Números reais

Max Jauregui

15 de novembro de 2022

Conteúdo

1 Linguagem de conjuntos **1**

2 Funções **2**

3 O corpo dos números reais **6**

4 Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis **10**

1 Linguagem de conjuntos

Um **conjunto** A é uma coleção de objetos quaisquer, chamados de **elementos** de A. Se x é um elemento de A, diz-se que x **pertence** a A e escreve-se $x \in A$; caso contrário, escreve-se $x \notin A$.

Exemplo. Se $A = \{1, 2, 3\}$, temos que $1 \in A$ e $4 \notin A$.

O **conjunto vazio**, denotado por $\varnothing$, é o conjunto que não tem elementos.

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A está **contido** em B ou que A é um **subconjunto** de B se $x \in A$ implica que $x \in B$.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$. Temos que $A \subset B$; porém, $A \not\subset C$.

Sejam A e B conjuntos.

1. Define-se a **união** de A e B, denotada por $A \cup B$, como o conjunto

formado por todos os elementos de A e B, ou seja,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

2. Define-se a **interseção** de A e B, denotada por $A \cap B$, como o conjunto formado por todos os elementos que A e B têm em comum, ou seja,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

3. Define-se a **diferença** $A - B$ como o conjunto formado por todos os elementos de A que não pertencem a B, ou seja,

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

4. Define-se o **produto cartesiano** $A \times B$ como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

   Dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se e somente se $x_1 = x_1$ e $y_1 = y_2$.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Temos que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A - B = \{2, 4\}$, $B - A = \{5\}$ e

$$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}.$$

2 Funções

Sejam A e B conjuntos. Uma **função** f de A em B pode ser definida como um subconjunto de $A \times B$ tal que para cada $x \in A$ existe um único par ordenado $(x, y) \in f$.

Exemplo. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{10, 20\}$, o conjunto

$$f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 20)\}$$

é uma função de A em B. No entanto, os conjuntos

$$g = \{(1, 10), (1, 20), (2, 20), (3, 20)\} \quad \text{e} \quad h = \{(1, 20), (3, 20)\}$$

não são funções de A em B.

Seja f uma função de A em B. Se $(x, y) \in f$, diz-se que y é o **valor** da função f no ponto x e escreve-se $y = f(x)$.

Exemplo. Para a função f do exemplo anterior temos que $f(1) = 10$, $f(2) = 10$ e $f(3) = 20$.

Uma função f de A em B é denotada simbolicamente por $f : A \to B$. O conjunto A é chamado de **domínio** de f e o conjunto B de **contradomínio** de f. Pode-se definir uma função $f : A \to B$ fornecendo uma regra que permita encontrar o valor $f(x) \in B$ para cada $x \in A$.

Exemplo. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$, podemos definir uma função $f : A \to B$ pondo, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } x \text{ é par.} \end{cases}$$

Dada uma função $f : A \to B$, define-se a **imagem de um conjunto** $E \subset A$ por f como o conjunto

$$f(E) = \{f(x) : x \in A\}.$$

O conjunto $f(A)$ é chamado de **imagem da função** f.

Exemplo. A imagem da função f do exemplo anterior é o conjunto $f(A) = \{1, 3\}$.

Diz-se que uma função $f : A \to B$ é **injetiva** se para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ tem-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$. A função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 3$ é injetiva. No entanto, a função $g : A \to B$ definida por $g(x) = 6$ não é injetiva.

Uma função $f : A \to B$ é dita **sobrejetiva** se $f(A) = B$.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. A função $f : A \to B$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \neq 4 \\ 4 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

é sobrejetiva. No entanto, a função $g : A \to B$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ 6 & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

não é sobrejetiva.

Diz-se que uma função $f : A \to B$ é **bijetiva** ou que é uma **bijeção** se ela é injetiva e sobrejetiva.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. A função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 3$ é uma bijeção.

