Notas de álgebra linear

Max Jáuregui

11 de Setembro de 2019

Estas notas foram criadas principalmente para meu uso pessoal e pode eventualmente ser usado como um curso elementar de álgebra linear. Todo o conteúdo foi produzido por mim, seguindo como roteiro o livro: E. L. Lima, *Álgebra linear*, 8 ed. (IMPA, Rio de Janeiro, 2012).

Max Jáuregui

Conteúdo

Capítulo 1

Matrizes

Uma **matriz** de **ordem** $m \times n$ é um arranjo retangular de mn números reais ou complexos que tem m linhas e n colunas. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $m \times n$, então

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, o número a_{ij} é chamado de **elemento** na posição (i, j) da matriz $\mathbf{a}$.

Formatos especiais de matrizes:

1. **Matriz quadrada:** É uma matriz cujo número de linhas é igual ao seu número de colunas. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz quadrada, os elementos a_{ii} são chamados de elementos da **diagonal** de $\mathbf{a}$. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & \pi \end{bmatrix}.$$

   Os elementos da diagonal dessas matrizes são $(4, -1)$ e $(5, 0, \pi)$ respectivamente.

2. **Matriz diagonal:** É uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

3. **Matriz identidade:** É uma matriz diagonal na qual todos os elementos da diagonal são iguais a 1. A matriz identidade $n \times n$ é denotada por $\mathbf{I}_n$. Exemplos:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. **Matriz triangular superior:** É uma matriz quadrada na qual todos os elementos debaixo da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

5. **Matriz triangular inferior:** É uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \pi \end{bmatrix}.$$

6. **Matriz simétrica:** É uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer i e j, ou seja, é uma matriz simétrica em relação à sua diagonal. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \pi \end{bmatrix}.$$

7. **Matriz antissimétrica:** É uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ tal que $a_{ij} = -a_{ji}$ para quaisquer i e j. Segue daqui que $a_{ii} = -a_{ii}$ para todo i, o que implica que os elementos da diagonal de $\mathbf{a}$ são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. **Matriz hermitiana:** É uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ tal que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para quaisquer i e j, em que $\overline{a_{ji}}$ denota o complexo conjugado de a_{ji}. Segue daqui que $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ para todo i, o que implica que os elementos da diagonal de $\mathbf{a}$ são reais. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3i \\ -3i & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3+i & 0 \\ 3-i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & \pi \end{bmatrix}.$$

Como veremos mais na frente, o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ é um espaço vetorial, pois nele podem ser definidas duas operações: adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um número (real ou complexo dependendo das circunstâncias). As seguintes equações definem essas operações:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \alpha\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar facilmente que essas operações têm as seguintes propriedades:

1. Associatividade: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ e $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$.

2. Comutatividade: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

3. Elemento neutro: Existe uma matriz $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ para qualquer $\mathbf{a}$.

4. Elemento inverso: Para cada $\mathbf{a}$ existe uma matriz $-\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

5. Multiplicação por 1: $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

6. Distributividade: $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ e $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.

Define-se a **transposta** de uma matriz $\mathbf{a}$ como a matriz $\mathbf{a}^T$ cujas linhas são as colunas de $\mathbf{a}$, ou seja, $a^T_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer i e j. Segue diretamente dessa definição que $(\mathbf{a}^T)^T = \mathbf{a}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T$ e $(\alpha\mathbf{a})^T = \alpha\mathbf{a}^T$.

Exemplos:

1. Uma matriz $\mathbf{a}$ é simétrica (antissimétrica) se, e somente se, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^T$ ($\mathbf{a} = -\mathbf{a}^T$).

2. Toda matriz quadrada $\mathbf{a}$ pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. Com efeito, definindo $\mathbf{s} = (\mathbf{a}+\mathbf{a}^T)/2$ e $\mathbf{t} = (\mathbf{a}-\mathbf{a}^T)/2$, temos que $\mathbf{s} = \mathbf{s}^T$, $\mathbf{t} = -\mathbf{t}^T$ e $\mathbf{a} = \mathbf{s}+\mathbf{t}$.

Além das duas operações anteriores, pode ser definida uma **multiplicação de matrizes**. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $m\times n$ e $\mathbf{b}$ é uma matriz $n\times p$, então a multiplicação de $\mathbf{a}$ com $\mathbf{b}$ pode ser efetuada e o produto é uma matriz $\mathbf{c}$ de ordem $m\times p$ tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk}\,.$$

Em outras palavras, o elemento c_{ik} da matriz produto $\mathbf{c}$ é obtido multiplicando cada elemento da linha i da matriz $\mathbf{a}$ com o elemento respectivo na coluna k da matriz $\mathbf{b}$ e somando esses produtos.

Exemplos:

1. Dadas as matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

No entanto, o produto $\mathbf{ba}$ não está definido, pois o número de linhas de $\mathbf{a}$ é diferente do número de colunas de $\mathbf{b}$.

2. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $m\times n$, o produto de $\mathbf{a}$ com $\mathbf{I}_n$ é o próprio $\mathbf{a}$ (isso justifica o nome de matriz identidade). Com efeito, os elementos da matriz $\mathbf{I}_n$ são dados pelo **símbolo de Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Logo, se $\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{I}_n$, então $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$. De forma análoga pode-se provar que $\mathbf{I}_m\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

3. Duas matrizes não nulas podem ter como produto a matriz nula. Com efeito,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix},$$

o que mostra que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

Teorema 1.1. *Sejam* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *matrizes* $m \times n$*,* $\mathbf{c}$ *e* $\mathbf{d}$ *matrizes* $n \times p$ *e* α *um número. Tem-se que* $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$*,* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc}$ *e* $\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}$*.*

Demonstração. Se $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, então

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\,,$$

o que implica que $\mathbf{p} = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$. A igualdade $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc}$ pode ser provada de forma análoga. □

Exemplo: Dada a matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{a}^n = \begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, definindo

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $\mathbf{a} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{t}$ e que $\mathbf{t}^2 = \mathbf{0}$. Logo,

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{I}_2+\mathbf{t})^2 = (\mathbf{I}_2+\mathbf{t})(\mathbf{I}_2+\mathbf{t}) = \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_2\mathbf{t} + \mathbf{t}\mathbf{I}_2 + \mathbf{t}^2 = \mathbf{I}_2 + 2\mathbf{t}\,.$$

Supondo que $\mathbf{a}^n = \mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n\mathbf{a} = (\mathbf{I}_2+n\mathbf{t})(\mathbf{I}_2+\mathbf{t}) = \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_2\mathbf{t} + n\mathbf{t}\mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}^2 = \mathbf{I}_2 + (n+1)\mathbf{t}\,.$$

Portanto, $\mathbf{a}^n = \mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2. *Sejam* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $m \times n$*,* $\mathbf{b}$ *uma matriz* $n \times p$ *e* $\mathbf{c}$ *uma matriz* $p \times q$*. Tem-se que* $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$*.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{r} = \mathbf{ab}$, $\mathbf{s} = \mathbf{bc}$ e $\mathbf{t} = \mathbf{as}$. Temos que

$$t_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{l=1}^{p} b_{jl}c_{lk} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ij}b_{jl}c_{lk} = \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl}\right)c_{lk} = \sum_{l=1}^{p} r_{il}c_{lk}\,.$$

Portanto, $\mathbf{t} = \mathbf{rc}$. □

Teorema 1.3. *Sejam* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $m \times n$ *e* $\mathbf{b}$ *uma matriz* $n \times p$*. Tem-se que* $(\mathbf{ab})^T = \mathbf{b}^T\mathbf{a}^T$*.*

Demonstração. Se $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$, então

$$c^T_{ik} = c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a^T_{jk} b^T_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b^T_{ij} a^T_{jk} \,.$$

Portanto, $\mathbf{c}^T = \mathbf{b}^T \mathbf{a}^T$. □

Define-se o **traço** de uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ como a soma dos elementos da sua diagonal. O traço de $\mathbf{a}$ é denotado por $\mathrm{tr}(\mathbf{a})$. Segue imediatamente dessa definição que $\mathrm{tr}(\mathbf{a}) = \mathrm{tr}(\mathbf{a}^T)$, pois $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}^T$ têm a mesma diagonal.

Teorema 1.4. *Sejam* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $m \times n$ *e* $\mathbf{b}$ *uma matriz* $n \times m$*. Tem-se que* $\mathrm{tr}(\mathbf{ab}) = \mathrm{tr}(\mathbf{ba})$.

Demonstração. Se $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$, então $\mathrm{tr}(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii}$. Como $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$, segue que

$$\mathrm{tr}(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij} \,.$$

Portanto, $\mathrm{tr}(\mathbf{ab}) = \mathrm{tr}(\mathbf{ba})$. □

Diz-se que uma matriz é **escalonada** quando o primeiro elemento não-nulo de cada linha está à esquerda dos primeiros elementos não-nulos das linhas subsequentes. Dessa maneira, debaixo do primeiro elemento não-nulo de cada linha só se tem zeros. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Vamos agora descrever o método de eliminação de Gauss que nos permite transformar uma matriz qualquer em uma matriz escalonada. O método de eliminação consiste em usar sistematicamente as seguintes operações nas linhas da matriz até obter uma matriz escalonada:

1. permutar duas linhas;

2. multiplicar uma linha por um número diferente de 0;

3. somar a uma linha um múltiplo não-nulo de uma outra linha.

Essas operações são às vezes chamadas de **operações elementares**.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + 9L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Define-se o **posto** de uma matriz como o número de linhas não-nulas da matriz escalonada obtida usando o método de eliminação. Segue imediatamente daqui que o posto de uma matriz $m \times n$ é no máximo igual a m. O posto de uma matriz não depende dos detalhes do processo de eliminação (isso será justificado mais na frente). Por exemplo, a matriz considerada no exemplo anterior tem posto 3.