Notas de cálculo diferencial e integral 1

Max Jáuregui

10 de Setembro de 2019

Estas notas foram criadas principalmente para meu uso pessoal e pode eventualmente ser usado como um curso elementar de análise matemático com aplicações ao cálculo. Todo o conteúdo foi produzido por mim, seguindo como roteiros os seguintes livros:

- R. Courant e E. McShane, *Differential and integral calculus*, Vol. I, 2 ed. (Blackie and Son, Londres, 1937).
- E. L. Lima, *Análise real volume 1. Funções de uma variável real*, 12 ed. (IMPA, Rio de Janeiro, 2013).
- W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3 ed. (McGraw-Hill, Singapore, 1976).

Max Jáuregui

Conteúdo

1 Linguagem de conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados de **elementos** do conjunto. Se x é um elemento de um conjunto A, diz-se que x **pertence** a A e escreve-se $x \in A$; caso contrário diz-se x **não pertence** a A e escreve-se $x \notin A$.

Conjuntos numéricos:

1. Conjunto dos **números naturais:** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
2. Conjunto dos **números inteiros:** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Conjunto dos **números racionais:** $\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

O **conjunto vazio**, denotado por $\varnothing$, é o conjunto que não tem elementos.

Diz-se que um conjunto A é um **subconjunto** ou uma **parte** de um conjunto B se todo elemento de A é elemento de B. Nesse caso escreve-se $A \subset B$ ou $B \supset A$.

Exemplos: Tem-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Para qualquer conjunto A tem-se que $\varnothing \subset A$.

Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Dados os conjuntos A e B, definimos sua **união** por $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ e sua **interseção** por $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$. Define-se também a **diferença** $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. Se todos os conjuntos com os quais está se trabalhando são subconjuntos de um conjunto X, a diferença $X \setminus A$ é chamada de **complementar** de A e é denotada por A^c.

Algumas propriedades:

1. $A \cup B = B$ se, e somente se, $A \subset B$;
2. $A \cap B = A$ se, e somente se, $A \subset B$;
3. se $A \subset B$, então $A \cup C \subset B \cup C$;
4. se $A \subset B$, então $A \cap C \subset B \cap C$;
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

9. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

10. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$;

11. $A \setminus B = A \cap B^c$.

12. $A \cap B = \varnothing$ se, e somente se, $A \subset B^c$.

Define-se o **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B por $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$. Os elementos de $A \times B$ são chamados de **pares ordenados**. Dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

O produto cartesiano de um conjunto A com ele próprio é denotado por A^2.

2 Números reais

Não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. De fato, se $r = p/q$, em que $p, q \in \mathbb{N}$ são primos relativos, teríamos que $p^2 = 2q^2$. Isso implicaria que p é par. Porém, com isso concluiríamos que q também é par. Contradição!

$\mathbb{Q}$ não é suficiente para atribuir um comprimento a todo segmento de reta. Estende-se $\mathbb{Q}$ introduzindo **números irracionais**, como $\sqrt{2}$. O conjunto formado pelos números racionais e irracionais é chamado de conjunto dos **números reais** e é denotado por $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ é um **corpo**, pois nele estão definidas as operações de adição e multiplicação, as quais têm as seguintes propriedades:

1. $x + y \in \mathbb{R}$ e $xy \in \mathbb{R}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. $x + y = y + x$ e $xy = yx$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
4. $x(y + z) = xy + xz$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.
5. Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
6. Existe $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
7. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.
8. Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1$.

$\mathbb{R}$ é um **corpo ordenado**, pois existe o subconjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais **positivos** tal que

1. se $x \in \mathbb{R}$, só uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x \in \mathbb{R}^+$, $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.
2. dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $xy \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que $x \in \mathbb{R}$ é **menor** do que $y \in \mathbb{R}$ e escreve-se $x < y$ se $y - x \in \mathbb{R}^+$. As seguintes propriedades seguem diretamente dessa definição:

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, só uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$.

2. Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.
3. Se $x < y$, então $x + z < y + z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.
4. Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.
5. Se $x < y$ e $z < w$, então $x + z < y + w$;
6. $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $1 > 0$.

Usando essas propriedades podemos mostrar que

7. se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$;
8. se $0 < x < y$ e $0 < z < w$, então $xz < yw$;
9. se $0 < x < y$, então $0 < y^{-1} < x^{-1}$;
10. $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Intervalos finitos: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

1. **Intervalo aberto**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
2. **Intervalo fechado**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
3. **Intervalos semiabertos**: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ e $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
4. **Intervalo degenerado**: $[a, a] = \{a\}$.

Intervalos infinitos: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$; $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$; $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$; $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$; $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Define-se o **valor absoluto** de $x \in \mathbb{R}$ por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue imediatamente daqui que $|x| \geq 0$ e $-|x| \leq x \leq |x|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Se $|x - a| < \epsilon$, então $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e vice-versa.

Teorema 2.1. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que*

1. $|xy| = |x||y|$;
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demonstração. 1. $|xy|^2 = x^2y^2 = (|x||y|)^2$.

2. Somando as desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, obtemos que $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Logo, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3. $|x| \leq |x-y|+|y|$ e $|y| \leq |x-y|+|x|$. Logo, $-(|x-y|) \leq |x|-|y| \leq |x-y|$ e, por conseguinte, $||x| - |y|| \leq |x - y|$. □

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** (**inferiormente**) se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c$ ($x \geq c$) para todo $x \in X$. Nesse caso, diz-se que c é uma **cota superior** (**inferior**) de X.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente (inferiormente). Diz-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é o **supremo** (**ínfimo**) de X se α é a menor (maior) cota superior (inferior) de X. Nesse caso, escreve-se $\alpha = \sup X$ ($\alpha = \inf X$).

Se $\alpha = \sup X$, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\alpha - \epsilon < x$. Isso é devido a que $\alpha - \epsilon$ não pode ser uma cota superior de X.

$\mathbb{R}$ é um **corpo ordenado completo**. Isso quer dizer que todo conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ que é limitado superiormente tem um supremo.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio limitado inferiormente, então $-X = \{-x \in \mathbb{R} : x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Vê-se claramente que $\inf X = -\sup(-X)$.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto que não limitado superiormente (inferiormente), vamos escrever $\sup X = \infty$ ($\inf X = -\infty$). Com essa convenção, todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ possui um supremo e um ínfimo em $[-\infty, \infty]$.

Teorema 2.2. $\mathbb{R}$ *é* **arquimediano**, *ou seja, para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > x$.

Demonstração. Se isso não fosse verdade existiria $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{N}$ seria limitado superiormente e portanto teria um supremo $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < n$. Porém, isso implicaria que $\alpha < n + 1$. Contradição! □

Corolário 2.3. $\inf_{n\in\mathbb{N}}(1/n) = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Teorema 2.4. $\mathbb{Q}$ *é* **denso** *em* $\mathbb{R}$, *ou seja, dados* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a < r < b$.

Demonstração. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Os números m/n, $m \in \mathbb{Z}$, dividem a reta real em intervalos de comprimento $1/n$. Se $a \in [(m-1)/n, m/n)$, devemos ter $b > m/n$. Com efeito, se tivéssemos $b \leq m/n$, então $b - 1/n \leq (m - 1)/n \leq a$. Porém, tem-se também que $b - 1/n > a$. Contradição! Portanto, $a < m/n < b$. □

Teorema* 2.5. Teorema dos intervalos encaixados. *Sejam I_n intervalos fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponhamos que $I_n = [a_n, b_n]$. Vemos que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$. Logo, o conjunto formado pelos números a_n é limitado superiormente por qualquer um dos números b_n. Dessa forma, se c é o supremo desse conjunto, então $a_n \leq c \leq b_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema* 2.6. *$\mathbb{R}$ é* **não-enumerável**, *ou seja, $\mathbb{R} \neq \{x_1, x_2, \ldots\}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Seja I_1 um intervalo fechado não-degenerado tal que $x_1 \notin I_1$. Supondo definidos os intervalos fechados não-degenerados $I_1 \supset \ldots \supset I_n$, definimos o intervalo fechado não-degenerado I_{n+1} da seguinte forma:

1. Se $x_{n+1} \notin I_n$, então $I_{n+1} = I_n$.
2. Se $x_{n+1} \in I_n$, então x_{n+1} é diferente de pelo menos uma das extremidades de $I_n = [a, b]$. Supondo, por exemplo, que $x_{n+1} \neq a$, definimos $I_{n+1} = [a, (a + x_{n+1})/2]$.

Dessa forma, os intervalos encaixados I_n estão bem definidos para todo $n \in \mathbb{N}$ e são tais que $x_n \notin I_n$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Contradição! □

3 Funções

Sejam X e Y conjuntos arbitrários. Uma **função** $f : X \to Y$ é uma regra que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$; nesse caso escreve-se $f(x) = y$. Os conjuntos X e Y são chamados respectivamente de **domínio** e **contradomínio** da função f.

Define-se a **imagem** de uma função $f : X \to Y$ como o conjunto $f(X) = \{f(x) \in Y : x \in X\}$. Se $f(X) = Y$, diz-se que f é **sobrejetiva**.

Uma função $f : X \to Y$ é dita **injetiva** se, dados $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$, tem-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Uma função que é injetiva e sobrejetiva é chamada de uma **bijeção**.

Se $f : X \to Y$ é uma bijeção, para cada $y \in Y$ existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, podemos definir uma função $f^{-1} : Y \to X$ pondo $f^{-1}(y) = x$ quando $f(x) = y$. A função f^{-1} assim definida é chamada de **inversa** da função f.

Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, define-se a **função composta** $g \circ f : X \to Z$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Se $f : X \to Y$ é uma bijeção, então $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$ e $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in Y$.

No restante dessa seção consideraremos funções entre subconjuntos de $\mathbb{R}$ a menos que se indique o contrário.

Uma função $f : X \to Y$ pode ser representada graficamente localizando os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano xy. O desenho obtido é chamado de **gráfico** da função f. Qualquer reta vertical intersecta o gráfico de uma função em no máximo um ponto.

Em muitas ocasiões, uma função f é definida dando uma expressão para $f(x)$. Nesse caso, vamos considerar que o domínio de f é o maior conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tal que a expressão de $f(x)$ esteja definida para todo $x \in X$.

Funções lineares: $f(x) = ax + b$. O domínio de f é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $\mathbb{R}$ se $a \neq 0$ ou $\{b\}$ se $a = 0$. O gráfico de uma função linear é uma linha reta (ver figura 3.1).

Funções quadráticas: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. O domínio de f é $\mathbb{R}$. Para determinar a imagem de f escrevemos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$. Vemos daqui que

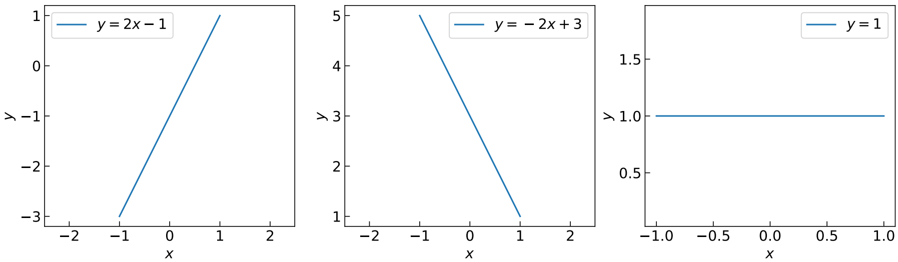

Figura 3.1: Gráficos de funções lineares.

1. se $a > 0$, a imagem de f é o intervalo $[-\Delta/4a, \infty)$ e $f(-b/2a) = -\Delta/4a$.
2. se $a > 0$, a imagem de f é o intervalo $(-\infty, -\Delta/4a]$ e $f(-b/2a) = -\Delta/4a$.

O gráfico de f é uma parábola que se estende verticalmente para cima (baixo) se $a > 0$ ($a < 0$) como mostrado na figura 3.2.

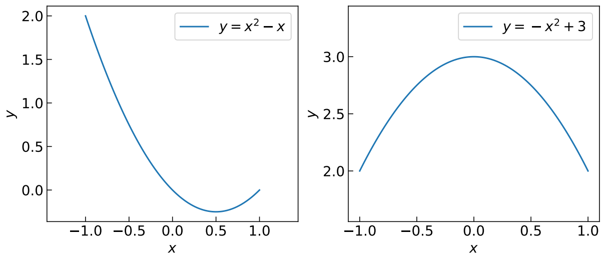

Figura 3.2: Gráficos de funções quadráticas.

Funções polinomiais: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. O domínio de f é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $\mathbb{R}$ se o maior expoente de x é ímpar. No caso em que esse expoente é par, a imagem de f é um intervalo da forma $[a, \infty)$. A figura 3.3 mostra o gráfico da função $f(x) = x^n$ para vários valores de $n \in \mathbb{N}$.

Funções racionais: $f(x) = p(x)/q(x)$, em que p e q são funções polinomiais. O domínio de f é $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. A figura 3.4 mostra os gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

Funções algébricas: São funções que podem envolver as operações racionais (adição, multiplicação, subtração e divisão) e raízes de diversas ordens em suas definições. Por exemplo: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2/x} - (\sqrt{x} - 1)^2$. Para determinar o domínio dessas funções, deve se levar em conta que os

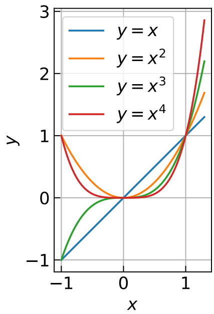

Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = x^n$ para vários valores de $n \in \mathbb{N}$.

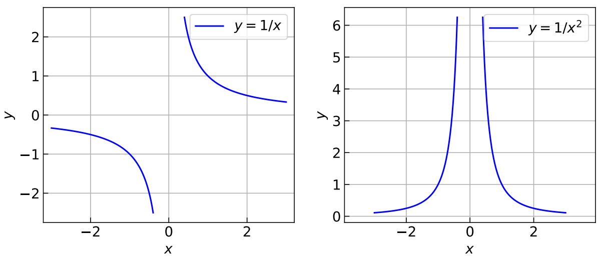

Figura 3.4: Gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

denominadores nunca devem se anular e, além disso, o interior de raízes de ordem par sempre deve ser uma quantidade não-negativa. A figura 3.5 mostra o gráfico da função $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = x^{1/n}$, para vários valores de $n \in \mathbb{N}$. Como g é a inversa da função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^n$, o gráfico de g pode ser obtido refletindo o gráfico de f em relação à reta $y = x$. O gráfico de g também pode ser obtido girando $90°$ o gráfico de f no sentido anti-horário e depois refletindo o resultado em relação ao eixo y.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo que contém o ponto 0. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita uma **função par** (**ímpar**) se $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) para todo $x \in I$. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y enquanto que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Funções trigonométricas: As funções seno e cosseno, definidas pelas expressões $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ respectivamente tem $\mathbb{R}$ como domínio e o intervalo $[-1, 1]$ como imagem. Elas são **funções periódicas** de período 2π, ou seja, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver figura 3.6).

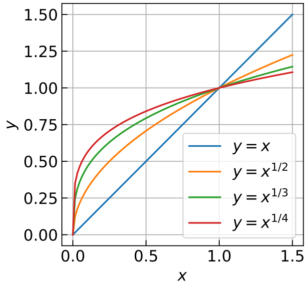

Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = x^{1/n}$ para vários valores de $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, a função seno é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno é par. A função tangente é definida pela expressão $h(x) = \tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$. O domínio dessa função é $\mathbb{R} \setminus \{(2n-1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$ e sua imagem é $\mathbb{R}$. A função tangente é periódica e tem período π. Além disso, ela é uma função ímpar (ver figura 3.7).

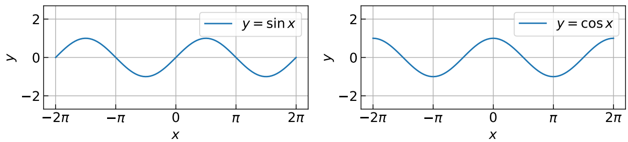

Figura 3.6: Gráficos das funções seno e cosseno.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **monótona crescente** (**decrescente**) se, dados $x, y \in X$ com $x < y$, tem-se que $f(x) \leq f(y)$ ($f(y) \leq f(x)$). Se sempre ocorre a desigualdade estrita, diz-se ainda que f é **estritamente crescente** (**decrescente**).

Função logaritmo: $f(x) = \log x$. O domínio dessa função é $(0, \infty)$ e sua imagem é $\mathbb{R}$. Ela é uma função estritamente crescente tal que $f(1) = 0$ e $f(ab) = f(a) + f(b)$ para quaisquer $a, b > 0$.

Função exponencial: $f(x) = \exp x$. O domínio dessa função é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $(0, \infty)$. Ela é a inversa da função logaritmo. A função exponencial é estritamente crescente e é tal que $f(0) = 1$ e $f(a + b) = f(a)f(b)$.

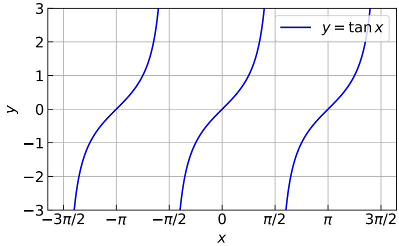

Figura 3.7: Gráfico da função tangente.

4 Espaços euclidianos*

O conjunto $\mathbb{R}^d$ é chamado de **espaço euclidiano d-dimensional** e seus elementos são chamados de **pontos** ou de **vetores**.

Definem-se em $\mathbb{R}^d$ as operações de **adição** e **multiplicação por um escalar** pelas equações

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d) \quad \text{e} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_d)\,.$$

$\mathbb{R}^d$ é um **espaço vetorial**, pois essas operações têm as seguintes propriedades:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^d$;
2. $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$;
3. existe $0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$;
4. para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existe $-x \in \mathbb{R}^d$ tal que $x + (-x) = 0$;
5. $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$;
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^d$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ e $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Define-se o **produto interno** de $x, y \in \mathbb{R}^d$ por $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$. Podemos verificar que

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$;
2. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^d$;
3. $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$ para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$;
4. $\langle x, x\rangle > 0$ se $x \neq 0$.

Diz-se que $x, y \in \mathbb{R}^d$ são **ortogonais** quando $\langle x, y\rangle = 0$.

Define-se a **norma euclidiana** de $x \in \mathbb{R}^d$ por $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. Se $x = y+z$ e $\langle z, y\rangle = 0$, então $|x|^2 = |y|^2+|z|^2+2\,\langle y, z\rangle = |y|^2 + |z|^2$ (teorema de Pitágoras).

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. Se $y \neq 0$, definamos $\alpha = \langle x, y \rangle / |y|^2$. Logo, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y. Com efeito, vemos que $\langle y, z \rangle = \langle y, x \rangle - \alpha \langle y, y \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0$.

Teorema 4.1. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$ tem-se que $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = \alpha y$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $y = 0$, OK. Se $y \neq 0$, existe $z \in \mathbb{R}^d$ tal que $\langle y, z \rangle = 0$ e $x = \alpha y + z$, em que $\alpha = \langle x, y \rangle / |y|^2$. Logo, $|x|^2 = \alpha^2 |y|^2 + |z|^2 \geq \alpha^2 |y|^2 = \langle x, y \rangle^2 / |y|^2$, o que nos dá a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso, vemos que a igualdade ocorre se, e somente se, $|z| = 0$. Isso implica que a igualdade ocorre se, e somente se, $z = 0$, o qual equivale à condição $x = \alpha y$. $\square$

Teorema 4.2. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se que*

1. $|x| > 0$ *se* $x \neq 0$*;*

2. $|\alpha x| = |\alpha||x|$*;*

3. $|x + y| \leq |x| + |y|$*;*

4. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demonstração. 3. $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 \langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$. $\square$

Uma **norma** em $\mathbb{R}^d$ é uma função $|\ | : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ que cumpre os itens 1, 2 e 3 do teorema anterior. Além da norma euclidiana, de forma convenientemente podemos utilizar a **norma do máximo** $|x|_M = \max\{x_1, \ldots, x_d\}$ e a **norma da soma** $|x|_S = |x_1| + \cdots + |x_d|$. Pode-se verificar que $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq d|x|_M$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

5 O conceito de limite para funções

Consideremos a função $f(x) = x - 2$. Conforme x se aproxima de 2, $f(x)$ se aproxima de 0. Nesse caso, podemos dizer que 0 é o limite de $f(x)$ quando x tende para 2 e escrever $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.

