# Notas de álgebra linear

Max Jáuregui

22 de Novembro de 2019

Estas notas foram criadas principalmente para meu uso pessoal e pode eventualmente ser usado como um curso elementar de álgebra linear. Todo o conteúdo foi produzido por mim, usando algumas ideias do livro: E. L. Lima, *Álgebra linear*, 8 ed. (IMPA, Rio de Janeiro, 2012).

Max Jáuregui

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Matrizes

Uma *matriz* de *ordem* $m \times n$ é um arranjo retangular de $mn$ números reais ou complexos que tem $m$ linhas e $n$ colunas. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $m \times n$, então

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, o número $a_{ij}$ é chamado de *elemento* na posição $(i, j)$ da matriz $\mathbf{a}$.

Formatos especiais de matrizes:

1. *Matriz quadrada:* É uma matriz cujo número de linhas é igual ao seu número de colunas. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz quadrada, os elementos $a_{ii}$ são chamados de elementos da *diagonal* de $\mathbf{a}$. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & \pi \end{bmatrix}.$$

   Os elementos da diagonal dessas matrizes são $(4, -1)$ e $(5, 0, \pi)$ respectivamente.

2. *Matriz diagonal:* É uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

3. *Matriz identidade:* É uma matriz diagonal na qual todos os elementos da diagonal são iguais a 1. A matriz identidade $n \times n$ é denotada por $\mathbf{I}_n$. Exemplos:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. *Matriz triangular superior:* É uma matriz quadrada na qual todos os elementos debaixo da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

5. *Matriz triangular inferior:* É uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \pi \end{bmatrix}.$$

6. *Matriz simétrica:* É uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer $i$ e $j$, ou seja, é uma matriz simétrica em relação à sua diagonal. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \pi \end{bmatrix}.$$

7. *Matriz antissimétrica:* É uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ tal que $a_{ij} = -a_{ji}$ para quaisquer $i$ e $j$. Segue daqui que $a_{ii} = -a_{ii}$ para todo $i$, o que implica que os elementos da diagonal de $\mathbf{a}$ são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. *Matriz hermitiana:* É uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ tal que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para quaisquer $i$ e $j$, em que $\overline{a_{ji}}$ denota o complexo conjugado de $a_{ji}$ ($\overline{x + iy} = x - iy$, em que $i^2 = -1$). Segue daqui que $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ para todo $i$, o que implica que os elementos da diagonal de $\mathbf{a}$ são reais. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3i \\ -3i & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3+i & 0 \\ 3-i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & \pi \end{bmatrix}.$$

Como veremos mais na frente, o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ é um espaço vetorial, pois nele podem ser definidas duas operações: adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um número (real ou complexo dependendo das circunstâncias). As seguintes equações definem essas operações:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \alpha\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar facilmente que essas operações têm as seguintes propriedades:

1. Associatividade: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ e $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$.

2. Comutatividade: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

3. Elemento neutro: Existe uma matriz $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ para qualquer $\mathbf{a}$.

4. Elemento inverso: Para cada $\mathbf{a}$ existe uma matriz $-\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

5. Multiplicação por 1: $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

6. Leis distributivas: $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ e $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.

Define-se a *transposta* de uma matriz $\mathbf{a}$ como a matriz $\mathbf{a}^T$ cujas linhas são as colunas de $\mathbf{a}$, ou seja, $a^T_{ij}=a_{ji}$ para quaisquer $i$ e $j$. Segue diretamente dessa definição que $(\mathbf{a}^T)^T=\mathbf{a}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^T=\mathbf{a}^T+\mathbf{b}^T$ e $(\alpha\mathbf{a})^T=\alpha\mathbf{a}^T$.

**Exemplos.**

1. Uma matriz $\mathbf{a}$ é simétrica (antissimétrica) se, e somente se, $\mathbf{a}=\mathbf{a}^T$ ($\mathbf{a}=-\mathbf{a}^T$).

2. Uma matriz $\mathbf{a}$ é hermitiana se, e somente se, $\mathbf{a}^T=\overline{\mathbf{a}}$, em que $\overline{\mathbf{a}}$ é a matriz obtida ao tomar o complexo conjugado de cada elemento de $\mathbf{a}$.

3. Toda matriz quadrada $\mathbf{a}$ pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. Com efeito, definindo $\mathbf{s}=(\mathbf{a}+\mathbf{a}^T)/2$ e $\mathbf{t}=(\mathbf{a}-\mathbf{a}^T)/2$, temos que $\mathbf{s}=\mathbf{s}^T$, $\mathbf{t}=-\mathbf{t}^T$ e $\mathbf{a}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$.

Além das duas operações anteriores, pode ser definida uma *multiplicação de matrizes*. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $m\times n$ e $\mathbf{b}$ é uma matriz $n\times p$, então a multiplicação de $\mathbf{a}$ com $\mathbf{b}$ pode ser efetuada e o produto é uma matriz $\mathbf{c}$ de ordem $m\times p$ tal que

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}=a_{i1}b_{1k}+\cdots+a_{in}b_{nk}\,.$$

Em outras palavras, o elemento $c_{ik}$ da matriz produto $\mathbf{c}$ é obtido multiplicando cada elemento da linha $i$ da matriz $\mathbf{a}$ com o elemento respectivo na coluna $k$ da matriz $\mathbf{b}$ e somando esses produtos.

**Exemplos.**

1. Dadas as matrizes

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{ab}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 6 & 9 & 3\end{bmatrix}.$$

No entanto, o produto $\mathbf{ba}$ não está definido, pois o número de linhas de $\mathbf{a}$ é diferente do número de colunas de $\mathbf{b}$.

2. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $m \times n$, o produto de $\mathbf{a}$ com $\mathbf{I}_n$ é o próprio $\mathbf{a}$ (isso justifica o nome de matriz identidade). Com efeito, os elementos da matriz $\mathbf{I}_n$ são dados pelo *símbolo de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Logo, se $\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{I}_n$, então $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$. De forma análoga pode-se provar que $\mathbf{I}_m\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

3. Duas matrizes não nulas podem ter como produto a matriz nula. Com efeito,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix},$$

o que mostra que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

4. Mesmo a multiplicação de duas matrizes quadradas não é comutativa, pois, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 1.1.** *Sejam* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *matrizes* $m \times n$*,* $\mathbf{c}$ *e* $\mathbf{d}$ *matrizes* $n \times p$ *e* $\alpha$ *um número. Tem-se que* $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$*,* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ *e* $\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}$.

*Demonstração.* Se $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, então

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk},$$

o que implica que $\mathbf{p} = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$. A igualdade $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ pode ser provada de forma análoga. □

**Exemplo.** Dada a matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{a}^n = \begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, definindo

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $\mathbf{a} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{t}$ e que $\mathbf{t}^2 = \mathbf{0}$. Logo,

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{t})^2 = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{t})(\mathbf{I}_2 + \mathbf{t}) = \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_2\mathbf{t} + \mathbf{t}\mathbf{I}_2 + \mathbf{t}^2 = \mathbf{I}_2 + 2\mathbf{t}\,.$$

Supondo que $\mathbf{a}^n = \mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n\mathbf{a} = (\mathbf{I}_2 + n\mathbf{t})(\mathbf{I}_2 + \mathbf{t}) = \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_2\mathbf{t} + n\mathbf{t}\mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}^2 = \mathbf{I}_2 + (n+1)\mathbf{t}\,.$$

Portanto, $\mathbf{a}^n = \mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Teorema 1.2.** *Sejam* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $m \times n$*,* $\mathbf{b}$ *uma matriz* $n \times p$ *e* $\mathbf{c}$ *uma matriz* $p \times q$*. Tem-se que* $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$*.*

*Demonstração.* Sejam $\mathbf{r} = \mathbf{ab}$, $\mathbf{s} = \mathbf{bc}$ e $\mathbf{t} = \mathbf{as}$. Temos que

$$\begin{aligned} t_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{l=1}^{p} b_{jl} c_{lk} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ij} b_{jl} c_{lk} \\ &= \sum_{l=1}^{p} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \right) c_{lk} \\ &= \sum_{l=1}^{p} r_{il} c_{lk}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{t} = \mathbf{rc}$. □

**Teorema 1.3.** *Sejam* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $m \times n$ *e* $\mathbf{b}$ *uma matriz* $n \times p$*. Tem-se que* $(\mathbf{ab})^T = \mathbf{b}^T\mathbf{a}^T$*.*

*Demonstração.* Se $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$, então

$$c_{ik}^T = c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^T b_{ij}^T = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^T a_{jk}^T\,.$$

Portanto, $\mathbf{c}^T = \mathbf{b}^T\mathbf{a}^T$. □

Define-se o *traço* de uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ como a soma dos elementos da sua diagonal. O traço de $\mathbf{a}$ é denotado por $\operatorname{tr}(\mathbf{a})$. Segue imediatamente dessa definição que $\operatorname{tr}(\mathbf{a}) = \operatorname{tr}(\mathbf{a}^T)$, pois $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}^T$ têm a mesma diagonal. Além disso, $\operatorname{tr}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{tr}(\mathbf{a}) + \operatorname{tr}(\mathbf{b})$ e $\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{a})$.

**Teorema 1.4.** *Sejam* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $m \times n$ *e* $\mathbf{b}$ *uma matriz* $n \times m$*. Tem-se que* $\operatorname{tr}(\mathbf{ab}) = \operatorname{tr}(\mathbf{ba})$*.*

*Demonstração.* Se $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$, então $\operatorname{tr}(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii}$. Como $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$, segue que

$$\operatorname{tr}(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij}\,.$$

Portanto, $\operatorname{tr}(\mathbf{ab}) = \operatorname{tr}(\mathbf{ba})$. □

# Capítulo 2

# O método de eliminação de Gauss

Diz-se que uma matriz é *escalonada* quando o primeiro elemento não-nulo de cada linha está à esquerda dos primeiros elementos não-nulos das linhas subsequentes. Dessa maneira, debaixo do primeiro elemento não-nulo de cada linha só se tem zeros. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora descrever o *método de eliminação de Gauss* que nos permite transformar uma matriz qualquer em uma matriz escalonada. O método de eliminação consiste em usar sistematicamente as seguintes operações nas linhas da matriz até obter uma matriz escalonada:

1. permutar duas linhas;
2. multiplicar uma linha por um número diferente de 0;
3. somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha.

