Funções

Max Jauregui

18 de julho de 2022

1 Definições básicas

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma *relação* de A em B é um conjunto arbitrário de pares ordenados (x, y), em que $x \in A$ e $y \in B$. Uma *função* f de A em B é uma relação de A em B que tem as seguintes propriedades:

1. para cada $x \in A$ existe $y \in B$ tal que (x, y) pertence à relação;
2. se (x, y) e (x, z) pertencem à relação, então $y = z$.

Em outras palavras, cada $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$, o qual será denotado por $f(x)$ e será chamado de *valor da função* f no ponto x.

Exemplo 1.1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 5, 7\}$.

1. A relação $F = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\}$ é uma função de A em B.
2. A relação $R = \{(1, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ não é uma função de A em B pois $2 \in A$ não está relacionado com nenhum $y \in B$;
3. A relação $S = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 7)\}$ não é uma função de A em B, pois $(3, 5)$ e $(3, 7)$ pertencem à relação.

Uma função f de A em B é denotada de forma simbólica por $f : A \to B$. O conjunto A é chamado de *domínio* de f e o conjunto B de *contradomínio* de f.

Exemplo 1.2. No exemplo 1.1 foi definida uma função $F : A \to B$. Nesse caso, tem-se que $F(1) = 3$, $F(2) = 3$, $F(3) = 5$ e $F(4) = 5$.

Uma função $f : A \to B$ é chamada de uma *função real de uma variável real* quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Essa classe de funções será o nosso principal objeto de estudo neste curso.

Embora que para definir uma função seja necessário conhecer o seu domínio, na prática, comumente definem-se funções simplesmente por equações da forma

$$f(x) = \text{expressão envolvendo a variável } x\,.$$

Nesse caso, assume-se que o domínio da função f é o conjunto de todos os números $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão do lado direito faz sentido.

Exemplo 1.3.

1. A equação $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ define uma função f cujo domínio é $\mathbb{R}$, pois a expressão do lado direito faz sentido para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

2. A equação $g(x) = \dfrac{3}{x+5} - 3x^3$ define uma função g cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \{-5\}$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \neq -5$;

3. A equação $h(x) = 6\sqrt{3 - 2x}$ define uma função h cujo domínio é o intervalo $(-\infty, 3/2]$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \leq 3/2$.

Define-se a *imagem* de uma função f como o conjunto de todos os valores $f(x)$, com x no domínio de f.

Exemplo 1.4. Vamos determinar o domínio e a imagem da função definida pela equação

$$f(x) = \sqrt{4 - 2x} + 5\,.$$

Como a expressão do lado direito só faz sentido se $4 - 2x \geq 0$, segue que o domínio de f é o intervalo $(-\infty, 2]$. Para determinamos a imagem de f, vamos determinar o conjunto dos $y \in \mathbb{R}$ para os quais existe $x \in (-\infty, 2]$ tal que $y = \sqrt{4 - 2x} + 5$. No processo de resolver essa equação para x, encontramos que

$$y - 5 = \sqrt{4 - 2x}\,.$$

Daqui concluímos que $y - 5 \geq 0$, ou seja, $y \geq 5$. Terminando de resolver a equação, obtemos que

$$x = \frac{4 - (y-5)^2}{2} = 2 - \frac{(y-5)^2}{2}\,.$$

Segue daqui que, independentemente do valor de y, $x \in (-\infty, 2]$. Levando em conta todas as condições sobre y, concluímos que a imagem de f é o intervalo $[5, \infty)$.

Uma função f pode ser representada graficamente marcando os pontos $(x, f(x))$, com x no domínio de f, no plano cartesiano. Em geral, essa representação gera uma curva, a qual é chamada de *gráfico* de f. Como cada x no domínio de f está associado a um único valor de $f(x)$, o gráfico de f é uma curva tal que qualquer reta vertical corta a curva em no máximo um ponto.

2 Operações com funções