Funções reais de uma variável real

Max Jauregui

20 de novembro de 2022

Conteúdo

1 Definições básicas

Uma função $f : A \to B$ é dita uma **função real** se $B \subset \mathbb{R}$. Se além disso $A \subset \mathbb{R}$, diz-se que f é uma **função real de uma variável real**. De aqui em diante qualquer função será uma função real de uma variável real a menos que se indique explícitamente outra coisa. Na prática, é comum definir uma função f simplesmente por uma equação da forma

$$f(x) = \text{expressão envolvendo a variável } x\,.$$

Nesse caso, assume-se que o domínio de f é o conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão do lado direito retorna um número real. O contradomínio de f pode ser em princípio qualquer conjunto que contenha a imagem de f; por exemplo, o próprio conjunto $\mathbb{R}$.

Exemplo 1. A equação
$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$
define uma função f cujo domínio é o conjunto A formado por todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x - 2 \neq 0$. Assim, $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ pode ser representada graficamente localizando os pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in A$, no plano cartesiano. Tipicamente, esse processo gera uma curva, a qual é chamada de **gráfico** de f. Como para cada $x \in A$, existe um único par ordenado $(x, f(x))$, o gráfico de f pode ser intersetado por qualquer reta vertical em no máximo um ponto.

2 Funções lineares

Diz-se que uma função f é uma **função linear** se existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$. O domínio de qualquer função linear é $\mathbb{R}$. Se $a \neq 0$, a imagem da função linear $f(x) = ax + b$ é $\mathbb{R}$; caso contrário, a imagem de f é $\{b\}$. Nesse último caso, diz-se que f é uma **função constante**.

Exemplo 2. A figura 1 mostra os gráficos das funções lineares $f(x) = 2x+1$, $g(x) = -x + 2$ e $h(x) = 3$. Notamos que em todos os casos, o gráfico é uma reta.

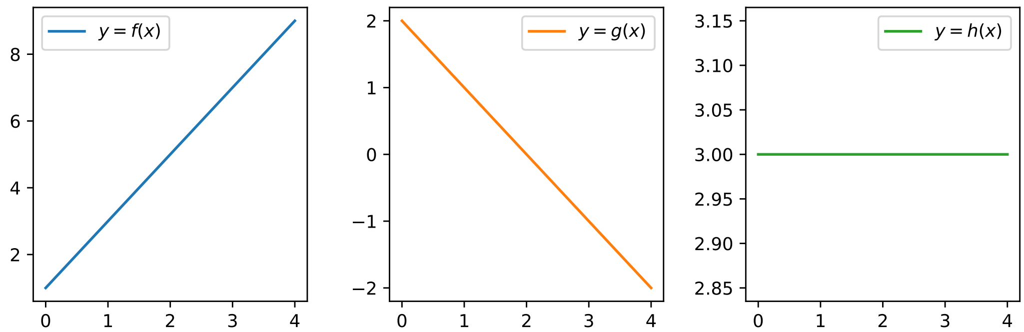

Figura 1: Gráficos das funções lineares $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x + 2$ e $h(x) = 3$.

Se uma reta passa por dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como mostrado na figura 2, define-se a inclinação dessa reta por
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pode-se verificar que a inclinação da reta não depende da escolha dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), desde que eles pertençam à reta. Como o gráfico de uma função linear $f(x) = ax+b$ é uma reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(1, a+b)$, a inclinação dessa reta será

$$m = \frac{a+b-b}{1-0} = a\,.$$

Portanto, o gráfico da função linear $f(x) = ax + b$ é uma reta com inclinação a que passa pelo ponto $(0, b)$, ou seja, a reta corta o eixo y no valor $y = b$.

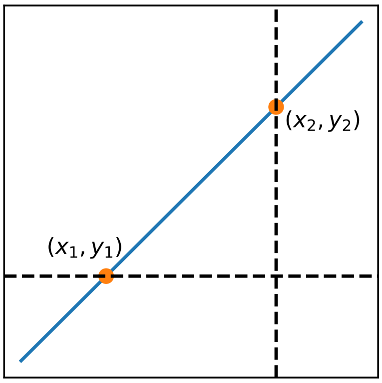

Figura 2: Inclinação de uma reta.

