Funções reais de uma variável real

Max Jauregui

16 de novembro de 2022

Conteúdo

1 Definições básicas

Uma função $f : A \to B$ é dita uma **função real** se $B \subset \mathbb{R}$. Se além disso $A \subset \mathbb{R}$, diz-se que f é uma **função real de uma variável real**. De aqui em diante qualquer função será uma função real de uma variável real a menos que se indique explícitamente outra coisa. Na prática, é comum definir uma função f simplesmente por uma equação da forma

$$f(x) = \text{expressão envolvendo a variável } x\,.$$

Nesse caso, assume-se que o domínio de f é o conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão do lado direito retorna um número real. O contradomínio de f pode ser em princípio qualquer conjunto que contenha a imagem de f; por exemplo, o próprio conjunto $\mathbb{R}$.

Exemplo 1. A equação

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

define uma função f cujo domínio é o conjunto A formado por todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x - 2 \neq 0$. Assim, $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ pode ser representada graficamente localizando os pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in A$, no plano cartesiano. Tipicamente, esse processo gera uma curva, a qual é chamada de **gráfico** de f. Como para cada $x \in A$, existe um único par ordenado $(x, f(x))$, o gráfico de f pode ser intersetado por qualquer reta vertical em no máximo um ponto.

2 Funções lineares

Diz-se que uma função f é uma **função linear** se existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$. O domínio de qualquer função linear é $\mathbb{R}$. Se $a \neq 0$, a imagem da função linear $f(x) = ax + b$ é $\mathbb{R}$; caso contrário, a imagem de f é $\{b\}$. Nesse último caso, diz-se que f é uma **função constante**.

Exemplo 2. A figura 1 mostra os gráficos das funções lineares $f(x) = 2x+1$, $g(x) = -x + 2$ e $h(x) = 3$. Notamos que em todos os casos, o gráfico é uma reta.

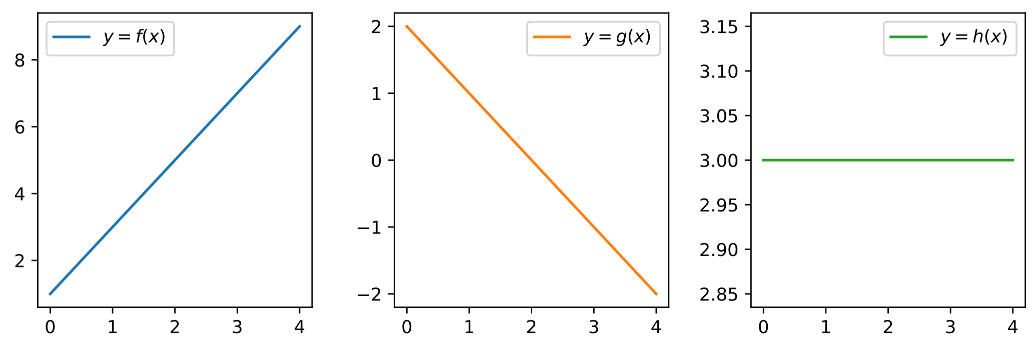

Figura 1: Gráficos das funções lineares $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x + 2$ e $h(x) = 3$.

Se uma reta passa por dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como mostrado na figura 2, define-se a inclinação dessa reta por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Pode-se verificar que a inclinação da reta não depende da escolha dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), desde que eles pertençam à reta. Como o gráfico de uma função linear $f(x) = ax+b$ é uma reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(1, a+b)$, a inclinação dessa reta será

$$m = \frac{a+b-b}{1-0} = a\,.$$

Portanto, o gráfico da função linear $f(x) = ax + b$ é uma reta com inclinação a que passa pelo ponto $(0, b)$, ou seja, a reta corta o eixo y no valor $y = b$.

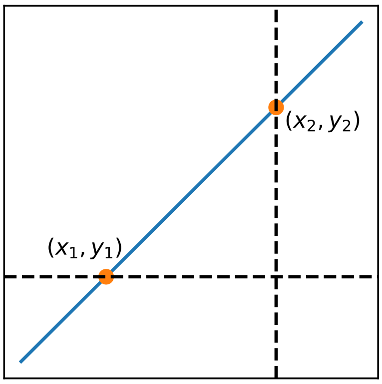

Figura 2: Inclinação de uma reta.

