{x+3}$$

é o conjunto $[0, 5) \cup (5, \infty)$ (o símbolo "$\cup$" denota união de conjuntos).

Exemplo 5.13. O gráfico da função algébrica $f(x) = x^{1/n}$, para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$, pode ser encontrada em uma figura online. A partir disso, pode-se concluir o seguinte:

1. A função f é monótona crescente em $[0, \infty)$ se n é par e é monótona crescente em $\mathbb{R}$ se n é impar.

2. Se $x > 1$, então $\sqrt[n+1]{x} < \sqrt[n]{x}$.

3. Se $0 < x < 1$, então $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n+1]{x}$.

6 Funções definidas por partes

Em alguns casos uma função f pode ser definida por diferentes expressões para diferentes partes do seu domínio.

Exemplo 6.1. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

O domínio de f é $\mathbb{R}$. Notamos que f é uma função linear no intervalo $(-\infty, 1)$ e é uma função quadrática no intervalo $[1, \infty)$. Logo, o gráfico de f será uma reta no intervalo $(-\infty, 1)$ e uma parábola no intervalo $[1, \infty)$. Para esboçar a parte reta, escolhemos dois valores de $x \in (-\infty, 1)$; por exemplo, $x = 0$ e $x = -1$. Para esboçar a parte parabólica encontramos que o polinômio $(x-2)^2$ tem uma única raiz $x = 2$ e que $(x-2)^2 \to \infty$ quando $x \to \infty$. Com essas informações podemos fazer um esboço do gráfico de f (veja a figura online).

Exercício 6.2. Faça um esboço do gráfico da função valor absoluto $f(x) = |x|$ (ver figura online).

7 Transformação de funções

Seja f uma função. Vamos considerar as seguintes transformações sobre a expressão de $f(x)$: $f(x)+c, f(x)-c, f(x+c), f(x-c), cf(x), f(cx), -f(x)$ e $f(-x)$, em que $c > 0$. A seguinte tabela descreve os efeitos sobre o gráfico de f quando essas transformações são aplicadas.

Transformação sobre f $(c > 0)$	Efeito sobre o gráfico de f
$f(x)+c$	O gráfico sobe uma distância c
$f(x)+c$	O gráfico desce uma distância c (veja figura online)
$f(x+c)$	O gráfico se translada para a esquerda uma distância c
$f(x-c)$	O gráfico se translada para a direita uma distância c (veja figura online)
$cf(x)$	O gráfico se estica (comprime) verticalmente se $c > 1$ $(0 < c < 1)$ (veja figura online)
$f(cx)$	O gráfico se comprime (estica) horizontalmente se $c > 1$ $(0 < c < 1)$ (veja figura online)
$-f(x)$	O gráfico se reflete em relação ao eixo x
$f(-x)$	O gráfico se reflete em relação ao eixo y (veja figura online)

Exercício 7.1. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = -|x+2| - 3$ (veja a figura online).

8 Funções trigonométricas

8.1 Radianos

Neste curso ângulos serão medidos em radianos a menos que se especifique outra unidade. Um ângulo de s radianos (podemos escrever às vezes $s\,\mathrm{rad}$) é o ângulo associado a um comprimento de arco de s unidades em uma circunferência de raio unitário (ver figura online). Sabemos que o comprimento de toda essa circunferência é 2π unidades. Como o ângulo em graus associado à circunferência completa é $360°$, temos a seguinte relação:

$$2\pi = 360°\,.$$

Usando essa relação encontramos, por exemplo, que $180° = \pi$, $90° = \pi/2$, $45° = \pi/4$ e $30° = \pi/6$. Também podemos encontrar que

$$1 = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} \approx 57°\,.$$

Exercício 8.1.

1. Escreva $210°$ em radianos.

2. Escreva $11\pi/6$ em graus.

8.2 Definição das funções trigonométricas

No plano cartesiano consideremos uma circunferência de raio unitário com centro na origem de coordenadas (ponto O). Logo, consideremos um ponto P da circunferência cujas coordenadas sejam (x, y). Vamos chamar de θ o ângulo que começa no semieixo x positivo e termina no segmento OP (ver figura online). Definem-se as seguintes funções trigonométricas:

1. Função seno: $\operatorname{sen}\theta = y$;
2. Função cosseno: $\operatorname{sen}\theta = x$;
3. Função tangente: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$;
4. Função cotangente: $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$;
5. Função secante: $\sec\theta = \dfrac{1}{x}$;
6. Função cossecante: $\csc\theta = \dfrac{1}{y}$.

Dessas equações notamos imediatamente que as funções seno e cosseno estão definidas para todo ângulo θ, ou seja, ambas tem $\mathbb{R}$ como domínio. As funções tangente e secante estão definidas se $x \neq 0$. Isso corresponde a valores de θ diferentes de $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$. Logo, o domínio das funções tangente e secante é o conjunto

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Finalmente as funções cotangente e cossecante estão definidas se $y \neq 0$, o que corresponde a valores de θ diferentes de $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Portanto, o domínio das funções cotangente e cossecante é o conjunto

$$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 8.2. A seguinte tabela contém os valores das funções seno, cosseno e tangente para alguns ângulos especiais:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	Indefinido
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	Indefinido
2π	0	1	0

Seja P um ponto com coordenadas (x, y) que pertence a uma circunferência de raio r centrada na origem de coordenadas (ponto O). Se o ângulo que sai do semieixo x positivo e chega no segmento OP é θ, usando semelhança de triângulos, podemos concluir que (veja a figura online)

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen}\theta\,.$$

Levando em conta isso, podemos chegar nas definições elementares das funções trigonométricas para os ângulos agudos de um triângulo retângulo.

