Primeira lista de álgebra linear

Prof.: Max Jáuregui

1. Construa uma matriz 4×4 antissimétrica e não-nula. Quantos elementos da matriz você tem liberdade de escolher?

2. Construa uma matriz 2×2 hermitiana cujos elementos não sejam todos reais e cujo traço seja 1.

3. Construa uma matriz triangular inferior 3×3 e uma matriz simétrica 4×4, ambas não-nulas e que tenham o mesmo traço.

4. Usando o símbolo de Kronecker, escreva os elementos de uma matriz diagonal arbitrária de ordem $n \times n$.

5. Dadas as matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

calcule (i) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, (ii) $2\mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T$, (iii) $2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, (iv) $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$, (v) $\mathbf{b}\mathbf{c}^T$, (vi) $\mathbf{a}^T\mathbf{c} + \mathbf{b}^T\mathbf{c}$.

6. Seja $\mathbf{a}$ uma matriz 2×3. Se

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

mostre que

$$\mathbf{b}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & 2\mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Isso ilustra que é possível multiplicar matrizes por blocos.

7. Dadas as matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & -7 \\ 1 & -4 & 5 & -8 \end{bmatrix},$$

calcule $\mathbf{a}(\mathbf{bc})$.

8. Mostre que $\sum_{j=1}^{n} a_i \delta_{ij} b_j \delta_{jk} = a_i b_i \delta_{ik}$, em que os índices i e k são fixos. Usando isso, conclua que o produto de duas matrizes diagonais $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ da mesma ordem é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são obtidos multiplicando os elementos da diagonal de $\mathbf{a}$ com os de $\mathbf{b}$.

9. Use o método de eliminação para transformar a seguinte matriz em uma matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Determine o posto da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Escreva as matrizes elementares correspondentes às operações elementares (i) $L_3 - 4L_1$, (ii) $L_2 \leftrightarrow L_3$, (iii) $L_1/5$, aplicadas a uma matriz 3×4.

12. Mostre que o seguinte sistema linear não tem solução:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y - 3z &= 3 \\ 5x - 14y + 9z &= 1\,. \end{aligned}$$

13. Mostre que o seguinte sistema linear tem como única solução a lista $(1, 0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ y + z - t &= 0 \\ x + z - t &= 1 \\ 2y + z + t &= 0\,. \end{aligned}$$

14. Determine a inversa da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$