Exemplo 3. Vamos encontrar a função linear cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(-2, 1)$. Primeiro encontramos que a inclinação da reta é

$$m = \frac{3-1}{1-(-2)} = \frac{2}{3}\,.$$

Logo, a função linear que procuramos deve ter a forma $f(x) = \frac{2}{3}x + b$. Para determinar b usamos, por exemplo, o fato de que a reta passa pelo ponto $(1, 3)$, ou seja, $f(1) = 3$. Com isso, temos que

$$3 = \frac{2}{3}(1) + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7}{3}\,.$$

Portanto, a função linear desejada é $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

Diz-se que uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é **crescente** em um conjunto $E \subset A$ se, para quaisquer $x_1, x_2 \in E$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$. Analogamente, diz-se que f é **decrescente** em um conjunto $E \subset A$ se, para quaisquer $x_1, x_2 \in E$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 4. Uma função linear $f(x) = ax + b$ é crescente em $\mathbb{R}$ se $a > 0$, e é decrescente se $a < 0$.

3 Funções polinomiais

Diz-se que uma função f é uma **função polinomial** se existem constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,.$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são chamados de **coeficientes**; porém, especialmente o coeficiente a_0 é chamado de **termo independente**. Se $a_n \neq 0$, diz-se que f é uma função polinomial de **grau** n. O domínio de qualquer função polinomial é $\mathbb{R}$. Se o grau de uma função polinomial f é ímpar, a sua imagem também é $\mathbb{R}$. Por outro lado, se o grau de f é par, só uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geqslant f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f atinge seu **máximo absoluto** em um ponto x_0.

2. existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f atinge seu **mínimo absoluto** em um ponto x_0.

No primeiro caso a imagem de f é o intervalo $(-\infty, f(x_0)]$. No segundo caso, a imagem de f é o intervalo $[f(x_0), \infty)$.

Exemplo 5. A figura 3 mostra o gráfico da função $f_n(x) = x^n$ para alguns valores inteiros $n > 0$. Dessa figura observamos o seguinte:

1. f_n é crescente em $\mathbb{R}$ se n é ímpar; enquanto que f_n é decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, \infty)$ se n é par.

2. Se $0 < x < y$, então $0 < x^n < y^n$ para todo inteiro $n > 0$.

3. O gráfico de f_n é simétrico em relação à origem se n é ímpar. Por outro lado, se n é par, o gráfico de f_n é simétrico em relação ao eixo y.

4. Se $x > 1$, então $x^{n+1} > x^n$ para todo inteiro $n > 0$.

5. Se $0 < x < 1$, então $x^{n+1} < x^n$ para todo inteiro $n > 0$.

Exemplo 6. Uma função polinomial de grau 2 é chamada de uma **função quadrática**. Vamos encontrar a imagem da função quadrática

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 \,.$$

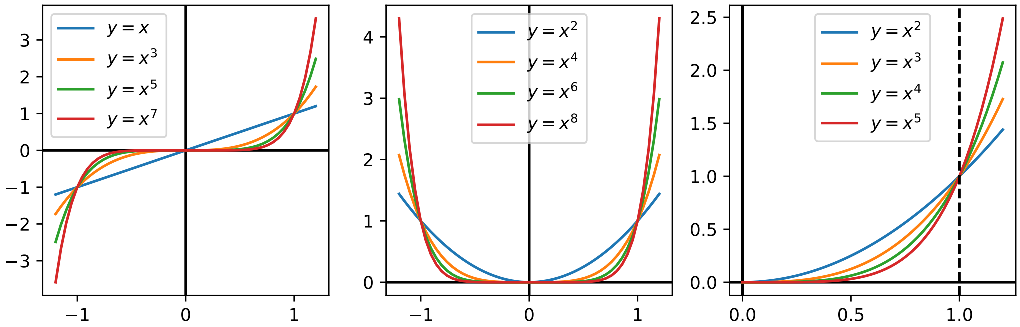

Figura 3: Gráficos das funções $f_n(x) = x^n$ para alguns valores de n.

Para isso é conveniente escrevermos a expressão de f na forma

$$f(x) = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x\right] + 2\,.$$

Agora vamos completar o quadrado dentro da expressão em colchetes:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 2 \\ &= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 2 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}\,. \end{aligned}$$

Como $(x - \frac{3}{4})^2 \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o mínimo absoluto de f será atingido quando $x = 3/4$. Além disso, podemos verificar imediatamente que $f(3/4) = 7/8$. Portanto, a imagem de f é o intervalo $[7/8, \infty)$. A figura 4 mostra o gráfico de f, que é uma curva chamada de **parábola**.

