

# Notas de cálculo diferencial e integral 1

Max Jáuregui

10 de Setembro de 2019

Estas notas foram criadas principalmente para meu uso pessoal e pode eventualmente ser usado como um curso elementar de análise matemático com aplicações ao cálculo. Todo o conteúdo foi produzido por mim, seguindo como roteiros os seguintes livros:

- R. Courant e E. McShane, *Differential and integral calculus*, Vol. I, 2 ed. (Blackie and Son, Londres, 1937).
- E. L. Lima, *Análise real volume 1. Funções de uma variável real*, 12 ed. (IMPA, Rio de Janeiro, 2013).
- W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3 ed. (McGraw-Hill, Singapore, 1976).

Max Jáuregui

# Conteúdo

1	Linguagem de conjuntos	3
2	Números reais	5
3	Funções	8
4	Espaços euclidianos*	12
5	O conceito de limite para funções	14
6	Sequências de pontos no espaço euclidiano*	19
7	Séries de números reais*	23
8	Funções contínuas	27
9	A derivada de funções de uma variável real	36
10	A integral de Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real	50
11	O teorema fundamental do cálculo	64

# Capítulo 1

## Linguagem de conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados de **elementos** do conjunto. Se  $x$  é um elemento de um conjunto  $A$ , diz-se que  $x$  **pertence** a  $A$  e escreve-se  $x \in A$ ; caso contrário diz-se  $x$  **não pertence** a  $A$  e escreve-se  $x \notin A$ .

Conjuntos numéricos:

1. Conjunto dos **números naturais**:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
2. Conjunto dos **números inteiros**:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
3. Conjunto dos **números racionais**:  $\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ .

O **conjunto vazio**, denotado por  $\emptyset$ , é o conjunto que não tem elementos.

Diz-se que um conjunto  $A$  é um **subconjunto** ou uma **parte** de um conjunto  $B$  se todo elemento de  $A$  é elemento de  $B$ . Nesse caso escreve-se  $A \subset B$  ou  $B \supset A$ .

Exemplos: Tem-se que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . Para qualquer conjunto  $A$  tem-se que  $\emptyset \subset A$ .

Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais se, e somente se,  $A \subset B$  e  $B \subset A$ .

Dados os conjuntos  $A$  e  $B$ , definimos sua **união** por  $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$  e sua **interseção** por  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ . Define-se também a **diferença**  $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ . Se todos os conjuntos com os quais está se trabalhando são subconjuntos de um conjunto  $X$ , a diferença  $X \setminus A$  é chamada de **complementar** de  $A$  e é denotada por  $A^c$ .

Algumas propriedades:

1.  $A \cup B = B$  se, e somente se,  $A \subset B$ ;
2.  $A \cap B = A$  se, e somente se,  $A \subset B$ ;
3. se  $A \subset B$ , então  $A \cup C \subset B \cup C$ ;
4. se  $A \subset B$ , então  $A \cap C \subset B \cap C$ ;
5.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
6.  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ;
7.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
8.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
9.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ;

10.  $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ ;
11.  $A \setminus B = A \cap B^c$ .
12.  $A \cap B = \emptyset$  se, e somente se,  $A \subset B^c$ .

Define-se o **produto cartesiano** de dois conjuntos  $A$  e  $B$  por  $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$ . Os elementos de  $A \times B$  são chamados de **pares ordenados**. Dois pares ordenados  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são iguais se, e somente se,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

O produto cartesiano de um conjunto  $A$  com ele próprio é denotado por  $A^2$ .

# Capítulo 2

## Números reais

Não existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $r^2 = 2$ . De fato, se  $r = p/q$ , em que  $p, q \in \mathbb{N}$  são primos relativos, teríamos que  $p^2 = 2q^2$ . Isso implicaria que  $p$  é par. Porém, com isso concluiríamos que  $q$  também é par. Contradição!

$\mathbb{Q}$  não é suficiente para atribuir um comprimento a todo segmento de reta. Estende-se  $\mathbb{Q}$  introduzindo **números irracionais**, como  $\sqrt{2}$ . O conjunto formado pelos números racionais e irracionais é chamado de conjunto dos **números reais** e é denotado por  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}$  é um **corpo**, pois nele estão definidas as operações de adição e multiplicação, as quais têm as seguintes propriedades:

1.  $x + y \in \mathbb{R}$  e  $xy \in \mathbb{R}$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$  e  $x(yz) = (xy)z$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
3.  $x + y = y + x$  e  $xy = yx$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .
4.  $x(y + z) = xy + xz$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
5. Existe  $0 \in \mathbb{R}$  tal que  $x + 0 = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
6. Existe  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $1 \neq 0$ , tal que  $x \cdot 1 = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
7. Para cada  $x \in \mathbb{R}$  existe  $-x \in \mathbb{R}$  tal que  $x + (-x) = 0$ .
8. Para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , existe  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que  $xx^{-1} = 1$ .

$\mathbb{R}$  é um **corpo ordenado**, pois existe o subconjunto  $\mathbb{R}^+$  dos números reais **positivos** tal que

1. se  $x \in \mathbb{R}$ , só uma das seguintes afirmações é verdadeira:  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $x = 0$  ou  $-x \in \mathbb{R}^+$ .
2. dados  $x, y \in \mathbb{R}^+$ , tem-se que  $x + y \in \mathbb{R}^+$  e  $xy \in \mathbb{R}^+$ .

Diz-se que  $x \in \mathbb{R}$  é **menor** do que  $y \in \mathbb{R}$  e escreve-se  $x < y$  se  $y - x \in \mathbb{R}^+$ . As seguintes propriedades seguem diretamente dessa definição:

1. Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , só uma das seguintes afirmações é verdadeira:  $x < y$ ,  $x = y$  ou  $y < x$ .
2. Se  $x < y$  e  $y < z$ , então  $x < z$ .
3. Se  $x < y$ , então  $x + z < y + z$  para qualquer  $z \in \mathbb{R}$ .

4. Se  $x < y$  e  $z > 0$ , então  $xz < yz$  para qualquer  $z \in \mathbb{R}$ .
5. Se  $x < y$  e  $z < w$ , então  $x + z < y + w$ ;
6.  $x^2 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $1 > 0$ .

Usando essas propriedades podemos mostrar que

7. se  $x < y$  e  $z < 0$ , então  $xz > yz$ ;
8. se  $0 < x < y$  e  $0 < z < w$ , então  $xz < yw$ ;
9. se  $0 < x < y$ , então  $0 < y^{-1} < x^{-1}$ ;
10.  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Intervalos finitos:** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ .

1. **Intervalo aberto:**  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ .
2. **Intervalo fechado:**  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ .
3. **Intervalos semiabertos:**  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  e  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
4. **Intervalo degenerado:**  $[a, a] = \{a\}$ .

**Intervalos infinitos:**  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ;  $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ ;  
 $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ ;  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ ;  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ .

Define-se o **valor absoluto** de  $x \in \mathbb{R}$  por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue imediatamente daqui que  $|x| \geq 0$  e  $-|x| \leq x \leq |x|$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

Se  $|x - a| < \epsilon$ , então  $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$  e vice-versa.

**Teorema 2.1.** *Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , tem-se que*

1.  $|xy| = |x||y|$ ;
2.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ;
3.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

*Demonstração.* 1.  $|xy|^2 = x^2y^2 = (|x||y|)^2$ .

2. Somando as desigualdades  $-|x| \leq x \leq |x|$  e  $-|y| \leq y \leq |y|$ , obtemos que  $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ . Logo,  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .
3.  $|x| \leq |x - y| + |y|$  e  $|y| \leq |x - y| + |x|$ . Logo,  $-(|x - y|) \leq |x| - |y| \leq |x - y|$  e, por conseguinte,  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .  $\square$

Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é **limitado superiormente (inferiormente)** se existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq c$  ( $x \geq c$ ) para todo  $x \in X$ . Nesse caso, diz-se que  $c$  é uma **cota superior (inferior)** de  $X$ .

Seja  $X \subset \mathbb{R}$  um conjunto limitado superiormente (inferiormente). Diz-se que  $\alpha \in \mathbb{R}$  é o **supremo (ínfimo)** de  $X$  se  $\alpha$  é a menor (maior) cota superior (inferior) de  $X$ . Nesse caso, escreve-se  $\alpha = \sup X$  ( $\alpha = \inf X$ ).

Se  $\alpha = \sup X$ , para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $x \in X$  tal que  $\alpha - \epsilon < x$ . Isso é devido a que  $\alpha - \epsilon$  não pode ser uma cota superior de  $X$ .

$\mathbb{R}$  é um **corpo ordenado completo**. Isso quer dizer que todo conjunto não-vazio  $X \subset \mathbb{R}$  que é limitado superiormente tem um supremo.

Se  $X \subset \mathbb{R}$  é um conjunto não-vazio limitado inferiormente, então  $-X = \{-x \in \mathbb{R} : x \in X\}$  é um conjunto limitado superiormente. Vê-se claramente que  $\inf X = -\sup(-X)$ .

Se  $X \subset \mathbb{R}$  é um conjunto que não limitado superiormente (inferiormente), vamos escrever  $\sup X = \infty$  ( $\inf X = -\infty$ ). Com essa convenção, todo subconjunto não-vazio  $X \subset \mathbb{R}$  possui um supremo e um ínfimo em  $[-\infty, \infty]$ .

**Teorema 2.2.**  $\mathbb{R}$  é **arquimediano**, ou seja, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > x$ .

*Demonstração.* Se isso não fosse verdade existiria  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $n \leq x$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $\mathbb{N}$  seria limitado superiormente e portanto teria um supremo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Logo, deve existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha - 1 < n$ . Porém, isso implicaria que  $\alpha < n + 1$ . Contradição!  $\square$

**Corolário 2.3.**  $\inf_{n \in \mathbb{N}}(1/n) = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ .

**Teorema 2.4.**  $\mathbb{Q}$  é **denso** em  $\mathbb{R}$ , ou seja, dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < r < b$ .

*Demonstração.* Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n < b - a$ . Os números  $m/n$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , dividem a reta real em intervalos de comprimento  $1/n$ . Se  $a \in [(m-1)/n, m/n)$ , devemos ter  $b > m/n$ . Com efeito, se tivéssemos  $b \leq m/n$ , então  $b - 1/n \leq (m-1)/n \leq a$ . Porém, tem-se também que  $b - 1/n > a$ . Contradição! Portanto,  $a < m/n < b$ .  $\square$

**Teorema\* 2.5. Teorema dos intervalos encaixados.** Sejam  $I_n$  intervalos fechados tais que  $I_{n+1} \subset I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $I_n = [a_n, b_n]$ . Vemos que  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ . Logo, o conjunto formado pelos números  $a_n$  é limitado superiormente por qualquer um dos números  $b_n$ . Dessa forma, se  $c$  é o supremo desse conjunto, então  $a_n \leq c \leq b_n$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema\* 2.6.**  $\mathbb{R}$  é **não-enumerável**, ou seja,  $\mathbb{R} \neq \{x_1, x_2, \dots\}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Seja  $I_1$  um intervalo fechado não-degenerado tal que  $x_1 \notin I_1$ . Supondo definidos os intervalos fechados não-degenerados  $I_1 \supset \dots \supset I_n$ , definimos o intervalo fechado não-degenerado  $I_{n+1}$  da seguinte forma:

1. Se  $x_{n+1} \notin I_n$ , então  $I_{n+1} = I_n$ .
2. Se  $x_{n+1} \in I_n$ , então  $x_{n+1}$  é diferente de pelo menos uma das extremidades de  $I_n = [a, b]$ . Supondo, por exemplo, que  $x_{n+1} \neq a$ , definimos  $I_{n+1} = [a, (a + x_{n+1})/2]$ .

Dessa forma, os intervalos encaixados  $I_n$  estão bem definidos para todo  $n \in \mathbb{N}$  e são tais que  $x_n \notin I_n$ . Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dessa forma,  $c \neq x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Contradição!  $\square$



# Capítulo 3

## Funções

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos arbitrários. Uma **função**  $f : X \rightarrow Y$  é uma regra que associa a cada  $x \in X$  um único  $y \in Y$ ; nesse caso escreve-se  $f(x) = y$ . Os conjuntos  $X$  e  $Y$  são chamados respectivamente de **domínio** e **contradomínio** da função  $f$ .

Define-se a **imagem** de uma função  $f : X \rightarrow Y$  como o conjunto  $f(X) = \{f(x) \in Y : x \in X\}$ . Se  $f(X) = Y$ , diz-se que  $f$  é **sobrejetiva**.

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita **injetiva** se, dados  $x_1, x_2 \in X$  com  $x_1 \neq x_2$ , tem-se que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Uma função que é injetiva e sobrejetiva é chamada de uma **bijeção**.

Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma bijeção, para cada  $y \in Y$  existe um único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Logo, podemos definir uma função  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  pondo  $f^{-1}(y) = x$  quando  $f(x) = y$ . A função  $f^{-1}$  assim definida é chamada de **inversa** da função  $f$ .

Dadas as funções  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$ , define-se a **função composta**  $g \circ f : X \rightarrow Z$  por  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ . Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma bijeção, então  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  para todo  $x \in X$  e  $(f \circ f^{-1})(y) = y$  para todo  $y \in Y$ .

No restante dessa seção consideraremos funções entre subconjuntos de  $\mathbb{R}$  a menos que se indique o contrário.

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  pode ser representada graficamente localizando os pontos  $(x, f(x))$  no plano cartesiano  $xy$ . O desenho obtido é chamado de **gráfico** da função  $f$ . Qualquer reta vertical intersecta o gráfico de uma função em no máximo um ponto.

Em muitas ocasiões, uma função  $f$  é definida dando uma expressão para  $f(x)$ . Nesse caso, vamos considerar que o domínio de  $f$  é o maior conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  tal que a expressão de  $f(x)$  esteja definida para todo  $x \in X$ .

**Funções lineares:**  $f(x) = ax + b$ . O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$  e sua imagem é  $\mathbb{R}$  se  $a \neq 0$  ou  $\{b\}$  se  $a = 0$ . O gráfico de uma função linear é uma linha reta (ver figura 3.1).

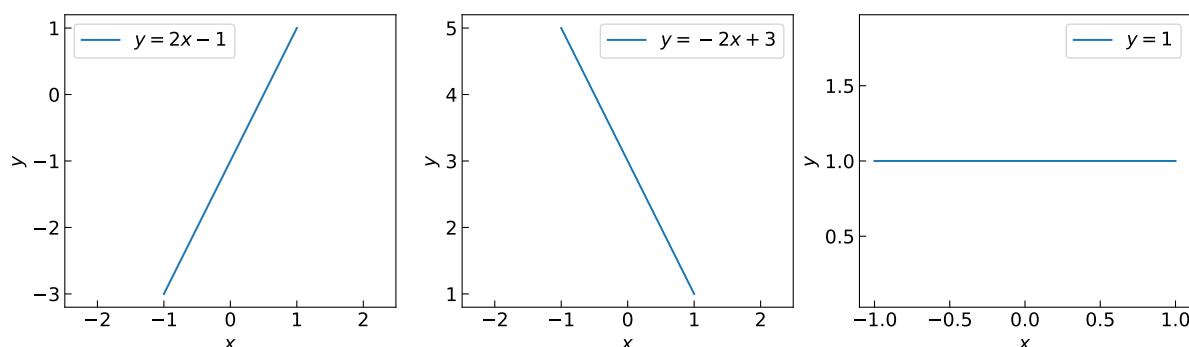


Figura 3.1: Gráficos de funções lineares.

**Funções quadráticas:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$ . Para determinar a imagem de  $f$  escrevemos

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

em que  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Vemos daqui que

1. se  $a > 0$ , a imagem de  $f$  é o intervalo  $[-\Delta/4a, \infty)$  e  $f(-b/2a) = -\Delta/4a$ .
2. se  $a < 0$ , a imagem de  $f$  é o intervalo  $(-\infty, -\Delta/4a]$  e  $f(-b/2a) = -\Delta/4a$ .

O gráfico de  $f$  é uma parábola que se estende verticalmente para cima (baixo) se  $a > 0$  ( $a < 0$ ) como mostrado na figura 3.2.

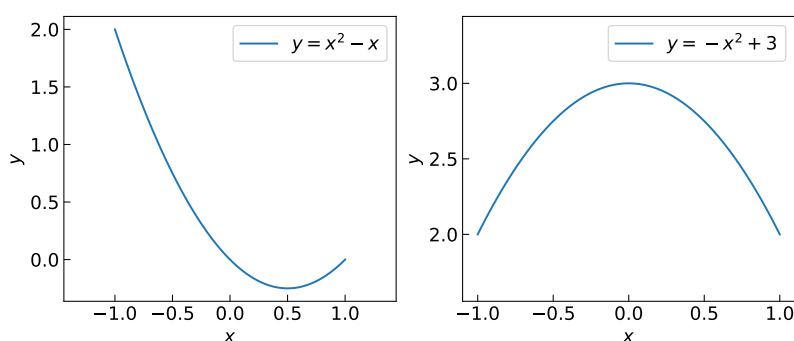


Figura 3.2: Gráficos de funções quadráticas.

**Funções polinomiais:**  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$  e sua imagem é  $\mathbb{R}$  se o maior expoente de  $x$  é ímpar. No caso em que esse expoente é par, a imagem de  $f$  é um intervalo da forma  $[a, \infty)$ . A figura 3.3 mostra o gráfico da função  $f(x) = x^n$  para vários valores de  $n \in \mathbb{N}$ .

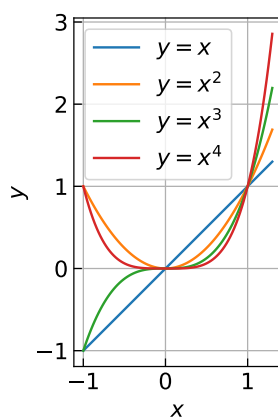


Figura 3.3: Gráfico da função  $f(x) = x^n$  para vários valores de  $n \in \mathbb{N}$ .

**Funções racionais:**  $f(x) = p(x)/q(x)$ , em que  $p$  e  $q$  são funções polinomiais. O domínio de  $f$  é  $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ . A figura 3.4 mostra os gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  e  $g(x) = 1/x^2$ .

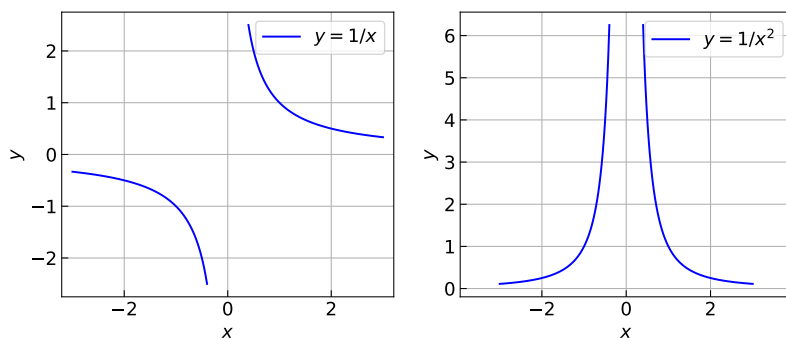


Figura 3.4: Gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  e  $g(x) = 1/x^2$ .

