Terceira lista de álgebra linear

Prof.: Max Jáuregui

1. Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ com a definição usual de multiplicação por um número real. Mostre que $\mathbb{R}^2$ não é um espaço vetorial se a adição é definida por

   (a) $u + v = (x_1 + x_2, 0)$

   (b) $u + v = (x_1 x_2, y_1 y_2)$

   para quaisquer $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$.

2. Seja E um espaço vetorial. Usando as propriedades de espaço vetorial e o fato de que $u + v = u + w \Rightarrow v = w$ para quaisquer $u, v, w \in E$, mostre que $(-1)v = -v$.

3. Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ vetores não-nulos de $\mathbb{R}^2$. Mostre que u é um múltiplo de v (u é paralelo a v) se, e somente se, $ad - bc = 0$.

4. Mostre que o conjunto S das matrizes simétricas 3×3 é um subespaço do espaço vetorial $M(3 \times 3)$ das matrizes 3×3.

5. Mostre que o conjunto P das funções pares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6. Encontre o subespaço gerado pelas funções polinomiais $p_0, p_1, \ldots, p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $p_k(x) = x^k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

7. Mostre que o conjunto $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Esse subespaço é chamado de um *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$.

8. Mostre que o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

   sempre tem solução (encontre uma solução particular que não depende dos valores dos coeficientes a_{ij}). Além disso, mostre que o conjunto das soluções desse sistema é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ (perceba que cada equação do sistema está associada a um hiperplano de $\mathbb{R}^n$).

9. É possível escrever o vetor $(2, 3, 6)$ como combinação linear dos vetores $(1, 2, 1)$ e $(0, 4, 1)$?

10. Usando o exercício 3 e a regra de Cramer, mostre que se $u, v \in \mathbb{R}^2$ são vetores não-nulos e não-paralelos, então o subespaço gerado por $\{u, v\}$ é $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\{u, v\}$ é um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^2$.

11. Encontre dois conjuntos de geradores diferentes para o espaço vetorial $E = \{(\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$. É possível achar um conjunto de geradores de E que contenha mais de um vetor?