Exercício 8.3. Kowalski se encontra a 2 m de distância de uma haste vertical. Usando um apontador laser colocado no chão, ele aponta no topo da haste. Se o ângulo que o apontador laser faz com o chão é de 60°, determine a altura da haste.

8.3 Identidades trigonométricas

Vamos listar algumas identidades trigonométricas que serão úteis.

1. Identidades recíprocas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

2. Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1\,, \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{e} \quad 1 + \csc^2\theta = \cot^2\theta\,.$$

3. Adição ou subtração de ângulos:

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta \operatorname{sen}\phi\,.$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,.$$

4. Ângulo duplo:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\,.$$

Exemplo 8.4. Vamos determinar as soluções da equação $\cos(2\theta) = \operatorname{sen}\theta$. Para isso, usamos previamente o fato de que $\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$. Logo, ficamos com a equação

$$1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}\theta\,.$$

Pondo $x = \operatorname{sen}^2\theta$, essa equação pode ser reescrita na forma

$$2x^2 + x - 1 = 0\,.$$

Resolvendo essa equação temos que $x = 1/2$ ou $x = -1$. No primeiro caso temos que $\operatorname{sen}\theta = 1/2$ e, por conseguinte,

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})\,.$$

No segundo caso, temos que $\operatorname{sen}\theta = -1$, o que implica que

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})\,.$$

8.4 Periodicidade das funções trigonométricas

A partir das definições das funções seno e cosseno, podemos concluir que essas funções são limitadas, pois

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$. Por outro lado, segue também das definições das funções seno e cosseno que

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$. Devido a isso, diz-se que as funções seno e cosseno são *funções periódicas* (ver figura online). Da primeira equação segue, por exemplo, que

$$\ldots = \operatorname{sen}(\theta + 4\pi) = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta - 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta - 4\pi) = \ldots$$

Como o menor número $T > 0$ tal que $\operatorname{sen}(\theta + T) = \operatorname{sen}\theta$ é $T = 2\pi$, diz-se que a função seno tem período 2π. Da mesma forma a função cosseno tem período 2π.

A identidade $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ sugere que a função tangente é também uma função periódica com período π; porém, temos que

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\pi + \cos\theta\operatorname{sen}\pi}{\cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta\,.$$

Portanto, a função tangente tem período π. O mesmo acontece com a função cotangente (ver figura online). Pode-se notar dos gráficos das funções tangente e cotangente que essas funções são ilimitadas, ou seja, podem assumir valores positivos ou negativos arbitrariamente grandes.

As identidades $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ e $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ indicam que as funções secante e cossecante são funções periódicas com período 2π (ver figura online). Pode-se notar dos gráficos dessas funções que elas assumem valores no conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Exemplo 8.5. Consideremos uma função da forma

$$f(x) = A\operatorname{sen}(kx + \phi)\,,$$

em que $A > 0$, $k \neq 0$ e $\phi \in \mathbb{R}$ são constantes. Como $-1 \leq \operatorname{sen}(kx + \phi) \leq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, segue que $-A \leq f(x) \leq A$, ou seja, a imagem da função f é o intervalo $[-A, A]$. Além disso, A função f é periódica, pois

$$f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = A\operatorname{sen}\left(k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) + \phi\right) = A\operatorname{sen}(kx + \phi + 2\pi) = A\operatorname{sen}(kx + \phi) = f(x)\,.$$

Segue daqui também que o período de f é $2\pi/k$.

Exercício 8.6. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 3\,\text{sen}(2x - \frac{\pi}{4})$

9 Funções inversas

Seja $f : A \to B$ uma função cuja imagem é o conjunto B. Diz-se que f tem uma *função inversa* $f^{-1} : B \to A$, cuja imagem é o conjunto A, se

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A \qquad \text{e} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B\,.$$

Vale ressaltar que $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.

Exemplo 9.1. A função $f(x) = x^3 + 4$ tem como domínio e como imagem o conjunto $\mathbb{R}$. Vamos verificar que a inversa de f é a função $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4}$. Para isso, notamos que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3 + 4) = \sqrt[3]{x^3 + 4 - 4} = \sqrt[3]{x^3} = x\,,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ é o domínio de f). Por outro lado,

$$f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt[3]{y-4}) = (\sqrt[3]{y-4})^3 + 4 = y - 4 + 4 = y\,,$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ também é a imagem de f).