Consideremos a função $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. O ponto $1 \in \mathbb{R}$ não pertence ao domínio de f. Porém, pontos arbitrariamente próximos de 1 pertencem ao domínio de f. Para esses valores, notamos que $f(x) = x + 1$ e vemos que, conforme x tende para 1, $f(x)$ se aproxima de 2. Nesse caso, podemos dizer que 2 é o limite de $f(x)$ quando x tende para 1 e escrever $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Define-se a **bola aberta** de centro $a \in \mathbb{R}^d$ e raio $r > 0$ como o conjunto $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| < r\}$.

Diz-se que $a \in \mathbb{R}^d$ é um **ponto de acumulação** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ se para qualquer $r > 0$ a bola aberta $B(a, r)$ contém um ponto de X diferente de a, ou seja, se $(X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta) \neq \varnothing$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é denotado por X'.

Exemplo: O ponto $1 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do intervalo $(1, 2)$ embora não pertença a ele.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$, diz-se que $L \in \mathbb{R}^d$ é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para a se, dado qualquer $\epsilon > 0$, pode-se encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para qualquer $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Nesse caso, escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = L$. A definição de limite pode ser rescrita também na seguinte forma: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$ implica que $f(x) \in B(L, \epsilon)$. Devido a relação entre as normas euclidiana, do máximo e da soma, o limite L será o mesmo usando qualquer par delas na definição de limite.

Teorema 5.1 (Unicidade do limite)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} f(x) = M$, então $L = M$.*

Demonstração. Suponhamos $L \neq M$ e consideremos $\epsilon = |L - M|/2$. Existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Como $|L - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M|$ para todo $x \in X$, segue que, se $0 < |x - a| < \delta$, $|L - M| < \epsilon + |f(x) - M|$. Isso implica que $|f(x) - M| > \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Portanto, M não é o limite de $f(x)$ quando x tende para a. Contradição! $\square$

Exemplos:

1. Consideremos a função constante $f(x) = c$. Temos que $\lim_{x\to a} f(x) = c$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = 1$ (pode ser qualquer número positivo) tal que $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

2. Seja $g(x) = x$. Temos que $\lim_{x\to a} g(x) = a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon$ tal que $|g(x) - a| = |x - a| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Teorema 5.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Sob essas condições, $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon$. □

Teorema 5.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $L < M$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$.*

Demonstração. Seja $\epsilon = M - L$. Existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $f(x) < \epsilon + L = M$. □

Teorema 5.4. Teorema do sanduíche. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} h(x) = L$ e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$, então $\lim_{x\to a} g(x) = L$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta_1$. Logo, nessas condições, $L - \epsilon < f(x)$. De forma análoga, existe $\delta_2 > 0$ tal que $h(x) < L + \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta_2$. Pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$ para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. □

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é **limitada** quando existe existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in X$.

Lema 5.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada, então $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|g(x)| < M$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| < \epsilon/M$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $|f(x)g(x)| < \epsilon$. □

Teorema 5.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$;
3. $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/M$ *desde que se tenha* $M \neq 0$.

Demonstração. 1. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon/2$ e $|g(x) - M| < \epsilon/2$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $|f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \epsilon$.

2. Notamos que $f(x)g(x) - LM = f(x)[g(x) - M] + [f(x) - L]M$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ tal que $L - 1 < f(x) < L + 1$ para todo $x \in (X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$. Logo a restrição de f a $(X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$ é uma função limitada. Portanto, usando o lema 5.5 e o item anterior, $\lim_{x\to a}[f(x)g(x) - LM] = \lim_{x\to a} f(x)[g(x) - M] + \lim_{x\to a}[f(x) - L]M = 0$.

3. Notamos que $1/g(x) - 1/M = [M - g(x)]/Mg(x)$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, segue que $\lim_{x\to a} |g(x)| = |M|$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $|g(x)| > |M|/2$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $1/|g(x)| < 2/|M|$, ou seja, a função $1/|g|$ é limitada. Portanto, $\lim_{x\to a}[1/g(x) - 1/M] = \lim_{x\to a}[M - g(x)]/Mg(x) = 0$. □

Exemplos:

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f(x) = x^n$. Temos que $\lim_{x\to a} f(x) = a^n$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. Se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

3. Se p e q são funções polinomiais e $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x\to a} p(x)/q(x) = p(a)/q(a)$. Se $p(a) = q(a) = 0$, nada pode ser dito de forma geral sobre o limite de $p(x)/q(x)$ quando x tende para a. Por exemplo, $\lim_{x\to 0} x^2/x = 0$ e $\lim_{x\to 0} x/x = 1$. Por outro lado, $\lim_{x\to 0} x/x^2$ não existe, pois se existisse e fosse $L \in \mathbb{R}$, então $1 = \lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0}(x/x^2)x = L \cdot 0 = 0$. Absurdo!

4. Tem-se que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,. \tag{5.1}$$
Podemos dar uma justificativa geométrica para esse resultado usando a circunferência trigonométrica. Percebemos que quando $|x|$ é pequeno, x é

quase igual a $\operatorname{sen} x$. Uma prova da Eq. (5.1) só poderá ser dada depois de definir a função seno de forma analítica. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é chamada às vezes de **função sinc** (ver figura 5.1).

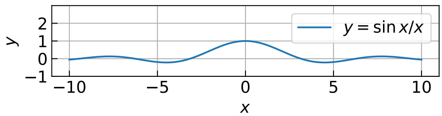

Figura 5.1: Gráfico da função sinc.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}^d$. Vemos que para cada $x \in X$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. As funções $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ são chamadas de **funções-coordenada** de f.

Teorema* 5.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Tem-se que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, em que $L = (L_1, \ldots, L_d)$, se, e somente se, $\lim_{x\to a} f_j(x) = L_j$, $j = 1, \ldots, d$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L|_M < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, sob essas condições, $|f_j(x) - L_j| \leq |f(x) - L|_M < \epsilon$, $j = 1, \ldots, d$. Reciprocamente, se $|f_j(x) - L| < \epsilon$, $j = 1, \ldots, d$, para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L|_M < \epsilon$. □

Corolário* 5.8. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f, g : X \to \mathbb{R}^d$, $h : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ e $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$, tem-se que*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

2. $\lim_{x\to a} h(x)f(x) = \alpha L$

3. $\lim_{x\to a} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle L, M\rangle$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ($\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) para indicar que, dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ ($f(x) < -A$) para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$.

Teorema 5.9. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Tem-se que*

1. *se* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *e* $g(x) > c$ *para todo* $x \in X$*, então* $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty$*;*

2. *se* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *e* $g(x) > c > 0$ *para todo* $x \in X$*, então* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty$*;*

3. *se* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$*, então* $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 0$*;*

4. *se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$*, então* $\lim_{x\to a} 1/f(x) = \infty$*.*

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto que não é limitado superiormente (inferiormente) e $f : X \to \mathbb{R}^d$. Diz-se que $L \in \mathbb{R}^d$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a ∞ $(-\infty)$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $x > A$ $(x < -A)$. Se $f : X \to \mathbb{R}$, pode-se ainda definir expressões similares a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Todos os teoremas, lemas e corolários anteriores valem da mesma forma para esses limites.

Exemplos:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 3x + 7}{4x^2 - 9x + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{9}{x} + \frac{6}{x}} = \frac{3}{4}\,.$$

2. Tem-se que $\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$. Isso decorre diretamente de usar o teorema do sanduíche na desigualdade $-1/x \leq (\operatorname{sen} x)/x \leq 1/x$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação à direita** (**esquerda**) de X se existe $\delta > 0$ tal que $(a, a+\delta) \cap X \neq \varnothing$ $((a-\delta, a) \cap X \neq \varnothing)$. Nesse caso, escreveremos $a \in X'_+$ $(a \in X'_-)$. Diz-se ainda que a é um **ponto de acumulação bilateral** se $a \in X'_+ \cap X'_-$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$ $(a \in X'_-)$. Diz-se que L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a **pela direita** (**esquerda**) se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$. Nesse caso escreve-se que $\lim_{x\to a+} f(x) = L$ $(\lim_{x\to a-} f(x) = L)$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Verifica-se facilmente que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L$.

Exemplo: $\lim_{x\to 0} |x|/x$ não existe. Com efeito, podemos verificar que $\lim_{x\to 0+} |x|/x = 1$ e $\lim_{x\to 0-} |x|/x = -1$.

Teorema 5.10. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$*,* $f : X \to \mathbb{R}$*,* $a \in X'_+$ *e* $b \in X'_-$*. Se* f *é monótona e limitada, então existem os limites laterais* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to b-} f(x)$*.*

Demonstração. Suponhamos que f seja crescente e consideremos o conjunto $A = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X, x > a\}$. Como $a \in X'_+$, $A \neq \varnothing$. Além disso, como f é limitada, A é limitado e, por conseguinte, existe $L = \inf A$. Dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in X$, $x_0 > a$, tal que $L \leq f(x_0) < L + \epsilon$. Pondo $\delta = x_0 - a > 0$, vemos que para todo $x \in X$ tal que $a < x < a + \delta$, tem-se que $L \leq f(x) \leq f(a+\delta) < L + \epsilon$, o que implica que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. Portanto, $\lim_{x \to a+} f(x) = L$. □

Corolário 5.11 (da demonstração)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto que não é limitado superiormente. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona e limitada superiormente, então existe* $\lim_{x \to \infty} f(x)$. *De forma análoga, se X não é limitado inferiormente e f é limitada inferiormente, então existe* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

6 Sequências de pontos no espaço euclidiano*

Uma **sequência** de pontos em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escreve-se x_n no lugar de x_n. A sequência x é usualmente denotada listando seus termos $x_1, x_2, \ldots$.

Diz-se que uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ **converge** para um ponto $a \in \mathbb{R}^d$ se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ou seja, se, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n > A$. Nesse caso é comum escrever $x_n \to a$. Uma sequência que converge para um ponto de $\mathbb{R}^d$ é dita **convergente**; caso contrário é dita **divergente**.

Vale ressaltar que todos os teoremas, lemas e corolários da seção anterior se aplicam da mesma forma para limites de sequências de pontos em $\mathbb{R}^d$, com a exceção do teorema 5.10 sobre limites laterais.

Se uma sequência de números reais $x_1, x_2, \ldots$ é monótona crescente (decrescente) e converge para um número $a \in \mathbb{R}$, escreveremos $x_n \uparrow a$ ($x_n \downarrow a$). O corolário 5.11 nos diz que toda sequência de números reais que é monótona e limitada é convergente.

Teorema 6.1. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Se $x_n \to a$, existe $A \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < 1$ para todo $k > A$. Logo, $|x_n| < |a|+1$ para todo $k > A$. Assim, pondo $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_A|, |a|+1\}$, temos que $|x_n| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Uma **subsequência** de $x_1, x_2, \ldots$ é uma sequência $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$, na qual $l_1, l_2, \ldots$ é uma sequência de números naturais estritamente crescente.

Teorema 6.2. *Se $x_n \to a$, então toda subsequência de $x_1, x_2, \ldots$ converge para a.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n > A$. Dada uma subsequência $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$, como $l_1, l_2, \ldots$ é uma sequência de números naturais estritamente crescente, existe $B \in \mathbb{N}$ tal que $l_n > A$ para todo $n > B$. Portanto, se $n > B$, $|x_{l_n} - a| < \epsilon$. $\square$

Corolário 6.3 (da demonstração)**.** *Se $x_n \to \infty$, para qualquer subsequência $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$ tem-se que $x_{l_n} \to \infty$.*

Lema 6.4. Desigualdade de Bernoulli. *Dados $h \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(1+h)^n \geq 1+nh$.*

Demonstração. Usamos indução em n. Se $n = 1$, OK. Supondo que o lema seja verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h\,,$$

ou seja, o lema é verdadeiro para $n+1$. Portanto, o lema é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplos:

1. Tem-se que $1/n \downarrow 0$ em virtude do teorema 5.9.

2. A sequência $-1, 1, -1, 1, \ldots$ é limitada mas é divergente. Com efeito, considerando os termos de índice ímpar obtemos a subsequência $-1, -1, \ldots$ enquanto que considerando os termos de índice par obtemos $1, 1, \ldots$.

3. Se $0 < x < 1$, então $x^n \downarrow 0$. Com efeito, a sequência $x^1, x^2, \ldots$ é estritamente decrescente e limitada. Logo, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x^n \downarrow a$. Como $x^{2n} = x^n x^n$ e a subsequência $x^2, x^4, \ldots$ converge para a, segue que $a = a^2$. Logo, $a(1-a) = 0$. Como $a \leq x$, pois o contrário implicaria que $x^n > x$ para n suficientemente grande, segue que $a = 0$.

4. Se $|x| < 1$, então $x^n \to 0$. De fato, usando o teorema do sanduíche na desigualdade $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$, temos que $x^n \to 0$, pois $|x|^n \downarrow 0$.

5. Se $|x| > 1$, então a sequência $x^1, x^2, \ldots$ é divergente. Com efeito, pela desigualdade de Bernoulli, $|x|^n \geq 1 + n(|x|-1)$. Logo, a sequência $x_1, x_2, \ldots$ não é limitada e, por conseguinte, é divergente.

6. A convergência ou divergência da sequência $x^1, x^2, \ldots$ pode ser visualizada analisando o gráfico das funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ (ver figura 3.3).

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = 1 + q + \cdots + q^n$. Se $q \neq 1$, temos que $x_n = (1-q^{n+1})/(1-q)$. Logo, $x_n \to 1/(1-q)$ se $|q| < 1$. Se $|q| \geq 1$, a sequência $x_1, x_2, \ldots$ é divergente.

8. Se $x > 0$, então $x^{1/n} \to 1$. Com efeito, se $x \geq 1$, então $x^{1/n} \geq x^{1/(n+1)} \geq 1$; se $0 < x < 1$, então $x^{1/n} < x^{1/(n+1)} < 1$. Logo, em qualquer caso, a sequência $x^{1/1}, x^{1/2}, \ldots$ é monótona e limitada. Isso implica que ela é convergente. Suponhamos que $x^{1/n} \to a$. Da relação $x^{1/n} = x^{1/2n}x^{1/2n}$ segue que $a = a^2$. Como $a \neq 0$, segue que $a = 1$. A convergência da sequência $x^{1/1}, x^{1/2}, \ldots$ pode ser visualizada analisando o gráfico das funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{1/n}$ (ver figura 3.5).

9. **O número e**: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n = 1 + 1/1! + \cdots + 1/n!$. Se $n > 2$, temos que

$$2 \leq s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3\,.$$

Logo, $s_1, s_2, \ldots$ é uma sequência limitada. Além disso, ela é estritamente crescente. Portanto, a sequência $s_1, s_2, \ldots$ é convergente, ou seja, existe $e \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \uparrow e$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n = (1 + 1/n)^n$. Temos que

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\,\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Logo, a sequência $t_1, t_2, \ldots$ é estritamente crescente. Além disso, $t_n \leq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por conseguinte, a sequência $t_1, t_2, \ldots$ é convergente. Suponhamos que $t_n \uparrow a$. Logo, segue da relação $t_n \leq s_n$ que $a \leq e$. Por outro lado, se $n \leq m$, temos que

$$t_m \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\,.$$

Tomando o limite $m \to \infty$, temos que

$$a \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n\,.$$

Isso implica que $a \leq e$. Portanto, $a = e$.

10. Tem-se que $n^{1/n} \to 1$. Com efeito, se $n \geq 3$, sabemos que $(1+1/n)^n < 3 \leq n$ e isso implica que $(n+1)^{1/(n+1)} < n^{1/n}$. Logo, a sequência $3^{1/3}, 4^{1/4}, \ldots$ é estritamente decrescente e é limitada. Consequentemente, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $n^{1/n} \to a$. Da relação

$$n^{1/n} = \frac{(2n)^{1/2n}(2n)^{1/2n}}{2^{1/n}}$$

segue que $a = a^2$. Como $a \geq 1$, segue que $a = 1$.

Lema 6.5. *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência limitada de números reais. Vamos dizer que x_p é um termo destacado dessa sequência se $x_p > x_n$ para todo $n > p$.

Denotemos por D o conjunto dos índices dos termos destacados da sequência $x_1, x_2, \ldots$. Se D é finito, então $D = \{d_1 < \ldots < d_p\}$. Se $l_1 > d_p$, então x_{l_1} não é um termo destacado e, por conseguinte, existe um índice $l_2 > l_1$ tal que $x_{l_1} \leq x_{l_2}$. Pela sua vez x_{l_2} não é um termo destacado e, por conseguinte, existe $l_3 > l_2$ tal que $x_{l_2} \leq x_{l_3}$. Dessa maneira, podemos construir uma subsequência $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$, a qual é monótona crescente e limitada. Logo, essa subsequência é convergente. Por outro lado, se D é infinito, então $D = \{d_1 < d_2 < \ldots\}$. Logo, a subsequência $x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots$ é estritamente decrescente e limitada. Portanto, ela é convergente. $\square$

Teorema 6.6. Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Toda sequência limitada de pontos em $\mathbb{R}^d$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência limitada de pontos em $\mathbb{R}^d$ e suponhamos que $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{dn})$. Para cada $j \in \{1, \ldots, d\}$, a sequência de números reais $x_{j1}, x_{j2}, \ldots$ é claramente limitada. Logo, pelo lema 6.5, a sequência $x_{11}, x_{12}, \ldots$ possui uma subsequência convergente $x_{1l_1}, x_{1l_2}, \ldots$. Por outro lado, a subsequência $x_{2l_1}, x_{2l_2}, \ldots$ é também limitada e, por conseguinte, possui uma subsequência convergente $x_{2m_1}, x_{2m_2}, \ldots$. Além disso, a subsequência $x_{1m_1}, x_{1m_2}, \ldots$ possui o mesmo limite do que a sequência $x_{1l_1}, x_{1l_2}, \ldots$. Prosseguindo dessa forma, para cada $j \in \{1, \ldots, d\}$ vamos encontrar uma subsequência $x_{jz_1}, x_{jz_2}, \ldots$ que é convergente. Assim, a subsequência $x_{z_1}, x_{z_2}, \ldots$ será convergente. $\square$

Dada uma sequência de números reais $x_1, x_2, \ldots$, sejam $a_n = \inf_{k \geq n} x_k$ e $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Define-se o **limite superior** (**inferior**) da sequência $x_1, x_2, \ldots$ por $\limsup_{n \to \infty} x_n = \inf b_n$ ($\liminf_{n \to \infty} x_n = \sup a_n$). Em outras palavras, $\limsup_{n \to \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$ ($\liminf_{n \to \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k$).

