Números reais

Max Jauregui

17 de julho de 2022

1 Introdução

Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto dos números racionais: $\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ (leia-se ":" como "tal que"; leia-se "$\in$" como "pertence").

Notamos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (leia-se "$\subset$" como "está contido").

Entre dois números racionais distintos existem uma infinidade de números racionais. Com isso podemos nos perguntar: por que é necessário considerar mais números além dos racionais? Uma resposta elementar a essa pergunta provém da geometria. Se consideramos um triângulo retângulo cujos catetos medem 1, o comprimento da sua hipotenusa h, deve satisfazer a relação $h^2 = 1^2 + 1^2$ (teorema de Pitágoras). Assim, h deve ser um número tal que $h^2 = 2$. Porém, pode-se provar (por contradição) que não existe nenhum número racional cujo quadrado é igual a 2 (veja [1]). Portanto, mesmo para lidar com problemas geométricos simples, devemos considerar mais números além dos racionais.

O conjunto dos *números reais*, denotado por $\mathbb{R}$, contém todos os números racionais e todos os *números irracionais* como $\sqrt{2}, \pi, \ldots$.

Há quatro operações elementares definidas em $\mathbb{R}$: adição, multiplicação e as suas respectivas inversas: subtração e divisão. Essas operações têm várias propriedades, as quais assumiremos que são conhecidas. Por exemplo, se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sabemos que $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad (\text{se } b \neq 0, d \neq 0)$$

e que

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{bd\frac{a}{b}}{bd\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \qquad (\text{se } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0)\,.$$

2 Desigualdades

O conjunto dos números reais é um conjunto ordenado. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que somente uma das seguintes afirmações é verdadeira: $a < b$, $a = b$ ou $b < a$ (leia-se "$<$" como "menor do que"). Além disso, a ordem $<$ tem as seguintes propriedades:

1. se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
2. se $a < b$, então $a + c < b + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$;
3. se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$;
4. se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$;
5. se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
6. se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $0 < ac < bd$;
7. se $0 < a < b$, então $0 < 1/b < 1/a$.

Exemplo 2.1. Vale a pena ressaltar que uma desigualdade pode ser somada com outra; porém, em geral, uma desigualdade não pode ser subtraída de outra. Por exemplo, sabemos que $3 < 5$ e $-6 < 2$. Somando essas desigualdades obtemos $-3 < 7$, o qual é verdadeiro; porém, se subtraímos a segunda desigualdade da primeira obteríamos $9 < 3$, que é claramente falso.

Exemplo 2.2. Também vale a pena ressaltar que duas desigualdades podem ser multiplicadas se envolvem números positivos. Se alguma delas envolve números negativos, a multiplicação pode resultar em uma desigualdade falsa. Por exemplo, sabemos que $-3 < -1$ e $1 < 4$; porém, se multiplicamos essas desigualdades obteríamos $-3 < -4$, o que é falso.

3 Valor absoluto

Define-se o *valor absoluto* de um número $a \in \mathbb{R}$ qualquer por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Exemplo 3.1. Temos $|4| = 4$ e $|-5| = -(-5) = 5$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer, pode-se verificar o seguinte:

1. $|a| \geq 0$;
2. $a \leq |a|$ e $-a \leq |a|$, ou seja, $-|a| \leq a \leq |a|$;

3. $|ab| = |a||b|$;

4. $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Exemplo 3.2.

1. Temos que $|(-3)(5)| = |-15| = 15$. Por outro lado $|-3||-5| = (3)(5) = 15$. Portanto, $|(-3)(5)| = |-3||5|$.

2. Temos que $|4+(-7)| = |-3| = 3$. Por outro lado, $|4| + |-7| = 4 + 7 = 11$. Portanto, $|4+(-7)| \leq |4| + |-7|$.

4 Intervalos

Intervalos são subconjuntos de números reais que aparecem frequentemente em cálculo. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, definem-se os seguintes *intervalos finitos*:

1. *intervalo aberto*: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

2. *intervalo fechado*: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (leia-se "$\leq$" como "menor do que ou igual a");

3. *intervalos mistos*: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ e $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Também definem-se os seguintes *intervalos infinitos*:

1. $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;

2. $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;

3. $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$;

4. $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;

5. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.

Deve-se ressaltar que o símbolo "∞", o qual se lê "infinito", não representa um número real mas simplesmente indica que o intervalo não é limitado superiormente ou inferiormente.