Exemplo 9.2. Consideremos a funçao $g(x) = x^2$. O domínio de g é $\mathbb{R}$ e a imagem de g é o intervalo $[0, \infty)$. Vamos mostrar que a função $h(x) = \sqrt{x}$ não é a inversa de f. Dado $y \in [0, \infty)$, temos que

$$g(h(y)) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y\,.$$

Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$h(g(x)) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|\,.$$

Assim, vemos que em geral não temos $h(g(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, h não é a inversa de g.

Diz-se que uma função f é *injetiva* se dados x_1 e x_2 no domínio de f com $x_1 \neq x_2$ temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. O gráfico de uma função injetiva é uma curva que pode ser intersetada por qualquer reta horizontal em no máximo um ponto.

Exercício 9.3. Esboce o gráfico das funções $f(x) = x^3 + 4$ e $g(x) = x^2$ e verifique que f é injetiva mas g não.

Teorema 9.4. *Seja $f : A \to B$ uma função cuja imagem é o conjunto B. Tem-se que f é injetiva se, e somente se, f tem uma função inversa.*

Exemplo 9.5. A função $g(x) = x^2$ não tem inversa pois não é injetiva. Porém, se restringimos o seu domínio ao intervalo $[0, \infty)$, ela se torna injetiva e, por conseguinte, terá uma inversa que será a função $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Por outro lado, se restringimos o domínio de g ao intervalo $(-\infty, 0]$, a função g também teria inversa, mas nesse caso ela seria a função $g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

Exemplo 9.6. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}\,.$$

O domínio de f é $\mathbb{R} - \{2\}$. Para determinar a imagem de f, podemos primeiraente reescrever a expressão de $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{3(x-2+2)}{x-2} = \frac{3(x-2)+6}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2}\,.$$

Podemos verificar que a expressão $\frac{6}{x-2}$ pode assumir valores positivos ou negativos muito grandes; porém, ela nunca será igual a 0. Logo, com isso, podemos concluir que a imagem de f será o conjunto $\mathbb{R} - \{3\}$. A expressão

$$f(x) = 3 + \frac{6}{x-2}$$

também nos permite concluir que f é injetiva, pois se $x_1 \neq x_2$, então $\frac{6}{x_1-2} \neq \frac{6}{x_2-2}$ e, por conseguinte, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Segue daqui que f tem uma inversa $f^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\}$. Para determinar a expressão de f^{-1} resolvemos a equação $y = f(x)$ para a variável x, com isso chegaremos na equação $f^{-1}(y) = x$. No caso concreto deste exemplo, temos que

$$y = 3 + \frac{6}{x-2}\,,$$

de onde podemos obter que

$$x = 2 + \frac{6}{y-3}\,.$$

Portanto,

$$f^{-1}(y) = 2 + \frac{6}{y-3}\,.$$

Nessa equação, a variável y pode ser substituída por qualquer outra variável; por exemplo, x. Nesse caso, temos que

$$f^{-1}(x) = 2 + \frac{6}{x-3}\,.$$

O gráfico da inversa de uma função f pode ser obtido refletindo o gráfico de f em relação à reta diagonal $y = x$ (ver figura online).

10 Funções trigonométricas inversas

Como as funções trigonométricas são funções periódicas, elas não são injetivas e, por conseguinte, não têm inversa se consideramos os seus domínios completos. No entanto, se restringimos convenientemente os domínios das funções trigonométricas, podemos definir as suas funções inversas.

A função seno é injetiva se restringimos o seu domínio ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Logo, a inversa da função seno será a função $\operatorname{sen}^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ definida por

$$\operatorname{sen}^{-1}(x) = \theta \quad \text{se, e somente se,} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = x\,.$$

A função sen^{-1} é as vezes chamada de *função arco seno* e é denotada por arcsen.

A função cosseno é injetiva se restringimos o seu domínio ao intervalo $[0, \pi]$. Logo, a inversa da função cosseno será a função $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por

$$\cos^{-1}(x) = \theta \quad \text{se, e somente se,} \quad \theta \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \cos\theta = x\,.$$

A função $\cos^{-1}$ é as vezes chamada de *função arco cosseno* e é denotada por arccos.

A função tangente é injetiva se restringimos o seu domínio ao intervalo $(-\pi/, \pi/2)$. Logo, a inversa da função tangente será a função $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ definida por

$$\tan^{-1}(x) = \theta \quad \text{se, e somente se,} \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad \tan\theta = x\,.$$

A função $\tan^{-1}$ é as vezes chamada de *função arco tangente* e é denotada por arctan.

De forma análoga podem ser definidas as funções $\cot^{-1}$, $\sec^{-1}$ e $\csc^{-1}$. Porém, essas funções não são muito utilizadas na prática quando comparadas com as funções sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$. Os gráficos das funções trigonométricas inversas podem ser vistas em uma figura online.

Exercício 10.1. Avalie as seguintes expressões:

1. $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$
2. $\cos^{-1}(-1)$
3. $\tan^{-1}(1)$

Exercício 10.2. Mostre que

$$\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Por outro lado, mostre que

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}\,.$$

De forma geral, dado $x \in [-1, 1]$, sempre se tem que $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = x$. Porém, dado $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\theta) = \theta$ se, e somente se, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

11 Funções exponenciais