Lema 6.7. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio. Se $B \subset A$, então $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$.*

Demonstração. Temos que $\inf B \leq x \leq \sup B$ para todo $x \in B$. Como $\sup A$ é uma cota superior de A, temos que $x \leq \sup A$ para todo $x \in B$ e, por conseguinte, $\sup B \leq \sup A$. Um raciocínio similar nos leva à desigualdade $\inf A \leq \inf B$. $\square$

Teorema 6.8. *Para qualquer sequência de números reais $x_1, x_2, \ldots$ tem-se que $-\infty \leq \liminf_{n \to \infty} x_n \leq \limsup_{n \to \infty} x_n \leq \infty$.*

Demonstração. Se a sequência $x_1, x_2, \ldots$ não é limitada superiormente (inferiormente), então $\sup_{k \geq n} x_k = \infty$ ($\inf_{k \geq n} x_k = -\infty$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$). Por outro lado, pondo $a_n = \inf_{k\geq n} x_k$ e $b_n = \sup_{k\geq n} x_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$. Segue daqui que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, b_n é uma cota superior de $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Logo, $\sup A \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup A \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. □

Teorema 6.9. *Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência de números reais. Existem subsequências $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$ e $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} x_{l_n} = \limsup_{n\to\infty} x_n \quad e \quad \lim_{n\to\infty} x_{m_n} = \liminf_{n\to\infty} x_n\,.$$

Demonstração. Seja $\limsup_{n\to\infty} x_n = \alpha \in [-\infty, \infty]$. Se $\alpha = -\infty$, o conjunto $\{\sup_{k\geq n} x_k : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado inferiormente. Logo, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq \sup_{k\geq N} x_k < -A$ para todo $n > N$, ou seja, $x_n \to -\infty$. Se $\alpha = \infty$, então $\sup_{k\geq n} x_k = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência $x_1, x_2, \ldots$ não é limitada superiormente. Assim, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{l_1} > 1$ e para cada $n > 1$ podemos encontrar $l_n > l_{n-1}$ tal que $x_{l_n} > n$. Dessa maneira, $x_{l_n} \to \infty$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, dado $\epsilon > 0$, temos que $\alpha - \epsilon < \alpha \leq \sup_{k\geq n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{l_1} \leq \sup_{k\geq 1} x_k$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $l_n > l_{n-1}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{l_n} \leq \sup_{k\geq l_{n-1}} x_k$. Assim, $\alpha - \epsilon < x_{l_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{k\geq N} x_k \leq x_n < \alpha + \epsilon$ para todo $n > N$. Logo, $\alpha - \epsilon < x_{l_n} < \alpha + \epsilon$ para todo $n > N$, ou seja, $x_{l_n} \to \alpha$. De forma análoga pode-se provar que existe uma subsequência $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_{m_n} = \liminf_{n\to\infty} x_n$. □

Teorema 6.10. *Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência de números reais. Se $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$ é uma subsequência tal que $x_{l_n} \to a$, então $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \limsup_{n\to\infty}$ e suponhamos que $x_{l_n} \to a > \alpha$. Logo, existe $c \in (\alpha, a)$ tal que $c > \alpha$. Isso implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c > \sup_{k\geq N} x_k \geq x_n$ para todo $n > N$. Porém, segue daqui que toda subsequência convergente de $x_1, x_2, \ldots$ converge para um limite $\leq c$. Contradição! Portanto, devemos ter $a \leq \alpha$. De forma similar pode-se provar que $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq a$. □

Teorema 6.11. *Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência de números reais. Tem-se $x_n \to a$ com $a \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = a$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como $x_n \to a$, toda subsequência de $x_1, x_2, \ldots$ converge para a. Como existem subsequências de $x_1, x_2, \ldots$ que convergem para $\liminf_{n\to\infty} x_n$ e $\limsup_{n\to\infty} x_n$, segue que $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = a$. ($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $a - \epsilon < \inf_{k\geq n_1} x_k \leq a \leq \sup_{k\geq n_2} x_k < a + \epsilon$. Logo, pondo $N = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $a - \epsilon < \inf_{k\geq N} x_k \leq \sup_{k\geq N} x_k < a + \epsilon$. Portanto, $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ para todo $n > N$, ou seja, $x_n \to a$. □

7 Séries de números reais*

Uma **série** de números reais é a soma dos termos de uma sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots$, a qual é denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

Se o limite do lado direito existe, a série é dita **convergente**; caso contrário, ela é dita **divergente**. A sequência $s_1, s_2, \ldots$ é chamada de sequência das **somas parciais** da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uma série de números não-negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, existe $M > 0$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, nesse caso a sequência das somas parciais da série é monótona crescente e limitada.

Se uma série de números não-negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (divergente), escreve-se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$).

Teorema 7.1. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então $a_n \to 0$.*

Demonstração. Seja $s_1, s_2, \ldots$ a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $s_n \to L$, então $s_{n-1} \to L$. Logo, $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$. □

Exemplos:

1. Dado $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é chamada de **série geométrica**. Na seção 6 vimos que a série geométrica é convergente se, e somente, se $|x| < 1$. Nesse caso, temos também que $x^n \to 0$.

2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente, pois $(-1)^n \not\to 0$.

3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ é chamada de **série harmônica**. Seja $s_n = 1/1 + \cdots + 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Vemos que

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2^m} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{m}{2}\,. \end{aligned}$$

Logo, a sequência $s_{2^1}, s_{2^2}, \ldots$ não é limitada. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ pode-se encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \geq 1 + m > n$, segue que a sequência $s_1, s_2, \ldots$ não é limitada. Portanto, a série harmônica é divergente, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n) = \infty$, mesmo que se tenha $1/n \downarrow 0$.

Teorema 7.2. Critério de comparação. *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de números não-negativos. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Por outro lado, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Demonstração. Sejam $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $M > 0$ tal que $t_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $s_n \leq t_n \leq M$ e, por conseguinte, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, a sequência $s_1, s_2, \ldots$ não é limitada. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $l_n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq s_{l_n} \leq t_{l_n}$. Assim, a sequência $t_1, t_2, \ldots$ possui uma subsequência que não é limitada e, por conseguinte, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$. $\square$

Exemplo: Dado $r \in \mathbb{Q}$, consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^r)$. Se $r < 1$, temos que $1/n^r > 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n) = \infty$, pelo critério de comparação, segue que $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^r) = \infty$. Se $r > 1$, seja $s_1, s_2, \ldots$ a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^r)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned}
s_{2^m-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^r} \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r}\right) + \cdots + \frac{1}{(2^{m-1})^r} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{(2^{r-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{r-1})^{m-1}} \\
&\leq \frac{1}{1 - 1/2^{r-1}}
\end{aligned}$$

Logo, a sequência $s_1, s_2, \ldots$ possui uma subsequência limitada. Isso implica que a própria sequência $s_1, s_2, \ldots$ é limitada, pois ela é monótona. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^r) < \infty$ se $r > 1$.

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita **absolutamente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, diz-se que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série **condicionalmente convergente**.

Teorema 7.3. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Definindo $p_n = \max\{a_n, 0\}$ e $q_n = \max\{-a_n, 0\}$, temos que $p_n, q_n \geq 0$, $|a_n| = p_n + q_n$ e $a_n = p_n - q_n$. Como $p_n, q_n \leq |a_n|$, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$. $\square$

Corolário 7.4. *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *uma série de números não-negativos. Se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ *e* $|a_n| \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

Exemplo: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)/n^2$ é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, isso segue de observar que $|\operatorname{sen}(nx)/n^2| \leq 1/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) < \infty$.

Teorema 7.5. Critério da raiz. *Se* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente. Por outro lado, se* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração. Se $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < c < 1$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sup_{k\geq N} \sqrt[k]{|a_k|} < c$ para todo $n \geq N$. Logo, $|a_n| < c^n$ para todo $n \geq N$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} c^n < \infty$, segue do critério de comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Por outro lado, se $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, existe uma subsequência $\sqrt[1]{a_{l_1}}, \sqrt[2]{a_{l_2}}, \ldots$ tal que $\sqrt[l_n]{|a_{l_n}|} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, $|a_n| \not\to 0$, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. $\square$

Exemplos:

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ é convergente, pois $\sqrt[n]{1/n^n} = 1/n \to 0$.
2. A série harmônica é divergente e $\sqrt[n]{1/n} \to 1$. Por outro lado, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ é convergente e $\sqrt[n]{1/n^2} \to 1$.

Teorema 7.6. Critério da razão. *Se* $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente. Por outro lado, se* $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração. Se $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < c < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}/a_n| \leq A_N < c$ para todo $n \geq N$. Logo,

$$\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| < c\,, \quad \left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right| < c\,, \quad \ldots\,, \quad \left|\frac{a_{N+n-N}}{a_{n+N-n-1}}\right| < c\,.$$

Multiplicando essas desigualdades, temos $|a_n/a_N| < c^{n-N}$ para todo $n \geq N$. Logo, $|a_n| < |a_N|c^{n-N}$ para todo $n \geq N$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_N|c^{n-N} < \infty$, segue do critério de comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Se, por outro lado, temos que $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $|a_n| \not\to 0$, pois $|a_n| \geq |a_1| > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, nesse caso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. $\square$

Exemplos:

1. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $x > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^k/x^n$ é convergente pois
$$\frac{(n+1)^k}{x^{n+1}}\frac{x^n}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{x},$$
em que o lado direito converge a $1/x < 1$. A convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^k/x^n$ também pode ser provada usando o critério da raiz. Com efeito, temos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k/x^n} = 1/x < 1$.

2. A série harmônica é divergente e $(n+1)/n \to 1$. Por outro lado, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ é convergente e $(n+1)^2/n^2 \to 1$.

3. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sejam $a_{2m-1} = 1/m^m$ e $a_{2m} = 2/m^m$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, pois
$$\sqrt[2m-1]{a_{2m-1}} = \frac{1}{m^{m/(2m-1)}} \le \frac{1}{m^{1/2}},$$
e $\sqrt[2m]{a_{2m}} = m^{1/2}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e, por conseguinte, $\sqrt[n]{a_n} \to 0 < 1$. No entanto,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 2m-1 \\ \frac{m^m}{2(m+1)^{m+1}} & \text{se } n = 2m \end{cases}$$
e, por conseguinte, $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 2$. Logo, o teste da razão é inconclusivo.

Os exemplos anteriores ilustram em particular que o critério da raiz é mais forte do que o critério da razão.

Teorema 7.7. *Para qualquer sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots$ tem-se que*
$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Demonstração. Suponhamos que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > c > \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$. Da segunda desigualdade segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c > \sup_{n\ge N} |a_{n+1}/a_n| \ge |a_{n+1}|/|a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, sob essa condição, temos que $c^{n-N} > |a_n|/|a_N|$ e, por conseguinte, $c\sqrt[n]{|a_N|/c^N} > \sqrt[n]{|a_n|}$. Como o lado esquerdo dessa desigualdade tende a c quando $n \to \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $c + \epsilon > c\sqrt[n]{|a_N|/c^N} > \sqrt[n]{a_n}$ para todo $n > A$. Por outro lado, existe $\delta > 0$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > c+\delta > c$. Logo, podemos encontrar uma subsequência $\sqrt[1]{|a_{l_1}|}, \sqrt[2]{|a_{l_2}|}, \ldots$ tal que $\sqrt[l_n]{|a_{l_n}|} > c + \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Contradição! Portanto, deve-se ter $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$. A desigualdade envolvendo os limites inferiores pode ser provada de forma análoga. $\square$

Teorema 7.8. *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série absolutamente convergente. Para qualquer bijeção* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tem-se que* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\phi(n)}| < \infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração. Consideremos primeiramente que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, seja $m = \max\{\phi(1), \ldots, \phi(n)\}$. Logo, $\sum_{j=1}^{n} a_{\phi(j)} \leq \sum_{j=1}^{m} a_j$. Como $\sum_{j=1}^{m} a_j \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ é convergente e que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por outro lado, se $n = \max\{\phi^{-1}(1), \ldots, \phi^{-1}(m)\}$, temos que $\sum_{j=1}^{m} a_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{\phi(j)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$. Se agora $a_1, a_2, \ldots$ é uma sequência de números não necessariamente não-negativos, definindo $p_n = \max\{a_n, 0\}$ e $q_n = \max\{-a_n, 0\}$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(p_{\phi(n)} - q_{\phi(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty}(p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

8 Funções contínuas

Ingenuamente, uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deve ter um gráfico que é uma curva que não tem saltos. Isso quer dizer que uma variação pequena de x deve provocar também uma variação pequena no valor de $f(x)$. Passemos para as definições agora.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é **contínua** em um ponto $a \in X$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $|x - a| < \delta$. A continuidade de f no ponto a não depende do par de normas usadas na definição anterior (euclidiana, do máximo, da soma). Usando a terminologia de bolas abertas, temos que f é contínua no ponto a se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$ sempre que $x \in B(a, \delta) \cap X$. Se f é contínua em todo ponto de X, diz-se simplesmente que é uma função contínua.

Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Diz-se que $a \in X$ é um **ponto isolado** de X se a não é um ponto de acumulação de X, ou seja, se existe $\delta > 0$ tal que $X \cap B(a, \delta) \subset \{a\}$. Se X não tem pontos de acumulação, diz-se que X é um **conjunto discreto**. Exemplos: $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in X$ é um ponto isolado de X, toda função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é contínua no ponto a. Com efeito, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X = \{a\}$. Logo, dado $\epsilon > 0$, tem-se que $0 = |f(x) - f(a)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $|x - a| < \delta$.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in X \cap X'$, a função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 8.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto $a \in X$, então $f \pm g$ e fg são contínuas no ponto a. Além disso, se $g(a) \neq 0$, f/g é contínua no ponto a.*

Demonstração. Se a é um ponto isolado, OK. Se $a \in X'$, então o teorema é consequência do teorema 5.6. $\square$

Exemplo: As funções $f(x) = c$ e $g(x) = x$ são claramente contínuas. Logo, pelo teorema 8.1, toda função polinomial é contínua e toda função racional é contínua no seu domínio.

Teorema* 8.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, as funções-coordenada de f são contínuas no ponto a.*

Demonstração. Consequência do teorema 5.7. □

Corolário* 8.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $f, g : X \to \mathbb{R}^d$ e $h : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto $a \in X$, então $|f|$, $f \pm g$, hf, $\langle f, g \rangle$ são contínuas no ponto a.*

Diz-se que um conjunto $G \subset \mathbb{R}^d$ é um **conjunto aberto** se para cada $x \in G$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset G$.

Teorema* 8.4. *Toda bola aberta de $\mathbb{R}^d$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja $p \in B(a, r)$ e consideremos $\epsilon = r - |p - a|$. Vamos provar que $B(p, \epsilon) \subset B(a, r)$. Se $x \in B(p, \epsilon)$, então $|x - a| \leq |x - p| + |p - a| < \epsilon + |p - a| = r$. Portanto, $B(p, \epsilon) \subset B(a, r)$. □

Teorema* 8.5. *Considerando subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, tem-se que*

1. *$\mathbb{R}^d$ e $\varnothing$ são conjuntos abertos;*

2. *a união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto;*

3. *a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Demonstração.

1. Se $\varnothing$ não fosse aberto, existiria $a \in \varnothing$ tal que $B(a, r) \not\subset \varnothing$ para todo $r > 0$. Absurdo!

2. Seja G_α um conjunto aberto para cada elemento α de um conjunto arbitrário I e seja $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Se $a \in G$, existe $\alpha \in I$ tal que $a \in G_\alpha$. Como G_α é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset G_\alpha \subset G$. Portanto, G é aberto.

3. Sejam G_1 e G_2 dois conjuntos abertos. Se $a \in G_1 \cap G_2$, então existem $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(a, r_1) \subset G_1$ e $B(a, r_2) \subset G_2$. Considerando $r = \min\{r_1, r_2\}$, temos que $B(a, r) \subset G_1 \cap G_2$. Portanto, $G_1 \cap G_2$ é aberto. □

Define-se o **fecho** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ como o conjunto $\overline{X} = X \cup X'$. Diz-se ainda que o conjunto X é **fechado** se $\overline{X} = X$.

Teorema* 8.6. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$ é fechado se, e somente se, F^c é aberto.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $a \in F^c$, então $a \notin F'$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap F = \varnothing$. Isso implica que $B(a, r) \subset F^c$. Portanto, F^c é aberto. ($\Leftarrow$) Se $a \in F'$, então $B(a, r) \cap F \neq \varnothing$ para qualquer $r > 0$. Logo, $B(a, r) \not\subset F^c$ para todo $r > 0$. Como F^c é aberto, segue que $a \notin F^c$, ou seja, $a \in F$. Portanto, F é fechado. □

Corolário* 8.7. *Considerando subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, tem-se que*

1. $\mathbb{R}^d$ e $\varnothing$ são conjuntos fechados;

2. a interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

3. a união de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Teorema* 8.8. *O fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Se $a \in \overline{X}^c$, então $a \notin X$ e $a \notin X'$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \cap X = \varnothing$. Como $B(a,r)$ é um conjunto aberto, para cada $x \in B(a,r)$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(x,\epsilon_x) \subset B(a,r)$. Logo, $B(x,\epsilon_x) \cap X = \varnothing$ para todo $x \in B(a,r)$. Isso implica que nenhum $x \in B(a,r)$ é ponto de acumulação de X e, por conseguinte, $B(a,r) \cap \overline{X} = \varnothing$. Logo, $B(a,r) \subset \overline{X}^c$. Portanto, $\overline{X}^c$ é aberto. □

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$, diz-se que $A \subset X$ é **aberto em** X se para cada $a \in X$ existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \cap X \subset A$. Por outro lado, diz-se que A é **fechado em** X se $\overline{A} \cap X = A$.

Teorema* 8.9. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, existe um conjunto aberto $G \subset \mathbb{R}^d$ tal que $A = G \cap X$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x,r_x) \cap X \subset A$. O conjunto $G = \bigcup_{x \in A} B(x,r_x)$ é aberto e tem-se que $G \cap X = A$. ($\Leftarrow$) Se $A = G \cap X$, no qual $G \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto aberto, então para cada $a \in A$ tem-se que $a \in G$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset G$ e, por conseguinte, $B(a,r) \cap X \subset A$. □

Corolário* 8.10. *Dado $X \subset \mathbb{R}^d$, tem-se que*

1. *um conjunto $A \subset X$ é fechado em X se, e somente se, $X \setminus A$ é aberto em X;*

2. *X e $\varnothing$ são abertos e fechados em X;*

3. *a união (interseção) arbitrária de conjuntos abertos (fechados) em X é um conjunto aberto (fechado) em X;*

4. *a interseção (união) de dois conjuntos abertos (fechados) em X é um conjunto aberto (fechado) em X.*

Dada uma função $f : X \to Y$, define-se a **imagem inversa** de um conjunto $B \subset Y$ por f como o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Teorema* 8.11. *Sejam $f : X \to Y$ e $A, B \subset Y$. Tem-se que*

1. *se* $A \subset B$*, então* $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$*;*

2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$*;*

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$*;*

4. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$*.*

Teorema* 8.12. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^m$*. Uma função* $f : X \to \mathbb{R}^d$ *é contínua se, e somente se,* $f^{-1}(G)$ *é um conjunto aberto em* X *para qualquer aberto* $G \subset \mathbb{R}^d$*.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $G \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto. Se $a \in f^{-1}(G)$, então $b = f(a) \in G$. Como G é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(b, \epsilon) \subset G$. Por outro lado, como f é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in B(b, \epsilon)$ sempre que $x \in B(a, \delta) \cap X$. Logo, $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(B(b, \epsilon)) \subset f^{-1}(G)$. Portanto, $f^{-1}(G)$ é aberto em X. ($\Leftarrow$) Seja $a \in X$. Dado $\epsilon > 0$, ponhamos $G = B(f(a), \epsilon)$. Como G é aberto, $f^{-1}(G)$ é aberto em X e, além disso, $a \in f^{-1}(G)$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(G)$. Dessa maneira, $x \in B(a, \delta) \cap X$ implica que $f(x) \in G$. Portanto, f é contínua no ponto a. □

Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Diz-se que os conjuntos $A, B \subset X$ formam uma **cisão** de X se A e B são abertos em X, $A \cap B = \varnothing$ e $X = A \cup B$. Claramente X e $\varnothing$ formam uma cisão de X, a qual é chamada de **cisão trivial**.

Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é **conexo** se só admite a cisão trivial.

Teorema* 8.13. *Os únicos subconjuntos conexos de* $\mathbb{R}$ *são os intervalos.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo, existem $a, b \in X$ e $x \in X^c$ tais que $a < x < b$. Logo, os conjuntos $A = (-\infty, x) \cap X$ e $B = (x, \infty) \cap X$ são abertos em X, $A \cap B = \varnothing$ e $X = A \cup B$. Assim, A e B formam uma cisão de X e, por conseguinte, X não é conexo. Consideremos agora que $X \subset \mathbb{R}$ seja um intervalo e suponhamos que existam conjuntos não-vazios $A, B \subset X$ que formem uma cisão não-trivial de X. Se $a \in A$, $b \in B$ e $a < b$, então $x_1 = (a + b)/2 \in X$. Logo, só uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x_1 \in A$ ou $x_1 \in B$. No primeiro caso definimos o intervalo $I_1 \subset X$ como $I_1 = [x_1, b]$ e no segundo como $I_1 = [a, x_1]$. Dessa maneira, I_1 tem comprimento $(b - a)/2$ e uma das extremidades de I_1 pertence a A e a outra a B. Repetindo esse procedimento, podemos encontrar intervalos fechados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ tais que I_n tem comprimento $(b - a)/2^n$ e uma das suas extremidades pertence a A e a outra a B. Pelo teorema dos intervalos encaixados existe $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $I_n = [a_n, b_n]$, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n = (b - a)/2^n < \epsilon$. Logo, $c - a_n < \epsilon$ e $b_n - c < \epsilon$, o que implica que $c - \epsilon < a_n \leq c \leq b_n < c + \epsilon$, ou seja, $a_n, b_n \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$. Como A e B são abertos em X, segue que $c \notin A$ e $c \notin B$. Absurdo! Portanto, X deve ser conexo. □

Teorema* 8.14. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $f : X \to \mathbb{R}^d$ é uma função contínua e X é conexo, então $f(X)$ é conexo.*

Demonstração. Sejam $Y = f(X)$ e suponhamos que $A, B \subset Y$ formem uma cisão de Y. Como A e B são abertos em Y, existem conjuntos abertos $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^d$ tais que $A = Y \cap G_1$ e $B = Y \cap G_2$. Logo, $f^{-1}(A) = f^{-1}(G_1)$ e $f^{-1}(B) = f^{-1}(G_2)$, os quais são abertos em X, pelo teorema 8.12. Além disso, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$ e $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$, ou seja, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ formam uma cisão de X. Como X é conexo, deve-se ter $f^{-1}(A) = X$ e $f^{-1}(B) = \varnothing$ ou vice-versa. Considerando o primeiro caso, segue que $B = \varnothing$ e $A = Y$. Portanto, Y é conexo. □

Corolário 8.15. Teorema do valor intermediário. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a imagem de f é um intervalo. Em outras palavras, para qualquer d no intervalo fechado de extremidades $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*

Exemplos:

1. A equação $x^4 - 6x + 3 = 0$ tem pelo menos uma solução. Com efeito, a função $p(x) = x^4 - 6x + 3$ é contínua e podemos verificar que $p(0) = 3$ e $p(1) = -2$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

2. **Teorema do ponto fixo de Brouwer** em uma dimensão: Se $f : [a, b] \to [a, b]$ é uma função contínua, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Com efeito, se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, OK. Se isso não acontece, então $f(a) - a > 0$ e $f(b) - b < 0$. Como a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$ é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$.

Lema* 8.16. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e injetiva, então ela é monótona.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que $I = [a, b]$ e suponhamos que $f(a) < f(b)$. Devemos ter que f é estritamente crescente. Com efeito, se existissem $x, y \in [a, b]$ tais que $x < y$ e $f(x) > f(y)$, teríamos duas possibilidades: $f(x) > f(y) > f(a)$ ou $f(b) > f(a) > f(y)$. No primeiro caso, pelo teorema do valor intermediário, existiria $x_1 \in [a, x]$ tal que $f(x_1) = f(y)$; no segundo caso existiria $x_2 \in [y, b]$ tal que $f(x_2) = f(a)$. Assim, ambos casos contradizem a injetividade de f. Logo, f deve ser estritamente crescente. Analogamente podemos provar que $f(a) > f(b)$ implica que f é estritamente decrescente. Consideremos agora que I seja um intervalo arbitrário. Se f não fosse monótona, existiriam $a, b, c, d \in I$ tais que $a < b$, $c < d$, $f(a) < f(b)$ e $f(c) > f(d)$. Do que foi provado anteriormente segue que temos dois casos: $a < b \leq c < d$ ou $c < d \leq a < b$. No primeiro caso, se $f(a) < f(d)$ ($f(a) > f(d)$), f seria estritamente crescente (decrescente) em $[a, d]$, contradizendo o fato de ela ser estritamente decrescente (crescente) em $[c, d]$ ($[a, b]$). De forma análoga podemos verificar que o segundo caso também nos leva a uma contradição. Portanto, f deve ser monótona. $\square$

Teorema 8.17. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \to J$ é uma bijeção contínua, sua inversa é contínua e monótona.*

Demonstração. Pelo lema 8.16, f é monótona. Suponhamos que f seja estritamente crescente e denotemos a sua inversa por g. Se g não fosse estritamente crescente, existiriam $y_1, y_2 \in J$ tais que $y_1 < y_2$ e $g(y_1) > g(y_2)$. Porém, isso implicaria que $y_1 = f(g(y_1)) > f(g(y_2)) = y_2$. Contradição! Portanto, g deve ser estritamente crescente. Para provar que g é contínua, consideremos um conjunto $A \subset I$ aberto em I. Notamos que $g^{-1}(A) = f(A)$. Se $b \in f(A)$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como A é aberto em I, existe $\delta > 0$ tal que $B = (a - \delta, a + \delta) \cap I \subset A$. Logo, B é um intervalo e, por conseguinte, $f(B)$ também é. Se b é uma extremidade de $f(B)$, então a é uma extremidade de B devido a que f é estritamente crescente. Logo, a é uma extremidade de I e, por conseguinte, b é uma extremidade de J. Portanto, considerando um número positivo ϵ menor do que o comprimento do intervalo $f(B)$, temos que $(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap J \subset f(B) \subset f(A)$, o que implica que $f(A)$ é aberto em J. Se b não é uma extremidade de $f(B)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $(b-\epsilon, b+\epsilon) \subset f(B) \subset f(A)$. Logo, $f(A)$ é aberto em J. Portanto, em qualquer um dos casos, $g^{-1}(A) = f(A)$ é aberto em J e, por conseguinte, g é contínua. $\square$

Uma bijeção contínua cuja inversa é também contínua é chamada de um **homeomorfismo**.

Exemplo: Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^n$ é contínua e injetiva. Logo, pelo lema 8.16, ela é monótona. Como $0^n < 1^n$, segue que f é estritamente crescente. A função f é sobrejetiva, pois f é contínua, $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Logo, f é uma bijeção e, pelo teorema 8.17, sua inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, definida por $f^{-1}(y) = y^{1/n}$, é contínua e estritamente crescente. Assim, temos provado em particular a existência e unicidade da raiz n-ésima de um número não-negativo.

Teorema 8.18. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua no ponto $a \in X$ e $g : Y \to \mathbb{R}^p$ é uma função contínua no ponto $b = f(a)$, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ para todo $y \in Y$ satisfazendo a condição $|y - b| < \eta$. Por outro lado, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \eta$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $|x - a| < \delta$. Portanto, nessas condições temos que $|g(f(x) - g(f(a))| < \epsilon$. $\square$

Exemplos:

1. Tem-se que $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x^2 - 2x} = 0$. Com efeito, a função $f(x) = x^2 - 2x$ é contínua no ponto 2 e a função $g(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua no ponto 0. Logo, $g \circ f$ é contínua no ponto 2 e, por conseguinte, $\lim_{x\to 2} g(f(x)) = g(f(2)) = 0$.

2. Tem-se que $\lim_{x\to 0} \sqrt{(\operatorname{sen} x)/x} = 1$. Com efeito, a função
$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen} x)/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
é contínua no ponto 0 e a função $g(x) = \sqrt{x}$ é contínua no ponto 1. Logo, $g \circ f$ é contínua no ponto 0 e, por conseguinte, $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = g(f(0)) = 1$. Desse exemplo podemos concluir que, se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, e g é uma função contínua no ponto L, então $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(L)$, mesmo que a não pertença ao domínio de f.

Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é **limitado** se existe $c > 0$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$.

Diz-se que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^d$ é **compacto** se é fechado e limitado. Por exemplo, qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto. Além disso, é claro que todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto.

Teorema* 8.19. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^d$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $x_1, x_2, \ldots$ é uma sequência de pontos em K, ela é limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência convergente $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$. Seja $a \in \mathbb{R}^d$ tal que $x_{l_n} \to a$. Logo, $B(a, \epsilon) \cap K \neq \varnothing$ para qualquer $\epsilon > 0$. Como K é fechado, segue que $a \in K$. ($\Leftarrow$) Se K não fosse limitado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in K$ tal que $|x_n| > n$. Logo, a sequência $x_1, x_2, \ldots$ não possuiria subsequência limitada e, por conseguinte, convergente. Contradição! Portanto, K deve ser limitado. Se K não fosse fechado, existiria $a \in K' \setminus K$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in K \cap B(a, 1/n)$, ou seja, $|x_n - a| < 1/n$. Logo, $|x_n - a| \to 0$ e, por conseguinte, $x_n \to a$. Dessa maneira, toda subsequência de $x_1, x_2, \ldots$ converge para $a \in K^c$. Contradição! Portanto, K deve ser fechado. $\square$

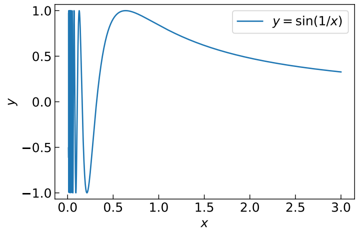

Figura 8.1: Gráfico da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(1/x)$.

Teorema* 8.20. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é contínua em um ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_1, x_2, \ldots \in X$ tal que $x_n \to a$, tem-se que $f(x_n) \to f(a)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $|x - a| < \delta$. Se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to a$, então existe $A > 0$ tal que $|x_n - a| < \delta$ para todo $n > A$. Assim, se $n > A$, $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$. Portanto, $f(x_n) \to f(a)$. ($\Leftarrow$) Se f não fosse contínua no ponto a, existiria $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, pode-se encontrar $x_n \in X \cap B(a, 1/n)$ satisfazendo a condição $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Logo, temos que $x_n \to a$ mas $f(x_n) \not\to f(a)$. Contradição! Portanto, f deve ser contínua no ponto a. $\square$

Exemplo: A função

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua no ponto 0 para qualquer valor da constante $c \in \mathbb{R}$ (ver figura 8.1). Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $x_n = 2/(4n+1)\pi$ e $y_n = 2/(4n+3)\pi$. Logo, $x_n \downarrow 0$ e $y_n \downarrow 0$; porém $f(x_n) \to 1$ e $f(y_n) \to -1$.

Teorema* 8.21. *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}^d$ é uma função contínua, então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $y_1, y_2, \ldots$ uma sequência de pontos em $f(K)$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como K é compacto, a sequência $x_1, x_2, \ldots$ possui uma subsequência $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots$ que converge para um ponto $a \in K$. Logo, como f é contínua, $f(x_{l_n}) \to f(a)$. Assim, a subsequência $y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots$ é convergente e, por conseguinte, $f(K)$ é compacto. $\square$

Corolário 8.22. Teorema de Weierstrass. *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então ela atinge seus valores mínimo e máximo, ou seja, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.*

Exemplo: A função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ não tem um valor máximo nem um valor mínimo.

Teorema* 8.23. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto e $L \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : K \to L$ é uma bijeção contínua, então $f^{-1} : L \to K$ é contínua.*

Demonstração. Seja $y_1, y_2, \ldots$ uma sequência de pontos em L que converge a $b \in L$. Consideremos que $f^{-1}(b) = a$ e ponhamos $f^{-1}(y_n) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $x_n \not\to a$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um índice $l_n > n$ para o qual $|x_{l_n} - a| \geq \epsilon$. Como K é compacto, passando para uma subsequência se necessário, existe $a_1 \in K$ tal que $x_{l_n} \to a_1$. Logo, $|x_{l_n} - a| \to |a_1 - a|$ e, por conseguinte, $|a_1 - a| \geq \epsilon$. Em particular, isso implica que $a_1 \neq a$. Como f é contínua, $f(x_{l_n}) \to f(a_1) \neq f(a)$, o qual contradiz o fato de que $f(x_n) \to f(a)$. Portanto, deve-se ter que $x_n \to a$, o que implica que f^{-1} é contínua. $\square$

Exemplo: A função $f : (-1, 0) \cup [1, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é uma bijeção contínua. No entanto, sua inversa não é contínua no ponto 1.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é **uniformemente contínua** se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \in X$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$.

Exemplo: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é **lipchitziana** se existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$. Toda função lipchitziana é claramente uniformemente contínua.

Teorema* 8.24. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é uniformemente contínua se, e somente se, para quaisquer sequências $x_1, x_2, \ldots \in X$ e $y_n, y_n, \ldots \in X$ tais que $x_n - y_n \to 0$ tem-se que $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \in X$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$. Se $x_1, x_2, \ldots \in X$ e $y_1, y_2, \ldots \in X$ são sequências tais que $x_n - y_n \to 0$, existe $A > 0$ tal que $|x_n - y_n| < \delta$ para todo $n > A$. Logo, $n > A$ implica que $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ e, por conseguinte, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. ($\Leftarrow$) Se f não é uniformemente contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n, y_n \in X$ satisfazendo as condições $|x_n - y_n| \leq 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Logo, $x_n - y_n \to 0$ mas $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. $\square$

Teorema* 8.25. *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}^d$ é uma função contínua, então ela é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam sequências $x_1, x_2, \ldots \in K$ e $y_1, y_2, \ldots \in K$ tais que $x_n - y_n \to 0$ e $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. Como K é compacto, considerando subsequências se necessário, existiriam $a, b \in K$ tais que $x_n \to a$ e $y_n \to b$. Logo, $a = b$ e, como f é contínua, $f(x_n) \to f(a)$ e $f(y_n) \to f(a)$. Porém, isso implicaria que $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Contradição! Portanto, f deve ser uniformemente contínua. □

Exemplo: A função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua. Com efeito, a restrição de f ao intervalo $[0, 1]$ é uniformemente contínua e a restrição de f ao intervalo $(1, \infty)$ é lipchitziana, pois nesse caso

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{1}{2}|x - y| .$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \in [0, 1]$ ou $x, y > 1$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta_1$. Por outro lado, se $x > 1$, $0 \le y \le 1$ e $x - y < \epsilon$, então

$$|f(x) - f(y)| = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < |x - y| < \epsilon .$$

Logo, pondo $\delta = \min\{\epsilon, \delta_1\}$, temos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \ge 0$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$.

Teorema* 8.26. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto limitado. Se $f : X \to \mathbb{R}^d$ é uniformemente contínua, então f é limitada.*

Demonstração. Suponhamos que f não seja limitada. Logo, escolhido $x_1 \in X$, existe $x_2 \in X$ tal que $|f(x_2)| \ge |f(x_1)| + 1$, pois f não é limitada. Supondo definidos $x_1, \ldots, x_n$, escolhemos $x_{n+1} \in X$ de tal forma que $|f(x_{n+1})| \ge |f(x_n)| + 1$, o qual é possível devido a que f não é limitada. Assim, temos que $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \ge |f(x_{n+1})| - |f(x_n)| \ge 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como X é limitado, passando para uma subsequência se necessário, existe $a \in \mathbb{R}^m$ tal que $x_n \to a$. Logo, $x_{n+1} - x_n \to 0$ mas $f(x_{n+1}) - f(x_n) \not\to 0$. Portanto, f não é uniformemente contínua. □

Exemplo: A função $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ é contínua mas não é uniformemente contínua, pois não é limitada.

Teorema* 8.27. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Tem-se que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, para qualquer sequência $x_1, x_2, \ldots \in X \setminus \{a\}$ tal que $x_n \to a$, tem-se que $f(x_n) \to L$.*

Demonstração. Análoga à demonstração do teorema 8.20. $\square$

Teorema* 8.28. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in X'$. Se $f : X \to \mathbb{R}^d$ é uniformemente contínua, então existe* $\lim_{x\to a} f(x)$.

Demonstração. Fixemos $r > 0$ e consideremos o conjunto limitado $A = B(a, r) \cap X$. A restrição de f a A é uniformemente contínua e $a \in A'$. Seja $x_1, x_2, \ldots \in X \setminus \{a\}$ uma sequência tal que $x_n \to a$. Como f é uniformemente contínua, pelo teorema 8.26, temos que $f(x_1), f(x_2), \ldots$ é uma sequência limitada. Logo, ela possui uma subsequência convergente. Seja $L \in \mathbb{R}^d$ tal que $f(x_{l_n}) \to L$. Por outro lado, $f(x_n) - f(x_{l_n}) \to 0$, pois f é uniformemente contínua e $x_n - x_{l_n} \to 0$. Logo, como $f(x_n) = [f(x_n) - f(x_{l_n})] + f(x_{l_n})$, segue que $f(x_n) \to L$. Portanto, $\lim_{x\to a} f(x) = L$. $\square$

9 A derivada de funções de uma variável real

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}^d$ e $a \in X \cap X'$. Define-se a **derivada** de f no ponto a por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,$$

desde que o limite do lado direito exista. A derivada de f no ponto a também pode ser denotada por

$$\frac{df}{dx}(a)\,.$$

Se $n = 1$, a derivada de f no ponto a pode ser interpretada geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto a.

Exemplo: A função $f(x) = |x|$ não é derivável no ponto 0, pois $f'(0) = \lim_{x \to 0} |x|/x$, o qual não existe.

Diz-se que uma função é **derivável** em um determinado ponto se existe a derivada da função nesse ponto. Se a função é derivável em todo ponto do seu domínio, diz-se que ela é uma função derivável.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $f : X \to \mathbb{R}^d$ é uma função derivável, para cada $x \in X$ existe $f'(x)$. Isso define uma **função derivada** $f' : X \to \mathbb{R}^d$. Se f é definida dando simplesmente uma expressão para $f(x)$, os símbolos

$$f'(x)\,, \qquad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

vão representar a expressão da função derivada f'. Se f' é uma função derivável, podemos definir a **função segunda derivada** ou a **derivada de segunda ordem** de f por $f'' : X \to \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)\,.$$

Nesse caso, dizemos que f é **duas vezes derivável**. De forma análoga podem ser definidas derivadas de ordens superiores.

Teorema 9.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis no ponto a, então*

1. *$f \pm g$ é derivável no ponto a e vale a relação $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;*

2. **regra do produto**: *fg é derivável no ponto a e vale a relação $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*

3. *$1/g$ é derivável no ponto a desde que se tenha $g(a) \neq 0$ e vale a relação $(1/g)'(a) = -g'(a)/[g(a)]^2$.*

Demonstração. 1. Temos que

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) \pm g(x) - [f(a) \pm g(a)]}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \pm \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\ &= f'(a) \pm g'(a)\,.\end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)[g(x)-g(a)] + [f(x)-f(a)]g(a)}{x-a} \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\,.\end{aligned}$$

3. Temos que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\,.$$

□

Corolário* 9.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f, g : X \to \mathbb{R}^d$ e $h : X \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis no ponto a, então*

1. *$f \pm g$ é derivável no ponto e vale a relação $(f \pm g)' = f'(a) \pm g'(a)$;*

2. *hf é derivável no ponto a e vale a relação $(hf)'(a) = h'(a)f(a) + h(a)f'(a)$;*

3. *$\langle f, g\rangle$ é derivável no ponto a e vale a relação $\langle f, g\rangle'(a) = \langle f'(a), g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)\rangle$.*

Exemplos:

1. As funções $f(x) = c$ e $g(x) = x$ são deriváveis e valem as relações $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0 \quad \text{e} \quad g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1\,.$$

   Logo, podemos escrever

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dx} = 1\,.$$

2. Usando a regra do produto, podemos concluir que

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \tag{9.1}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso usamos indução em n. Se $n = 1$, OK. Supondo que a afirmação seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n x) = \left(\frac{d}{dx} x^n\right) x + x^n \frac{dx}{dx} = n x^{n-1} x + x^n = (n+1) x^n\,.$$

   Portanto, a Eq. (9.1) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então, usando os resultados anteriores, temos que $p'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. Portanto, toda função polinomial é derivável.

