

Números reais

Max Jauregui

16 de novembro de 2022

Conteúdo

1	Linguagem de conjuntos	1
2	Funções	2
3	O corpo dos números reais	6
4	Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis	10

1 Linguagem de conjuntos

Um **conjunto** A é uma coleção de objetos quaisquer, chamados de **elementos** de A . Se x é um elemento de A , diz-se que x **pertence** a A e escreve-se $x \in A$; caso contrário, escreve-se $x \notin A$.

Exemplo 1. Se $A = \{1, 2, 3\}$, temos que $1 \in A$ e $4 \notin A$.

O **conjunto vazio**, denotado por \emptyset , é o conjunto que não tem elementos.

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A está **contido** em B ou que A é um **subconjunto** de B se $x \in A$ implica que $x \in B$.

Exemplo 2. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$. Temos que $A \subset B$; porém, $A \not\subset C$.

Sejam A e B conjuntos.

1. Define-se a **união** de A e B , denotada por $A \cup B$, como o conjunto formado por todos os elementos de A e B , ou seja,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

2. Define-se a **interseção** de A e B , denotada por $A \cap B$, como o conjunto formado por todos os elementos que A e B têm em comum, ou seja,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

3. Define-se a **diferença** $A - B$ como o conjunto formado por todos os elementos de A que não pertencem a B , ou seja,

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

4. Define-se o **produto cartesiano** $A \times B$ como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , com $x \in A$ e $y \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Exemplo 3. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Temos que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A - B = \{2, 4\}$, $B - A = \{5\}$ e

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}.$$

2 Funções

Sejam A e B conjuntos. Uma **função** f de A em B pode ser definida como um subconjunto de $A \times B$ tal que para cada $x \in A$ existe um único par ordenado $(x, y) \in f$.

Exemplo 4. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{10, 20\}$, o conjunto

$$f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 20)\}$$

é uma função de A em B . No entanto, os conjuntos

$$g = \{(1, 10), (1, 20), (2, 20), (3, 20)\} \quad \text{e} \quad h = \{(1, 20), (3, 20)\}$$

não são funções de A em B .

Seja f uma função de A em B . Se $(x, y) \in f$, diz-se que y é o **valor** da função f no ponto x e escreve-se $y = f(x)$.

Exemplo 5. Para a função f do exemplo anterior temos que $f(1) = 10$, $f(2) = 10$ e $f(3) = 20$.

Uma função f de A em B é denotada simbolicamente por $f : A \rightarrow B$. O conjunto A é chamado de **domínio** de f e o conjunto B de **contradomínio** de f . Pode-se definir uma função $f : A \rightarrow B$ fornecendo uma regra que permita encontrar o valor $f(x) \in B$ para cada $x \in A$.

Exemplo 6. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$, podemos definir uma função $f : A \rightarrow B$ pondo, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } x \text{ é par.} \end{cases}$$

Dada uma função $f : A \rightarrow B$, define-se a **imagem de um conjunto** $E \subset A$ por f como o conjunto

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

O conjunto $f(A)$ é chamado de **imagem da função** f .

Diz-se que uma função $f : A \rightarrow B$ é **injetiva** se para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ tem-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo 7. A imagem da função f do exemplo anterior é o conjunto $f(A) = \{1, 3\}$.

Exemplo 8. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$. A função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 3$ é injetiva. No entanto, a função $g : A \rightarrow B$ definida por $g(x) = 6$ não é injetiva.

Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **sobrejetiva** se $f(A) = B$.

Exemplo 9. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. A função $f : A \rightarrow B$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \neq 4 \\ 4 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

é sobrejetiva. No entanto, a função $g : A \rightarrow B$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ 6 & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

não é sobrejetiva.

Diz-se que uma função $f : A \rightarrow B$ é **bijetiva** ou que é uma **bijeção** se ela é injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 10. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. A função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 3$ é uma bijeção.

