Limites

Max Jauregui

19 de novembro de 2022

Conteúdo

1 Limite de uma sequência **1**

2 Operações com limites **3**

3 Limites de funções **6**

1 Limite de uma sequência

Um conjunto X é chamado de um **espaço métrico** se existe uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$, chamada de **distância**, que tem as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para quaisquer $x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in X$.

Usando essas três propriedades temos que, para quaisquer $x, y \in X$,

$$0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)\,.$$

Portanto, $d(x, y) \geqslant 0$ para quaisquer $x, y \in X$.

Exemplo 1. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço métrico, no qual a distância é definida por $d(x, y) = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

De aqui em diante vamos considerar que $\mathbb{Z}^+$ é o conjunto dos números inteiros positivos e que X é um espaço métrico com distância d, a menos que se especifique outra coisa. Em uma primeira leitura, é conveniente interpretar o espaço métrico X como o conjunto $\mathbb{R}$ ou um subconjunto dele.

Uma **sequência de pontos** de X é uma função $x : \mathbb{Z}^+ \to X$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $x(n)$ é chamado de **termo** n-ésimo da sequência e é escrito comumente como x_n. Além disso, a própria sequência x é denotada usualmente por $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Exemplo 2. Se $x_n = 3n^2 - 2$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, os primeiros 5 termos da sequência $(x_n)_{n\geqslant 1}$ são $1, 10, 25, 46$ e 73. A sequência $(x_n)_{n\geqslant 1}$ também pode ser escrita explicitamente como $(3n^2 - 2)_{n\geqslant 1}$.

Diz-se que uma sequência e pontos $(x_n)_{n\geqslant 1}$ é **limitada** se existem $p \in X$ e $M > 0$ tais que $d(x_n, p) < M$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Exemplo 3. A sequência $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ é limitada pois $d(\frac{1}{n}, 0) = |\frac{1}{n}| < 5$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Por outro lado, a sequência $(n)_{n\geqslant 1}$ não é limitada, pois para qualquer $M > 0$ existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n > M$ e, por conseguinte, $d(n, 0) > M$.

Diz-se que um ponto $a \in X$ é o **limite** de uma sequência se pontos $(x_n)_{n\geqslant 1}$ se, para todo $\epsilon > 0$, pode-se encontrar $N > 0$ tal que $n > N$ implica que $d(x_n, a) < \epsilon$. Nesse caso, escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ou, de forma simplificada, $x_n \to a$ (essa expressão se lê "x_n tende para a").

Se uma sequência $(x_n)_{n\geqslant 1}$ possui um limite, diz-se que ela é **convergente**; caso contrário, diz-se que ela é **divergente**.

Exemplo 4. Vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Dado qualquer $\epsilon > 0$, sabemos que existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{\epsilon} < N$. Logo, para todo $n > N$, temos que $\frac{1}{\epsilon} < n$ e, por conseguinte, $\frac{1}{n} < \epsilon$. Portanto, $n > N$ implica que $d(\frac{1}{n}, 0) < \epsilon$, ou seja, $\frac{1}{n} \to 0$.

Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de pontos. Se para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, define-se $n_k \in \mathbb{Z}^+$ de tal forma que $n_k < n_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, então a sequência $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ é chamada de uma **subsequência** de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Teorema 5. *Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de pontos. Se $x_n \to a$, toda subsequência de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ possui o limite a.*

Demonstração. Se $x_n \to a$, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica que $d(x_n, a) < \epsilon$. Se $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\geqslant 1}$, então existe $K \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_K > N$. Logo, $k > K$ implica que $n_k > N$ e, por conseguinte, $d(x_{n_k}, a) < \epsilon$. Portanto, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. $\square$

Exemplo 6. Exemplos de subsequências de $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ são os seguintes:

1. $(\frac{1}{2n})_{n\geqslant 1}$
2. $(\frac{1}{2n+1})_{n\geqslant 1}$
3. $(\frac{1}{n^2})_{n\geqslant 1}$

Pelo teorema anterior, todas essas subsequências possuem o limite 0.

