Funções

Max Jauregui

21 de julho de 2022

1 Definições básicas

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma *relação* de A em B é um conjunto arbitrário de pares ordenados (x, y), em que $x \in A$ e $y \in B$. Uma *função* f de A em B é uma relação especial de A em B que tem as seguintes propriedades:

1. para cada $x \in A$ existe $y \in B$ tal que (x, y) pertence à relação;
2. se (x, y) e (x, z) pertencem à relação, então $y = z$.

Em outras palavras, cada $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$, o qual será denotado por $f(x)$ e será chamado de *valor da função* f no ponto x.

Exemplo 1.1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 5, 7\}$.

1. A relação $F = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\}$ é uma função de A em B.
2. A relação $R = \{(1, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ não é uma função de A em B pois $2 \in A$ não está relacionado com nenhum $y \in B$;
3. A relação $S = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 7)\}$ não é uma função de A em B, pois $(3, 5)$ e $(3, 7)$ pertencem à relação.

Uma função f de A em B é denotada de forma simbólica por $f : A \to B$. O conjunto A é chamado de *domínio* de f e o conjunto B de *contradomínio* de f.

Exemplo 1.2. No exemplo 1.1 foi definida uma função $F : A \to B$. Nesse caso, tem-se que $F(1) = 3$, $F(2) = 3$, $F(3) = 5$ e $F(4) = 5$.

Uma função $f : A \to B$ é chamada de uma *função real de uma variável real* quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Essa classe de funções será o nosso principal objeto de estudo neste curso.

Embora que para definir uma função seja necessário conhecer o seu domínio, na prática, comumente definem-se funções simplesmente por equações da forma

$$f(x) = \text{expressão envolvendo a variável } x\,.$$

Nesse caso, assume-se que o domínio da função f é o conjunto de todos os números $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão do lado direito faz sentido.

Exemplo 1.3.

1. A equação $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ define uma função f cujo domínio é $\mathbb{R}$, pois a expressão do lado direito faz sentido para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

2. A equação $g(x) = \dfrac{3}{x+5} - 3x^3$ define uma função g cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \{-5\}$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \neq -5$;

3. A equação $h(x) = 6\sqrt{3-2x}$ define uma função h cujo domínio é o intervalo $(-\infty, 3/2]$, pois a expressão do lado direito só faz sentido se $x \leq 3/2$.

Define-se a *imagem* de uma função f como o conjunto de todos os valores $f(x)$, com x no domínio de f.

Exemplo 1.4. Vamos determinar o domínio e a imagem da função definida pela equação

$$f(x) = \sqrt{4-2x} + 5\,.$$

Como a expressão do lado direito só faz sentido se $4 - 2x \geq 0$, segue que o domínio de f é o intervalo $(-\infty, 2]$. Para determinamos a imagem de f começamos notando que, independentemente do valor de $x \in (-\infty, 2]$, $\sqrt{4-2x} \geq 0$ e, por conseguinte, $f(x) \geq 5$. Isso quer dizer que a imagem de f está contida no intervalo $[5, \infty)$. Para concluir que todo esse intervalo é a imagem de f, devemos mostrar que para qualquer $y \in [5, \infty)$ podemos achar $x \in (-\infty, 2]$ tal que $y = \sqrt{4-2x} + 5$. Resolvendo essa equação, obtemos que

$$x = \frac{4-(y-5)^2}{2} = 2 - \frac{(y-5)^2}{2}\,.$$

Segue daqui que, independentemente do valor de $y \in [5, \infty)$, $x \in (-\infty, 2]$. Portanto, a imagem de f é o intervalo $[5, \infty)$.

Uma função f pode ser representada graficamente marcando os pontos $(x, f(x))$, com x no domínio de f, no plano cartesiano. Em geral, esse processo gera uma curva, a qual é chamada de *gráfico* de f. Como cada x no domínio de f está associado a um único valor de $f(x)$, o gráfico de f é uma curva tal que qualquer reta vertical corta a curva em no máximo um ponto (veja a figura online).

