

Notas de cálculo diferencial e integral 1

Max Jáuregui

23 de Setembro de 2019

Estas notas foram criadas principalmente para meu uso pessoal e pode eventualmente ser usado como um curso elementar de análise matemático com aplicações ao cálculo. Todo o conteúdo foi produzido por mim, seguindo como roteiros os seguintes livros:

- R. Courant e E. McShane, *Differential and integral calculus*, Vol. I, 2 ed. (Blackie and Son, Londres, 1937).
- E. L. Lima, *Análise real volume 1. Funções de uma variável real*, 12 ed. (IMPA, Rio de Janeiro, 2013).
- W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3 ed. (McGraw-Hill, Singapore, 1976).

Max Jáuregui

Conteúdo

1	Linguagem de conjuntos	3
2	Números reais	5
3	Funções	9
4	Espaços euclidianos*	14
5	O conceito de limite para funções	16
6	Sequências de pontos no espaço euclidiano*	21
7	Séries de números reais*	25
8	Funções contínuas	29
9	A derivada de funções de uma variável real	38
10	A integral de Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real	52
11	O teorema fundamental do cálculo	66

Capítulo 1

Linguagem de conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados de **elementos** do conjunto. Se x é um elemento de um conjunto A , diz-se que x **pertence** a A e escreve-se $x \in A$; caso contrário diz-se x **não pertence** a A e escreve-se $x \notin A$.

Conjuntos numéricos:

1. Conjunto dos **números naturais**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
2. Conjunto dos **números inteiros**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Conjunto dos **números racionais**: $\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

O **conjunto vazio**, denotado por \emptyset , é o conjunto que não tem elementos.

Diz-se que um conjunto A é um **subconjunto** ou uma **parte** de um conjunto B se todo elemento de A é elemento de B . Nesse caso escreve-se $A \subset B$ ou $B \supset A$.

Exemplos: Tem-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Para qualquer conjunto A tem-se que $\emptyset \subset A$.

Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Dados os conjuntos A e B , definimos sua **união** por $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ e sua **interseção** por $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$. Define-se também a **diferença** $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. Se todos os conjuntos com os quais está se trabalhando são subconjuntos de um conjunto X , a diferença $X \setminus A$ é chamada de **complementar** de A e é denotada por A^c .

Algumas propriedades:

1. $A \cup B = B$ se, e somente se, $A \subset B$;
2. $A \cap B = A$ se, e somente se, $A \subset B$;
3. se $A \subset B$, então $A \cup C \subset B \cup C$;
4. se $A \subset B$, então $A \cap C \subset B \cap C$;
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
9. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

10. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

11. $A \setminus B = A \cap B^c$.

12. $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset B^c$.

Define-se o **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B por $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$. Os elementos de $A \times B$ são chamados de **pares ordenados**. Dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

O produto cartesiano de um conjunto A com ele próprio é denotado por A^2 .

Capítulo 2

Números reais

Não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. De fato, se $r = p/q$, em que $p, q \in \mathbb{N}$ são primos relativos, teríamos que $p^2 = 2q^2$. Isso implicaria que p é par. Porém, com isso concluiríamos que q também é par. Contradição!

\mathbb{Q} não é suficiente para atribuir um comprimento a todo segmento de reta. Estende-se \mathbb{Q} introduzindo **números irracionais**, como $\sqrt{2}$. O conjunto formado pelos números racionais e irracionais é chamado de conjunto dos **números reais** e é denotado por \mathbb{R} .

\mathbb{R} é um **corpo**, pois nele estão definidas as operações de adição e multiplicação, as quais têm as seguintes propriedades:

1. $x + y \in \mathbb{R}$ e $xy \in \mathbb{R}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. $x + y = y + x$ e $xy = yx$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
4. $x(y + z) = xy + xz$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.
5. Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
6. Existe $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
7. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.
8. Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1$.

\mathbb{R} é um **corpo ordenado**, pois existe o subconjunto \mathbb{R}^+ dos números reais **positivos** tal que

1. se $x \in \mathbb{R}$, só uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x \in \mathbb{R}^+$, $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.
2. dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $xy \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que $x \in \mathbb{R}$ é **menor** do que $y \in \mathbb{R}$ e escreve-se $x < y$ se $y - x \in \mathbb{R}^+$. As seguintes propriedades seguem diretamente dessa definição:

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, só uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$.
2. Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.
3. Se $x < y$, então $x + z < y + z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

4. Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.
5. Se $x < y$ e $z < w$, então $x + z < y + w$;
6. $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $1 > 0$.

Usando essas propriedades podemos mostrar que

7. se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$;
8. se $0 < x < y$ e $0 < z < w$, então $xz < yw$;
9. se $0 < x < y$, então $0 < y^{-1} < x^{-1}$;
10. $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Intervalos finitos: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

1. **Intervalo aberto:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
2. **Intervalo fechado:** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
3. **Intervalos semiabertos:** $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ e $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
4. **Intervalo degenerado:** $[a, a] = \{a\}$.

Intervalos infinitos: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$; $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$; $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$; $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$; $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Exemplo: Vamos encontrar o conjunto dos valores de x que satisfazem a desigualdade $(2x + 3)(4 - 2x) \geq 0$. Para isso, notamos que essa desigualdade é verdadeira se, e somente se, os fatores do lado esquerdo são ambos não-negativos ou são ambos não-positivos. No primeiro caso, temos que $2x + 3 \geq 0$ e $4 - 2x \geq 0$, o que implica que $x \geq -3/2$ e $2 \geq x$. Logo, o primeiro caso é satisfeito quando $x \in [-3/2, 2]$. No segundo caso temos que $2x + 3 \leq 0$ e $4 - 2x \leq 0$, o que implica que $x \leq -3/2$ e $2 \leq x$. Logo, o segundo caso é impossível de ser satisfeito. Portanto, $(2x + 3)(4 - 2x) \geq 0$ se, e somente se, $x \in [-3/2, 2]$.

Define-se o **valor absoluto** de $x \in \mathbb{R}$ por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue imediatamente daqui que $|x| \geq 0$ e $-|x| \leq x \leq |x|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Se $|x - a| < \epsilon$, então $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e vice-versa.

Teorema 2.1. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que*

1. $|xy| = |x||y|$;
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demonstração. 1. $|xy|^2 = x^2y^2 = (|x||y|)^2$.

2. Somando as desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, obtemos que $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Logo, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
3. $|x| \leq |x - y| + |y|$ e $|y| \leq |x - y| + |x|$. Logo, $-(|x - y|) \leq |x| - |y| \leq |x - y|$ e, por conseguinte, $||x| - |y|| \leq |x - y|$. \square

Exemplo: Vamos encontrar o conjunto dos valores de x que satisfazem a desigualdade $|2x - 3| + |x - 1| \geq 2$. Se $x \geq 3/2$, essa desigualdade se lê $2x - 3 + x - 1 \geq 2$, o que implica que $x \geq 2$ e, por conseguinte, $x \in [2, \infty)$. Se $1 \leq x < 3/2$, a desigualdade se lê $2x - 3 - x + 1 \geq 2$, o que implica que $x \geq 4$. Logo, se $1 < x < 3/2$, a desigualdade é impossível de ser satisfeita. Finalmente, se $x < 1$, a desigualdade se lê $-2x + 3 - x + 1 \geq 2$. Segue daqui que $2/3 \geq x$ e, por conseguinte, $x \in (-\infty, 2/3]$. Portanto, $|2x - 3| + |x - 1| \geq 2$ se, e somente se, $x \in (-\infty, 2/3] \cup [2, \infty)$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente (inferiormente)** se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c$ ($x \geq c$) para todo $x \in X$. Nesse caso, diz-se que c é uma **cota superior (inferior)** de X .

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente (inferiormente). Diz-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é o **supremo (ínfimo)** de X se α é a menor (maior) cota superior (inferior) de X . Nesse caso, escreve-se $\alpha = \sup X$ ($\alpha = \inf X$).

Se $\alpha = \sup X$, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\alpha - \epsilon < x$. Isso é devido a que $\alpha - \epsilon$ não pode ser uma cota superior de X .

\mathbb{R} é um **corpo ordenado completo**. Isso quer dizer que todo conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ que é limitado superiormente tem um supremo.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio limitado inferiormente, então $-X = \{-x \in \mathbb{R} : x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Vê-se claramente que $\inf X = -\sup(-X)$.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto que não limitado superiormente (inferiormente), vamos escrever $\sup X = \infty$ ($\inf X = -\infty$). Com essa convenção, todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ possui um supremo e um ínfimo em $[-\infty, \infty]$.

Teorema 2.2. \mathbb{R} é **arquimediano**, ou seja, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demonstração. Se isso não fosse verdade existiria $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, \mathbb{N} seria limitado superiormente e portanto teria um supremo $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < n$. Porém, isso implicaria que $\alpha < n + 1$. Contradição! \square

Corolário 2.3. $\inf_{n \in \mathbb{N}}(1/n) = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Teorema 2.4. \mathbb{Q} é **denso** em \mathbb{R} , ou seja, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Demonstração. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Os números m/n , $m \in \mathbb{Z}$, dividem a reta real em intervalos de comprimento $1/n$. Se $a \in [(m-1)/n, m/n)$, devemos ter $b > m/n$. Com efeito, se tivéssemos $b \leq m/n$, então $b - 1/n \leq (m-1)/n \leq a$. Porém, tem-se também que $b - 1/n > a$. Contradição! Portanto, $a < m/n < b$. \square

Teorema* 2.5. Teorema dos intervalos encaixados. Sejam I_n intervalos fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponhamos que $I_n = [a_n, b_n]$. Vemos que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$. Logo, o conjunto formado pelos números a_n é limitado superiormente por qualquer um dos números b_n . Dessa forma, se c é o supremo desse conjunto, então $a_n \leq c \leq b_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema* 2.6. \mathbb{R} é não-enumerável, ou seja, $\mathbb{R} \neq \{x_1, x_2, \dots\}$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Seja I_1 um intervalo fechado não-degenerado tal que $x_1 \notin I_1$. Supondo definidos os intervalos fechados não-degenerados $I_1 \supset \dots \supset I_n$, definimos o intervalo fechado não-degenerado I_{n+1} da seguinte forma:

1. Se $x_{n+1} \notin I_n$, então $I_{n+1} = I_n$.
2. Se $x_{n+1} \in I_n$, então x_{n+1} é diferente de pelo menos uma das extremidades de $I_n = [a, b]$. Supondo, por exemplo, que $x_{n+1} \neq a$, definimos $I_{n+1} = [a, (a + x_{n+1})/2]$.

Dessa forma, os intervalos encaixados I_n estão bem definidos para todo $n \in \mathbb{N}$ e são tais que $x_n \notin I_n$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Contradição! \square

Capítulo 3

Funções

Sejam X e Y conjuntos arbitrários. Uma **função** $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$; nesse caso escreve-se $f(x) = y$. Os conjuntos X e Y são chamados respectivamente de **domínio** e **contradomínio** da função f .

Exemplos:

1. Dados os conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{2, 6, 8, 10\}$, podemos definir a função $f : X \rightarrow Y$ pondo $f(1) = 2$, $f(2) = 6$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$.
2. Se X é o conjunto de todas as pessoas do mundo, podemos definir uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x)$ é a altura da pessoa x em metros.
3. Podemos definir uma função $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$.

Define-se a **imagem** de uma função $f : X \rightarrow Y$ como o conjunto $f(X) = \{f(x) \in Y : x \in X\}$. Se $f(X) = Y$, diz-se que f é **sobrejetiva**.

Exemplos:

1. Dados os conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{2, 6, 8, 10\}$, a função $f : X \rightarrow Y$ definida pelas igualdades $f(1) = 2$, $f(2) = 6$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$ tem como imagem o conjunto $f(X) = \{2, 6, 8\}$. Logo, ela não é sobrejetiva.
2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$ é sobrejetiva, pois para cada $y \in \mathbb{R}$ existe $x = (y + 3)/2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita **injetiva** se, dados $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$, tem-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Uma função que é injetiva e sobrejetiva é chamada de uma **bijeção**.

1. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injetiva pois $f(-2) = f(2) = 4$.
2. A função $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ é injetiva. Com efeito, dados $x, y \geq 0$ tais que $x^2 = y^2$, temos que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, o que implica que $x = y$, pois nenhum deles é negativo.

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção, para cada $y \in Y$ existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, podemos definir uma função $f^{-1} : Y \rightarrow X$ pondo $f^{-1}(y) = x$ quando $f(x) = y$. A função f^{-1} assim definida é chamada de **inversa** da função f .

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3x - 2$. A função f é claramente uma bijeção. Para determinar regra que define a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, partimos da equação $y = 3x - 2$ e manipulamos ela até deixar a variável x sozinha. Assim, nesse caso vamos ter $x = (y + 2)/3$. Portanto, $f^{-1}(y) = (y + 2)/3$ para todo $y \in \mathbb{R}$.
2. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ a função definida por $f(x) = x^2$. Essa função é injetiva e, como será provado mais na frente, é também sobrejetiva. Logo, f tem uma inversa. Para encontrar a expressão de $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ partimos da equação $y = x^2$. Daqui podemos concluir que $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ para todo $y \geq 0$.

Dadas as funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, define-se a **função composta** $g \circ f : X \rightarrow Z$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção, então $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$ e $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Exemplo: Dadas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ e $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 2$, podemos definir as funções compostas $f \circ g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ e $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De fato, temos que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2)^2$ para todo $x \geq 0$ e, por outro lado, $(gf)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

No restante dessa seção consideraremos funções entre subconjuntos de \mathbb{R} a menos que se indique o contrário.

Uma função $f : X \rightarrow Y$ pode ser representada graficamente localizando os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano xy . O desenho obtido é chamado de **gráfico** da função f . Qualquer reta vertical intersecta o gráfico de uma função em no máximo um ponto.

Em muitas ocasiões, uma função f é definida dando uma expressão para $f(x)$. Nesse caso, vamos considerar que o domínio de f é o maior conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tal que a expressão de $f(x)$ esteja definida para todo $x \in X$.

Funções lineares: $f(x) = ax + b$. O domínio de f é \mathbb{R} e sua imagem é \mathbb{R} se $a \neq 0$ ou $\{b\}$ se $a = 0$. O gráfico de uma função linear é uma linha reta (ver figura 3.1).

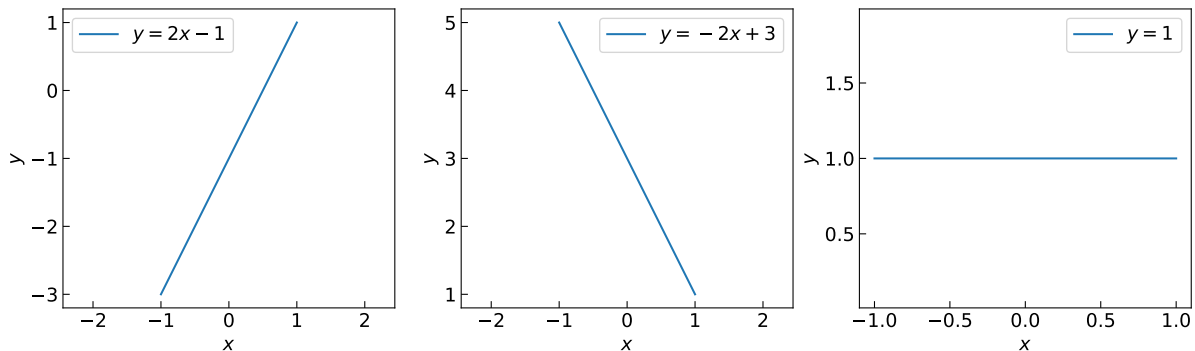


Figura 3.1: Gráficos de funções lineares.

Funções quadráticas: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. O domínio de f é \mathbb{R} . Para determinar a imagem de f escrevemos

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$. Vemos daqui que

1. se $a > 0$, a imagem de f é o intervalo $[-\Delta/4a, \infty)$ e $f(-b/2a) = -\Delta/4a$.

2. se $a > 0$, a imagem de f é o intervalo $(-\infty, -\Delta/4a]$ e $f(-b/2a) = -\Delta/4a$.

O gráfico de f é uma parábola que se estende verticalmente para cima (baixo) se $a > 0$ ($a < 0$) como mostrado na figura 3.2.

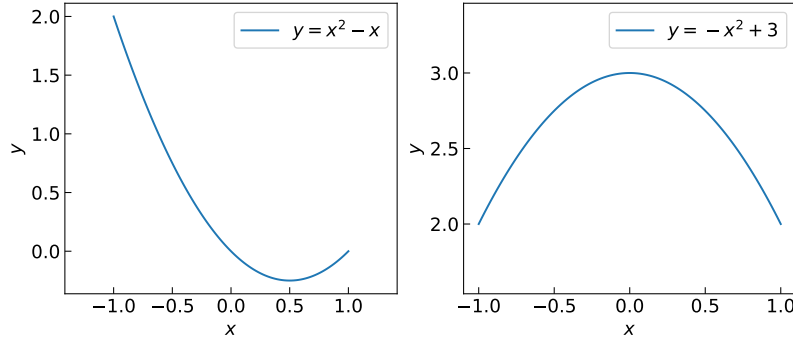


Figura 3.2: Gráficos de funções quadráticas.

Funções polinomiais: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. O domínio de f é \mathbb{R} e sua imagem é \mathbb{R} se o maior expoente de x é ímpar. No caso em que esse expoente é par, a imagem de f é um intervalo da forma $[a, \infty)$. A figura 3.3 mostra o gráfico da função $f(x) = x^n$ para vários valores de $n \in \mathbb{N}$.

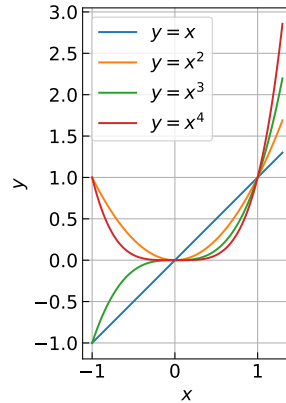


Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = x^n$ para vários valores de $n \in \mathbb{N}$.

Funções racionais: $f(x) = p(x)/q(x)$, em que p e q são funções polinomiais. O domínio de f é $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. A figura 3.4 mostra os gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

Funções algébricas: São funções que podem envolver as operações racionais (adição, multiplicação, subtração e divisão) e raízes de diversas ordens em suas definições. Por exemplo: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2/x} - (\sqrt{x} - 1)^2$. Para determinar o domínio dessas funções, deve se levar em conta que os denominadores nunca devem se anular e, além disso, o interior de raízes de ordem par sempre deve ser uma quantidade não-negativa. A figura 3.5 mostra o gráfico da função $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^{1/n}$, para vários valores de $n \in \mathbb{N}$. Como g é a inversa da função $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^n$, o gráfico de g pode ser obtido refletindo o gráfico de f em relação à reta $y = x$. O gráfico de g também pode ser obtido girando 90° o gráfico de f no sentido anti-horário e depois refletindo o resultado em relação ao eixo y .