4. Toda função racional é derivável. De fato se a equação $f(x) = p(x)/q(x)$ define uma função racional f, então p e q são funções polinomiais e, para qualquer x no domínio de f,

$$f'(x) = p'(x) \frac{1}{q(x)} - p(x) \frac{q'(x)}{[q(x)]^2} = \frac{p'(x) q(x) - p(x) q'(x)}{[q(x)]^2}\,.$$

Teorema 9.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se a função $f : X \to \mathbb{R}^d$ é derivável no ponto a, então ela é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Temos que

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 f'(a) = 0\,.$$

Portanto, f é contínua no ponto a. □

Exemplos:

1. A função seno é derivável no ponto 0. Com efeito, temos que

$$\operatorname{sen}'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$

   Logo, a função seno é contínua no ponto 0.

2. A função cosseno é derivável no ponto 0. Com efeito,

$$\cos'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}\,.$$

   Usando a identidade trigonométrica $\cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2)$, temos que

$$\cos'(0) = \lim_{x\to 0} -\frac{2\operatorname{sen}^2(x/2)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2}\operatorname{sen}(x/2)\,.$$

   Como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x/2)/(x/2) = 1$ e, pelo item anterior, a função seno é contínua no ponto 0, temos que $\cos'(0) = 0$. Logo, a função cosseno é contínua no ponto 0.

3. As funções seno e cosseno são de fato funções deriváveis e, por conseguinte, contínuas. Com efeito, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$\operatorname{sen}'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{h}\,.$$

   Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h$, temos que

$$\operatorname{sen}'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\operatorname{sen} a \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\,.$$

   Como

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} = 0\,,$$

   segue que $\operatorname{sen}'(a) = \cos a$. Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x\,.$$

   Por outro lado, $\cos'(a) = \lim_{h\to 0}[\cos(a+h) - \cos a]/h$. Usando a identidade trigonométrica $\cos(a+h) = \cos a \cos h - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} h$, temos que

$$\cos'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} a \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) = -\operatorname{sen} a\,.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x\,.$$

4. A função $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ é contínua mas não é uniformemente contínua, pois $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(1/x)$ não existe.

5. Como $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$, temos que

$$\tan'(x) = \operatorname{sen}'(x)\frac{1}{\cos x} + \operatorname{sen} x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,.$$

   Logo, podemos escrever,

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x\,.$$

Teorema 9.4. *Sejam $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo e $f: I\to J$ uma bijeção contínua. Se f é derivável no ponto $a\in I$ e $f'(a)\neq 0$, então f^{-1} é derivável no ponto $b=f(a)$ e vale a relação $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$.*

Demonstração. Temos que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \lim_{y\to b}\frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-a}} = \lim_{y\to b}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}}\,.$$

Como $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]/(x-a) = f'(a)$ e f^{-1} é contínua no ponto b. Segue que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y\to b}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$ □

Exemplos:

1. Dado $n\in\mathbb{N}$, a função $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definida por $f(x)=x^n$ é uma bijeção derivável e $f'(x)=nx^{n-1}>0$ para todo $x>0$. Logo, $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$, definida por $f^{-1}(y)=y^{1/n}$, é derivável em $(0,\infty)$ e vale a relação

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}$$

   para todo $y>0$. Portanto, podemos escrever

$$\frac{d}{dx}x^{1/n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1} \quad (x>0)\,.$$

2. A função $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma bijeção crescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco seno** e é denotada por $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ (ver figura 9.1). Como $f'(x) = \cos x > 0$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, a função arco seno é derivável em $(-1, 1)$, valendo a relação

$$\operatorname{arcsen}'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,.$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)\,.$$

3. A função $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \cos x$ é uma bijeção decrescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco cosseno** e é denotada por $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (ver figura 9.1). Como $f'(x) = -\operatorname{sen} x < 0$ para todo $x \in (0, \pi)$, a função arco cosseno é derivável em $(-1, 1)$, valendo a relação

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)\,.$$

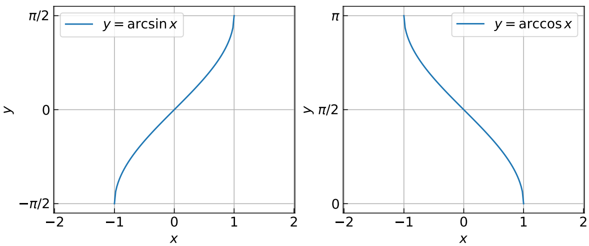

Figura 9.1: Gráficos das funções arco seno e arco cosseno. Nota-se que a função arco seno é uma função ímpar.

4. A função $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan x$ é uma bijeção crescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco tangente** e é denotada por $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ (ver figura 9.2). Como $f'(x) = \sec^2 x > 0$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, a função arco tangente é derivável e

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

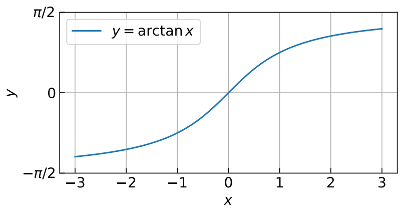

Figura 9.2: Gráfico da função arco tangente. Nota-se que ela é uma função ímpar.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f : X \to \mathbb{R}^d$ é uma função derivável no ponto a, para qualquer $x \in X$, temos que $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + r(x)$, em que $\lim_{x\to a} r(x)/(x - a) = 0$. Reciprocamente, se $f(x) = f(a) + (x - a)v + r(x)$ para todo $x \in X$ e $\lim_{x\to a} r(x)/(x - a) = 0$, então a função f e derivável no ponto a e $f'(a) = v$.

Teorema 9.5. Regra da cadeia. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f : X \to Y$ é derivável no ponto a, $f(a) \in Y \cap Y'$ e $g : Y \to \mathbb{R}^d$ é derivável no ponto $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável no ponto a e vale a relação $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.*

Demonstração. Como f é derivável no ponto a, temos que

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + r(x)$$

para todo $x \in X$, em que $\lim_{x\to a} r(x)/(x - a) = 0$. Por outro lado, como g é derivável no ponto $f(a)$, temos que

$$g(y) = g(f(a)) + (y - f(a))g'(f(a)) + s(y)$$

para qualquer $y \in Y$, em que $\lim_{y\to f(a)} s(y)/[y - f(a)] = 0$. Logo, em particular, para qualquer $x \in X$,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + [f(x) - f(a)]g'(f(a)) + s(f(x)) \\ &= g(f(a)) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + r(x)g'(f(a)) + s(f(x)) \,. \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{x\to a} \frac{s(f(x))}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{s(f(x))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,.$$

Como f é contínua no ponto a, então $\lim_{x\to a} s(f(x))/[f(x)-f(a)] = 0$. Segue daqui que $\lim_{x\to a} s(f(x))/(x-a) = 0$. Dessa maneira, temos que

$$(g\circ f)(x) = (g\circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + t(x)$$

para todo $x \in X$, em que $\lim_{x\to a} t(x)/(x-a) = 0$. Portanto, $g\circ f$ é derivável no ponto a e vale a relação $(g\circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$. □

Exemplo: Consideremos as funções $f(x) = x^m$ e $g(x) = x^{1/n}$. Como f e g são funções deriváveis, pela regra da cadeia temos que

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = mx^{(m-1)/n}\frac{1}{n}x^{1/n-1} = \frac{m}{n}x^{m/n-1}\,.$$

Portanto, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, temos que

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}\,,$$

desde que o lado direito esteja definido.

Teorema 9.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se f é monótona crescente, então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Por outro lado, se f é monótona decrescente, então $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponhamos que f seja monótona crescente. Se existe $a \in X$ tal que $f'(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $[f(x)-f(a)]/(x-a) < 0$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x-a| < \delta$. Logo, $f(x) > f(a)$ para todo $x \in X \cap (a-\delta, a)$ e $f(x) < f(a)$ para todo $x \in X \cap (a, a+\delta)$. Isso implica que f não é monótona crescente. Contradição! Portanto, devemos ter $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. O caso no qual f é monótona decrescente pode ser provado de forma análoga. □

Exemplo: A função $f(x) = x^3$ é estritamente crescente. No entanto, não se tem $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, $f'(0) = 0$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}^d$ e $a \in X \cap X'_+$. Define-se a **derivada à direita** de f no ponto a por

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Analogamente, se $a \in X \cap X'_-$, define-se a **derivada à esquerda** de f no ponto a por

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

É claro que f é derivável em um ponto $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ se, e somente se, $f'_+(a) = f'_-(a)$.

Teorema 9.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}^d$. Se $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$ existem, então f é contínua no ponto a.*

Exemplo: Consideremos a função $f(x) = |x|$. Temos que $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Logo, f é contínua no ponto 0 embora não seja derivável nesse ponto.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Diz-se que $a \in X$ é um **ponto de mínimo** (**máximo**) de f se existe $\delta > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$ ($f(a) \geq f(x)$) para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$. Nesse caso, diz-se também que f tem um mínimo (máximo) no ponto a.

Teorema 9.8. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se a é um ponto de mínimo ou de máximo de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que é derivável nesse ponto, então $f'(a) = 0$.*

Demonstração. Temos que $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$. Suponhamos que a seja um ponto de mínimo. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - f(a) \geq 0$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$. Isso implica que $[f(x) - f(a)]/(x - a)$ é não-negativo para todo $x \in X \cap (a, a + \delta)$ e é não-positivo para todo $x \in X \cap (a - \delta, a)$. Assim, $f'_+(a) \geq 0$ e $f'_-(a) \leq 0$. Portanto, devemos ter $f'(a) = 0$. O caso no qual a é um ponto de mínimo pode ser tratado de forma semelhante. □

Exemplo: A recíproca do teorema anterior é falsa. Para ver isso consideremos a função $f(x) = x^3$. Temos que $f'(0) = 0$, mas 0 não é um ponto de máximo nem de mínimo.

Teorema 9.9. Teorema de Darboux. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(a) < d < f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Pelo teorema de Weierstrass, a função f atinge seus valores máximo e mínimo. Como $f'(b) > 0$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $[f(x) - f(b)]/(x - b) > 0$ para todo $x \in X \cap (b - \delta, b)$. Segue daqui que $f(x) < f(b)$ para todo $x \in X \cap (b - \delta, b)$ e, por conseguinte, b não é um ponto de mínimo. De forma análoga pode-se provar que a também não é um ponto de mínimo. Logo, o valor mínimo de f é atingido em um ponto $c \in (a, b)$. Portanto, $f'(c) = 0$, pois c é um ponto de acumulação bilateral. Consideremos agora o caso geral em que $f'(a) < f'(b)$. Se $f'(a) < d < f'(b)$, a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - dx$ é derivável e é tal que $g'(a) < 0 < g'(b)$. Logo, pelo que foi provado anteriormente, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Isso implica que $f'(c) = d$. □

Exemplo: Não existe função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $f'(x) = 0$ se $x < 0$.

Lema 9.10. Teorema de Rolle. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se $f(x) = f(a) = f(b)$ para todo $x \in (a, b)$, então f é a função constante e, por conseguinte, $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se esse não for o caso, pelo teorema de Weierstrass, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Como pelo menos um dos valores extremos $f(x_1)$ ou $f(x_2)$ é diferente de $f(a) = f(b)$, então $x_1 \in (a, b)$ ou $x_2 \in (a, b)$. Além disso, esses pontos seriam pontos de mínimo ou de máximo respectivamente. Portanto, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$. $\square$

Teorema 9.11. Teorema do valor médio. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Demonstração. A função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

é derivável e é tal que $g(a) = g(b) = 0$. Logo, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Isso implica que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. $\square$

O teorema do valor médio pode ser intuído a partir do gráfico de uma função derivável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dada a reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, pode-se encontrar uma reta paralela a ela a qual é tangente ao gráfico em um ponto intermediário $(c, f(c))$.

Corolário 9.12. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em (a, b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é uma função constante.*

Corolário 9.13. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em (a, b). A função f é monótona crescente se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. De forma análoga, f é monótona decrescente se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além do mais, se valem as desigualdades estritas para todo $x \in (a, b)$, f será estritamente crescente ou decrescente respectivamente.*

Corolário 9.14. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $c \in (a, b)$ e f derivável em $(a, c) \cup (c, b)$. Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (c, b)$, então c é um ponto de mínimo. De forma análoga, se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (c, b)$, então c é um ponto de máximo.*

Corolário 9.15. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função que possui segunda derivada no ponto $c \in (a,b)$. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então c é um ponto de mínimo. Por outro lado, se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então c é um ponto de máximo.*

Exemplos:

1. A função $f(x) = |x|$ tem um mínimo no ponto 0, pois $f'(x) = 1$ se $x > 0$ e $f'(x) = -1$ se $x < 0$. Nesse caso, $f'(0)$ não existe.

2. A função $f(x) = 1/(1+x^2)$ tem um máximo no ponto 0, pois $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -2$.

Teorema 9.16. Teorema do valor médio generalizado. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas que são deriváveis em (a,b). Se g é injetiva e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Demonstração. Como g é contínua e injetiva, existe um intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ tal que $g : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ é uma bijeção. Logo, ela é monótona e sua inversa g^{-1} é derivável no intervalo (α, β). Suponhamos que g^{-1} seja crescente. Logo, $g^{-1}(\alpha) = a$ e $g^{-1}(\beta) = b$. Dessa maneira,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(g^{-1}(\beta)) - f(g^{-1}(\alpha))}{\beta - \alpha}\,.$$

Como $f \circ g^{-1} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que é derivável em (α, β), pelo teorema do valor médio existe $d \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = (f \circ g^{-1})'(d)\,.$$

Se $g^{-1}(d) = c$, usando a regra da cadeia e o teorema 9.4, temos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = f'(g^{-1}(d))(g^{-1})'(d) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \qquad \square$$

Teorema* 9.17. Desigualdade do valor médio. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua que é derivável em (a,b). Se existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$, então $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.*

Demonstração. Se $f(a) = f(b)$, OK. Se esse não é o caso, consideremos a função $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle$. Essa função é contínua, é derivável em (a,b) e $\phi(b)-\phi(a) = |f(b)-f(a)|^2$. Logo, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{b-a} = \frac{|f(b)-f(a)|^2}{b-a} = f'(c) = \langle f'(c), f(b)-f(a)\rangle \, .$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\frac{|f(b)-f(a)|^2}{|b-a|} \le |f'(c)||f(b)-f(a)| \le M|f(b)-f(a)| \, .$$

Portanto, $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$. □

Corolário* 9.18. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua que é derivável em (a,b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é uma função constante.*

Corolário* 9.19. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua que é derivável em (a,b). Se existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \le M$ para todo $x \in (a,b)$, então $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$ para quaisquer $x,y \in [a,b]$, ou seja, f é lipchitziana.*

Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é **convexo** se, dados $x,y \in X$, $(1-\alpha)x+\alpha y \in X$ para quaisquer $x,y \in X$ e $\alpha \in [0,1]$.

Exemplo: Toda bola aberta de $\mathbb{R}^d$ é um conjunto convexo. Com efeito, dados $x,y \in B(a,r)$ e $\alpha \in [0,1]$, temos que $|(1-\alpha)x+\alpha y-a| \le (1-\alpha)|x-a|+\alpha|y-a| < r$.

Teorema 9.20. *Os únicos subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo, existem $a,b \in X$ e $x \in X^c$ tal que $a < x < b$. Pondo $t = (x-a)/(b-a)$, temos que $t \in (0,1)$ e $x = (1-t)a+tb$. Logo, X não é um conjunto convexo. Reciprocamente, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, dados $x,y \in I$ com $x < y$, a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = (1-t)x+ty$ é contínua e estritamente crescente. Logo, $(1-t)x+ty \in [x,y] \subset I$ para todo $t \in [0,1]$. Portanto, I é um conjunto convexo. □

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **convexa** se $f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a)+tf(b)$ para quaisquer $a,b \in I$ e $t \in [0,1]$. Se $a < b$, pondo $x = (1-t)a+tb$, temos que $t = (x-a)/(b-a)$. Segue daqui que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \tag{9.2}$$

para quaisquer $a,b,x \in I$ satisfazendo a condição $a < x < b$. Reciprocamente, se a condição (9.2) é satisfeita, a função f é convexa. Com efeito, pondo $t = (x-a)/(b-a)$, podemos obter que $f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a)+tf(b)$

para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$ e $t \in (0,1)$. Se $b < a$, pondo $s = 1 - t$, podemos obter a mesma desigualdade. Além disso, se $a = b$ ou $t \in \{0,1\}$, ocorre a igualdade de forma trivial. Portanto, f é convexa. Intuitivamente, uma função convexa deve ter um gráfico parecido com $\smile$. Dessa maneira, qualquer reta secante corta o gráfico de uma função convexa em exatamente dois pontos. Além disso, a porção do gráfico limitada pelos pontos de interseção com a reta secante está por baixo dessa reta.

Teorema 9.21. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então ela é contínua.*

Demonstração. Seja $a \in I$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset I$. Consideremos a função $\phi : (a, a + \epsilon] \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$. Como f é convexa, segue que ϕ é monótona crescente. Além disso, ϕ é limitada, pois

$$\frac{f(a) - f(a - \epsilon)}{\epsilon} \leq \phi(x) \leq \phi(a + \epsilon)$$

para todo $x \in (a, a + \epsilon]$. Logo, pelo teorema 5.10, existe $\lim_{x \to a+} \phi(x) = f'_+(a)$. De maneira análoga, a função $\psi : [a - \epsilon, a) \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = [f(a) - f(x)]/(a - x)$ é monótona crescente e limitada. Logo, existe $\lim_{x \to a-} \psi(x) = f'_-(a)$. Portanto, f é contínua no ponto a. □

Exemplo: A função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $x \neq 0$ é convexa mas não é contínua.

Teorema 9.22. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é uma função convexa;*
2. *tem-se que $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$ para quaisquer $x, a \in I$;*
3. *a função derivada f' é monótona crescente.*

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Se $a = x$, OK. Se $a < x$, então para qualquer $t \in (a, x)$, temos que

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Logo, $f'(a) = f'_+(a) \leq [f(x) - f(a)]/(x - a)$. De forma análoga podemos mostrar que, se $a > x$, $f'(a) = f'_-(a) \geq [f(x) - f(a)]/(x - a)$. Portanto, $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$ para quaisquer $x, a \in I$. $(2 \Rightarrow 3)$ Dados $x, y \in I$, temos que $f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$ e $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$. Logo, $f(x) \geq f(x) + (y - x)[f'(x) - f'(y)]$, o que implica que $(x - y)[f'(x) - f'(y)] \geq 0$.

Portanto, se $x > y$, deve-se ter $f'(x) \geq f'(y)$, ou seja, f' é monótona crescente.
$(3 \Rightarrow 1)$ Se f não é convexa, existem $a, b, x \in I$ com $a < x < b$ tais que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Logo, pelo teorema do valor médio, existem $\xi \in (a, x)$ e $\eta \in (x, b)$ tais que $f'(\xi) > f'(\eta)$. Assim, f' não é monótona crescente. □

Corolário 9.23. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável. Logo, f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Exemplo: A função $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **côncava** quando $-f$ é convexa.