Exemplo 3. Vamos encontrar a função linear cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(-2, 1)$. Primeiro encontramos que a inclinação da reta é

$$m = \frac{3-1}{1-(-2)} = \frac{2}{3}\,.$$

Logo, a função linear que procuramos deve ter a forma $f(x) = \frac{2}{3}x + b$. Para determinar b usamos, por exemplo, o fato de que a reta passa pelo ponto $(1, 3)$, ou seja, $f(1) = 3$. Com isso, temos que

$$3 = \frac{2}{3}(1) + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7}{3}\,.$$

Portanto, a função linear desejada é $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

Diz-se que uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é **crescente** em um conjunto $E \subset A$ se, para quaisquer $x_1, x_2 \in E$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$. Analogamente, diz-se que f é **decrescente** em um conjunto $E \subset A$ se, para quaisquer $x_1, x_2 \in E$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 4. Uma função linear $f(x) = ax + b$ é crescente em $\mathbb{R}$ se $a > 0$, e é decrescente se $a < 0$.

3 Funções polinomiais

Diz-se que uma função f é uma **função polinomial** se existem constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,.$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são chamados de **coeficientes**; porém, especialmente o coeficiente a_0 é chamado de **termo independente**. Se $a_n \neq 0$, diz-se que f é uma função polinomial de **grau** n. O domínio de qualquer função polinomial é $\mathbb{R}$. Se o grau de uma função polinomial f é ímpar, a sua imagem também é $\mathbb{R}$. Por outro lado, se o grau de f é par, só uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geqslant f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f atinge seu **máximo absoluto** em um ponto x_0.

2. existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f atinge seu **mínimo absoluto** em um ponto x_0.

No primeiro caso a imagem de f é o intervalo $(-\infty, f(x_0)]$. No segundo caso, a imagem de f é o intervalo $[f(x_0), \infty)$.

Exemplo 5. A figura 3 mostra o gráfico da função $f_n(x) = x^n$ para alguns valores inteiros $n > 0$. Dessa figura observamos o seguinte:

1. f_n é crescente em $\mathbb{R}$ se n é ímpar; enquanto que f_n é decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, \infty)$ se n é par.

2. Se $0 < x < y$, então $0 < x^n < y^n$ para todo inteiro $n > 0$.

3. O gráfico de f_n é simétrico em relação à origem se n é ímpar. Por outro lado, se n é par, o gráfico de f_n é simétrico em relação ao eixo y.

4. Se $x > 1$, então $x^{n+1} > x^n$ para todo inteiro $n > 0$.

5. Se $0 < x < 1$, então $x^{n+1} < x^n$ para todo inteiro $n > 0$.

Exemplo 6. Uma função polinomial de grau 2 é chamada de uma **função quadrática**. Vamos encontrar a imagem da função quadrática

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 \,.$$

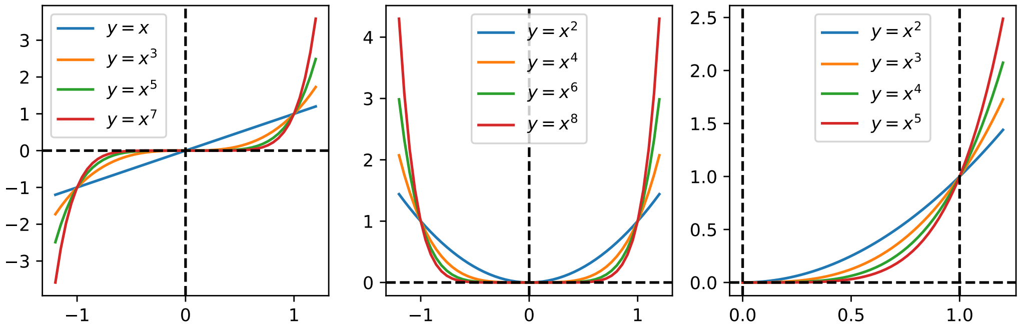

Figura 3: Gráficos das funções $f_n(x) = x^n$ para alguns valores de n.

Para isso é conveniente escrevermos a expressão de f na forma

$$f(x) = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x\right] + 2\,.$$

Agora vamos completar o quadrado dentro da expressão em colchetes:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 2 \\ &= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 2 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}\,. \end{aligned}$$

Como $(x - \frac{3}{4})^2 \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o mínimo absoluto de f será atingido quando $x = 3/4$. Além disso, podemos verificar imediatamente que $f(3/4) = 7/8$. Portanto, a imagem de f é o intervalo $[7/8, \infty)$. A figura 4 mostra o gráfico de f, que é uma curva chamada de **parábola**.