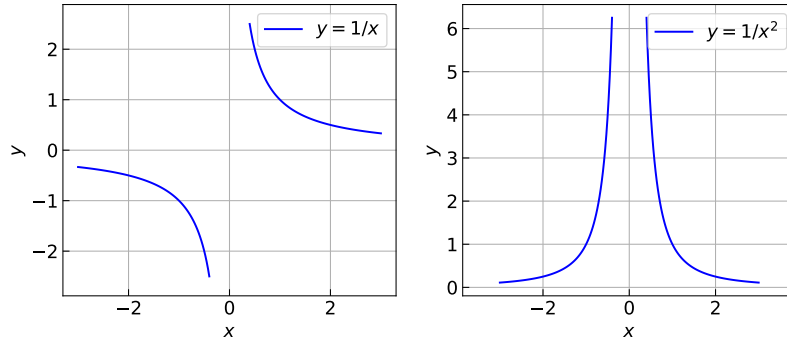


Figura 3.4: Gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

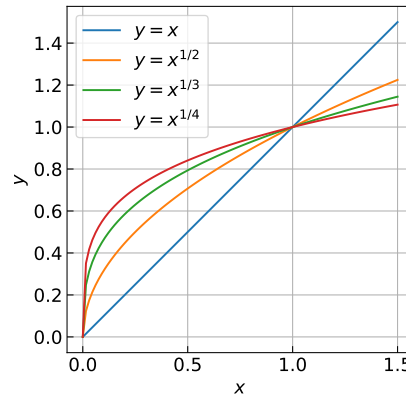


Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = x^{1/n}$ para vários valores de $n \in \mathbb{N}$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo que contém o ponto 0. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **função par** (**ímpar**) se $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) para todo $x \in I$. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y enquanto que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Funções trigonométricas: As funções seno e cosseno, definidas pelas expressões $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ respectivamente tem \mathbb{R} como domínio e o intervalo $[-1, 1]$ como imagem. Elas são **funções periódicas** de período 2π , ou seja, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver figura 3.6). Além disso, a função seno é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno é par. A função tangente é definida pela expressão $h(x) = \tan x = \sin x / \cos x$. O domínio dessa função é $\mathbb{R} \setminus \{(2n-1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$ e sua imagem é \mathbb{R} . A função tangente é periódica e tem período π . Além disso, ela é uma função ímpar (ver figura 3.7).

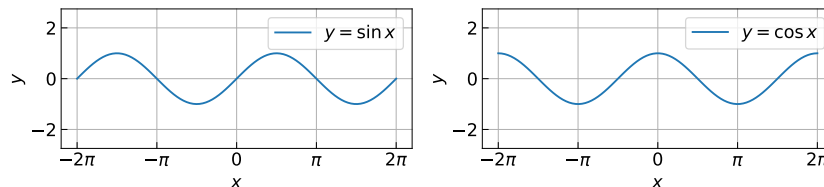


Figura 3.6: Gráficos das funções seno e cosseno.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **monótona crescente** (**decrescente**) se, dados $x, y \in X$ com $x < y$, tem-se que $f(x) \leq f(y)$ ($f(y) \leq f(x)$). Se sempre ocorre a

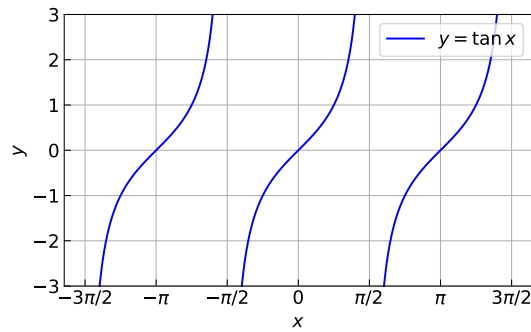


Figura 3.7: Gráfico da função tangente.

desigualdade estrita, diz-se ainda que f é **estritamente crescente (decrescente)**.

Função logaritmo: $f(x) = \log x$. O domínio dessa função é $(0, \infty)$ e sua imagem é \mathbb{R} . Ela é uma função estritamente crescente tal que $f(1) = 0$ e $f(ab) = f(a) + f(b)$ para quaisquer $a, b > 0$.

Função exponencial: $f(x) = \exp x$. O domínio dessa função é \mathbb{R} e sua imagem é $(0, \infty)$. Ela é a inversa da função logaritmo. A função exponencial é estritamente crescente e é tal que $f(0) = 1$ e $f(a + b) = f(a)f(b)$.

Capítulo 4

Espaços euclidianos*

O conjunto \mathbb{R}^d é chamado de **espaço euclidiano d -dimensional** e seus elementos são chamados de **pontos** ou de **vetores**.

Definem-se em \mathbb{R}^d as operações de **adição** e **multiplicação por um escalar** pelas equações

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d) \quad \text{e} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_d).$$

\mathbb{R}^d é um **espaço vetorial**, pois essas operações têm as seguintes propriedades:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^d$;
2. $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$;
3. existe $0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$;
4. para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existe $-x \in \mathbb{R}^d$ tal que $x + (-x) = 0$;
5. $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$;
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^d$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ e $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Define-se o **produto interno** de $x, y \in \mathbb{R}^d$ por $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. Podemos verificar que

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$;
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^d$;
3. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$;
4. $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$.

Diz-se que $x, y \in \mathbb{R}^d$ são **ortogonais** quando $\langle x, y \rangle = 0$.

Define-se a **norma euclidiana** de $x \in \mathbb{R}^d$ por $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. Se $x = y + z$ e $\langle z, y \rangle = 0$, então $|x|^2 = |y|^2 + |z|^2 + 2\langle y, z \rangle = |y|^2 + |z|^2$ (teorema de Pitágoras).

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. Se $y \neq 0$, definamos $\alpha = \langle x, y \rangle / |y|^2$. Logo, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y . Com efeito, vemos que $\langle y, z \rangle = \langle y, x \rangle - \alpha \langle y, y \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0$.

Teorema 4.1. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$ tem-se que $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = \alpha y$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $y = 0$, OK. Se $y \neq 0$, existe $z \in \mathbb{R}^d$ tal que $\langle y, z \rangle = 0$ e $x = \alpha y + z$, em que $\alpha = \langle x, y \rangle / |y|^2$. Logo, $|x|^2 = \alpha^2 |y|^2 + |z|^2 \geq \alpha^2 |y|^2 = \langle x, y \rangle^2 / |y|^2$, o que nos dá a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso, vemos que a igualdade ocorre se, e somente se, $|z| = 0$. Isso implica que a igualdade ocorre se, e somente se, $z = 0$, o qual equivale à condição $x = \alpha y$. \square

Teorema 4.2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se que

1. $|x| > 0$ se $x \neq 0$;
2. $|\alpha x| = |\alpha||x|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
4. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demonstração. 3. $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$. \square

Uma **norma** em \mathbb{R}^d é uma função $|\cdot| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre os itens 1, 2 e 3 do teorema anterior. Além da norma euclidiana, de forma convenientemente podemos utilizar a **norma do máximo** $|x|_M = \max\{x_1, \dots, x_d\}$ e a **norma da soma** $|x|_S = |x_1| + \dots + |x_d|$. Pode-se verificar que $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq d|x|_M$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Capítulo 5

O conceito de limite para funções

Consideremos a função $f(x) = x - 2$. Conforme x se aproxima de 2, $f(x)$ se aproxima de 0. Nesse caso, podemos dizer que 0 é o limite de $f(x)$ quando x tende para 2 e escrever $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$.

Consideremos a função $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. O ponto $1 \in \mathbb{R}$ não pertence ao domínio de f . Porém, pontos arbitrariamente próximos de 1 pertencem ao domínio de f . Para esses valores, notamos que $f(x) = x + 1$ e vemos que, conforme x tende para 1, $f(x)$ se aproxima de 2. Nesse caso, podemos dizer que 2 é o limite de $f(x)$ quando x tende para 1 e escrever $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Define-se a **bola aberta** de centro $a \in \mathbb{R}^d$ e raio $r > 0$ como o conjunto $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| < r\}$.

Diz-se que $a \in \mathbb{R}^d$ é um **ponto de acumulação** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ se para qualquer $r > 0$ a bola aberta $B(a, r)$ contém um ponto de X diferente de a , ou seja, se $(X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta) \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é denotado por X' .

Exemplo: O ponto $1 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do intervalo $(1, 2)$ embora não pertença a ele.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$, diz-se que $L \in \mathbb{R}^d$ é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para a se, dado qualquer $\epsilon > 0$, pode-se encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para qualquer $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Nesse caso, escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. A definição de limite pode ser rescrita também na seguinte forma: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$ implica que $f(x) \in B(L, \epsilon)$. Devido a relação entre as normas euclidiana, do máximo e da soma, o limite L será o mesmo usando qualquer par delas na definição de limite.

Teorema 5.1 (Unicidade do limite). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, então $L = M$.*

Demonstração. Suponhamos $L \neq M$ e consideremos $\epsilon = |L - M|/2$. Existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Como $|L - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M|$ para todo $x \in X$, segue que, se $0 < |x - a| < \delta$, $|L - M| < \epsilon + |f(x) - M|$. Isso implica que $|f(x) - M| > \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Portanto, M não é o limite de $f(x)$ quando x tende para a . Contradição! \square

Exemplos:

1. Consideremos a função constante $f(x) = c$. Temos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = 1$ (pode ser qualquer número positivo) tal que $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.
2. Seja $g(x) = x$. Temos que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon$ tal que $|g(x) - a| = |x - a| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Teorema 5.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Sob essas condições, $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon$. \square

Teorema 5.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $L < M$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$.*

Demonstração. Seja $\epsilon = M - L$. Existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $f(x) < \epsilon + L = M$. \square

Teorema 5.4. Teorema do sanduíche. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $0 < |x - a| < \delta_1$. Logo, nessas condições, $L - \epsilon < f(x)$. De forma análoga, existe $\delta_2 > 0$ tal que $h(x) < L + \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta_2$. Pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$ para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. \square

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é **limitada** quando existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in X$.

Lema 5.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|g(x)| < M$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| < \epsilon/M$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $|f(x)g(x)| < \epsilon$. \square

Teorema 5.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então*

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = L/M$ desde que se tenha $M \neq 0$.

Demonstração. 1. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon/2$ e $|g(x) - M| < \epsilon/2$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $|f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \epsilon$.

2. Notamos que $f(x)g(x) - LM = f(x)[g(x) - M] + [f(x) - L]M$. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ tal que $L - 1 < f(x) < L + 1$ para todo $x \in (X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$. Logo a restrição de f a $(X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$ é uma função limitada. Portanto, usando o lema 5.5 e o item anterior, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x) - LM] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)[g(x) - M] + \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L]M = 0$.
3. Notamos que $1/g(x) - 1/M = [M - g(x)]/Mg(x)$. Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, segue que $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = |M|$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $|g(x)| > |M|/2$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, nessas condições, $1/|g(x)| < 2/|M|$, ou seja, a função $1/|g|$ é limitada. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} [1/g(x) - 1/M] = \lim_{x \rightarrow a} [M - g(x)]/Mg(x) = 0$. \square

Exemplos:

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f(x) = x^n$. Temos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^n$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
2. Se $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, então $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.
3. Se p e q são funções polinomiais e $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} p(x)/q(x) = p(a)/q(a)$. Se $p(a) = q(a) = 0$, nada pode ser dito de forma geral sobre o limite de $p(x)/q(x)$ quando x tende para a . Por exemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2/x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x/x = 1$. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 0} x/x^2$ não existe, pois se existisse e fosse $L \in \mathbb{R}$, então $1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (x/x^2)x = L \cdot 0 = 0$. Absurdo!

4. Tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5.1)$$

Podemos dar uma justificativa geométrica para esse resultado usando a circunferência trigonométrica. Percebemos que quando $|x|$ é pequeno, x é quase igual a $\sin x$. Uma prova da Eq. (5.1) só poderá ser dada depois de definir a função seno de forma analítica. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin x/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é chamada às vezes de **função sinc** (ver figura 5.1).

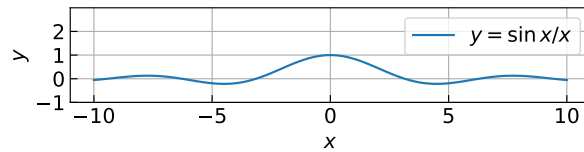


Figura 5.1: Gráfico da função sinc.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$. Vemos que para cada $x \in X$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. As funções $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas de **funções-coordenada** de f .

Teorema* 5.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, em que $L = (L_1, \dots, L_d)$, se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = L_j$, $j = 1, \dots, d$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L|_M < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, sob essas condições, $|f_j(x) - L_j| \leq |f(x) - L|_M < \epsilon$, $j = 1, \dots, d$. Reciprocamente, se $|f_j(x) - L_j| < \epsilon$, $j = 1, \dots, d$, para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L|_M < \epsilon$. \square

Corolário* 5.8. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$, $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ e $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$, tem-se que*

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} h(x)f(x) = \alpha L$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle L, M \rangle.$$

Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) para indicar que, dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ ($f(x) < -A$) para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$.

Teorema 5.9. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Tem-se que*

$$1. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ e } g(x) > c \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty;$$

$$2. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ e } g(x) > c > 0 \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty;$$

$$3. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = 0;$$

$$4. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = \infty.$$

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto que não é limitado superiormente (inferiormente) e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$. Diz-se que $L \in \mathbb{R}^d$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a ∞ ($-\infty$) se, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $x > A$ ($x < -A$). Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, pode-se ainda definir expressões similares a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Todos os teoremas, lemas e corolários anteriores valem da mesma forma para esses limites.

Exemplos:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x + 7}{4x^2 - 9x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{9}{x} + \frac{6}{x}} = \frac{3}{4}.$$

2. Tem-se que $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x)/x = 0$. Isso decorre diretamente de usar o teorema do sanduíche na desigualdade $-1/x \leq (\sin x)/x \leq 1/x$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação à direita (esquerda)** de X se existe $\delta > 0$ tal que $(a, a + \delta) \cap X \neq \emptyset$ ($(a - \delta, a) \cap X \neq \emptyset$). Nesse caso, escreveremos $a \in X'_+$ ($a \in X'_-$). Diz-se ainda que a é um **ponto de acumulação bilateral** se $a \in X'_+ \cap X'_-$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$ ($a \in X'_-$). Diz-se que L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a **pela direita (esquerda)** se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$). Nesse caso escreve-se que $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ ($\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$).

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Verifica-se facilmente que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$.

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$ não existe. Com efeito, podemos verificar que $\lim_{x \rightarrow 0+} |x|/x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0-} |x|/x = -1$.

Teorema 5.10. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Se f é monótona e limitada, então existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.*

Demonstração. Suponhamos que f seja crescente e consideremos o conjunto $A = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X, x > a\}$. Como $a \in X'_+$, $A \neq \emptyset$. Além disso, como f é limitada, A é limitado e, por conseguinte, existe $L = \inf A$. Dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in X$, $x_0 > a$, tal que $L \leq f(x_0) < L + \epsilon$. Pondo $\delta = x_0 - a > 0$, vemos que para todo $x \in X$ tal que $a < x < a + \delta$, tem-se que $L \leq f(x) \leq f(a + \delta) < L + \epsilon$, o que implica que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$. \square

Corolário 5.11 (da demonstração). *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto que não é limitado superiormente. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona e limitada superiormente, então existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. De forma análoga, se X não é limitado inferiormente e f é limitada inferiormente, então existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.*

Capítulo 6

Sequências de pontos no espaço euclidiano*

Uma **sequência** de pontos em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escreve-se x_n no lugar de $x(n)$. A sequência x é usualmente denotada listando seus termos x_1, x_2, \dots .

Diz-se que uma sequência x_1, x_2, \dots **converge** para um ponto $a \in \mathbb{R}^d$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ou seja, se, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n > A$. Nesse caso é comum escrever $x_n \rightarrow a$. Uma sequência que converge para um ponto de \mathbb{R}^d é dita **convergente**; caso contrário é dita **divergente**.

Vale ressaltar que todos os teoremas, lemas e corolários da seção anterior se aplicam da mesma forma para limites de sequências de pontos em \mathbb{R}^d , com a exceção do teorema 5.10 sobre limites laterais.

Se uma sequência de números reais x_1, x_2, \dots é monótona crescente (decrecente) e converge para um número $a \in \mathbb{R}$, escreveremos $x_n \uparrow a$ ($x_n \downarrow a$). O corolário 5.11 nos diz que toda sequência de números reais que é monótona e limitada é convergente.

Teorema 6.1. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Se $x_n \rightarrow a$, existe $A \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < 1$ para todo $n > A$. Logo, $|x_n| < |a| + 1$ para todo $n > A$. Assim, pondo $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_A|, |a| + 1\}$, temos que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Uma **subsequência** de x_1, x_2, \dots é uma sequência x_{l_1}, x_{l_2}, \dots , na qual l_1, l_2, \dots é uma sequência de números naturais estritamente crescente.

Teorema 6.2. *Se $x_n \rightarrow a$, então toda subsequência de x_1, x_2, \dots converge para a .*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n > A$. Dada uma subsequência x_{l_1}, x_{l_2}, \dots , como l_1, l_2, \dots é uma sequência de números naturais estritamente crescente, existe $B \in \mathbb{N}$ tal que $l_n > A$ para todo $n > B$. Portanto, se $n > B$, $|x_{l_n} - a| < \epsilon$. \square

Corolário 6.3 (da demonstração). *Se $x_n \rightarrow \infty$, para qualquer subsequência x_{l_1}, x_{l_2}, \dots tem-se que $x_{l_n} \rightarrow \infty$.*

Lema 6.4. Desigualdade de Bernoulli. *Dados $h \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(1+h)^n \geq 1 + nh$.*

Demonstração. Usamos indução em n . Se $n = 1$, OK. Supondo que o lema seja verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h,$$

ou seja, o lema é verdadeiro para $n+1$. Portanto, o lema é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbb{N}$. \square

Exemplos:

1. Tem-se que $1/n \downarrow 0$ em virtude do teorema 5.9.
2. A sequência $-1, 1, -1, 1, \dots$ é limitada mas é divergente. Com efeito, considerando os termos de índice ímpar obtemos a subsequência $-1, -1, \dots$ enquanto que considerando os termos de índice par obtemos $1, 1, \dots$.
3. Se $0 < x < 1$, então $x^n \downarrow 0$. Com efeito, a sequência x^1, x^2, \dots é estritamente decrescente e limitada. Logo, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x^n \downarrow a$. Como $x^{2n} = x^n x^n$ e a subsequência x^2, x^4, \dots converge para a , segue que $a = a^2$. Logo, $a(1-a) = 0$. Como $a \leq x$, pois o contrário implicaria que $x^n > x$ para n suficientemente grande, segue que $a = 0$.
4. Se $|x| < 1$, então $x^n \rightarrow 0$. De fato, usando o teorema do sanduíche na desigualdade $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$, temos que $x^n \rightarrow 0$, pois $|x|^n \downarrow 0$.
5. Se $|x| > 1$, então a sequência x^1, x^2, \dots é divergente. Com efeito, pela desigualdade de Bernoulli, $|x|^n \geq 1 + n(|x| - 1)$. Logo, a sequência x_1, x_2, \dots não é limitada e, por conseguinte, é divergente.
6. A convergência ou divergência da sequência x^1, x^2, \dots pode ser visualizada analisando o gráfico das funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ (ver figura 3.3).
7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = 1 + q + \dots + q^n$. Se $q \neq 1$, temos que $x_n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$. Logo, $x_n \rightarrow 1/(1 - q)$ se $|q| < 1$. Se $|q| \geq 1$, a sequência x_1, x_2, \dots é divergente.
8. Se $x > 0$, então $x^{1/n} \rightarrow 1$. Com efeito, se $x \geq 1$, então $x^{1/n} \geq x^{1/(n+1)} \geq 1$; se $0 < x < 1$, então $x^{1/n} < x^{1/(n+1)} < 1$. Logo, em qualquer caso, a sequência $x^{1/1}, x^{1/2}, \dots$ é monótona e limitada. Isso implica que ela é convergente. Suponhamos que $x^{1/n} \rightarrow a$. Da relação $x^{1/n} = x^{1/2n} x^{1/2n}$ segue que $a = a^2$. Como $a \neq 0$, segue que $a = 1$. A convergência da sequência $x^{1/1}, x^{1/2}, \dots$ pode ser visualizada analisando o gráfico das funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{1/n}$ (ver figura 3.5).
9. **O número e :** Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n = 1 + 1/1! + \dots + 1/n!$. Se $n > 2$, temos que

$$2 \leq s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3.$$

Logo, s_1, s_2, \dots é uma sequência limitada. Além disso, ela é estritamente crescente. Portanto, a sequência s_1, s_2, \dots é convergente, ou seja, existe $e \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \uparrow e$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n = (1 + 1/n)^n$. Temos que

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots [n - (n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Logo, a sequência t_1, t_2, \dots é estritamente crescente. Além disso, $t_n \leq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por conseguinte, a sequência t_1, t_2, \dots é convergente. Suponhamos que $t_n \uparrow a$. Logo, segue da relação $t_n \leq s_n$ que $a \leq e$. Por outro lado, se $n \leq m$, temos que

$$t_m \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right).$$

Tomando o limite $m \rightarrow \infty$, temos que

$$a \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n.$$

Isso implica que $a \leq e$. Portanto, $a = e$.