Teorema 7. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de pontos que possui o limite a. Logo, existe $N > 0$, que podemos considerar inteiro, tal que $n > N$ implica que $d(x_n, a) < 1$. Definindo

$$M = \max\{1, 1 + d(x_1, a), 1 + d(x_2, a), \dots, 1 + d(x_N, a)\},$$

temos que $d(x_n, a) < M$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. □

Exemplo 8. A sequência $(2n-1)_{n\geqslant 1}$ é divergente, pois não é limitada. Por outro lado, se $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, a sequência $(x_n)_{n\geqslant 1}$ é limitada; porém, ela é divergente, pois as subsequências $(x_{2n})_{n\geqslant 1}$ e $(x_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ possuem respectivamente os limites 1 e -1.

2 Operações com limites

Teorema 9. *Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de números reais. Se $x_n \to a$ e $a < c$, então existe $N > 0$ tal que $x_n < c$ para todo $n > N$.*

Demonstração. Se $x_n \to a$ e $a < c$, então existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica que $d(x_n, a) < c - a$. Logo, $a - (c - a) < x_n < a + (c - a)$ para todo $n > N$. Portanto, em particular, $x_n < c$ para todo $n > N$. □

Corolário 10. *Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de números reais. Se $x_n \to a$ e $a > c$, então existe $N > 0$ tal que $x_n > c$ para todo $n > N$.*

Corolário 11. *Sejam $(x_n)_{n\geqslant 1}$ e $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sequências de números reais. Se $x_n \to a$, $y_n \to b$ e $a < b$, então existe $N > 0$ tal que $x_n < y_n$ para todo $n > N$.*

Corolário 12. *Sejam $(x_n)_{n\geqslant 1}$ e $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sequências de números reais. Se $x_n \to a$, $y_n \to b$ e $x_n \leqslant y_n$ para todo $n > N$, então $a \leqslant b$.*

Teorema 13 (Teorema do sanduíche)**.** *Sejam $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ e $(z_n)_{n\geqslant 1}$ sequências de números reais. Se $x_n \to a$, $z_n \to a$ e $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ para todo $n > N$, então $y_n \to a$.*

Demonstração. Se $x_n \to a$ e $z_n \to a$, então existe $N_1 > 0$ tal que $n > N_1$ implica que $d(x_n, a) < \epsilon$ e $d(z_n, a) < \epsilon$. Logo, em particular, temos que $a - \epsilon < x_n$ e $z_n < a + \epsilon$ para todo $n > N_1$. Se $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ para todo $n > N$, então pondo $N_2 = \max\{N, N_1\}$, temos que

$$a - \epsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \epsilon$$

para todo $n > N_2$. Portanto, $n > N_2$ implica que $d(y_n, a) < \epsilon$, ou seja, $y_n \to a$. □

Exemplo 14. Sabemos que $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Logo,

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $\frac{1}{n} \to 0$, segue do teorema do sanduíche que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0\,.$$

Lema 15. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.*

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos que

$$|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|\,.$$

Logo, $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Por outro lado, temos que

$$|y| = |x + (y - x)| \leqslant |x| + |y - x|$$

e, por conseguinte, $|y| - |x| \leqslant |x - y|$. Como $||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\}$, temos que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$. □

Lema 16. *Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de números reais. Se $x_n \to 0$ e $(y_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequência limitada de números reais, então $x_n y_n \to 0$.*

Demonstração. Se $(y_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequência limitada, existe $M > 0$ tal que $|y_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se $x_n \to 0$, então, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica que $|x_n| < \frac{\epsilon}{M}$. Logo, para qualquer $n > N$, temos que

$$|x_n||y_n| \leqslant \frac{\epsilon}{M}|y_n| < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon\,.$$

Portanto, $n > N$ implica que $d(x_n y_n, 0) < \epsilon$, ou seja, $x_n y_n \to 0$. □

Teorema 17 (Operações com limites)**.** *Sejam $(x_n)_{n\geqslant 1}$ e $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sequências de números reais. Se $x_n \to a$ e $y_n \to b$, tem-se o seguinte:*

1. $|x_n| \to |a|$;
2. $(x_n + y_n) \to (a + b)$;
3. $x_n y_n \to ab$;
4. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$, *desde que se tenha* $b \neq 0$.