Seja f uma função polinomial. Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é uma **raiz** de f se $f(a) = 0$. Geometricamente, as raízes de uma função polinomial são os valores de x nos quais o gráfico da função polinomial interseta com o eixo x. O seguinte resultado, que não provaremos aqui, é uma consequência do chamado **teorema fundamental da álgebra**:

Teorema 7. *Toda função polinomial de grau n tem no máximo n raízes reais.*

As seguintes afirmações também podem ser úteis para determinar as raízes de uma função polinomial:

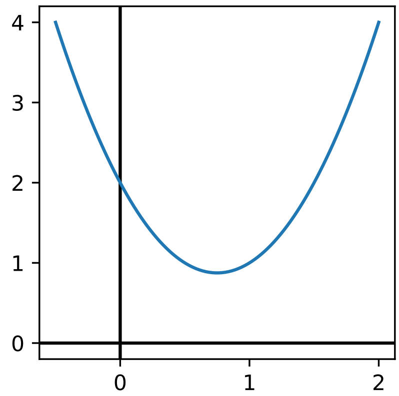

Figura 4: Gráfico da função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

Teorema 8. *Toda função polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Teorema 9. *Seja a função polinomial*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ *e* $a_n \neq 0$. *O conjunto das possíveis raízes racionais de* f *é*

$$\left\{ \frac{p}{q} : p \text{ é um divisor de } a_0 \text{ e } q \text{ é um divisor de } a_n \right\} .$$

Demonstração. Sejam p e $q \neq 0$ inteiros tais que p/q seja uma raiz de f. Logo, $f(p/q) = 0$, ou seja,

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \tag{1}$$

Multiplicando essa equação por q^{n-1}, temos que

$$\frac{a_n p^n}{q} + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0 \,.$$

Como $a_{n-1}p^{n-1}, \ldots, a_1 p^{n-2}$ e $a_0 q^{n-1}$ são inteiros, o número $\frac{a_n p^n}{q}$ também deve ser inteiro para que a equação seja verdadeira. Logo, q deve ser um divisor de $a_n p^n$. Segue daqui que $q = 1$ ou q é um divisor de a_n, pois, se $q \neq 1$, podemos assumir que p e q não têm fatores em comum. Assim, em ambos os casos q

é um divisor de a_n. Se agora multiplicamos a Eq. (1) por $\frac{q^n}{p}$ (devemos ter $p \neq 0$, senão a Eq. (1) seria falsa), temos que

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_0 \frac{q^n}{p} = 0\,.$$

Daqui podemos concluir que p deve ser um divisor de a_0. $\square$

Exemplo 10. Vamos encontrar as raízes da função

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8\,.$$

Primeiramente observamos que o conjunto das possíveis raízes racionais de f é $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Usando os elementos desse conjunto, podemos verificar que -1 é uma raiz de f. Isso quer dizer que a divisão $\frac{f(x)}{x-(-1)}$ é exata. De fato, usando o método de Ruffini, temos que

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

Logo,

$$\frac{f(x)}{x+1} = x^2 - 6x + 8 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 8)\,.$$

Para obter as raízes restantes, caso existam, devemos resolver a equação $f(x) = 0$ para a variável x. Assim, temos que

$$(x+1)(x^2 - 6x + 8) = 0\,.$$

Segue daqui que $x + 1 = 0$ ou $x^2 - 6x + 8 = 0$. Da primeira igualdade obtemos $x = -1$ (que é a raiz de f que já foi encontrada) e da segunda igualdade obtemos que

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}\,,$$

de onde segue que $x = 2$ ou $x = 4$. Portanto, as raízes de f são $-1, 2$ e 4. Consequentemente, o gráfico de f (ver figura 5) interseta o eixo x nos valores $x = -1$, $x = 2$ e $x = 4$.

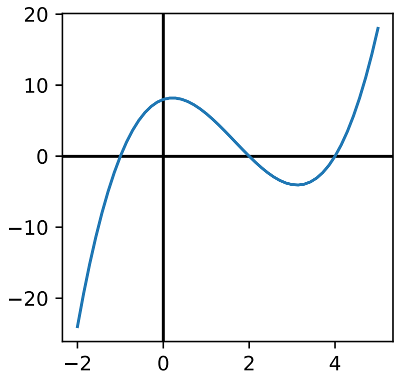

Figura 5: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

4 Funções racionais

Diz-se que uma função f é uma **função racional** se existem funções polinomiais p e q tais que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

O domínio de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Exemplo 11. Vamos determinar o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 1}{3x^2 - 4x - 4}.$$

Para isso, simplesmente notamos que as raízes da função polinomial $g(x) = 3x^2 - 4x - 4$ são $x = 2$ e $x = -1/3$. Portanto, o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R} - \{2, -1/3\}$.