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas funções. Se $f(A) \subset C$, define-se a **função composta** $g \circ f : A \to D$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemplo. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$, consideremos as funções $f : A \to B$ e $g : B \to D$ definidas respectivamente por $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 2$. Notamos que $f(A) = B$ e, por conseguinte, podemos definir a função composta $g \circ f : A \to C$. De fato, vamos ter que

$$(g \circ f)(x) = g(x + 3) = (x + 3) - 2 = x + 1$$

para todo $x \in A$. Por outro lado, como $g(B) = C \not\subset A$, a função composta $f \circ g : B \to A$ não pode ser definida.

Teorema. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Tem-se o seguinte:

1. Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ também é injetiva.
2. Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ também é sobrejetiva.
3. Se f e g são bijeções, então $g \circ f$ também é uma bijeção.

Seja $f : A \to B$ uma função. Diz-se que uma função $g : B \to A$ é uma **inversa à esquerda** de f se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Por outro lado, diz-se que uma função $h : B \to A$ é uma **inversa à direita** de f se $f(h(x)) = x$ para todo $x \in B$.

Teorema. Seja $f : A \to B$ uma função. Se $g : B \to A$ é uma inversa à esquerda de f e $h : B \to A$ é uma inversa à direita de f, então $g = h = f^{-1}$. Nesse caso, a função $f^{-1} : B \to A$ é chamada de **inversa** de f.

Demonstração. Temos que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(h(y)) = y$ para todo $y \in B$. Como $h(y) \in A$ para todo $y \in B$, então

$$g(y) = g(f(h(y))) = h(y)$$

para todo $y \in B$. ■

Teorema. Uma função $f : A \to B$ tem uma inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $g : B \to A$ uma inversa à esquerda de f. Se $x_1, x_2 \in A$ são tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$.

Logo, f é injetiva. ($\Leftarrow$) Se f é injetiva, para cada $y \in f(A)$ existe um único $x_y \in A$ tal que $y = f(x_y)$. Definimos então uma função $g : B \to A$ pondo

$$g(y) = \begin{cases} x_y & \text{se } y \in f(A) \\ a & \text{se } y \notin f(A), \end{cases}$$

em que $a \in A$ é um elemento arbitrário. Como $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, temos que g é uma inversa à esquerda de f. ■

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$. A função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 3$ é injetiva e, por conseguinte, tem uma inversa à esquerda. Por exemplo, a função $g : B \to A$ definida por[1]

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \neq 7 \\ 1 & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

é uma inversa à esquerda de f.

Teorema. Uma função $f : A \to B$ tem uma inversa à direita se, e somente se, ela é sobrejetiva.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $g : B \to A$ uma inversa à direita de f. Logo, para cada $y \in B$, temos que $f(g(y)) = y$. Como $g(y) \in A$, segue que $f(A) = B$. ($\Leftarrow$) Se $f(A) = B$, então para cada $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo, a função $g : B \to A$ definida por $g(y) = x_y$, em que $x_y \in A$ é tal que $f(x_y) = y$, é uma inversa à direita de f. ■

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. A função $f : A \to B$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

é sobrejetiva e, por conseguinte, tem uma inversa à direita. Por exemplo, a função $g : B \to A$ definida por $g(x) = x - 2$ é uma inversa à direita de f.

Corolário. Uma função $f : A \to B$ tem inversa se, e somente se, é uma bijeção.

[1] A expressão de $g(x)$ pode ser obtida resolvendo a equação $y = x + 3$ para x e depois permutando as variáveis x e y.

3 O corpo dos números reais[2]

Um conjunto F é chamado de um **corpo** se nele estão definidas duas operações, chamadas de **adição** $(+)$ e **multiplicação** $(\cdot)$, que têm as seguintes propriedades:

1. $x + y \in F$ para quaisquer $x, y \in F$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ para quaisquer $x, y, z \in F$;
3. $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in F$;
4. existe $0 \in F$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in F$;
5. para cada $x \in F$ existe $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$;
6. $xy \in F$ para quaisquer $x, y \in F$;
7. $x(yz) = (xy)z$ para quaisquer $x, y, z \in F$;
8. $xy = yx$ para quaisquer $x, y \in F$;
9. existe $1 \in F$, $1 \neq 0$, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in F$;
10. para cada $x \in F$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in F$ tal que $xx^{-1} = 1$;
11. $x(y + z) = xy + xz$ para quaisquer $x, y, z \in F$.