Exemplo: A função $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$ é côncava pois $f''(x) = -\cos x \leq 0$ para todo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que $a \in I$ é um **ponto de inflexão** de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que a restrição de f a $(a - \delta, a] \cap I$ é convexa e a restrição a $[a, a + \delta) \cap I$ é côncava, ou vice-versa.

Teorema 9.24. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável e $a \in I$ é um ponto de inflexão, então $f''(a) = 0$. Por outro lado, se $f''(a) = 0$ e f'' muda de sinal ao passar pelo ponto a, então a é um ponto de inflexão.*

Exemplos:

1. A função $f(x) = x^4$ é convexa, pois $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, ela não tem um ponto de inflexão, embora se tenha $f''(0) = 0$.

2. A função $f(x) = 1/(1 + x^2)$ tem dois pontos de inflexão: $1/\sqrt{3}$ e $-1/\sqrt{3}$. Com efeito, temos que $f''(x) = (6x^2 - 2)/(1 + x^2)^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f''(1/\sqrt{3}) = 0$, $f''(x) < 0$ se $x < 1/\sqrt{3}$ e $f''(x) > 0$ se $x > 1/\sqrt{3}$. Por outro lado, $f''(-1/\sqrt{3}) = 0$, $f''(x) < 0$ se $x > -1/\sqrt{3}$ e $f''(x) > 0$ se $x < -1/\sqrt{3}$.

Lema 9.25. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo tal que $0 \in I$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função que possui derivada de ordem n contínua no ponto 0. Se $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{n-1}(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$, pode-se encontrar $\xi \in I$ satisfazendo a condição $0 < |\xi| \leq |x|$ e a relação*

$$\frac{f(x)}{x^n} = f^{(n)}(\xi) r(x),$$

na qual $|r(x)| \leq 1$.

Demonstração. Usamos indução em n. Se $n = 1$, como f' é contínua no ponto 0, existe $\delta > 0$ tal que $f'(x)$ existe para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$. Logo, pelo teorema do valor médio, para cada $x \in (-\delta, \delta) \cap I$ podemos encontrar $\xi \in I$ tal que $0 < |\xi| < |x|$ e $f(x)/x = f'(\xi)$. Supondo que a afirmação seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$, pode-se encontrar $\xi \in I$ satisfazendo a condição $0 < |\xi| \leq |x|$ e a relação

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = f^{(n)}(\xi)\frac{r(x)}{x},$$

na qual $|r(x)| \leq 1$. Se f possui derivada de ordem $n+1$ contínua no ponto 0, podemos considerar que δ seja tal que $f^{(n+1)}(x)$ exista para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$. Se, além disso, $f^{(n)}(0) = 0$, pelo teorema do valor médio, existe $\eta \in I$ tal que $0 < |\eta| < |\xi|$ e $f^{(n)}(\xi)/\xi = f^{(n+1)}(\eta)$. Logo,

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = f^{(n+1)}(\eta)r(x)\frac{\xi}{x}.$$

Definindo $s(x) = r(x)\xi/x$, vemos que $|s(x)| \leq |r(x)||\eta|/|x| \leq 1$. Isso prova a afirmação para $(n+1) \in \mathbb{N}$. □

Lema 9.26. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo tal que $0 \in I$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto 0. Tem-se que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^n(0) = 0$ se, e somente se, $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pelo lema 9.25, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} f^{(n-1)}(\xi)\frac{r(x)}{x},$$

em que $0 < |\xi| \leq |x|$ e $|r(x)| \leq 1$. Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{\xi}r(x)\frac{\xi}{x}.$$

Como $\lim_{x\to 0}\xi = 0$ e $\lim_{y\to 0} f^{(n-1)}(y)/y = f^{(n)}(0) = 0$, segue que $\lim_{x\to 0} f^{(n-1)}(\xi)/\xi = 0$. Finalmente, como $|r(x)\xi|/|x| \leq 1$, obtemos que $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$. ($\Leftarrow$) Se $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}x^{n-k} = 0.$$

Definamos a função $r : I \to \mathbb{R}$ por

$$r(x) = f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right). \tag{9.3}$$

Vemos imediatamente que r é n vezes derivável no ponto 0 e $r(0) = r'(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0$. Logo, pelo que foi provado anteriormente, temos que $\lim_{x\to 0} r(x)/x^n = 0$ e, por conseguinte, $\lim_{x\to 0} r(x)/x^k = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Usando isso na Eq. (9.3) temos que

$$0 = \lim_{x\to 0} r(x) = \lim_{x\to 0} \left(f(x) - f(0) - xf'(0) - \cdots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right) = -f(0)\,,$$

ou seja, $f(0) = 0$. Supondo que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{x^k} - \frac{f(0)}{x^k} - \frac{f'(0)}{x^{k-1}} - \cdots - \frac{x^{n-k}}{n!} f^{(n)}(0) \right) = -\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,,$$

ou seja, $f^{(k)}(0) = 0$. Portanto, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$. □

Teorema 9.27. Fórmula de Taylor infinitesimal. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$. Logo,*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r(x)$$

para todo $x \in I$, em que $\lim_{x\to a} r(x)/(x-a)^n = 0$. Reciprocamente, se para qualquer $x \in I$ tem-se que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + r(x)\,,$$

em que $\lim_{x\to a} r(x)/(x-a)^n = 0$, então $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Se vale a primeira expressão para $f(x)$, temos que r é n vezes derivável no ponto a e $r(a) = r'(a) = \ldots = r^{(n)}(a) = 0$. Logo, a função $s : I \to \mathbb{R}$ definida por $s(y) = r(y+a)$ é n vezes derivável no ponto 0 e $s(0) = s'(0) = \ldots = s^{(n)}(0) = 0$. Consequentemente, pelo lema 9.26, temos que

$$0 = \lim_{y\to 0} \frac{s(y)}{y^n} = \lim_{y\to 0} \frac{r(y+a)}{y^n} = \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}\,.$$

Reciprocamente, se $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + r(x)$ para todo $x \in I$ e $\lim_{x\to a} r(x)/(x-a)^n = 0$, então, definindo a função $s : I \to \mathbb{R}$ por $s(x) = r(x+a)$, temos que $\lim_{x\to 0} s(x)/x^n = 0$. Logo, pelo lema 9.26, $s(0) = s'(0) = \ldots = s^{(n)}(0) = 0$ e, por conseguinte, $r(a) = r'(a) = \ldots = r^{(n)}(a) = 0$. Usando esse fato na expressão de $f(x)$, obtemos que $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. □

Corolário 9.28. Regra de L'Hôpital. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções n vezes deriváveis no ponto $a \in I$. Se $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $g^{(n)}(a) \neq 0$, então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}\,.$$

Teorema 9.29. Fórmula de Taylor com resto de Lagrange. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em (a, b) que possui derivada de ordem $n-1$ contínua em $[a, b]$. Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)\,.$$

Demonstração. Segue da fórmula de Taylor infinitesimal que, para qualquer $x \in [a, b]$,

$$f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + r_x(b)\,.$$

A função $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = r_x(b) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

é contínua, é derivável em (a, b) e é tal que $\rho(b) = 0$. Logo, pelo teorema do valor médio generalizado, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{r_a(b)}{(b-a)^n} = \frac{\rho(a) - \rho(b)}{(b-a)^n - (b-b)^n} = -\frac{\rho'(c)}{n(b-c)^{n-1}} = -\frac{1}{n(b-c)^{n-1}} \left(-\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) \right)$$

Portanto,

$$r_a(b) = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)\,. \qquad \square$$

10 A integral de Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real

Intuitivamente, a integral de uma função contínua $f : [a, b] \to [0, \infty)$ é a área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo x. Passemos para as definições agora.

Uma **partição** de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ sejam $M_j = \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$ e $m_j = \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$. Definem-se a **soma superior** e a **soma inferior** de f em relação a P e α por

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^{n} M_j[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \quad \text{e} \quad s(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^{n} m_j[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$$

respectivamente. Se $\alpha(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$, as somas superior e inferior de f em relação a P e α são denotadas por $S(f, P)$ e $s(f, P)$ respectivametne. Intuitivamente, se f é contínua e não-negativa, essas somas superior e inferior são aproximações por meio de retângulos da área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo x.

Seja P uma partição de um intervalo $[a, b]$. Diz-se que um conjunto Q é um **refinamento** de P se Q é uma partição de $[a, b]$ tal que $P \subset Q$.

Teorema* 10.1. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e P uma partição de $[a, b]$. Se Q é um refinamento de P, tem-se que $s(f, P, \alpha) \leq s(f, Q, \alpha) \leq S(f, Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$.*

Demonstração. É claro que $s(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$ para toda partição P de $[a, b]$. Seja $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ e suponhamos inicialmente que $Q = P \cup \{x\}$, em que $x \notin P$. Logo, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in (x_{j-1}, x_j)$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - S(f, Q, \alpha) &= M_j[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] - M_1'[\alpha(x) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad - M_2'[\alpha(x_j) - \alpha(x)] \\ &= (M_j - M_1')[\alpha(x) - \alpha(x_{j-1})] + (M_j - M_2')[\alpha(x_j) - \alpha(x)]\,, \end{aligned}$$

em que $M_1' = \sup_{x\in[x_{j-1},x]} f(x)$, $M_2' = \sup_{x\in[x,x_j]} f(x)$ e $M_j = \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$. Como $M_j \geq M_1'$ e $M_j \geq M_2'$, segue que $S(f,P,\alpha) \geq S(f,Q,\alpha)$. A desigualdade envolvendo as somas inferiores pode ser provada de forma análoga. Como todo refinamento de P pode ser construído adicionando pontos a P de um a um, o teorema é verdadeiro para qualquer refinamento Q de P. □

Corolário* 10.2. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se P e Q são partições de $[a,b]$, então $S(f,P,\alpha) \geq s(f,Q,\alpha)$.*

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Define-se a **integral superior** de f em relação a α por

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \inf\{S(f,P,\alpha) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\}$$

e a **integral inferior** de f em relação a α por

$$\underline{\int} f\,d\alpha = \sup\{s(f,P,\alpha) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\}\,.$$

As integrais superior e inferior de f sempre existem e vale a relação

$$\underline{\int} f\,d\alpha \leq \overline{\int} f\,d\alpha\,.$$

Se essas integrais são iguais, diz-se que f é **integrável à Riemann-Stieltjes** em relação a α e define-se a **integral de Riemann-Stieltjes** de f em relação a α por

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int f\,d\alpha = \overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha\,.$$

Se $\alpha(x) = x$ para todo $x \in [a,b]$ e f é integrável em relação a α, diz-se que f é **integrável à Riemann** e $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada de **integral de Riemann** de f.

Lema* 10.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Se $B \subset A$ é tal que para cada $x \in A$ existem $a, b \in B$ satisfazendo a condição $a \leq x \leq b$, então $\sup B = \sup A$ e $\inf B = \inf A$.*

Demonstração. Como $B \subset A$, tem-se que $\sup B \leq \sup A$ e $\inf B \geq \inf A$. Se tivéssemos $\sup B < \sup A$, existiria $x \in A$ tal que $\sup B < x \leq \sup A$. Porém, isso implicaria que existe $y \in B$ tal que $\sup B < x \leq y$. Absurdo! Portanto, deve-se ter $\sup B = \sup A$. De forma análoga pode-se provar que $\inf B = \inf A$. □

Teorema* 10.4. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e P_0 uma partição de $[a, b]$. Tem-se que*

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \inf\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}$$

e

$$\underline{\int} f\,d\alpha = \sup\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}\,.$$

Demonstração. Sejam os conjuntos $A = \{S(f, P, \alpha) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$ e $B = \{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}$. Vemos imediatamente que $B \subset A$. Além disso, se $S(f, P, \alpha) \in A$, então $Q = P \cup P_0$ é um refinamento de P_0, $S(f, Q, \alpha) \in B$ e $S(f, Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$. Portanto, $\inf B = \inf A = \overline{\int} f\,d\alpha$. A igualdade envolvendo a integral inferior pode ser provada de forma similar. □

Teorema* 10.5. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é integrável em relação a α;*
2. *dado $\epsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a, b]$ tais que $S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$.*
3. *dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \epsilon$.*

Demonstração. ($1 \Rightarrow 2$) Dado $\epsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a, b]$ tais que

$$\overline{\int} f\,d\alpha \leq S(f, P, \alpha) < \overline{\int} f\,d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \underline{\int} f\,d\alpha - \frac{\epsilon}{2} < s(f, Q, \alpha) \leq \underline{\int} f\,d\alpha\,.$$

Como f é integrável em relação a α, segue que

$$\int f\,d\alpha \leq S(f, P, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad -\int f\,d\alpha \leq -s(f, Q, \alpha) < -\int f\,d\alpha + \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Somando essas desigualdades, obtemos que $0 \leq S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$. ($2 \Rightarrow 3$) Dado $\epsilon > 0$ sejam P e Q partições de $[a, b]$ tais que $S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$. Definindo a partição $R = P \cup Q$, temos que $S(f, R, \alpha) \leq s(f, P, \alpha)$ e $-s(f, R, \alpha) \leq -s(f, Q, \alpha)$. Logo, $S(f, R, \alpha) - s(f, R, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$. ($3 \Rightarrow 1$) Se $\underline{\int} f\,d\alpha < \overline{\int} f\,d\alpha$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha + \epsilon$. Logo, para qualquer partição P de $[a, b]$, temos que

$$s(f, P, \alpha) + \epsilon \leq \underline{\int} f\,d\alpha + \epsilon = \overline{\int} f\,d\alpha \leq S(f, P, \alpha)\,.$$

Portanto, $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) \geq \epsilon$. □

Seja $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ uma partição de um intervalo $[a, b]$. Define-se a **norma** de P por $|P| = \max\{|x_j - x_{j-1}| : j \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Teorema 10.6. *Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em relação a α.*

Demonstração. Se α é uma função constante, $S(f, P, \alpha) = s(f, P, \alpha) = 0$ para toda partição P de $[a, b]$. Suponhamos agora que esse não seja o caso. Como f é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$. Seja $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$. Logo, pelo teorema de Weierstrass, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existem $x'_j, x''_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tais que $f(x'_j) \leq f(x) \leq f(x''_j)$ para todo $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^{n} [f(x''_j) - f(x'_j)][\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &< \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \sum_{j=1}^{n} [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= \epsilon\,. \end{aligned}$$

Portanto, f é integrável em relação a α. □

Exemplos:

1. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. A função f é integrável em relação a α, pois é contínua. Por outro lado, pode-se verificar facilmente que $S(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para toda partição P de $[a, b]$. Portanto,
$$\int_a^b c\, d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]\,.$$

2. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = c$ para todo $x \in (a, b]$ e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente que é contínua no ponto a. Se $f(a) \neq c$, dado $\epsilon > 0$, existe $d \in (a, b)$ tal que $\alpha(d) - \alpha(a) < \epsilon/|f(a) - c|$, pois α é contínua no ponto a. Logo, considerando a partição $P_0 = \{a, d, b\}$ de $[a, b]$, temos que
$$S(f, P_0, \alpha) - s(f, P_0, \alpha) = |f(a) - c|[\alpha(d) - \alpha(a)] < \epsilon$$
e, por conseguinte, f é integrável. Se $f(a) > c$, então $s(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para toda partição P de $[a, b]$. Logo, $\int f\, d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Por outro lado, se $f(a) < c$, então $S(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para toda partição P de $[a, b]$. Logo, $\int f\, d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$.

Lema* 10.7. *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}$ *conjuntos limitados. O conjunto* $A+B = \{x+y : x \in A, y \in B\}$ *é limitado e valem as relações* $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ *e* $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Demonstração. Dado $z \in A+B$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $z = x+y$. Logo, $z \leq \sup A + \sup B$, o que implica que $A+B$ é limitado superiormente e que $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$. Por outro lado, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$ temos que $x+y \leq \sup(A+B)$. Logo, $x \leq \sup(A+B) - y$, o que implica que $\sup A \leq \sup(A+B) - y$, pois $x \in A$ é arbitrário. Pela sua vez, essa desigualdade pode ser escrita como $y \leq \sup(A+B) - \sup A$. Como y é arbitrário, temos que $\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A$. Portanto, $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. De forma análoga pode-se provar que $A+B$ é limitado inferiormente e que $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. $\square$

Teorema 10.8. *Sejam* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função monótona crescente e* $c \in (a,b)$. *Uma função limitada* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável em relação a* α *se, e somente se, as restrições de* f *a* $[a,c]$ *e a* $[c,b]$ *são integráveis em relação a* α. *Além do mais, nesse caso tem-se que*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\, d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\, d\alpha(x)\,.$$

Demonstração. Seja $P_0 = \{a, c, b\}$. Todo refinamento P de P_0 pode ser escrito como $P = P_1 \cup P_2$, em que P_1 e P_2 são partições de $[a,c]$ e $[c,b]$ respectivamente. Reciprocamente, se P_1 e P_2 são partições arbitrárias de $[a,c]$ e $[b,c]$ respectivamente, então $P = P_1 \cup P_2$ é um refinamento de P_0. Se f_1 e f_2 denotam as restrições de f a $[a,c]$ e a $[c,b]$ respectivamente, então, para todo refinamento P de P_0 temos

$$S(f, P, \alpha) = S(f_1, P_1, \alpha) + S(f_2, P_2, \alpha)$$

e

$$s(f, P, \alpha) = s(f_1, P_1, \alpha) + s(f_2, P_2, \alpha)\,,$$

em que P_1 e P_2 são partições de $[a,c]$ e $[c,b]$ respectivamente. Logo,

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) = \overline{\int_a^c} f(x)\, d\alpha(x) + \overline{\int_c^b} f(x)\, d\alpha(x)$$

e

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) = \underline{\int_a^c} f(x)\, d\alpha(x) + \underline{\int_c^b} f(x)\, d\alpha(x)\,.$$

Segue daqui que

$$
\begin{aligned}
\underline{\int_a^c} f(x)\,d\alpha(x) + \underline{\int_c^b} f(x)\,d\alpha(x) &= \underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) \\
&\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) \\
&= \overline{\int_a^c} f(x)\,d\alpha(x) + \overline{\int_c^b} f(x)\,d\alpha(x)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, f é integrável se, e somente se, as restrições de f a $[a, c]$ e a $[c, b]$ são integráveis. Além disso, nesse caso vale a relação $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\,d\alpha(x)$. $\square$

Pondo por convenção que $\int_a^a f(x)\,d\alpha(x) = 0$ e que $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = -\int_b^a f(x)\,d\alpha(x)$, segue do teorema 10.8 que, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função integrável,

$$
\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\,d\alpha(x)
$$

para quaisquer $a, b, c \in I$.

Exemplos:

1. Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente que é contínua nos pontos a e b. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = c$ para todo $x \in (a, b)$, então f é integrável em relação a α e $\int f\,d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Com efeito, escolhendo $d \in (a, b)$, as restrições de f a $[a, d]$ e a $[d, b]$ são integráveis. Logo, f é integrável e

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) &= \int_a^d f(x)\,d\alpha(x) + \int_d^b f(x)\,d\alpha(x) \\
&= c[\alpha(d) - \alpha(a)] + c[\alpha(b) - \alpha(d)] \\
&= c[\alpha(b) - \alpha(a)]\,.
\end{aligned}
$$

2. Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente que é contínua nos pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função tal que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x) = c_j$ para todo $x \in (x_{j-1}, x_j)$, então f é integrável e

$$
\int f\,d\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]\,.
$$

Isso segue diretamente de observar que a restrição de f a cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ é integrável e $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\, d\alpha(x) = c_j[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, escreveremos $\sup f$ e $\inf f$ para denotar $\sup_{x\in X} f(x)$ e $\inf_{x\in X} f(x)$ respectivamente.