Exemplo 12. A figura 6 mostra o gráfico das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$. Notamos que $f(x)$ assume valores positivos grandes se consideramos valores de x positivos próximos de 0. Além disso, $f(x)$ assume valores negativos grandes se consideramos valores de x negativos próximos de 0. Por outro lado, $g(x)$ assume valores grandes positivos se consideramos valores de x próximos de 0 de qualquer sinal.

5 Funções algébricas

Dado um inteiro $n > 0$, consideremos a função $f_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f_n(x) = x^n$. Da figura 3 podemos concluir que f_n é sobrejetiva e crescente

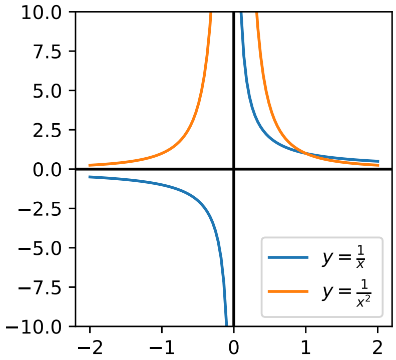

Figura 6: Gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

no seu domínio. Logo, ela também é injetiva e, por conseguinte, é uma bijeção. Assim, f_n tem uma inversa $f_n^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por

$$f_n^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x\,.$$

A função f_n^{-1} é chamada de função **raiz n-ésima** e escreve-se

$$f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{ou} \quad f_n^{-1}(x) = x^{1/n}\,.$$

A figura 7 mostra o gráfico da função f_n^{-1} para alguns valores de n. Desse gráfico podemos concluir o seguinte:

1. f_n^{-1} é crescente no seu domínio, ou seja, se $0 < x < y$, então $0 < x^{1/n} < y^{1/n}$ para todo inteiro $n > 0$.
2. Se $x > 1$, então $x^{1/(n+1)} < x^{1/n}$ para todo inteiro $n > 0$.
3. Se $0 < x < 1$, então $x^{1/(n+1)} > x^{1/n}$ para todo inteiro $n > 0$.

Vale ressaltar que a função raiz n-ésima pode ser definida como uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ no caso em que n é ímpar. Isso acontece devido a que nesse caso a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ é uma bijeção.

Diz-se que uma função f é uma **função algébrica** se a expressão de $f(x)$ faz uso de no máximo as quatro operações elementares e a operação de radiciação.

Exemplo 13. A função

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x}}{4x} + \frac{5x^2 - 3}{x^{1/3} + 1}$$

é uma função algébrica. Para determinar o domínio de f devemos levar em conta dois fatos:

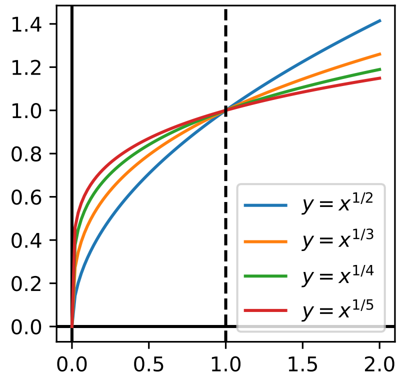

Figura 7: Gráfico das funções $f_n^{-1}(x) = x^{1/n}$ para alguns valores de n.

1. Não podemos dividir por 0.
2. Raízes de ordem par só podem ser aplicadas a números não-negativos.

Assim, devemos ter $4x \neq 0$, $x^{1/3} + 1 \neq 0$ e $3 - 2x \geqslant 0$. Segue daqui que $x \neq 0$, $x \neq -1$ e $x \leqslant 3/2$. Portanto, o domínio de f é o conjunto $(-\infty, 3/2] - \{0, -1\}$.

6 A função valor absoluto

Define-se a função **valor absoluto** por $|x| = \sqrt{x^2}$. Como $x^2 \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio da função valor absoluto é $\mathbb{R}$. Além disso, tem-se o seguinte:

1. Se $x \geqslant 0$, então $\sqrt{x^2} = x$ e, por conseguinte, $|x| = x$.
2. Se $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$, pois a imagem da função raiz quadrada é o intervalo $[0, \infty)$. Logo, nesse caso, $|x| = -x$.

Segue dessas observações que a imagem da função valor absoluto é o intervalo $[0, \infty)$ e também que essa função poderia ter sido definida por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

A figura 8 mostra o gráfico da função valor absoluto.