**Funções algébricas:** São funções que podem envolver as operações racionais (adição, multiplicação, subtração e divisão) e raízes de diversas ordens em suas definições. Por exemplo:  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2/x} - (\sqrt{x} - 1)^2$ . Para determinar o domínio dessas funções, deve-se levar em conta que os denominadores nunca devem se anular e, além disso, o interior de raízes de ordem par sempre deve ser uma quantidade não-negativa. A figura 3.5 mostra o gráfico da função  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $g(x) = x^{1/n}$ , para vários valores de  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $g$  é a inversa da função  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^n$ , o gráfico de  $g$  pode ser obtido refletindo o gráfico de  $f$  em relação à reta  $y = x$ . O gráfico de  $g$  também pode ser obtido girando  $90^\circ$  o gráfico de  $f$  no sentido anti-horário e depois refletindo o resultado em relação ao eixo  $y$ .

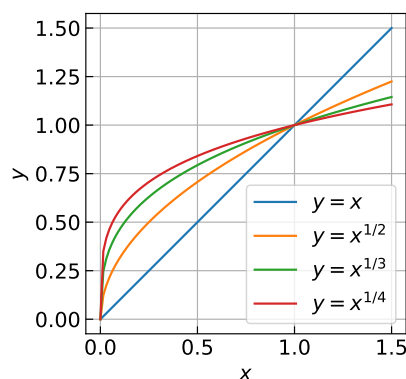


Figura 3.5: Gráfico da função  $f(x) = x^{1/n}$  para vários valores de  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo que contém o ponto 0. Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma **função par** (**ímpar**) se  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ) para todo  $x \in I$ . O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo  $y$  enquanto que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

**Funções trigonométricas:** As funções seno e cosseno, definidas pelas expressões  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$  respectivamente tem  $\mathbb{R}$  como domínio e o intervalo  $[-1, 1]$  como imagem. Elas são **funções periódicas** de período  $2\pi$ , ou seja,  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  e  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (ver figura 3.6). Além disso, a função seno é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno é par. A função tangente é definida pela expressão  $h(x) = \tan x = \sin x / \cos x$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R} \setminus \{(2n-1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$  e sua imagem é  $\mathbb{R}$ . A função tangente é periódica e tem período  $\pi$ . Além disso, ela é uma função ímpar (ver figura 3.7).

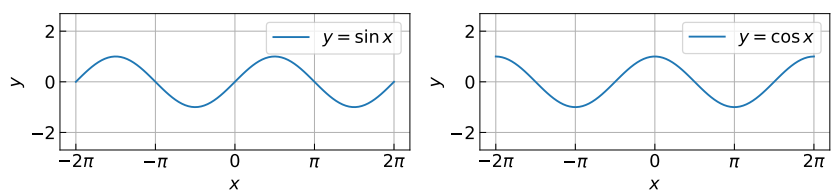


Figura 3.6: Gráficos das funções seno e cosseno.

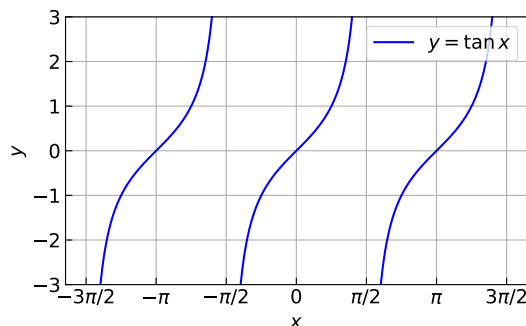


Figura 3.7: Gráfico da função tangente.

Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **monótona crescente** (**decrecente**) se, dados  $x, y \in X$  com  $x < y$ , tem-se que  $f(x) \leq f(y)$  ( $f(y) \leq f(x)$ ). Se sempre ocorre a desigualdade estrita, diz-se ainda que  $f$  é **estritamente crescente** (**decrecente**).

**Função logaritmo:**  $f(x) = \log x$ . O domínio dessa função é  $(0, \infty)$  e sua imagem é  $\mathbb{R}$ . Ela é uma função estritamente crescente tal que  $f(1) = 0$  e  $f(ab) = f(a) + f(b)$  para quaisquer  $a, b > 0$ .

**Função exponencial:**  $f(x) = \exp x$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R}$  e sua imagem é  $(0, \infty)$ . Ela é a inversa da função logaritmo. A função exponencial é estritamente crescente e é tal que  $f(0) = 1$  e  $f(a + b) = f(a)f(b)$ .

# Capítulo 4

## Espaços euclidianos\*

O conjunto  $\mathbb{R}^d$  é chamado de **espaço euclidiano  $d$ -dimensional** e seus elementos são chamados de **pontos** ou de **vetores**.

Definem-se em  $\mathbb{R}^d$  as operações de **adição** e **multiplicação por um escalar** pelas equações

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d) \quad \text{e} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_d).$$

$\mathbb{R}^d$  é um **espaço vetorial**, pois essas operações têm as seguintes propriedades:

1.  $x + (y + z) = (x + y) + z$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ;
2.  $x + y = y + x$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ;
3. existe  $0 \in \mathbb{R}^d$  tal que  $x + 0 = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ;
4. para cada  $x \in \mathbb{R}^d$  existe  $-x \in \mathbb{R}^d$  tal que  $x + (-x) = 0$ ;
5.  $1x = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ;
6.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$  para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ ;
7.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  e  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

Define-se o **produto interno** de  $x, y \in \mathbb{R}^d$  por  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ . Podemos verificar que

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ;
2.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ;
3.  $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ;
4.  $\langle x, x \rangle > 0$  se  $x \neq 0$ .

Diz-se que  $x, y \in \mathbb{R}^d$  são **ortogonais** quando  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Define-se a **norma euclidiana** de  $x \in \mathbb{R}^d$  por  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ . Se  $x = y + z$  e  $\langle z, y \rangle = 0$ , então  $|x|^2 = |y|^2 + |z|^2 + 2\langle y, z \rangle = |y|^2 + |z|^2$  (teorema de Pitágoras).

Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Se  $y \neq 0$ , definamos  $\alpha = \langle x, y \rangle / |y|^2$ . Logo, o vetor  $z = x - \alpha y$  é ortogonal a  $y$ . Com efeito, vemos que  $\langle y, z \rangle = \langle y, x \rangle - \alpha \langle y, y \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0$ .

**Teorema 4.1. Desigualdade de Cauchy-Schwarz.** Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^d$  tem-se que  $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $x = \alpha y$  para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Se  $y = 0$ , OK. Se  $y \neq 0$ , existe  $z \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\langle y, z \rangle = 0$  e  $x = \alpha y + z$ , em que  $\alpha = \langle x, y \rangle / |y|^2$ . Logo,  $|x|^2 = \alpha^2 |y|^2 + |z|^2 \geq \alpha^2 |y|^2 = \langle x, y \rangle^2 / |y|^2$ , o que nos dá a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso, vemos que a igualdade ocorre se, e somente se,  $|z| = 0$ . Isso implica que a igualdade ocorre se, e somente se,  $z = 0$ , o qual equivale à condição  $x = \alpha y$ .  $\square$

**Teorema 4.2.** Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^d$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tem-se que

1.  $|x| > 0$  se  $x \neq 0$ ;
2.  $|\alpha x| = |\alpha||x|$ ;
3.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ;
4.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

*Demonstração.* 3.  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$ .  $\square$

Uma **norma** em  $\mathbb{R}^d$  é uma função  $|\cdot| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpre os itens 1, 2 e 3 do teorema anterior. Além da norma euclidiana, de forma convenientemente podemos utilizar a **norma do máximo**  $|x|_M = \max\{x_1, \dots, x_d\}$  e a **norma da soma**  $|x|_S = |x_1| + \dots + |x_d|$ . Pode-se verificar que  $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq d|x|_M$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .

# Capítulo 5

## O conceito de limite para funções

Consideremos a função  $f(x) = x - 2$ . Conforme  $x$  se aproxima de 2,  $f(x)$  se aproxima de 0. Nesse caso, podemos dizer que 0 é o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para 2 e escrever  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ .

Consideremos a função  $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ . O ponto  $1 \in \mathbb{R}$  não pertence ao domínio de  $f$ . Porém, pontos arbitrariamente próximos de 1 pertencem ao domínio de  $f$ . Para esses valores, notamos que  $f(x) = x + 1$  e vemos que, conforme  $x$  tende para 1,  $f(x)$  se aproxima de 2. Nesse caso, podemos dizer que 2 é o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para 1 e escrever  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

Define-se a **bola aberta** de centro  $a \in \mathbb{R}^d$  e raio  $r > 0$  como o conjunto  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| < r\}$ .

Diz-se que  $a \in \mathbb{R}^d$  é um **ponto de acumulação** de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  se para qualquer  $r > 0$  a bola aberta  $B(a, r)$  contém um ponto de  $X$  diferente de  $a$ , ou seja, se  $(X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta) \neq \emptyset$ . O conjunto de todos os pontos de acumulação de  $X$  é denotado por  $X'$ .

Exemplo: O ponto  $1 \in \mathbb{R}$  é um ponto de acumulação do intervalo  $(1, 2)$  embora não pertença a ele.

Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $a \in X'$ , diz-se que  $L \in \mathbb{R}^d$  é o **limite** de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  se, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , pode-se encontrar  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para qualquer  $x \in X$  que satisfaz a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Nesse caso, escreve-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . A definição de limite pode ser rescrita também na seguinte forma: dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in (X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$  implica que  $f(x) \in B(L, \epsilon)$ . Devido a relação entre as normas euclidiana, do máximo e da soma, o limite  $L$  será o mesmo usando qualquer par delas na definição de limite.

**Teorema 5.1** (Unicidade do limite). *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ , então  $L = M$ .*

*Demonstração.* Suponhamos  $L \neq M$  e consideremos  $\epsilon = |L - M|/2$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  que satisfaz a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Como  $|L - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M|$  para todo  $x \in X$ , segue que, se  $0 < |x - a| < \delta$ ,  $|L - M| < \epsilon + |f(x) - M|$ . Isso implica que  $|f(x) - M| > \epsilon$  para todo  $x \in X$  que satisfaz a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Portanto,  $M$  não é o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ . Contradição!  $\square$

Exemplos:

1. Consideremos a função constante  $f(x) = c$ . Temos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = 1$  (pode ser qualquer número positivo) tal que  $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .
2. Seja  $g(x) = x$ . Temos que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$  para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \epsilon$  tal que  $|g(x) - a| = |x - a| < \epsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

**Teorema 5.2.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ .*

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  que satisfaz a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Sob essas condições,  $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon$ .  $\square$

**Teorema 5.3.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $L < M$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < M$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta$ .*

*Demonstração.* Seja  $\epsilon = M - L$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  que satisfaz a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Logo, nessas condições,  $f(x) < \epsilon + L = M$ .  $\square$

**Teorema 5.4. Teorema do sanduíche.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$  e  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x \in X$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .*

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$ . Existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  que satisfaz a condição  $0 < |x - a| < \delta_1$ . Logo, nessas condições,  $L - \epsilon < f(x)$ . De forma análoga, existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $h(x) < L + \epsilon$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta_2$ . Pondo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos que  $L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$  para todo  $x \in X$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ .  $\square$

Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Diz-se que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é **limitada** quando existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| < M$  para todo  $x \in X$ .

**Lema 5.5.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $g$  é limitada, então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $M > 0$  tal que  $|g(x)| < M$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x)| < \epsilon/M$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Logo, nessas condições,  $|f(x)g(x)| < \epsilon$ .  $\square$

**Teorema 5.6.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , então*

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = L/M$  desde que se tenha  $M \neq 0$ .

*Demonstração.* 1. Dado  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon/2$  e  $|g(x) - M| < \epsilon/2$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Logo, nessas condições,  $|f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \epsilon$ .



2. Notamos que  $f(x)g(x) - LM = f(x)[g(x) - M] + [f(x) - L]M$ . Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $L - 1 < f(x) < L + 1$  para todo  $x \in (X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$ . Logo a restrição de  $f$  a  $(X \setminus \{a\}) \cap B(a, \delta)$  é uma função limitada. Portanto, usando o lema 5.5 e o item anterior,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x) - LM] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)[g(x) - M] + \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L]M = 0$ .
3. Notamos que  $1/g(x) - 1/M = [M - g(x)]/Mg(x)$ . Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , segue que  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = |M|$ . Logo, existe  $\delta > 0$  tal que  $|g(x)| > |M|/2$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Logo, nessas condições,  $1/|g(x)| < 2/|M|$ , ou seja, a função  $1/|g|$  é limitada. Portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} [1/g(x) - 1/M] = \lim_{x \rightarrow a} [M - g(x)]/Mg(x) = 0$ .  $\square$

Exemplos:

1. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos a função  $f(x) = x^n$ . Temos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^n$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Se  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ .
3. Se  $p$  e  $q$  são funções polinomiais e  $q(a) \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} p(x)/q(x) = p(a)/q(a)$ . Se  $p(a) = q(a) = 0$ , nada pode ser dito de forma geral sobre o limite de  $p(x)/q(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ . Por exemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2/x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} x/x = 1$ . Por outro lado,  $\lim_{x \rightarrow 0} x/x^2$  não existe, pois se existisse e fosse  $L \in \mathbb{R}$ , então  $1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (x/x^2)x = L \cdot 0 = 0$ . Absurdo!

4. Tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5.1)$$

Podemos dar uma justificativa geométrica para esse resultado usando a circunferência trigonométrica. Percebemos que quando  $|x|$  é pequeno,  $x$  é quase igual a  $\sin x$ . Uma prova da Eq. (5.1) só poderá ser dada depois de definir a função seno de forma analítica. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin x/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é chamada às vezes de **função sinc** (ver figura 5.1).

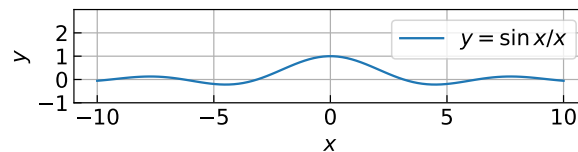


Figura 5.1: Gráfico da função sinc.

Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Vemos que para cada  $x \in X$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . As funções  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  são chamadas de **funções-coordenada** de  $f$ .

**Teorema\* 5.7.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $a \in X'$ . Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , em que  $L = (L_1, \dots, L_d)$ , se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = L_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ .*

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L|_M < \epsilon$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Logo, sob essas condições,  $|f_j(x) - L_j| \leq |f(x) - L|_M < \epsilon$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Reciprocamente, se  $|f_j(x) - L_j| < \epsilon$ ,  $j = 1, \dots, d$ , para todo  $x \in X$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f(x) - L|_M < \epsilon$ .  $\square$

**Corolário\* 5.8.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  e  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$ , tem-se que*

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} h(x)f(x) = \alpha L$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle L, M \rangle.$$

Sejam  $X \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ . Escreve-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ) para indicar que, dado  $A > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > A$  ( $f(x) < -A$ ) para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta$ .

**Teorema 5.9.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ . Tem-se que*

$$1. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ e } g(x) > c \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty;$$

$$2. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ e } g(x) > c > 0 \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty;$$

$$3. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = 0;$$

$$4. \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = \infty.$$

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  um conjunto que não é limitado superiormente (inferiormente) e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Diz-se que  $L \in \mathbb{R}^d$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $\infty$  ( $-\infty$ ) se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $x > A$  ( $x < -A$ ). Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , pode-se ainda definir expressões similares a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Todos os teoremas, lemas e corolários anteriores valem da mesma forma para esses limites.

Exemplos:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x + 7}{4x^2 - 9x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{9}{x} + \frac{6}{x}} = \frac{3}{4}.$$

2. Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x)/x = 0$ . Isso decorre diretamente de usar o teorema do sanduíche na desigualdade  $-1/x \leq (\sin x)/x \leq 1/x$ .

Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Diz-se que  $a \in \mathbb{R}$  é um **ponto de acumulação à direita (esquerda)** de  $X$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $(a, a + \delta) \cap X \neq \emptyset$  ( $(a - \delta, a) \cap X \neq \emptyset$ ). Nesse caso, escreveremos  $a \in X'_+$  ( $a \in X'_-$ ). Diz-se ainda que  $a$  é um **ponto de acumulação bilateral** se  $a \in X'_+ \cap X'_-$ .

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'_+$  ( $a \in X'_-$ ). Diz-se que  $L$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  **pela direita (esquerda)** se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $a < x < a + \delta$  ( $a - \delta < x < a$ ). Nesse caso escreve-se que  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$  ( $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ ).

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'_+ \cap X'_-$ . Verifica-se facilmente que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ .

Exemplo:  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$  não existe. Com efeito, podemos verificar que  $\lim_{x \rightarrow 0+} |x|/x = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0-} |x|/x = -1$ .

**Teorema 5.10.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'_+$  e  $b \in X'_-$ . Se  $f$  é monótona e limitada, então existem os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  seja crescente e consideremos o conjunto  $A = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X, x > a\}$ . Como  $a \in X'_+$ ,  $A \neq \emptyset$ . Além disso, como  $f$  é limitada,  $A$  é limitado e, por conseguinte, existe  $L = \inf A$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $x_0 \in X$ ,  $x_0 > a$ , tal que  $L \leq f(x_0) < L + \epsilon$ . Pondo  $\delta = x_0 - a > 0$ , vemos que para todo  $x \in X$  tal que  $a < x < a + \delta$ , tem-se que  $L \leq f(x) \leq f(a + \delta) < L + \epsilon$ , o que implica que  $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ . Portanto,  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ .  $\square$

**Corolário 5.11** (da demonstração). *Seja  $X \subset \mathbb{R}$  um conjunto que não é limitado superiormente. Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona e limitada superiormente, então existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . De forma análoga, se  $X$  não é limitado inferiormente e  $f$  é limitada inferiormente, então existe  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .*

# Capítulo 6

## Sequências de pontos no espaço euclidiano\*

Uma **sequência** de pontos em um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escreve-se  $x_n$  no lugar de  $x(n)$ . A sequência  $x$  é usualmente denotada listando seus termos  $x_1, x_2, \dots$ .

Diz-se que uma sequência  $x_1, x_2, \dots$  **converge** para um ponto  $a \in \mathbb{R}^d$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , ou seja, se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $|x_n - a| < \epsilon$  para todo  $n > A$ . Nesse caso é comum escrever  $x_n \rightarrow a$ . Uma sequência que converge para um ponto de  $\mathbb{R}^d$  é dita **convergente**; caso contrário é dita **divergente**.

Vale ressaltar que todos os teoremas, lemas e corolários da seção anterior se aplicam da mesma forma para limites de sequências de pontos em  $\mathbb{R}^d$ , com a exceção do teorema 5.10 sobre limites laterais.

Se uma sequência de números reais  $x_1, x_2, \dots$  é monótona crescente (decrecente) e converge para um número  $a \in \mathbb{R}$ , escreveremos  $x_n \uparrow a$  ( $x_n \downarrow a$ ). O corolário 5.11 nos diz que toda sequência de números reais que é monótona e limitada é convergente.