Seja f uma função polinomial. Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é uma **raiz** de f se $f(a) = 0$. Geometricamente, as raízes de uma função polinomial são os valores de x nos quais o gráfico da função polinomial interseta com o eixo x. O seguinte resultado, que não provaremos aqui, é uma consequência do chamado **teorema fundamental da álgebra**:

Teorema 7. *Toda função polinomial de grau n tem no máximo n raízes reais.*

As seguintes afirmações também podem ser úteis para determinar as raízes de uma função polinomial:

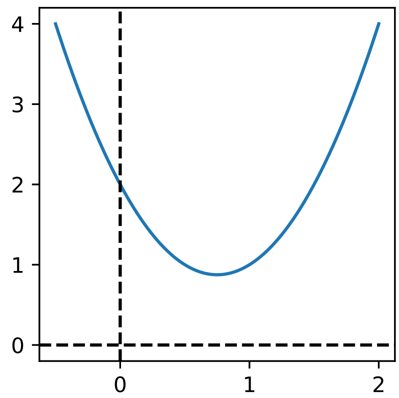

Figura 4: Gráfico da função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

Teorema 8. *Toda função polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Teorema 9. *Seja a função polinomial*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$. O conjunto das possíveis raízes racionais de f é

$$\left\{ \frac{p}{q} : p \text{ é um divisor de } a_0 \text{ e } q \text{ é um divisor de } a_n \right\} .$$

Demonstração. Sejam p e $q \neq 0$ inteiros tais que p/q seja uma raiz de f. Logo, $f(p/q) = 0$, ou seja,

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \tag{1}$$

Multiplicando essa equação por q^{n-1}, temos que

$$\frac{a_n p^n}{q} + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0 \,.$$

Como $a_{n-1}p^{n-1}, \ldots, a_1 p^{n-2}$ e $a_0 q^{n-1}$ são inteiros, o número $\frac{a_n p^n}{q}$ também deve ser inteiro para que a equação seja verdadeira. Logo, q deve ser um divisor de $a_n p^n$. Segue daqui que $q = 1$ ou q é um divisor de a_n, pois, se $q \neq 1$, podemos assumir que p e q não têm fatores em comum. Assim, em ambos os casos q

é um divisor de a_n. Se agora multiplicamos a Eq. (1) por $\frac{q^n}{p}$ (devemos ter $p \neq 0$, senão a Eq. (1) seria falsa), temos que

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_0 \frac{q^n}{p} = 0\,.$$

Daqui podemos concluir que p deve ser um divisor de a_0. $\square$

Exemplo 10. Vamos encontrar as raízes da função

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8\,.$$

Primeiramente observamos que o conjunto das possíveis raízes racionais de f é $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Usando os elementos desse conjunto, podemos verificar que -1 é uma raiz de f. Isso quer dizer que a divisão $\frac{f(x)}{x-(-1)}$ é exata. De fato, usando o método de Ruffini, temos que

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

Logo,

$$\frac{f(x)}{x+1} = x^2 - 6x + 8 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 8)\,.$$

Para obter as raízes restantes, caso existam, devemos resolver a equação $f(x) = 0$ para a variável x. Assim, temos que

$$(x+1)(x^2 - 6x + 8) = 0\,.$$

Segue daqui que $x + 1 = 0$ ou $x^2 - 6x + 8 = 0$. Da primeira igualdade obtemos $x = -1$ (que é a raiz de f que já foi encontrada) e da segunda igualdade obtemos que

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}\,,$$

de onde segue que $x = 2$ ou $x = 4$. Portanto, as raízes de f são $-1, 2$ e 4. Consequentemente, o gráfico de f (ver figura 5) interseta o eixo x nos valores $x = -1$, $x = 2$ e $x = 4$.

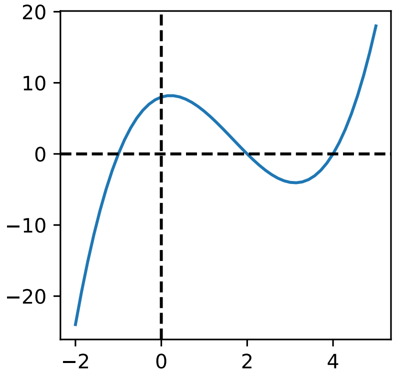

Figura 5: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

4 Funções racionais

Diz-se que uma função f é uma **função racional** se existem funções polinomiais p e q tais que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

O domínio de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Exemplo 11. Vamos determinar o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 1}{3x^2 - 4x - 4}.$$

Para isso, simplesmente notamos que as raízes da função polinomial $g(x) = 3x^2 - 4x - 4$ são $x = 2$ e $x = -1/3$. Portanto, o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R} - \{2, -1/3\}$.

Exemplo 12. A figura 6 mostra o gráfico das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$. Notamos que $f(x)$ assume valores positivos grandes se consideramos valores de x positivos próximos de 0. Além disso, $f(x)$ assume valores negativos grandes se consideramos valores de x negativos próximos de 0. Por outro lado, $g(x)$ assume valores grandes positivos se consideramos valores de x próximos de 0 de qualquer sinal.