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ duas funções. Se $f(A) \subset C$, define-se a **função composta** $g \circ f : A \rightarrow D$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemplo 11. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$, consideremos as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ definidas respectivamente por $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 2$. Notamos que $f(A) = B$ e, por conseguinte, podemos definir a função composta $g \circ f : A \rightarrow C$. De fato, vamos ter que

$$(g \circ f)(x) = g(x + 3) = (x + 3) - 2 = x + 1$$

para todo $x \in A$. Por outro lado, como $g(B) = C \not\subset A$, a função composta $f \circ g : B \rightarrow A$ não pode ser definida.

Teorema 12. *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ funções. Tem-se o seguinte:*

1. *Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ também é injetiva.*
2. *Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ também é sobrejetiva.*
3. *Se f e g são bijeções, então $g \circ f$ também é uma bijeção.*

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Diz-se que uma função $g : B \rightarrow A$ é uma **inversa à esquerda** de f se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Por outro lado, diz-se que uma função $h : B \rightarrow A$ é uma **inversa à direita** de f se $f(h(x)) = x$ para todo $x \in B$.

Teorema 13. *Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Se $g : B \rightarrow A$ é uma inversa à esquerda de f e $h : B \rightarrow A$ é uma inversa à direita de f , então $g = h = f^{-1}$. Nesse caso, a função $f^{-1} : B \rightarrow A$ é chamada de **inversa** de f .*

Demonstração. Temos que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(h(y)) = y$ para todo $y \in B$. Como $h(y) \in A$ para todo $y \in B$, então

$$g(y) = g(f(h(y))) = h(y)$$

para todo $y \in B$. □

Teorema 14. *Uma função $f : A \rightarrow B$ tem uma inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $g : B \rightarrow A$ uma inversa à esquerda de f . Se $x_1, x_2 \in A$ são tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Logo, f é injetiva. (\Leftarrow) Se f é injetiva, para cada $y \in f(A)$ existe um único $x_y \in A$ tal que $y = f(x_y)$. Definimos então uma função $g : B \rightarrow A$ pondo

$$g(y) = \begin{cases} x_y & \text{se } y \in f(A) \\ a & \text{se } y \notin f(A), \end{cases}$$

em que $a \in A$ é um elemento arbitrário. Como $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, temos que g é uma inversa à esquerda de f . \square

Exemplo 15. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$. A função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 3$ é injetiva e, por conseguinte, tem uma inversa à esquerda. Por exemplo, a função $g : B \rightarrow A$ definida por¹

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \neq 7 \\ 1 & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

é uma inversa à esquerda de f .

Teorema 16. *Uma função $f : A \rightarrow B$ tem uma inversa à direita se, e somente se, ela é sobrejetiva.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $g : B \rightarrow A$ uma inversa à direita de f . Logo, para cada $y \in B$, temos que $f(g(y)) = y$. Como $g(y) \in A$, segue que $f(A) = B$. (\Leftarrow) Se $f(A) = B$, então para cada $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo, a função $g : B \rightarrow A$ definida por $g(y) = x_y$, em que $x_y \in A$ é tal que $f(x_y) = y$, é uma inversa à direita de f . \square

Exemplo 17. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. A função $f : A \rightarrow B$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

é sobrejetiva e, por conseguinte, tem uma inversa à direita. Por exemplo, a função $g : B \rightarrow A$ definida por $g(x) = x - 2$ é uma inversa à direita de f .

Corolário 18. *Uma função $f : A \rightarrow B$ tem inversa se, e somente se, é uma bijeção.*

¹A expressão de $g(x)$ pode ser obtida resolvendo a equação $y = x + 3$ para x e depois permutando as variáveis x e y .