**Teorema 6.1.** *Toda sequência convergente é limitada.*

*Demonstração.* Se  $x_n \rightarrow a$ , existe  $A \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < 1$  para todo  $n > A$ . Logo,  $|x_n| < |a| + 1$  para todo  $n > A$ . Assim, pondo  $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_A|, |a| + 1\}$ , temos que  $|x_n| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Uma **subsequência** de  $x_1, x_2, \dots$  é uma sequência  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$ , na qual  $l_1, l_2, \dots$  é uma sequência de números naturais estritamente crescente.

**Teorema 6.2.** *Se  $x_n \rightarrow a$ , então toda subsequência de  $x_1, x_2, \dots$  converge para  $a$ .*

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $|x_n - a| < \epsilon$  para todo  $n > A$ . Dada uma subsequência  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$ , como  $l_1, l_2, \dots$  é uma sequência de números naturais estritamente crescente, existe  $B \in \mathbb{N}$  tal que  $l_n > A$  para todo  $n > B$ . Portanto, se  $n > B$ ,  $|x_{l_n} - a| < \epsilon$ .  $\square$

**Corolário 6.3** (da demonstração). *Se  $x_n \rightarrow \infty$ , para qualquer subsequência  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$  tem-se que  $x_{l_n} \rightarrow \infty$ .*

**Lema 6.4. Desigualdade de Bernoulli.** *Dados  $h \geq -1$  e  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $(1+h)^n \geq 1 + nh$ .*

*Demonstração.* Usamos indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , OK. Supondo que o lema seja verdadeiro para algum  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h,$$

ou seja, o lema é verdadeiro para  $n+1$ . Portanto, o lema é verdadeiro para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Exemplos:

1. Tem-se que  $1/n \downarrow 0$  em virtude do teorema 5.9.
2. A sequência  $-1, 1, -1, 1, \dots$  é limitada mas é divergente. Com efeito, considerando os termos de índice ímpar obtemos a subsequência  $-1, -1, \dots$  enquanto que considerando os termos de índice par obtemos  $1, 1, \dots$
3. Se  $0 < x < 1$ , então  $x^n \downarrow 0$ . Com efeito, a sequência  $x^1, x^2, \dots$  é estritamente decrescente e limitada. Logo, existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $x^n \downarrow a$ . Como  $x^{2n} = x^n x^n$  e a subsequência  $x^2, x^4, \dots$  converge para  $a$ , segue que  $a = a^2$ . Logo,  $a(1-a) = 0$ . Como  $a \leq x$ , pois o contrário implicaria que  $x^n > x$  para  $n$  suficientemente grande, segue que  $a = 0$ .
4. Se  $|x| < 1$ , então  $x^n \rightarrow 0$ . De fato, usando o teorema do sanduíche na desigualdade  $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$ , temos que  $x^n \rightarrow 0$ , pois  $|x|^n \downarrow 0$ .
5. Se  $|x| > 1$ , então a sequência  $x^1, x^2, \dots$  é divergente. Com efeito, pela desigualdade de Bernoulli,  $|x|^n \geq 1 + n(|x| - 1)$ . Logo, a sequência  $x_1, x_2, \dots$  não é limitada e, por conseguinte, é divergente.
6. A convergência ou divergência da sequência  $x^1, x^2, \dots$  pode ser visualizada analisando o gráfico das funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$  (ver figura 3.3).
7. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $x_n = 1 + q + \dots + q^n$ . Se  $q \neq 1$ , temos que  $x_n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$ . Logo,  $x_n \rightarrow 1/(1 - q)$  se  $|q| < 1$ . Se  $|q| \geq 1$ , a sequência  $x_1, x_2, \dots$  é divergente.
8. Se  $x > 0$ , então  $x^{1/n} \rightarrow 1$ . Com efeito, se  $x \geq 1$ , então  $x^{1/n} \geq x^{1/(n+1)} \geq 1$ ; se  $0 < x < 1$ , então  $x^{1/n} < x^{1/(n+1)} < 1$ . Logo, em qualquer caso, a sequência  $x^{1/1}, x^{1/2}, \dots$  é monótona e limitada. Isso implica que ela é convergente. Suponhamos que  $x^{1/n} \rightarrow a$ . Da relação  $x^{1/n} = x^{1/2n} x^{1/2n}$  segue que  $a = a^2$ . Como  $a \neq 0$ , segue que  $a = 1$ . A convergência da sequência  $x^{1/1}, x^{1/2}, \dots$  pode ser visualizada analisando o gráfico das funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^{1/n}$  (ver figura 3.5).
9. **O número  $e$ :** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $s_n = 1 + 1/1! + \dots + 1/n!$ . Se  $n > 2$ , temos que

$$2 \leq s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3.$$

Logo,  $s_1, s_2, \dots$  é uma sequência limitada. Além disso, ela é estritamente crescente. Portanto, a sequência  $s_1, s_2, \dots$  é convergente, ou seja, existe  $e \in \mathbb{R}$  tal que  $s_n \uparrow e$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $t_n = (1 + 1/n)^n$ . Temos que

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots [n - (n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Logo, a sequência  $t_1, t_2, \dots$  é estritamente crescente. Além disso,  $t_n \leq s_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, por conseguinte, a sequência  $t_1, t_2, \dots$  é convergente. Suponhamos que  $t_n \uparrow a$ . Logo, segue da relação  $t_n \leq s_n$  que  $a \leq e$ . Por outro lado, se  $n \leq m$ , temos que

$$t_m \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right).$$

Tomando o limite  $m \rightarrow \infty$ , temos que

$$a \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n.$$

Isso implica que  $a \leq e$ . Portanto,  $a = e$ .

10. Tem-se que  $n^{1/n} \rightarrow 1$ . Com efeito, se  $n \geq 3$ , sabemos que  $(1 + 1/n)^n < 3 \leq n$  e isso implica que  $(n+1)^{1/(n+1)} < n^{1/n}$ . Logo, a sequência  $3^{1/3}, 4^{1/4}, \dots$  é estritamente decrescente e é limitada. Consequentemente, existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $n^{1/n} \rightarrow a$ . Da relação

$$n^{1/n} = \frac{(2n)^{1/2n} (2n)^{1/2n}}{2^{1/n}}$$

segue que  $a = a^2$ . Como  $a \geq 1$ , segue que  $a = 1$ .

**Lema 6.5.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

*Demonstração.* Seja  $x_1, x_2, \dots$  uma sequência limitada de números reais. Vamos dizer que  $x_p$  é um termo destacado dessa sequência se  $x_p > x_n$  para todo  $n > p$ . Denotemos por  $D$  o conjunto dos índices dos termos destacados da sequência  $x_1, x_2, \dots$ . Se  $D$  é finito, então  $D = \{d_1 < \dots < d_p\}$ . Se  $l_1 > d_p$ , então  $x_{l_1}$  não é um termo destacado e, por conseguinte, existe um índice  $l_2 > l_1$  tal que  $x_{l_1} \leq x_{l_2}$ . Pela sua vez  $x_{l_2}$  não é um termo destacado e, por conseguinte, existe  $l_3 > l_2$  tal que  $x_{l_2} \leq x_{l_3}$ . Dessa maneira, podemos construir uma subsequência  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$ , a qual é monótona crescente e limitada. Logo, essa subsequência é convergente. Por outro lado, se  $D$  é infinito, então  $D = \{d_1 < d_2 < \dots\}$ . Logo, a subsequência  $x_{d_1}, x_{d_2}, \dots$  é estritamente decrescente e limitada. Portanto, ela é convergente.  $\square$

**Teorema 6.6. Teorema de Bolzano-Weierstrass.** *Toda sequência limitada de pontos em  $\mathbb{R}^d$  possui uma subsequência convergente.*

*Demonstração.* Seja  $x_1, x_2, \dots$  uma sequência limitada de pontos em  $\mathbb{R}^d$  e suponhamos que  $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{dn})$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, d\}$ , a sequência de números reais  $x_{j1}, x_{j2}, \dots$  é claramente limitada. Logo, pelo lema 6.5, a sequência  $x_{11}, x_{12}, \dots$  possui uma subsequência convergente  $x_{1l_1}, x_{1l_2}, \dots$ . Por outro lado, a subsequência  $x_{2l_1}, x_{2l_2}, \dots$  é também limitada e, por conseguinte, possui uma subsequência convergente  $x_{2m_1}, x_{2m_2}, \dots$ . Além disso, a subsequência  $x_{1m_1}, x_{1m_2}, \dots$  possui o mesmo limite do que a sequência  $x_{1l_1}, x_{1l_2}, \dots$ . Prosseguindo dessa forma, para cada  $j \in \{1, \dots, d\}$  vamos encontrar uma subsequência  $x_{jz_1}, x_{jz_2}, \dots$  que é convergente. Assim, a subsequência  $x_{z_1}, x_{z_2}, \dots$  será convergente.  $\square$

Dada uma sequência de números reais  $x_1, x_2, \dots$ , sejam  $a_n = \inf_{k \geq n} x_k$  e  $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Define-se o **limite superior (inferior)** da sequência  $x_1, x_2, \dots$  por  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf b_n$  ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup a_n$ ). Em outras palavras,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$  ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k$ ).

**Lema 6.7.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um conjunto não-vazio. Se  $B \subset A$ , então  $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$ .*

*Demonstração.* Temos que  $\inf B \leq x \leq \sup B$  para todo  $x \in B$ . Como  $\sup A$  é uma cota superior de  $A$ , temos que  $x \leq \sup A$  para todo  $x \in B$  e, por conseguinte,  $\sup B \leq \sup A$ . Um raciocínio similar nos leva à desigualdade  $\inf A \leq \inf B$ .  $\square$

**Teorema 6.8.** *Para qualquer sequência de números reais  $x_1, x_2, \dots$  tem-se que  $-\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \infty$ .*

*Demonstração.* Se a sequência  $x_1, x_2, \dots$  não é limitada superiormente (inferiormente), então  $\sup_{k \geq n} x_k = \infty$  ( $\inf_{k \geq n} x_k = -\infty$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ). Por outro lado, pondo  $a_n = \inf_{k \geq n} x_k$  e  $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ . Segue daqui que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n$  é uma cota superior de  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Logo,  $\sup A \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .  $\square$

**Teorema 6.9.** *Seja  $x_1, x_2, \dots$  uma sequência de números reais. Existem subsequências  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$  e  $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots$  tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{l_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

*Demonstração.* Seja  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in [-\infty, \infty]$ . Se  $\alpha = -\infty$ , o conjunto  $\{\sup_{k \geq n} x_k : n \in \mathbb{N}\}$  não é limitado inferiormente. Logo, dado  $A > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \leq \sup_{k \geq N} x_k < -A$  para todo  $n > N$ , ou seja,  $x_n \rightarrow -\infty$ . Se  $\alpha = \infty$ , então  $\sup_{k \geq n} x_k = \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, a sequência  $x_1, x_2, \dots$  não é limitada superiormente. Assim, existe  $l_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{l_1} > 1$  e para cada  $n > 1$  podemos encontrar  $l_n > l_{n-1}$  tal que  $x_{l_n} > n$ . Dessa maneira,  $x_{l_n} \rightarrow \infty$ . Se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dado  $\epsilon > 0$ , temos que  $\alpha - \epsilon < \alpha \leq \sup_{k \geq n} x_k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, existe  $l_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha - \epsilon < x_{l_1} \leq \sup_{k \geq 1} x_k$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar  $l_n > l_{n-1}$  tal que  $\alpha - \epsilon < x_{l_n} \leq \sup_{k \geq l_{n-1}} x_k$ . Assim,  $\alpha - \epsilon < x_{l_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sup_{k \geq N} x_k \leq x_n < \alpha + \epsilon$  para todo  $n > N$ . Logo,  $\alpha - \epsilon < x_{l_n} < \alpha + \epsilon$  para todo  $n > N$ , ou seja,  $x_{l_n} \rightarrow \alpha$ . De forma análoga pode-se provar que existe uma subsequência  $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ .  $\square$

**Teorema 6.10.** *Seja  $x_1, x_2, \dots$  uma sequência de números reais. Se  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$  é uma subsequência tal que  $x_{l_n} \rightarrow a$ , então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .*

*Demonstração.* Seja  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  e suponhamos que  $x_{l_n} \rightarrow a > \alpha$ . Logo, existe  $c \in (\alpha, a)$  tal que  $c > \alpha$ . Isso implica que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $c > \sup_{k \geq N} x_k \geq x_n$  para todo  $n > N$ . Porém, segue daqui que toda subsequência convergente de  $x_1, x_2, \dots$  converge para um limite  $\leq c$ . Contradição! Portanto, devemos ter  $a \leq \alpha$ . De forma similar pode-se provar que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$ .  $\square$

**Teorema 6.11.** *Seja  $x_1, x_2, \dots$  uma sequência de números reais. Tem-se  $x_n \rightarrow a$  com  $a \in \mathbb{R}$  se, e somente se,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .*

*Demonstração.*  $(\Rightarrow)$  Como  $x_n \rightarrow a$ , toda subsequência de  $x_1, x_2, \dots$  converge para  $a$ . Como existem subsequências de  $x_1, x_2, \dots$  que convergem para  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  e  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ , segue que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .  $(\Leftarrow)$  Dado  $\epsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $a - \epsilon < \inf_{k \geq n_1} x_k \leq a \leq \sup_{k \geq n_2} x_k < a + \epsilon$ . Logo, pondo  $N = \max\{n_1, n_2\}$ , temos que  $a - \epsilon < \inf_{k \geq N} x_k \leq \sup_{k \geq N} x_k < a + \epsilon$ . Portanto,  $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$  para todo  $n > N$ , ou seja,  $x_n \rightarrow a$ .  $\square$

# Capítulo 7

## Séries de números reais\*

Uma **série** de números reais é a soma dos termos de uma sequência de números reais  $a_1, a_2, \dots$ , a qual é denotada por  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Se para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Se o limite do lado direito existe, a série é dita **convergente**; caso contrário, ela é dita **divergente**. A sequência  $s_1, s_2, \dots$  é chamada de sequência das **somas parciais** da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Uma série de números não-negativos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente se, e somente se, existe  $M > 0$  tal que  $\sum_{j=1}^n a_n < M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Com efeito, nesse caso a sequência das somas parciais da série é monótona crescente e limitada.

Se uma série de números não-negativos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente (divergente), escreve-se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  ( $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ).

**Teorema 7.1.** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série convergente, então  $a_n \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Seja  $s_1, s_2, \dots$  a sequência das somas parciais de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Se  $s_n \rightarrow L$ , então  $s_{n-1} \rightarrow L$ . Logo,  $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow 0$ .  $\square$

Exemplos:

1. Dado  $x \in \mathbb{R}$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  é chamada de **série geométrica**. Na seção 6 vimos que a série geométrica é convergente se, e somente, se  $|x| < 1$ . Nesse caso, temos também que  $x^n \rightarrow 0$ .
2. A série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  é divergente, pois  $(-1)^n \not\rightarrow 0$ .
3. A série  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$  é chamada de **série harmônica**. Seja  $s_n = 1/1 + \dots + 1/n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Vemos que

$$\begin{aligned} s_{2m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \frac{1}{2^m} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a sequência  $s_{2^1}, s_{2^2}, \dots$  não é limitada. Como para cada  $n \in \mathbb{N}$  pode-se encontrar  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $2^m \geq 1 + m > n$ , segue que a sequência  $s_1, s_2, \dots$  não



é limitada. Portanto, a série harmônica é divergente, ou seja,  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = \infty$ , mesmo que se tenha  $1/n \downarrow 0$ .

**Teorema 7.2. Critério de comparação.** *Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  duas séries de números não-negativos. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$  e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ . Por outro lado, se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$  e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ .*

*Demonstração.* Sejam  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  e  $t_n = b_1 + \dots + b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$  e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $M > 0$  tal que  $t_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $s_n \leq t_n \leq M$  e, por conseguinte,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ . Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ , a sequência  $s_1, s_2, \dots$  não é limitada. Logo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $l_n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \leq s_{l_n} \leq t_{l_n}$ . Assim, a sequência  $t_1, t_2, \dots$  possui uma subsequência que não é limitada e, por conseguinte,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ .  $\square$

Exemplo: Dado  $r \in \mathbb{Q}$ , consideremos a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r)$ . Se  $r < 1$ , temos que  $1/n^r > 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = \infty$ , pelo critério de comparação, segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r) = \infty$ . Se  $r > 1$ , seja  $s_1, s_2, \dots$  a sequência das somas parciais de  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r)$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$  temos que

$$\begin{aligned} s_{2^m-1} &= 1 + \left( \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} \right) + \left( \frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r} \right) + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^r} \\ &\leq 1 + \left( \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^r} \right) + \left( \frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^r} \right) + \dots + \frac{1}{(2^{m-1})^r} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{(2^{r-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{r-1})^{m-1}} \\ &\leq \frac{1}{1 - 1/2^{r-1}} \end{aligned}$$

Logo, a sequência  $s_1, s_2, \dots$  possui uma subsequência limitada. Isso implica que a própria sequência  $s_1, s_2, \dots$  é limitada, pois ela é monótona. Portanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^r) < \infty$  se  $r > 1$ .

Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é dita **absolutamente convergente** se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série convergente tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ , diz-se que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série **condicionalmente convergente**.

**Teorema 7.3.** *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Definindo  $p_n = \max\{a_n, 0\}$  e  $q_n = \max\{-a_n, 0\}$ , temos que  $p_n, q_n \geq 0$ ,  $|a_n| = p_n + q_n$  e  $a_n = p_n - q_n$ . Como  $p_n, q_n \leq |a_n|$ , segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$ . Portanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ .  $\square$

**Corolário 7.4.** *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  uma série de números não-negativos. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$  e  $|a_n| \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente.*

Exemplo: A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n^2$  é absolutamente convergente para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Com efeito, isso segue de observar que  $|\sin(nx)/n^2| \leq 1/n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e que  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) < \infty$ .

**Teorema 7.5. Critério da raiz.** *Se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente. Por outro lado, se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.*

*Demonstração.* Se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < c < 1$ , então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sup_{k \geq N} \sqrt[k]{|a_k|} < c$  para todo  $n \geq N$ . Logo,  $|a_n| < c^n$  para todo  $n \geq N$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} c^n < \infty$ , segue do critério de comparação que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Por outro lado, se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , existe uma subsequência  $\sqrt[l_1]{|a_{l_1}|}, \sqrt[l_2]{|a_{l_2}|}, \dots$  tal que  $\sqrt[l_i]{|a_{l_i}|} > 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dessa maneira,  $|a_n| \not\rightarrow 0$ , ou seja, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.  $\square$

Exemplos:

1. A série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$  é convergente, pois  $\sqrt[n]{1/n^n} = 1/n \rightarrow 0$ .
2. A série harmônica é divergente e  $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$ . Por outro lado, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$  é convergente e  $\sqrt[n]{1/n^2} \rightarrow 1$ .