10. Tem-se que $n^{1/n} \rightarrow 1$. Com efeito, se $n \geq 3$, sabemos que $(1 + 1/n)^n < 3 \leq n$ e isso implica que $(n+1)^{1/(n+1)} < n^{1/n}$. Logo, a sequência $3^{1/3}, 4^{1/4}, \dots$ é estritamente decrescente e é limitada. Consequentemente, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $n^{1/n} \rightarrow a$. Da relação

$$n^{1/n} = \frac{(2n)^{1/2n} (2n)^{1/2n}}{2^{1/n}}$$

segue que $a = a^2$. Como $a \geq 1$, segue que $a = 1$.

Lema 6.5. *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja x_1, x_2, \dots uma sequência limitada de números reais. Vamos dizer que x_p é um termo destacado dessa sequência se $x_p > x_n$ para todo $n > p$. Denotemos por D o conjunto dos índices dos termos destacados da sequência x_1, x_2, \dots . Se D é finito, então $D = \{d_1 < \dots < d_p\}$. Se $l_1 > d_p$, então x_{l_1} não é um termo destacado e, por conseguinte, existe um índice $l_2 > l_1$ tal que $x_{l_1} \leq x_{l_2}$. Pela sua vez x_{l_2} não é um termo destacado e, por conseguinte, existe $l_3 > l_2$ tal que $x_{l_2} \leq x_{l_3}$. Dessa maneira, podemos construir uma subsequência x_{l_1}, x_{l_2}, \dots , a qual é monótona crescente e limitada. Logo, essa subsequência é convergente. Por outro lado, se D é infinito, então $D = \{d_1 < d_2 < \dots\}$. Logo, a subsequência x_{d_1}, x_{d_2}, \dots é estritamente decrescente e limitada. Portanto, ela é convergente. \square

Teorema 6.6. Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Toda sequência limitada de pontos em \mathbb{R}^d possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja x_1, x_2, \dots uma sequência limitada de pontos em \mathbb{R}^d e suponhamos que $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{dn})$. Para cada $j \in \{1, \dots, d\}$, a sequência de números reais x_{j1}, x_{j2}, \dots é claramente limitada. Logo, pelo lema 6.5, a sequência x_{11}, x_{12}, \dots possui uma subsequência convergente $x_{1l_1}, x_{1l_2}, \dots$. Por outro lado, a subsequência $x_{2l_1}, x_{2l_2}, \dots$ é também limitada e, por conseguinte, possui uma subsequência convergente $x_{2m_1}, x_{2m_2}, \dots$. Além disso, a subsequência $x_{1m_1}, x_{1m_2}, \dots$ possui o mesmo limite do que a sequência $x_{1l_1}, x_{1l_2}, \dots$. Prosseguindo dessa forma, para cada $j \in \{1, \dots, d\}$ vamos encontrar uma subsequência $x_{jz_1}, x_{jz_2}, \dots$ que é convergente. Assim, a subsequência x_{z_1}, x_{z_2}, \dots será convergente. \square

Dada uma sequência de números reais x_1, x_2, \dots , sejam $a_n = \inf_{k \geq n} x_k$ e $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Define-se o **limite superior (inferior)** da sequência x_1, x_2, \dots por $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf b_n$ ($\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup a_n$). Em outras palavras, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$ ($\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k$).

Lema 6.7. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio. Se $B \subset A$, então $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$.*

Demonstração. Temos que $\inf B \leq x \leq \sup B$ para todo $x \in B$. Como $\sup A$ é uma cota superior de A , temos que $x \leq \sup A$ para todo $x \in B$ e, por conseguinte, $\sup B \leq \sup A$. Um raciocínio similar nos leva à desigualdade $\inf A \leq \inf B$. \square

Teorema 6.8. *Para qualquer sequência de números reais x_1, x_2, \dots tem-se que $-\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \infty$.*

Demonstração. Se a sequência x_1, x_2, \dots não é limitada superiormente (inferiormente), então $\sup_{k \geq n} x_k = \infty$ ($\inf_{k \geq n} x_k = -\infty$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ($\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$). Por outro lado, pondo $a_n = \inf_{k \geq n} x_k$ e $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$. Segue daqui que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, b_n é uma cota superior de $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Logo, $\sup A \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. \square

Teorema 6.9. *Seja x_1, x_2, \dots uma sequência de números reais. Existem subsequências x_{l_1}, x_{l_2}, \dots e x_{m_1}, x_{m_2}, \dots tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{l_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demonstração. Seja $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in [-\infty, \infty]$. Se $\alpha = -\infty$, o conjunto $\{\sup_{k \geq n} x_k : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado inferiormente. Logo, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq \sup_{k \geq N} x_k < -A$ para todo $n > N$, ou seja, $x_n \rightarrow -\infty$. Se $\alpha = \infty$, então $\sup_{k \geq n} x_k = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência x_1, x_2, \dots não é limitada superiormente. Assim, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{l_1} > 1$ e para cada $n > 1$ podemos encontrar $l_n > l_{n-1}$ tal que $x_{l_n} > n$. Dessa maneira, $x_{l_n} \rightarrow \infty$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, dado $\epsilon > 0$, temos que $\alpha - \epsilon < \alpha \leq \sup_{k \geq n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{l_1} \leq \sup_{k \geq 1} x_k$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $l_n > l_{n-1}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{l_n} \leq \sup_{k \geq l_{n-1}} x_k$. Assim, $\alpha - \epsilon < x_{l_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{k \geq N} x_k \leq x_n < \alpha + \epsilon$ para todo $n > N$. Logo, $\alpha - \epsilon < x_{l_n} < \alpha + \epsilon$ para todo $n > N$, ou seja, $x_{l_n} \rightarrow \alpha$. De forma análoga pode-se provar que existe uma subsequência x_{m_1}, x_{m_2}, \dots tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. \square

Teorema 6.10. *Seja x_1, x_2, \dots uma sequência de números reais. Se x_{l_1}, x_{l_2}, \dots é uma subsequência tal que $x_{l_n} \rightarrow a$, então $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ e suponhamos que $x_{l_n} \rightarrow a > \alpha$. Logo, existe $c \in (\alpha, a)$ tal que $c > \alpha$. Isso implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c > \sup_{k \geq N} x_k \geq x_n$ para todo $n > N$. Porém, segue daqui que toda subsequência convergente de x_1, x_2, \dots converge para um limite $\leq c$. Contradição! Portanto, devemos ter $a \leq \alpha$. De forma similar pode-se provar que $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$. \square

Teorema 6.11. *Seja x_1, x_2, \dots uma sequência de números reais. Tem-se $x_n \rightarrow a$ com $a \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Como $x_n \rightarrow a$, toda subsequência de x_1, x_2, \dots converge para a . Como existem subsequências de x_1, x_2, \dots que convergem para $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, segue que $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. (\Leftarrow) Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $a - \epsilon < \inf_{k \geq n_1} x_k \leq a \leq \sup_{k \geq n_2} x_k < a + \epsilon$. Logo, pondo $N = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $a - \epsilon < \inf_{k \geq N} x_k \leq \sup_{k \geq N} x_k < a + \epsilon$. Portanto, $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ para todo $n > N$, ou seja, $x_n \rightarrow a$. \square

Capítulo 7

Séries de números reais*

Uma **série** de números reais é a soma dos termos de uma sequência de números reais a_1, a_2, \dots , a qual é denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $s_n = a_1 + \dots + a_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Se o limite do lado direito existe, a série é dita **convergente**; caso contrário, ela é dita **divergente**. A sequência s_1, s_2, \dots é chamada de sequência das **somas parciais** da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uma série de números não-negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, existe $M > 0$ tal que $\sum_{j=1}^n a_n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, nesse caso a sequência das somas parciais da série é monótona crescente e limitada.

Se uma série de números não-negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (divergente), escreve-se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$).

Teorema 7.1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então $a_n \rightarrow 0$.

Demonstração. Seja s_1, s_2, \dots a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $s_n \rightarrow L$, então $s_{n-1} \rightarrow L$. Logo, $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow 0$. \square

Exemplos:

1. Dado $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é chamada de **série geométrica**. Na seção 6 vimos que a série geométrica é convergente se, e somente, se $|x| < 1$. Nesse caso, temos também que $x^n \rightarrow 0$.
2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente, pois $(-1)^n \not\rightarrow 0$.
3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ é chamada de **série harmônica**. Seja $s_n = 1/1 + \dots + 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Vemos que

$$\begin{aligned} s_{2m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \frac{1}{2^m} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a sequência s_{2^1}, s_{2^2}, \dots não é limitada. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ pode-se encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \geq 1 + m > n$, segue que a sequência s_1, s_2, \dots não

é limitada. Portanto, a série harmônica é divergente, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = \infty$, mesmo que se tenha $1/n \downarrow 0$.

Teorema 7.2. Critério de comparação. *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de números não-negativos. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Por outro lado, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Demonstração. Sejam $s_n = a_1 + \dots + a_n$ e $t_n = b_1 + \dots + b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $M > 0$ tal que $t_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $s_n \leq t_n \leq M$ e, por conseguinte, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, a sequência s_1, s_2, \dots não é limitada. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $l_n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq s_{l_n} \leq t_{l_n}$. Assim, a sequência t_1, t_2, \dots possui uma subsequência que não é limitada e, por conseguinte, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$. \square

Exemplo: Dado $r \in \mathbb{Q}$, consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r)$. Se $r < 1$, temos que $1/n^r > 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = \infty$, pelo critério de comparação, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r) = \infty$. Se $r > 1$, seja s_1, s_2, \dots a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} s_{2^m-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} \right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r} \right) + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^r} \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^r} \right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} \right) + \dots + \frac{1}{(2^{m-1})^r} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{(2^{r-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{r-1})^{m-1}} \\ &\leq \frac{1}{1 - 1/2^{r-1}} \end{aligned}$$

Logo, a sequência s_1, s_2, \dots possui uma subsequência limitada. Isso implica que a própria sequência s_1, s_2, \dots é limitada, pois ela é monótona. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r) < \infty$ se $r > 1$.

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita **absolutamente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, diz-se que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série **condicionalmente convergente**.

Teorema 7.3. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Definindo $p_n = \max\{a_n, 0\}$ e $q_n = \max\{-a_n, 0\}$, temos que $p_n, q_n \geq 0$, $|a_n| = p_n + q_n$ e $a_n = p_n - q_n$. Como $p_n, q_n \leq |a_n|$, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$. \square

Corolário 7.4. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série de números não-negativos. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ e $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.*

Exemplo: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n^2$ é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, isso segue de observar que $|\sin(nx)/n^2| \leq 1/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) < \infty$.

Teorema 7.5. Critério da raiz. *Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente. Por outro lado, se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*

Demonstração. Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < c < 1$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sup_{k \geq N} \sqrt[k]{|a_k|} < c$ para todo $n \geq N$. Logo, $|a_n| < c^n$ para todo $n \geq N$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} c^n < \infty$, segue do critério de comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Por outro lado, se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, existe uma subsequência $\sqrt[l_1]{|a_{l_1}|}, \sqrt[l_2]{|a_{l_2}|}, \dots$ tal que $\sqrt[l_i]{|a_{l_i}|} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, $|a_n| \not\rightarrow 0$, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. \square

Exemplos:

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ é convergente, pois $\sqrt[n]{1/n^n} = 1/n \rightarrow 0$.
2. A série harmônica é divergente e $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$. Por outro lado, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ é convergente e $\sqrt[n]{1/n^2} \rightarrow 1$.

Teorema 7.6. Critério da razão. Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente. Por outro lado, se $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < c < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}/a_n| \leq A_N < c$ para todo $n \geq N$. Logo,

$$\left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| < c, \quad \left| \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \right| < c, \quad \dots, \quad \left| \frac{a_{N+n-N}}{a_{N+n-N-1}} \right| < c.$$

Multiplicando essas desigualdades, temos $|a_n/a_N| < c^{n-N}$ para todo $n \geq N$. Logo, $|a_n| < |a_N|c^{n-N}$ para todo $n \geq N$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_N|c^{n-N} < \infty$, segue do critério de comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Se, por outro lado, temos que $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $|a_n| \not\rightarrow 0$, pois $|a_n| \geq |a_1| > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, nesse caso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. \square

Exemplos:

1. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $x > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^k/x^n$ é convergente pois

$$\frac{(n+1)^k}{x^{n+1}} \frac{x^n}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{x},$$

em que o lado direito converge a $1/x < 1$. A convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^k/x^n$ também pode ser provada usando o critério da raiz. Com efeito, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k/x^n} = 1/x < 1$.

2. A série harmônica é divergente e $(n+1)/n \rightarrow 1$. Por outro lado, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ é convergente e $(n+1)^2/n^2 \rightarrow 1$.
3. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sejam $a_{2m-1} = 1/m^m$ e $a_{2m} = 2/m^m$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, pois

$$\sqrt[2m-1]{a_{2m-1}} = \frac{1}{m^{m/(2m-1)}} \leq \frac{1}{m^{1/2}},$$

e $\sqrt[2m]{a_{2m}} = m^{1/2}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e, por conseguinte, $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0 < 1$. No entanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 2m - 1 \\ \frac{m^m}{2(m+1)^{m+1}} & \text{se } n = 2m \end{cases}$$

e, por conseguinte, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 2$. Logo, o teste da razão é inconclusivo.

Os exemplos anteriores ilustram em particular que o critério da raiz é mais forte do que o critério da razão.

Teorema 7.7. *Para qualquer sequência de números reais a_1, a_2, \dots tem-se que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Demonstração. Suponhamos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > c > \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$. Da segunda desigualdade segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c > \sup_{n \geq N} |a_{n+1}/a_n| \geq |a_{n+1}|/|a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, sob essa condição, temos que $c^{n-N} > |a_n|/|a_N|$ e, por conseguinte, $c \sqrt[n]{|a_N|/c^N} > \sqrt[n]{|a_n|}$. Como o lado esquerdo dessa desigualdade tende a c quando $n \rightarrow \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $c + \epsilon > c \sqrt[n]{|a_N|/c^N} > \sqrt[n]{|a_n|}$ para todo $n > A$. Por outro lado, existe $\delta > 0$ tal que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > c + \delta > c$. Logo, podemos encontrar uma subsequência $\sqrt[1]{|a_{l_1}|}, \sqrt[2]{|a_{l_2}|}, \dots$ tal que $\sqrt[l_n]{|a_{l_n}|} > c + \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Contradição! Portanto, deve-se ter $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$. A desigualdade envolvendo os limites inferiores pode ser provada de forma análoga. \square

Teorema 7.8. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente. Para qualquer bijeção $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tem-se que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\phi(n)}| < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Demonstração. Consideremos primeiramente que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, seja $m = \max\{\phi(1), \dots, \phi(n)\}$. Logo, $\sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} \leq \sum_{j=1}^m a_j$. Como $\sum_{j=1}^m a_j \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ é convergente e que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por outro lado, se $n = \max\{\phi^{-1}(1), \dots, \phi^{-1}(m)\}$, temos que $\sum_{j=1}^m a_j \leq \sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$. Se agora a_1, a_2, \dots é uma sequência de números não necessariamente não-negativos, definindo $p_n = \max\{a_n, 0\}$ e $q_n = \max\{-a_n, 0\}$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (p_{\phi(n)} - q_{\phi(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Capítulo 8

Funções contínuas

Ingenuamente, uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deve ter um gráfico que é uma curva que não tem saltos. Isso quer dizer que uma variação pequena de x deve provocar também uma variação pequena no valor de $f(x)$. Passemos para as definições agora.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é **contínua** em um ponto $a \in X$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $|x - a| < \delta$. A continuidade de f no ponto a não depende do par de normas usadas na definição anterior (euclidiana, do máximo, da soma). Usando a terminologia de bolas abertas, temos que f é contínua no ponto a se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$ sempre que $x \in B(a, \delta) \cap X$. Se f é contínua em todo ponto de X , diz-se simplesmente que é uma função contínua.

Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Diz-se que $a \in X$ é um **ponto isolado** de X se a não é um ponto de acumulação de X , ou seja, se existe $\delta > 0$ tal que $X \cap B(a, \delta) \subset \{a\}$. Se X não tem pontos de acumulação, diz-se que X é um **conjunto discreto**. Exemplos: \mathbb{N} e \mathbb{Z} .

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in X$ é um ponto isolado de X , toda função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua no ponto a . Com efeito, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X = \{a\}$. Logo, dado $\epsilon > 0$, tem-se que $0 = |f(x) - f(a)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $|x - a| < \delta$.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in X \cap X'$, a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Teorema 8.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto $a \in X$, então $f \pm g$ e fg são contínuas no ponto a . Além disso, se $g(a) \neq 0$, f/g é contínua no ponto a .*

Demonstração. Se a é um ponto isolado, OK. Se $a \in X'$, então o teorema é consequência do teorema 5.6. \square

Exemplo: As funções $f(x) = c$ e $g(x) = x$ são claramente contínuas. Logo, pelo teorema 8.1, toda função polinomial é contínua e toda função racional é contínua no seu domínio.

Teorema* 8.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, as funções-coordenada de f são contínuas no ponto a .*

Demonstração. Consequência do teorema 5.7. \square

Corolário* 8.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto $a \in X$, então $|f|$, $f \pm g$, hf , $\langle f, g \rangle$ são contínuas no ponto a .*

Diz-se que um conjunto $G \subset \mathbb{R}^d$ é um **conjunto aberto** se para cada $x \in G$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset G$.

Teorema* 8.4. *Toda bola aberta de \mathbb{R}^d é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja $p \in B(a, r)$ e consideremos $\epsilon = r - |p - a|$. Vamos provar que $B(p, \epsilon) \subset B(a, r)$. Se $x \in B(p, \epsilon)$, então $|x - a| \leq |x - p| + |p - a| < \epsilon + |p - a| = r$. Portanto, $B(p, \epsilon) \subset B(a, r)$. \square

Teorema* 8.5. *Considerando subconjuntos de \mathbb{R}^d , tem-se que*

1. \mathbb{R}^d e \emptyset são conjuntos abertos;
2. a união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto;
3. a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Demonstração. 1. Se \emptyset não fosse aberto, existiria $a \in \emptyset$ tal que $B(a, r) \not\subset \emptyset$ para todo $r > 0$. Absurdo!