Teorema 14 (Propriedades do valor absoluto)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que*

1. $|x| \geqslant 0$;

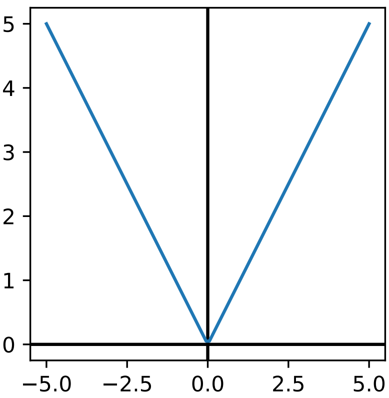

Figura 8: Gráfico da função valor absoluto.

2. $x \leqslant |x|$ *e* $-x \leqslant |x|$;
3. $|xy| = |x||y|$;
4. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Demonstração. Os itens 2 e 3 são consequências diretas da definição da função valor absoluto.

3. $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$.
4. Temos que $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = |x|^2 + |y|^2 + 2xy$. Como $xy \leqslant |x||y|$, segue que $|x+y|^2 \leqslant |x|^2+|y|^2+2|x||y| = (|x|+|y|)^2$. Finalmente, como $|x + y| \geqslant 0$ e $|x| + |y| \geqslant 0$, temos que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. □

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser representado graficamente por uma reta. Nessa reta cada ponto corresponde a um número e vice-versa. A **distância** entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é definida por

$$d(x, y) = |x - y| .$$

Com essa definição de distância, define-se também o **comprimento** de qualquer um dos intervalos (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ ou $[a, b]$ por $|a - b|$. Podemos verificar que essa distância tem as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

7 Funções trigonométricas

Sejam dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ no plano cartesiano, como mostrado na figura 9. Notamos que a distância entre esses dois pontos, ou seja, o comprimento do segmento $\overline{PQ}$, é

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,,$$

em virtude do teorema de Pitágoras.

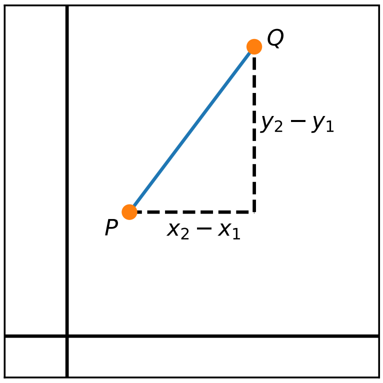

Figura 9: Distância entre dois pontos no plano cartesiano.

O conjunto

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

pode ser descrito em palavras como o conjunto de todos os pontos P cuja distância à origem de coordenadas $O = (0, 0)$ é igual a 1. Assim, a representação gráfica desse conjunto no plano cartesiano é uma circunferência de raio 1 com centro na origem de coordenadas, a qual é chamada de **circunferência trigonométrica**. Um ângulo associado a um ponto P da circunferência trigonométrica é definido como o ângulo que parte do semieixo x positivo e chega no segmento $\overline{OP}$ (ver figura 10). Segue daqui que há na verdade infinitos ângulos associados ao ponto P. Vale ressaltar que ângulos no sentido anti-horário são positivos e ângulos no sentido horário são negativos. Além disso, a medida dos ângulos será feita em radianos a menos que se indique outra coisa. Nessa direção, é importante lembrar da relação $2\pi\,\mathrm{rad} = 360°$.

Se $x \in \mathbb{R}$ é um ângulo associado a um ponto $P = (a, b)$ da circunferência trigonométrica, então define-se o seu **seno** e o seu **cosseno** por

$$\operatorname{sen} x = b \quad \text{e} \quad \cos x = a\,.$$

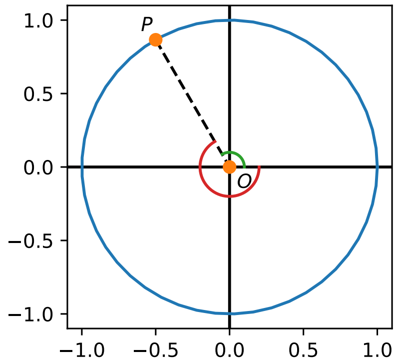

Figura 10: Dois ângulos associados ao ponto P. O ângulo em verde é positivo, enquanto que o ângulo em vermelho é negativo.

Como $a, b \in [-1, 1]$ para qualquer ponto P da circunferência trigonométrica, tem-se que

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \quad \text{e} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Assim, colocado de forma mais precisa, a função seno $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ e a função cosseno $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ são sobrejetivas.

Uma função f é dita uma **função periódica** se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + c) = f(x)$ para todo x no domínio de f. Nesse caso, o menor valor $T > 0$ para o qual se tenha $f(x + T) = f(x)$ é chamado de **período** de f.