Exemplo. O conjunto dos números inteiros será denotado por $\mathbb{Z}$, ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

$\mathbb{Z}$ não é um corpo, pois, por exemplo, $2 \in \mathbb{Z}$ mas não existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2m = 1$.

Exemplo. O conjunto dos números racionais será denotado por $\mathbb{Q}$, ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

$\mathbb{Q}$ é um corpo.

Um corpo F é chamado de um **corpo ordenado** se existe uma **ordem** $<$ que tem as seguintes propriedades:

[2]Em uma primeira leitura podem ser omitidas as demonstrações dos teoremas desta seção.

1. dados $x, y \in F$ quaisquer, só uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$;

2. se $x, y, z \in F$, $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

3. se $x, y \in F$ e $x < y$, então $x + z < y + z$ para todo $z \in F$;

4. se $x, y, z \in F$, $x < y$ e $0 < z$, então $xz < yz$.

Exemplo. $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Seja F um corpo ordenado. Diz-se que um conjunto $A \subset F$ é **limitado superiormente** se existe $b \in F$ tal que $x < b$ para todo $x \in A$. Nesse caso, diz-se também que b é uma **cota superior** de A. Seja $A \subset F$ um conjunto limitado superiormente. Se existe $\beta \in F$ tal que

1. β é uma cota superior de A;

2. se b é uma cota superior de A, então $\beta \leqslant b$;

então diz-se que β é o **supremo** de A e escreve-se $\beta = \sup A$.

Diz-se que um conjunto $A \subset F$ é **limitado inferiormente** se existe $a \in F$ tal que $x > a$ para todo $x \in A$. Nesse caso, diz-se também que a é uma **cota inferior** de A. Seja $A \subset F$ um conjunto limitado inferiormente. Se existe $\alpha \in F$ tal que

1. α é uma cota inferior de A;

2. se α é uma cota inferior de A, então $\alpha \geqslant a$;

então diz-se que α é o **ínfimo** de A e escreve-se $\alpha = \inf A$.

Diz-se que um corpo ordenado F é **completo** se todo subconjunto de F não-vazio e limitado superiormente tem um supremo.

Exemplo. Vamos mostrar que $\mathbb{Q}$ não é um corpo ordenado completo. Para isso primeiramente vamos mostrar que não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Se isso fosse verdade existiriam inteiros positivos m e n primos relativos tais que $r = m/n$ e $r^2 = 2$. Logo, teríamos que $m^2 = 2n^2$ e, por conseguinte, $m = 2k$ para algum inteiro positivo k. No entanto, isso implicaria que $2k^2 = n^2$ e, por conseguinte, n e m seriam ambos pares, contradizendo a hipótese inicial de que m e n eram primos relativos. Portanto, se $r^2 = 2$, r não pode ser racional. Agora consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

Notamos que A é não-vazio e que 2 é uma cota superior de A, pois $x \geqslant 2$ implica que $x \notin A$. No entanto, vamos mostrar que A não tem supremo em $\mathbb{Q}$. Se $\beta \in \mathbb{Q}$ fosse o supremo de A, em virtude do que mostramos no início do exemplo, só teríamos duas possibilidades: $\beta^2 < 2$ ou $\beta^2 > 2$. Se $\beta^2 < 2$, podemos encontrar um $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < 1$ e $h < \dfrac{2-\beta^2}{2\beta+1}$. Logo,