Lema* 10.9. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções limitadas, a função $f + g$ é limitada e valem as relações $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.*

Demonstração. Dado $x \in X$, temos que $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$ e $\inf g \leq g(x) \leq \sup g$. Logo, $\inf f + \inf g \leq f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$. Isso implica que $f + g$ é limitada, $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$. $\square$

Lema* 10.10. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $cX = \{cx : x \in X\}$ é limitado. Além disso, se $c \geq 0$, $\sup cX = c \sup X$ e $\inf cX = c \inf X$. Por outro lado, se $c < 0$, $\sup cX = c \inf X$, $\inf cX = c \sup X$.*

Demonstração. Dado $x \in X$, tem-se que $\inf X \leq x \leq \sup X$. Se $c \geq 0$, então $c \inf X \leq cx \leq c \sup X$. Isso implica que cX é limitado, $\sup cX \leq c \sup X$ e $\inf cX \geq c \inf X$. Por outro lado, dado $x \in X$, temos que $\inf cX \leq cx \leq \sup cX$, o que implica que $(\inf cX)/c \leq x \leq (\sup cX)/c$. Logo, $(\inf cX)/c \leq \inf X$ e $\sup X \leq (\sup cX)/c$. Portanto, $\sup cX = c \sup X$ e $\inf cX = c \inf X$. O caso em que $c < 0$ pode ser provado de forma análoga. $\square$

Corolário* 10.11. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : X \to [0, \infty)$ é uma função limitada, então cf é uma função limitada para todo $c \in \mathbb{R}$. Além disso, se $c \geq 0$, $\sup cf = c \sup f$ e $\inf cf = c \inf f$. Por outro lado, se $c < 0$, $\sup cf = c \inf f$ e $\inf cf = c \sup f$.*

Lema* 10.12. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, então $\sup f - \inf f = \sup_{x,y\in X} |f(x) - f(y)|$.*

Demonstração. Sejam $\sup f = M$ e $\inf f = m$. Dados $x, y \in X$, temos que $m \leq f(x) \leq M$ e $m \leq f(y) \leq M$. Logo, $-(M - m) \leq f(x) - f(y) \leq M - m$, o que implica que $|f(x) - f(y)| \leq M - m$. Assim, $\sup_{x,y\in X} |f(x) - f(y)| \leq M - m$. Seja $\omega = \sup_{x,y\in X} |f(x) - f(y)|$. Para quaisquer $x, y \in X$ temos que $f(x) - f(y) \leq \omega$. Logo, $f(x) \leq \omega + f(y)$, o que implica que $M \leq \omega + f(y)$, pois $x \in X$ é arbitrário. Pela sua vez, a desigualdade $M - \omega \leq f(y)$ implica que $M - \omega \leq m$, pois $y \in X$ é arbitrário. Portanto, $\omega = M - m$. $\square$

Teorema 10.13. *Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis em relação a α, então*

1. *$f+g$ é integrável em relação a α e $\int(f+g)\,d\alpha = \int f\,d\alpha + \int g\,d\alpha$;*

2. *fg é integrável em relação a α e, em particular, $\int cf\,d\alpha = c\int f\,d\alpha$ para todo $c\in\mathbb{R}$;*

3. *f/g é integrável em relação a α desde que exista $c>0$ tal que $|g(x)|\geq c$ para todo $x\in[a,b]$;*

4. *se $f\leq g$, então $\int f\,d\alpha \leq \int g\,d\alpha$;*

5. *$|f|$ é integrável e $|\int f\,d\alpha| \leq \int |f|\,d\alpha$.*

Demonstração. 1. Dadas as partições P e Q de $[a,b]$, temos

$$S(f+g,P\cup Q,\alpha) \leq S(f,P\cup Q,\alpha)+S(g,P\cup Q,\alpha) \leq S(f,P,\alpha)+S(g,Q,\alpha)$$

e

$$s(f+g,P\cup Q,\alpha) \geq s(f,P\cup Q,\alpha)+s(g,P\cup Q,\alpha) \geq s(f,P,\alpha)+s(g,Q,\alpha)\,.$$

Logo,

$$\overline{\int}(f+g)\,d\alpha \leq \overline{\int} f\,d\alpha + \overline{\int} g\,d\alpha \quad \text{e} \quad \underline{\int}(f+g)\,d\alpha \geq \underline{\int} f\,d\alpha + \underline{\int} g\,d\alpha\,.$$

A partir dessas desigualdades obtemos que

$$\underline{\int} f\,d\alpha + \underline{\int} g\,d\alpha \leq \underline{\int}(f+g)\,d\alpha \leq \overline{\int}(f+g)\,d\alpha \leq \overline{\int} f\,d\alpha + \overline{\int} g\,d\alpha\,.$$

Portanto, se f e g são integráveis, segue que $f+g$ é integrável e que $\int(f+g)\,d\alpha = \int f\,d\alpha + \int g\,d\alpha$.

2. Seja $M>0$ tal que $|f(x)|\leq M$ e $|g(x)|\leq M$ para todo $x\in[a,b]$. Dados $x,y\in[a,b]$, temos que

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\leq |f(x)||g(x)-g(y)| + |f(x)-f(y)||g(y)|\\ &\leq M(|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|)\,.\end{aligned}$$

Como f e g são integráveis, dado $\epsilon>0$, existe uma partição $P=\{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f,P,\alpha)-s(f,P,\alpha) < \epsilon/2M$ e $S(g,P,\alpha)-$

$s(g,P,\alpha) < \epsilon/2M$. Logo,

$$\begin{aligned}
S(fg,P,\alpha) - s(fg,P,\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\
&\leq M \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |f(x) - f(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\
&\quad + M \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |g(x) - g(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\
&= M[S(f,P,\alpha) - s(f,P,\alpha) + S(g,P,\alpha) - s(g,P,\alpha)] \\
&< \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Portanto, fg é integrável. Em particular, segue daqui que cf é integrável para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Além disso, se $c \geq 0$, temos que $S(cf,P,\alpha) = cS(f,P,\alpha)$ para toda partição P de $[a,b]$. Logo, $\int cf\,d\alpha = c\int f\,d\alpha$. Por outro lado, se $c < 0$, $S(cf,P,\alpha) = cs(f,P,\alpha)$ para toda partição P de $[a,b]$. Logo, $\int cf\,d\alpha = c\int f\,d\alpha$.

3. Dados $x,y \in [a,b]$, temos que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(x)-g(y)|}{|g(x)||g(y)|} \leq \frac{1}{c^2}|g(x)-g(y)|\,.$$

Como g é integrável, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(g,P,\alpha) - s(g,P,\alpha) < \epsilon c^2$. Logo,

$$\begin{aligned}
S(1/g,P,\alpha) - s(1/g,P,\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\
&\leq \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |g(x) - g(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\
&= \frac{1}{c^2}[S(g,P,\alpha) - s(g,P,\alpha)] \\
&< \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $1/g$ é integrável. Finalmente, usando o resultado do item anterior, temos que f/g é integrável.

4. Temos que a função $h = g - f$ é integrável e que $h \geq 0$. Logo, $S(h,P,\alpha) \geq 0$ para toda partição P de $[a,b]$. Dessa maneira, $\int h\,d\alpha \geq 0$, o que implica que $\int g\,d\alpha \geq \int f\,d\alpha$.

5. Dados $x, y \in [a,b]$, temos que $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$. Como f é integrável, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f,P,\alpha) - s(f,P,\alpha) < \epsilon$. Logo,

$$\begin{aligned} S(|f|,P,\alpha) - s(|f|,P,\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{j-1},x_j]} ||f(x)| - |f(y)||[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{j-1},x_j]} |f(x) - f(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= S(f,P,\alpha) - s(f,P,\alpha) \\ &< \epsilon\,. \end{aligned}$$

Portanto, $|f|$ é integrável. Além disso, como $-|f| \leq f \leq |f|$, segue do que foi provado no item anterior que $-\int |f|\, d\alpha \leq \int f\, d\alpha \leq \int |f|\, d\alpha$. Assim, $|\int f\, d\alpha| \leq \int |f|\, d\alpha$. □

Teorema 10.14. Teorema do valor médio para integrais. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se $p : [a,b] \to [0,\infty)$ é uma função integrável em relação a α, existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int fp\, d\alpha = f(c) \int p\, d\alpha\,.$$

Demonstração. Pelo teorema de Weierstrass existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$. Logo, $f(x_1)p(x) \leq f(x)p(x) \leq f(x_2)p(x)$ e, por conseguinte,

$$f(x_1) \int p\, d\alpha \leq \int fp\, d\alpha \leq f(x_2) \int p\, d\alpha\,.$$

Como a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) \int p\, d\alpha$ é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a,b]$ tal que $g(c) = \int fp\, d\alpha$. □

Teorema* 10.15. *Sejam $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções monótonas crescentes. Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em relação a $\alpha + \beta$ se, e somente se, ela é integrável em relação a α e a β. Além do mais, nesse caso vale a relação*

$$\int f\, d(\alpha + \beta) = \int f\, d\alpha + \int f\, d\beta\,.$$

Demonstração. Dadas as partições P e Q de $[a,b]$, seja $R = P \cup Q$. Temos que $S(f,R,\alpha+\beta) = S(f,R,\alpha) + S(f,R,\beta)$ e $s(f,R,\alpha+\beta) = s(f,R,\alpha) + s(f,R,\beta)$.

Logo,

$$S(f,R,\alpha+\beta) \geq \overline{\int} f\, d\alpha + \overline{\int} f\, d\beta\,, \quad s(f,R,\alpha+\beta) \leq \underline{\int} f\, d\alpha + \underline{\int} f\, d\beta$$

e, por outro lado,

$$S(f,R,\alpha+\beta) \leq S(f,P,\alpha)+S(f,Q,\beta) \quad \text{e} \quad s(f,R,\alpha+\beta) \geq s(f,P,\alpha)+s(f,Q,\beta)\,.$$

Dessa maneira temos que

$$\overline{\int} f\, d(\alpha+\beta) = \overline{\int} f\, d\alpha + \overline{\int} f\, d\beta \quad \text{e} \quad \underline{\int} f\, d(\alpha+\beta) = \underline{\int} f\, d\alpha + \underline{\int} f\, d\beta\,.$$

Logo,

$$\underline{\int} f\, d\alpha + \underline{\int} f\, d\beta = \underline{\int} f\, d(\alpha+\beta) \leq \overline{\int} f\, d(\alpha+\beta) = \overline{\int} f\, d\alpha + \overline{\int} f\, d\beta$$

Portanto, f é integrável em relação a $\alpha+\beta$ se, e somente se, ela é integrável em relação a α e a β. Além disso, vale a relação $\int f\, d(\alpha+\beta) = \int f\, d\alpha + \int f\, d\beta$. □

Teorema* 10.16. *Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em relação a α se, e somente se, ela é integrável em relação a $c\alpha$ para todo $c > 0$. Além disso, nesse caso vale a relação*

$$\int f\, d(c\alpha) = c \int f\, d\alpha\,.$$

Demonstração. Dado $c > 0$, percebemos facilmente que $S(f,P,c\alpha) = cS(f,P,\alpha)$ e $s(f,P,c\alpha) = cs(f,P,\alpha)$ para toda partição P de $[a,b]$. Logo,

$$c\underline{\int} f\, d\alpha = \underline{\int} f\, d(c\alpha) \leq \overline{\int} f\, d(c\alpha) = c\overline{\int} f\, d\alpha\,.$$

Portanto, f é integrável em relação a $c\alpha$ se, e somente se, é integrável em relação a α. Além disso, nesse caso vale a relação $\int f\, d(c\alpha) = c\int f\, d\alpha$. □

Exemplos:

1. Dado $c \in (a,b]$, seja $H_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ a **função degrau** definida por

$$H_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c. \end{cases}$$

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada que é contínua no ponto c, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon/3$ para todo $x \in [a,b]$ satisfazendo a condição $|x - c| < \delta$. Se $P = \{a < \ldots < c_1 < c \leq \ldots \leq b\}$ é uma partição de $[a,b]$ tal que $|P| < \delta$, então

$$S(f, P, H_c) - s(f, P, H_c) = \sup_{x,y \in [c_1, c]} |f(x) - f(y)| \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon\,.$$

Logo, f é integrável. Por outro lado, para qualquer refinamento P de $\{a, c, b\}$ temos que $S(f, P, H_c) \geq f(c)$ e $s(f, P, H_c) \leq f(c)$. Dessa maneira, $f(c) \leq \int f\, dH_c \leq f(c)$. Portanto,

$$\int f\, dH_c = f(c)\,.$$

2. Dados $a < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, seja $\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} p_j H_{x_j}$, em que $p_1, \ldots, p_n \geq 0$. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada que é contínua nos pontos $x_1, \ldots, x_n$, então ela é integrável em relação a α_n e

$$\int f\, d\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) p_j\,.$$

3. Sejam $x_1, x_2, \ldots \in [a,b]$ uma sequência estritamente crescente e $p_1, p_2, \ldots \geq 0$ uma sequência tal que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = L$. Consideremos a função $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n H_{x_n}(x)$. A função α está bem definida, pois $\alpha(x)$ existe para todo $x \in [a,b]$. Isso segue do critério de comparação, usando o fato de que $p_n H_{x_n}(x) \leq p_n$ para quaisquer $x \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, vê-se facilmente que a função α é monótona crescente. Dado $t \in [a,b]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [x_{k-1}, x_k]$. Logo,

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n H_{x_n}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} p_j H_{x_j}(t) = \alpha_{k-1}(t)\,.$$

De fato, temos que $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ para todo $n \geq k-1$. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $P = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m\}$ uma partição de $[a,b]$. Pelo que vimos anteriormente, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(t_j) = \alpha_n(t_j)$ para quaisquer $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $n > n_0$. Logo, $S(f, P, \alpha) = S(f, P, \alpha_n)$ e $s(f, P, \alpha) = s(f, P, \alpha_n)$ para todo $n > n_0$. Como f é integrável em relação a α e em relação a α_n para todo $n \in \mathbb{N}$, as desigualdades anteriores implicam que $\int f\, d\alpha \geq \int f\, d\alpha_n \geq \int f\, d\alpha$ para todo $n > n_0$. Portanto,

$$\int f\,d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int f\,d\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)p_n\,,$$

em que a série do lado direito é absolutamente convergente, pois, como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(x_n)p_n| \leq Mp_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema* 10.17. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções monótonas crescentes. Tem-se que f é integrável em relação a g se, e somente se, g é integrável em relação a f. Além disso, nesse caso vale a* **fórmula de integração por partes***:*

$$\int f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int g\,df\,.$$

Demonstração. Observamos que $S(f,P,g) - s(f,P,g) = S(g,P,f) - s(g,P,f)$ para qualquer partição P de $[a,b]$. Logo, f é integrável em relação a g se, e somente se, g é integrável em relação a f. Por outro lado, se $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ é uma partição de $[a,b]$, então

$$\begin{aligned}
S(f,P,g) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})] \\
&= \sum_{j=1}^{n} [f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1}) + f(x_{j-1})g(x_{j-1}) - f(x_j)g(x_{j-1})] \\
&= \sum_{j=1}^{n} [f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1})] - \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - f(x_{j-1})]g(x_{j-1}) \\
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - s(g,P,f)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\int f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int g\,df$. □

Corolário* 10.18. *Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e contínua. Toda função monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em relação a α.*

Exemplos:

1. Temos que $\int_a^b 1\,dx = b - a - \int_a^b x\,d(1) = b - a$.

2. Temos que $\int_a^b x\,dx = b^2 - a^2 - \int_a^b x\,dx$. Portanto, $\int_a^b x\,dx = (b^2 - a^2)/2$.

3. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente e contínua, então $\int f\,df = [f(b)]^2 - [f(a)]^2 - \int f\,df$. Portanto,

$$\int f\,df = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}\,.$$

Teorema* 10.19. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada que é contínua em $(a,b]$ e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se f é descontínua no ponto a e α é contínua nesse ponto, então f é integrável em relação a α.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Como α é contínua no ponto a, dado $\epsilon > 0$, existe $c \in (a,b)$ tal que $\alpha(c) - \alpha(a) < \epsilon/4M$. Por outro lado, como f é uniformemente contínua em $[c,b]$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para quaisquer $x, y \in [c,b]$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$. Se $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ tal que $x_k = c$ e $|P| < \delta$, então

$$\begin{aligned} S(f,P,\alpha) - s(f,P,\alpha) &= \sum_{j=1}^{k} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |f(x) - f(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad + \sum_{j=k}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |f(x) - f(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq 2M[\alpha(c) - \alpha(a)] + \frac{\epsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}[\alpha(b) - \alpha(c)] \\ &< \epsilon\,. \end{aligned}$$

Portanto, f é integrável. □

Corolário* 10.20. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se f é descontínua em apenas um número finito de pontos e α é contínua nesses pontos, então f é integrável em relação a α.*

Exemplo: Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para todo $x \in (0,1]$, então f é integrável à Riemann independentemente do valor de $f(0)$.

Teorema* 10.21. *Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente, derivável e cuja derivada é integrável à Riemann. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável à Riemann, então f é integrável em relação a α e vale a relação*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx\,.$$

Demonstração. Como α' é integrável, ela é limitada. Logo, existe $M > 0$ tal que $0 \leq \alpha'(x) \leq M$. Além disso, como f é integrável à Riemann, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon/M$. Temos que

$$S(f,P,\alpha) - s(f,P,\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |f(x) - f(y)|[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]\,.$$

Pelo teorema do valor médio, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existem $t_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tais que

$$\begin{aligned}
S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq M \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)|(x_j - x_{j-1}) \\
&= M[S(f, P) - s(f, P)] \\
&< \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Logo, f é integrável em relação a α. Por outro lado, para quaisquer partições P e Q de $[a, b]$ tais que $R = P \cup Q = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ temos que

$$\begin{aligned}
S(f, R, \alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} [f(x) \alpha'(x)](x_j - x_{j-1}) \\
&= s(f\alpha', R)\,,
\end{aligned}$$

em que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Logo, $S(f, P, \alpha) \geq s(f\alpha', Q)$, o que implica que $\int_a^b f\, d\alpha \geq \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx$. De maneira análoga podemos obter que $s(f, P, \alpha) \leq S(f\alpha', Q)$ e, por conseguinte, $\int_a^b f\, d\alpha \leq \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx$. Portanto, $\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx$. □

Exemplo: Se $0 \leq a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_a^b x^n\, dx = b^{n+1} - a^{n+1} - \int_a^b x\, d(x^n) = b^{n+1} - a^{n+1} - n \int_a^b x^n\, dx\,.$$

Portanto, $\int_a^b x^n\, dx = [b^{n+1} - a^{n+1}]/(n+1)$.

Teorema* 10.22. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \epsilon < s(f, P) \leq S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \epsilon$ para toda partição P de $[a, b]$ com norma menor do que δ.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que f seja não-negativa e seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \epsilon/2$. Pondo $\delta = \min\{\epsilon/2nM, x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$, seja P uma partição de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$. Essa partição divide o intervalo $[a, b]$ em subintervalos $I_p = [a_p, b_p] \subset [x_{j-1}, x_j]$ para alguns $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $J_q = [c_q, d_q] \not\subset [x_{k-1}, x_k]$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Temos que

$$\sum_p \sup_{x \in [a_p, b_p]} f(x)(b_p - a_p) \leq S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Por outro lado, cada intervalo J_q contém só uma extremidade dos intervalos $[x_{j-1}, x_j]$. Logo, existem no máximo n intervalos J_q. Dessa maneira,

$$\sum_q \sup_{x \in [c_q, d_p]} f(x)(d_q - c_q) < Mn\delta < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Portanto, $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \epsilon$. Vejamos o caso geral agora. Se f é uma função limitada arbitrária, existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq -c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) + c$ é não-negativa. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $S(g, P) < \overline{\int_a^b} g(x)\, dx + \epsilon$ para toda partição P de $[a, b]$ com norma menor do que δ. Como $S(g, P) = S(f, P) + c(b - a)$ e $\overline{\int_a^b} g(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x) + c(b-a)$, segue que $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \epsilon$. A desigualdade envolvendo a soma inferior pode ser provada de forma análoga. $\square$

Seja $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ uma partição de um intervalo $[a, b]$. Se para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ é escolhido $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, obtem-se uma **partição pontilhada** de $[a, b]$, denotada por P_ξ, em que $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Definiremos a norma da partição pontilhada P_ξ como a norma da partição P.