Usando a circunferência trigonométrica, podemos concluir que as funções seno e cosseno são funções periódicas com período 2π. Logo, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x\,.$$

A seguinte tabela mostra valores de seno e cosseno para alguns ângulos notáveis:

Ângulo (rad)	Ângulo (°)	Seno	Cosseno
0	0	0	1
$\pi/6$	30	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	60	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	90	1	0
π	180	0	-1
$3\pi/2$	270	-1	0
2π	360	0	1

A figura 11 mostra os gráficos das funções seno e cosseno. Dessa figura podemos notar que

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos x$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

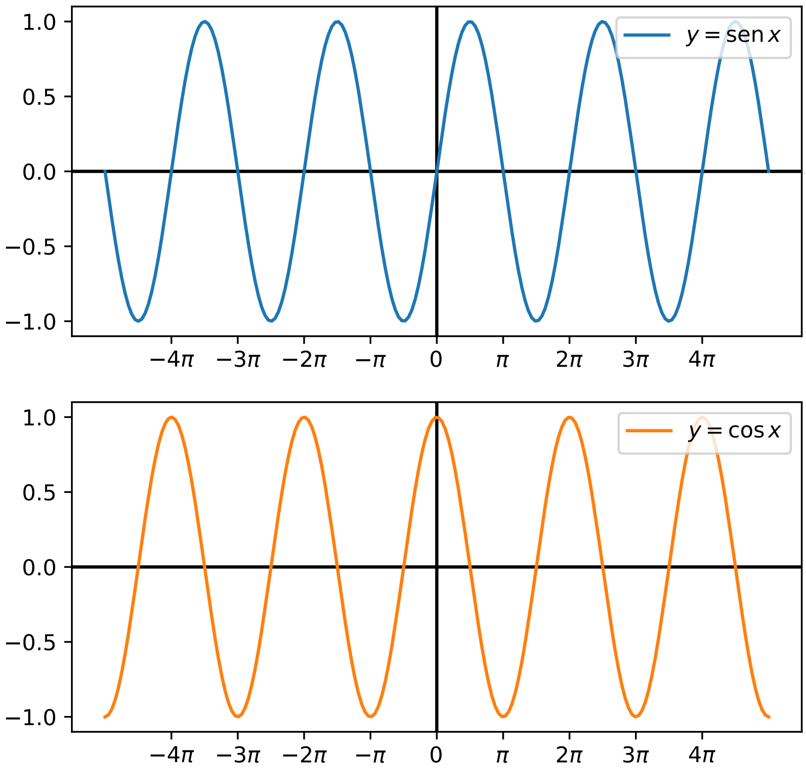

Figura 11: Gráficos das funções seno e cosseno.

As funções secante e cossecante são definidas respectivamente por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Como $\cos x = 0$ se $x = (2n+1)\pi/2$, com n inteiro, o domínio da função secante é o conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

De forma análoga, podemos mostrar que o domínio da função cossecante é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

A figura 12 mostra os gráficos das funções secante e cossecante. Notamos dessa figura que essas funções são periódicas, com período 2π. Além disso, ambas as funções têm como imagem o conjunto $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

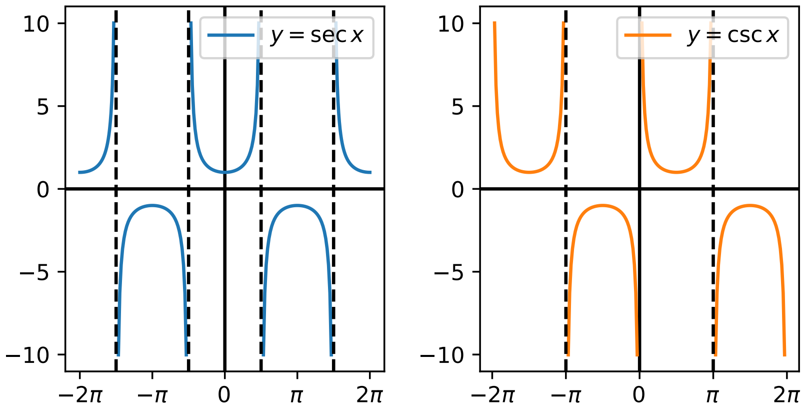

Figura 12: Gráficos das funções secante e cossecante.

As funções tangente e cotangente são definidas respectivamente por

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

O domínio da tangente é igual ao domínio da secante e o domínio da cotangente coincide com o domínio da cossecante. A figura 13 mostra os gráficos das funções tangente e cotangente. Notamos dessa figura que a imagem dessas funções é $\mathbb{R}$ e que elas são funções periódicas. Porém, diferentemente das funções seno e cosseno, as funções tangente e cotangente têm período π.