5 Funções algébricas

Dado um inteiro $n > 0$, consideremos a função $f_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f_n(x) = x^n$. Da figura 3 podemos concluir que f_n é sobrejetiva e crescente

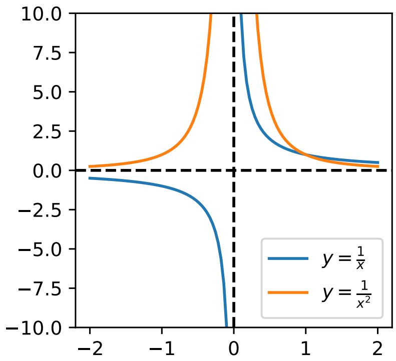

Figura 6: Gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

no seu domínio. Logo, ela também é injetiva e, por conseguinte, é uma bijeção. Assim, f_n tem uma inversa $f_n^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por

$$f_n^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x\,.$$

A função f_n^{-1} é chamada de função **raiz n-ésima** e escreve-se

$$f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{ou} \quad f_n^{-1}(x) = x^{1/n}\,.$$

A figura 7 mostra o gráfico da função f_n^{-1} para alguns valores de n. Desse gráfico podemos concluir o seguinte:

1. f_n^{-1} é crescente no seu domínio, ou seja, se $0 < x < y$, então $0 < x^{1/n} < y^{1/n}$ para todo inteiro $n > 0$.

2. Se $x > 1$, então $x^{1/(n+1)} < x^{1/n}$ para todo inteiro $n > 0$.

3. Se $0 < x < 1$, então $x^{1/(n+1)} > x^{1/n}$ para todo inteiro $n > 0$.

Vale ressaltar que a função raiz n-ésima pode ser definida como uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ no caso em que n é ímpar. Isso acontece devido a que nesse caso a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ é uma bijeção.

Diz-se que uma função f é uma **função algébrica** se a expressão de $f(x)$ faz uso de no máximo as quatro operações elementares e a operação de radiciação.

Exemplo 13. A função

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x}}{4x} + \frac{5x^2 - 3}{x^{1/3} + 1}$$

é uma função algébrica. Para determinar o domínio de f devemos levar em conta dois fatos:

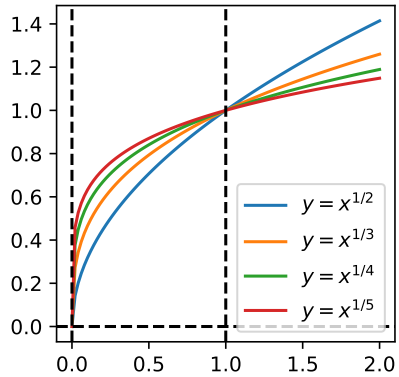

Figura 7: Gráfico das funções $f_n^{-1}(x) = x^{1/n}$ para alguns valores de n.

1. Não podemos dividir por 0.
2. Raízes de ordem par só podem ser aplicadas a números não-negativos.

Assim, devemos ter $4x \neq 0$, $x^{1/3}+1 \neq 0$ e $3-2x \geqslant 0$. Segue daqui que $x \neq 0$, $x \neq -1$ e $x \leqslant 3/2$. Portanto, o domínio de f é o conjunto $(-\infty, 3/2]-\{0,-1\}$.

6 Função valor absoluto

Define-se a função **valor absoluto** por $|x| = \sqrt{x^2}$. Como $x^2 \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio da função valor absoluto é $\mathbb{R}$. Além disso, tem-se o seguinte:

1. Se $x \geqslant 0$, então $\sqrt{x^2} = x$ e, por conseguinte, $|x| = x$.
2. Se $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$, pois a imagem da função raiz quadrada é o intervalo $[0, \infty)$. Logo, nesse caso, $|x| = -x$.

Segue dessas observações que a imagem da função valor absoluto é o intervalo $[0, \infty)$ e também que essa função poderia ter sido definida por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

A figura 8 mostra o gráfico da função valor absoluto.

Teorema 14 (Propriedades do valor absoluto)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que*

1. $|x| \geqslant 0$;

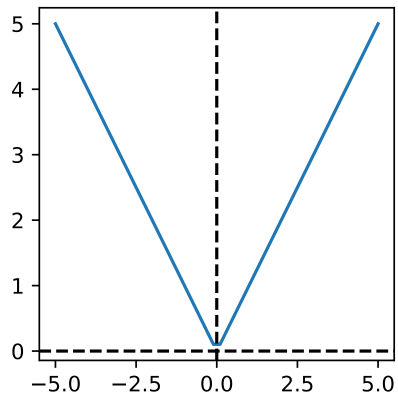

Figura 8: Gráfico da função valor absoluto.

2. $x \leqslant |x|$ e $-x \leqslant |x|$;

3. $|xy| = |x||y|$;

4. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.