Funções

Max Jauregui

25 de julho de 2022

1 Definições básicas

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma *relação* de A em B é um conjunto arbitrário de pares ordenados (x, y), em que $x \in A$ e $y \in B$. Uma *função* f de A em B é uma relação especial de A em B que tem as seguintes propriedades:

1. para cada $x \in A$ existe $y \in B$ tal que (x, y) pertence à relação;

2. se (x, y) e (x, z) pertencem à relação, então $y = z$.

Em outras palavras, cada $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$, o qual será denotado por $f(x)$ e será chamado de *valor da função* f no ponto x.

Exemplo 1.1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 5, 7\}$.

1. A relação $F = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\}$ é uma função de A em B.

2. A relação $R = \{(1, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ não é uma função de A em B pois $2 \in A$ não está relacionado com nenhum $y \in B$;

3. A relação $S = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 7)\}$ não é uma função de A em B, pois $(3, 5)$ e $(3, 7)$ pertencem à relação.

Uma função f de A em B é denotada de forma simbólica por $f : A \to B$. O conjunto A é chamado de *domínio* de f e o conjunto B de *contradomínio* de f.

Exemplo 1.2. No exemplo 1.1 foi definida uma função $F : A \to B$. Nesse caso, tem-se que $F(1) = 3$, $F(2) = 3$, $F(3) = 5$ e $F(4) = 5$.

Uma função $f : A \to B$ é chamada de uma *função real de uma variável real* quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Essa classe de funções será o nosso principal objeto de estudo neste curso.

Embora que para definir uma função seja necessário conhecer o seu domínio, na prática, comumente definem-se funções simplesmente por equações da forma

$$f(x) = \text{expressão envolvendo a variável } x\,.$$

Nesse caso, assume-se que o domínio da função f é o conjunto de todos os números $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão do lado direito faz sentido.

Exemplo 1.3.

1. A equação $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ define uma função f cujo domínio é $\mathbb{R}$, pois a expressão do lado direito faz sentido para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

2. A equação $g(x) = \dfrac{3}{x+5} - 3x^3$ define uma função g cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \{-5\}$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \neq -5$;

3. A equação $h(x) = 6\sqrt{3-2x}$ define uma função h cujo domínio é o intervalo $(-\infty, 3/2]$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \leq 3/2$.

Exercício 1.4. No exemplo anterior vimos que a função $h(x) = 6\sqrt{3-2x}$ tem como domínio o intervalo $(-\infty, 3/2]$. Determine os valores da função nos pontos $3/2, 0, -3$ e $1-t$, em que $t > 0$.

Define-se a *imagem* de uma função f como o conjunto de todos os valores $f(x)$, com x no domínio de f.

Exemplo 1.5. Vamos determinar o domínio e a imagem da função definida pela equação

$$f(x) = \sqrt{4-2x} + 5\,.$$

Como a expressão do lado direito só faz sentido se $4 - 2x \geq 0$, segue que o domínio de f é o intervalo $(-\infty, 2]$. Para determinamos a imagem de f começamos notando que, independentemente do valor de $x \in (-\infty, 2]$, $\sqrt{4-2x} \geq 0$ e, por conseguinte, $f(x) \geq 5$. Isso quer dizer que a imagem de f está contida no intervalo $[5, \infty)$. Para concluir que todo esse intervalo é a imagem de f, devemos mostrar que para qualquer $y \in [5, \infty)$ podemos achar $x \in (-\infty, 2]$ tal que $y = \sqrt{4-2x} + 5$. Resolvendo essa equação, obtemos que

$$x = \frac{4-(y-5)^2}{2} = 2 - \frac{(y-5)^2}{2}\,.$$

Segue daqui que, independentemente do valor de $y \in [5, \infty)$, $x \in (-\infty, 2]$. Portanto, a imagem de f é o intervalo $[5, \infty)$.

