Segunda lista de álgebra linear

Prof.: Max Jáuregui

1. Determine o sinal das seguintes permutações da lista $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$:

   (a) $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$

   (b) $(4, 5, 2, 1, 3, 6)$

   (c) $(2, 1, 4, 3, 6, 5)$

2. Justifique por que o determinante de uma matriz quadrada qualquer que tem uma coluna nula é igual a zero.

3. Calcule os seguintes determinantes:

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

4. Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \quad \text{e que} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\,.$$

   Comentário: O determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

   é conhecido como determinante de Vandermonde e pode-se provar que ele é igual a

$$\prod_{j=1}^{n} \prod_{i>j} (x_i - x_j)\,.$$

5. Mostre que

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}$$

é um polinômio cujas raízes são 2 e 3.

6. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz antissimétrica que tem um número ímpar de linhas, mostre que $\det(\mathbf{a}) = 0$. *Dica:* $\mathbf{a}^T = -\mathbf{a}$.

7. Dê um exemplo de uma matriz antissimétrica de ordem 2×2 que seja invertível.

8. Dê um exemplo de uma matriz 3×3 que não seja triangular e que seja invertível.

9. Dê um exemplo de uma matriz 4×4 que não seja triangular e que seja invertível.

10. Dadas as matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

calcule $\det(\mathbf{ab})$ e $\det(\mathbf{ba})$.

11. Use a regra de Cramer para resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 10 \\ 4x + 7y &= 2\,. \end{aligned}$$

12. Usando determinantes calcule a inversa das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$