2. Seja G_α um conjunto aberto para cada elemento α de um conjunto arbitrário I e seja $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Se $a \in G$, existe $\alpha \in I$ tal que $a \in G_\alpha$. Como G_α é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset G_\alpha \subset G$. Portanto, G é aberto.
3. Sejam G_1 e G_2 dois conjuntos abertos. Se $a \in G_1 \cap G_2$, então existem $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(a, r_1) \subset G_1$ e $B(a, r_2) \subset G_2$. Considerando $r = \min\{r_1, r_2\}$, temos que $B(a, r) \subset G_1 \cap G_2$. Portanto, $G_1 \cap G_2$ é aberto. \square

Define-se o **fecho** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ como o conjunto $\overline{X} = X \cup X'$. Diz-se ainda que o conjunto X é **fechado** se $\overline{X} = X$.

Teorema* 8.6. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$ é fechado se, e somente se, F^c é aberto.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $a \in F^c$, então $a \notin F'$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap F = \emptyset$. Isso implica que $B(a, r) \subset F^c$. Portanto, F^c é aberto. (\Leftarrow) Se $a \in F'$, então $B(a, r) \cap F \neq \emptyset$ para qualquer $r > 0$. Logo, $B(a, r) \not\subset F^c$ para todo $r > 0$. Como F^c é aberto, segue que $a \notin F^c$, ou seja, $a \in F$. Portanto, F é fechado. \square

Corolário* 8.7. *Considerando subconjuntos de \mathbb{R}^d , tem-se que*

1. \mathbb{R}^d e \emptyset são conjuntos fechados;
2. a interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado;
3. a união de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Teorema* 8.8. *O fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Se $a \in \overline{X}^c$, então $a \notin X$ e $a \notin X'$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap X = \emptyset$. Como $B(a, r)$ é um conjunto aberto, para cada $x \in B(a, r)$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(x, \epsilon_x) \subset B(a, r)$. Logo, $B(x, \epsilon_x) \cap X = \emptyset$ para todo $x \in B(a, r)$. Isso implica que nenhum $x \in B(a, r)$ é ponto de acumulação de X e, por conseguinte, $B(a, r) \cap \overline{X} = \emptyset$. Logo, $B(a, r) \subset \overline{X}^c$. Portanto, \overline{X}^c é aberto. \square

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$, diz-se que $A \subset X$ é **aberto em X** se para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap X \subset A$. Por outro lado, diz-se que A é **fechado em X** se $\overline{A} \cap X = A$.

Teorema* 8.9. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, existe um conjunto aberto $G \subset \mathbb{R}^d$ tal que $A = G \cap X$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap X \subset A$. O conjunto $G = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$ é aberto e tem-se que $G \cap X = A$. (\Leftarrow) Se $A = G \cap X$, no qual $G \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto aberto, então para cada $a \in A$ tem-se que $a \in G$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset G$ e, por conseguinte, $B(a, r) \cap X \subset A$. \square

Corolário* 8.10. *Dado $X \subset \mathbb{R}^d$, tem-se que*

1. *um conjunto $A \subset X$ é fechado em X se, e somente se, $X \setminus A$ é aberto em X ;*
2. *X e \emptyset são abertos e fechados em X ;*
3. *a união (interseção) arbitrária de conjuntos abertos (fechados) em X é um conjunto aberto (fechado) em X ;*
4. *a interseção (união) de dois conjuntos abertos (fechados) em X é um conjunto aberto (fechado) em X .*

Dada uma função $f : X \rightarrow Y$, define-se a **imagem inversa** de um conjunto $B \subset Y$ por f como o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Teorema* 8.11. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $A, B \subset Y$. Tem-se que*

1. *se $A \subset B$, então $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;*
2. *$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;*
3. *$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;*
4. *$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.*

Teorema* 8.12. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(G)$ é um conjunto aberto em X para qualquer aberto $G \subset \mathbb{R}^d$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $G \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto. Se $a \in f^{-1}(G)$, então $b = f(a) \in G$. Como G é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(b, \epsilon) \subset G$. Por outro lado, como f é contínua no ponto a , existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in B(b, \epsilon)$ sempre que $x \in B(a, \delta) \cap X$. Logo, $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(B(b, \epsilon)) \subset f^{-1}(G)$. Portanto, $f^{-1}(G)$ é aberto em X . (\Leftarrow) Seja $a \in X$. Dado $\epsilon > 0$, ponhamos $G = B(f(a), \epsilon)$. Como G é aberto, $f^{-1}(G)$ é aberto em X e, além disso, $a \in f^{-1}(G)$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(G)$. Dessa maneira, $x \in B(a, \delta) \cap X$ implica que $f(x) \in G$. Portanto, f é contínua no ponto a . \square

Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Diz-se que os conjuntos $A, B \subset X$ formam uma **cisão** de X se A e B são abertos em X , $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$. Claramente X e \emptyset formam uma cisão de X , a qual é chamada de **cisão trivial**.

Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é **conexo** se só admite a cisão trivial.

Teorema* 8.13. *Os únicos subconjuntos conexos de \mathbb{R} são os intervalos.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo, existem $a, b \in X$ e $x \in X^c$ tais que $a < x < b$. Logo, os conjuntos $A = (-\infty, x) \cap X$ e $B = (x, \infty) \cap X$ são abertos em X , $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$. Assim, A e B formam uma cisão de X e, por conseguinte, X não é conexo. Consideremos agora que $X \subset \mathbb{R}$ seja um intervalo e suponhamos que existam conjuntos não-vazios $A, B \subset X$ que formem uma cisão não-trivial de X . Se $a \in A$, $b \in B$ e $a < b$, então $x_1 = (a + b)/2 \in X$. Logo, só uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x_1 \in A$ ou $x_1 \in B$. No primeiro caso definimos o intervalo $I_1 \subset X$ como $I_1 = [x_1, b]$ e no segundo como $I_1 = [a, x_1]$. Dessa maneira, I_1 tem comprimento $(b - a)/2$ e uma das extremidades de I_1 pertence a A e a outra a B . Repetindo esse procedimento, podemos encontrar intervalos fechados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ tais que I_n tem comprimento $(b - a)/2^n$ e uma das suas extremidades pertence a A e a outra a B . Pelo teorema dos intervalos encaixados existe $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $I_n = [a_n, b_n]$, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n = (b - a)/2^n < \epsilon$. Logo, $c - a_n < \epsilon$ e $b_n - c < \epsilon$, o que implica que $c - \epsilon < a_n \leq c \leq b_n < c + \epsilon$, ou seja, $a_n, b_n \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$. Como A e B são abertos em X , segue que $c \notin A$ e $c \notin B$. Absurdo! Portanto, X deve ser conexo. \square

Teorema* 8.14. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua e X é conexo, então $f(X)$ é conexo.*

Demonstração. Sejam $Y = f(X)$ e suponhamos que $A, B \subset Y$ formem uma cisão de Y . Como A e B são abertos em Y , existem conjuntos abertos $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^d$ tais que $A = Y \cap G_1$ e $B = Y \cap G_2$. Logo, $f^{-1}(A) = f^{-1}(G_1)$ e $f^{-1}(B) = f^{-1}(G_2)$, os quais são abertos em X , pelo teorema 8.12. Além disso, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ e $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$, ou seja, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ formam uma cisão de X . Como X é conexo, deve-se ter $f^{-1}(A) = X$ e $f^{-1}(B) = \emptyset$ ou vice-versa. Considerando o primeiro caso, segue que $B = \emptyset$ e $A = Y$. Portanto, Y é conexo. \square

Corolário 8.15. Teorema do valor intermediário. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a imagem de f é um intervalo. Em outras palavras, para qualquer d no intervalo fechado de extremidades $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*

Exemplos:

1. A equação $x^4 - 6x + 3 = 0$ tem pelo menos uma solução. Com efeito, a função $p(x) = x^4 - 6x + 3$ é contínua e podemos verificar que $p(0) = 3$ e $p(1) = -2$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.
2. **Teorema do ponto fixo de Brouwer** em uma dimensão: Se $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma função contínua, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Com efeito, se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, OK. Se isso não acontece, então $f(a) - a > 0$ e $f(b) - b < 0$. Como a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$ é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$.

Lema* 8.16. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e injetiva, então ela é monótona.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que $I = [a, b]$ e suponhamos que $f(a) < f(b)$. Devemos ter que f é estritamente crescente. Com efeito, se existissem $x, y \in [a, b]$ tais que $x < y$ e $f(x) > f(y)$, teríamos duas possibilidades: $f(x) > f(y) > f(a)$ ou $f(b) > f(a) > f(y)$. No primeiro caso, pelo teorema do valor intermediário, existiria $x_1 \in [a, x]$ tal que $f(x_1) = f(y)$; no segundo caso existiria $x_2 \in [y, b]$ tal que $f(x_2) = f(a)$.

Assim, ambos casos contradizem a injetividade de f . Logo, f deve ser estritamente crescente. Analogamente podemos provar que $f(a) > f(b)$ implica que f é estritamente decrescente. Consideremos agora que I seja um intervalo arbitrário. Se f não fosse monótona, existiriam $a, b, c, d \in I$ tais que $a < b$, $c < d$, $f(a) < f(b)$ e $f(c) > f(d)$. Do que foi provado anteriormente segue que temos dois casos: $a < b \leq c < d$ ou $c < d \leq a < b$. No primeiro caso, se $f(a) < f(d)$ ($f(a) > f(d)$), f seria estritamente crescente (decrescente) em $[a, d]$, contradizendo o fato de ela ser estritamente decrescente (crescente) em $[c, d]$ ($[a, b]$). De forma análoga podemos verificar que o segundo caso também nos leva a uma contradição. Portanto, f deve ser monótona. \square

Teorema 8.17. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \rightarrow J$ é uma bijeção contínua, sua inversa é contínua e monótona.*

Demonstração. Pelo lema 8.16, f é monótona. Suponhamos que f seja estritamente crescente e denotemos a sua inversa por g . Se g não fosse estritamente crescente, existiriam $y_1, y_2 \in J$ tais que $y_1 < y_2$ e $g(y_1) > g(y_2)$. Porém, isso implicaria que $y_1 = f(g(y_1)) > f(g(y_2)) = y_2$. Contradição! Portanto, g deve ser estritamente crescente. Para provar que g é contínua, consideremos um conjunto $A \subset I$ aberto em I . Notamos que $g^{-1}(A) = f(A)$. Se $b \in f(A)$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como A é aberto em I , existe $\delta > 0$ tal que $B = (a - \delta, a + \delta) \cap I \subset A$. Logo, B é um intervalo e, por conseguinte, $f(B)$ também é. Se b é uma extremidade de $f(B)$, então a é uma extremidade de B devido a que f é estritamente crescente. Logo, a é uma extremidade de I e, por conseguinte, b é uma extremidade de J . Portanto, considerando um número positivo ϵ menor do que o comprimento do intervalo $f(B)$, temos que $(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap J \subset f(B) \subset f(A)$, o que implica que $f(A)$ é aberto em J . Se b não é uma extremidade de $f(B)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subset f(B) \subset f(A)$. Logo, $f(A)$ é aberto em J . Portanto, em qualquer um dos casos, $g^{-1}(A) = f(A)$ é aberto em J e, por conseguinte, g é contínua. \square

Uma bijeção contínua cuja inversa é também contínua é chamada de um **homeomorfismo**.

Exemplo: Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^n$ é contínua e injetiva. Logo, pelo lema 8.16, ela é monótona. Como $0^n < 1^n$, segue que f é estritamente crescente. A função f é sobrejetiva, pois f é contínua, $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Logo, f é uma bijeção e, pelo teorema 8.17, sua inversa $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida por $f^{-1}(y) = y^{1/n}$, é contínua e estritamente crescente. Assim, temos provado em particular a existência e unicidade da raiz n -ésima de um número não-negativo.

Teorema 8.18. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua no ponto $a \in X$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma função contínua no ponto $b = f(a)$, então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a .*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ para todo $y \in Y$ satisfazendo a condição $|y - b| < \eta$. Por outro lado, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \eta$ para todo $x \in X$ que satisfaz a condição $|x - a| < \delta$. Portanto, nessas condições temos que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$. \square

Exemplos:

1. Tem-se que $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 - 2x} = 0$. Com efeito, a função $f(x) = x^2 - 2x$ é contínua no ponto 2 e a função $g(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua no ponto 0. Logo, $g \circ f$ é contínua no ponto 2 e, por conseguinte, $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = g(f(2)) = 0$.

2. Tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(\sin x)/x} = 1$. Com efeito, a função

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua no ponto 0 e a função $g(x) = \sqrt{x}$ é contínua no ponto 1. Logo, $g \circ f$ é contínua no ponto 0 e, por conseguinte, $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0)) = 1$. Desse exemplo podemos concluir que, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, e g é uma função contínua no ponto L , então $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(L)$, mesmo que a não pertença ao domínio de f .

Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é **limitado** se existe $c > 0$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$.

Diz-se que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^d$ é **compacto** se é fechado e limitado. Por exemplo, qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto. Além disso, é claro que todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto.

Teorema* 8.19. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^d$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em K possui uma subsequência que converge para um ponto de K .*

Demonstração. (\Rightarrow) Se x_1, x_2, \dots é uma sequência de pontos em K , ela é limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência convergente x_{l_1}, x_{l_2}, \dots . Seja $a \in \mathbb{R}^d$ tal que $x_{l_n} \rightarrow a$. Logo, $B(a, \epsilon) \cap K \neq \emptyset$ para qualquer $\epsilon > 0$. Como K é fechado, segue que $a \in K$. (\Leftarrow) Se K não fosse limitado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in K$ tal que $|x_n| > n$. Logo, a sequência x_1, x_2, \dots não possuiria subsequência limitada e, por conseguinte, convergente. Contradição! Portanto, K deve ser limitado. Se K não fosse fechado, existiria $a \in K' \setminus K$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in K \cap B(a, 1/n)$, ou seja, $|x_n - a| < 1/n$. Logo, $|x_n - a| \rightarrow 0$ e, por conseguinte, $x_n \rightarrow a$. Dessa maneira, toda subsequência de x_1, x_2, \dots converge para $a \in K^c$. Contradição! Portanto, K deve ser fechado. \square

Teorema* 8.20. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua em um ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_1, x_2, \dots \in X$ tal que $x_n \rightarrow a$, tem-se que $f(x_n) \rightarrow f(a)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $|x - a| < \delta$. Se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow a$, então existe $A > 0$ tal que $|x_n - a| < \delta$ para todo $n > A$. Assim, se $n > A$, $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$. Portanto, $f(x_n) \rightarrow f(a)$. (\Leftarrow) Se f não fosse contínua no ponto a , existiria $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, pode-se encontrar $x_n \in X \cap B(a, 1/n)$ satisfazendo a condição $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Logo, temos que $x_n \rightarrow a$ mas $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. Contradição! Portanto, f deve ser contínua no ponto a . \square

Exemplo: A função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua no ponto 0 para qualquer valor da constante $c \in \mathbb{R}$ (ver figura 8.1). Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $x_n = 2/(4n + 1)\pi$ e $y_n = 2/(4n + 3)\pi$. Logo, $x_n \downarrow 0$ e $y_n \downarrow 0$; porém $f(x_n) \rightarrow 1$ e $f(y_n) \rightarrow -1$.

Teorema* 8.21. *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto. Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua, então $f(K)$ é compacto.*

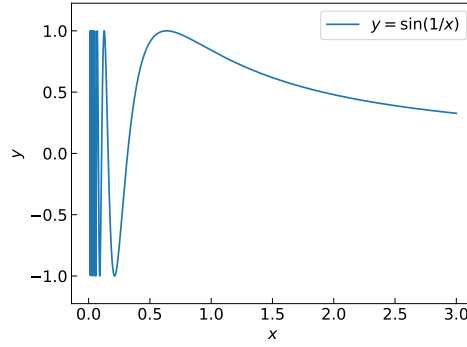


Figura 8.1: Gráfico da função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$.

Demonstração. Seja y_1, y_2, \dots uma sequência de pontos em $f(K)$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como K é compacto, a sequência x_1, x_2, \dots possui uma subsequência x_{l_1}, x_{l_2}, \dots que converge para um ponto $a \in K$. Logo, como f é contínua, $f(x_{l_n}) \rightarrow f(a)$. Assim, a subsequência y_{l_1}, y_{l_2}, \dots é convergente e, por conseguinte, $f(K)$ é compacto. \square

Corolário 8.22. Teorema de Weierstrass. *Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto compacto. Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então ela atinge seus valores mínimo e máximo, ou seja, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.*

Exemplo: A função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ não tem um valor máximo nem um valor mínimo.

Teorema* 8.23. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto e $L \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : K \rightarrow L$ é uma bijeção contínua, então $f^{-1} : L \rightarrow K$ é contínua.*

Demonstração. Seja y_1, y_2, \dots uma sequência de pontos em L que converge a $b \in L$. Consideremos que $f^{-1}(b) = a$ e ponhamos $f^{-1}(y_n) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $x_n \not\rightarrow a$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um índice $l_n > n$ para o qual $|x_{l_n} - a| \geq \epsilon$. Como K é compacto, passando para uma subsequência se necessário, existe $a_1 \in K$ tal que $x_{l_n} \rightarrow a_1$. Logo, $|x_{l_n} - a| \rightarrow |a_1 - a|$ e, por conseguinte, $|a_1 - a| \geq \epsilon$. Em particular, isso implica que $a_1 \neq a$. Como f é contínua, $f(x_{l_n}) \rightarrow f(a_1) \neq f(a)$, o qual contradiz o fato de que $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Portanto, deve-se ter que $x_n \rightarrow a$, o que implica que f^{-1} é contínua. \square

Exemplo: A função $f : (-1, 0) \cup [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é uma bijeção contínua. No entanto, sua inversa não é contínua no ponto 1.

Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é **uniformemente contínua** se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \in X$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$.

Exemplo: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é **lipchitziana** se existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$. Toda função lipchitziana é claramente uniformemente contínua.

Teorema* 8.24. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uniformemente contínua se, e somente se, para quaisquer sequências $x_1, x_2, \dots \in X$ e $y_1, y_2, \dots \in X$ tais que $x_n - y_n \rightarrow 0$ tem-se que $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \in X$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$. Se $x_1, x_2, \dots \in X$ e $y_1, y_2, \dots \in X$ são sequências tais que $x_n - y_n \rightarrow 0$, existe $A > 0$ tal que $|x_n - y_n| < \delta$ para todo $n > A$. Logo, $n > A$ implica que $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ e, por conseguinte, $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$. (\Leftarrow) Se f não é uniformemente contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n, y_n \in X$ satisfazendo as condições $|x_n - y_n| \leq 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Logo, $x_n - y_n \rightarrow 0$ mas $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$. \square

Teorema* 8.25. *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto. Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua, então ela é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam sequências $x_1, x_2, \dots \in K$ e $y_1, y_2, \dots \in K$ tais que $x_n - y_n \rightarrow 0$ e $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$. Como K é compacto, considerando subsequências se necessário, existiriam $a, b \in K$ tais que $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$. Logo, $a = b$ e, como f é contínua, $f(x_n) \rightarrow f(a)$ e $f(y_n) \rightarrow f(a)$. Porém, isso implicaria que $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$. Contradição! Portanto, f deve ser uniformemente contínua. \square

Exemplo: A função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua. Com efeito, a restrição de f ao intervalo $[0, 1]$ é uniformemente contínua e a restrição de f ao intervalo $(1, \infty)$ é lipchitziana, pois nesse caso

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{1}{2}|x - y|.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \in [0, 1]$ ou $x, y > 1$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta_1$. Por outro lado, se $x > 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $x - y < \epsilon$, então

$$|f(x) - f(y)| = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < |x - y| < \epsilon.$$

Logo, pondo $\delta = \min\{\epsilon, \delta_1\}$, temos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para quaisquer $x, y \geq 0$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$.