Demonstração.

1. Se $x_n \to a$, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica que $|x_n - a| < \epsilon$. Logo, para qualquer $n > N$, temos que $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \epsilon$ em virtude do lema 15. Portanto, $|x_n| \to |a|$.

2. Se $x_n \to a$ e $y_n \to b$, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $n > N$ implica que $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|y_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, para qualquer $n > N$, tem-se que
$$|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n-b)| \leqslant |x_n-a|+|y_n-b| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$
Portanto, $(x_n + y_n) \to (a + b)$.

3. Primeiramente notamos que
$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b\,.$$
Usando isso, vamos provar que, se $x_n \to a$ e $y_n \to b$, então $(x_n y_n - ab) \to 0$ e, por conseguinte, $x_n y_n \to ab$. Para isso, notamos que $(y_n - b) \to 0$, $(x_n - a) \to 0$ e, como $x_n \to a$, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequência limitada. Logo, pelo lema 16, temos que $x_n(y_n - b) \to 0$ e $(x_n - a)b \to 0$. Portanto, pelo item 2, segue que $[x_n(y_n - b) + (x_n - a)b] \to 0$, ou seja, $(x_n y_n - ab) \to 0$.

4. Primeiramente notamos que
$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - y_n}{y_n b}\,.$$
Usando isso, vamos provar que, se $y_n \to b$ e $b \neq 0$, então $(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}) \to 0$ e, por conseguinte, $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$. Se $y_n \to b$, então, pelo item 1, $|y_n| \to |b|$. Se $b \neq 0$, então $|b| > \frac{|b|}{2}$. Logo, pelo corolário 10, existe $N > 0$ tal que

$n > N$ implica que $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ e, por conseguinte, $|\frac{1}{y_n b}| < \frac{2}{|b|^2}$. Segue daqui que a sequência $(\frac{1}{y_n b})_{n \geqslant 1}$ é limitada. Logo, pelo lema 16, temos que

$$\frac{b - y_n}{y_n b} \to 0\,,$$

pois $(b - y_n) \to 0$. Portanto, $(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}) \to 0$, ou seja, $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$. □

Exemplo 18. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ seja

$$x_n = \frac{2n^2 - 5}{4n^2 + 3n - 6}\,.$$

Vamos mostrar que a sequência $(x_n)_{n \geqslant 1}$ é convergente. Para isso, escrevemos

$$\frac{2n^2 - 5}{4n^2 + 3n - 6} = \frac{n^2(2 - \frac{5}{n^2})}{n^2(4 + \frac{3}{n} - 6)} = \frac{2 - \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{3}{n} - \frac{6}{n^2}}\,.$$

Como $\frac{1}{n} \to 0$, segue que $\frac{5}{n^2} \to 0$, $\frac{3}{n} \to 0$ e $\frac{6}{n^2} \to 0$. Logo, $(2 - \frac{5}{n^2}) \to 2$ e $(4 + \frac{3}{n} - \frac{6}{n^2}) \to 4$. Portanto, $x_n \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3 Limites de funções

Seja X um espaço métrico. Diz-se que um ponto $a \in X$ é um **ponto de acumulação** de um conjunto $A \subset X$ se existe uma sequência $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de pontos de A, todos diferentes de a, que tem a como limite.