Uma função f pode ser representada graficamente marcando os pontos $(x, f(x))$, com x no domínio de f, no plano cartesiano. Em geral, esse processo gera uma curva, a qual é chamada de *gráfico* de f. Como cada x no domínio de f está associado a um único valor de $f(x)$, o gráfico de f é uma curva tal que qualquer reta vertical corta a curva em no máximo um ponto (veja a figura online).

Exercício 1.6. Esboce o gráfico da função definida no exemplo 1.5 e determine os interceptos com os eixos.

2 Funções monótonas, pares e ímpares

Há quatro tipos de funções monótonas:

1. Uma função f é *monótona crescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$.

2. Uma função f é *monótona não-decrescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

3. Uma função f é *monótona decrescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

4. Uma função f é dita *monótona não-crescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

O gráfico de uma função monótona crescente é uma curva que sobe quando olhada de esquerda para a direita. Por outro lado, o gráfico de uma função monótona decrescente é uma curva que desce quando olhada de esquerda para a direita.

Exemplo 2.1. Consideremos a função f definida pela equação $f(x) = x^2$. Vamos mostrar que f é monótona crescente no intervalo $[0, \infty)$ e é monótona decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$. Dados $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ com $x_1 < x_2$, temos que $x_1^2 < x_2^2$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, f é monótona crescente no intervalo $[0, \infty)$. Por outro lado, dados $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ com $x_1 < x_2$, temos que $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Logo, $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, o que implica que $x_1^2 > x_2^2$, ou seja, $f(x_1) > f(x_2)$. Portanto, f é monótona decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

O exemplo anterior revela que uma função pode ser monótona crescente em um intervalo e conjuntamente ser monótona decrescente em outro.

Diz-se que uma função f é *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x no domínio de f (isso implica tacitamente que $-x$ também pertence ao domínio de f). Por outro lado, diz-se que uma função g é *ímpar* se $g(-x) = -g(x)$ para todo x no domínio de g. Dessas definições, pode-se concluir diretamente que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y enquanto que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo 2.2.

1. A função $f(x) = x^4 - 3$ é uma função par, pois
$$f(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)\,.$$

2. A função $g(x) = x^7 - 5x^3 + x$ é uma função ímpar, pois
$$g(-x) = (-x)^7 - 5(-x)^3 + (-x) = -x^7 + 5x^3 - x = -g(x)\,.$$

3. A função $h(x) = 5x^2 + 3x - 7$ não é uma função par nem é uma função ímpar, pois podemos achar um valor de x no domínio de h (por exemplo, $x = 1$) tal que $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$.

3 Operações com funções

Sejam f e g duas funções.

1. Define-se a função $f+g$ pela equação $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. O domínio de $f+g$ é a interseção dos domínios de f e g.

2. Define-se a função $f-g$ pela equação $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$. O domínio de $f-g$ é a interseção dos domínios de f e g.

3. Define-se a função fg pela equação $(fg)(x) = f(x)g(x)$. O domínio de fg é a interseção dos domínios de f e g.

4. Define-se a função f/g pela equação $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. O domínio de f/g é a interseção dos domínios de f e g excluíndo os pontos x nos quais $g(x) = 0$.

Exemplo 3.1. Sejam as funções $f(x) = 3x^2 + 5$ e $g(x) = \sqrt{2x-7}$. Nesse caso, a função f/g está definida por

$$(f/g)(x) = \frac{3x^2+5}{\sqrt{2x-7}}\,.$$

O domínio de f é $\mathbb{R}$ e o domínio de g é o intervalo $[7/2, \infty)$. Logo, a interseção dos domínios é $[7/2, \infty)$. Além disso, como $g(7/2) = 0$, o domínio da função f/g é o intervalo $(7/2, \infty)$.