**Teorema 7.6. Critério da razão.** Se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente. Por outro lado, se  $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

*Demonstração.* Se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < c < 1$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_{n+1}/a_n| \leq A_N < c$  para todo  $n \geq N$ . Logo,

$$\left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| < c, \quad \left| \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \right| < c, \quad \dots, \quad \left| \frac{a_{N+n-N}}{a_{N+n-N-1}} \right| < c.$$

Multiplicando essas desigualdades, temos  $|a_n/a_N| < c^{n-N}$  para todo  $n \geq N$ . Logo,  $|a_n| < |a_N|c^{n-N}$  para todo  $n \geq N$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_N|c^{n-N} < \infty$ , segue do critério de comparação que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Se, por outro lado, temos que  $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $|a_{n+1}| \geq |a_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $|a_n| \not\rightarrow 0$ , pois  $|a_n| \geq |a_1| > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, nesse caso, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.  $\square$

Exemplos:

1. Dados  $k \in \mathbb{N}$  e  $x > 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k/x^n$  é convergente pois

$$\frac{(n+1)^k}{x^{n+1}} \frac{x^n}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{x},$$

em que o lado direito converge a  $1/x < 1$ . A convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k/x^n$  também pode ser provada usando o critério da raiz. Com efeito, temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k/x^n} = 1/x < 1$ .

2. A série harmônica é divergente e  $(n+1)/n \rightarrow 1$ . Por outro lado, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$  é convergente e  $(n+1)^2/n^2 \rightarrow 1$ .
3. Para cada  $m \in \mathbb{N}$  sejam  $a_{2m-1} = 1/m^m$  e  $a_{2m} = 2/m^m$ . A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, pois

$$\sqrt[2m-1]{a_{2m-1}} = \frac{1}{m^{m/(2m-1)}} \leq \frac{1}{m^{1/2}},$$

e  $\sqrt[2m]{a_{2m}} = m^{1/2}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$  e, por conseguinte,  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0 < 1$ . No entanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 2m - 1 \\ \frac{m^m}{2(m+1)^{m+1}} & \text{se } n = 2m \end{cases}$$

e, por conseguinte,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 2$ . Logo, o teste da razão é inconclusivo.

Os exemplos anteriores ilustram em particular que o critério da raiz é mais forte do que o critério da razão.

**Teorema 7.7.** *Para qualquer sequência de números reais  $a_1, a_2, \dots$  tem-se que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > c > \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ . Da segunda desigualdade segue que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $c > \sup_{n \geq N} |a_{n+1}/a_n| \geq |a_{n+1}|/|a_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, sob essa condição, temos que  $c^{n-N} > |a_n|/|a_N|$  e, por conseguinte,  $c \sqrt[n]{|a_N|/c^N} > \sqrt[n]{|a_n|}$ . Como o lado esquerdo dessa desigualdade tende a  $c$  quando  $n \rightarrow \infty$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $c + \epsilon > c \sqrt[n]{|a_N|/c^N} > \sqrt[n]{|a_n|}$  para todo  $n > A$ . Por outro lado, existe  $\delta > 0$  tal que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > c + \delta > c$ . Logo, podemos encontrar uma subsequência  $\sqrt[1]{|a_{l_1}|}, \sqrt[2]{|a_{l_2}|}, \dots$  tal que  $\sqrt[l_n]{|a_{l_n}|} > c + \delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Contradição! Portanto, deve-se ter  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ . A desigualdade envolvendo os limites inferiores pode ser provada de forma análoga.  $\square$

**Teorema 7.8.** *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uma série absolutamente convergente. Para qualquer bijeção  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tem-se que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\phi(n)}| < \infty$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .*

*Demonstração.* Consideremos primeiramente que  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dada uma bijeção  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , seja  $m = \max\{\phi(1), \dots, \phi(n)\}$ . Logo,  $\sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} \leq \sum_{j=1}^m a_j$ . Como  $\sum_{j=1}^m a_j \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , segue que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$  é convergente e que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Por outro lado, se  $n = \max\{\phi^{-1}(1), \dots, \phi^{-1}(m)\}$ , temos que  $\sum_{j=1}^m a_j \leq \sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ . Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ . Se agora  $a_1, a_2, \dots$  é uma sequência de números não necessariamente não-negativos, definindo  $p_n = \max\{a_n, 0\}$  e  $q_n = \max\{-a_n, 0\}$ , temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$ . Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} q_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ . Portanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (p_{\phi(n)} - q_{\phi(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .  $\square$

# Capítulo 8

## Funções contínuas

Ingenuamente, uma função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deve ter um gráfico que é uma curva que não tem saltos. Isso quer dizer que uma variação pequena de  $x$  deve provocar também uma variação pequena no valor de  $f(x)$ . Passemos para as definições agora.

Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Diz-se que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é **contínua** em um ponto  $a \in X$  se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $|x - a| < \delta$ . A continuidade de  $f$  no ponto  $a$  não depende do par de normas usadas na definição anterior (euclidiana, do máximo, da soma). Usando a terminologia de bolas abertas, temos que  $f$  é contínua no ponto  $a$  se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$  sempre que  $x \in B(a, \delta) \cap X$ . Se  $f$  é contínua em todo ponto de  $X$ , diz-se simplesmente que é uma função contínua.

Seja  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Diz-se que  $a \in X$  é um **ponto isolado** de  $X$  se  $a$  não é um ponto de acumulação de  $X$ , ou seja, se existe  $\delta > 0$  tal que  $X \cap B(a, \delta) \subset \{a\}$ . Se  $X$  não tem pontos de acumulação, diz-se que  $X$  é um **conjunto discreto**. Exemplos:  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$ .

Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $a \in X$  é um ponto isolado de  $X$ , toda função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínua no ponto  $a$ . Com efeito, existe  $\delta > 0$  tal que  $B(a, \delta) \cap X = \{a\}$ . Logo, dado  $\epsilon > 0$ , tem-se que  $0 = |f(x) - f(a)| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $|x - a| < \delta$ .

Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $a \in X \cap X'$ , a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínua no ponto  $a$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Teorema 8.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas no ponto  $a \in X$ , então  $f \pm g$  e  $fg$  são contínuas no ponto  $a$ . Além disso, se  $g(a) \neq 0$ ,  $f/g$  é contínua no ponto  $a$ .*

*Demonstração.* Se  $a$  é um ponto isolado, OK. Se  $a \in X'$ , então o teorema é consequência do teorema 5.6. □

Exemplo: As funções  $f(x) = c$  e  $g(x) = x$  são claramente contínuas. Logo, pelo teorema 8.1, toda função polinomial é contínua e toda função racional é contínua no seu domínio.

**Teorema\* 8.2.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . A função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínua no ponto  $a \in X$  se, e somente se, as funções-coordenada de  $f$  são contínuas no ponto  $a$ .*

*Demonstração.* Consequência do teorema 5.7. □

**Corolário\* 8.3.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas no ponto  $a \in X$ , então  $|f|$ ,  $f \pm g$ ,  $hf$ ,  $\langle f, g \rangle$  são contínuas no ponto  $a$ .*

Diz-se que um conjunto  $G \subset \mathbb{R}^d$  é um **conjunto aberto** se para cada  $x \in G$  existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset G$ .

**Teorema\* 8.4.** *Toda bola aberta de  $\mathbb{R}^d$  é um conjunto aberto.*

*Demonstração.* Seja  $p \in B(a, r)$  e consideremos  $\epsilon = r - |p - a|$ . Vamos provar que  $B(p, \epsilon) \subset B(a, r)$ . Se  $x \in B(p, \epsilon)$ , então  $|x - a| \leq |x - p| + |p - a| < \epsilon + |p - a| = r$ . Portanto,  $B(p, \epsilon) \subset B(a, r)$ .  $\square$

**Teorema\* 8.5.** *Considerando subconjuntos de  $\mathbb{R}^d$ , tem-se que*

1.  $\mathbb{R}^d$  e  $\emptyset$  são conjuntos abertos;
2. a união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto;
3. a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

*Demonstração.* 1. Se  $\emptyset$  não fosse aberto, existiria  $a \in \emptyset$  tal que  $B(a, r) \not\subset \emptyset$  para todo  $r > 0$ . Absurdo!

2. Seja  $G_\alpha$  um conjunto aberto para cada elemento  $\alpha$  de um conjunto arbitrário  $I$  e seja  $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ . Se  $a \in G$ , existe  $\alpha \in I$  tal que  $a \in G_\alpha$ . Como  $G_\alpha$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset G_\alpha \subset G$ . Portanto,  $G$  é aberto.
3. Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois conjuntos abertos. Se  $a \in G_1 \cap G_2$ , então existem  $r_1, r_2 > 0$  tais que  $B(a, r_1) \subset G_1$  e  $B(a, r_2) \subset G_2$ . Considerando  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , temos que  $B(a, r) \subset G_1 \cap G_2$ . Portanto,  $G_1 \cap G_2$  é aberto.  $\square$

Define-se o **fecho** de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  como o conjunto  $\overline{X} = X \cup X'$ . Diz-se ainda que o conjunto  $X$  é **fechado** se  $\overline{X} = X$ .

**Teorema\* 8.6.** *Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^d$  é fechado se, e somente se,  $F^c$  é aberto.*

*Demonstração.*  $(\Rightarrow)$  Se  $a \in F^c$ , então  $a \notin F'$ . Logo, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \cap F = \emptyset$ . Isso implica que  $B(a, r) \subset F^c$ . Portanto,  $F^c$  é aberto.  $(\Leftarrow)$  Se  $a \in F'$ , então  $B(a, r) \cap F \neq \emptyset$  para qualquer  $r > 0$ . Logo,  $B(a, r) \not\subset F^c$  para todo  $r > 0$ . Como  $F^c$  é aberto, segue que  $a \notin F^c$ , ou seja,  $a \in F$ . Portanto,  $F$  é fechado.  $\square$

**Corolário\* 8.7.** *Considerando subconjuntos de  $\mathbb{R}^d$ , tem-se que*

1.  $\mathbb{R}^d$  e  $\emptyset$  são conjuntos fechados;
2. a interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado;
3. a união de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

**Teorema\* 8.8.** *O fecho de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  é um conjunto fechado.*

*Demonstração.* Se  $a \in \overline{X}^c$ , então  $a \notin X$  e  $a \notin X'$ . Logo, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \cap X = \emptyset$ . Como  $B(a, r)$  é um conjunto aberto, para cada  $x \in B(a, r)$  existe  $\epsilon_x > 0$  tal que  $B(x, \epsilon_x) \subset B(a, r)$ . Logo,  $B(x, \epsilon_x) \cap X = \emptyset$  para todo  $x \in B(a, r)$ . Isso implica que nenhum  $x \in B(a, r)$  é ponto de acumulação de  $X$  e, por conseguinte,  $B(a, r) \cap \overline{X} = \emptyset$ . Logo,  $B(a, r) \subset \overline{X}^c$ . Portanto,  $\overline{X}^c$  é aberto.  $\square$

Dado um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$ , diz-se que  $A \subset X$  é **aberto em  $X$**  se para cada  $a \in A$  existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \cap X \subset A$ . Por outro lado, diz-se que  $A$  é **fechado em  $X$**  se  $\overline{A} \cap X = A$ .

**Teorema\* 8.9.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Um conjunto  $A \subset X$  é aberto em  $X$  se, e somente se, existe um conjunto aberto  $G \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $A = G \cap X$ .*

*Demonstração.*  $(\Rightarrow)$  Para cada  $x \in X$ , existe  $r_x > 0$  tal que  $B(x, r_x) \cap X \subset A$ . O conjunto  $G = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$  é aberto e tem-se que  $G \cap X = A$ .  $(\Leftarrow)$  Se  $A = G \cap X$ , no qual  $G \subset \mathbb{R}^d$  é um conjunto aberto, então para cada  $a \in A$  tem-se que  $a \in G$ . Logo, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset G$  e, por conseguinte,  $B(a, r) \cap X \subset A$ .  $\square$

**Corolário\* 8.10.** *Dado  $X \subset \mathbb{R}^d$ , tem-se que*

1. *um conjunto  $A \subset X$  é fechado em  $X$  se, e somente se,  $X \setminus A$  é aberto em  $X$ ;*
2.  *$X$  e  $\emptyset$  são abertos e fechados em  $X$ ;*
3. *a união (interseção) arbitrária de conjuntos abertos (fechados) em  $X$  é um conjunto aberto (fechado) em  $X$ ;*
4. *a interseção (união) de dois conjuntos abertos (fechados) em  $X$  é um conjunto aberto (fechado) em  $X$ .*

Dada uma função  $f : X \rightarrow Y$ , define-se a **imagem inversa** de um conjunto  $B \subset Y$  por  $f$  como o conjunto  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ .

**Teorema\* 8.11.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $A, B \subset Y$ . Tem-se que*

1. *se  $A \subset B$ , então  $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ ;*
2.  *$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ;*
3.  *$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ;*
4.  *$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ .*

**Teorema\* 8.12.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínua se, e somente se,  $f^{-1}(G)$  é um conjunto aberto em  $X$  para qualquer aberto  $G \subset \mathbb{R}^d$ .*

*Demonstração.*  $(\Rightarrow)$  Seja  $G \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto aberto. Se  $a \in f^{-1}(G)$ , então  $b = f(a) \in G$ . Como  $G$  é aberto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(b, \epsilon) \subset G$ . Por outro lado, como  $f$  é contínua no ponto  $a$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \in B(b, \epsilon)$  sempre que  $x \in B(a, \delta) \cap X$ . Logo,  $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(B(b, \epsilon)) \subset f^{-1}(G)$ . Portanto,  $f^{-1}(G)$  é aberto em  $X$ .  $(\Leftarrow)$  Seja  $a \in X$ . Dado  $\epsilon > 0$ , ponhamos  $G = B(f(a), \epsilon)$ . Como  $G$  é aberto,  $f^{-1}(G)$  é aberto em  $X$  e, além disso,  $a \in f^{-1}(G)$ . Logo, existe  $\delta > 0$  tal que  $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(G)$ . Dessa maneira,  $x \in B(a, \delta) \cap X$  implica que  $f(x) \in G$ . Portanto,  $f$  é contínua no ponto  $a$ .  $\square$

Seja  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Diz-se que os conjuntos  $A, B \subset X$  formam uma **cisão** de  $X$  se  $A$  e  $B$  são abertos em  $X$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e  $X = A \cup B$ . Claramente  $X$  e  $\emptyset$  formam uma cisão de  $X$ , a qual é chamada de **cisão trivial**.

Diz-se que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  é **conexo** se só admite a cisão trivial.

**Teorema\* 8.13.** *Os únicos subconjuntos conexos de  $\mathbb{R}$  são os intervalos.*

*Demonstração.* Se  $X \subset \mathbb{R}$  não é um intervalo, existem  $a, b \in X$  e  $x \in X^c$  tais que  $a < x < b$ . Logo, os conjuntos  $A = (-\infty, x) \cap X$  e  $B = (x, \infty) \cap X$  são abertos em  $X$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e  $X = A \cup B$ . Assim,  $A$  e  $B$  formam uma cisão de  $X$  e, por conseguinte,  $X$  não é conexo. Consideremos agora que  $X \subset \mathbb{R}$  seja um intervalo e suponhamos que existam conjuntos não-vazios  $A, B \subset X$  que formem uma cisão não-trivial de  $X$ . Se  $a \in A$ ,  $b \in B$  e  $a < b$ , então  $x_1 = (a + b)/2 \in X$ . Logo, só uma das seguintes afirmações é verdadeira:  $x_1 \in A$  ou  $x_1 \in B$ . No primeiro caso definimos o intervalo  $I_1 \subset X$  como  $I_1 = [x_1, b]$  e no segundo como  $I_1 = [a, x_1]$ . Dessa maneira,  $I_1$  tem comprimento  $(b - a)/2$  e uma das extremidades de  $I_1$  pertence a  $A$  e a outra a  $B$ . Repetindo esse procedimento, podemos encontrar intervalos fechados  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$  tais que  $I_n$  tem comprimento  $(b - a)/2^n$  e uma das suas extremidades pertence a  $A$  e a outra a  $B$ . Pelo teorema dos intervalos encaixados existe  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $I_n = [a_n, b_n]$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b_n - a_n = (b - a)/2^n < \epsilon$ . Logo,  $c - a_n < \epsilon$  e  $b_n - c < \epsilon$ , o que implica que  $c - \epsilon < a_n \leq c \leq b_n < c + \epsilon$ , ou seja,  $a_n, b_n \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$ . Como  $A$  e  $B$  são abertos em  $X$ , segue que  $c \notin A$  e  $c \notin B$ . Absurdo! Portanto,  $X$  deve ser conexo.  $\square$

**Teorema\* 8.14.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função contínua e  $X$  é conexo, então  $f(X)$  é conexo.*

*Demonstração.* Sejam  $Y = f(X)$  e suponhamos que  $A, B \subset Y$  formem uma cisão de  $Y$ . Como  $A$  e  $B$  são abertos em  $Y$ , existem conjuntos abertos  $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^d$  tais que  $A = Y \cap G_1$  e  $B = Y \cap G_2$ . Logo,  $f^{-1}(A) = f^{-1}(G_1)$  e  $f^{-1}(B) = f^{-1}(G_2)$ , os quais são abertos em  $X$ , pelo teorema 8.12. Além disso,  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$  e  $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$ , ou seja,  $f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(B)$  formam uma cisão de  $X$ . Como  $X$  é conexo, deve-se ter  $f^{-1}(A) = X$  e  $f^{-1}(B) = \emptyset$  ou vice-versa. Considerando o primeiro caso, segue que  $B = \emptyset$  e  $A = Y$ . Portanto,  $Y$  é conexo.  $\square$

**Corolário 8.15. Teorema do valor intermediário.** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então a imagem de  $f$  é um intervalo. Em outras palavras, para qualquer  $d$  no intervalo fechado de extremidades  $f(a)$  e  $f(b)$  existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = d$ .*

Exemplos:

1. A equação  $x^4 - 6x + 3 = 0$  tem pelo menos uma solução. Com efeito, a função  $p(x) = x^4 - 6x + 3$  é contínua e podemos verificar que  $p(0) = 3$  e  $p(1) = -2$ . Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $p(x_0) = 0$ .
2. **Teorema do ponto fixo de Brouwer** em uma dimensão: Se  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  é uma função contínua, existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = c$ . Com efeito, se  $f(a) = a$  ou  $f(b) = b$ , OK. Se isso não acontece, então  $f(a) - a > 0$  e  $f(b) - b < 0$ . Como a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x) - x$  é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe  $c \in [a, b]$  tal que  $g(c) = 0$ .

**Lema\* 8.16.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e injetiva, então ela é monótona.*

*Demonstração.* Consideremos inicialmente que  $I = [a, b]$  e suponhamos que  $f(a) < f(b)$ . Devemos ter que  $f$  é estritamente crescente. Com efeito, se existissem  $x, y \in [a, b]$  tais que  $x < y$  e  $f(x) > f(y)$ , teríamos duas possibilidades:  $f(x) > f(y) > f(a)$  ou  $f(b) > f(a) > f(y)$ . No primeiro caso, pelo teorema do valor intermediário, existiria  $x_1 \in [a, x]$  tal que  $f(x_1) = f(y)$ ; no segundo caso existiria  $x_2 \in [y, b]$  tal que  $f(x_2) = f(a)$ .