Essas operações são às vezes chamadas de *operações elementares*.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 9L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma operação elementar na linha de uma matriz $\mathbf{a}$ pode ser vista também como o resultado da multiplicação de uma matriz $\mathbf{o}$ com $\mathbf{a}$. Com efeito, se

$$\mathbf{o}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{o}_1\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ou seja, multiplicar $\mathbf{o}_1$ pela esquerda de $\mathbf{a}$ faz permutar as linhas 1 e 2 de $\mathbf{a}$. Se

$$\mathbf{o}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$\mathbf{o}_2\mathbf{o}_1\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, multiplicar $\mathbf{o}_2$ pela esquerda de $\mathbf{o}_1\mathbf{a}$ é equivalente a fazer a operação elementar $L_3 - 3L_1$ na matriz $\mathbf{o}_1\mathbf{a}$. Finalmente, se

$$\mathbf{o}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9/2 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$\mathbf{o}_3\mathbf{o}_2\mathbf{o}_1\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira a matriz $\mathbf{a}$ pode ser transformada numa matriz escalonada se multiplicamos a ela sucessivamente as matrizes $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3$ pela esquerda. As matrizes $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3$ são às vezes chamadas de *matrizes elementares*, pois correspondem a operações elementares nas linhas da matriz $\mathbf{a}$.

Define-se o *posto* de uma matriz como o número de linhas não-nulas da matriz escalonada obtida usando o método de eliminação. Segue imediatamente daqui que o posto de uma matriz $m \times n$ é no máximo igual a $m$. O posto de uma matriz não depende dos detalhes do processo de eliminação (isso será justificado mais na frente). Por exemplo, a matriz considerada no exemplo anterior tem posto 3.

Diz-se que uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $n \times n$ é *invertível* se existe uma matriz $\mathbf{a}^{-1}$ de ordem $n \times n$, chamada de *inversa* da matriz $\mathbf{a}$, tal que $\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{I}_n$. Como será justificado mais na frente, uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, seu posto é igual ao seu número de colunas (ou linhas).

**Exemplos.**

1. A matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

não é invertível. Com efeito, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-7L_1]{L_2-4L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

do qual segue que posto$(\mathbf{a}) = 2 \neq 3$.

2. A matriz
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
é invertível. Com efeito, temos que
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4-L_1]{L_3-3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_4+(3/4)L_2]{L_3+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4-L_3/3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$
o que implica que posto$(\mathbf{a}) = 4$.

Um sistema linear de $m$ equações a $n$ incógnitas é dado por
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$
Diz-se que uma lista $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $n$ números é uma *solução* do sistema (2.1) se ao substituir $x_i$ por $\alpha_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, em (2.1) obtém-se identidades.

**Exemplo.** O sistema linear
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$
tem como única solução o par ordenado $(1, 2)$, pois $2 \cdot 1 - 2 = 0$ e $1 + 2 \cdot 2 = 5$.

Um sistema linear pode ter uma única solução, pode ter infinitas soluções ou pode não ter solução. Por exemplo, o sistema linear
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$$
tem infinitas soluções, pois o par ordenado $(\alpha, 2\alpha)$ é uma solução para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Por outro lado, o sistema linear
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 4x - 2y &= 1 \end{aligned}$$
não tem solução.

Definindo as matrizes
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

o sistema (2.1) pode ser escrito de forma matricial como $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$. O método de eliminação pode ser usado para determinar se esse sistema tem uma única solução ou se tem infinitas soluções ou se não tem solução. Além disso, nos casos em que há solução, podemos ainda encontrar elas de forma explícita.

Toda a informação contida no sistema (2.1) está contida na chamada *matriz aumentada* do sistema:

$$[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix} .$$

As operações elementares que podem ser usadas nessa matriz são equivalentes a

1. permutar duas equações do sistema;
2. multiplicar uma equação do sistema por um número;
3. somar a uma equação do sistema um múltiplo de outra equação do sistema.

Usando o método de eliminação na matriz aumentada da matriz podemos encontrar o seu posto e simultaneamente o posto da matriz $\mathbf{a}$. Com isso temos os seguintes casos:

1. se $\text{posto}([\mathbf{a}|\mathbf{b}]) = \text{posto}(\mathbf{a}) = n$, o sistema tem uma única solução;
2. se $\text{posto}([\mathbf{a}|\mathbf{b}]) = \text{posto}(\mathbf{a}) < n$, o sistema tem infinitas soluções;
3. se $\text{posto}([\mathbf{a}|\mathbf{b}]) \neq \text{posto}(\mathbf{a})$, o sistema não tem solução.

**Exemplos.**

1. Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + 2z &= 3 \\ x - 3y + 2z &= 0 \,. \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ 1 & -3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} .$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ 1 & -3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & -4 & 1 & | & -3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_4 - (4/3)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} .$$

Segue daqui que posto($[\mathbf{a}|\mathbf{b}]$) = posto($\mathbf{a}$) = 3 e, por conseguinte, o sistema tem uma única solução. Para determinar essa solução escrevemos a matriz escalonada obtida como o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ -3y &= -3 \\ z &= 1\,. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema de baixo para cima, obtemos que a solução do sistema é $(1,1,1)$.

2. Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x-y+2z &= 3 \\ -x+5y-z &= 3\,. \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ -1 & 5 & -1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ -1 & 5 & -1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 6 & 0 & | & 6 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3+2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue daqui que posto($[\mathbf{a}|\mathbf{b}]$) = posto($\mathbf{a}$) $= 2 < 3$. Assim, o sistema tem infinitas soluções. Para ver a forma dessas soluções escrevemos a matriz escalonada obtida como o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ -3y &= -3\,. \end{aligned}$$

Da segunda equação obtemos que $y = 1$. Substituindo isso na primeira, obtemos que $z = 2 - x$. Logo, a lista $(\alpha, 1, 2-\alpha)$ é uma solução do sistema para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x-y+2z &= 3 \\ -x+5y-z &= 2\,. \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ -1 & 5 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ -1 & 5 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 6 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3+2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Segue daqui que posto($[\mathbf{a}|\mathbf{b}]$) $= 3 \neq 2 =$ posto($\mathbf{a}$) e, por conseguinte, o sistema não tem solução. Uma outra forma de chegar nessa conclusão é escrevendo a matriz escalonada obtida como um sistema linear. Nesse sistema a terceira equação diz é $0 = -1$, o que é absurdo.

Como vimos anteriormente, o método de eliminação pode ser usado para determinar se uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ é invertível. Além disso, no caso afirmativo, o método de eliminação pode ser usado para o cálculo efetivo da inversa de $\mathbf{a}$.

Sejam as matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para que $\mathbf{x}$ seja a matriz inversa de $\mathbf{a}$, deve-se ter em particular que $\mathbf{ax} = \mathbf{I}_n$. Logo, se queremos encontrar os elementos da matriz $\mathbf{x}$, temos que resolver $n$ sistemas lineares com $n$ equações e $n$ incógnitas. O primeiro sistema corresponderia à obtenção da primeira coluna de $\mathbf{I}_n$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1} &= 1 \\ a_{21}x_{11} + \cdots + a_{2n}x_{n1} &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_{11} + \cdots + a_{nn}x_{n1} &= 0\,. \end{aligned}$$

O segundo sistema, que corresponde à obtenção da segunda coluna de $\mathbf{I}_n$, é

$$\begin{aligned} a_{11}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{n2} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + \cdots + a_{2n}x_{n2} &= 1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_{12} + \cdots + a_{nn}x_{n2} &= 0\,. \end{aligned}$$

Vemos daqui que todos os $n$ sistemas lineares têm a mesma matriz de coeficientes, $\mathbf{a}$. Logo, para analisar todos eles de forma simultânea, podemos considerar matriz aumentada

$$[\mathbf{a}|\mathbf{I}_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & | & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Para achar os elementos da matriz $\mathbf{x}$ devemos usar o método de eliminação na matriz $[\mathbf{a}|\mathbf{I}_n]$ até transformá-la numa matriz $[\mathbf{I}_n|\mathbf{b}]$. Se isso for possível (se $\mathbf{a}$ for invertível), vamos ter $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e assim $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$.

**Exemplos.**

1. Seja a matriz
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$
Vamos provar que ela é uma matriz invertível e vamos encontrar a sua inversa. Para isso, consideramos
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2/(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_3 + 4L_2]{L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5/3 & -4/3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 - L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4/3 & 5/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5/3 & -4/3 & 1 \end{bmatrix}.$$
Portanto, $\mathbf{a}$ é invertível e
$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} -4/3 & 5/3 & -1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 5/3 & -4/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Seja a matriz $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ tal que $D = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Segue daqui que $\alpha \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$. Supondo que $\alpha \neq 0$, temos que
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & | & 1 & 0 \\ \gamma & \delta & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1/\alpha} \begin{bmatrix} 1 & \beta/\alpha & | & 1/\alpha & 0 \\ \gamma & \delta & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 - \gamma L_1} \begin{bmatrix} 1 & \beta/\alpha & | & 1/\alpha & 0 \\ 0 & D/\alpha & | & -\gamma/\alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[\alpha/D]L_2} \begin{bmatrix} 1 & \beta/\alpha & | & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & | & -\gamma/D & \alpha/D \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 - (\beta/\alpha)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \delta/D & -\beta/D \\ 0 & 1 & | & -\gamma/D & \alpha/D \end{bmatrix}.$$
Portanto, a matriz $\mathbf{a}$ é invertível se $D \neq 0$ e $\alpha \neq 0$ e
$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$
De forma similar pode-se mostrar que $\mathbf{a}$ é invertível se $D \neq 0$ e $\gamma \neq 0$ e que $\mathbf{a}^{-1}$ é dada pela mesma expressão.