Exemplo 4.1. O intervalo $(1,2]$ contém os números $2, 3/2, \sqrt{2}$ entre infinitos outros. Por outro lado, os números $1, -3, 5, \pi$, entre outros, não pertencem ao intervalo $(-1,2]$.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser representado graficamente por uma reta. Nessa representação, cada ponto da reta corresponde a um único número real e vice-versa. Além disso, intervalos finitos correspondem a segmentos de reta nessa representação gráfica. Como esses segmentos de reta têm comprimento, podemos dizer que o *comprimento* de um intervalo $[a,b]$ (ou (a,b), $(a,b]$ ou $[a,b)$) é $b-a$. Nessa direção, a "distância" entre os números a e b será $b-a$, o qual também pode ser escrito como $|a-b|$.

Exemplo 4.2. A distância entre os números -3 e 7 é $|(-3)-7| = |-10| = 10$.

Exemplo 4.3. A desigualdade $|x-5| < 1$ quer dizer de forma gráfica que a distância entre x e 5 é menor do que 1, ou seja, $x \in (4,6)$. De forma análoga, a desigualdade $|3+x| \leq 2$ quer dizer de forma gráfica que a distância entre x e -3 é menor do que ou igual a 2, ou seja, $x \in [-5,-1]$.

5 Potências racionais e raízes

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, define-se

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatores}}\,.$$

Se $a \neq 0$, define-se também

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,.$$

Diretamente da definição de a^n, podemos notar que $a^m a^n = a^{m+n}$ para quaisquer $m,n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma podemos verificar que, se $a \neq 0$, $a^m a^{-n} = a^{m-n}$ para quaisquer $m,n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$. Como $a^n a^{-n} = 1$, definimos por conveniência que $a^0 = 1$ se $a \neq 0$ (0^0 não está definido). Em resumo, dados quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatores}} & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } a \neq 0, n = 0 \\ \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{|n| \text{ fatores}}} & \text{se } a \neq 0, n < 0. \end{cases}$$

Sejam $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer. Diz-se que um número $\alpha \geq 0$ é a raiz n-ésima de α se $\alpha^n = a$. Nesse caso, escreve-se $\alpha = \sqrt[n]{a}$ ou $\alpha = a^{1/n}$.

Exemplo 5.1. Sabemos que $2^4 = 16$. Logo, $16^{1/4} = 2$. Aqui vale a pena ressaltarmos que, como $(-2)^4 = 16$,

$$[(-2)^4]^{1/4} = 2 \quad \text{ou} \quad \sqrt[4]{(-2)^4} = 2\,.$$

De forma geral, se $n \in \mathbb{N}$ é par, então $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dados $a > 0$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, sejam $\alpha = \sqrt[n]{a}$ e $\beta = \sqrt[n]{b}$. Logo, $\alpha^n \beta^n = ab$. Como $(\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n$, segue que $(\alpha\beta)^n = ab$ e, por conseguinte, $\alpha\beta = \sqrt[n]{ab}$. Assim, temos provado que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

Exemplo 5.2. Temos que $\sqrt{196} = \sqrt{7^2 2^2} = \sqrt{7^2}\sqrt{2^2} = (7)(2) = 14$.

Sejam $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$ quaisquer. Logo, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $r = m/n$. Com isso, define-se

$$a^r = (a^{1/n})^m \quad \text{ou} \quad a^r = (\sqrt[n]{a})^m\,.$$

As seguintes propriedades podem ser provadas a partir dessa definição:

1. se $a > 0$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, então $a^r a^s = a^{r+s}$;
2. se $a > 0$, $b > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, então $(ab)^r = a^r b^r$;
3. se $a > 0$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, então $(a^r)^s = a^{rs}$;
4. se $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, então $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Exemplo 5.3. Temos que

$$\frac{[\sqrt[3]{2} \cdot 8^{1/4}]^2}{4} = \frac{[2^{1/3}(2^3)^{1/4}]^2}{2^2} = [2^{1/3}2^{3/4}]^2 2^{-2} = [2^{13/12}]^2 2^{-2} = 2^{13/6} 2^{-2} = 2^{1/6}.$$

Referências

[1] Wikipédia, *Raiz quadrada de dois*, https://pt.wikipedia.org/wiki/Raiz_quadrada_de_dois