Teorema* 8.26. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto limitado. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uniformemente contínua, então f é limitada.*

Demonstração. Suponhamos que f não seja limitada. Logo, escolhido $x_1 \in X$, existe $x_2 \in X$ tal que $|f(x_2)| \geq |f(x_1)| + 1$, pois f não é limitada. Supondo definidos x_1, \dots, x_n , escolhamos $x_{n+1} \in X$ de tal forma que $|f(x_{n+1})| \geq |f(x_n)| + 1$, o qual é possível devido a que f não é limitada. Assim, temos que $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \geq |f(x_{n+1})| - |f(x_n)| \geq 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como X é limitado, passando para uma subsequência se necessário, existe $a \in \mathbb{R}^m$ tal que $x_n \rightarrow a$. Logo, $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ mas $f(x_{n+1}) - f(x_n) \not\rightarrow 0$. Portanto, f não é uniformemente contínua. \square

Exemplo: A função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ é contínua mas não é uniformemente contínua, pois não é limitada.

Teorema* 8.27. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $a \in X'$. Tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, para qualquer sequência $x_1, x_2, \dots \in X \setminus \{a\}$ tal que $x_n \rightarrow a$, tem-se que $f(x_n) \rightarrow L$.*

Demonstração. Análoga à demonstração do teorema 8.20. \square

Teorema* 8.28. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in X'$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uniformemente contínua, então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.*

Demonstração. Fixemos $r > 0$ e consideremos o conjunto limitado $A = B(a, r) \cap X$. A restrição de f a A é uniformemente contínua e $a \in A'$. Seja $x_1, x_2, \dots \in X \setminus \{a\}$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow a$. Como f é uniformemente contínua, pelo teorema 8.26, temos que $f(x_1), f(x_2), \dots$ é uma sequência limitada. Logo, ela possui uma subsequência convergente. Seja $L \in \mathbb{R}^d$ tal que $f(x_{l_n}) \rightarrow L$. Por outro lado, $f(x_n) - f(x_{l_n}) \rightarrow 0$, pois f é uniformemente contínua e $x_n - x_{l_n} \rightarrow 0$. Logo, como $f(x_n) = [f(x_n) - f(x_{l_n})] + f(x_{l_n})$, segue que $f(x_n) \rightarrow L$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. \square

Capítulo 9

A derivada de funções de uma variável real

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $a \in X \cap X'$. Define-se a **derivada** de f no ponto a por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que o limite do lado direito exista. A derivada de f no ponto a também pode ser denotada por

$$\frac{df}{dx}(a).$$

Se $n = 1$, a derivada de f no ponto a pode ser interpretada geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto a .

Exemplo: A função $f(x) = |x|$ não é derivável no ponto 0, pois $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$, o qual não existe.

Diz-se que uma função é **derivável** em um determinado ponto se existe a derivada da função nesse ponto. Se a função é derivável em todo ponto do seu domínio, diz-se que ela é uma função derivável.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função derivável, para cada $x \in X$ existe $f'(x)$. Isso define uma **função derivada** $f' : X \rightarrow \mathbb{R}^d$. Se f é definida dando simplesmente uma expressão para $f(x)$, os símbolos

$$f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

vão representar a expressão da função derivada f' . Se f' é uma função derivável, podemos definir a **função segunda derivada** ou a **derivada de segunda ordem** de f por $f'' : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x).$$

Nesse caso, dizemos que f é **duas vezes derivável**. De forma análoga podem ser definidas derivadas de ordens superiores.

Teorema 9.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis no ponto a , então*

1. $f \pm g$ é derivável no ponto a e vale a relação $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

2. **regra do produto:** fg é derivável no ponto a e vale a relação $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
3. $1/g$ é derivável no ponto a desde que se tenha $g(a) \neq 0$ e vale a relação $(1/g)'(a) = -g'(a)/[g(a)]^2$.

Demonstração. 1. Temos que

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \pm g(x) - [f(a) \pm g(a)]}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= f'(a) \pm g'(a).\end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)[g(x) - g(a)] + [f(x) - f(a)]g(a)}{x - a} \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a).\end{aligned}$$

3. Temos que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}. \quad \square$$

Corolário* 9.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis no ponto a , então*

1. $f \pm g$ é derivável no ponto a e vale a relação $(f \pm g)' = f'(a) \pm g'(a)$;
2. hf é derivável no ponto a e vale a relação $(hf)'(a) = h'(a)f(a) + h(a)f'(a)$;
3. $\langle f, g \rangle$ é derivável no ponto a e vale a relação $\langle f, g \rangle'(a) = \langle f'(a), g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \rangle$.

Exemplos:

1. As funções $f(x) = c$ e $g(x) = x$ são deriváveis e valem as relações $f'(x) = 0$ e $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0 \quad \text{e} \quad g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dx} = 1.$$

2. Usando a regra do produto, podemos concluir que

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \tag{9.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso usamos indução em n . Se $n = 1$, OK. Supondo que a afirmação seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n x) = \left(\frac{d}{dx}x^n\right)x + x^n \frac{dx}{dx} = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

Portanto, a Eq. (9.1) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então, usando os resultados anteriores, temos que $p'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. Portanto, toda função polinomial é derivável.
4. Toda função racional é derivável. De fato se a equação $f(x) = p(x)/q(x)$ define uma função racional f , então p e q são funções polinomiais e, para qualquer x no domínio de f ,

$$f'(x) = p'(x) \frac{1}{q(x)} - p(x) \frac{q'(x)}{[q(x)]^2} = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2}.$$

Teorema 9.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é derivável no ponto a , então ela é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 f'(a) = 0.$$

Portanto, f é contínua no ponto a . □

Exemplos:

1. A função seno é derivável no ponto 0. Com efeito, temos que

$$\text{sen}'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Logo, a função seno é contínua no ponto 0.

2. A função cosseno é derivável no ponto 0. Com efeito,

$$\cos'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos x = 1 - 2 \text{sen}^2(x/2)$, temos que

$$\cos'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 \text{sen}^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\text{sen}(x/2)}{x/2} \text{sen}(x/2).$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x/2)/(x/2) = 1$ e, pelo item anterior, a função seno é contínua no ponto 0, temos que $\cos'(0) = 0$. Logo, a função cosseno é contínua no ponto 0.

3. As funções seno e cosseno são de fato funções deriváveis e, por conseguinte, contínuas. Com efeito, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$\text{sen}'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a + h) - \text{sen } a}{h}.$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$, temos que

$$\sin'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin a \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h} \right).$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 0,$$

segue que $\sin'(a) = \cos a$. Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

Por outro lado, $\cos'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} [\cos(a+h) - \cos a]/h$. Usando a identidade trigonométrica $\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$, temos que

$$\cos'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \frac{\sin h}{h} \right) = - \sin a.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \cos x = - \sin x.$$

4. A função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(1/x)$ é contínua mas não é uniformemente contínua, pois $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ não existe.
5. Como $\tan x = \sin x / \cos x$, temos que

$$\tan'(x) = \sin'(x) \frac{1}{\cos x} + \sin x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos x} \right) = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Logo, podemos escrever,

$$\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

Teorema 9.4. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow J$ uma bijeção contínua. Se f é derivável no ponto $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é derivável no ponto $b = f(a)$ e vale a relação $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$.*

Demonstração. Temos que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-a}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'(a)$ e f^{-1} é contínua no ponto b . Segue que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Exemplos:

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, a função $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^n$ é uma bijeção derivável e $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ para todo $x > 0$. Logo, $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida por $f^{-1}(y) = y^{1/n}$, é derivável em $(0, \infty)$ e vale a relação

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}$$

para todo $y > 0$. Portanto, podemos escrever

$$\frac{d}{dx}x^{1/n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1} \quad (x > 0).$$

2. A função $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = \sin x$ é uma bijeção crescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco seno** e é denotada por $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ (ver figura 9.1). Como $f'(x) = \cos x > 0$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, a função arco seno é derivável em $(-1, 1)$, valendo a relação

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

3. A função $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = \cos x$ é uma bijeção decrescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco cosseno** e é denotada por $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ (ver figura 9.1). Como $f'(x) = -\sin x < 0$ para todo $x \in (0, \pi)$, a função arco cosseno é derivável em $(-1, 1)$, valendo a relação

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

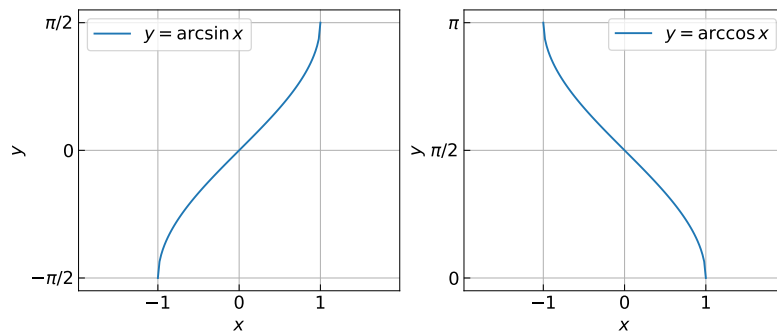


Figura 9.1: Gráficos das funções arco seno e arco cosseno. Nota-se que a função arco seno é uma função ímpar.

4. A função $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan x$ é uma bijeção crescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco tangente** e é

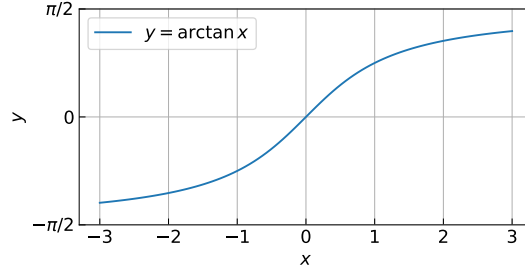


Figura 9.2: Gráfico da função arco tangente. Nota-se que ela é uma função ímpar.

denotada por $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ (ver figura 9.2). Como $f'(x) = \sec^2 x > 0$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, a função arco tangente é derivável e

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função derivável no ponto a , para qualquer $x \in X$, temos que $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + r(x)$, em que $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a) = 0$. Reciprocamente, se $f(x) = f(a) + (x-a)v + r(x)$ para todo $x \in X$ e $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a) = 0$, então a função f é derivável no ponto a e $f'(a) = v$.

Teorema 9.5. Regra da cadeia. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se $f : X \rightarrow Y$ é derivável no ponto a , $f(a) \in Y \cap Y'$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^d$ é derivável no ponto $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável no ponto a e vale a relação $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.*

Demonstração. Como f é derivável no ponto a , temos que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + r(x)$$

para todo $x \in X$, em que $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a) = 0$. Por outro lado, como g é derivável no ponto $f(a)$, temos que

$$g(y) = g(f(a)) + (y-f(a))g'(f(a)) + s(y)$$

para qualquer $y \in Y$, em que $\lim_{y \rightarrow f(a)} s(y)/[y-f(a)] = 0$. Logo, em particular, para qualquer $x \in X$,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + [f(x) - f(a)]g'(f(a)) + s(f(x)) \\ &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + r(x)g'(f(a)) + s(f(x)). \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{s(f(x))}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{s(f(x))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Como f é contínua no ponto a , então $\lim_{x \rightarrow a} s(f(x))/[f(x)-f(a)] = 0$. Segue daqui que $\lim_{x \rightarrow a} s(f(x))/(x-a) = 0$. Dessa maneira, temos que

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + t(x)$$

para todo $x \in X$, em que $\lim_{x \rightarrow a} t(x)/(x-a) = 0$. Portanto, $g \circ f$ é derivável no ponto a e vale a relação $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$. \square

Exemplo: Consideremos as funções $f(x) = x^m$ e $g(x) = x^{1/n}$. Como f e g são funções deriváveis, pela regra da cadeia temos que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = mx^{(m-1)/n} \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.$$

Portanto, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, temos que

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1},$$

desde que o lado direito esteja definido.

Teorema 9.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Se f é monótona crescente, então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Por outro lado, se f é monótona decrescente, então $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponhamos que f seja monótona crescente. Se existe $a \in X$ tal que $f'(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $[f(x) - f(a)]/(x - a) < 0$ para todo $x \in X$ satisfazendo a condição $0 < |x - a| < \delta$. Logo, $f(x) > f(a)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a)$ e $f(x) < f(a)$ para todo $x \in X \cap (a, a + \delta)$. Isso implica que f não é monótona crescente. Contradição! Portanto, devemos ter $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. O caso no qual f é monótona decrescente pode ser provado de forma análoga. \square

Exemplo: A função $f(x) = x^3$ é estritamente crescente. No entanto, não se tem $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, $f'(0) = 0$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $a \in X \cap X'_+$. Define-se a **derivada à direita** de f no ponto a por

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Analogamente, se $a \in X \cap X'_-$, define-se a **derivada à esquerda** de f no ponto a por

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

É claro que f é derivável em um ponto $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ se, e somente se, $f'_+(a) = f'_-(a)$.

Teorema 9.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$. Se $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$ existem, então f é contínua no ponto a .*

Exemplo: Consideremos a função $f(x) = |x|$. Temos que $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Logo, f é contínua no ponto 0 embora não seja derivável nesse ponto.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $a \in X$ é um **ponto de mínimo (máximo)** de f se existe $\delta > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$ ($f(a) \geq f(x)$) para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$. Nesse caso, diz-se também que f tem um mínimo (máximo) no ponto a .

Teorema 9.8. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se a é um ponto de mínimo ou de máximo de uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que é derivável nesse ponto, então $f'(a) = 0$.*

Demonstração. Temos que $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$. Suponhamos que a seja um ponto de mínimo. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - f(a) \geq 0$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$. Isso implica que $[f(x) - f(a)]/(x - a)$ é não-negativo para todo $x \in X \cap (a, a + \delta)$ e é não-positivo para todo $x \in X \cap (a - \delta, a)$. Assim, $f'_+(a) \geq 0$ e $f'_-(a) \leq 0$. Portanto, devemos ter $f'(a) = 0$. O caso no qual a é um ponto de máximo pode ser tratado de forma semelhante. \square

Exemplo: A recíproca do teorema anterior é falsa. Para ver isso consideremos a função $f(x) = x^3$. Temos que $f'(0) = 0$, mas 0 não é um ponto de máximo nem de mínimo.

Teorema 9.9. Teorema de Darboux. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(a) < d < f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Pelo teorema de Weierstrass, a função f atinge seus valores máximo e mínimo. Como $f'(b) > 0$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $[f(x) - f(b)]/(x - b) > 0$ para todo $x \in X \cap (b - \delta, b)$. Segue daqui que $f(x) < f(b)$ para todo $x \in X \cap (b - \delta, b)$ e, por conseguinte, b não é um ponto de mínimo. De forma análoga pode-se provar que a também não é um ponto de mínimo. Logo, o valor mínimo de f é atingido em um ponto $c \in (a, b)$. Portanto, $f'(c) = 0$, pois c é um ponto de acumulação bilateral. Consideremos agora o caso geral em que $f'(a) < f'(b)$. Se $f'(a) < d < f'(b)$, a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - dx$ é derivável e é tal que $g'(a) < 0 < g'(b)$. Logo, pelo que foi provado anteriormente, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Isso implica que $f'(c) = d$. \square

Exemplo: Não existe função derivável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $f'(x) = 0$ se $x < 0$.

Lema 9.10. Teorema de Rolle. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se $f(x) = f(a) = f(b)$ para todo $x \in (a, b)$, então f é a função constante e, por conseguinte, $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se esse não for o caso, pelo teorema de Weierstrass, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Como pelo menos um dos valores extremos $f(x_1)$ ou $f(x_2)$ é diferente de $f(a) = f(b)$, então $x_1 \in (a, b)$ ou $x_2 \in (a, b)$. Além disso, esses pontos seriam pontos de mínimo ou de máximo respectivamente. Portanto, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$. \square

Teorema 9.11. Teorema do valor médio. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Demonstração. A função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

é derivável e é tal que $g(a) = g(b) = 0$. Logo, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Isso implica que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. \square

O teorema do valor médio pode ser intuído a partir do gráfico de uma função derivável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dada a reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, pode-se encontrar uma reta paralela a ela a qual é tangente ao gráfico em um ponto intermediário $(c, f(c))$.

Corolário 9.12. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em (a, b) . Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é uma função constante.*

Corolário 9.13. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em (a, b) . A função f é monótona crescente se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. De forma análoga, f é monótona decrescente se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além do mais, se valem as desigualdades estritas para todo $x \in (a, b)$, f será estritamente crescente ou decrescente respectivamente.*

Corolário 9.14. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $c \in (a, b)$ e f derivável em $(a, c) \cup (c, b)$. Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (c, b)$, então c é um ponto de mínimo. De forma análoga, se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (c, b)$, então c é um ponto de máximo.*

Corolário 9.15. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui segunda derivada no ponto $c \in (a, b)$. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então c é um ponto de mínimo. Por outro lado, se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então c é um ponto de máximo.*

Exemplos:

1. A função $f(x) = |x|$ tem um mínimo no ponto 0, pois $f'(x) = 1$ se $x > 0$ e $f'(x) = -1$ se $x < 0$. Nesse caso, $f'(0)$ não existe.
2. A função $f(x) = 1/(1+x^2)$ tem um máximo no ponto 0, pois $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -2$.

Teorema 9.16. Teorema do valor médio generalizado. *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas que são deriváveis em (a, b) . Se g é injetiva e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Como g é contínua e injetiva, existe um intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ tal que $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ é uma bijeção. Logo, ela é monótona e sua inversa g^{-1} é derivável no intervalo (α, β) . Suponhamos que g^{-1} seja crescente. Logo, $g^{-1}(\alpha) = a$ e $g^{-1}(\beta) = b$. Dessa maneira,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(g^{-1}(\beta)) - f(g^{-1}(\alpha))}{\beta - \alpha}.$$

Como $f \circ g^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que é derivável em (α, β) , pelo teorema do valor médio existe $d \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = (f \circ g^{-1})'(d).$$

Se $g^{-1}(d) = c$, usando a regra da cadeia e o teorema 9.4, temos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = f'(g^{-1}(d))(g^{-1})'(d) = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Teorema* 9.17. Desigualdade do valor médio. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua que é derivável em (a, b) . Se existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$, então $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.*

Demonstração. Se $f(a) = f(b)$, OK. Se esse não é o caso, consideremos a função $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle$. Essa função é contínua, é derivável em (a, b) e $\phi(b) - \phi(a) = |f(b) - f(a)|^2$. Logo, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a} = \frac{|f(b) - f(a)|^2}{b - a} = f'(c) = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\frac{|f(b) - f(a)|^2}{|b - a|} \leq |f'(c)| |f(b) - f(a)| \leq M |f(b) - f(a)|.$$

Portanto, $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$. □

Corolário* 9.18. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua que é derivável em (a, b) . Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é uma função constante.*

Corolário* 9.19. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua que é derivável em (a, b) . Se existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$, então $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$, ou seja, f é lipchitziana.*

Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é **convexo** se, dados $x, y \in X$, $(1 - \alpha)x + \alpha y \in X$ para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo: Toda bola aberta de \mathbb{R}^d é um conjunto convexo. Com efeito, dados $x, y \in B(a, r)$ e $\alpha \in [0, 1]$, temos que $|(1 - \alpha)x + \alpha y - a| \leq (1 - \alpha)|x - a| + \alpha|y - a| < r$.