Exercício 1.5. Esboce o gráfico da função definida no exemplo 1.4 e determine os interceptos com os eixos.

2 Funções monótonas, pares e ímpares

Há quatro tipos de funções monótonas:

1. Uma função f é *monótona crescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$.

2. Uma função f é *monótona não-decrescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

3. Uma função f é *monótona decrescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

4. Uma função f é dita *monótona não-crescente* em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

O gráfico de uma função monótona crescente é uma curva que sobe quando olhada de esquerda para a direita. Por outro lado, o gráfico de uma função monótona decrescente é uma curva que desce quando olhada de esquerda para a direita.

Exemplo 2.1. Consideremos a função f definida pela equação $f(x) = x^2$. Vamos mostrar que f é monótona crescente no intervalo $[0, \infty)$ e é monótona decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$. Dados $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ com $x_1 < x_2$, temos que $x_1^2 < x_2^2$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, f é monótona crescente no intervalo $[0, \infty)$. Por outro lado, dados $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ com $x_1 < x_2$, temos que $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Logo, $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, o que implica que $x_1^2 > x_2^2$, ou seja, $f(x_1) > f(x_2)$. Portanto, f é monótona decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

O exemplo anterior revela que uma função pode ser monótona crescente em um intervalo e conjuntamente ser monótona decrescente em outro.

Diz-se que uma função f é *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x no domínio de f (isso implica tacitamente que $-x$ também pertence ao domínio de f). Por outro lado, diz-se que uma função g é *ímpar* se $g(-x) = -g(x)$ para todo x no domínio de g. Dessas definições, pode-se concluir diretamente que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y enquanto que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo 2.2.

1. A função $f(x) = x^4 - 3$ é uma função par, pois

$$f(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)\,.$$

2. A função $g(x) = x^7 - 5x^3 + x$ é uma função ímpar, pois

$$g(-x) = (-x)^7 - 5(-x)^3 + (-x) = -x^7 + 5x^3 - x = -g(x)\,.$$

3. A função $h(x) = 5x^2 + 3x - 7$ não é uma função par nem é uma função ímpar, pois podemos achar um valor de x no domínio de h (por exemplo, $x = 1$) tal que $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$.

3 Operações com funções

Sejam f e g duas funções.

1. Define-se a função $f+g$ pela equação $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. O domínio de $f+g$ é a interseção dos domínios de f e g.

2. Define-se a função $f-g$ pela equação $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$. O domínio de $f-g$ é a interseção dos domínios de f e g.

3. Define-se a função fg pela equação $(fg)(x) = f(x)g(x)$. O domínio de fg é a interseção dos domínios de f e g.

4. Define-se a função f/g pela equação $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. O domínio de f/g é a interseção dos domínios de f e g excluíndo os pontos x nos quais $g(x)=0$.

Exemplo 3.1. Sejam as funções $f(x) = 3x^2+5$ e $g(x) = \sqrt{2x-7}$. Nesse caso, a função f/g está definida por

$$(f/g)(x) = \frac{3x^2+5}{\sqrt{2x-7}}\,.$$

O domínio de f é $\mathbb{R}$ e o domínio de g é o intervalo $[7/2,\infty)$. Logo, a interseção dos domínios é $[7/2,\infty)$. Além disso, como $g(7/2)=0$, o domínio da função f/g é o intervalo $(7/2,\infty)$.