Assim, ambos casos contradizem a injetividade de  $f$ . Logo,  $f$  deve ser estritamente crescente. Analogamente podemos provar que  $f(a) > f(b)$  implica que  $f$  é estritamente decrescente. Consideremos agora que  $I$  seja um intervalo arbitrário. Se  $f$  não fosse monótona, existiriam  $a, b, c, d \in I$  tais que  $a < b$ ,  $c < d$ ,  $f(a) < f(b)$  e  $f(c) > f(d)$ . Do que foi provado anteriormente segue que temos dois casos:  $a < b \leq c < d$  ou  $c < d \leq a < b$ . No primeiro caso, se  $f(a) < f(d)$  ( $f(a) > f(d)$ ),  $f$  seria estritamente crescente (decrescente) em  $[a, d]$ , contradizendo o fato de ela ser estritamente decrescente (crescente) em  $[c, d]$  ( $[a, b]$ ). De forma análoga podemos verificar que o segundo caso também nos leva a uma contradição. Portanto,  $f$  deve ser monótona.  $\square$

**Teorema 8.17.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $f : I \rightarrow J$  é uma bijeção contínua, sua inversa é contínua e monótona.*

*Demonstração.* Pelo lema 8.16,  $f$  é monótona. Suponhamos que  $f$  seja estritamente crescente e denotemos a sua inversa por  $g$ . Se  $g$  não fosse estritamente crescente, existiriam  $y_1, y_2 \in J$  tais que  $y_1 < y_2$  e  $g(y_1) > g(y_2)$ . Porém, isso implicaria que  $y_1 = f(g(y_1)) > f(g(y_2)) = y_2$ . Contradição! Portanto,  $g$  deve ser estritamente crescente. Para provar que  $g$  é contínua, consideremos um conjunto  $A \subset I$  aberto em  $I$ . Notamos que  $g^{-1}(A) = f(A)$ . Se  $b \in f(A)$ , existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ . Como  $A$  é aberto em  $I$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B = (a - \delta, a + \delta) \cap I \subset A$ . Logo,  $B$  é um intervalo e, por conseguinte,  $f(B)$  também é. Se  $b$  é uma extremidade de  $f(B)$ , então  $a$  é uma extremidade de  $B$  devido a que  $f$  é estritamente crescente. Logo,  $a$  é uma extremidade de  $I$  e, por conseguinte,  $b$  é uma extremidade de  $J$ . Portanto, considerando um número positivo  $\epsilon$  menor do que o comprimento do intervalo  $f(B)$ , temos que  $(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap J \subset f(B) \subset f(A)$ , o que implica que  $f(A)$  é aberto em  $J$ . Se  $b$  não é uma extremidade de  $f(B)$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subset f(B) \subset f(A)$ . Logo,  $f(A)$  é aberto em  $J$ . Portanto, em qualquer um dos casos,  $g^{-1}(A) = f(A)$  é aberto em  $J$  e, por conseguinte,  $g$  é contínua.  $\square$

Uma bijeção contínua cuja inversa é também contínua é chamada de um **homeomorfismo**.

Exemplo: Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definida por  $f(x) = x^n$  é contínua e injetiva. Logo, pelo lema 8.16, ela é monótona. Como  $0^n < 1^n$ , segue que  $f$  é estritamente crescente. A função  $f$  é sobrejetiva, pois  $f$  é contínua,  $f(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Logo,  $f$  é uma bijeção e, pelo teorema 8.17, sua inversa  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , definida por  $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ , é contínua e estritamente crescente. Assim, temos provado em particular a existência e unicidade da raiz  $n$ -ésima de um número não-negativo.

**Teorema 8.18.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$  e  $Y \subset \mathbb{R}^d$ . Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua no ponto  $a \in X$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma função contínua no ponto  $b = f(a)$ , então  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  é contínua no ponto  $a$ .*

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\eta > 0$  tal que  $|g(y) - g(b)| < \epsilon$  para todo  $y \in Y$  satisfazendo a condição  $|y - b| < \eta$ . Por outro lado, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - b| < \eta$  para todo  $x \in X$  que satisfaz a condição  $|x - a| < \delta$ . Portanto, nessas condições temos que  $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$ .  $\square$

Exemplos:

1. Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 - 2x} = 0$ . Com efeito, a função  $f(x) = x^2 - 2x$  é contínua no ponto 2 e a função  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  é contínua no ponto 0. Logo,  $g \circ f$  é contínua no ponto 2 e, por conseguinte,  $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = g(f(2)) = 0$ .



2. Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(\sin x)/x} = 1$ . Com efeito, a função

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua no ponto 0 e a função  $g(x) = \sqrt{x}$  é contínua no ponto 1. Logo,  $g \circ f$  é contínua no ponto 0 e, por conseguinte,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0)) = 1$ . Desse exemplo podemos concluir que, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , e  $g$  é uma função contínua no ponto  $L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(L)$ , mesmo que  $a$  não pertença ao domínio de  $f$ .

Diz-se que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  é **limitado** se existe  $c > 0$  tal que  $|x| \leq c$  para todo  $x \in X$ .

Diz-se que um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^d$  é **compacto** se é fechado e limitado. Por exemplo, qualquer intervalo fechado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  é um conjunto compacto. Além disso, é claro que todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto.

**Teorema\* 8.19.** *Um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^d$  é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em  $K$  possui uma subsequência que converge para um ponto de  $K$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $x_1, x_2, \dots$  é uma sequência de pontos em  $K$ , ela é limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência convergente  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^d$  tal que  $x_{l_n} \rightarrow a$ . Logo,  $B(a, \epsilon) \cap K \neq \emptyset$  para qualquer  $\epsilon > 0$ . Como  $K$  é fechado, segue que  $a \in K$ . ( $\Leftarrow$ ) Se  $K$  não fosse limitado, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existiria  $x_n \in K$  tal que  $|x_n| > n$ . Logo, a sequência  $x_1, x_2, \dots$  não possuiria subsequência limitada e, por conseguinte, convergente. Contradição! Portanto,  $K$  deve ser limitado. Se  $K$  não fosse fechado, existiria  $a \in K' \setminus K$ . Logo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existiria  $x_n \in K \cap B(a, 1/n)$ , ou seja,  $|x_n - a| < 1/n$ . Logo,  $|x_n - a| \rightarrow 0$  e, por conseguinte,  $x_n \rightarrow a$ . Dessa maneira, toda subsequência de  $x_1, x_2, \dots$  converge para  $a \in K^c$ . Contradição! Portanto,  $K$  deve ser fechado.  $\square$

**Teorema\* 8.20.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínua em um ponto  $a \in X$  se, e somente se, para toda sequência de pontos  $x_1, x_2, \dots \in X$  tal que  $x_n \rightarrow a$ , tem-se que  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $|x - a| < \delta$ . Se  $x_n \in X$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_n \rightarrow a$ , então existe  $A > 0$  tal que  $|x_n - a| < \delta$  para todo  $n > A$ . Assim, se  $n > A$ ,  $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ . Portanto,  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . ( $\Leftarrow$ ) Se  $f$  não fosse contínua no ponto  $a$ , existiria  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se encontrar  $x_n \in X \cap B(a, 1/n)$  satisfazendo a condição  $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ . Logo, temos que  $x_n \rightarrow a$  mas  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ . Contradição! Portanto,  $f$  deve ser contínua no ponto  $a$ .  $\square$

Exemplo: A função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua no ponto 0 para qualquer valor da constante  $c \in \mathbb{R}$  (ver figura 8.1). Com efeito, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sejam  $x_n = 2/(4n + 1)\pi$  e  $y_n = 2/(4n + 3)\pi$ . Logo,  $x_n \downarrow 0$  e  $y_n \downarrow 0$ ; porém  $f(x_n) \rightarrow 1$  e  $f(y_n) \rightarrow -1$ .

**Teorema\* 8.21.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto compacto. Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função contínua, então  $f(K)$  é compacto.*

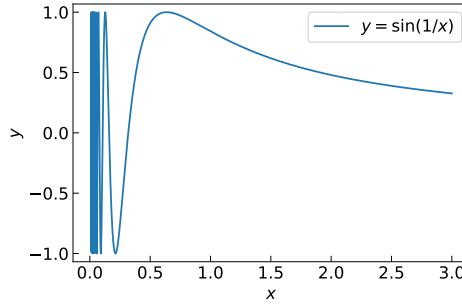


Figura 8.1: Gráfico da função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(1/x)$ .

*Demonstração.* Seja  $y_1, y_2, \dots$  uma sequência de pontos em  $f(K)$ . Logo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in K$  tal que  $f(x_n) = y_n$ . Como  $K$  é compacto, a sequência  $x_1, x_2, \dots$  possui uma subsequência  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots$  que converge para um ponto  $a \in K$ . Logo, como  $f$  é contínua,  $f(x_{l_n}) \rightarrow f(a)$ . Assim, a subsequência  $y_{l_1}, y_{l_2}, \dots$  é convergente e, por conseguinte,  $f(K)$  é compacto.  $\square$

**Corolário 8.22. Teorema de Weierstrass.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto compacto. Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então ela atinge seus valores mínimo e máximo, ou seja, existem  $x_1, x_2 \in K$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  para todo  $x \in K$ .*

Exemplo: A função  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1/x$  não tem um valor máximo nem um valor mínimo.

**Teorema\* 8.23.** *Sejam  $K \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto compacto e  $L \subset \mathbb{R}^d$ . Se  $f : K \rightarrow L$  é uma bijeção contínua, então  $f^{-1} : L \rightarrow K$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $y_1, y_2, \dots$  uma sequência de pontos em  $L$  que converge a  $b \in L$ . Consideremos que  $f^{-1}(b) = a$  e ponhamos  $f^{-1}(y_n) = x_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Suponhamos que  $x_n \not\rightarrow a$ . Logo, existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar um índice  $l_n > n$  para o qual  $|x_{l_n} - a| \geq \epsilon$ . Como  $K$  é compacto, passando para uma subsequência se necessário, existe  $a_1 \in K$  tal que  $x_{l_n} \rightarrow a_1$ . Logo,  $|x_{l_n} - a| \rightarrow |a_1 - a|$  e, por conseguinte,  $|a_1 - a| \geq \epsilon$ . Em particular, isso implica que  $a_1 \neq a$ . Como  $f$  é contínua,  $f(x_{l_n}) \rightarrow f(a_1) \neq f(a)$ , o qual contradiz o fato de que  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Portanto, deve-se ter que  $x_n \rightarrow a$ , o que implica que  $f^{-1}$  é contínua.  $\square$

Exemplo: A função  $f : (-1, 0) \cup [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definida por  $f(x) = x^2$  é uma bijeção contínua. No entanto, sua inversa não é contínua no ponto 1.

Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Diz-se que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é **uniformemente contínua** se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  para quaisquer  $x, y \in X$  satisfazendo a condição  $|x - y| < \delta$ .

Exemplo: Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Diz-se que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é **lipchitziana** se existe  $c > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$ . Toda função lipchitziana é claramente uniformemente contínua.

**Teorema\* 8.24.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uniformemente contínua se, e somente se, para quaisquer sequências  $x_1, x_2, \dots \in X$  e  $y_1, y_2, \dots \in X$  tais que  $x_n - y_n \rightarrow 0$  tem-se que  $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  para quaisquer  $x, y \in X$  satisfazendo a condição  $|x - y| < \delta$ . Se  $x_1, x_2, \dots \in X$  e  $y_1, y_2, \dots \in X$  são sequências tais que  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $|x_n - y_n| < \delta$  para todo  $n > A$ . Logo,  $n > A$  implica que  $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$  e, por conseguinte,  $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ . ( $\Leftarrow$ ) Se  $f$  não é uniformemente contínua, existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar  $x_n, y_n \in X$  satisfazendo as condições  $|x_n - y_n| \leq 1/n$  e  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ . Logo,  $x_n - y_n \rightarrow 0$  mas  $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$ .  $\square$

**Teorema\* 8.25.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto compacto. Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função contínua, então ela é uniformemente contínua.*

*Demonstração.* Se  $f$  não fosse uniformemente contínua, existiriam sequências  $x_1, x_2, \dots \in K$  e  $y_1, y_2, \dots \in K$  tais que  $x_n - y_n \rightarrow 0$  e  $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$ . Como  $K$  é compacto, considerando subsequências se necessário, existiriam  $a, b \in K$  tais que  $x_n \rightarrow a$  e  $y_n \rightarrow b$ . Logo,  $a = b$  e, como  $f$  é contínua,  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  e  $f(y_n) \rightarrow f(a)$ . Porém, isso implicaria que  $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ . Contradição! Portanto,  $f$  deve ser uniformemente contínua.  $\square$

Exemplo: A função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt{x}$  é uniformemente contínua. Com efeito, a restrição de  $f$  ao intervalo  $[0, 1]$  é uniformemente contínua e a restrição de  $f$  ao intervalo  $(1, \infty)$  é lipchitziana, pois nesse caso

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{1}{2}|x - y|.$$

Logo, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  para quaisquer  $x, y \in [0, 1]$  ou  $x, y > 1$  satisfazendo a condição  $|x - y| < \delta_1$ . Por outro lado, se  $x > 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  e  $x - y < \epsilon$ , então

$$|f(x) - f(y)| = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < |x - y| < \epsilon.$$

Logo, pondo  $\delta = \min\{\epsilon, \delta_1\}$ , temos que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  para quaisquer  $x, y \geq 0$  satisfazendo a condição  $|x - y| < \delta$ .

**Teorema\* 8.26.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto limitado. Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uniformemente contínua, então  $f$  é limitada.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  não seja limitada. Logo, escolhido  $x_1 \in X$ , existe  $x_2 \in X$  tal que  $|f(x_2)| \geq |f(x_1)| + 1$ , pois  $f$  não é limitada. Supondo definidos  $x_1, \dots, x_n$ , escolhamos  $x_{n+1} \in X$  de tal forma que  $|f(x_{n+1})| \geq |f(x_n)| + 1$ , o qual é possível devido a que  $f$  não é limitada. Assim, temos que  $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \geq |f(x_{n+1})| - |f(x_n)| \geq 1$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  é limitado, passando para uma subsequência se necessário, existe  $a \in \mathbb{R}^m$  tal que  $x_n \rightarrow a$ . Logo,  $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$  mas  $f(x_{n+1}) - f(x_n) \not\rightarrow 0$ . Portanto,  $f$  não é uniformemente contínua.  $\square$

Exemplo: A função  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1/x$  é contínua mas não é uniformemente contínua, pois não é limitada.

**Teorema\* 8.27.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $a \in X'$ . Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se, e somente se, para qualquer sequência  $x_1, x_2, \dots \in X \setminus \{a\}$  tal que  $x_n \rightarrow a$ , tem-se que  $f(x_n) \rightarrow L$ .*

*Demonstração.* Análoga à demonstração do teorema 8.20.  $\square$

**Teorema\* 8.28.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$  e  $a \in X'$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uniformemente contínua, então existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .*

*Demonstração.* Fixemos  $r > 0$  e consideremos o conjunto limitado  $A = B(a, r) \cap X$ . A restrição de  $f$  a  $A$  é uniformemente contínua e  $a \in A'$ . Seja  $x_1, x_2, \dots \in X \setminus \{a\}$  uma sequência tal que  $x_n \rightarrow a$ . Como  $f$  é uniformemente contínua, pelo teorema 8.26, temos que  $f(x_1), f(x_2), \dots$  é uma sequência limitada. Logo, ela possui uma subsequência convergente. Seja  $L \in \mathbb{R}^d$  tal que  $f(x_{l_n}) \rightarrow L$ . Por outro lado,  $f(x_n) - f(x_{l_n}) \rightarrow 0$ , pois  $f$  é uniformemente contínua e  $x_n - x_{l_n} \rightarrow 0$ . Logo, como  $f(x_n) = [f(x_n) - f(x_{l_n})] + f(x_{l_n})$ , segue que  $f(x_n) \rightarrow L$ . Portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .  $\square$

# Capítulo 9

## A derivada de funções de uma variável real

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $a \in X \cap X'$ . Define-se a **derivada** de  $f$  no ponto  $a$  por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que o limite do lado direito exista. A derivada de  $f$  no ponto  $a$  também pode ser denotada por

$$\frac{df}{dx}(a).$$

Se  $n = 1$ , a derivada de  $f$  no ponto  $a$  pode ser interpretada geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $a$ .

Exemplo: A função  $f(x) = |x|$  não é derivável no ponto 0, pois  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$ , o qual não existe.

Diz-se que uma função é **derivável** em um determinado ponto se existe a derivada da função nesse ponto. Se a função é derivável em todo ponto do seu domínio, diz-se que ela é uma função derivável.

Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função derivável, para cada  $x \in X$  existe  $f'(x)$ . Isso define uma **função derivada**  $f' : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Se  $f$  é definida dando simplesmente uma expressão para  $f(x)$ , os símbolos

$$f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

vão representar a expressão da função derivada  $f'$ . Se  $f'$  é uma função derivável, podemos definir a **função segunda derivada** ou a **derivada de segunda ordem** de  $f$  por  $f'' : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x).$$

Nesse caso, dizemos que  $f$  é **duas vezes derivável**. De forma análoga podem ser definidas derivadas de ordens superiores.

**Teorema 9.1.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$ . Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções deriváveis no ponto  $a$ , então*

1.  $f \pm g$  é derivável no ponto  $a$  e vale a relação  $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ;

2. **regra do produto:**  $fg$  é derivável no ponto  $a$  e vale a relação  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ;
3.  $1/g$  é derivável no ponto  $a$  desde que se tenha  $g(a) \neq 0$  e vale a relação  $(1/g)'(a) = -g'(a)/[g(a)]^2$ .

*Demonstração.* 1. Temos que

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \pm g(x) - [f(a) \pm g(a)]}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= f'(a) \pm g'(a).\end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)[g(x) - g(a)] + [f(x) - f(a)]g(a)}{x - a} \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a).\end{aligned}$$

3. Temos que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}. \quad \square$$

**Corolário\* 9.2.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$ . Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções deriváveis no ponto  $a$ , então*

1.  $f \pm g$  é derivável no ponto  $a$  e vale a relação  $(f \pm g)' = f'(a) \pm g'(a)$ ;
2.  $hf$  é derivável no ponto  $a$  e vale a relação  $(hf)'(a) = h'(a)f(a) + h(a)f'(a)$ ;
3.  $\langle f, g \rangle$  é derivável no ponto  $a$  e vale a relação  $\langle f, g \rangle'(a) = \langle f'(a), g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \rangle$ .

Exemplos:

1. As funções  $f(x) = c$  e  $g(x) = x$  são deriváveis e valem as relações  $f'(x) = 0$  e  $g'(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . De fato, para qualquer  $a \in \mathbb{R}$  temos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0 \quad \text{e} \quad g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dx} = 1.$$

2. Usando a regra do produto, podemos concluir que

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \tag{9.1}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para isso usamos indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , OK. Supondo que a afirmação seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n x) = \left(\frac{d}{dx}x^n\right)x + x^n \frac{dx}{dx} = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

Portanto, a Eq. (9.1) vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Se  $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ , então, usando os resultados anteriores, temos que  $p'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1$ . Portanto, toda função polinomial é derivável.
4. Toda função racional é derivável. De fato se a equação  $f(x) = p(x)/q(x)$  define uma função racional  $f$ , então  $p$  e  $q$  são funções polinomiais e, para qualquer  $x$  no domínio de  $f$ ,

$$f'(x) = p'(x) \frac{1}{q(x)} - p(x) \frac{q'(x)}{[q(x)]^2} = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2}.$$

**Teorema 9.3.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$ . Se a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é derivável no ponto  $a$ , então ela é contínua nesse ponto.*

*Demonstração.* Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 f'(a) = 0.$$

Portanto,  $f$  é contínua no ponto  $a$ . □

Exemplos:

1. A função seno é derivável no ponto 0. Com efeito, temos que

$$\text{sen}'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Logo, a função seno é contínua no ponto 0.