# Capítulo 3

# Determinantes

Uma *permutação* da lista $(1, \ldots, n)$ é uma lista $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, em que $\pi_i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\pi_i \neq \pi_j$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. A permutação $\pi$ também pode ser vista como uma bijeção $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

**Exemplo.** As listas $(1, 3, 5, 2, 4, 6)$ e $(2, 4, 1, 5, 6, 3)$ são permutações da lista $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Denotaremos por $\mathcal{P}_n$ o conjunto de todas as permutações da lista $(1, \ldots, n)$. Podemos verificar facilmente que o número de elementos de $\mathcal{P}_n$ é $n! = n(n-1) \cdots 1$.

Realizar uma *transposição* em uma lista de números é permutar qualquer par de elementos da lista.

**Exemplo.** A lista $(1, 2, 4, 3, 5)$ é obtida realizando uma transposição na lista $(1, 2, 5, 3, 4)$ que consiste em permutar os elementos 5 e 4.

**Teorema* 3.1.** *Se $n \geq 2$, toda permutação da lista $(1, \ldots, n)$ pode ser obtida realizando um número finito de transposições na lista.*

*Demonstração.* Usamos indução em $n$. Se $n = 2$, as únicas permutações da lista $(1, 2)$ são $(1, 2)$ e $(2, 1)$, as quais podem ser obtidas realizando duas e uma transposições respectivamente. Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para a lista $(1, \ldots, n)$. Se $\pi$ é uma permutação de $(1, \ldots, n, n+1)$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $\pi_{i_0} = n + 1$. Excluindo $\pi_{i_0}$ da lista $\pi$, obtemos uma permutação $\sigma$ de $(1, \ldots, n)$, a qual pode ser obtida realizando um número finito de transposições. Como claramente a lista $\pi$ pode ser obtida usando um número finito de transposições na lista $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, n + 1)$, o teorema é verdadeiro para $n + 1$. Portanto, o teorema é verdadeiro para qualquer $n \geq 2$. $\square$

**Teorema* 3.2.** *Se uma permutação $\pi$ da lista $(1, \ldots, n)$ é obtida realizando um número par (ímpar) de transposições específicas, então qualquer sequência de transposições aplicadas na lista $(1, \ldots, n)$ que leve à permutação $\pi$ terá também um número par (ímpar) de transposições.*

*Demonstração.* Usamos indução em $n$. Se $n = 2$, OK. Supondo que o teorema seja verdadeiro para algum $n \geq 2$, consideremos uma permutação $\pi$ da lista $(1, \ldots, n, n + 1)$ que é obtida a partir dessa lista realizando um número par de transposições específicas. Se $\pi_{n+1} = n+1$, os primeiros $n$ elementos de $\pi$ formam uma permutação $\pi'$ da lista $(1, \ldots, n)$, a qual é claramente obtida usando as transposições específicas usadas na construção de $\pi$. Logo, pela nossa hipótese, qualquer sequência de transposições aplicadas na lista $(1, \ldots, n)$ que leve à permutação $\pi'$ terá também um número par de transposições. Isso implica que o mesmo acontece para a permutação $\pi$ devido a que $\pi_{n+1} = n + 1$. Se, por outro lado, $\pi_{n+1} \neq n + 1$, existe um índice $i_0$ tal que $\pi_{i_0} = n + 1$. Logo, a permutação $\pi$ pode ser levada a uma permutação $\sigma = (\pi_1, \ldots, \pi_{i_0-1}, \pi_{n+1}, \pi_{i_0+1}, \ldots, n + 1)$ pelo uso de uma única transposição. Segue daqui que $\sigma$ pode ser obtida a partir da lista $(1, \ldots, n, n + 1)$ usando um número ímpar de transposições específicas e, por conseguinte, qualquer sequência de transposições aplicadas na lista $(1, \ldots, n, n+1)$ que leve à permutação $\sigma$ terá também um número ímpar de transposições. Portanto, qualquer sequência de transposições aplicadas na lista $(1, \ldots, n, n+1)$ que leve à permutação $\pi$ terá um número par de transposições. $\square$

Diz-se que uma permutação é *par* (*ímpar*) se ela pode ser obtida realizando um número par (ímpar) de transposições.

**Exemplo.** Dada a lista $(1, 2, 3, 4)$, a lista $(2, 3, 4, 1)$ é uma permutação ímpar enquanto que a lista $(3, 1, 2, 4)$ é uma permutação par.

Define-se o *sinal* de uma permutação $\pi$ por

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \text{ é uma permutação par} \\ -1 & \text{se } \pi \text{ é uma permutação ímpar.} \end{cases}$$

Define-se o *determinante* de uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $n \times n$ por

$$\det(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n} .$$

**Exemplos.**

1. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $2 \times 2$, então

$$\det(\mathbf{a}) = \operatorname{sgn}(1, 2) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(2, 1) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} .$$

Em outros termos, se

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} ,$$

então

$$\det(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta .$$

2. Temos que

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) = -2 .$$

3. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $n \times n$ que tem uma linha nula, então $\det(\mathbf{a}) = 0$.

**Lema* 3.3.** *Se $\pi$ é uma permutação de $(1, \ldots, n)$ tal que $\pi_i \neq i$ para algum índice $i$, então existem índices $j$ e $k$ tais que $\pi_j < j$ e $\pi_k > k$.*

*Demonstração.* Usamos indução em $n$. Se $n = 2$, OK. Supondo que o lema seja verdadeiro para algum $n \geq 2$, consideremos uma permutação $\pi$ da lista $(1, \ldots, n, n+1)$ tal que $\pi_i \neq i$ para algum índice $i$. Se $\pi_{n+1} = n+1$, os primeiros $n$ números de $\pi$ conformam uma permutação $\pi'$ de $(1, \ldots, n)$ tal que $\pi'_i \neq i$ para algum índice $i$. Logo, pela nossa hipótese, existem índices $j$ e $k$ tais que $\pi_j < j$ e $\pi_k > k$. Por outro lado, se $\pi_{n+1} < n+1$, existe um índice $i_0 < n+1$ tal que $\pi_{i_0} = n+1$, ou seja, $\pi_{i_0} > i_0$. Portanto, o lema é verdadeiro para qualquer $n \geq 2$. $\square$

**Teorema 3.4.** *Se* $\mathbf{a}$ *é uma matriz triangular* $n \times n$*, então* $\det(\mathbf{a}) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$*, ou seja, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal.*

*Demonstração.* Se $\mathbf{a}$ é uma matriz triangular superior $n \times n$, então $a_{ij} = 0$ se $i > j$. Logo, usando o lema 3.3, podemos concluir que

$$\det(\mathbf{a}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}\,,$$

pois toda permutação $\pi \in \mathcal{P}_n$, $\pi \neq (1, \ldots, n)$, contribui com um termo nulo no somatório. De maneira análoga podemos provar que, se $\mathbf{a}$ é uma matriz triangular inferior $n \times n$, seu determinante é dado por $\det(\mathbf{a}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. $\square$

**Teorema 3.5.** *Seja* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $n \times n$*. Tem-se que* $\det(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{a}^T)$.

*Demonstração.* Temos $\det(\mathbf{a}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$. Se $\pi \in \mathcal{P}_n$ é uma permutação que pode ser obtida realizando $l$ transposições na lista $(1, \ldots, n)$, então a lista $((1, \pi_1), \ldots, (n, \pi_n)$ pode ser transformada em uma lista $((\sigma_1, 1), \ldots, (\sigma_n, n))$ realizando também $l$ transposições. Dessa maneira, $\sigma \in \mathcal{P}_n$ e $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\pi)$. Logo, $\operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n} = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n}$ e, por conseguinte,

$$\det(\mathbf{a}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a^T_{1\sigma_1} a^T_{2\sigma_2} \cdots a^T_{n\sigma_n}\,.$$

Portanto, $\det(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{a}^T)$. $\square$

**Teorema 3.6.** *Seja* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $n \times n$*. Se* $\mathbf{b}$ *é a matriz obtida ao permutar duas linhas (colunas) da matriz* $\mathbf{a}$*, então* $\det(\mathbf{b}) = -\det(\mathbf{a})$.

*Demonstração.* Suponhamos que $\mathbf{b}$ seja obtida ao permutar as linhas $i$ e $j$, $i < j$, da matriz $\mathbf{a}$. Dado $\pi \in \mathcal{P}_n$, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\pi) b_{1\pi_1} \cdots b_{i\pi_i} \cdots b_{j\pi_j} \cdots b_{n\pi_n} &= \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} \cdots a_{j\pi_i} \cdots a_{i\pi_j} \cdots a_{n\pi_n} \\ &= \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} \cdots a_{i\pi_j} \cdots a_{j\pi_i} \cdots a_{n\pi_n} \end{aligned}$$

Definindo a permutação $\sigma = (\pi_1, \ldots, \pi_j, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_n)$, vemos que $\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\pi)$. Logo,

$$\operatorname{sgn}(\pi) b_{1\pi_1} \cdots b_{i\pi_i} \cdots b_{j\pi_j} \cdots b_{n\pi_n} = -\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots a_{i\sigma_i} \cdots a_{j\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n}\,.$$

Dessa maneira,

$$\det(\mathbf{b}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) b_{1\pi_1} b_{2\pi_2} \cdots b_{n\pi_n} = -\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}\,,$$

ou seja, $\det(\mathbf{b}) = -\det(\mathbf{a})$. $\square$

**Corolário 3.7.** *Se uma matriz quadrada* **a** *tem duas linhas (colunas) iguais, então* $\det(\mathbf{a}) = 0$.

**Teorema 3.8.** *Para qualquer número* $\alpha$ *tem-se que*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Por outro lado,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & \dots & a_{in} + b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Em outras palavras, o determinante de uma matriz* $n \times n$ *é uma função* $n$*-linear das linhas da matriz. Da mesma maneira, esse determinante é também uma função* $n$*-linear das colunas da matriz.*