3 O corpo dos números reais²

Um conjunto F é chamado de um **corpo** se nele estão definidas duas operações, chamadas de **adição** (+) e **multiplicação** (\cdot), que têm as seguintes propriedades:

1. $x + y \in F$ para quaisquer $x, y \in F$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ para quaisquer $x, y, z \in F$;
3. $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in F$;
4. existe $0 \in F$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in F$;
5. para cada $x \in F$ existe $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$;
6. $xy \in F$ para quaisquer $x, y \in F$;
7. $x(yz) = (xy)z$ para quaisquer $x, y, z \in F$;
8. $xy = yx$ para quaisquer $x, y \in F$;
9. existe $1 \in F$, $1 \neq 0$, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in F$;
10. para cada $x \in F$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in F$ tal que $xx^{-1} = 1$;
11. $x(y + z) = xy + xz$ para quaisquer $x, y, z \in F$.

Exemplo 19. O conjunto dos números inteiros será denotado por \mathbb{Z} , ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

\mathbb{Z} não é um corpo, pois, por exemplo, $2 \in \mathbb{Z}$ mas não existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2m = 1$.

Exemplo 20. O conjunto dos números racionais será denotado por \mathbb{Q} , ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

\mathbb{Q} é um corpo.

Um corpo F é chamado de um **corpo ordenado** se existe uma **ordem** $<$ que tem as seguintes propriedades:

²Em uma primeira leitura podem ser omitidas as demonstrações dos teoremas desta seção.

1. dados $x, y \in F$ quaisquer, só uma das seguintes afirmações é verdadeira:
 $x < y$, $x = y$ ou $y < x$;
2. se $x, y, z \in F$, $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;
3. se $x, y \in F$ e $x < y$, então $x + z < y + z$ para todo $z \in F$;
4. se $x, y, z \in F$, $x < y$ e $0 < z$, então $xz < yz$.

Exemplo 21. \mathbb{Q} é um corpo ordenado.

Seja F um corpo ordenado. Diz-se que um conjunto $A \subset F$ é **limitado superiormente** se existe $b \in F$ tal que $x < b$ para todo $x \in A$. Nesse caso, diz-se também que b é uma **cota superior** de A . Seja $A \subset F$ um conjunto limitado superiormente. Se existe $\beta \in F$ tal que

1. β é uma cota superior de A ;
2. se b é uma cota superior de A , então $\beta \leq b$;

então diz-se que β é o **supremo** de A e escreve-se $\beta = \sup A$.

Diz-se que um conjunto $A \subset F$ é **limitado inferiormente** se existe $a \in F$ tal que $x > a$ para todo $x \in A$. Nesse caso, diz-se também que a é uma **cota inferior** de A . Seja $A \subset F$ um conjunto limitado inferiormente. Se existe $\alpha \in F$ tal que

1. α é uma cota inferior de A ;
2. se α é uma cota inferior de A , então $\alpha \geq a$;

então diz-se que α é o **ínfimo** de A e escreve-se $\alpha = \inf A$.

Diz-se que um corpo ordenado F é **completo** se todo subconjunto de F não-vazio e limitado superiormente tem um supremo.

Exemplo 22. Vamos mostrar que \mathbb{Q} não é um corpo ordenado completo. Para isso primeiramente vamos mostrar que não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Se isso fosse verdade existiriam inteiros positivos m e n primos relativos tais que $r = m/n$ e $r^2 = 2$. Logo, teríamos que $m^2 = 2n^2$ e, por conseguinte, $m = 2k$ para algum inteiro positivo k . No entanto, isso implicaria que $2k^2 = n^2$ e, por conseguinte, n e m seriam ambos pares, contradizendo a hipótese inicial de que m e n eram primos relativos. Portanto, se $r^2 = 2$, r não pode ser racional. Agora consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