Teorema 9.20. *Os únicos subconjuntos convexos de \mathbb{R} são os intervalos.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo, existem $a, b \in X$ e $x \in X^c$ tal que $a < x < b$. Pondo $t = (x - a)/(b - a)$, temos que $t \in (0, 1)$ e $x = (1 - t)a + tb$. Logo, X não é um conjunto convexo. Reciprocamente, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, dados $x, y \in I$ com $x < y$, a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = (1 - t)x + ty$ é contínua e estritamente crescente. Logo, $(1 - t)x + ty \in [x, y] \subset I$ para todo $t \in [0, 1]$. Portanto, I é um conjunto convexo. □

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é **convexa** se $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$ para quaisquer $a, b \in I$ e $t \in [0, 1]$. Se $a < b$, pondo $x = (1 - t)a + tb$, temos que $t = (x - a)/(b - a)$. Segue daqui que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (9.2)$$

para quaisquer $a, b, x \in I$ satisfazendo a condição $a < x < b$. Reciprocamente, se a condição (9.2) é satisfeita, a função f é convexa. Com efeito, pondo $t = (x - a)/(b - a)$, podemos obter que $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$ para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$ e $t \in (0, 1)$. Se $b < a$, pondo $s = 1 - t$, podemos obter a mesma desigualdade. Além disso, se $a = b$ ou $t \in \{0, 1\}$, ocorre a igualdade de forma trivial. Portanto, f é convexa. Intuitivamente, uma função convexa deve ter um gráfico parecido com \smile . Dessa maneira, qualquer reta secante corta o gráfico de uma função convexa em exatamente dois pontos. Além disso, a porção do gráfico limitada pelos pontos de interseção com a reta secante está por baixo dessa reta.

Teorema 9.21. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, então ela é contínua.*

Demonstração. Seja $a \in I$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset I$. Consideremos a função $\phi : (a, a + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$. Como f é convexa, segue que ϕ é monótona crescente. Além disso, ϕ é limitada, pois

$$\frac{f(a) - f(a - \epsilon)}{\epsilon} \leq \phi(x) \leq \phi(a + \epsilon)$$

para todo $x \in (a, a + \epsilon]$. Logo, pelo teorema 5.10, existe $\lim_{x \rightarrow a+} \phi(x) = f'_+(a)$. De maneira análoga, a função $\psi : [a - \epsilon, a) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = [f(a) - f(x)]/(a - x)$ é monótona crescente e limitada. Logo, existe $\lim_{x \rightarrow a-} \psi(x) = f'_-(a)$. Portanto, f é contínua no ponto a . \square

Exemplo: A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $x \neq 0$ é convexa mas não é contínua.

Teorema 9.22. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é uma função convexa;
2. tem-se que $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$ para quaisquer $x, a \in I$;
3. a função derivada f' é monótona crescente.

Demonstração. ($1 \Rightarrow 2$) Se $a = x$, OK. Se $a < x$, então para qualquer $t \in (a, x)$, temos que

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Logo, $f'(a) = f'_+(a) \leq [f(x) - f(a)]/(x - a)$. De forma análoga podemos mostrar que, se $a > x$, $f'(a) = f'_-(a) \geq [f(x) - f(a)]/(x - a)$. Portanto, $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$ para quaisquer $x, a \in I$. ($2 \Rightarrow 3$) Dados $x, y \in I$, temos que $f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$ e $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$. Logo, $f(x) \geq f(x) + (y - x)[f'(x) - f'(y)]$, o que implica que $(x - y)[f'(x) - f'(y)] \geq 0$. Portanto, se $x > y$, deve-se ter $f'(x) \geq f'(y)$, ou seja, f' é monótona crescente. ($3 \Rightarrow 1$) Se f não é convexa, existem $a, b, x \in I$ com $a < x < b$ tais que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Logo, pelo teorema do valor médio, existem $\xi \in (a, x)$ e $\eta \in (x, b)$ tais que $f'(\xi) > f'(\eta)$. Assim, f' não é monótona crescente. \square

Corolário 9.23. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável. Logo, f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Exemplo: A função $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é **côncava** quando $-f$ é convexa.

Exemplo: A função $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$ é côncava pois $f''(x) = -\cos x \leq 0$ para todo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que $a \in I$ é um **ponto de inflexão** de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que a restrição de f a $(a - \delta, a] \cap I$ é convexa e a restrição a $[a, a + \delta) \cap I$ é côncava, ou vice-versa.

Teorema 9.24. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes derivável e $a \in I$ é um ponto de inflexão, então $f''(a) = 0$. Por outro lado, se $f''(a) = 0$ e f'' muda de sinal ao passar pelo ponto a , então a é um ponto de inflexão.*

Exemplos:

1. A função $f(x) = x^4$ é convexa, pois $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, ela não tem um ponto de inflexão, embora se tenha $f''(0) = 0$.
2. A função $f(x) = 1/(1+x^2)$ tem dois pontos de inflexão: $1/\sqrt{3}$ e $-1/\sqrt{3}$. Com efeito, temos que $f''(x) = (6x^2 - 2)/(1+x^2)^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f''(1/\sqrt{3}) = 0$, $f''(x) < 0$ se $x < 1/\sqrt{3}$ e $f''(x) > 0$ se $x > 1/\sqrt{3}$. Por outro lado, $f''(-1/\sqrt{3}) = 0$, $f''(x) < 0$ se $x > -1/\sqrt{3}$ e $f''(x) > 0$ se $x < -1/\sqrt{3}$.

Lema 9.25. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo tal que $0 \in I$ e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivada de ordem n contínua no ponto 0. Se $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$, pode-se encontrar $\xi \in I$ satisfazendo a condição $0 < |\xi| \leq |x|$ e a relação*

$$\frac{f(x)}{x^n} = f^{(n)}(\xi)r(x),$$

na qual $|r(x)| \leq 1$.

Demonstração. Usamos indução em n . Se $n = 1$, como f' é contínua no ponto 0, existe $\delta > 0$ tal que $f'(x)$ existe para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$. Logo, pelo teorema do valor médio, para cada $x \in (-\delta, \delta) \cap I$ podemos encontrar $\xi \in I$ tal que $0 < |\xi| < |x|$ e $f(x)/x = f'(\xi)$. Supondo que a afirmação seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$, pode-se encontrar $\xi \in I$ satisfazendo a condição $0 < |\xi| \leq |x|$ e a relação

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = f^{(n)}(\xi) \frac{r(x)}{x},$$

na qual $|r(x)| \leq 1$. Se f possui derivada de ordem $n+1$ contínua no ponto 0, podemos considerar que δ seja tal que $f^{(n+1)}(x)$ exista para todo $x \in (-\delta, \delta) \cap I$. Se, além disso, $f^{(n)}(0) = 0$, pelo teorema do valor médio, existe $\eta \in I$ tal que $0 < |\eta| < |\xi|$ e $f^{(n)}(\xi)/\xi = f^{(n+1)}(\eta)$. Logo,

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = f^{(n+1)}(\eta)r(x)\frac{\xi}{x}.$$

Definindo $s(x) = r(x)\xi/x$, vemos que $|s(x)| \leq |r(x)||\eta|/|x| \leq 1$. Isso prova a afirmação para $(n+1) \in \mathbb{N}$. \square

Lema 9.26. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo tal que $0 \in I$ e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto 0. Tem-se que $f(0) = f'(0) = \dots = f^n(0) = 0$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^n = 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Pelo lema 9.25, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n-1)}(\xi) \frac{r(x)}{x},$$

em que $0 < |\xi| \leq |x|$ e $|r(x)| \leq 1$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{\xi} r(x) \frac{\xi}{x}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \xi = 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} f^{(n-1)}(y)/y = f^{(n)}(0) = 0$, segue que $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n-1)}(\xi)/\xi = 0$. Finalmente, como $|r(x)\xi|/|x| \leq 1$, obtemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^n = 0$. (\Leftarrow) Se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^n = 0$, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} x^{n-k} = 0.$$

Definamos a função $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$r(x) = f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right). \quad (9.3)$$

Vemos imediatamente que r é n vezes derivável no ponto 0 e $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$. Logo, pelo que foi provado anteriormente, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)/x^n = 0$ e, por conseguinte, $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)/x^k = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Usando isso na Eq. (9.3) temos que

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - f(0) - xf'(0) - \dots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right) = -f(0),$$

ou seja, $f(0) = 0$. Supondo que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$, temos que

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^k} - \frac{f(0)}{x^k} - \frac{f'(0)}{x^{k-1}} - \dots - \frac{x^{n-k}}{n!} f^{(n)}(0) \right) = -\frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

ou seja, $f^{(k)}(0) = 0$. Portanto, $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. \square

Teorema 9.27. Fórmula de Taylor infinitesimal. *Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$. Logo,*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r(x)$$

para todo $x \in I$, em que $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a)^n = 0$. Reciprocamente, se para qualquer $x \in I$ tem-se que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + r(x),$$

em que $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a)^n = 0$, então $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Demonstração. Se vale a primeira expressão para $f(x)$, temos que r é n vezes derivável no ponto a e $r(a) = r'(a) = \dots = r^{(n)}(a) = 0$. Logo, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $s(y) = r(y+a)$ é n vezes derivável no ponto 0 e $s(0) = s'(0) = \dots = s^{(n)}(0) = 0$. Consequentemente, pelo lema 9.26, temos que

$$0 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{s(y)}{y^n} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{r(y+a)}{y^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}.$$

Reciprocamente, se $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + r(x)$ para todo $x \in I$ e $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a)^n = 0$, então, definindo a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $s(x) = r(x+a)$, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} s(x)/x^n = 0$. Logo, pelo lema 9.26, $s(0) = s'(0) = \dots = s^{(n)}(0) = 0$ e, por conseguinte, $r(a) = r'(a) = \dots = r^{(n)}(a) = 0$. Usando esse fato na expressão de $f(x)$, obtemos que $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. \square

Corolário 9.28. Regra de L'Hôpital. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções n vezes deriváveis no ponto $a \in I$. Se $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e $g^{(n)}(a) \neq 0$, então*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Teorema 9.29. Fórmula de Taylor com resto de Lagrange. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em (a, b) que possui derivada de ordem $n-1$ contínua em $[a, b]$. Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

Demonstração. Segue da fórmula de Taylor infinitesimal que, para qualquer $x \in [a, b]$,

$$f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + r_x(b).$$

A função $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = r_x(b) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$

é contínua, é derivável em (a, b) e é tal que $\rho(b) = 0$. Logo, pelo teorema do valor médio generalizado, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{r_a(b)}{(b-a)^n} = \frac{\rho(a) - \rho(b)}{(b-a)^n - (b-b)^n} = -\frac{\rho'(c)}{n(b-c)^{n-1}} = -\frac{1}{n(b-c)^{n-1}} \left(-\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c) \right).$$

Portanto,

$$r_a(b) = \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

□

Capítulo 10

A integral de Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real

Intuitivamente, a integral de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ é a área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo x . Passemos para as definições agora.

Uma **partição** de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ sejam $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ e $m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$. Definem-se a **soma superior** e a **soma inferior** de f em relação a P e α por

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n M_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \quad \text{e} \quad s(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n m_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$$

respectivamente. Se $\alpha(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$, as somas superior e inferior de f em relação a P e α são denotadas por $S(f, P)$ e $s(f, P)$ respectivamente. Intuitivamente, se f é contínua e não-negativa, essas somas superior e inferior são aproximações por meio de retângulos da área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo x .

Seja P uma partição de um intervalo $[a, b]$. Diz-se que um conjunto Q é um **refinamento** de P se Q é uma partição de $[a, b]$ tal que $P \subset Q$.

Teorema* 10.1. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e P uma partição de $[a, b]$. Se Q é um refinamento de P , tem-se que $s(f, P, \alpha) \leq s(f, Q, \alpha) \leq S(f, Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$.*

Demonstração. É claro que $s(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$ para toda partição P de $[a, b]$. Seja $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ e suponhamos inicialmente que $Q = P \cup \{x\}$, em que $x \notin P$. Logo, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in (x_{j-1}, x_j)$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - S(f, Q, \alpha) &= M_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] - M'_1 [\alpha(x) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad - M'_2 [\alpha(x_j) - \alpha(x)] \\ &= (M_j - M'_1) [\alpha(x) - \alpha(x_{j-1})] + (M_j - M'_2) [\alpha(x_j) - \alpha(x)], \end{aligned}$$

em que $M'_1 = \sup_{x \in [x_{j-1}, x]} f(x)$, $M'_2 = \sup_{x \in [x, x_j]} f(x)$ e $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$. Como $M_j \geq M'_1$ e $M_j \geq M'_2$, segue que $S(f, P, \alpha) \geq S(f, Q, \alpha)$. A desigualdade envolvendo as somas inferiores pode ser provada de forma análoga. Como todo refinamento de P pode ser construído adicionando pontos a P de um a um, o teorema é verdadeiro para qualquer refinamento Q de P . \square

Corolário* 10.2. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se P e Q são partições de $[a, b]$, então $S(f, P, \alpha) \geq s(f, Q, \alpha)$.*

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Define-se a **integral superior** de f em relação a α por

$$\overline{\int} f d\alpha = \inf\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$$

e a **integral inferior** de f em relação a α por

$$\underline{\int} f d\alpha = \sup\{s(f, P, \alpha) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}.$$

As integrais superior e inferior de f sempre existem e vale a relação

$$\underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha.$$

Se essas integrais são iguais, diz-se que f é **integrável à Riemann-Stieltjes** em relação a α e define-se a **integral de Riemann-Stieltjes** de f em relação a α por

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int f d\alpha = \overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha.$$

Se $\alpha(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$ e f é integrável em relação a α , diz-se que f é **integrável à Riemann** e $\int_a^b f(x) dx$ é chamada de **integral de Riemann** de f .

Lema* 10.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Se $B \subset A$ é tal que para cada $x \in A$ existem $a, b \in B$ satisfazendo a condição $a \leq x \leq b$, então $\sup B = \sup A$ e $\inf B = \inf A$.*

Demonstração. Como $B \subset A$, tem-se que $\sup B \leq \sup A$ e $\inf B \geq \inf A$. Se tivéssemos $\sup B < \sup A$, existiria $x \in A$ tal que $\sup B < x \leq \sup A$. Porém, isso implicaria que existe $y \in B$ tal que $\sup B < x \leq y$. Absurdo! Portanto, deve-se ter $\sup B = \sup A$. De forma análoga pode-se provar que $\inf B = \inf A$. \square

Teorema* 10.4. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e P_0 uma partição de $[a, b]$. Tem-se que*

$$\overline{\int} f d\alpha = \inf\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}$$

e

$$\underline{\int} f d\alpha = \sup\{s(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}.$$

Demonstração. Sejam os conjuntos $A = \{S(f, P, \alpha) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$ e $B = \{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}$. Vemos imediatamente que $B \subset A$. Além disso, se $S(f, P, \alpha) \in A$, então $Q = P \cup P_0$ é um refinamento de P_0 , $S(f, Q, \alpha) \in B$ e $S(f, Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$. Portanto, $\inf B = \inf A = \overline{\int} f d\alpha$. A igualdade envolvendo a integral inferior pode ser provada de forma similar. \square

Teorema* 10.5. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é integrável em relação a α ;
2. dado $\epsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a, b]$ tais que $S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$.
3. dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \epsilon$.

Demonstração. ($1 \Rightarrow 2$) Dado $\epsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a, b]$ tais que

$$\overline{\int} f d\alpha \leq S(f, P, \alpha) < \overline{\int} f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \underline{\int} f d\alpha - \frac{\epsilon}{2} < s(f, Q, \alpha) \leq \underline{\int} f d\alpha.$$

Como f é integrável em relação a α , segue que

$$\int f d\alpha \leq S(f, P, \alpha) < \int f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad -\int f d\alpha \leq -s(f, Q, \alpha) < -\int f d\alpha + \frac{\epsilon}{2}.$$

Somando essas desigualdades, obtemos que $0 \leq S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$. ($2 \Rightarrow 3$) Dado $\epsilon > 0$ sejam P e Q partições de $[a, b]$ tais que $S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$. Definindo a partição $R = P \cup Q$, temos que $S(f, R, \alpha) \leq s(f, P, \alpha)$ e $-s(f, R, \alpha) \leq -s(f, Q, \alpha)$. Logo, $S(f, R, \alpha) - s(f, R, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$. ($3 \Rightarrow 1$) Se $\underline{\int} f d\alpha < \overline{\int} f d\alpha$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha + \epsilon$. Logo, para qualquer partição P de $[a, b]$, temos que

$$s(f, P, \alpha) + \epsilon \leq \underline{\int} f d\alpha + \epsilon = \overline{\int} f d\alpha \leq S(f, P, \alpha).$$

Portanto, $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) \geq \epsilon$. □

Seja $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ uma partição de um intervalo $[a, b]$. Define-se a **norma** de P por $|P| = \max\{|x_j - x_{j-1}| : j \in \{1, \dots, n\}\}$.

Teorema 10.6. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em relação a α .*

Demonstração. Se α é uma função constante, $S(f, P, \alpha) = s(f, P, \alpha) = 0$ para toda partição P de $[a, b]$. Suponhamos agora que esse não seja o caso. Como f é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$. Seja $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$. Logo, pelo teorema de Weierstrass, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existem $x'_j, x''_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tais que $f(x'_j) \leq f(x) \leq f(x''_j)$ para todo $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n [f(x''_j) - f(x'_j)][\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &< \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \sum_{j=1}^n [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, f é integrável em relação a α . □

Exemplos:

1. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. A função f é integrável em relação a α , pois é contínua. Por outro lado, pode-se verificar facilmente que $S(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para toda partição P de $[a, b]$. Portanto,

$$\int_a^b c d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

2. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = c$ para todo $x \in (a, b]$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente que é contínua no ponto a . Se $f(a) \neq c$, dado $\epsilon > 0$, existe $d \in (a, b)$ tal que $\alpha(d) - \alpha(a) < \epsilon/|f(a) - c|$, pois α é contínua no ponto a . Logo, considerando a partição $P_0 = \{a, d, b\}$ de $[a, b]$, temos que

$$S(f, P_0, \alpha) - s(f, P_0, \alpha) = |f(a) - c|[\alpha(d) - \alpha(a)] < \epsilon$$

e, por conseguinte, f é integrável. Se $f(a) > c$, então $s(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para toda partição P de $[a, b]$. Logo, $\int f d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Por outro lado, se $f(a) < c$, então $S(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para toda partição P de $[a, b]$. Logo, $\int f d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$.