*Demonstração.* A primeira igualdade segue imediatamente de observarmos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} \cdots (\alpha a_{i\pi_i}) \cdots a_{n\pi_n} \\ &= \alpha \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} \cdots a_{i\pi_i} \cdots a_{n\pi_n}. \end{aligned}$$

De forma análoga, a segunda igualdade do teorema segue diretamente de notarmos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & \dots & a_{in} + b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} \cdots (a_{i\pi_i} + b_{\pi_i}) \cdots a_{n\pi_n} \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} \cdots a_{i\pi_i} \cdots a_{n\pi_n} \\ &\quad + \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} \cdots b_{\pi_i} \cdots a_{n\pi_n}. \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.9.** *O determinante de uma matriz quadrada não muda se somamos a uma de suas linhas (colunas) um múltiplo de outra linha (coluna) da matriz.*

Exemplos:

1. Temos que
$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

2. Temos que
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 6-2\cdot 3 & 3-2\cdot 1 & 1-2\cdot 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\,.$$

   Por outro lado, temos também que
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2\cdot 1 & 1 & 6 \\ 6-2\cdot 3 & 3 & 1 \\ 0-2\cdot 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\,.$$

**Lema* 3.10.** *Seja* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $n \times n$ *tal que sua* $p$*-ésima linha (*$q$*-ésima coluna) tenha seus elementos nulos com a exceção do elemento* $a_{pq} = 1$*. Se* $\mathbf{M}_{pq}$ *é a matriz obtida removendo a linha* $p$ *e a coluna* $q$ *da matriz* $\mathbf{a}$*, então* $\det(\mathbf{a}) = (-1)^{p+q}\det(\mathbf{M}_{pq})$*.*

*Demonstração.* Suponhamos que $p = 1$. Logo,
$$a_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = q \\ 0 & \text{se } j \neq q. \end{cases}$$

Usando isso temos que
$$\det(\mathbf{a}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n} = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}_n \\ \pi_1 = q}} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1q} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}\,,$$

em que o último somatório é sobre todas as permutações $\pi \in \mathcal{P}_n$ que têm primeira componente igual a $q$. Cada uma dessas permutações tem a forma $(q, \sigma)$, em que $\sigma$ é uma permutação da lista $(1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n)$. A permutação $\sigma$ pode ser transformada na lista $(1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n)$ realizando um número par ou ímpar de transposições $l$. Logo, em qualquer caso, para transformar a permutação $(q, \sigma) \in \mathcal{P}_n$ na lista $(1, \ldots, q-1, q, q+1, \ldots, n)$, devemos realizar $l+q-1$ transposições. Segue daqui que $\operatorname{sgn}(q, \sigma) = (-1)^{l+q-1} = (-1)^{q-1}\operatorname{sgn}(\sigma)$. Como a lista $(1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n)$ tem $n-1$ elementos, cada permutação $\sigma$ dessa lista pode ser associada de forma biunívoca com uma permutação $\tau \in \mathcal{P}_{n-1}$ que realiza as mesmas transposições na lista $(1, \ldots, n-1)$ e assim $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)$. Dessa maneira, se $\mathbf{M}_{1q}$ é a matriz obtida removendo a primeira linha e a coluna $q$ da matriz $\mathbf{a}$, temos que
$$\det(\mathbf{a}) = \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{n-1}} (-1)^{q-1}\operatorname{sgn}(\tau)(M_{1q})_{1\tau_1} \cdots (M_{1q})_{n-1,\tau_{n-1}} = (-1)^{q-1}\det(\mathbf{M}_{1q})\,.$$

Finalmente, se $p \neq 1$, realizando $p-1$ permutações de pares de linhas de $\mathbf{a}$ podemos cair no caso anterior e assim $\det(\mathbf{a}) = (-1)^{p-1}(-1)^{q-1}\det(\mathbf{M}_{pq}) = (-1)^{p+q}\det(\mathbf{M}_{pq})$. □

**Teorema 3.11** (Expansão de Laplace)**.** *Seja* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $n \times n$*. Se* $\mathbf{M}_{pq}$ *é a matriz obtida removendo a linha* $p$ *e a coluna* $q$ *da matriz* $\mathbf{a}$*, então para quaisquer* $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ *tem-se*

$$\det(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{M}_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(\mathbf{M}_{jk})\,.$$

*O número* $\det(\mathbf{M}_{ij})$ *é chamado de* menor *associado ao elemento* $a_{ij}$*.*

*Demonstração.* Em virtude do teorema 3.8 temos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}\,.$$

Logo, pelo lema 3.10, temos que

$$\det(\mathbf{a}) = a_{i1}(-1)^{i+1} \det(\mathbf{M}_{i1}) + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n} \det(\mathbf{M}_{in})$$

e assim $\det(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{M}_{ij})$. □

**Exemplos.**

1. Temos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,. \end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(1-4) = -12\,.$$

**Teorema 3.12.** *Sejam* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *duas matrizes* $n \times n$*. Tem-se que* $\det(\mathbf{ab}) = \det(\mathbf{a}) \det(\mathbf{b})$*.*

*Demonstração.* Sejam $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ as colunas da matriz $\mathbf{b}$. Podemos verificar imediatamente que $\mathbf{ab} = \begin{bmatrix}\mathbf{ab}_1 & \ldots & \mathbf{ab}_n\end{bmatrix}$. Definindo as matrizes

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix},$$

temos que $\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}\mathbf{e}_i$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, $\mathbf{ab}_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}\mathbf{ae}_i$ e, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{ae}_i$ é igual à coluna $i$ da matriz $\mathbf{a}$. Segue do teorema 3.8 que

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{ab}) &= \det\left(\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n b_{i1}\mathbf{ae}_i & \mathbf{ab}_2 & \ldots & \mathbf{ab}_n\end{bmatrix}\right)\\ &= \sum_{i=1}^n b_{i1}\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{ae}_i & \mathbf{ab}_2 & \ldots & \mathbf{ab}_n\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Proseguindo da mesma forma com as colunas $\mathbf{ab}_2, \ldots, \mathbf{ab}_n$, vamos obter

$$\det(\mathbf{ab}) = \sum_{i_1=1}^n \ldots \sum_{i_n=1}^n b_{i_1 1}\cdots b_{i_n n}\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{ae}_{i_1} & \ldots & \mathbf{ae}_{i_n}\end{bmatrix}\right).$$

Se $i_p = i_q$ então $\mathbf{ae}_{i_p} = \mathbf{ae}_{i_q}$ e, por conseguinte, $\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{ae}_{i_1} & \ldots & \mathbf{ae}_{i_n}\end{bmatrix}\right) = 0$. Logo,

$$\det(\mathbf{ab}) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{P}_n} b_{i_1 1}\cdots b_{i_n n}\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{ae}_{i_1} & \ldots & \mathbf{ae}_{i_n}\end{bmatrix}\right).$$

Se $(i_1, \ldots, i_n)$ é uma permutação par, então $\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{ae}_{i_1} & \ldots & \mathbf{ae}_{i_n}\end{bmatrix}\right) = \det(\mathbf{a})$; caso contrário temos que $\det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{ae}_{i_1} & \ldots & \mathbf{ae}_{i_n}\end{bmatrix}\right) = -\det(\mathbf{a})$. Dessa maneira, obtemos que

$$\det(\mathbf{ab}) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} b_{\pi_1 1}\cdots b_{\pi_n n}\operatorname{sgn}(\pi)\det(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{b})\det(\mathbf{a}).$$ □

**Teorema 3.13.** *Uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $n \times n$ é invertível se, e somente se,* $\det(\mathbf{a}) \neq 0$.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $\mathbf{a}$ é invertível, então $\operatorname{posto}(\mathbf{a}) = n$. Usando o método de eliminação podemos transformar a matriz $\mathbf{a}$ em uma matriz escalonada $\mathbf{b}$. A matriz $\mathbf{b}$ satisfaz as condições $\operatorname{posto}(\mathbf{b}) = n$ e $\det(\mathbf{b}) = \alpha\det(\mathbf{a})$, em que $\alpha \neq 0$ é um número. Segue da primeira condição que os elementos da diagonal de $\mathbf{b}$ são não-nulos. Logo, como $\mathbf{b}$ é de fato uma matriz triangular superior, temos que $\det(\mathbf{b}) \neq 0$. Portanto, $\det(\mathbf{a}) \neq 0$. ($\Leftarrow$) Se $\mathbf{a}$ não é invertível, então $\operatorname{posto}(\mathbf{a}) < n$. Logo, se $\mathbf{b}$ é a matriz escalonada obtida usando o método de eliminação na matriz $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ deve ter pelo menos uma linha nula. Isso implica que $\det(\mathbf{b}) = 0$. Como $\det(\mathbf{b}) = \alpha\det(\mathbf{a})$ para algum número $\alpha \neq 0$, segue que $\det(\mathbf{a}) = 0$. □

**Exemplo.** Vamos achar os valores de $\alpha$ para os quais a matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}\alpha & 0 & 1\\1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

é invertível. Temos que $\det(\mathbf{a}) = -3\alpha - 3$. Logo, a matriz $\mathbf{a}$ será invertível sempre que se tenha $\alpha \neq -1$.