4 Composição de funções

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas funções. Se a imagem de f é um subconjunto de C, pode-se definir a *função composta* $g\circ f : A \to D$ por

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Exemplo 4.1. Consideremos as funções $f(x) = 5x^2+3$ e $g(x) = 2x-1$. O domínio de ambas as funções é $\mathbb{R}$. Logo, a imagem de qualquer uma das funções está contida no domínio da outra e, por conseguinte, as funções compostas $g\circ f$ e $f\circ g$ podem ser definidas. Vamos encontrar as expressões dessas funções compostas. Temos que

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x^2+3) = 2(5x^2+3)-1 = 10x^2+5\,.$$

A expressão de $(g\circ f)(x)$ também pode ser obtida da seguinte maneira:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x)-1 = 2(5x^2+3)-1 = 10x^2+5\,.$$

Por outro lado, temos que

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 5[g(x)]^2+3 = 5(2x-1)^2+3 = 5(4x^2-4x+1)+3 = 20x^2-20x+8\,.$$

Assim, notamos que mesmo quando as funções compostas $g\circ f$ e $f\circ g$ podem ser definidas, elas em geral são diferentes funções. Em outras palavras, a operação de composição de funções não é comutativa.

Exercício 4.2. A energia cinética de uma partícula de massa m que se move com uma velocidade v é dada por
$$E = \frac{mv^2}{2}\,.$$
Se a partícula realiza um movimento de queda livre, a sua velocidade em cada instante de tempo t é dada por
$$v = v_0 - gt\,,$$
em que v_0 e g são constantes. Determine a expressão da energia cinética da partícula para qualquer instante de tempo t.

5 Funções elementares

5.1 Funções lineares

Uma *função linear* é definida pela equação $f(x) = ax + b$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Se $a = 0$, a função linear $f(x) = b$ é chamada de uma *função constante*. O domínio de qualquer função linear é $\mathbb{R}$. Em relação ao gráfico de uma função linear $f(x) = ax + b$, temos os seguintes casos (veja a figura online):

1. se $a > 0$, o gráfico de f é uma reta que sobe quando olhada de esquerda para a direita;

2. se $a = 0$, o gráfico de f é uma reta horizontal;

3. se $a < 0$, o gráfico de f é uma reta que desce quando olhada de esquerda para a direita.

Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de uma reta, a *inclinação* da reta é definida por
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$
Como o gráfico de uma função linear $f(x) = ax + b$ é uma reta, podemos determinar a sua inclinação. Para isso, escolhendo, por exemplo, os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$, vamos ter que a inclinação da reta é
$$m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{a + b - b}{1} = a\,.$$
Assim concluímos que o gráfico da função linear $f(x) = ax+b$ é uma reta com inclinação a.

Exemplo 5.1. Vamos encontrar a função linear cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(11, -4)$ e $(-4, 5)$. A inclinação da reta é
$$m = \frac{5 - (-4)}{-4 - 11} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}\,.$$

Logo, a função linear deve ter a forma $f(x) = -\frac{3}{5}x + b$. Para encontrar o valor de b, usamos o fato de que $f(11) = -4$. Logo,

$$-4 = -\frac{3}{5}(11) + b$$

e, por conseguinte, $b = 13/5$. Portanto, a função linear desejada é $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$.

5.2 Funções polinomiais

Uma *função polinomial* é definida pela equação

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são constantes. O domínio de qualquer função polinomial é $\mathbb{R}$. Se $a_n \neq 0$, diz-se que a função polinomial f tem *grau* n e que a_n é o seu *coeficiente líder*. Uma função polinomial de grau 2 é chamada de uma *função quadrática*. Uma função polinomial de grau 3 é chamada de uma *função cúbica*.

Exemplo 5.2. O gráfico da função polinomial $f(x) = x^n$ para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$ pode ser visto em uma figura online.

Diz-se que um número $a \in \mathbb{R}$ é uma *raiz* de uma função polinomial f se $f(a) = 0$.

Exemplo 5.3. Vamos encontrar as raízes da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$. Para isso, devemos resolver a equação

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0\,.$$

Podemos reescrever essa equação como

$$x(x^2 - 3x - 4) = 0\,.$$

Segue daqui que $x = 0$ ou $x^2 - 3x - 4 = 0$. Logo, o número 0 é uma raiz de f. Para determinar outras (caso existam), devemos resolver a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$. Assim, temos que

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1\,. \end{cases}$$

Portanto, as raízes de f são $-1, 0$ e 4.