As funções trigonométricas satisfazem algumas relações, chamadas de **identidades trigonométricas**. Por exemplo, usando a circunferência trigonométrica, podemos verificar imediatamente que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, dividindo essa equação por $\cos^2 x$, obtemos que

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

para todo x no domínio da tangente. De forma análoga podemos obter que

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

para todo x no domínio da cotangente.

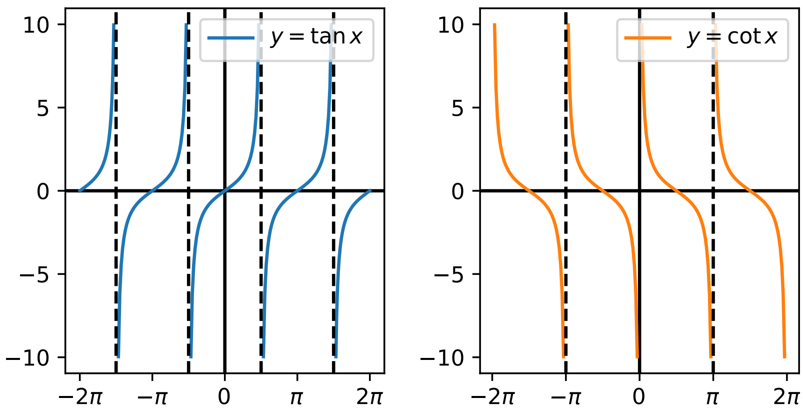

Figura 13: Gráficos das funções tangente e cotangente.

Exemplo 15. Se $x \in [\pi, 2\pi]$ e $\cos x = 3/5$, podemos obter o valor de $\operatorname{sen} x$ usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. De fato, a partir daqui temos que

$$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}\,.$$

Como devemos ter $\operatorname{sen} x < 0$, pois $x \in [\pi, 2\pi]$, então

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}\,.$$

Outras identidades trigonométricas importantes são as seguintes: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

1. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$;
2. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

Para justificar essas identidades, consideremos dois pontos P e Q na circunferência trigonométrica, como mostrado no painel esquerdo da figura 13. Chamemos o ângulo em verde de α e o ângulo em vermelho de β. Logo, temos que $P = (\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$ e $Q = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e, por conseguinte, o comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}| &= \sqrt{[\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}\alpha]^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha} \end{aligned}$$

Se giramos o conteúdo do painel esquerdo da figura 13 o ângulo α no sentido horário, obtemos o painel do lado direito dessa figura. Logo, o comprimento do segmento $\overline{P'Q'}$ é igual ao comprimento do segmento $\overline{PQ}$. Como $P' = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ e $Q' = (1, 0)$, temos que

$$|\overline{P'Q'}| = \sqrt{(\cos\beta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\beta} = \sqrt{2 - 2\cos\beta}\,.$$

Assim, devemos ter

$$2 - 2\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha\,,$$

de onde obtemos que

$$\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha\,. \tag{2}$$

Como α e β são arbitrários, definindo $x = -\alpha$ e $y = \alpha + \beta$, temos que

$$\cos(x+y) = \cos y\cos(-x) + \operatorname{sen} y\operatorname{sen}(-x) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\,. \tag{3}$$

Por outro lado, pondo $\alpha = x$ e $\beta = y$ na Eq. (2), temos que

$$\cos y = \cos(x+y)\cos x + \operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen} x\,.$$

Logo, usando a Eq. (3), temos que

$$\cos y = \cos^2 x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\cos x + \operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen} x\,.$$

Isolando $\operatorname{sen}(x+y)$, podemos obter finalmente que

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y\,.$$

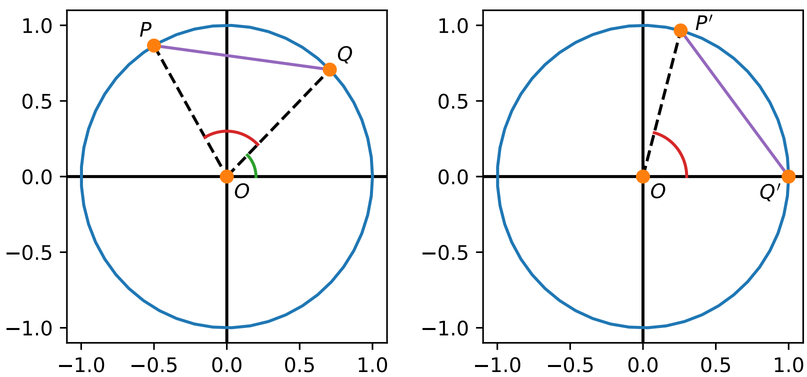

Figura 14: Os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ têm o mesmo comprimento.