4 Composição de funções

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas funções. Se a imagem de f é um subconjunto de C, pode-se definir a *função composta* $g \circ f : A \to D$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Exemplo 4.1. Consideremos as funções $f(x) = 5x^2 + 3$ e $g(x) = 2x - 1$. O domínio de ambas as funções é $\mathbb{R}$. Logo, a imagem de qualquer uma das funções está contida no domínio da outra e, por conseguinte, as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ podem ser definidas. Vamos encontrar as expressões dessas funções compostas. Temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x^2+3) = 2(5x^2+3) - 1 = 10x^2 + 5\,.$$

A expressão de $(g \circ f)(x)$ também pode ser obtida da seguinte maneira:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 2(5x^2+3) - 1 = 10x^2 + 5\,.$$

Por outro lado, temos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5[g(x)]^2 + 3 = 5(2x-1)^2 + 3 = 5(4x^2 - 4x + 1) + 3 = 20x^2 - 20x + 8\,.$$

Assim, notamos que mesmo quando as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ podem ser definidas, elas em geral são diferentes funções. Em outras palavras, a operação de composição de funções não é comutativa.

Exercício 4.2. A energia cinética de uma partícula de massa m que se move com uma velocidade v é dada por

$$E = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Se a partícula realiza um movimento de queda livre, a sua velocidade em cada instante de tempo t é dada por

$$v = v_0 - gt\,,$$

em que v_0 e g são constantes. Determine a expressão da energia cinética da partícula para qualquer instante de tempo t.

5 Funções elementares

5.1 Funções lineares

Uma *função linear* é definida pela equação $f(x) = ax + b$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Se $a = 0$, a função linear $f(x) = b$ é chamada de uma *função constante*. O domínio de qualquer função linear é $\mathbb{R}$. Em relação ao gráfico de uma função linear $f(x) = ax + b$, temos os seguintes casos (veja a figura online):

1. se $a > 0$, o gráfico de f é uma reta que sobe quando olhada de esquerda para a direita;

2. se $a = 0$, o gráfico de f é uma reta horizontal;

3. se $a < 0$, o gráfico de f é uma reta que desce quando olhada de esquerda para a direita.

Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de uma reta, a *inclinação* da reta é definida por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Como o gráfico de uma função linear $f(x) = ax + b$ é uma reta, podemos determinar a sua inclinação. Para isso, escolhendo, por exemplo, os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$, vamos ter que a inclinação da reta é

$$m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{a + b - b}{1} = a\,.$$

Assim concluímos que o gráfico da função linear $f(x) = ax+b$ é uma reta com inclinação a.

Exemplo 5.1. Vamos encontrar a função linear cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(11, -4)$ e $(-4, 5)$. A inclinação da reta é

$$m = \frac{5 - (-4)}{-4 - 11} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}\,.$$

Logo, a função linear deve ter a forma $f(x) = -\frac{3}{5}x + b$. Para encontrar o valor de b, usamos o fato de que $f(11) = -4$. Logo,

$$-4 = -\frac{3}{5}(11) + b$$

e, por conseguinte, $b = 13/5$. Portanto, a função linear desejada é $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$.

5.2 Funções polinomiais

Uma *função polinomial* é definida pela equação

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são constantes. O domínio de qualquer função polinomial é $\mathbb{R}$. Se $a_n \neq 0$, diz-se que a função polinomial f tem *grau* n e que a_n é o seu *coeficiente líder*. Uma função polinomial de grau 2 é chamada de uma *função quadrática*. Uma função polinomial de grau 3 é chamada de uma *função cúbica*.

Exemplo 5.2. O gráfico da função polinomial $f(x) = x^n$ para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$ pode ser visto em uma figura online.

Diz-se que um número $a \in \mathbb{R}$ é uma *raiz* de uma função polinomial f se $f(a) = 0$.

Exemplo 5.3. Vamos encontrar as raízes da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$. Para isso, devemos resolver a equação

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0\,.$$

Reescrevendo essa equação como

$$x(x^2 - 3x - 4) = 0\,,$$

obtemos que $x = 0$ ou $x^2 - 3x - 4 = 0$. Logo, o número 0 é uma raiz de f. Para determinar outras (caso existam), devemos resolver a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$. Fazendo isso, temos que

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1\,. \end{cases}$$

Portanto, as raízes de f são $-1, 0$ e 4.