**Teorema 3.14** (Regra de Cramer)**.** *Seja um sistema linear de $n$ equações a $n$ incógnitas escrito de forma matricial como* $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$*. Se o sistema tem solução única* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*, então*

$$\alpha_k = \frac{\det(\mathbf{a}(k, \mathbf{b}))}{\det(\mathbf{a})}\,,$$

*em que* $\mathbf{a}(k, \mathbf{b})$ *é a matriz obtida ao substituir a coluna* $k$ *da matriz* $\mathbf{a}$ *pela matriz coluna* $\mathbf{b}$*.*

*Demonstração.* Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução do sistema $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$, então $\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n$, em que $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ são as colunas da matriz $\mathbf{a}$. Logo,

$$\det(\mathbf{a}(k, \mathbf{b})) = \det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_{k-1} & \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{k+1} & \ldots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\right)\,.$$

Usando o corolário 3.9 e o teorema 3.8 temos que

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}(k, \mathbf{b})) &= \det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \ldots & \alpha_k\mathbf{a}_k & \ldots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\right)\\ &= \alpha_k \det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \ldots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\right)\,.\end{aligned}$$

Como $\det(\mathbf{a}) \neq 0$, pois o sistema tem solução única ($\mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$), segue que $\alpha_k = \det(\mathbf{a}(k, \mathbf{b}))/\det(\mathbf{a})$. $\square$

Exemplo: Vamos usar a regra de Cramer para encontrar a solução única do sistema linear

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 7\\ 5x - 2y &= 3\,.\end{aligned}$$

Temos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix}7 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}} = \frac{-23}{-19} = \frac{23}{19}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}} = \frac{-29}{-19} = \frac{29}{19}\,.$$

**Teorema 3.15.** *Se* $\mathbf{a}$ *é uma matriz invertível* $n \times n$*, então sua inversa é dada por*

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{a})}\mathbf{C}^T\,,$$

*em que* $\mathbf{C}$ *é a chamada* matriz de cofatores *de* $\mathbf{a}$*, a qual é definida por* $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{M}_{ij})$*.*

*Demonstração.* Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n$ as colunas da matriz $\mathbf{a}^{-1}$. Como $\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{I}_n$, temos que $\mathbf{ax}_j = \mathbf{e}_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, em que $\mathbf{e}_j$ é a matriz coluna cujos elementos são nulos com exceção de $e_{jj} = 1$ (isso foi usado na demonstração do teorema 3.12). Usando a regra de Cramer, temos que

$$x_{ij} = \frac{\det(\mathbf{a}(i, \mathbf{e}_j))}{\det(\mathbf{a})}\,.$$

Usando o teorema 3.11 temos que $\det(\mathbf{a}(i, \mathbf{e}_j)) = (-1)^{j+i}\det(\mathbf{M}_{ji}) = C^T_{ij}$. Portanto, $\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{C}^T/\det(\mathbf{a})$. $\square$

**Exemplos.**

1. Seja a matriz
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$
A matriz de cofatores de $\mathbf{a}$ é
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$
Portanto, se $\det(\mathbf{a}) = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, a inversa de $\mathbf{a}$ será
$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

2. Seja a matriz
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Vemos que $\det(\mathbf{a}) = -5$ e, por conseguinte, a matriz $\mathbf{a}$ é invertível. A matriz de cofatores de $\mathbf{a}$ é
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$
Portanto,
$$\mathbf{a}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 7 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Capítulo 4

# Espaços vetoriais

Um *corpo* é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual estão definidas duas operações: adição e multiplicação. Essas operações têm as seguintes propriedades:

1. clausura: $x + y \in \mathbb{K}$ e $xy \in \mathbb{K}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;
2. associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$;
3. comutatividade: $x + y = y + x$ e $xy = yx$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;
4. elementos neutros: Existem $0, 1 \in \mathbb{K}$, $0 \neq 1$, tais que $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$;
5. elementos inversos: Para cada $x \in \mathbb{K}$ existe $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$; se $x \neq 0$, existe $1/x \in \mathbb{K}$ tal que $x(1/x) = 1$;
6. lei distributiva: $x(y + z) = xy + xz$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$.

**Exemplo.** $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos.

Um conjunto $E$ é um *espaço vetorial* sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seus elementos são chamados de *vetores* se em $E$ estão definidas duas operações: adição e multiplicação por um escalar. A primeira operação associa a cada par de vetores $u, v \in E$ um vetor soma $u + v \in E$ e a segunda faz corresponder ao escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e ao vetor $v \in E$ o seu produto $\alpha v \in E$. Além disso, essas operações têm as seguintes propriedades:

1. associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$ e $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ para quaisquer $u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
2. comutatividade: $u + v = v + u$ para quaisquer $u, v \in E$;
3. elemento neutro: existe $0 \in E$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in E$;
4. elemento inverso: para cada $v \in E$ existe $-v \in E$ tal que $v + (-v) = 0$;
5. multiplicação por 1: $1v = v$;
6. leis distributivas: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ e $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, v \in E$.

**Exemplos.**

1. $\mathbb{R}^d$ é um espaço vetorial real (sobre o corpo $\mathbb{R}$) se definimos

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_d + \beta_d) \quad \text{e} \quad \alpha v = (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_d)\,,$$

   em que $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ e $v = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$.

2. O conjunto $\mathbb{R}^2$ com a definição usual de multiplicação por um número real não é um espaço vetorial real se a adição é definida por $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1 + y_2, y_1 + x_2)$.

3. O conjunto $M(m \times n)$ das matrizes $m \times n$ com elementos complexos é um espaço vetorial complexo com as definições usuais de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um número complexo.

4. Dado um conjunto arbitrário $X$, o conjunto $\mathbb{K}^X$ das funções $f : \mathbb{K} \to X$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ se definimos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

   para quaisquer $f, g \in \mathbb{K}^X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Se $X = \{1, \ldots, n\}$, o espaço $\mathbb{R}^X$ pode ser identificado com o espaço $\mathbb{R}^n$, pois toda função $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ pode ser associada a uma lista $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

5. Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dados $u, v, w \in E$, pode-se provar usando as propriedades de espaço vetorial que $u+v = u+w \Rightarrow v = w$. Usando esse resultado pode-se provar em particular que $0v = 0$, $\alpha 0 = 0$ e que $(-1)v = -v$.

Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto $F \subset E$ é dito um *subespaço* de $E$ se

1. $0 \in F$;

2. $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$;

3. $\alpha \in K, v \in F \Rightarrow \alpha v \in F$.

Todo subespaço é um espaço vetorial em si.

**Exemplos.**

1. O conjunto $F = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

2. O conjunto das matrizes triangulares superiores $3 \times 3$ é um subespaço de $M(3 \times 3)$.

3. O conjunto das funções polinomiais $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

4. O conjunto das funções polinomiais $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau $n \geq 1$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pois a função nula $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $N(x) = 0$ não é um polinômio de grau $n$.

5. Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dados $u, v \in E$, define-se a *reta* que passa pelos pontos $u$ e $v$ por $r = \{(1 - \alpha)u + \alpha v \in E : \alpha \in \mathbb{K}\}$. Se $u = 0$, diz-se que $r$ é uma reta que passa pela origem. Nesse caso, $r$ é um subespaço de $E$.

6. O conjunto $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, o qual é chamado de um *hiperplano*.

**Teorema 4.1.** *Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $\mathcal{C}$ é uma coleção de subespaços de $E$, então a interseção de todos os subespaços de $\mathcal{C}$, denotada por $\bigcap_{F\in\mathcal{C}} F$, é um subespaço de $E$.*

**Exemplo.** O conjunto $S$ das soluções do sistema linear

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Com efeito, cada equação do sistema define um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ e dessa maneira $S$ é a interseção de $m$ hiperplanos de $\mathbb{R}^n$.

Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma *combinação linear* dos vetores $u_1, \ldots, u_n \in E$ é um vetor $v = \alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n$, em que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Dado um conjunto $X \subset E$, define-se o *subespaço gerado* por $X$ como o conjunto $S(X)$ formado por todas as combinações lineares de vetores de $X$. Se $S(X) = E$, diz-se que $X$ é um *conjunto de geradores* de $E$.

**Exemplos.**

1. O vetor $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $(1, 1, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Com efeito, se isso é verdade devem existir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(1, 2, 3) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 1, 0)$. Logo, $(1, 2, 3) = (\alpha + 2\beta, \alpha + \beta, \alpha)$, o que implica que

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 1 \\ \alpha + \beta &= 2 \\ \alpha &= 3\,. \end{aligned}$$

   Vemos daqui que a solução única do sistema é $\alpha = 3$ e $\beta = -1$. Assim, $(1, 2, 3) = 3(1, 1, 1) - (2, 1, 0)$.

2. O conjunto $B = \{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^2$.

3. O sistema linear

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

   tem solução se, e somente se, o vetor $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, a_n = (a_{1n}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^m$, ou seja, se $b \in S(\{a_1, \ldots, a_n\})$. Em particular, o sistema sempre tem solução se $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^m$.

4. Sejam $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ dois vetores não nulos. O vetor $v$ é um múltiplo de $u$ ($v$ é paralelo a $u$) se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0\,.$$

Com efeito, se $v = \alpha u$, então $c = \alpha a$, $d = \alpha b$ e, por conseguinte,

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha a \\ b & \alpha d \end{vmatrix} = 0\,.$$

Reciprocamente, se $ad - bc = 0$, como $(a, c)$ é não-nulo, supondo que $a \neq 0$ temos que $d = (b/a)c$. Segue daqui que $c \neq 0$, pois o caso contrário implicaria que $(c, d)$ seria nulo. Definindo $\alpha = c/a$, vemos que $d = \alpha c$ e $c = \alpha a$. Portanto, $(c, d) = \alpha(a, b)$.

5. Se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ são dois vetores não-nulos e não-paralelos, então $\{(a, b), (c, d)\}$ é um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^2$. Com efeito, qualquer vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear $(x, y) = \alpha(a, b) + \beta(c, d)$, pois essa igualdade é equivalente ao sistema linear

$$\begin{aligned} a\alpha + c\beta &= x \\ b\alpha + d\beta &= y\,, \end{aligned}$$

o qual sempre tem solução pois

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

**Teorema 4.2.** *Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. O subespaço gerado por um conjunto $X \subset E$ é igual à interseção de todos os subespaços de $E$ que contêm $X$.*

# Capítulo 5

# Bases

Seja $E$ um espaço vetorial, um conjunto $X \subset E$ é *linearmente dependente* (*L.D.*) se existe um vetor $v \in X$ que pode ser escrito como uma combinação linear de vetores de $X$ diferente da combinação linear identidade $v = 1v$.