Notamos que A é não-vazio e que 2 é uma cota superior de A , pois $x \geq 2$ implica que $x \notin A$. No entanto, vamos mostrar que A não tem supremo em \mathbb{Q} . Se $\beta \in \mathbb{Q}$ fosse o supremo de A , em virtude do que mostramos no início do exemplo, só teríamos duas possibilidades: $\beta^2 < 2$ ou $\beta^2 > 2$. Se $\beta^2 < 2$, podemos encontrar um $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < 1$ e $h < \frac{2 - \beta^2}{2\beta + 1}$. Logo,

$$(\beta + h)^2 = \beta^2 + 2\beta h + h^2 < \beta^2 + (2\beta + 1)h < 2$$

e, por conseguinte, $\beta + h \in A$, contradizendo a hipótese de que $\beta = \sup A$. Por outro lado, se $\beta^2 > 2$, podemos encontrar $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < \frac{\beta^2 - 2}{2\beta}$. Logo, se $x \geq \beta - h$, então

$$x^2 \geq (\beta - h)^2 = \beta^2 - 2\beta h + h^2 \geq \beta^2 - 2\beta h > 2$$

e, por conseguinte, $\beta - h$ é uma cota superior de A , contradizendo a hipótese de que $\beta = \sup A$. Portanto, como não podemos ter $\beta^2 < 2$ ou $\beta^2 > 2$, o conjunto A não tem supremo em \mathbb{Q} .

Define-se o corpo dos **números reais**, denotado por \mathbb{R} , como um corpo ordenado completo que contém o corpo dos números racionais. O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é chamado de conjunto dos **números irracionais**.

Teorema 23 (\mathbb{R} é arquimediano). *Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, existe um inteiro $n > 0$ tal que $nx > y$.*

Demonstração. Se $x > y$, o teorema é trivial. Se $x < y$, consideremos o conjunto $A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$. Temos que A é não-vazio. Se A fosse limitado superiormente, existiria $\beta = \sup A$. Logo, como $\beta - x$ não seria uma cota superior de A , existiria um inteiro $n > 0$ tal que $\beta - x \leq nx$. Porém, isso implicaria que $\beta \leq (n + 1)x$, contradizendo a hipótese de que $\beta = \sup A$. Logo, A não pode ser limitado superiormente e, por conseguinte, y não pode ser uma cota superior de A , ou seja, existe um inteiro $n > 0$ tal que $nx > y$. \square

Corolário 24. $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\} = 0$.

Teorema 25 (\mathbb{Q} é denso em \mathbb{R}). *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer tais que $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que $0 \leq x < y$. Pelo corolário anterior existe um inteiro $n > 0$ tal que $1/n < y - x$. Consideremos agora o conjunto

$$A = \left\{ m \in \mathbb{Z} : m > 0, \frac{m}{n} \geq y \right\}.$$

Como \mathbb{R} é arquimediano, temos que A é não-vazio. Seja m_0 o menor elemento de A . Logo, temos que $\frac{m_0-1}{n} < y$. Se tivéssemos $\frac{m_0-1}{n} \leq x$, teríamos que

$$\frac{m_0}{n} = \frac{m_0-1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y,$$

o que implicaria que $m_0 \notin A$. Assim, devemos ter $x < \frac{m_0-1}{n} < y$. Se $x < y \leq 0$, então $0 \leq -y < -x$ e, pelo que acabamos de provar, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $-y < r < -x$. Portanto, $x < -r < y$. Finalmente, o teorema é trivial no caso $x < 0 < y$, pois $0 \in \mathbb{Q}$. \square

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Definem-se os seguintes **intervalos finitos**:

1. **Intervalo aberto**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. **Intervalo fechado**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
3. **Intervalos semiabertos**: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ e $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

O intervalo fechado $[a, a] = \{a\}$ é chamado de **intervalo degenerado**. Definem-se também os seguintes **intervalos infinitos**:

1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
3. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
4. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
5. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Teorema 26 (dos intervalos encaixados). *Para cada inteiro $n > 0$ seja I_n um intervalo fechado. Se $I_{n+1} \subset I_n$ para todo n , então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo n .*

Demonstração. Para cada inteiro $n > 0$, seja $I_n = [a_n, b_n]$. Temos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ é um conjunto não-vazio tal que qualquer b_n , com $n > 0$ inteiro, é uma cota superior de A . Logo, existe $c = \sup A$, o qual satisfaz a desigualdade $a_n \leq c \leq b_n$ para todo inteiro $n > 0$. \square

4 Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis³

Seja \mathbb{Z}^+ o conjunto dos inteiros positivos. Diz-se que um conjunto A é **enumerável** se existe uma função injetiva $f : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$.