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, seja P_ξ uma partição pontilhada de $[a, b]$, em que $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$. A soma

$$\Sigma(f, P_\xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

é chamada de uma **soma de Riemann**. Diz-se que L é o limite de $\Sigma(f, P_\xi)$ quando $|P|$ tende a 0 se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\Sigma(f, P_\xi) - L| < \epsilon$ para toda partição pontilhada P_ξ com norma menor do que δ. Nesse caso, escreve-se $\lim_{|P| \to 0} \Sigma(f, P_\xi) = L$.

Corolário 10.23. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. Tem-se que*

$$\lim_{|P|\to 0} \Sigma(f, P^*) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Exemplos:

1. Dado $p \in \mathbb{N}$, a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^p$ é integrável à Riemann. Considerando a partição pontilhada P_ξ de $[0, 1]$ em que $P = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ e $\xi = (1/n, 2/n, \ldots, 1)$, temos que

$$\Sigma(f, P_\xi) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}\,.$$

   Como $\lim_{|P|\to 0} \Sigma(f, P_\xi) = \int_0^1 f(x)\, dx = 1/(p + 1)$, temos em particular que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p + 1}\,.$$

2. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann e $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} |P| = 0$. Escolhendo $\xi_j, \eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$ de forma arbitrária para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g(\eta_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx\,. \tag{10.1}$$

   Para provar isso, vamos começar provando que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) = 0\,. \tag{10.2}$$

   Se $|f(x)| \le M$ para todo $x \in [a, b]$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1})\right| &\le \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)||g(\xi_j) - g(\eta_j)|(x_j - x_{j-1})\\ &\le M \sum_{j=1}^{n} |g(\xi_j) - g(\eta_j)|(x_j - x_{j-1})\\ &\le M \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]} |g(x) - g(y)|(x_j - x_{j-1})\\ &= M[S(g, P) - s(g, P)]\,.\end{aligned}$$

Como $\lim_{|P|\to 0} S(g,P) = \lim_{|P|\to 0} s(g,P) = \int_a^b g(x)\,dx$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) \right| = 0\,,$$

da qual decorre a equação (10.2). Como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx\,,$$

a equação (10.1) segue da equação (10.2).

11 O teorema fundamental do cálculo

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $F : I \to \mathbb{R}$ é uma **primitiva** de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Vemos imediatamente que, se F é uma primitiva de f, então $F + c$ também é uma primitiva de f para todo $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 11.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $F, G : I \to \mathbb{R}$ são primitivas de uma função $f : I \to \mathbb{R}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = c$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Temos que $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Segue daqui que $(F - G)'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Portanto, $F - G$ é uma função constante. □

Teorema 11.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada é integrável à Riemann. Logo, para qualquer $x \in [a, b]$ tem-se que*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt\,.$$

Demonstração. Seja $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ uma partição de $[a, x]$. Temos que

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - f(x_{j-1})]\,.$$

Logo, pelo teorema do valor médio, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existem $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tais que

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\,.$$

Dessa maneira, $s(f', P) \leq f(x) - f(a) \leq S(f', P)$. Como f' é integrável, segue que $\int_a^x f'(t)\, dt \leq f(x) - f(a) \leq \int_a^x f'(t)\, dt$. □

Corolário 11.3. Teorema fundamental do cálculo. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann que possui uma primitiva F. Logo,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Teorema 11.4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. A função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é uniformemente contínua. Além disso, se f é contínua no ponto $c \in [a, b]$, então F é derivável no ponto c e $F'(c) = f(c)$.*

Demonstração. Como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Dados $x, y \in [a, b]$ com $x < y$, temos que

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_x^y f(x)\,dx\right| \leq \int_x^y |f(x)|\,dx \leq M(y - x)\,.$$

Logo, F é lipchitziana e, por conseguinte, é uniformemente contínua. Por outro lado, para qualquer $h > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,dx\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(x) - f(c)|\,dx\,.\end{aligned}$$

Como f é contínua no ponto c, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$ satisfazendo a condição $|x - c| < \delta$. Logo, se $0 < h < \delta$,

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| < \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \epsilon\,dx = \epsilon\,.$$

Portanto, $F'_+(c) = f(c)$. De forma análoga, pode-se provar que $F'_-(c) = f(c)$. □

Corolário 11.5. *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva.*

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável que possui uma primitiva F. Define-se a **integral indefinida** de f como uma primitiva arbitrária de f, ou seja,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Exemplos:

1. Sabemos que, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$,
$$\frac{d}{dx}x^{r+1} = (r+1)x^r\,.$$
Logo, x^{r+1} é uma primitiva de $(r+1)x^r$ e, por conseguinte, $x^{r+1}/(r+1)$ é uma primitiva de x^r se $r \neq -1$. Portanto,
$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad (r \neq -1)\,,$$
em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Sabemos que
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x\,, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x\,.$$
Logo,
$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c\,, \quad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c \quad \text{e} \quad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c\,,$$
em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

3. Sabemos que
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,.$$
Logo,
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c = -\arccos x + d \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c\,,$$
em que $c, d \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Segue do primeiro resultado que, para qualquer $x \in (-1,1)$,
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \operatorname{arcsen} t\big|_0^x = -\arccos t\big|_0^x\,.$$
Portanto, $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \pi/2$ para todo $x \in (-1,1)$.

A função $f(x) = 1/x$ é contínua. Logo, ela possui uma primitiva em qualquer intervalo fechado. Define-se a **função logaritmo (natural)** $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por
$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

Segue imediatamente daqui que $\log 1 = 0$, que a função logaritmo é derivável e que

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}\,.$$

De forma mais geral temos que

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{|x|}\frac{d}{dx}|x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

e com isso

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c\,.$$

Como $\log'(x) > 0$ para todo $x > 0$, a função logaritmo é estritamente crescente. Além disso, $\log''(x) = -1/x^2 < 0$ para todo $x > 0$, o que implica que a função logaritmo é uma função côncava. Em particular, para qualquer $x > 0$, tem-se que $\log x \leq \log 1 + (x-1)$ e, por conseguinte,

$$\log x \leq x - 1$$

para todo $x > 0$.

Agora vamos obter a propriedade algébrica fundamental do logaritmo. Dado $a > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\log(ax) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\log x\,.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}[\log(ax) - \log x] = 0\,.$$

Isso implica que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\log(ax) - \log x = c$. Considerando $x = 1$, obtemos que $c = \log a$. Portanto,

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

para quaisquer $a, b > 0$. Como consequência direta dessa relação podemos obter que $\log(a^n) = n\log a$ para quaisquer $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $b > 0$, $\log b = \log((b^{1/n})^n) = n\log b^{1/n}$ e, por conseguinte, $\log b^{1/n} = (\log b)/n$. Logo, dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, tem-se que $\log a^{m/n} = (m/n)\log a$. Finalmente, como $\log 1 = \log(a^{m/n}a^{-m/n}) = \log(a^{m/n}) + \log(a^{-m/n})$, segue que $\log a^{-m/n} = -(m/n)\log a$ e, portanto, para quaisquer $r \in \mathbb{Q}$ e $a > 0$, tem-se que

$$\log a^r = r\log a\,.$$

A função logaritmo não é limitada superiormente nem inferiormente. Com efeito, dado $A > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\log(2^n) = n\log 2 > A$, pois

$\log 2 > \log 1 = 0$. Segue daqui também que $\log 2^{-n} < -A$. Logo, como a função logaritmo é estritamente crescente, segue que $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ e $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$. Além disso, como a função logaritmo é contínua, sua imagem deve ser $\mathbb{R}$. Dessa maneira, a função logaritmo possui inversa.

A inversa da função logaritmo é chamada de **função exponencial**, denotada por $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ver figura 11.1). A função exponencial é estritamente crescente, $\exp(0) = 1$ e $\exp'(y) = 1/\log'(\exp y) = \exp y$. Assim, escrevemos

$$\frac{d}{dx} \exp x = \exp x \,.$$

Além disso, $\exp''(x) = \exp x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a função exponencial é convexa e, em particular, temos a desigualdade

$$\exp x \geq 1 + x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

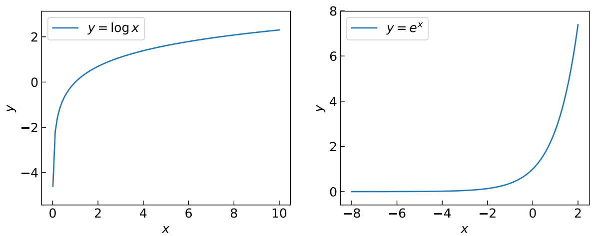

Figura 11.1: Gráficos das funções logaritmo e exponencial.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $\log(\exp x \exp y) = x + y$. Logo,

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y \,.$$

Definindo $e = \exp 1$, temos que $\exp n = e^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $e^m = \exp m = [\exp(m/n)]^n$ e, por conseguinte, $\exp(m/n) = e^{m/n}$. Como $\exp 0 = \exp(m/n - m/n) = e^{m/n} \exp(-m/n)$, segue que $\exp(-m/n) = e^{-m/n}$. Portanto, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$\exp r = e^r \,.$$

Isso motiva a escrever $\exp x$ como e^x para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora vamos provar que o número $e = \exp 1$ coincide com o número e visto na seção 6. Dado $a > 0$, temos que

$$a = \log'(1/a) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1/a + h) - \log(1/a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log(1+ha) = \lim_{h\to 0} \log(1+ha)^{1/h} \,.$$

Logo,
$$\lim_{h\to 0}(1+ha)^{1/h} = e^a\,.$$
Se $a = 1$, temos que
$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e\,.$$
Em particular, como $1/n \downarrow 0$, então
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Dados $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, define-se a potência $a^x = e^{x\log a}$. Vemos que
$$\frac{d}{dx}a^x = e^{x\log a}\log a = a^x\log a\,.$$
Logo, a função $f(x) = a^x$ é estritamente crescente (decrescente) se $a > 1$ ($a < 1$). Além disso, $f''(x) = a^x(\log a)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função f é convexa para qualquer $a \neq 1$ (ver figura 11.2). Como $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ é monótona e contínua em qualquer caso, ela possui uma inversa, a qual é chamada de **função logaritmo na base** a, denotada por $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Dado qualquer $x > 0$, temos que $x = a^{\log_a x} = e^{(\log_a x)\log a}$. Logo, $\log x = (\log_a x)\log a$ e, por conseguinte,
$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}\,.$$

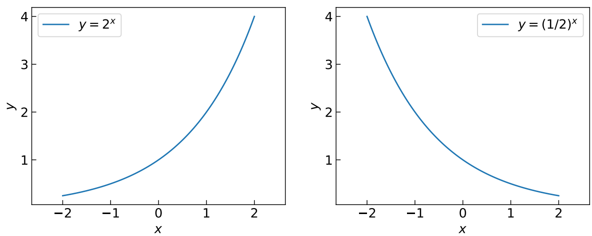

Figura 11.2: Gráfico da função $f(x) = a^x$ quando $a = 2$ e $a = 1/2$.

Dados $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos a potência $x^a = e^{a\log x}$. Vemos que
$$\frac{d}{dx}x^a = e^{a\log x}\frac{a}{x} = ax^{a-1}\,.$$

Agora vamos comparar os crescimentos exponencial e logarítmico com o crescimento tipo lei de potência. Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0\,,$$

ou seja, a função exponencial cresce mais rápido do que qualquer potência. Com efeito, a afirmação é trivial se $a \le 0$. Se $a > 0$ e $x > 0$, $e^x = (e^{x/2a})^{2a} > (x/2a)^{2a}$. Logo,

$$0 < \frac{x^a}{e^x} < \frac{x^a}{(x/2a)^{2a}} = \frac{(2a)^{2a}}{x^a}\,.$$

Como $\lim_{x\to\infty} 1/x^a = 0$, segue que $\lim_{x\to\infty} x^a/e^x = 0$. Por outro lado, dado $a > 0$, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0\,,$$

ou seja, a função exponencial cresce mais devagar do que qualquer potência positiva. Com efeito, temos que $\log x = \log[(x^{a/2})^{2/a}] = 2\log(x^{a/2})/a < 2x^{a/2}/a$. Logo, se $x > 1$,

$$0 < \frac{\log x}{x^a} < \frac{2x^{a/2}}{ax^a} = \frac{2}{ax^{a/2}}\,.$$

Portanto, $\lim_{x\to\infty}(\log x)/x^a = 0$.

Definem-se as funções **seno hiperbólico** $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e **cosseno hiperbólico** $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

Pode-se verificar imediatamente que a função seno hiperbólico é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno hiperbólico é par. Além disso, verifica-se facilmente que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x\,.$$

Como $\cosh x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função seno hiperbólico é monótona crescente (ver figura 11.3).

Define-se a função **tangente hiperbólica** $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

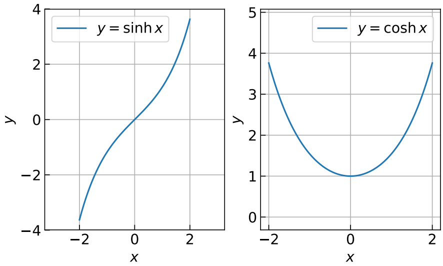

Figura 11.3: Gráficos das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

Verifica-se imediatamente que a função tangente hiperbólica é uma função ímpar. Além disso, $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$ e

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{\cosh x}{\cosh x} - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \,.$$

Segue daqui que a função tangente hiperbólica é monótona crescente (ver figura 11.4).

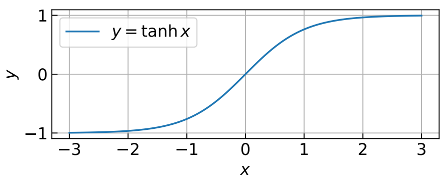

Figura 11.4: Gráfico da função tangente hiperbólica.

Teorema 11.6. Mudança de variável. *Seja $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $\phi(a) = \alpha$ e $\phi(b) = \beta$ para alguns $a, b \in I$ e, além disso, ϕ' é integrável à Riemann no intervalo de extremidades a e b, então*

$$\int_\alpha^\beta f(y)\, dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\, dx \,.$$

Demonstração. Como f é contínua, ela possui uma primitiva F. Logo,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = F(x)|_\alpha^\beta = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) \,.$$

Por outro lado, pela regra da cadeia, $(F \circ \phi)'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ e, por conseguinte,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = (F \circ \phi)(x)|_a^b = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a)\,.$$

Portanto, $\int_\alpha^\beta f(y)\,dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$. $\square$

Exemplos:

1. Sejam I um intervalo e $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivada integrável. Temos que
$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy\,,$$
no qual utilizamos a mudança de variáveis $y = \phi(x)$. Logo,
$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \log|y| + c = \log|\phi(x)| + c\,,$$
em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Temos que
$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c$$
e
$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \log|\operatorname{sen} x| + c = -\log|\csc x| + c\,,$$
em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

3. Usando a identidade $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)$, temos que
$$\int \csc x\,dx = \int \frac{1}{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}\,dx = \int \frac{\sec^2(x/2)}{2\tan(x/2)}\,dx\,.$$
Portanto,
$$\int \csc x\,dx = \log\left|2\tan\frac{x}{2}\right| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + d\,,$$
em que $c, d \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

4. Usando a identidade $\cos x = \operatorname{sen}(x+\pi/2)$, temos que

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x+\pi/2)}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} y}\, dy\,,$$

em que usamos a mudança de variáveis $y = x+\pi/2$ $(x = y-\pi/2)$. Logo,

$$\int \sec x\, dx = \log\left|\tan\frac{y}{2}\right| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c\,.$$

5. Dado $a > 0$, temos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a}\, dx\,.$$

Usando a mudança de variáveis $y = x/a$ $(x = ay)$, obtemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \operatorname{arcsen} y + c = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + c\,.$$

6. Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \int \frac{1}{1+(x/a)^2}\frac{1}{a^2}\, dx = \int \frac{1}{1+y^2}\frac{1}{a}\, dy\,,$$

em que usamos a mudança de variáveis $y = x/a$. Logo,

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan y + c = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c\,.$$

Teorema 11.7. Integração por partes. *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis cujas derivadas são integráveis à Riemann, então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx\,.$$

Demonstração. Temos que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Logo, $(fg)'$ é integrável e $\int_a^b (fg)'(x)\, dx = \int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$. Por outro lado, $\int_a^b (fg)'(x)\, dx = f(x)g(x)\big|_a^b$. Portanto, $\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx$. □

Exemplos:

1. Temos que

$$\int \log x \, dx = \int (\log x) 1 \, dx = (\log x)x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \log x - x + c \,,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Temos que

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = (\operatorname{arcsen} x)x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \,.$$

Usando a mudança de variáveis $x = \sqrt{1-y}$ $(y = 1 - x^2)$, temos que

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \int \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \, dy = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{y} + c \,,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c \,.$$

3. Temos que

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \,.$$

Usando a mudança de variáveis $x = \sqrt{y-1}$ $(y = 1 + x^2)$, temos que

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{\sqrt{y-1}}{y} \frac{1}{2\sqrt{y-1}} \, dy = x \arctan x - \frac{1}{2} \log |y| + c \,,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c \,.$$

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ não ambos nulos. Se $a \neq 0$, temos que

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \operatorname{sen}(bx) - \int \frac{e^{ax}}{a} b \cos(bx) \, dx \,.$$

Usando a fórmula de integração por partes na integral do lado direito, temos que

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \int \frac{e^{ax}}{a} b \operatorname{sen}(bx) \, dx \right) \,.$$

Logo,

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2}\left[a\operatorname{sen}(bx)-b\cos(bx)\right].$$

Portanto,

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\operatorname{sen}(bx)-b\cos(bx)\right]+c\,,$$

em que $c\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Vemos que esse resultado é verdadeiro mesmo no caso em que $a=0$ e $b\neq 0$.

5. Dado $n\in\mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}\int\cos^n x\,dx&=\int\cos^{n-1}x\cos x\,dx\\&=\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\operatorname{sen}x\operatorname{sen}x\,dx\,.\end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$, temos que

$$\int\cos^n x\,dx=\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\cos^n x\,dx\,.$$

Portanto,

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx\,.$$

Em particular, segue daqui que

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{2}\quad\text{e}\quad\int\operatorname{sen}^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{2}\,.$$

6. **Fórmula de Wallis:** Dado $n\in\mathbb{N}$, temos que

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\,.$$

De forma análoga, temos

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,dx=\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\,.$$

Logo,

$$\frac{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,dx}=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n}{2n-1}\frac{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,dx}\,. \tag{11.1}$$

Se $0\le x\le \pi/2$, temos que $\cos^{2n+1}x\le\cos^{2n}x\le\cos^{2n-1}x$. Logo,

$$\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\le\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\le\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,.$$

Dessa maneira temos que

$$\frac{2n}{2n+1}\le\frac{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,dx}\le 1\,,$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,dx}=1\,.$$

Portanto, da equação (11.1) obtemos que

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{3^2}\frac{4^2}{5^2}\cdots\frac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2}2n\,.$$

Além disso, segue dessa relação que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\sqrt{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\sqrt{2n}\,.$$

Logo,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\frac{n^2}{n^2}\frac{2}{2}\sqrt{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}(n!)^2}{(2n)!}\frac{\sqrt{2n}}{n}\,.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}\,.$$