2. A função cosseno é derivável no ponto 0. Com efeito,

$$\cos'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Usando a identidade trigonométrica  $\cos x = 1 - 2 \text{sen}^2(x/2)$ , temos que

$$\cos'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 \text{sen}^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\text{sen}(x/2)}{x/2} \text{sen}(x/2).$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x/2)/(x/2) = 1$  e, pelo item anterior, a função seno é contínua no ponto 0, temos que  $\cos'(0) = 0$ . Logo, a função cosseno é contínua no ponto 0.

3. As funções seno e cosseno são de fato funções deriváveis e, por conseguinte, contínuas. Com efeito, para qualquer  $a \in \mathbb{R}$  temos que

$$\text{sen}'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a + h) - \text{sen } a}{h}.$$

Usando a identidade trigonométrica  $\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$ , temos que

$$\sin'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin a \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h} \right).$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 0,$$

segue que  $\sin'(a) = \cos a$ . Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

Por outro lado,  $\cos'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} [\cos(a + h) - \cos a]/h$ . Usando a identidade trigonométrica  $\cos(a + h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$ , temos que

$$\cos'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \frac{\sin h}{h} \right) = - \sin a.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \cos x = - \sin x.$$

4. A função  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sin(1/x)$  é contínua mas não é uniformemente contínua, pois  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  não existe.
5. Como  $\tan x = \sin x / \cos x$ , temos que

$$\tan'(x) = \sin'(x) \frac{1}{\cos x} + \sin x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Logo, podemos escrever,

$$\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

**Teorema 9.4.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : I \rightarrow J$  uma bijeção contínua. Se  $f$  é derivável no ponto  $a \in I$  e  $f'(a) \neq 0$ , então  $f^{-1}$  é derivável no ponto  $b = f(a)$  e vale a relação  $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$ .*

*Demonstração.* Temos que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y - b}{f^{-1}(y) - a}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'(a)$  e  $f^{-1}$  é contínua no ponto  $b$ . Segue que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Exemplos:



1. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definida por  $f(x) = x^n$  é uma bijeção derivável e  $f'(x) = nx^{n-1} > 0$  para todo  $x > 0$ . Logo,  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , definida por  $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ , é derivável em  $(0, \infty)$  e vale a relação

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}$$

para todo  $y > 0$ . Portanto, podemos escrever

$$\frac{d}{dx}x^{1/n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1} \quad (x > 0).$$

2. A função  $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  definida por  $f(x) = \sin x$  é uma bijeção crescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco seno** e é denotada por  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  (ver figura 9.1). Como  $f'(x) = \cos x > 0$  para todo  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , a função arco seno é derivável em  $(-1, 1)$ , valendo a relação

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

3. A função  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  definida por  $f(x) = \cos x$  é uma bijeção decrescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco cosseno** e é denotada por  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  (ver figura 9.1). Como  $f'(x) = -\sin x < 0$  para todo  $x \in (0, \pi)$ , a função arco cosseno é derivável em  $(-1, 1)$ , valendo a relação

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

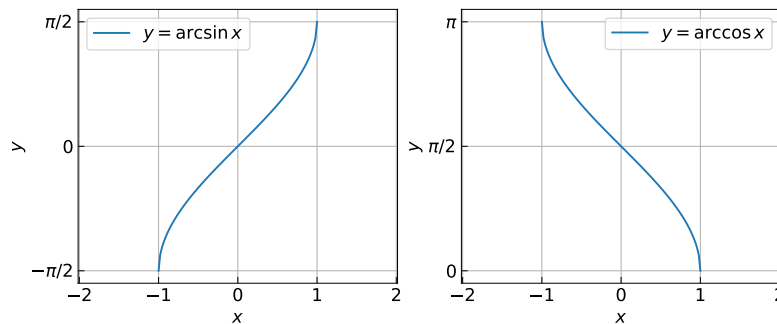


Figura 9.1: Gráficos das funções arco seno e arco cosseno. Nota-se que a função arco seno é uma função ímpar.

4. A função  $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \tan x$  é uma bijeção crescente e derivável. A inversa dessa função é chamada de **função arco tangente** e é

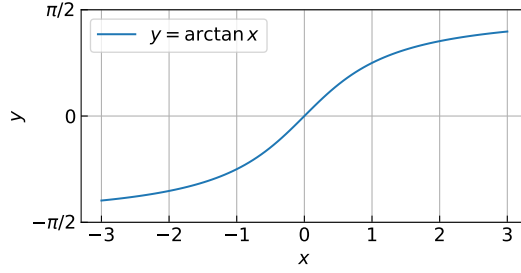


Figura 9.2: Gráfico da função arco tangente. Nota-se que ela é uma função ímpar.

denotada por  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  (ver figura 9.2). Como  $f'(x) = \sec^2 x > 0$  para todo  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , a função arco tangente é derivável e

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função derivável no ponto  $a$ , para qualquer  $x \in X$ , temos que  $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + r(x)$ , em que  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a) = 0$ . Reciprocamente, se  $f(x) = f(a) + (x-a)v + r(x)$  para todo  $x \in X$  e  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a) = 0$ , então a função  $f$  é derivável no ponto  $a$  e  $f'(a) = v$ .

**Teorema 9.5. Regra da cadeia.** *Sejam  $X, Y \subset \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$ . Se  $f : X \rightarrow Y$  é derivável no ponto  $a$ ,  $f(a) \in Y \cap Y'$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^d$  é derivável no ponto  $f(a)$ , então  $g \circ f$  é derivável no ponto  $a$  e vale a relação  $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  é derivável no ponto  $a$ , temos que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + r(x)$$

para todo  $x \in X$ , em que  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a) = 0$ . Por outro lado, como  $g$  é derivável no ponto  $f(a)$ , temos que

$$g(y) = g(f(a)) + (y-f(a))g'(f(a)) + s(y)$$

para qualquer  $y \in Y$ , em que  $\lim_{y \rightarrow f(a)} s(y)/[y-f(a)] = 0$ . Logo, em particular, para qualquer  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + [f(x) - f(a)]g'(f(a)) + s(f(x)) \\ &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + r(x)g'(f(a)) + s(f(x)). \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{s(f(x))}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{s(f(x))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Como  $f$  é contínua no ponto  $a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} s(f(x))/[f(x)-f(a)] = 0$ . Segue daqui que  $\lim_{x \rightarrow a} s(f(x))/(x-a) = 0$ . Dessa maneira, temos que

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + t(x)$$

para todo  $x \in X$ , em que  $\lim_{x \rightarrow a} t(x)/(x-a) = 0$ . Portanto,  $g \circ f$  é derivável no ponto  $a$  e vale a relação  $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$ .  $\square$

Exemplo: Consideremos as funções  $f(x) = x^m$  e  $g(x) = x^{1/n}$ . Como  $f$  e  $g$  são funções deriváveis, pela regra da cadeia temos que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = mx^{(m-1)/n} \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.$$

Portanto, para qualquer  $r \in \mathbb{Q}$ , temos que

$$\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1},$$

desde que o lado direito esteja definido.

**Teorema 9.6.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Se  $f$  é monótona crescente, então  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in X$ . Por outro lado, se  $f$  é monótona decrescente, então  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in X$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  seja monótona crescente. Se existe  $a \in X$  tal que  $f'(a) < 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $[f(x) - f(a)]/(x - a) < 0$  para todo  $x \in X$  satisfazendo a condição  $0 < |x - a| < \delta$ . Logo,  $f(x) > f(a)$  para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a)$  e  $f(x) < f(a)$  para todo  $x \in X \cap (a, a + \delta)$ . Isso implica que  $f$  não é monótona crescente. Contradição! Portanto, devemos ter  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in X$ . O caso no qual  $f$  é monótona decrescente pode ser provado de forma análoga.  $\square$

Exemplo: A função  $f(x) = x^3$  é estritamente crescente. No entanto, não se tem  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . De fato,  $f'(0) = 0$ .

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $a \in X \cap X'_+$ . Define-se a **derivada à direita** de  $f$  no ponto  $a$  por

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Analogamente, se  $a \in X \cap X'_-$ , define-se a **derivada à esquerda** de  $f$  no ponto  $a$  por

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

É claro que  $f$  é derivável em um ponto  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$  se, e somente se,  $f'_+(a) = f'_-(a)$ .

**Teorema 9.7.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Se  $f'_+(a)$  e  $f'_-(a)$  existem, então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .*

Exemplo: Consideremos a função  $f(x) = |x|$ . Temos que  $f'_+(0) = 1$  e  $f'_-(0) = -1$ . Logo,  $f$  é contínua no ponto 0 embora não seja derivável nesse ponto.

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Diz-se que  $a \in X$  é um **ponto de mínimo (máximo)** de  $f$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $f(a) \leq f(x)$  ( $f(a) \geq f(x)$ ) para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ . Nesse caso, diz-se também que  $f$  tem um mínimo (máximo) no ponto  $a$ .

**Teorema 9.8.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ . Se  $a$  é um ponto de mínimo ou de máximo de uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que é derivável nesse ponto, então  $f'(a) = 0$ .*

*Demonstração.* Temos que  $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$ . Suponhamos que  $a$  seja um ponto de mínimo. Logo, existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) - f(a) \geq 0$  para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ . Isso implica que  $[f(x) - f(a)]/(x - a)$  é não-negativo para todo  $x \in X \cap (a, a + \delta)$  e é não-positivo para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a)$ . Assim,  $f'_+(a) \geq 0$  e  $f'_-(a) \leq 0$ . Portanto, devemos ter  $f'(a) = 0$ . O caso no qual  $a$  é um ponto de máximo pode ser tratado de forma semelhante.  $\square$

Exemplo: A recíproca do teorema anterior é falsa. Para ver isso consideremos a função  $f(x) = x^3$ . Temos que  $f'(0) = 0$ , mas 0 não é um ponto de máximo nem de mínimo.

**Teorema 9.9. Teorema de Darboux.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Se  $f'(a) < d < f'(b)$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = d$ .*

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que  $f'(a) < 0 < f'(b)$ . Pelo teorema de Weierstrass, a função  $f$  atinge seus valores máximo e mínimo. Como  $f'(b) > 0$ , segue que existe  $\delta > 0$  tal que  $[f(x) - f(b)]/(x - b) > 0$  para todo  $x \in X \cap (b - \delta, b)$ . Segue daqui que  $f(x) < f(b)$  para todo  $x \in X \cap (b - \delta, b)$  e, por conseguinte,  $b$  não é um ponto de mínimo. De forma análoga pode-se provar que  $a$  também não é um ponto de mínimo. Logo, o valor mínimo de  $f$  é atingido em um ponto  $c \in (a, b)$ . Portanto,  $f'(c) = 0$ , pois  $c$  é um ponto de acumulação bilateral. Consideremos agora o caso geral em que  $f'(a) < f'(b)$ . Se  $f'(a) < d < f'(b)$ , a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x) - dx$  é derivável e é tal que  $g'(a) < 0 < g'(b)$ . Logo, pelo que foi provado anteriormente, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . Isso implica que  $f'(c) = d$ .  $\square$

Exemplo: Não existe função derivável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f'(x) = 1$  se  $x \geq 0$  e  $f'(x) = 0$  se  $x < 0$ .

**Lema 9.10. Teorema de Rolle.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

*Demonstração.* Se  $f(x) = f(a) = f(b)$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é a função constante e, por conseguinte,  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Se esse não for o caso, pelo teorema de Weierstrass, existem  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Como pelo menos um dos valores extremos  $f(x_1)$  ou  $f(x_2)$  é diferente de  $f(a) = f(b)$ , então  $x_1 \in (a, b)$  ou  $x_2 \in (a, b)$ . Além disso, esses pontos seriam pontos de mínimo ou de máximo respectivamente. Portanto,  $f'(x_1) = 0$  ou  $f'(x_2) = 0$ .  $\square$

**Teorema 9.11. Teorema do valor médio.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

*Demonstração.* A função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

é derivável e é tal que  $g(a) = g(b) = 0$ . Logo, pelo teorema de Rolle, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . Isso implica que  $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ .  $\square$

O teorema do valor médio pode ser intuído a partir do gráfico de uma função derivável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dada a reta secante que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , pode-se encontrar uma reta paralela a ela a qual é tangente ao gráfico em um ponto intermediário  $(c, f(c))$ .

**Corolário 9.12.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que é derivável em  $(a, b)$ . Se  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é uma função constante.*

**Corolário 9.13.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que é derivável em  $(a, b)$ . A função  $f$  é monótona crescente se, e somente se,  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . De forma análoga,  $f$  é monótona decrescente se, e somente se,  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Além do mais, se valem as desigualdades estritas para todo  $x \in (a, b)$ ,  $f$  será estritamente crescente ou decrescente respectivamente.*

**Corolário 9.14.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua,  $c \in (a, b)$  e  $f$  derivável em  $(a, c) \cup (c, b)$ . Se  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in (a, c)$  e  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (c, b)$ , então  $c$  é um ponto de mínimo. De forma análoga, se  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, c)$  e  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in (c, b)$ , então  $c$  é um ponto de máximo.*

**Corolário 9.15.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que possui segunda derivada no ponto  $c \in (a, b)$ . Se  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) > 0$ , então  $c$  é um ponto de mínimo. Por outro lado, se  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) < 0$ , então  $c$  é um ponto de máximo.*

Exemplos:

1. A função  $f(x) = |x|$  tem um mínimo no ponto 0, pois  $f'(x) = 1$  se  $x > 0$  e  $f'(x) = -1$  se  $x < 0$ . Nesse caso,  $f'(0)$  não existe.
2. A função  $f(x) = 1/(1+x^2)$  tem um máximo no ponto 0, pois  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = -2$ .

**Teorema 9.16. Teorema do valor médio generalizado.** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas que são deriváveis em  $(a, b)$ . Se  $g$  é injetiva e  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

*Demonstração.* Como  $g$  é contínua e injetiva, existe um intervalo  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  tal que  $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  é uma bijeção. Logo, ela é monótona e sua inversa  $g^{-1}$  é derivável no intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Suponhamos que  $g^{-1}$  seja crescente. Logo,  $g^{-1}(\alpha) = a$  e  $g^{-1}(\beta) = b$ . Dessa maneira,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(g^{-1}(\beta)) - f(g^{-1}(\alpha))}{\beta - \alpha}.$$

Como  $f \circ g^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que é derivável em  $(\alpha, \beta)$ , pelo teorema do valor médio existe  $d \in (\alpha, \beta)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = (f \circ g^{-1})'(d).$$

Se  $g^{-1}(d) = c$ , usando a regra da cadeia e o teorema 9.4, temos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = f'(g^{-1}(d))(g^{-1})'(d) = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

**Teorema\* 9.17. Desigualdade do valor médio.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função contínua que é derivável em  $(a, b)$ . Se existe  $M > 0$  tal que  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ .*

*Demonstração.* Se  $f(a) = f(b)$ , OK. Se esse não é o caso, consideremos a função  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\phi(x) = \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle$ . Essa função é contínua, é derivável em  $(a, b)$  e  $\phi(b) - \phi(a) = |f(b) - f(a)|^2$ . Logo, pelo teorema do valor médio, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a} = \frac{|f(b) - f(a)|^2}{b - a} = f'(c) = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\frac{|f(b) - f(a)|^2}{|b - a|} \leq |f'(c)| |f(b) - f(a)| \leq M |f(b) - f(a)|.$$

Portanto,  $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$ . □

**Corolário\* 9.18.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função contínua que é derivável em  $(a, b)$ . Se  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é uma função constante.*

**Corolário\* 9.19.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função contínua que é derivável em  $(a, b)$ . Se existe  $M > 0$  tal que  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$  para quaisquer  $x, y \in [a, b]$ , ou seja,  $f$  é lipchitziana.*

Diz-se que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^d$  é **convexo** se, dados  $x, y \in X$ ,  $(1 - \alpha)x + \alpha y \in X$  para quaisquer  $x, y \in X$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .

Exemplo: Toda bola aberta de  $\mathbb{R}^d$  é um conjunto convexo. Com efeito, dados  $x, y \in B(a, r)$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , temos que  $|(1 - \alpha)x + \alpha y - a| \leq (1 - \alpha)|x - a| + \alpha|y - a| < r$ .

**Teorema 9.20.** *Os únicos subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}$  são os intervalos.*

*Demonstração.* Se  $X \subset \mathbb{R}$  não é um intervalo, existem  $a, b \in X$  e  $x \in X^c$  tal que  $a < x < b$ . Pondo  $t = (x - a)/(b - a)$ , temos que  $t \in (0, 1)$  e  $x = (1 - t)a + tb$ . Logo,  $X$  não é um conjunto convexo. Reciprocamente, se  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo, dados  $x, y \in I$  com  $x < y$ , a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = (1 - t)x + ty$  é contínua e estritamente crescente. Logo,  $(1 - t)x + ty \in [x, y] \subset I$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Portanto,  $I$  é um conjunto convexo. □

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Diz-se que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é **convexa** se  $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$  para quaisquer  $a, b \in I$  e  $t \in [0, 1]$ . Se  $a < b$ , pondo  $x = (1 - t)a + tb$ , temos que  $t = (x - a)/(b - a)$ . Segue daqui que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (9.2)$$

para quaisquer  $a, b, x \in I$  satisfazendo a condição  $a < x < b$ . Reciprocamente, se a condição (9.2) é satisfeita, a função  $f$  é convexa. Com efeito, pondo  $t = (x - a)/(b - a)$ , podemos obter que  $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$  para quaisquer  $a, b \in I$  com  $a < b$  e  $t \in (0, 1)$ . Se  $b < a$ , pondo  $s = 1 - t$ , podemos obter a mesma desigualdade. Além disso, se  $a = b$  ou  $t \in \{0, 1\}$ , ocorre a igualdade de forma trivial. Portanto,  $f$  é convexa. Intuitivamente, uma função convexa deve ter um gráfico parecido com  $\smile$ . Dessa maneira, qualquer reta secante corta o gráfico de uma função convexa em exatamente dois pontos. Além disso, a porção do gráfico limitada pelos pontos de interseção com a reta secante está por baixo dessa reta.

**Teorema 9.21.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa, então ela é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $a \in I$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset I$ . Consideremos a função  $\phi : (a, a + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\phi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ . Como  $f$  é convexa, segue que  $\phi$  é monótona crescente. Além disso,  $\phi$  é limitada, pois

$$\frac{f(a) - f(a - \epsilon)}{\epsilon} \leq \phi(x) \leq \phi(a + \epsilon)$$

para todo  $x \in (a, a + \epsilon]$ . Logo, pelo teorema 5.10, existe  $\lim_{x \rightarrow a+} \phi(x) = f'_+(a)$ . De maneira análoga, a função  $\psi : [a - \epsilon, a) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\psi(x) = [f(a) - f(x)]/(a - x)$  é monótona crescente e limitada. Logo, existe  $\lim_{x \rightarrow a-} \psi(x) = f'_-(a)$ . Portanto,  $f$  é contínua no ponto  $a$ .  $\square$

Exemplo: A função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(0) = 1$  e  $f(x) = 0$  se  $x \neq 0$  é convexa mas não é contínua.

