Quarta lista de álgebra linear

Prof.: Max Jáuregui

1. Dê um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ que tenha dois vetores L.I. cujas primeiras coordenadas sejam iguais a 1.

2. Mostre que o conjunto $X = \{(1,2,3),(4,5,6),(7,6,8)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.D..

3. Mostre que o conjunto $\mathcal{B} = \{(-1,1,2),(1,1,1),(1,-1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

4. Escreva o vetor $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ como uma combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$ do exercício anterior.

5. Seja $M(2\times 2)$ o espaço vetorial das matrizes 2×2. Quál é a dimensão desse espaço? Adicionalmente, mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

   é uma base de $M(2\times 2)$.

6. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ como uma combinação linear das matrizes da base $\mathcal{B}$ do exercício anterior.

7. Mostre que o conjunto $X = \{(1,0,1,0),(1,2,3,4),(0,0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I.. Quál é a dimensão do subespaço gerado por X? É menor do que 4?

8. Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3. Quál é a dimensão desse espaço? Adicionalmente, mostre que $\mathcal{B} = \{x^2-2x+1, x^3, x^3-x, 4\}$ é uma base de $\mathcal{P}_3$.

9. Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ são L.I.

   (a) $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$

   (b) $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$

   (c) $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x\}$

   Dica: Use derivada.

10. O espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tem dimensão infinita. Quais são as dimensões dos subespaços gerados pelos subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ considerados no exercício anterior.