Exemplo 19. Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x = n \text{ ou } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$. O ponto $0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de A, pois para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ tem-se que $\frac{1}{n} \in A$ e $\frac{1}{n} \to 0$.

Sejam X e Y espaços métricos, $A \subset X$, $f : A \to Y$ uma função e $a \in X$ um ponto de acumulação de A. Diz-se que um ponto $L \in Y$ é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para a se para qualquer sequência $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de pontos de $A - \{a\}$ tal que $x_n \to a$, tem-se que $f(x_n) \to L$. Nesse caso, escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L\,.$$

Exemplo 20. Vamos mostrar que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4\,.$$

Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência qualquer de pontos de $\mathbb{R}-\{2\}$ tal que $x_n \to 2$. Pondo $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, temos que

$$f(x_n)=\frac{x_n^2-4}{x_n-2}=\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n-2}=x_n+2\,.$$

Logo, como $x_n \to 2$, $f(x_n)\to 4$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

Exemplo 21. Vamos mostrar que o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

não existe. Para isso, definamos $x_n=\frac{1}{n}$ e $y_n=-\frac{1}{n}$ para cada $n\in\mathbb{Z}^+$. Temos que $x_n, y_n\in\mathbb{R}-\{0\}$ para todo $n\in\mathbb{Z}^+$, $x_n\to 0$ e $y_n\to 0$. No entanto, se $f(x)=\frac{|x|}{x}$, temos que

$$f(x_n)=\frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n}=1$$

e

$$f(y_n)=\frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}}=\frac{-n}{n}=-1\,.$$

Logo, $f(x_n)\to 1$ e $f(y_n)\to -1$. Portanto, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exemplo 22 (Limite de uma constante)**.** Sejam X um espaço métrico, $a\in X$ um ponto de acumulação de X e $f: X\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=c$. Vamos provar que

$$\lim_{x\to a} c = c\,.$$

Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência qualquer de pontos de $X-\{a\}$ tal que $x_n\to a$. Logo, $f(x_n)=c$ e, por conseguinte, $f(x_n)\to c$. Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.

Exemplo 23 (Limite de x)**.** Sejam $a\in\mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=x$. Vamos provar que

$$\lim_{x\to a} x = a\,.$$

Seja $(x_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência qualquer de números reais diferentes de a tal que $x_n\to a$. Logo, $f(x_n)=x_n$ e, por conseguinte, $f(x_n)\to a$. Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$.

O seguinte teorema é uma consequência direta do teorema 17:

Teorema 24 (Operações com limites)**.** *Sejam X um espaço métrico, $A \subset X$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções reais e $a \in X$ um ponto de acumulação de A. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, tem-se o seguinte:*

1. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$;
2. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$;
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$;
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *desde que se tenha $M \neq 0$.*

Exemplo 25. Dado $a \in \mathbb{R}$, sabemos que $\lim_{x\to a} x = a$. Logo,

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \cdot x = a \cdot a = a^2$$
$$\lim_{x\to a} x^3 = \lim_{x\to a} x^2 \cdot x = a^2 \cdot a = a^3 \,.$$

Continuando dessa forma podemos concluir que, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, vamos ter $\lim_{x\to a} x^n = a^n$. Além disso, se $c_n \in \mathbb{R}$ é uma constante, então $\lim_{x\to a} c_n x^n = c_n a^n$. Levando em conta isso, podemos concluir que, se $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial, então

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)\,.$$

Finalmente, se $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma outra função polinomial tal que $q(a) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}\,.$$

Exemplo 26. Vamos avaliar o limite

$$E = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{2x^2 + x - 3}\,.$$

Notamos que $\lim_{x\to 1}(2x^2 + x - 3) = 0$. Logo, E não será o quociente do limite do numerador e o limite do denominador. Por outro lado, notamos que $\lim_{x\to 1}(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) = 0$. Devido a isso, diz-se que E tem a **forma indeterminada** $0/0$.