Dada uma função f, diz-se que $f(x)$ *tende para* L *quando* x *tende para infinito* e escreve-se $f(x) \to L$ quando $x \to \infty$ se $f(x)$ assume valores próximos do número L desde que se considerem valores positivos de x suficientemente grandes. Analogamente pode-se definir a situação $f(x) \to L$ quando $x \to -\infty$.

Exemplo 5.4. Se $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$, temos que $f(x) \to 2$ quando $x \to \infty$ e também quando $x \to -\infty$.

Dada uma função f, diz-se que $f(x)$ *tende para infinito quando x tende para infinito* e escreve-se $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ se $f(x)$ assume valores positivos muito grandes desde que se considerem valores positivos de x suficientemente grandes. Outras situações podem ser definidas de forma análoga.

Exemplo 5.5. Se $f(x) = x^2$, temos que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e também quando $x \to -\infty$.

Para fazer um esboço do gráfico de uma função polinomial f é conveniente realizar previamente as seguintes tarefas:

1. determinar as raízes de f;
2. descobrir o comportamento de $f(x)$ quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

Exemplo 5.6. No exemplo 5.3 foram determinadas as raízes da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$. Para descobrir o comportamento de $f(x)$ quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$, escrevemos a expressão de $f(x)$ como

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right).$$

Se $x \to \pm\infty$, as expressões $3/x$ e $4/x^2$ claramente tendem para 0. Assim, a expressão entre parênteses tende para 1. Por outro lado, $x^3 \to \infty$ quando $x \to \infty$ e $x^3 \to -\infty$ quando $x \to -\infty$. Portanto, temos que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$ (ver figura online).

Exercício 5.7. Esboce o gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ determinando previamente as suas raízes e o comportamento de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$. O gráfico de uma função quadrática qualquer é uma curva chamada de *parábola* (veja figura online).

5.3 Funções algébricas

Uma função f é dita uma função algébrica se a expressão de $f(x)$ envolve operações elementares, potências inteiras ou radiciação.

Exemplo 5.8. As seguintes expressões definem funções algébricas:

1. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + 4x^3$;
2. $g(x) = 5(3x^2 - 7)^{1/3}$;
3. $h(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{7x+1}}$.

Exercício 5.9. Determine o domínio das funções algébricas do exemplo 5.8.

Exemplo 5.10. O gráfico da função algébrica $f(x) = x^{1/n}$ pode ser encontrada em uma figura online.

6 Funções definidas por partes

Em alguns casos uma função f pode ser definida por diferentes expressões para diferentes partes do seu domínio.

Exemplo 6.1. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

O domínio de f é $\mathbb{R}$. Notamos que f é uma função linear no intervalo $(-\infty, 0)$ e é uma função quadrática no intervalo $[0, \infty)$. Para encontrar os interceptos do gráfico de f com o eixo x, devemos resolver a equação $f(x) = 0$. Se $x < 0$, temos a equação $x + 3 = 0$, de onde obtemos $x = -3$. Por outro lado, se $x \geq 0$, temos a equação $(x-2)^2 = 0$, de onde obtemos $x = 2$. Além disso, da definição de f podemos notar que $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$ e que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$. Com essas informações podemos fazer um esboço do gráfico de f (veja a figura online).

7 Transformação de funções

Seja f uma função. Vamos considerar as seguintes transformações sobre a expressão de $f(x)$: $f(x) + c, f(x) - c, f(x + c), f(x - c), cf(x), f(cx), -f(x)$ e $f(-x)$, em que $c > 0$. A seguinte tabela descreve os efeitos sobre o gráfico de f quando essas transformações são aplicadas.