**Exemplos.**

1. $\{(1,2),(3,6)\} \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto L.D..
2. $\{(1,2),(1,3),(3,0),(-1,5)\} \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto L.D., pois contém dois vetores não-paralelos, os quais formam um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^2$.
3. $\{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.D., pois $(0,0,0) = \alpha(0,0,0)$ com $\alpha \neq 1$.
4. Qualquer conjunto que contém o vetor nulo é L.D..

Seja $E$ um espaço vetorial. Um conjunto $X \subset E$ é *linearmente independente* (*L.I.*) se não é L.D., ou seja, se nenhum vetor $v \in X$ pode ser escrito como combinação linear de vetores de $X$ a não ser a identidade $v = 1v$.

**Exemplos.**

1. $\{(1,3,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto L.I..
2. $\{(1,2),(-1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto L.I..

**Teorema 5.1.** *Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto $X \subset E$ é L.I. se, e somente se, para quaisquer $v_1, \ldots, v_n \in X$, a combinação linear nula $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponhamos que existam $v_1, \ldots, v_n \in X$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Renomeando os vetores se necessário, podemos considerar que $\alpha_1 \neq 0$. Logo, vamos ter

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n \,,$$

o que implica que $v_1$ é uma combinação linear dos vetores $v_2, \ldots, v_n \in X$ diferente da identidade. Portanto, $X$ é L.D.. ($\Leftarrow$) Se $X$ é L.D., existe um vetor $v_1 \in X$ que é combinação linear dos vetores $v_2, \ldots, v_n \in X$. Assim, $v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$ e, por conseguinte, $v_1 - \beta_2 v_2 - \cdots - \beta_n v_n = 0$. Dessa maneira, encontramos uma combinação linear nula em que pelo menos o coeficiente de $v_1$ é diferente de 0. □

**Exemplo.** Vamos mostrar que o conjunto $X = \{(1,2,3),(4,1,1),(3,2,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I.. Consideremos a combinação linear nula

$$\alpha(1,2,3) + \beta(4,1,1) + \gamma(3,2,0) = (0,0,0)\,.$$

Essa equação é equivalente ao seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + \beta &= 0 \end{aligned}$$

Para provar que o conjunto $X$ é L.I., devemos provar que esse sistema tem uma única solução (que seria $\alpha = \beta = \gamma = 0$). Nessa direção podemos determinar o posto da matriz de coeficientes e ver se ele é igual a 3 ou calcular seu determinante e verificar que ele seja diferente de 0. Escolhendo a segunda opção, temos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-11+4) = 7 \neq 0\,.$$

Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que um conjunto $\mathcal{B} \subset E$ é uma *base* de $E$ se $\mathcal{B}$ é um conjunto de geradores de $E$ que é L.I.. Se $v \in E$ é um vetor arbitrário, existem vetores $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{B}$ e coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são únicos, pois, se adicionalmente existissem coeficientes $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$, teríamos $(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0$ e, como $\mathcal{B}$ é L.I., seguiria daqui que $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

**Exemplo.** Para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ seja $e_i$ um vetor cujas coordenadas são nulas com exceção da sua $i$-ésima coordenada, a qual é igual a 1. O conjunto $\{e_1, \ldots, e_d\} \subset \mathbb{R}^d$ e uma base de $\mathbb{R}^d$, chamada de *base canônica*.

**Lema 5.2.** *Um sistema linear homogêneo*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

*que tem o número de equações menor do que o número de variáveis ($m < n$) tem uma solução não trivial (uma solução diferente de $x_1 = \ldots = x_n = 0$).*

*Demonstração.* Usamos indução no número de equações $m$. Se $m = 1$, OK. Supondo que o lema seja verdadeiro no caso para sistemas lineares homogêneos com $m-1$ equações e $n > m-1$ variáveis, consideremos o sistema de $m$ equações e $n > m$ variáveis apresentado no enunciado do lema. Da última equação do sistema podemos determinar $x_n$ em termos das variáveis $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Substituindo a expressão encontrada nas $m-1$ equações anteriores, obtemos um sistema de $m-1$ equações com $n-1$ variáveis. Como $n-1 > m-1$, pela nossa hipótese de indução, esse sistema tem uma solução não trivial $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_{n-1} = \alpha_{n-1}$. Substituindo esses valores na expressão de $x_n$ encontramos uma solução não trivial para o sistema de $m$ equações e $n$ incógnitas. $\square$

**Teorema 5.3.** *Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset E$ é um conjunto de geradores de $E$, então qualquer conjunto $X \subset E$ com mais de $m$ vetores é L.D..*

*Demonstração.* Sejam $v_1, \ldots, v_n \in X$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Como $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto de geradores de $E$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existem coeficientes $a_{1j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbb{K}$ tais que $v_j = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{mj}u_m$. Assim,

$$\alpha_1 \left( \sum_{i=1}^{m} a_{i1} u_i \right) + \cdots + \alpha_n \left( \sum_{i=1}^{m} a_{n1} u_i \right) = 0\,,$$

o que implica que

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j a_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j \right) u_i\,.$$

Em particular, essa equação é satisfeita se

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + \cdots + \alpha_{1n}\alpha_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \;\;\vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_{mn}\alpha_n &= 0\,. \end{aligned}$$

Se $m < n$, então, pelo lema anterior, esse sistema tem uma solução não-trivial. Portanto, o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.D.. □

**Corolário 5.4.** *Seja $E$ um espaço vetorial. Se $\mathcal{B} \subset E$ é uma base de $E$ que tem $n$ vetores, qualquer base de $E$ terá também $n$ vetores.*

Diz-se que um espaço vetorial $E$ tem *dimensão finita* se existe uma base $\mathcal{B} \subset E$ que tem um número finito de vetores. Nesse caso, se $\mathcal{B}$ tem $d$ vetores, diz-se ainda que $E$ tem dimensão $d$ e escreve-se $\dim E = d$. Se $E$ não possui nenhuma base com um número finito de vetores, diz-se então que $E$ tem *dimensão infinita*. O espaço vetorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um exemplo de um espaço vetorial de dimensão infinita.

**Corolário 5.5.** *Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão $d$. Se $X \subset E$ é um conjunto L.I., então $X$ tem no máximo $d$ vetores.*

**Teorema 5.6.** *Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto $X = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ é L.I. se, e somente se, nenhum vetor de $X$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores anteriores a ele.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $X$ fosse L.D., existiriam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$. Seja $r$ o maior índice para o qual se tenha $\alpha_r \neq 0$. Logo,

$$u_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} u_1 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} u_{r-1}$$

e assim $u_r$ é uma combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_{r-1}$. □

**Corolário 5.7.** *Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão $d$. Um conjunto $\{u_1, \ldots, u_d\} \subset E$ é L.I. se, e somente se, é um conjunto de geradores de $E$.*

**Teorema 5.8.** *Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Tem-se que*

1. *se $X \subset E$ é um conjunto de geradores de $E$, então $X$ contém uma base de $E$;*

2. *se $X \subset E$ é um conjunto L.I., então existe uma base de $E$ que contém $X$;*

3. *se $F \subset E$ é um subespaço de $E$, então $F$ tem dimensão finita e $\dim F \leq \dim E$;*

4. *se $F \subset E$ é um subespaço de $E$ tal que $\dim F = \dim E$, então $F = E$.*

*Demonstração.*

1. Seja $\mathcal{B} \subset X$ um conjunto L.I. com o número máximo de vetores. Afirmamos que $\mathcal{B}$ é um conjunto de geradores de $E$ e, por conseguinte, uma base de $E$. Com efeito, cada vetor $u \in X$ que não pertence a $\mathcal{B}$ pode ser escrito como uma combinação linear de vetores de $\mathcal{B}$; caso contrário o conjunto $\mathcal{B} \cup \{u\}$ seria L.I., contradizendo o fato de que $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. com o número máximo de vetores. Como todo vetor $v \in E$ pode ser escrito como combinação linear de vetores de $X$ e cada vetor de $X$ pode ser escrito como combinação linear de vetores de $\mathcal{B}$, segue que $\mathcal{B}$ é um conjunto de geradores de $E$.

2. Se $X$ é um conjunto de geradores de $E$, OK. Se esse não é o caso, existe um vetor $u_1 \in E$ que não é combinação linear de vetores de $X$ e assim o conjunto $X \cup \{u_1\}$ é L.I.. Se $X \cup \{u_1\}$ é um conjunto de geradores de $E$, OK; senão podemos encontrar um vetor $u_2 \in E$ tal que o conjunto $X \cup \{u_1, u_2\}$ é L.I.. Esse procedimento de acrescentarmos vetores ao conjunto $X$ e obtermos ainda um conjunto L.I. acaba em algum momento, pois subconjuntos L.I. de $E$ tem no máximo $\dim E$ elementos. Dessa maneira encontramos uma base de $E$ que contém $X$.

3. Um conjunto L.I. $X \subset F$ que tem o máximo número de vetores é uma base de $F$. Como o número de vetores de $X$ é no máximo igual a $\dim E$, segue que $F$ tem dimensão finita e que $\dim F \leq \dim E$.

4. Se $\dim F = \dim E = d$ e $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_d\} \subset F$ é uma base de $F$, então $\mathcal{B}$ é também uma base de $E$, pois é um conjunto L.I. de $d$ vetores. $\square$

# Capítulo 6

# Transformações lineares

Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma *transformação linear* é uma função $A : E \to F$ tal que

1. $A(u + v) = Au + Av$ para quaisquer $u, v \in E$;

2. $A(\alpha v) = \alpha Av$ para quaisquer $v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Se $A : E \to F$ é uma transformação linear e $v \in E$, usualmente escreve-se $Av$ no lugar de $A(v)$. Se $F = E$, a transformação linear $A$ é chamada de um *operador linear*. Por outro lado, se $F = \mathbb{K}$, $A$ é chamado de um *funcional linear*.