$$(\beta + h)^2 = \beta^2 + 2\beta h + h^2 < \beta^2 + (2\beta + 1)h < 2$$

e, por conseguinte, $\beta + h \in A$, contradizendo a hipótese de que $\beta = \sup A$. Por outro lado, se $\beta^2 > 2$, podemos encontrar $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < \dfrac{\beta^2 - 2}{2\beta}$. Logo, se $x \geqslant \beta - h$, então

$$x^2 \geqslant (\beta - h)^2 = \beta^2 - 2\beta h + h^2 \geqslant \beta^2 - 2\beta h > 2$$

e, por conseguinte, $\beta - h$ é uma cota superior de A, contradizendo a hipótese de que $\beta = \sup A$. Portanto, como não podemos ter $\beta^2 < 2$ ou $\beta^2 > 2$, o conjunto A não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

Define-se o corpo dos **números reais**, denotado por $\mathbb{R}$, como um corpo ordenado completo que contém o corpo dos números racionais. O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é chamado de conjunto dos **números irracionais**.

Teorema ($\mathbb{R}$ é arquimediano). Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, existe um inteiro $n > 0$ tal que $nx > y$.

Demonstração. Se $x > y$, o teorema é trivial. Se $x < y$, consideremos o conjunto $A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$. Temos que A é não-vazio. Se A fosse limitado superiormente, existiria $\beta = \sup A$. Logo, como $\beta - x$ não seria uma cota superior de A, existiria um inteiro $n > 0$ tal que $\beta - x \leqslant nx$. Porém, isso implicaria que $\beta \leqslant (n+1)x$, contradizendo a hipótese de que $\beta = \sup A$. Logo, A não pode ser limitado superiormente e, por conseguinte, y não pode ser uma cota superior de A, ou seja, existe um inteiro $n > 0$ tal que $nx > y$. ■

Corolário. $\inf \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\} = 0$.

Teorema ($\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$). Dados $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer tais que $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Demonstração. Consideremos inicialmente que $0 \leqslant x < y$. Pelo corolário anterior existe um inteiro $n > 0$ tal que $1/n < y - x$. Consideremos agora o conjunto

$$A = \left\{ m \in \mathbb{Z} : m > 0, \frac{m}{n} \geqslant y \right\}.$$

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, temos que A é não-vazio. Seja m_0 o menor elemento de A. Logo, temos que $\frac{m_0-1}{n} < y$. Se tivéssemos $\frac{m_0-1}{n} \leqslant x$, teríamos que

$$\frac{m_0}{n} = \frac{m_0-1}{n} + \frac{1}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < y\,,$$

o que implicaria que $m_0 \notin A$. Assim, devemos ter $x < \frac{m_0-1}{n} < y$. Se $x < y \leqslant 0$, então $0 \leqslant -y < -x$ e, pelo que acabamos de provar, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $-y < r < -x$. Portanto, $x < -r < y$. Finalmente, o teorema é trivial no caso $x < 0 < y$, pois $0 \in \mathbb{Q}$. ■

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leqslant b$. Definem-se os seguintes **intervalos finitos**:

1. **Intervalo aberto**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. **Intervalo fechado**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
3. **Intervalos semiabertos**: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ e $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$

O intervalo fechado $[a, a] = \{a\}$ é chamado de **intervalo degenerado**. Definem-se também os seguintes **intervalos infinitos**:

1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$
3. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
4. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
5. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Teorema dos intervalos encaixados. Para cada inteiro $n > 0$ seja I_n um intervalo fechado. Se $I_{n+1} \subset I_n$ para todo n, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo n.

Demonstração. Para cada inteiro $n > 0$, seja $I_n = [a_n, b_n]$. Temos que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1\,.$$

O conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ é um conjunto não-vazio tal que qualquer b_n, com $n > 0$ inteiro, é uma cota superior de A. Logo, existe $c = \sup A$, o qual satisfaz a desigualdade $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ para todo inteiro $n > 0$. ■

4 Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis[3]

Seja $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos inteiros positivos. Diz-se que um conjunto A é **enumerável** se existe uma função injetiva $f : A \to \mathbb{Z}^+$.