Lema* 10.7. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados. O conjunto $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ é limitado e valem as relações $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.*

Demonstração. Dado $z \in A + B$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $z = x + y$. Logo, $z \leq \sup A + \sup B$, o que implica que $A + B$ é limitado superiormente e que $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Por outro lado, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$ temos que $x + y \leq \sup(A + B)$. Logo, $x \leq \sup(A + B) - y$, o que implica que $\sup A \leq \sup(A + B) - y$, pois $x \in A$ é arbitrário. Pela sua vez, essa desigualdade pode ser escrita como $y \leq \sup(A + B) - \sup A$. Como y é arbitrário, temos que $\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$. Portanto, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. De forma análoga pode-se provar que $A + B$ é limitado inferiormente e que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$. \square

Teorema 10.8. *Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e $c \in (a, b)$. Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em relação a α se, e somente se, as restrições de f a $[a, c]$ e a $[c, b]$ são integráveis em relação a α . Além do mais, nesse caso tem-se que*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

Demonstração. Seja $P_0 = \{a, c, b\}$. Todo refinamento P de P_0 pode ser escrito como $P = P_1 \cup P_2$, em que P_1 e P_2 são partições de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente. Reciprocamente, se P_1 e P_2 são partições arbitrárias de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente, então $P = P_1 \cup P_2$ é um refinamento de P_0 . Se f_1 e f_2 denotam as restrições de f a $[a, c]$ e a $[c, b]$ respectivamente, então, para todo refinamento P de P_0 temos

$$S(f, P, \alpha) = S(f_1, P_1, \alpha) + S(f_2, P_2, \alpha)$$

e

$$s(f, P, \alpha) = s(f_1, P_1, \alpha) + s(f_2, P_2, \alpha),$$

em que P_1 e P_2 são partições de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente. Logo,

$$\overline{\int_a^b f(x) d\alpha(x)} = \overline{\int_a^c f(x) d\alpha(x)} + \overline{\int_c^b f(x) d\alpha(x)}$$

e

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

Segue daqui que

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x) &= \int_a^b f(x) d\alpha(x) \\ &\leq \int_a^b f(x) d\alpha(x) \\ &= \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x). \end{aligned}$$

Portanto, f é integrável se, e somente se, as restrições de f a $[a, c]$ e a $[c, b]$ são integráveis. Além disso, nesse caso vale a relação $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x)$. \square

Pondo por convenção que $\int_a^a f(x) d\alpha(x) = 0$ e que $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = -\int_b^a f(x) d\alpha(x)$, segue do teorema 10.8 que, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável,

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x)$$

para quaisquer $a, b, c \in I$.

Exemplos:

1. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente que é contínua nos pontos a e b . Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = c$ para todo $x \in (a, b)$, então f é integrável em relação a α e $\int f d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Com efeito, escolhendo $d \in (a, b)$, as restrições de f a $[a, d]$ e a $[d, b]$ são integráveis. Logo, f é integrável e

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) d\alpha(x) &= \int_a^d f(x) d\alpha(x) + \int_d^b f(x) d\alpha(x) \\ &= c[\alpha(d) - \alpha(a)] + c[\alpha(b) - \alpha(d)] \\ &= c[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

2. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente que é contínua nos pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(x) = c_j$ para todo $x \in (x_{j-1}, x_j)$, então f é integrável e

$$\int f d\alpha = \sum_{j=1}^n c_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})].$$

Isso segue diretamente de observar que a restrição de f a cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ é integrável e $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) d\alpha(x) = c_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, escreveremos $\sup f$ e $\inf f$ para denotar $\sup_{x \in X} f(x)$ e $\inf_{x \in X} f(x)$ respectivamente.

Lema* 10.9. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções limitadas, a função $f + g$ é limitada e valem as relações $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.*

Demonstração. Dado $x \in X$, temos que $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$ e $\inf g \leq g(x) \leq \sup g$. Logo, $\inf f + \inf g \leq f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$. Isso implica que $f + g$ é limitada, $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$. \square

Lema* 10.10. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $cX = \{cx : x \in X\}$ é limitado. Além disso, se $c \geq 0$, $\sup cX = c \sup X$ e $\inf cX = c \inf X$. Por outro lado, se $c < 0$, $\sup cX = c \inf X$, $\inf cX = c \sup X$.*

Demonstração. Dado $x \in X$, tem-se que $\inf X \leq x \leq \sup X$. Se $c \geq 0$, então $c \inf X \leq cx \leq c \sup X$. Isso implica que cX é limitado, $\sup cX \leq c \sup X$ e $\inf cX \geq c \inf X$. Por outro lado, dado $x \in X$, temos que $\inf cX \leq cx \leq \sup cX$, o que implica que $(\inf cX)/c \leq x \leq (\sup cX)/c$. Logo, $(\inf cX)/c \leq \inf X$ e $\sup X \leq (\sup cX)/c$. Portanto, $\sup cX = c \sup X$ e $\inf cX = c \inf X$. O caso em que $c < 0$ pode ser provado de forma análoga. \square

Corolário* 10.11. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : X \rightarrow [0, \infty)$ é uma função limitada, então cf é uma função limitada para todo $c \in \mathbb{R}$. Além disso, se $c \geq 0$, $\sup cf = c \sup f$ e $\inf cf = c \inf f$. Por outro lado, se $c < 0$, $\sup cf = c \inf f$ e $\inf cf = c \sup f$.*

Lema* 10.12. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, então $\sup f - \inf f = \sup_{x,y \in X} |f(x) - f(y)|$.*

Demonstração. Sejam $\sup f = M$ e $\inf f = m$. Dados $x, y \in X$, temos que $m \leq f(x) \leq M$ e $m \leq f(y) \leq M$. Logo, $-(M - m) \leq f(x) - f(y) \leq M - m$, o que implica que $|f(x) - f(y)| \leq M - m$. Assim, $\sup_{x,y \in X} |f(x) - f(y)| \leq M - m$. Seja $\omega = \sup_{x,y \in X} |f(x) - f(y)|$. Para quaisquer $x, y \in X$ temos que $f(x) - f(y) \leq \omega$. Logo, $f(x) \leq \omega + f(y)$, o que implica que $M \leq \omega + f(y)$, pois $x \in X$ é arbitrário. Pela sua vez, a desigualdade $M - \omega \leq f(y)$ implica que $M - \omega \leq m$, pois $y \in X$ é arbitrário. Portanto, $\omega = M - m$. \square

Teorema 10.13. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis em relação a α , então*

1. $f + g$ é integrável em relação a α e $\int (f + g) d\alpha = \int f d\alpha + \int g d\alpha$;
2. fg é integrável em relação a α e, em particular, $\int cf d\alpha = c \int f d\alpha$ para todo $c \in \mathbb{R}$;
3. f/g é integrável em relação a α desde que exista $c > 0$ tal que $|g(x)| \geq c$ para todo $x \in [a, b]$;
4. se $f \leq g$, então $\int f d\alpha \leq \int g d\alpha$;
5. $|f|$ é integrável e $|\int f d\alpha| \leq \int |f| d\alpha$.

Demonstração. 1. Dadas as partições P e Q de $[a, b]$, temos

$$S(f + g, P \cup Q, \alpha) \leq S(f, P \cup Q, \alpha) + S(g, P \cup Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) + S(g, Q, \alpha)$$

e

$$s(f + g, P \cup Q, \alpha) \geq s(f, P \cup Q, \alpha) + s(g, P \cup Q, \alpha) \geq s(f, P, \alpha) + s(g, Q, \alpha).$$

Logo,

$$\overline{\int} (f + g) d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} g d\alpha \quad \text{e} \quad \underline{\int} (f + g) d\alpha \geq \underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} g d\alpha.$$

A partir dessas desigualdades obtemos que

$$\underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} g d\alpha \leq \underline{\int} (f + g) d\alpha \leq \overline{\int} (f + g) d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} g d\alpha.$$

Portanto, se f e g são integráveis, segue que $f + g$ é integrável e que $\int (f + g) d\alpha = \int f d\alpha + \int g d\alpha$.

2. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Dados $x, y \in [a, b]$, temos que

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \\ &\leq M(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|). \end{aligned}$$

Como f e g são integráveis, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \epsilon/2M$ e $S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha) < \epsilon/2M$. Logo,

$$\begin{aligned} S(fg, P, \alpha) - s(fg, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad + M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |g(x) - g(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= M[S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) + S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, fg é integrável. Em particular, segue daqui que cf é integrável para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Além disso, se $c \geq 0$, temos que $S(cf, P, \alpha) = cS(f, P, \alpha)$ para toda partição P de $[a, b]$. Logo, $\int cf d\alpha = c \int f d\alpha$. Por outro lado, se $c < 0$, $S(cf, P, \alpha) = cs(f, P, \alpha)$ para toda partição P de $[a, b]$. Logo, $\int cf d\alpha = c \int f d\alpha$.

3. Dados $x, y \in [a, b]$, temos que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)||g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} |g(x) - g(y)|.$$

Como g é integrável, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha) < \epsilon c^2$. Logo,

$$\begin{aligned} S(1/g, P, \alpha) - s(1/g, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |g(x) - g(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= \frac{1}{c^2} [S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $1/g$ é integrável. Finalmente, usando o resultado do item anterior, temos que f/g é integrável.

4. Temos que a função $h = g - f$ é integrável e que $h \geq 0$. Logo, $S(h, P, \alpha) \geq 0$ para toda partição P de $[a, b]$. Dessa maneira, $\int h d\alpha \geq 0$, o que implica que $\int g d\alpha \geq \int f d\alpha$.
5. Dados $x, y \in [a, b]$, temos que $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$. Como f é integrável, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \epsilon$. Logo,

$$\begin{aligned} S(|f|, P, \alpha) - s(|f|, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} ||f(x)| - |f(y)|| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $|f|$ é integrável. Além disso, como $-|f| \leq f \leq |f|$, segue do que foi provado no item anterior que $-\int |f| d\alpha \leq \int f d\alpha \leq \int |f| d\alpha$. Assim, $|\int f d\alpha| \leq \int |f| d\alpha$. \square

Teorema 10.14. Teorema do valor médio para integrais. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se $p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ é uma função integrável em relação a α , existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int f p d\alpha = f(c) \int p d\alpha.$$

Demonstração. Pelo teorema de Weierstrass existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Logo, $f(x_1)p(x) \leq f(x)p(x) \leq f(x_2)p(x)$ e, por conseguinte,

$$f(x_1) \int p d\alpha \leq \int f p d\alpha \leq f(x_2) \int p d\alpha.$$

Como a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) \int p d\alpha$ é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = \int f p d\alpha$. \square

Teorema* 10.15. *Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções monótonas crescentes. Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em relação a $\alpha + \beta$ se, e somente se, ela é integrável em relação a α e a β . Além do mais, nesse caso vale a relação*

$$\int f d(\alpha + \beta) = \int f d\alpha + \int f d\beta.$$

Demonstração. Dadas as partições P e Q de $[a, b]$, seja $R = P \cup Q$. Temos que $S(f, R, \alpha + \beta) = S(f, R, \alpha) + S(f, R, \beta)$ e $s(f, R, \alpha + \beta) = s(f, R, \alpha) + s(f, R, \beta)$. Logo,

$$S(f, R, \alpha + \beta) \geq \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} f d\beta, \quad s(f, R, \alpha + \beta) \leq \underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} f d\beta$$

e, por outro lado,

$$S(f, R, \alpha + \beta) \leq S(f, P, \alpha) + S(f, Q, \beta) \quad \text{e} \quad s(f, R, \alpha + \beta) \geq s(f, P, \alpha) + s(f, Q, \beta).$$

Dessa maneira temos que

$$\overline{\int} f d(\alpha + \beta) = \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} f d\beta \quad \text{e} \quad \underline{\int} f d(\alpha + \beta) = \underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} f d\beta.$$

Logo,

$$\underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} f d\beta = \underline{\int} f d(\alpha + \beta) \leq \overline{\int} f d(\alpha + \beta) = \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} f d\beta$$

Portanto, f é integrável em relação a $\alpha + \beta$ se, e somente se, ela é integrável em relação a α e a β . Além disso, vale a relação $\int f d(\alpha + \beta) = \int f d\alpha + \int f d\beta$. \square

Teorema* 10.16. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em relação a α se, e somente se, ela é integrável em relação a $c\alpha$ para todo $c > 0$. Além disso, nesse caso vale a relação*

$$\int f d(c\alpha) = c \int f d\alpha.$$

Demonstração. Dado $c > 0$, percebemos facilmente que $S(f, P, c\alpha) = cS(f, P, \alpha)$ e $s(f, P, c\alpha) = cs(f, P, \alpha)$ para toda partição P de $[a, b]$. Logo,

$$c \underline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d(c\alpha) \leq \overline{\int} f d(c\alpha) = c \overline{\int} f d\alpha.$$

Portanto, f é integrável em relação a $c\alpha$ se, e somente se, é integrável em relação a α . Além disso, nesse caso vale a relação $\int f d(c\alpha) = c \int f d\alpha$. \square

Exemplos:

1. Dado $c \in (a, b]$, seja $H_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a **função degrau** definida por

$$H_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c. \end{cases}$$

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada que é contínua no ponto c , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon/3$ para todo $x \in [a, b]$ satisfazendo a condição $|x - c| < \delta$. Se $P = \{a < \dots < c_1 < c \leq \dots \leq b\}$ é uma partição de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$, então

$$S(f, P, H_c) - s(f, P, H_c) = \sup_{x, y \in [c_1, c]} |f(x) - f(y)| \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Logo, f é integrável. Por outro lado, para qualquer refinamento P de $\{a, c, b\}$ temos que $S(f, P, H_c) \geq f(c)$ e $s(f, P, H_c) \leq f(c)$. Dessa maneira, $f(c) \leq \int f dH_c \leq f(c)$. Portanto,

$$\int f dH_c = f(c).$$

2. Dados $a < x_1 < \dots < x_n \leq b$, seja $\alpha_n = \sum_{j=1}^n p_j H_{x_j}$, em que $p_1, \dots, p_n \geq 0$. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada que é contínua nos pontos x_1, \dots, x_n , então ela é integrável em relação a α_n e

$$\int f d\alpha_n = \sum_{j=1}^n f(x_j) p_j.$$

3. Sejam $x_1, x_2, \dots \in [a, b]$ uma sequência estritamente crescente e $p_1, p_2, \dots \geq 0$ uma sequência tal que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = L$. Consideremos a função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n H_{x_n}(x)$. A função α está bem definida, pois $\alpha(x)$ existe para todo $x \in [a, b]$. Isso segue do critério de comparação, usando o fato de que $p_n H_{x_n}(x) \leq p_n$ para quaisquer $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, vê-se facilmente que a função α é monótona crescente. Dado $t \in [a, b]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [x_{k-1}, x_k]$. Logo,

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n H_{x_n}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} p_j H_{x_j}(t) = \alpha_{k-1}(t).$$

De fato, temos que $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ para todo $n \geq k-1$. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$ uma partição de $[a, b]$. Pelo que vimos anteriormente, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(t_j) = \alpha_n(t_j)$ para quaisquer $j \in \{1, \dots, m\}$ e $n > n_0$. Logo, $S(f, P, \alpha) = S(f, P, \alpha_n)$ e $s(f, P, \alpha) = s(f, P, \alpha_n)$ para todo $n > n_0$. Como f é integrável em relação a α e em relação a α_n para todo $n \in \mathbb{N}$, as desigualdades anteriores implicam que $\int f d\alpha \geq \int f d\alpha_n \geq \int f d\alpha$ para todo $n > n_0$. Portanto,

$$\int f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) p_n,$$

em que a série do lado direito é absolutamente convergente, pois, como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(x_n) p_n| \leq M p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema* 10.17. *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções monótonas crescentes. Tem-se que f é integrável em relação a g se, e somente se, g é integrável em relação a f . Além disso, nesse caso vale a fórmula de integração por partes:*

$$\int f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int g df.$$

Demonstração. Observamos que $S(f, P, g) - s(f, P, g) = S(g, P, f) - s(g, P, f)$ para qualquer partição P de $[a, b]$. Logo, f é integrável em relação a g se, e somente se, g é integrável em relação a f . Por outro lado, se $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, então

$$\begin{aligned} S(f, P, g) &= \sum_{j=1}^n f(x_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n [f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1}) + f(x_{j-1})g(x_{j-1}) - f(x_j)g(x_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n [f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1})] - \sum_{j=1}^n [f(x_j) - f(x_{j-1})]g(x_{j-1}) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - s(g, P, f). \end{aligned}$$

Portanto, $\int f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int g df$. □

Corolário* 10.18. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e contínua. Toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em relação a α .*

Exemplos:

1. Temos que $\int_a^b 1 dx = b - a - \int_a^b x d(1) = b - a$.
2. Temos que $\int_a^b x dx = b^2 - a^2 - \int_a^b x dx$. Portanto, $\int_a^b x dx = (b^2 - a^2)/2$.
3. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente e contínua, então $\int f df = [f(b)]^2 - [f(a)]^2 - \int f df$. Portanto,

$$\int f df = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$$

Teorema* 10.19. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada que é contínua em $(a, b]$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se f é descontínua no ponto a e α é contínua nesse ponto, então f é integrável em relação a α .*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Como α é contínua no ponto a , dado $\epsilon > 0$, existe $c \in (a, b)$ tal que $\alpha(c) - \alpha(a) < \epsilon/4M$. Por outro lado, como f é uniformemente contínua em $[c, b]$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2[\alpha(b) - \alpha(a)]$ para quaisquer $x, y \in [c, b]$ satisfazendo a condição $|x - y| < \delta$. Se $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$ tal que $x_k = c$ e $|P| < \delta$, então

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^k \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad + \sum_{j=k}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq 2M[\alpha(c) - \alpha(a)] + \frac{\epsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} [\alpha(b) - \alpha(c)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, f é integrável. □

Corolário* 10.20. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Se f é descontínua em apenas um número finito de pontos e α é contínua nesses pontos, então f é integrável em relação a α .*

Exemplo: Se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = \sin(1/x)$ para todo $x \in (0, 1]$, então f é integrável à Riemann independentemente do valor de $f(0)$.

Teorema* 10.21. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente, derivável e cuja derivada é integrável à Riemann. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável à Riemann, então f é integrável em relação a α e vale a relação*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

Demonstração. Como α' é integrável, ela é limitada. Logo, existe $M > 0$ tal que $0 \leq \alpha'(x) \leq M$. Além disso, como f é integrável à Riemann, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon/M$. Temos que

$$S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})].$$

Pelo teorema do valor médio, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existem $t_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tais que

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| (x_j - x_{j-1}) \\ &= M[S(f, P) - s(f, P)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, f é integrável em relação a α . Por outro lado, para quaisquer partições P e Q de $[a, b]$ tais que $R = P \cup Q = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ temos que

$$\begin{aligned} S(f, R, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j=1}^n f(t_j) \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} [f(x) \alpha'(x)](x_j - x_{j-1}) \\ &= s(f \alpha', R), \end{aligned}$$

em que, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Logo, $S(f, P, \alpha) \geq s(f \alpha', Q)$, o que implica que $\int_a^b f d\alpha \geq \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$. De maneira análoga podemos obter que $s(f, P, \alpha) \leq S(f \alpha', Q)$ e, por conseguinte, $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$. Portanto, $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$. \square

Exemplo: Se $0 \leq a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_a^b x^n dx = b^{n+1} - a^{n+1} - \int_a^b x d(x^n) = b^{n+1} - a^{n+1} - n \int_a^b x^n dx.$$

Portanto, $\int_a^b x^n dx = [b^{n+1} - a^{n+1}]/(n+1)$.