**Exemplos.** Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$.

1. A função $N : E \to F$ definida por $N(v) = 0$ é uma transformação linear.

2. A função $I_E : E \to E$ definida por $I_E(v) = v$ é um operador linear chamado de *operador identidade*.

3. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$ é um funcional linear.

4. A função $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $A(x, y) = (y, x)$ é um operador linear.

5. Seja $C([a, b])$ o conjunto das funções contínuas no intervalo $[a, b]$. A função $I : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ definida por $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ é um funcional linear.

6. Se $A : E \to F$ é uma transformação linear, então $A(0) = 0$.

7. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y + 2$ não é um funcional linear, pois $f(0, 0) = 2 \neq 0$.

8. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$ não é um funcional linear, embora que nesse caso se tenha $f(0, 0) = 0$.

**Teorema 6.1.** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Se $\mathcal{B}$ é uma base de $E$ e para cada $u \in \mathcal{B}$ escolhemos $u' \in F$, existe uma única transformação linear $A : E \to F$ tal que $Au = u'$ para todo $u \in \mathcal{B}$.*

*Demonstração.* Como $\mathcal{B}$ é uma base de $E$, qualquer vetor $v \in E$ pode ser escrito de forma única como uma combinação linear de vetores de $\mathcal{B}$. Logo, podemos definir a função $A : E \to F$ por

$$Av = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i' \quad \text{se} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \,,$$

em que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{B}$ e $u_1, \ldots, u_n \in F$. Vamos provar que $A$ é uma transformação linear. Dados $v, w \in E$ podemos escrever $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ e $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ considerando coeficientes nulos se necessário. Logo,

$$\begin{aligned}
A(v+w) &= A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right) \\
&= A\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) u_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) u_i' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i' \\
&= Av + Aw \,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que

$$A(\alpha v) = A\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i u_i' = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i' = \alpha A v \,.$$

Portanto, $A$ é uma transformação linear. Para provar que ela é única, consideremos uma transformação linear $B : E \to F$ tal que $Bu = u'$ para cada $u \in \mathcal{B}$. Se $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ é um vetor arbitrário de $E$, então

$$Bv = B\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} B(\alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i' = Av \,.$$

Portanto, $B = A$. □

**Exemplos.**

1. A reflexão de um vetor do plano em relação ao eixo $x$ corresponde ao operador linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido pelas equações $S(1,0) = (1,0)$ e $S(0,1) = (0,-1)$.

2. A rotação de um vetor do plano em um ângulo $\theta$ corresponde ao operador linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido pelas equações $R(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $R(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

Dadas as transformações lineares $A : E \to F$ e $B : F \to G$, define-se a *transformação linear produto* $BA : E \to G$ por $(BA)v = B(Av)$, ou seja, $BA$ é a composição das funções $B$ e $A$.

**Exemplo.** Consideremos os operadores lineares $S$ e $R$ definidos no exemplo anterior. O operador produto $SR$ é definido pelas equações $SR(1,0) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ e $SR(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$. Por outro lado, o produto $RS$, que nesse caso também pode ser construído, está definido pelas equações $RS(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $RS(0,1) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$. Em particular, segue daqui que $SR \neq RS$ (isso é análogo à multiplicação de matrizes).

Define-se a *imagem* de uma transformação linear $A : E \to F$ como o conjunto $\mathcal{I}m(A) = \{Av \in F : v \in E\}$. Pode-se verificar imediatamente que $\mathcal{I}m(A)$ é um subespaço de $F$. Diz-se que a transformação linear $A$ é *sobrejetiva* se $\mathcal{I}m(A) = F$, ou seja, para cada $w \in F$ pode-se encontrar $v \in E$ tal que $Av = w$.

**Teorema 6.2.** *Uma transformação linear $A : E \to F$ é sobrejetiva se, e somente se, transforma um conjunto de geradores de $E$ em um conjunto de geradores de $F$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Seja $X$ um conjunto de geradores de $E$. Como $A$ é sobrejetiva, para qualquer $w \in F$ existe $v \in E$ tal que $Av = w$. Como existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $u_1, \dots, u_n \in X$ tais que $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, segue que $w = \alpha_1 A u_1 + \cdots + \alpha_n A u_n$. Assim, o conjunto $A(X) = \{Au \in F : u \in X\}$ é um conjunto de geradores de $F$. ($\Leftarrow$) Se $X$ é um conjunto de geradores de $E$, então $A(X) = \{Au \in F : u \in X\}$ é um conjunto de geradores de $F$. Logo, dado qualquer vetor $w \in F$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $u_1, \dots, u_n \in X$ tais que $w = \alpha_1 A u_1 + \cdots + \alpha_n A u_n = A(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n)$. Pondo $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, vemos que $Av = w$. Portanto, $A$ é sobrejetiva. $\square$

Seja $A : E \to F$ uma transformação linear. Diz-se que uma transformação linear $B : F \to E$ é uma *inversa à direita* de $A$ se $AB = I_F$.

**Teorema 6.3.** *Seja $A : E \to F$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. A transformação linear $A$ possui uma inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $B : F \to A$ é uma inversa à direita de $A$, então $AB = I_F$. Logo, dado qualquer $w \in F$, temos que $ABw = w$. Pondo $v = Bw$, temos que $Av = w$ e, por conseguinte, $A$ é sobrejetiva. ($\Leftarrow$) Se $A$ é sobrejetiva e $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ é uma base de $E$, então $\{Au_1, \dots, Au_n\} \subset F$ é um conjunto de geradores de $F$. Logo, o conjunto $\{Au_1, \dots, Au_n\}$ contém uma base de $F$. Renomeando os vetores se necessário, podemos considerar que $\{Au_1, \dots, Au_r\}$ é uma base de $F$. Definindo a transformação linear $B : F \to E$ pelas equações $B(Au_i) = u_i$ se $i \in \{1, \dots, r\}$ e $B(Au_i) = 0$ se $i \in \{r+1, \dots, n\}$, temos que, se $w = \alpha_1 A u_1 + \cdots + \alpha_r A u_r$,

$$ABw = A(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r) = \alpha_1 A u_1 + \cdots + \alpha_r A u_r = w\,.$$

Portanto, $B$ é uma inversa à direita de $A$. $\square$

**Exemplo.** A transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $A(x,y) = x$ é claramente sobrejetiva. Uma inversa à direita de $A$ é a transformação linear $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $B(x) = (x,x)$, pois $AB(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Diz-se que uma transformação linear $A : E \to F$ é *injetiva* se, dados $u, v \in E$, a igualdade $Au = Av$ implica que $u = v$.

Define-se o *núcleo* de uma transformação linear $A : E \to F$ como o conjunto $\mathcal{N}(A) = \{v \in E : Av = 0\}$. Pode-se verificar imediatamente que $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço de $E$.

**Teorema 6.4.** *Uma transformação linear $A : E \to F$ é injetiva se, e somente se, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $v \in \mathcal{N}(A)$, então $Av = 0$. Como $Av = 0 = A0$ e $A$ é injetiva, segue que $v = 0$. ($\Leftarrow$) Sejam $u, v \in E$ tais que $Au = Av$. Logo, $A(u - v) = 0$, o que implica que $u - v \in \mathcal{N}(A)$. Portanto, $u - v = 0$ e assim $A$ é injetiva. $\square$

**Teorema 6.5.** *Uma transformação linear $A : E \to F$ é injetiva se, e somente se, transforma subconjuntos L.I. de $E$ em subconjuntos L.I. de $F$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Seja $X \subset E$ um conjunto L.I.. Dados $u_1, \ldots, u_n \in X$, consideremos a combinação linear nula $\alpha_1 Au_1 + \cdots + \alpha_n Au_n = 0$. Essa equação é equivalente a $A(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0$. Isso implica que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in \mathcal{N}(A)$ e, por conseguinte, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$, pois $A$ é injetiva. Como $X$ é L.I., segue que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Portanto, o conjunto $A(X) = \{Au \in F : u \in X\}$ é L.I.. ($\Leftarrow$) Se $A$ transforma subconjuntos L.I. de $E$ em subconjuntos L.I. de $F$, em particular devemos ter $Av \neq 0$ se $v \neq 0$. Logo, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ e, por conseguinte, $A$ é injetiva. $\square$

Seja $A : E \to F$ uma transformação linear. Diz-se que uma transformação linear $B : F \to E$ é uma *inversa à esquerda* de $A$ se $BA = I_E$.

**Teorema 6.6.** *Seja $A : E \to F$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. A transformação linear $A$ possui uma inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $B : F \to E$ é uma inversa à esquerda de $A$, então $BA = I_E$. Logo, dados $u, v \in E$ tais que $Au = Av$, temos que $u = BAu = BAv = v$. Portanto, $A$ é injetiva. ($\Leftarrow$) Seja $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ uma base de $E$. Como $A$ é injetiva, o conjunto $\{Au_1, \ldots, Au_n\} \subset F$ é L.I.. Logo, existe uma base $\mathcal{B} = \{Au_1, \ldots, Au_n, v_1, \ldots, v_m\} \subset F$. Definindo a transformação linear $B : F \to E$ pelas equações $B(Au_i) = u_i$ se $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $B(v_j) = 0$ se $j \in \{1, \ldots, m\}$, temos que, se $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$,

$$BAv = B(\alpha_1 Au_1 + \cdots + \alpha_n Au_n) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = v\,.$$

Portanto, $B$ é uma inversa à esquerda de $A$. $\square$

Diz-se que uma transformação linear $A : E \to F$ é invertível se ela possui uma inversa à esquerda e uma inversa à direita. Se $B, C : F \to E$ são respectivamente essas inversas de $A$, então $B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_E C = C$. Conclui-se daqui que, se $A$ é invertível, existe uma única transformação linear $A^{-1} : F \to E$, chamada de *inversa* de $A$, tal que $AA^{-1} = I_F$ e $A^{-1}A = I_E$.