Exemplo. O conjunto $A = \{a, b, c\}$ é enumerável, pois a função $f : A \to \mathbb{Z}^+$ definida por $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ e $f(c) = 3$ é injetiva. De fato, qualquer conjunto que tem um número finito de elementos é enumerável.

Exemplo. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um conjunto enumerável, pois a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{se } n \geqslant 0 \\ -2n & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

é injetiva (de fato é uma bijeção).

Exemplo. O conjunto $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável, pois a função $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definida por

$$f(m, n) = 2^m 3^n$$

é injetiva em virtude da unicidade da decomposição de inteiros positivos em fatores primos.

Teorema. Um conjunto A é enumerável se, e somente se, existe uma função sobrejetiva $f : \mathbb{Z}^+ \to A$.

Demonstração. Suponhamos que $g : A \to \mathbb{Z}^+$ seja uma função injetiva. Essa afirmação é equivalente a dizer que g tem uma inversa à esquerda $f : \mathbb{Z}^+ \to A$. A função f é sobrejetiva, pois g é uma inversa à direita dela. ■

Teorema. Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \times B$ também é um conjunto enumerável.

Demonstração. Existem funções injetivas $f : A \to \mathbb{Z}^+$ e $g : B \to \mathbb{Z}^+$. Podemos verificar imediatamente que a função $\phi : A \times B \to \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ definida por $\phi(x, y) = (f(x), g(y))$ é injetiva. Como $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável, existe uma função injetiva $h : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$. Logo, a função composta $h \circ \phi : A \times B \to \mathbb{Z}^+$ é injetiva e, por conseguinte, $A \times B$ é enumerável. ■

Exemplo ($\mathbb{Q}$ é enumerável). O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável, pois a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ definida por $f(m, n) = m/n$ é sobrejetiva e o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável.

Seja L um conjunto tal que, para cada $\alpha \in L$, A_α seja um conjunto. Isso define uma **família de conjuntos** $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$. Define-se a união dessa família

[3]Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura.

por

$$\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ para algum } \alpha \in L\}.$$

Define-se a interseção da família por

$$\bigcap_{\alpha \in L} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in L\}.$$

Teorema. Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma família de conjuntos. Se L é enumerável e, para cada $\alpha \in L$, A_α é enumerável, então a união $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ é um conjunto enumerável.

Demonstração. Para cada $\alpha \in L$ existe uma função sobrejetiva $f_\alpha : \mathbb{Z}^+ \to A_\alpha$. Podemos verificar facilmente que a função $\phi : L \times L \to \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ definida por

$$\phi(\alpha, x) = f_\alpha(x)$$

é sobrejetiva. Como $L \times L$ é enumerável, segue que $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ também é enumerável.

Teorema ($\mathbb{R}$ é não-enumerável). O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável.

Demonstração. Seja $E = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável arbitrário. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \neq E$. Para isso consideremos inicialmente um intervalo fechado não-dgenerado I_1 tal que $x_1 \notin I_1$. Supondo definido o intervalo fechado não-degenerado $I_n \subset I_1$ tal que $x_n \notin I_n$, temos as seguintes opções

1. $x_{n+1} \notin I_n$
2. $x_{n+1} \in I_n$

No primeiro caso, definimos $I_{n+1} = I_n$ e assim $I_{n+1} \subset I_n$. No segundo caso, x_{n+1} deve ser diferente de pelo menos um dos extremos do intervalo $I_n = [a_n, b_n]$. Logo, se, por exemplo, $x_{n+1} \neq a_n$, definimos $I_{n+1} = [a_n, (a_n + x_n)/2]$ e assim $I_{n+1} \subset I_n$. Esse procedimento nos permite definir, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, um intervalo fechado não-degenerado I_n tal que $x_n \notin I_n$ e $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Logo, $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e, por conseguinte, $c \notin E$. ■

Corolário. O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é não-enumerável.