Exemplo 27. O conjunto $A = \{a, b, c\}$ é enumerável, pois a função $f : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ definida por $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ e $f(c) = 3$ é injetiva. De fato, qualquer conjunto que tem um número finito de elementos é enumerável.

Exemplo 28. O conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros é um conjunto enumerável, pois a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{se } n \geq 0 \\ -2n & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

é injetiva (de fato é uma bijeção).

Exemplo 29. O conjunto $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável, pois a função $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ definida por

$$f(m, n) = 2^m 3^n$$

é injetiva em virtude da unicidade da decomposição de inteiros positivos em fatores primos.

Teorema 30. *Um conjunto A é enumerável se, e somente se, existe uma função sobrejetiva $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.*

Demonstração. Suponhamos que $g : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ seja uma função injetiva. Essa afirmação é equivalente a dizer que g tem uma inversa à esquerda $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. A função f é sobrejetiva, pois g é uma inversa à direita dela. \square

Teorema 31. *Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \times B$ também é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Existem funções injetivas $f : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ e $g : B \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Podemos verificar imediatamente que a função $\phi : A \times B \rightarrow \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ definida por $\phi(x, y) = (f(x), g(y))$ é injetiva. Como $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável, existe uma função injetiva $h : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$. Logo, a função composta $h \circ \phi : A \times B \rightarrow \mathbb{Z}^+$ é injetiva e, por conseguinte, $A \times B$ é enumerável. \square

Exemplo 32 (\mathbb{Q} é enumerável). O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é enumerável, pois a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(m, n) = m/n$ é sobrejetiva e o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável.

³Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura.

Seja L um conjunto tal que, para cada $\alpha \in L$, A_α seja um conjunto. Isso define uma **família de conjuntos** $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$. Define-se a união dessa família por

$$\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ para algum } \alpha \in L\}.$$

Define-se a interseção da família por

$$\bigcap_{\alpha \in L} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in L\}.$$

Teorema 33. *Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma família de conjuntos. Se L é enumerável e, para cada $\alpha \in L$, A_α é enumerável, então a união $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Para cada $\alpha \in L$ existe uma função sobrejetiva $f_\alpha : \mathbb{Z}^+ \rightarrow A_\alpha$. Podemos verificar facilmente que a função $\phi : L \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ definida por

$$\phi(\alpha, x) = f_\alpha(x)$$

é sobrejetiva. Como $L \times \mathbb{Z}^+$ é enumerável, segue que $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ também é enumerável. \square

Teorema 34 (\mathbb{R} é não-enumerável). *O conjunto \mathbb{R} dos números reais é não-enumerável.*

Demonstração. Seja $E = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável arbitrário. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \neq E$. Para isso consideremos inicialmente um intervalo fechado não-degenerado I_1 tal que $x_1 \notin I_1$. Supondo definido o intervalo fechado não-degenerado $I_n \subset I_1$ tal que $x_n \notin I_n$, temos as seguintes opções

1. $x_{n+1} \notin I_n$
2. $x_{n+1} \in I_n$

No primeiro caso, definimos $I_{n+1} = I_n$ e assim $I_{n+1} \subset I_n$. No segundo caso, x_{n+1} deve ser diferente de pelo menos um dos extremos do intervalo $I_n = [a_n, b_n]$. Logo, se, por exemplo, $x_{n+1} \neq a_n$, definimos $I_{n+1} = [a_n, (a_n + x_{n+1})/2]$ e assim $I_{n+1} \subset I_n$. Esse procedimento nos permite definir, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, um intervalo fechado não-degenerado I_n tal que $x_n \notin I_n$ e $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Logo, $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e, por conseguinte, $c \notin E$. \square

Corolário 35. *O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é não-enumerável.*