Transformação sobre f $(c > 0)$	Efeito sobre o gráfico de f
$f(x) + c$	O gráfico sobe uma distância c
$f(x) + c$	O gráfico desce uma distância c (veja figura online)
$f(x + c)$	O gráfico se translada para a esquerda uma distância c
$f(x - c)$	O gráfico se translada para a direita uma distância c (veja figura online)
$cf(x)$	O gráfico se estica (comprime) verticalmente se $c > 1$ $(0 < c < 1)$ (veja figura online)
$f(cx)$	O gráfico se comprime (estica) horizontalmente se $c > 1$ $(0 < c < 1)$ (veja figura online)
$-f(x)$	O gráfico se reflete em relação ao eixo x
$f(-x)$	O gráfico se reflete em relação ao eixo y (veja figura online)

Exercício 7.1. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = -|x + 2| - 3$ (veja a figura online).

8 Funções trigonométricas

8.1 Radianos

Neste curso ângulos serão medidos em radianos a menos que se especifique outra unidade. Um ângulo de s radianos (podemos escrever às vezes $s\,\mathrm{rad}$) é o ângulo associado a um comprimento de arco de s unidades em uma circunferência de raio unitário (ver figura online). Sabemos que o comprimento de toda essa circunferência é 2π unidades. Como o ângulo em graus associado à circunferência completa é $360°$, temos a seguinte relação:

$$2\pi = 360^\circ\,.$$

Usando essa relação encontramos, por exemplo, que $180° = \pi$, $90° = \pi/2$, $45° = \pi/4$ e $30° = \pi/6$. Também podemos encontrar que

$$1 = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ\,.$$

Exercício 8.1.

1. Escreva $210°$ em radianos.

2. Escreva $11\pi/6$ em graus.

8.2 Definição das funções trigonométricas

No plano cartesiano consideremos uma circunferência de raio unitário com centro na origem de coordenadas (ponto O). Logo, consideremos um ponto P da circunferência cujas coordenadas sejam (x, y). Vamos chamar de θ o ângulo que começa no semieixo x positivo e termina no segmento OP (ver figura online). Definem-se as seguintes funções trigonométricas:

1. Função seno: $\operatorname{sen}\theta = y$;

2. Função cosseno: $\operatorname{sen}\theta = x$;

3. Função tangente: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$;

4. Função cotangente: $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$;

5. Função secante: $\sec\theta = \dfrac{1}{x}$;

6. Função cossecante: $\csc\theta = \dfrac{1}{y}$.

Dessas equações notamos imediatamente que as funções seno e cosseno estão definidas para todo ângulo θ, ou seja, ambas tem $\mathbb{R}$ como domínio. As funções tangente e secante estão definidas se $x \neq 0$. Isso corresponde a valores de θ diferentes de $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$. Logo, o domínio das funções tangente e secante é o conjunto

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Finalmente as funções cotangente e cossecante estão definidas se $y \neq 0$, o que corresponde a valores de θ diferentes de $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Portanto, o domínio das funções cotangente e cossecante é o conjunto

$$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 8.2. A seguinte tabela contém os valores das funções seno, cosseno e tangente para alguns ângulos especiais:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	Indefinido
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	Indefinido
2π	0	1	0

Seja P um ponto com coordenadas (x, y) que pertence a uma circunferência de raio r centrada na origem de coordenadas (ponto O). Se o ângulo que sai do semieixo x positivo e chega no segmento OP é θ, usando semelhança de triângulos, podemos concluir que (veja a figura online)

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta\,.$$

Levando em conta isso, podemos chegar nas definições elementares das funções trigonométricas para os ângulos agudos de um triângulo retângulo.

Exercício 8.3. Kowalski se encontra a 2 m de distância de uma haste vertical. Usando um apontador laser colocado no chão, ele aponta no topo da haste. Se o ângulo que o apontador laser faz com o chão é de 60°, determine a altura da haste.

8.3 Identidades trigonométricas

Vamos listar algumas identidades trigonométricas que serão de utilidade:

1. Identidades recíprocas:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\,.$$

2. Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1\,, \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{e} \quad 1 + \csc^2\theta = \cot^2\theta\,.$$

3. Adição ou subtração de ângulos:

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,.$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,.$$

4. Ângulo duplo:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\,.$$