Teorema* 10.22. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_a^b f(x) dx - \epsilon < s(f, P) \leq S(f, P) < \int_a^b f(x) dx + \epsilon$ para toda partição P de $[a, b]$ com norma menor do que δ .*

Demonstração. Consideremos inicialmente que f seja não-negativa e seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{x_0 < x_1 <$

$\dots < x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \epsilon/2$. Pondo $\delta = \min\{\epsilon/2nM, x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$, seja P uma partição de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$. Essa partição divide o intervalo $[a, b]$ em subintervalos $I_p = [a_p, b_p] \subset [x_{j-1}, x_j]$ para alguns $j \in \{1, \dots, n\}$ e $J_q = [c_q, d_q] \not\subset [x_{k-1}, x_k]$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Temos que

$$\sum_p \sup_{x \in [a_p, b_p]} f(x)(b_p - a_p) \leq S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, cada intervalo J_q contém só uma extremidade dos intervalos $[x_{j-1}, x_j]$. Logo, existem no máximo n intervalos J_q . Dessa maneira,

$$\sum_q \sup_{x \in [c_q, d_q]} f(x)(d_q - c_q) < Mn\delta < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \epsilon$. Vejamos o caso geral agora. Se f é uma função limitada arbitrária, existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq -c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) + c$ é não-negativa. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $S(g, P) < \overline{\int_a^b} g(x) dx + \epsilon$ para toda partição P de $[a, b]$ com norma menor do que δ . Como $S(g, P) = S(f, P) + c(b - a)$ e $\overline{\int_a^b} g(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx + c(b - a)$, segue que $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \epsilon$. A desigualdade envolvendo a soma inferior pode ser provada de forma análoga. \square

Seja $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ uma partição de um intervalo $[a, b]$. Se para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ é escolhido $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, obtem-se uma **partição pontilhada** de $[a, b]$, denotada por P_ξ , em que $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Definiremos a norma da partição pontilhada P_ξ como a norma da partição P .

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, seja P_ξ uma partição pontilhada de $[a, b]$, em que $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$. A soma

$$\Sigma(f, P_\xi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

é chamada de uma **soma de Riemann**. Diz-se que L é o limite de $\Sigma(f, P_\xi)$ quando $|P|$ tende a 0 se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\Sigma(f, P_\xi) - L| < \epsilon$ para toda partição pontilhada P_ξ com norma menor do que δ . Nesse caso, escreve-se $\lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma(f, P_\xi) = L$.

Corolário 10.23. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. Tem-se que*

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma(f, P^*) = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemplos:

1. Dado $p \in \mathbb{N}$, a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^p$ é integrável à Riemann. Considerando a partição pontilhada P_ξ de $[0, 1]$ em que $P = \{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$ e $\xi = (1/n, 2/n, \dots, 1)$, temos que

$$\Sigma(f, P_\xi) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}.$$

Como $\lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma(f, P_\xi) = \int_0^1 f(x) dx = 1/(p+1)$, temos em particular que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

2. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann e $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |P| = 0$. Escolhendo $\xi_j, \eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$ de forma arbitrária para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g(\eta_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (10.1)$$

Para provar isso, vamos começar provando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) = 0. \quad (10.2)$$

Se $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) \right| &\leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| |g(\xi_j) - g(\eta_j)|(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq M \sum_{j=1}^n |g(\xi_j) - g(\eta_j)|(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |g(x) - g(y)|(x_j - x_{j-1}) \\ &= M[S(g, P) - s(g, P)]. \end{aligned}$$

Como $\lim_{|P| \rightarrow 0} S(g, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} s(g, P) = \int_a^b g(x) dx$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) \right| = 0,$$

da qual decorre a equação (10.2). Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

a equação (10.1) segue da equação (10.2).

Capítulo 11

O teorema fundamental do cálculo

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **primitiva** de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Vemos imediatamente que, se F é uma primitiva de f , então $F + c$ também é uma primitiva de f para todo $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 11.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ são primitivas de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = c$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Temos que $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Segue daqui que $(F - G)'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Portanto, $F - G$ é uma função constante. \square

Teorema 11.2. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada é integrável à Riemann. Logo, para qualquer $x \in [a, b]$ tem-se que*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Demonstração. Seja $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ uma partição de $[a, x]$. Temos que

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^n [f(x_j) - f(x_{j-1})].$$

Logo, pelo teorema do valor médio, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existem $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tais que

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^n f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Dessa maneira, $s(f', P) \leq f(x) - f(a) \leq S(f', P)$. Como f' é integrável, segue que $\int_a^x f'(t) dt \leq f(x) - f(a) \leq \int_a^x f'(t) dt$. \square

Corolário 11.3. Teorema fundamental do cálculo. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann que possui uma primitiva F . Logo,*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Teorema 11.4. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é uniformemente contínua. Além disso, se f é contínua no ponto $c \in [a, b]$, então F é derivável no ponto c e $F'(c) = f(c)$.*

Demonstração. Como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Dados $x, y \in [a, b]$ com $x < y$, temos que

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(x) dx \right| \leq \int_x^y |f(x)| dx \leq M(y - x).$$

Logo, F é lipchitziana e, por conseguinte, é uniformemente contínua. Por outro lado, para qualquer $h > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(c) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(x) - f(c)| dx. \end{aligned}$$

Como f é contínua no ponto c , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$ satisfazendo a condição $|x - c| < \delta$. Logo, se $0 < h < \delta$,

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| < \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \epsilon dx = \epsilon.$$

Portanto, $F'_+(c) = f(c)$. De forma análoga, pode-se provar que $F'_-(c) = f(c)$. □

Corolário 11.5. *Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma primitiva.*

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável que possui uma primitiva F . Define-se a **integral indefinida** de f como uma primitiva arbitrária de f , ou seja,

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Exemplos:

1. Sabemos que, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{d}{dx} x^{r+1} = (r+1)x^r.$$

Logo, x^{r+1} é uma primitiva de $(r+1)x^r$ e, por conseguinte, $x^{r+1}/(r+1)$ é uma primitiva de x^r se $r \neq -1$. Portanto,

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad (r \neq -1),$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Sabemos que

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x.$$

Logo,

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c \quad \text{e} \quad \int \sec^2 x dx = \tan x + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

3. Sabemos que

$$\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Logo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + c = -\arccos x + d \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c,$$

em que $c, d \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Segue do primeiro resultado que, para qualquer $x \in (-1, 1)$,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsen t|_0^x = -\arccos t|_0^x.$$

Portanto, $\arcsen x + \arccos x = \pi/2$ para todo $x \in (-1, 1)$.

A função $f(x) = 1/x$ é contínua. Logo, ela possui uma primitiva em qualquer intervalo fechado. Define-se a **função logaritmo (natural)** $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Segue imediatamente daqui que $\log 1 = 0$, que a função logaritmo é derivável e que

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}.$$

De forma mais geral temos que

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{|x|} \frac{d}{dx} |x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

e com isso

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c.$$

Como $\log'(x) > 0$ para todo $x > 0$, a função logaritmo é estritamente crescente. Além disso, $\log''(x) = -1/x^2 < 0$ para todo $x > 0$, o que implica que a função logaritmo é uma função côncava. Em particular, para qualquer $x > 0$, tem-se que $\log x \leq \log 1 + (x - 1)$ e, por conseguinte,

$$\log x \leq x - 1$$

para todo $x > 0$.

Agora vamos obter a propriedade algébrica fundamental do logaritmo. Dado $a > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx} \log(ax) = \frac{1}{ax} a = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \log x.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx} [\log(ax) - \log x] = 0.$$

Isso implica que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\log(ax) - \log x = c$. Considerando $x = 1$, obtemos que $c = \log a$. Portanto,

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

para quaisquer $a, b > 0$. Como consequência direta dessa relação podemos obter que $\log(a^n) = n \log a$ para quaisquer $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $b > 0$, $\log b = \log((b^{1/n})^n) = n \log b^{1/n}$ e, por conseguinte, $\log b^{1/n} = (\log b)/n$. Logo, dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, tem-se que $\log a^{m/n} = (m/n) \log a$. Finalmente, como $\log 1 = \log(a^{m/n} a^{-m/n}) = \log(a^{m/n}) + \log(a^{-m/n})$, segue que $\log a^{-m/n} = -(m/n) \log a$ e, portanto, para quaisquer $r \in \mathbb{Q}$ e $a > 0$, tem-se que

$$\log a^r = r \log a.$$

A função logaritmo não é limitada superiormente nem inferiormente. Com efeito, dado $A > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\log(2^n) = n \log 2 > A$, pois $\log 2 > \log 1 = 0$. Segue daqui também que $\log 2^{-n} < -A$. Logo, como a função logaritmo é estritamente crescente, segue que $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$. Além disso, como a função logaritmo é contínua, sua imagem deve ser \mathbb{R} . Dessa maneira, a função logaritmo possui inversa.

A inversa da função logaritmo é chamada de **função exponencial**, denotada por $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ (ver figura 11.1). A função exponencial é estritamente crescente, $\exp(0) = 1$ e $\exp'(y) = 1/\log'(\exp y) = \exp y$. Assim, escrevemos

$$\frac{d}{dx} \exp x = \exp x.$$

Além disso, $\exp''(x) = \exp x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a função exponencial é convexa e, em particular, temos a desigualdade

$$\exp x \geq 1 + x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

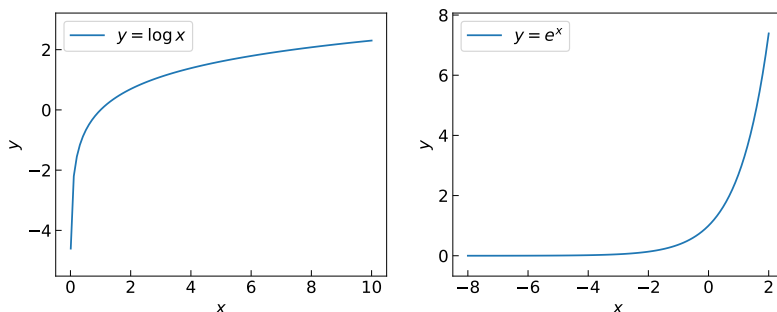


Figura 11.1: Gráficos das funções logaritmo e exponencial.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $\log(\exp x \exp y) = x + y$. Logo,

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y.$$

Definindo $e = \exp 1$, temos que $\exp n = e^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $e^m = \exp m = [\exp(m/n)]^n$ e, por conseguinte, $\exp(m/n) = e^{m/n}$. Como $\exp 0 = \exp(m/n - m/n) = e^{m/n} \exp(-m/n)$, segue que $\exp(-m/n) = e^{-m/n}$. Portanto, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$\exp r = e^r.$$

Isso motiva a escrever $\exp x$ como e^x para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora vamos provar que o número $e = \exp 1$ coincide com o número e visto na seção 6. Dado $a > 0$, temos que

$$a = \log'(1/a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1/a + h) - \log(1/a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log(1 + ha) = \lim_{h \rightarrow 0} \log(1 + ha)^{1/h}.$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + ha)^{1/h} = e^a.$$

Se $a = 1$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = e.$$

Em particular, como $1/n \downarrow 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dados $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, define-se a potência $a^x = e^{x \log a}$. Vemos que

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Logo, a função $f(x) = a^x$ é estritamente crescente (decrecente) se $a > 1$ ($a < 1$). Além disso, $f''(x) = a^x (\log a)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função f é convexa para qualquer $a \neq 1$ (ver figura 11.2). Como $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ é monótona e contínua em qualquer caso, ela possui uma inversa, a qual é chamada de **função logaritmo na base a** , denotada por $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Dado qualquer $x > 0$, temos que $x = a^{\log_a x} = e^{(\log_a x) \log a}$. Logo, $\log x = (\log_a x) \log a$ e, por conseguinte,

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}.$$

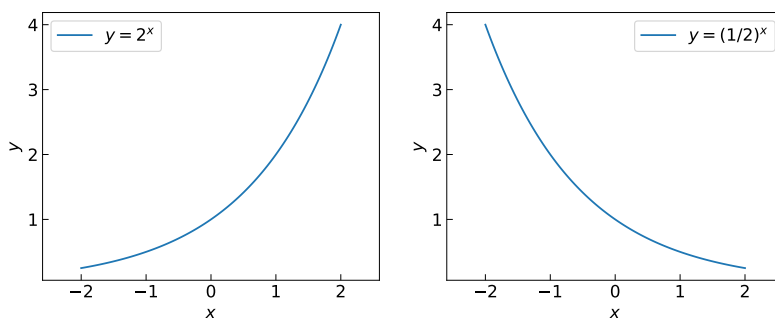


Figura 11.2: Gráfico da função $f(x) = a^x$ quando $a = 2$ e $a = 1/2$.

Dados $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos a potência $x^a = e^{a \log x}$. Vemos que

$$\frac{d}{dx} x^a = e^{a \log x} \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Agora vamos comparar os crescimentos exponencial e logarítmico com o crescimento tipo lei de potência. Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0,$$

ou seja, a função exponencial cresce mais rápido do que qualquer potência. Com efeito, a afirmação é trivial se $a \leq 0$. Se $a > 0$ e $x > 0$, $e^x = (e^{x/2a})^{2a} > (x/2a)^{2a}$. Logo,

$$0 < \frac{x^a}{e^x} < \frac{x^a}{(x/2a)^{2a}} = \frac{(2a)^{2a}}{x^a}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^a = 0$, segue que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a/e^x = 0$. Por outro lado, dado $a > 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0,$$

ou seja, a função exponencial cresce mais devagar do que qualquer potência positiva. Com efeito, temos que $\log x = \log[(x^{a/2})^{2/a}] = 2 \log(x^{a/2})/a < 2x^{a/2}/a$. Logo, se $x > 1$,

$$0 < \frac{\log x}{x^a} < \frac{2x^{a/2}}{ax^a} = \frac{2}{ax^{a/2}}.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)/x^a = 0$.

Definem-se as funções **seno hiperbólico** $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e **cosseno hiperbólico** $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Pode-se verificar imediatamente que a função seno hiperbólico é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno hiperbólico é par. Além disso, verifica-se facilmente que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x.$$

Como $\cosh x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função seno hiperbólico é monótona crescente (ver figura 11.3).

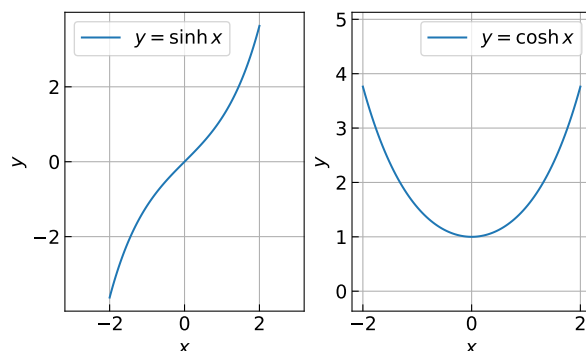


Figura 11.3: Gráficos das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

Define-se a função **tangente hiperbólica** $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Verifica-se imediatamente que a função tangente hiperbólica é uma função ímpar. Além disso, $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$ e

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{\cosh x}{\cosh x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Segue daqui que a função tangente hiperbólica é monótona crescente (ver figura 11.4).

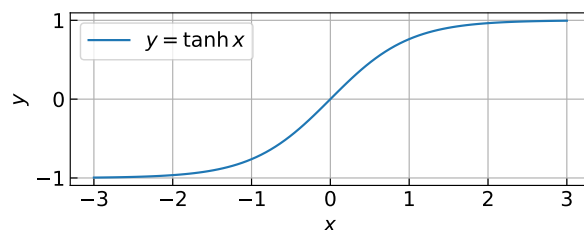


Figura 11.4: Gráfico da função tangente hiperbólica.

Teorema 11.6. Mudança de variável. *Seja $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $\phi(a) = \alpha$ e $\phi(b) = \beta$ para alguns $a, b \in I$ e, além disso, ϕ' é integrável à Riemann no intervalo de extremidades a e b , então*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx.$$

Demonstração. Como f é contínua, ela possui uma primitiva F . Logo,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(x)|_{\alpha}^{\beta} = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia, $(F \circ \phi)'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ e, por conseguinte,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx = (F \circ \phi)(x)|_a^b = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a).$$

Portanto, $\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx$. □

Exemplos:

1. Sejam I um intervalo e $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada integrável. Temos que

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy,$$

no qual utilizamos a mudança de variáveis $y = \phi(x)$. Logo,

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \log |y| + c = \log |\phi(x)| + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Temos que

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + c = \log |\sec x| + c$$

e

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log |\sin x| + c = -\log |\csc x| + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

3. Usando a identidade $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$, temos que

$$\int \csc x \, dx = \int \frac{1}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} \, dx = \int \frac{\sec^2(x/2)}{2 \tan(x/2)} \, dx.$$

Portanto,

$$\int \csc x \, dx = \log \left| 2 \tan \frac{x}{2} \right| + c = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + d,$$

em que $c, d \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

4. Usando a identidade $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, temos que

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\sin(x + \pi/2)} \, dx = \int \frac{1}{\sin y} \, dy,$$

em que usamos a mudança de variáveis $y = x + \pi/2$ ($x = y - \pi/2$). Logo,

$$\int \sec x \, dx = \log \left| \tan \frac{y}{2} \right| + c = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c.$$

5. Dado $a > 0$, temos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} \frac{1}{a} \, dx.$$

Usando a mudança de variáveis $y = x/a$ ($x = ay$), obtemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \, dy = \arcsen y + c = \arcsen \frac{x}{a} + c.$$

6. Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \int \frac{1}{1 + (x/a)^2} \frac{1}{a^2} \, dx = \int \frac{1}{1 + y^2} \frac{1}{a} \, dy,$$

em que usamos a mudança de variáveis $y = x/a$. Logo,

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan y + c = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c.$$

Teorema 11.7. Integração por partes. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis cujas derivadas são integráveis à Riemann, então

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx.$$

Demonstração. Temos que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Logo, $(fg)'$ é integrável e $\int_a^b (fg)'(x) \, dx = \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$. Por outro lado, $\int_a^b (fg)'(x) \, dx = f(x)g(x)|_a^b$. Portanto, $\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx$. \square

Exemplos:

1. Temos que

$$\int \log x \, dx = \int (\log x) 1 \, dx = (\log x)x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \log x - x + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

2. Temos que

$$\int \arcsen x \, dx = (\arcsen x)x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Usando a mudança de variáveis $x = \sqrt{1-y}$ ($y = 1 - x^2$), temos que

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \int \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \, dy = x \arcsen x + \sqrt{y} + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

3. Temos que

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx.$$

Usando a mudança de variáveis $x = \sqrt{y-1}$ ($y = 1 + x^2$), temos que

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{\sqrt{y-1}}{y} \frac{1}{2\sqrt{y-1}} \, dy = x \arctan x - \frac{1}{2} \log |y| + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ não ambos nulos. Se $a \neq 0$, temos que

$$\int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sen(bx) - \int \frac{e^{ax}}{a} b \cos(bx) \, dx.$$

Usando a fórmula de integração por partes na integral do lado direito, temos que

$$\int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sen(bx) - \frac{b}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \int \frac{e^{ax}}{a} b \sen(bx) \, dx \right).$$

Logo,

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} [a \sen(bx) - b \cos(bx)].$$

Portanto,

$$\int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sen(bx) - b \cos(bx)] + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Vemos que esse resultado é verdadeiro mesmo no caso em que $a = 0$ e $b \neq 0$.

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \, dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin x \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, temos que

$$\int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx.$$

Portanto,

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

Em particular, segue daqui que

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} \quad \text{e} \quad \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}.$$

6. **Fórmula de Wallis:** Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

De forma análoga, temos

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx = \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-1}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{3}{4} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n-1} \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx}. \quad (11.1)$$

Se $0 \leq x \leq \pi/2$, temos que $\cos^{2n+1} x \leq \cos^{2n} x \leq \cos^{2n-1} x$. Logo,

$$\frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x.$$

Dessa maneira temos que

$$\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx} \leq 1,$$

o que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx} = 1.$$

Portanto, da equação (11.1) obtemos que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{3^2} \frac{4^2}{5^2} \cdots \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2} 2n.$$

Além disso, segue dessa relação que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \sqrt{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \sqrt{2n}.$$

Logo,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \frac{n^2}{n^2} \frac{2}{2} \sqrt{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1} (n!)^2}{(2n)!} \frac{\sqrt{2n}}{n}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$