8 Funções trigonométricas inversas

Se f é uma função periódica, então ela não tem inversa, pois não é injetiva. Nesse caso, para que f tenha inversa, deve-se restringir o domínio de f a um conjunto A de tal forma que a função $f : A \to B$, em que B é a imagem de f, seja uma bijeção. Em particular, esse procedimento deve ser realizado para as funções trigonométricas.

Para que a função seno tenha inversa, podemos restringir o seu domínio ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (ver figura 11). Assim, a função $\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ é uma bijeção e, por conseguinte, tem inversa. A inversa da função seno é a função $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, chamada de **função arco seno**, definida por

$$\operatorname{arcsen} x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} y = x\,.$$

A figura 15 mostra o gráfico da função arco seno. Notamos que ela é crescente no seu domínio e satisfaz a relação

$$\operatorname{arcsen}(-x) = \operatorname{arcsen}(x)$$

para todo $x \in [-1, 1]$.

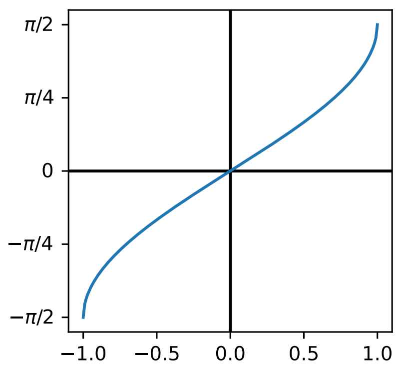

Figura 15: Gráfico da função arco seno.

Analogamente ao caso da função seno, notamos que a função $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é uma bijeção (ver figura 11). A inversa da função cosseno é a função $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, chamada de **função arco cosseno**, definida por

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \quad y \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \cos y = x\,.$$

A figura 15 mostra o gráfico da função arco seno. Notamos que ela é decrescente no seu domínio.

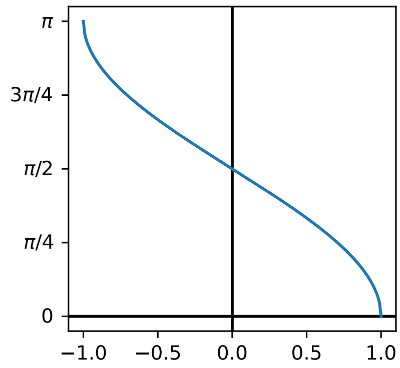

Figura 16: Gráfico da função arco cosseno.

A função $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção (ver figura 13). A sua inversa é a função $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, chamada de **função arco tangente**, definida por

$$\arctan x = y \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad \tan y = x\,.$$

A figura 16 mostra o gráfico da função arco tangente. Notamos daqui que essa função é crescente em $\mathbb{R}$ e satisfaz a relação

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

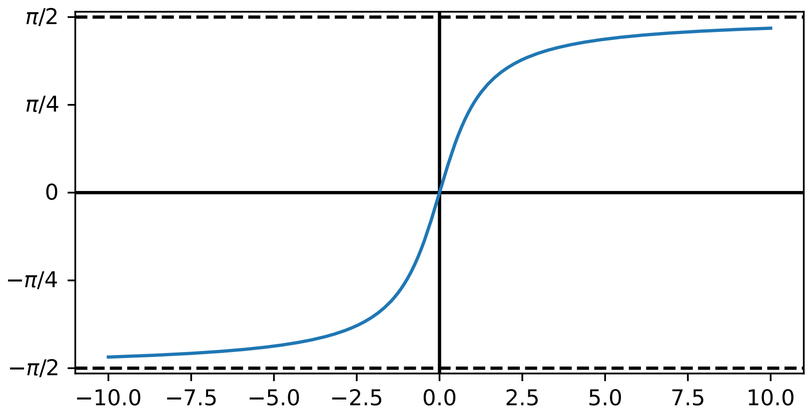

Figura 17: Gráfico da função arco tangente.

Exemplo 16. Para todo $x \in [-1,1]$ podemos verificar imediatamente que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad \text{e} \quad \cos(\arccos x) = x\,.$$

Da mesma forma, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\tan(\arctan x) = x\,.$$

No entanto, as expressões $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$, $\arccos(\cos x)$ e $\arctan(\tan x)$ podem ser diferentes de x. Por exemplo, se

$$E = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\,,$$

temos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Logo,

$$E = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}\,.$$