Diz-se que uma transformação linear $A : E \to F$ é um *isomorfismo* se ela é uma bijeção, ou seja, se ela é injetiva e sobrejetiva. Nesse caso, diz-se que os espaços $E$ e $F$ são *isomorfos*.

**Corolário 6.7.** *Uma transformação linear $A : E \to F$ é um isomorfismo se, e somente se, transforma uma base de $E$ em uma base de $F$.*

**Corolário 6.8.** *Se $E$ e $F$ são espaços vetoriais da mesma dimensão (finita ou infinita), então $E$ e $F$ são isomorfos.*

**Corolário 6.9.** *Uma transformação linear $A : E \to F$ entre espaços vetoriais de dimensão finita é invertível se, e somente se, é um isomorfismo.*

**Teorema 6.10** (Teorema do núcleo e da imagem)**.** *Seja $A : E \to F$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Tem-se que*

$$\dim E = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{I}m(A)\,.$$

*Demonstração.* Seja $\{Av_1, \ldots, Av_n\} \subset \mathcal{I}m(A)$ uma base de $\mathcal{I}m(A)$. Logo, a combinação linear nula $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = 0$ implica que

$$\beta_1 Av_1 + \cdots + \beta_n Av_n = A(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = 0\,.$$

Segue daqui que $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$ e, por conseguinte, o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$ é L.I.. Seja $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset \mathcal{N}(A)$ uma base de $\mathcal{N}(A)$. Vamos provar que o conjunto $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $E$. Para isso, consideremos primeiramente a combinação linear nula

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = 0\,. \tag{6.1}$$

Essa igualdade implica que

$$\beta_1 Av_1 + \cdots + \beta_n Av_n = A(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = 0$$

e, por conseguinte, $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$. Substituindo isso na Eq. (6.1) temos que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0$ e a partir daqui obtemos que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Logo, $\mathcal{B}$ é L.I.. Por outro lado, dado qualquer $v \in E$, existem $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$Av = \beta_1 Av_1 + \cdots + \beta_n Av_n = A(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n)\,.$$

Logo, $A(v - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_n v_n) = 0$, o que implica que $v - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_n v_n \in \mathcal{N}(A)$. Assim, devem existir $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tais que

$$v - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_n v_n = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m\,.$$

Segue daqui que $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ é uma combinação linear de vetores de $\mathcal{B}$. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de $E$. $\square$

**Corolário 6.11.** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim E = \dim F$. A transformação linear $A : E \to F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. Assim, em qualquer um desses casos, $A$ é um isomorfismo.*

**Corolário 6.12.** *Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão finita. Se o operador linear $A : E \to E$ possui uma inversa à esquerda (ou à direita) $B : E \to E$, então $B$ é a inversa de $A$ e $A$ é um isomorfismo.*

# Capítulo 7

# A matriz de uma transformação linear

Seja $A : E \to F$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Considerando que $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ seja uma base de $E$, suponhamos que $Au_j = w_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Se $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset F$ é uma base de $F$, então para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existem $a_{1j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbb{K}$ tais que $w_j = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m$. Logo,

$$Au_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Os $mn$ números $a_{ij}$ podem ser vistos como os elementos de uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $m \times n$. Essa matriz é chamada de *matriz da transformação linear* $A : E \to F$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}$. Vemos que as colunas da matriz $\mathbf{a}$ são as coordenadas dos vetores $Au_j$ em relação à base $\mathcal{V}$. Dado $u \in E$, existem $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. Logo,

$$Au = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_ju_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_jAu_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_ja_{ij}v_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)v_i\,.$$

Vemos daqui que a representação do vetor $Au$ na base $\mathcal{V}$ pode ser obtida fazendo o produto de matrizes $\mathbf{ax}$, em que $\mathbf{x}$ é a matriz coluna cujos elementos são as coordenadas do vetor $u$ em relação à base $\mathcal{B}$.

Sejam $E$ e $F$ dois espaços vetoriais de dimensão finita. Escolhendo uma base para cada espaço e mantendo elas fixas, cada transformação linear $A : E \to F$ está associada a uma única matriz $\mathbf{a}$ e vice-versa.

**Exemplos.**

1. A matriz do operador de rotação $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido pelas equações $R(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $R(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ usando a base canônica de $\mathbb{R}^2$ é
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. A matriz da transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $A(x, y) = x$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ é

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. A matriz do operador linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $S(x, y) = (x, -y)$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

   Por outro lado, a matriz de $S$ em relação à base $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ é

$$\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Se $E$ é um espaço vetorial de dimensão finita, a matriz do operador identidade $I_E : E \to E$ em relação a qualquer base de $E$ é a matriz identidade de ordem $\dim E \times \dim E$.

**Teorema 7.1.** *Sejam $A : E \to F$ e $B : F \to G$ transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita. Se* $\mathbf{a}$ *é a matriz de $A$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}$ e* $\mathbf{b}$ *é a matriz de $B$ em relação às bases $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, então a matriz da transformação produto $BA$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{W}$ é* $\mathbf{ba}$.

*Demonstração.* Suponhamos que $B = \{u_1, \ldots, u_p\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$ temos que

$$Au_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i .$$

Por outro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ temos que

$$Bv_i = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} w_k .$$

Logo,

$$BAu_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} Bv_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ij} b_{ki} w_k = \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} \right) w_k .$$

Pondo $\mathbf{c} = \mathbf{ba}$, temos que

$$BAu_j = \sum_{k=1}^{m} c_{kj} w_k .$$

Portanto, $\mathbf{c}$ é a matriz de $BA$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{W}$. □

Teoremas sobre transformações lineares correspondem a teoremas sobre matrizes. Por exemplo:

1. A multiplicação de matrizes é associativa devido a que a composição de transformações lineares é associativa.

2. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz $m \times n$, então $\mathbf{I}_m\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{I}_n = \mathbf{a}$.

3. Uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $m \times n$ possui uma inversa à direita se, e somente se, suas colunas geram $\mathbb{R}^m$.

4. Uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $m \times n$ possui uma inversa à esquerda se, e somente se, suas colunas são L.I..

5. Uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $m \times n$ é invertível se, e somente se, ela é quadrada $(m = n)$ e suas colunas são L.I. ou geram $\mathbb{R}^n$.

6. Uma matriz $\mathbf{a}$ de ordem $n \times n$ não é invertível se, e somente se, existe uma matriz não-nula $\mathbf{c}$ de ordem $n \times 1$ tal que $\mathbf{ac} = \mathbf{0}$.

Define-se o *posto* de uma transformação linear $A : E \to F$ como a dimensão de $\mathcal{I}m(A)$, ou seja, $\text{posto}(A) = \dim \mathcal{I}m(A)$. Se $\mathbf{a}$ é uma matriz de $A$, então o posto de $A$ é igual à dimensão do subespaço gerado pelas colunas de $\mathbf{a}$. Definindo o posto da matriz $\mathbf{a}$ como o posto de $A$, obtemos que qualquer matriz que represente a transformação linear $A$ terá o mesmo posto.

**Teorema 7.2.** *Seja* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $m \times n$. *Tem-se que* $\text{posto}(\mathbf{a}) = \text{posto}(\mathbf{a}^T)$.

*Demonstração.* Suponhamos que $\text{posto}(\mathbf{a}) = r$. Logo, o subespaço gerado pelas colunas $a_1, \dots, a_n$ de $\mathbf{a}$ possui uma base $\{b_1, \dots, b_r\} \subset \mathbb{R}^m$. Assim, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existem $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj} \in \mathbb{R}$ tais que $a_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{kj} b_k$. Logo, o elemento na linha $i$ e coluna $j$ da matriz $\mathbf{a}$ é dado por

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{kj} b_{ik} \, .$$

A linha $i$ da matriz $\mathbf{a}$ corresponde ao vetor $l_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$l_i = \left( \sum_{k=1}^{r} \alpha_{k1} b_{ik}, \dots, \sum_{k=1}^{r} \alpha_{kn} b_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{r} b_{ik} (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn}) \, .$$

Segue daqui que cada linha da matriz $\mathbf{a}$ pode ser escrita como uma combinação linear dos $r$ vetores $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, (\alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rn}) \in \mathbb{R}^n$. Assim, se o subespaço gerado pelas linhas da matriz $\mathbf{a}$ tem dimensão $s$, tem-se que $s \leq r$. Fazendo a mesma análise mas começando com a matriz $\mathbf{a}^T$, concluiríamos que $r \leq s$. Portanto, $s = r$. $\square$

**Teorema 7.3.** *Seja* $E$ *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Dado* $X \subset E$ *não-vazio, seja* $Y$ *o conjunto obtido substituindo um vetor* $v \in X$ *por* $v + \alpha u$, *em que* $u \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Tem-se que* $S(Y) = S(X)$.

*Demonstração.* Temos $X \subset S(Y)$, pois $v = (v + \alpha u) - \alpha u$. Logo, $S(X) \subset S(Y)$. Por outro lado, temos $Y \subset S(X)$, pois $v + \alpha u$ é uma combinação linear de $v, u \in X$. Logo, $S(Y) \subset S(X)$. Portanto, $S(Y) = S(X)$. $\square$

**Corolário 7.4.** *Dado um espaço vetorial* $E$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$, *seja* $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset E$. *Se* $Y = \{v_1, v_2 - \alpha_1 v_1, \dots, v_n - \alpha_n v_1\} \subset E$, *em que* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, *então* $S(Y) = S(X)$.

**Corolário 7.5.** *As linhas de uma matriz escalonada obtida aplicando o método de eliminação de Gauss em uma matriz* $\mathbf{a}$ *geram o mesmo subespaço que o gerado pelas linhas de* $\mathbf{a}$. *Logo, o posto da matriz escalonada é igual ao posto de* $\mathbf{a}$.