**Teorema 9.22.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $f$  é uma função convexa;
2. tem-se que  $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$  para quaisquer  $x, a \in I$ ;
3. a função derivada  $f'$  é monótona crescente.

*Demonstração.* ( $1 \Rightarrow 2$ ) Se  $a = x$ , OK. Se  $a < x$ , então para qualquer  $t \in (a, x)$ , temos que

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Logo,  $f'(a) = f'_+(a) \leq [f(x) - f(a)]/(x - a)$ . De forma análoga podemos mostrar que, se  $a > x$ ,  $f'(a) = f'_-(a) \geq [f(x) - f(a)]/(x - a)$ . Portanto,  $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$  para quaisquer  $x, a \in I$ . ( $2 \Rightarrow 3$ ) Dados  $x, y \in I$ , temos que  $f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$  e  $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$ . Logo,  $f(x) \geq f(x) + (y - x)[f'(x) - f'(y)]$ , o que implica que  $(x - y)[f'(x) - f'(y)] \geq 0$ . Portanto, se  $x > y$ , deve-se ter  $f'(x) \geq f'(y)$ , ou seja,  $f'$  é monótona crescente. ( $3 \Rightarrow 1$ ) Se  $f$  não é convexa, existem  $a, b, x \in I$  com  $a < x < b$  tais que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Logo, pelo teorema do valor médio, existem  $\xi \in (a, x)$  e  $\eta \in (x, b)$  tais que  $f'(\xi) > f'(\eta)$ . Assim,  $f'$  não é monótona crescente.  $\square$

**Corolário 9.23.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes derivável. Logo,  $f$  é convexa se, e somente se,  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ .*

Exemplo: A função  $f(x) = x^2$  é convexa, pois  $f''(x) = 2 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Diz-se que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é **côncava** quando  $-f$  é convexa.

Exemplo: A função  $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cos x$  é côncava pois  $f''(x) = -\cos x \leq 0$  para todo  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Diz-se que  $a \in I$  é um **ponto de inflexão** de uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se existe  $\delta > 0$  tal que a restrição de  $f$  a  $(a - \delta, a] \cap I$  é convexa e a restrição a  $[a, a + \delta) \cap I$  é côncava, ou vice-versa.

**Teorema 9.24.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é duas vezes derivável e  $a \in I$  é um ponto de inflexão, então  $f''(a) = 0$ . Por outro lado, se  $f''(a) = 0$  e  $f''$  muda de sinal ao passar pelo ponto  $a$ , então  $a$  é um ponto de inflexão.*

Exemplos:

1. A função  $f(x) = x^4$  é convexa, pois  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo, ela não tem um ponto de inflexão, embora se tenha  $f''(0) = 0$ .
2. A função  $f(x) = 1/(1+x^2)$  tem dois pontos de inflexão:  $1/\sqrt{3}$  e  $-1/\sqrt{3}$ . Com efeito, temos que  $f''(x) = (6x^2 - 2)/(1+x^2)^3$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo,  $f''(1/\sqrt{3}) = 0$ ,  $f''(x) < 0$  se  $x < 1/\sqrt{3}$  e  $f''(x) > 0$  se  $x > 1/\sqrt{3}$ . Por outro lado,  $f''(-1/\sqrt{3}) = 0$ ,  $f''(x) < 0$  se  $x > -1/\sqrt{3}$  e  $f''(x) > 0$  se  $x < -1/\sqrt{3}$ .

**Lema 9.25.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo tal que  $0 \in I$  e seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que possui derivada de ordem  $n$  contínua no ponto 0. Se  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in (-\delta, \delta) \cap I$ , pode-se encontrar  $\xi \in I$  satisfazendo a condição  $0 < |\xi| \leq |x|$  e a relação*

$$\frac{f(x)}{x^n} = f^{(n)}(\xi)r(x),$$

na qual  $|r(x)| \leq 1$ .

*Demonstração.* Usamos indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , como  $f'$  é contínua no ponto 0, existe  $\delta > 0$  tal que  $f'(x)$  existe para todo  $x \in (-\delta, \delta) \cap I$ . Logo, pelo teorema do valor médio, para cada  $x \in (-\delta, \delta) \cap I$  podemos encontrar  $\xi \in I$  tal que  $0 < |\xi| < |x|$  e  $f(x)/x = f'(\xi)$ . Supondo que a afirmação seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in (-\delta, \delta) \cap I$ , pode-se encontrar  $\xi \in I$  satisfazendo a condição  $0 < |\xi| \leq |x|$  e a relação

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = f^{(n)}(\xi)\frac{r(x)}{x},$$

na qual  $|r(x)| \leq 1$ . Se  $f$  possui derivada de ordem  $n+1$  contínua no ponto 0, podemos considerar que  $\delta$  seja tal que  $f^{(n+1)}(x)$  exista para todo  $x \in (-\delta, \delta) \cap I$ . Se, além disso,  $f^{(n)}(0) = 0$ , pelo teorema do valor médio, existe  $\eta \in I$  tal que  $0 < |\eta| < |\xi|$  e  $f^{(n)}(\xi)/\xi = f^{(n+1)}(\eta)$ . Logo,

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = f^{(n+1)}(\eta)r(x)\frac{\xi}{x}.$$

Definindo  $s(x) = r(x)\xi/x$ , vemos que  $|s(x)| \leq |r(x)||\eta|/|x| \leq 1$ . Isso prova a afirmação para  $(n+1) \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Lema 9.26.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo tal que  $0 \in I$  e seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n$  vezes derivável no ponto 0. Tem-se que  $f(0) = f'(0) = \dots = f^n(0) = 0$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^n = 0$ .*

*Demonstração.*  $(\Rightarrow)$  Pelo lema 9.25, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n-1)}(\xi)\frac{r(x)}{x},$$



em que  $0 < |\xi| \leq |x|$  e  $|r(x)| \leq 1$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{\xi} r(x) \frac{\xi}{x}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \xi = 0$  e  $\lim_{y \rightarrow 0} f^{(n-1)}(y)/y = f^{(n)}(0) = 0$ , segue que  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n-1)}(\xi)/\xi = 0$ . Finalmente, como  $|r(x)\xi|/|x| \leq 1$ , obtemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^n = 0$ . ( $\Leftarrow$ ) Se  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^n = 0$ , para cada  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} x^{n-k} = 0.$$

Definamos a função  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$r(x) = f(x) - \left( f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right). \quad (9.3)$$

Vemos imediatamente que  $r$  é  $n$  vezes derivável no ponto 0 e  $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$ . Logo, pelo que foi provado anteriormente, temos que  $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)/x^n = 0$  e, por conseguinte,  $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)/x^k = 0$  para todo  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Usando isso na Eq. (9.3) temos que

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) - f(0) - xf'(0) - \dots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right) = -f(0),$$

ou seja,  $f(0) = 0$ . Supondo que  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$  para algum  $k \in \{1, \dots, n\}$ , temos que

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x^k} - \frac{f(0)}{x^k} - \frac{f'(0)}{x^{k-1}} - \dots - \frac{x^{n-k}}{n!} f^{(n)}(0) \right) = -\frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

ou seja,  $f^{(k)}(0) = 0$ . Portanto,  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$ .  $\square$

**Teorema 9.27. Fórmula de Taylor infinitesimal.** *Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n$  vezes derivável no ponto  $a \in I$ . Logo,*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r(x)$$

para todo  $x \in I$ , em que  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a)^n = 0$ . Reciprocamente, se para qualquer  $x \in I$  tem-se que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + r(x),$$

em que  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a)^n = 0$ , então  $c_k = f^{(k)}(a)/k!$  para todo  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

*Demonstração.* Se vale a primeira expressão para  $f(x)$ , temos que  $r$  é  $n$  vezes derivável no ponto  $a$  e  $r(a) = r'(a) = \dots = r^{(n)}(a) = 0$ . Logo, a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $s(y) = r(y+a)$  é  $n$  vezes derivável no ponto 0 e  $s(0) = s'(0) = \dots = s^{(n)}(0) = 0$ . Consequentemente, pelo lema 9.26, temos que

$$0 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{s(y)}{y^n} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{r(y+a)}{y^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}.$$

Reciprocamente, se  $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + r(x)$  para todo  $x \in I$  e  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a)^n = 0$ , então, definindo a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $s(x) = r(x+a)$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow 0} s(x)/x^n = 0$ . Logo, pelo lema 9.26,  $s(0) = s'(0) = \dots = s^{(n)}(0) = 0$  e, por conseguinte,  $r(a) = r'(a) = \dots = r^{(n)}(a) = 0$ . Usando esse fato na expressão de  $f(x)$ , obtemos que  $c_k = f^{(k)}(a)/k!$  para todo  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .  $\square$

**Corolário 9.28. Regra de L'Hôpital.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $n$  vezes deriváveis no ponto  $a \in I$ . Se  $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$  para todo  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  e  $g^{(n)}(a) \neq 0$ , então*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

**Teorema 9.29. Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n$  vezes derivável em  $(a, b)$  que possui derivada de ordem  $n-1$  contínua em  $[a, b]$ . Logo, existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

*Demonstração.* Segue da fórmula de Taylor infinitesimal que, para qualquer  $x \in [a, b]$ ,

$$f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + r_x(b).$$

A função  $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\rho(x) = r_x(b) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$

é contínua, é derivável em  $(a, b)$  e é tal que  $\rho(b) = 0$ . Logo, pelo teorema do valor médio generalizado, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{r_a(b)}{(b-a)^n} = \frac{\rho(a) - \rho(b)}{(b-a)^n - (b-b)^n} = -\frac{\rho'(c)}{n(b-c)^{n-1}} = -\frac{1}{n(b-c)^{n-1}} \left( -\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c) \right).$$

Portanto,

$$r_a(b) = \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

□

# Capítulo 10

## A integral de Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real

Intuitivamente, a integral de uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  é a área da região limitada pelo gráfico de  $f$  e o eixo  $x$ . Passemos para as definições agora.

Uma **partição** de um intervalo  $[a, b]$  é um conjunto  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ .

Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente e  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  sejam  $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$  e  $m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ . Definem-se a **soma superior** e a **soma inferior** de  $f$  em relação a  $P$  e  $\alpha$  por

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n M_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \quad \text{e} \quad s(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n m_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$$

respectivamente. Se  $\alpha(x) = x$  para todo  $x \in [a, b]$ , as somas superior e inferior de  $f$  em relação a  $P$  e  $\alpha$  são denotadas por  $S(f, P)$  e  $s(f, P)$  respectivamente. Intuitivamente, se  $f$  é contínua e não-negativa, essas somas superior e inferior são aproximações por meio de retângulos da área da região limitada pelo gráfico de  $f$  e o eixo  $x$ .

Seja  $P$  uma partição de um intervalo  $[a, b]$ . Diz-se que um conjunto  $Q$  é um **refinamento** de  $P$  se  $Q$  é uma partição de  $[a, b]$  tal que  $P \subset Q$ .

**Teorema\* 10.1.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente e  $P$  uma partição de  $[a, b]$ . Se  $Q$  é um refinamento de  $P$ , tem-se que  $s(f, P, \alpha) \leq s(f, Q, \alpha) \leq S(f, Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$ .*

*Demonstração.* É claro que  $s(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Seja  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  e suponhamos inicialmente que  $Q = P \cup \{x\}$ , em que  $x \notin P$ . Logo, existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in (x_{j-1}, x_j)$ . Dessa maneira,

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - S(f, Q, \alpha) &= M_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] - M'_1 [\alpha(x) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad - M'_2 [\alpha(x_j) - \alpha(x)] \\ &= (M_j - M'_1) [\alpha(x) - \alpha(x_{j-1})] + (M_j - M'_2) [\alpha(x_j) - \alpha(x)], \end{aligned}$$

em que  $M'_1 = \sup_{x \in [x_{j-1}, x]} f(x)$ ,  $M'_2 = \sup_{x \in [x, x_j]} f(x)$  e  $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ . Como  $M_j \geq M'_1$  e  $M_j \geq M'_2$ , segue que  $S(f, P, \alpha) \geq S(f, Q, \alpha)$ . A desigualdade envolvendo as somas inferiores pode ser provada de forma análoga. Como todo refinamento de  $P$  pode ser construído adicionando pontos a  $P$  de um a um, o teorema é verdadeiro para qualquer refinamento  $Q$  de  $P$ .  $\square$

**Corolário\* 10.2.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Se  $P$  e  $Q$  são partições de  $[a, b]$ , então  $S(f, P, \alpha) \geq s(f, Q, \alpha)$ .*

Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Define-se a **integral superior** de  $f$  em relação a  $\alpha$  por

$$\overline{\int} f d\alpha = \inf\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$$

e a **integral inferior** de  $f$  em relação a  $\alpha$  por

$$\underline{\int} f d\alpha = \sup\{s(f, P, \alpha) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}.$$

As integrais superior e inferior de  $f$  sempre existem e vale a relação

$$\underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha.$$

Se essas integrais são iguais, diz-se que  $f$  é **integrável à Riemann-Stieltjes** em relação a  $\alpha$  e define-se a **integral de Riemann-Stieltjes** de  $f$  em relação a  $\alpha$  por

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int f d\alpha = \overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha.$$

Se  $\alpha(x) = x$  para todo  $x \in [a, b]$  e  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ , diz-se que  $f$  é **integrável à Riemann** e  $\int_a^b f(x) dx$  é chamada de **integral de Riemann** de  $f$ .

**Lema\* 10.3.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um conjunto limitado. Se  $B \subset A$  é tal que para cada  $x \in A$  existem  $a, b \in B$  satisfazendo a condição  $a \leq x \leq b$ , então  $\sup B = \sup A$  e  $\inf B = \inf A$ .*

*Demonstração.* Como  $B \subset A$ , tem-se que  $\sup B \leq \sup A$  e  $\inf B \geq \inf A$ . Se tivéssemos  $\sup B < \sup A$ , existiria  $x \in A$  tal que  $\sup B < x \leq \sup A$ . Porém, isso implicaria que existe  $y \in B$  tal que  $\sup B < x \leq y$ . Absurdo! Portanto, deve-se ter  $\sup B = \sup A$ . De forma análoga pode-se provar que  $\inf B = \inf A$ .  $\square$

**Teorema\* 10.4.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente e  $P_0$  uma partição de  $[a, b]$ . Tem-se que*

$$\overline{\int} f d\alpha = \inf\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}$$

e

$$\underline{\int} f d\alpha = \sup\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}.$$

*Demonstração.* Sejam os conjuntos  $A = \{S(f, P, \alpha) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$  e  $B = \{S(f, P, \alpha) : P \text{ é um refinamento de } P_0\}$ . Vemos imediatamente que  $B \subset A$ . Além disso, se  $S(f, P, \alpha) \in A$ , então  $Q = P \cup P_0$  é um refinamento de  $P_0$ ,  $S(f, Q, \alpha) \in B$  e  $S(f, Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha)$ . Portanto,  $\inf B = \inf A = \overline{\int} f d\alpha$ . A igualdade envolvendo a integral inferior pode ser provada de forma similar.  $\square$

**Teorema\* 10.5.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ ;
2. dado  $\epsilon > 0$ , existem partições  $P$  e  $Q$  de  $[a, b]$  tais que  $S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$ .
3. dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $P$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \epsilon$ .

*Demonstração.* ( $1 \Rightarrow 2$ ) Dado  $\epsilon > 0$ , existem partições  $P$  e  $Q$  de  $[a, b]$  tais que

$$\overline{\int} f d\alpha \leq S(f, P, \alpha) < \overline{\int} f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \underline{\int} f d\alpha - \frac{\epsilon}{2} < s(f, Q, \alpha) \leq \underline{\int} f d\alpha.$$

Como  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ , segue que

$$\int f d\alpha \leq S(f, P, \alpha) < \int f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad -\int f d\alpha \leq -s(f, Q, \alpha) < -\int f d\alpha + \frac{\epsilon}{2}.$$

Somando essas desigualdades, obtemos que  $0 \leq S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$ . ( $2 \Rightarrow 3$ ) Dado  $\epsilon > 0$  sejam  $P$  e  $Q$  partições de  $[a, b]$  tais que  $S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$ . Definindo a partição  $R = P \cup Q$ , temos que  $S(f, R, \alpha) \leq s(f, P, \alpha)$  e  $-s(f, R, \alpha) \leq -s(f, Q, \alpha)$ . Logo,  $S(f, R, \alpha) - s(f, R, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) - s(f, Q, \alpha) < \epsilon$ . ( $3 \Rightarrow 1$ ) Se  $\underline{\int} f d\alpha < \overline{\int} f d\alpha$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha + \epsilon$ . Logo, para qualquer partição  $P$  de  $[a, b]$ , temos que

$$s(f, P, \alpha) + \epsilon \leq \underline{\int} f d\alpha + \epsilon = \overline{\int} f d\alpha \leq S(f, P, \alpha).$$

Portanto,  $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) \geq \epsilon$ . □

Seja  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  uma partição de um intervalo  $[a, b]$ . Define-se a **norma** de  $P$  por  $|P| = \max\{|x_j - x_{j-1}| : j \in \{1, \dots, n\}\}$ .

**Teorema 10.6.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Toda função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em relação a  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Se  $\alpha$  é uma função constante,  $S(f, P, \alpha) = s(f, P, \alpha) = 0$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Suponhamos agora que esse não seja o caso. Como  $f$  é uniformemente contínua, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon/[\alpha(b) - \alpha(a)]$  para quaisquer  $x, y \in [a, b]$  satisfazendo a condição  $|x - y| < \delta$ . Seja  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \delta$ . Logo, pelo teorema de Weierstrass, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  existem  $x'_j, x''_j \in [x_{j-1}, x_j]$  tais que  $f(x'_j) \leq f(x) \leq f(x''_j)$  para todo  $x \in [x_{j-1}, x_j]$ . Dessa maneira,

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n [f(x''_j) - f(x'_j)][\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &< \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \sum_{j=1}^n [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ . □

Exemplos:

1. Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = c$  e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. A função  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ , pois é contínua. Por outro lado, pode-se verificar facilmente que  $S(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Portanto,

$$\int_a^b c d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

2. Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(x) = c$  para todo  $x \in (a, b]$  e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente que é contínua no ponto  $a$ . Se  $f(a) \neq c$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $d \in (a, b)$  tal que  $\alpha(d) - \alpha(a) < \epsilon/|f(a) - c|$ , pois  $\alpha$  é contínua no ponto  $a$ . Logo, considerando a partição  $P_0 = \{a, d, b\}$  de  $[a, b]$ , temos que

$$S(f, P_0, \alpha) - s(f, P_0, \alpha) = |f(a) - c|[\alpha(d) - \alpha(a)] < \epsilon$$

e, por conseguinte,  $f$  é integrável. Se  $f(a) > c$ , então  $s(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Logo,  $\int f d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ . Por outro lado, se  $f(a) < c$ , então  $S(f, P, \alpha) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Logo,  $\int f d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ .

**Lema\* 10.7.** *Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}$  conjuntos limitados. O conjunto  $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$  é limitado e valem as relações  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  e  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ .*

*Demonstração.* Dado  $z \in A + B$ , existem  $x \in A$  e  $y \in B$  tais que  $z = x + y$ . Logo,  $z \leq \sup A + \sup B$ , o que implica que  $A + B$  é limitado superiormente e que  $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ . Por outro lado, para quaisquer  $x \in A$  e  $y \in B$  temos que  $x + y \leq \sup(A + B)$ . Logo,  $x \leq \sup(A + B) - y$ , o que implica que  $\sup A \leq \sup(A + B) - y$ , pois  $x \in A$  é arbitrário. Pela sua vez, essa desigualdade pode ser escrita como  $y \leq \sup(A + B) - \sup A$ . Como  $y$  é arbitrário, temos que  $\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$ . Portanto,  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ . De forma análoga pode-se provar que  $A + B$  é limitado inferiormente e que  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ .  $\square$

**Teorema 10.8.** *Sejam  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente e  $c \in (a, b)$ . Uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em relação a  $\alpha$  se, e somente se, as restrições de  $f$  a  $[a, c]$  e a  $[c, b]$  são integráveis em relação a  $\alpha$ . Além do mais, nesse caso tem-se que*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

*Demonstração.* Seja  $P_0 = \{a, c, b\}$ . Todo refinamento  $P$  de  $P_0$  pode ser escrito como  $P = P_1 \cup P_2$ , em que  $P_1$  e  $P_2$  são partições de  $[a, c]$  e  $[c, b]$  respectivamente. Reciprocamente, se  $P_1$  e  $P_2$  são partições arbitrárias de  $[a, c]$  e  $[c, b]$  respectivamente, então  $P = P_1 \cup P_2$  é um refinamento de  $P_0$ . Se  $f_1$  e  $f_2$  denotam as restrições de  $f$  a  $[a, c]$  e a  $[c, b]$  respectivamente, então, para todo refinamento  $P$  de  $P_0$  temos

$$S(f, P, \alpha) = S(f_1, P_1, \alpha) + S(f_2, P_2, \alpha)$$

e

$$s(f, P, \alpha) = s(f_1, P_1, \alpha) + s(f_2, P_2, \alpha),$$

em que  $P_1$  e  $P_2$  são partições de  $[a, c]$  e  $[c, b]$  respectivamente. Logo,

$$\overline{\int_a^b f(x) d\alpha(x)} = \overline{\int_a^c f(x) d\alpha(x)} + \overline{\int_c^b f(x) d\alpha(x)}$$

e

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

Segue daqui que

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x) &= \int_a^b f(x) d\alpha(x) \\ &\leq \int_a^b f(x) d\alpha(x) \\ &= \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é integrável se, e somente se, as restrições de  $f$  a  $[a, c]$  e a  $[c, b]$  são integráveis. Além disso, nesse caso vale a relação  $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x)$ .  $\square$

Pondo por convenção que  $\int_a^a f(x) d\alpha(x) = 0$  e que  $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = -\int_b^a f(x) d\alpha(x)$ , segue do teorema 10.8 que, se  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo fechado e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável,

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x)$$

para quaisquer  $a, b, c \in I$ .

Exemplos:

1. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente que é contínua nos pontos  $a$  e  $b$ . Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $f(x) = c$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$  e  $\int f d\alpha = c[\alpha(b) - \alpha(a)]$ . Com efeito, escolhendo  $d \in (a, b)$ , as restrições de  $f$  a  $[a, d]$  e a  $[d, b]$  são integráveis. Logo,  $f$  é integrável e

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) d\alpha(x) &= \int_a^d f(x) d\alpha(x) + \int_d^b f(x) d\alpha(x) \\ &= c[\alpha(d) - \alpha(a)] + c[\alpha(b) - \alpha(d)] \\ &= c[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

2. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente que é contínua nos pontos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f(x) = c_j$  para todo  $x \in (x_{j-1}, x_j)$ , então  $f$  é integrável e

$$\int f d\alpha = \sum_{j=1}^n c_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})].$$

Isso segue diretamente de observar que a restrição de  $f$  a cada intervalo  $[x_{j-1}, x_j]$  é integrável e  $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) d\alpha(x) = c_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$ .

Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada, escreveremos  $\sup f$  e  $\inf f$  para denotar  $\sup_{x \in X} f(x)$  e  $\inf_{x \in X} f(x)$  respectivamente.

**Lema\* 10.9.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções limitadas, a função  $f + g$  é limitada e valem as relações  $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$  e  $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ .*

*Demonstração.* Dado  $x \in X$ , temos que  $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$  e  $\inf g \leq g(x) \leq \sup g$ . Logo,  $\inf f + \inf g \leq f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$ . Isso implica que  $f + g$  é limitada,  $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$  e  $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ .  $\square$

**Lema\* 10.10.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}$  um conjunto limitado. Para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $cX = \{cx : x \in X\}$  é limitado. Além disso, se  $c \geq 0$ ,  $\sup cX = c \sup X$  e  $\inf cX = c \inf X$ . Por outro lado, se  $c < 0$ ,  $\sup cX = c \inf X$ ,  $\inf cX = c \sup X$ .*

*Demonstração.* Dado  $x \in X$ , tem-se que  $\inf X \leq x \leq \sup X$ . Se  $c \geq 0$ , então  $c \inf X \leq cx \leq c \sup X$ . Isso implica que  $cX$  é limitado,  $\sup cX \leq c \sup X$  e  $\inf cX \geq c \inf X$ . Por outro lado, dado  $x \in X$ , temos que  $\inf cX \leq cx \leq \sup cX$ , o que implica que  $(\inf cX)/c \leq x \leq (\sup cX)/c$ . Logo,  $(\inf cX)/c \leq \inf X$  e  $\sup X \leq (\sup cX)/c$ . Portanto,  $\sup cX = c \sup X$  e  $\inf cX = c \inf X$ . O caso em que  $c < 0$  pode ser provado de forma análoga.  $\square$

**Corolário\* 10.11.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Se  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  é uma função limitada, então  $cf$  é uma função limitada para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Além disso, se  $c \geq 0$ ,  $\sup cf = c \sup f$  e  $\inf cf = c \inf f$ . Por outro lado, se  $c < 0$ ,  $\sup cf = c \inf f$  e  $\inf cf = c \sup f$ .*

**Lema\* 10.12.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada, então  $\sup f - \inf f = \sup_{x,y \in X} |f(x) - f(y)|$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\sup f = M$  e  $\inf f = m$ . Dados  $x, y \in X$ , temos que  $m \leq f(x) \leq M$  e  $m \leq f(y) \leq M$ . Logo,  $-(M - m) \leq f(x) - f(y) \leq M - m$ , o que implica que  $|f(x) - f(y)| \leq M - m$ . Assim,  $\sup_{x,y \in X} |f(x) - f(y)| \leq M - m$ . Seja  $\omega = \sup_{x,y \in X} |f(x) - f(y)|$ . Para quaisquer  $x, y \in X$  temos que  $f(x) - f(y) \leq \omega$ . Logo,  $f(x) \leq \omega + f(y)$ , o que implica que  $M \leq \omega + f(y)$ , pois  $x \in X$  é arbitrário. Pela sua vez, a desigualdade  $M - \omega \leq f(y)$  implica que  $M - \omega \leq m$ , pois  $y \in X$  é arbitrário. Portanto,  $\omega = M - m$ .  $\square$

**Teorema 10.13.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções integráveis em relação a  $\alpha$ , então*

1.  $f + g$  é integrável em relação a  $\alpha$  e  $\int (f + g) d\alpha = \int f d\alpha + \int g d\alpha$ ;
2.  $fg$  é integrável em relação a  $\alpha$  e, em particular,  $\int cf d\alpha = c \int f d\alpha$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ ;
3.  $f/g$  é integrável em relação a  $\alpha$  desde que exista  $c > 0$  tal que  $|g(x)| \geq c$  para todo  $x \in [a, b]$ ;
4. se  $f \leq g$ , então  $\int f d\alpha \leq \int g d\alpha$ ;
5.  $|f|$  é integrável e  $|\int f d\alpha| \leq \int |f| d\alpha$ .

*Demonstração.* 1. Dadas as partições  $P$  e  $Q$  de  $[a, b]$ , temos

$$S(f + g, P \cup Q, \alpha) \leq S(f, P \cup Q, \alpha) + S(g, P \cup Q, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) + S(g, Q, \alpha)$$

e

$$s(f + g, P \cup Q, \alpha) \geq s(f, P \cup Q, \alpha) + s(g, P \cup Q, \alpha) \geq s(f, P, \alpha) + s(g, Q, \alpha).$$



Logo,

$$\overline{\int} (f + g) d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} g d\alpha \quad \text{e} \quad \underline{\int} (f + g) d\alpha \geq \underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} g d\alpha.$$

A partir dessas desigualdades obtemos que

$$\underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} g d\alpha \leq \underline{\int} (f + g) d\alpha \leq \overline{\int} (f + g) d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} g d\alpha.$$

Portanto, se  $f$  e  $g$  são integráveis, segue que  $f + g$  é integrável e que  $\int (f + g) d\alpha = \int f d\alpha + \int g d\alpha$ .

2. Seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  e  $|g(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Dados  $x, y \in [a, b]$ , temos que

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \\ &\leq M(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|). \end{aligned}$$

Como  $f$  e  $g$  são integráveis, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \epsilon/2M$  e  $S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha) < \epsilon/2M$ . Logo,

$$\begin{aligned} S(fg, P, \alpha) - s(fg, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad + M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |g(x) - g(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= M[S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) + S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $fg$  é integrável. Em particular, segue daqui que  $cf$  é integrável para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ . Além disso, se  $c \geq 0$ , temos que  $S(cf, P, \alpha) = cS(f, P, \alpha)$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Logo,  $\int cf d\alpha = c \int f d\alpha$ . Por outro lado, se  $c < 0$ ,  $S(cf, P, \alpha) = cs(f, P, \alpha)$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Logo,  $\int cf d\alpha = c \int f d\alpha$ .

3. Dados  $x, y \in [a, b]$ , temos que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)||g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} |g(x) - g(y)|.$$

Como  $g$  é integrável, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha) < \epsilon c^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} S(1/g, P, \alpha) - s(1/g, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |g(x) - g(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= \frac{1}{c^2} [S(g, P, \alpha) - s(g, P, \alpha)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $1/g$  é integrável. Finalmente, usando o resultado do item anterior, temos que  $f/g$  é integrável.

4. Temos que a função  $h = g - f$  é integrável e que  $h \geq 0$ . Logo,  $S(h, P, \alpha) \geq 0$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Dessa maneira,  $\int h d\alpha \geq 0$ , o que implica que  $\int g d\alpha \geq \int f d\alpha$ .
5. Dados  $x, y \in [a, b]$ , temos que  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ . Como  $f$  é integrável, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \epsilon$ . Logo,

$$\begin{aligned} S(|f|, P, \alpha) - s(|f|, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} ||f(x)| - |f(y)|| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &= S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $|f|$  é integrável. Além disso, como  $-|f| \leq f \leq |f|$ , segue do que foi provado no item anterior que  $-\int |f| d\alpha \leq \int f d\alpha \leq \int |f| d\alpha$ . Assim,  $|\int f d\alpha| \leq \int |f| d\alpha$ .  $\square$

**Teorema 10.14. Teorema do valor médio para integrais.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Se  $p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  é uma função integrável em relação a  $\alpha$ , existe  $c \in [a, b]$  tal que*

$$\int f p d\alpha = f(c) \int p d\alpha.$$

*Demonstração.* Pelo teorema de Weierstrass existem  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Logo,  $f(x_1)p(x) \leq f(x)p(x) \leq f(x_2)p(x)$  e, por conseguinte,

$$f(x_1) \int p d\alpha \leq \int f p d\alpha \leq f(x_2) \int p d\alpha.$$

Como a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x) \int p d\alpha$  é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe  $c \in [a, b]$  tal que  $g(c) = \int f p d\alpha$ .  $\square$

**Teorema\* 10.15.** *Sejam  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções monótonas crescentes. Uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em relação a  $\alpha + \beta$  se, e somente se, ela é integrável em relação a  $\alpha$  e a  $\beta$ . Além do mais, nesse caso vale a relação*

$$\int f d(\alpha + \beta) = \int f d\alpha + \int f d\beta.$$

*Demonstração.* Dadas as partições  $P$  e  $Q$  de  $[a, b]$ , seja  $R = P \cup Q$ . Temos que  $S(f, R, \alpha + \beta) = S(f, R, \alpha) + S(f, R, \beta)$  e  $s(f, R, \alpha + \beta) = s(f, R, \alpha) + s(f, R, \beta)$ . Logo,

$$S(f, R, \alpha + \beta) \geq \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} f d\beta, \quad s(f, R, \alpha + \beta) \leq \underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} f d\beta$$

e, por outro lado,

$$S(f, R, \alpha + \beta) \leq S(f, P, \alpha) + S(f, Q, \beta) \quad \text{e} \quad s(f, R, \alpha + \beta) \geq s(f, P, \alpha) + s(f, Q, \beta).$$

Dessa maneira temos que

$$\overline{\int} f d(\alpha + \beta) = \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} f d\beta \quad \text{e} \quad \underline{\int} f d(\alpha + \beta) = \underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} f d\beta.$$

Logo,

$$\underline{\int} f d\alpha + \underline{\int} f d\beta = \underline{\int} f d(\alpha + \beta) \leq \overline{\int} f d(\alpha + \beta) = \overline{\int} f d\alpha + \overline{\int} f d\beta$$

Portanto,  $f$  é integrável em relação a  $\alpha + \beta$  se, e somente se, ela é integrável em relação a  $\alpha$  e a  $\beta$ . Além disso, vale a relação  $\int f d(\alpha + \beta) = \int f d\alpha + \int f d\beta$ .  $\square$

**Teorema\* 10.16.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em relação a  $\alpha$  se, e somente se, ela é integrável em relação a  $c\alpha$  para todo  $c > 0$ . Além disso, nesse caso vale a relação*

$$\int f d(c\alpha) = c \int f d\alpha.$$

*Demonstração.* Dado  $c > 0$ , percebemos facilmente que  $S(f, P, c\alpha) = cS(f, P, \alpha)$  e  $s(f, P, c\alpha) = cs(f, P, \alpha)$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Logo,

$$c \underline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d(c\alpha) \leq \overline{\int} f d(c\alpha) = c \overline{\int} f d\alpha.$$

Portanto,  $f$  é integrável em relação a  $c\alpha$  se, e somente se, é integrável em relação a  $\alpha$ . Além disso, nesse caso vale a relação  $\int f d(c\alpha) = c \int f d\alpha$ .  $\square$

Exemplos:

1. Dado  $c \in (a, b]$ , seja  $H_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a **função degrau** definida por

$$H_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c. \end{cases}$$

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada que é contínua no ponto  $c$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(c)| < \epsilon/3$  para todo  $x \in [a, b]$  satisfazendo a condição  $|x - c| < \delta$ . Se  $P = \{a < \dots < c_1 < c \leq \dots \leq b\}$  é uma partição de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \delta$ , então

$$S(f, P, H_c) - s(f, P, H_c) = \sup_{x, y \in [c_1, c]} |f(x) - f(y)| \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Logo,  $f$  é integrável. Por outro lado, para qualquer refinamento  $P$  de  $\{a, c, b\}$  temos que  $S(f, P, H_c) \geq f(c)$  e  $s(f, P, H_c) \leq f(c)$ . Dessa maneira,  $f(c) \leq \int f dH_c \leq f(c)$ . Portanto,

$$\int f dH_c = f(c).$$

2. Dados  $a < x_1 < \dots < x_n \leq b$ , seja  $\alpha_n = \sum_{j=1}^n p_j H_{x_j}$ , em que  $p_1, \dots, p_n \geq 0$ . Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada que é contínua nos pontos  $x_1, \dots, x_n$ , então ela é integrável em relação a  $\alpha_n$  e

$$\int f d\alpha_n = \sum_{j=1}^n f(x_j) p_j.$$

3. Sejam  $x_1, x_2, \dots \in [a, b]$  uma sequência estritamente crescente e  $p_1, p_2, \dots \geq 0$  uma sequência tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = L$ . Consideremos a função  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n H_{x_n}(x)$ . A função  $\alpha$  está bem definida, pois  $\alpha(x)$  existe para todo  $x \in [a, b]$ . Isso segue do critério de comparação, usando o fato de que  $p_n H_{x_n}(x) \leq p_n$  para quaisquer  $x \in [a, b]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, vê-se facilmente que a função  $\alpha$  é monótona crescente. Dado  $t \in [a, b]$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $t \in [x_{k-1}, x_k]$ . Logo,

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n H_{x_n}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} p_j H_{x_j}(t) = \alpha_{k-1}(t).$$

De fato, temos que  $\alpha(t) = \alpha_n(t)$  para todo  $n \geq k-1$ . Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$  uma partição de  $[a, b]$ . Pelo que vimos anteriormente, podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha(t_j) = \alpha_n(t_j)$  para quaisquer  $j \in \{1, \dots, m\}$  e  $n > n_0$ . Logo,  $S(f, P, \alpha) = S(f, P, \alpha_n)$  e  $s(f, P, \alpha) = s(f, P, \alpha_n)$  para todo  $n > n_0$ . Como  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$  e em relação a  $\alpha_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , as desigualdades anteriores implicam que  $\int f d\alpha \geq \int f d\alpha_n \geq \int f d\alpha$  para todo  $n > n_0$ . Portanto,

$$\int f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) p_n,$$

em que a série do lado direito é absolutamente convergente, pois, como  $f$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x_n) p_n| \leq M p_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema\* 10.17.** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções monótonas crescentes. Tem-se que  $f$  é integrável em relação a  $g$  se, e somente se,  $g$  é integrável em relação a  $f$ . Além disso, nesse caso vale a fórmula de integração por partes:*

$$\int f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int g df.$$

*Demonstração.* Observamos que  $S(f, P, g) - s(f, P, g) = S(g, P, f) - s(g, P, f)$  para qualquer partição  $P$  de  $[a, b]$ . Logo,  $f$  é integrável em relação a  $g$  se, e somente se,  $g$  é integrável em relação a  $f$ . Por outro lado, se  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  é uma partição de  $[a, b]$ , então

$$\begin{aligned} S(f, P, g) &= \sum_{j=1}^n f(x_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n [f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1}) + f(x_{j-1})g(x_{j-1}) - f(x_j)g(x_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n [f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1})] - \sum_{j=1}^n [f(x_j) - f(x_{j-1})]g(x_{j-1}) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - s(g, P, f). \end{aligned}$$

Portanto,  $\int f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int g df$ . □

**Corolário\* 10.18.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente e contínua. Toda função monótona  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em relação a  $\alpha$ .*

Exemplos:

1. Temos que  $\int_a^b 1 dx = b - a - \int_a^b x d(1) = b - a$ .
2. Temos que  $\int_a^b x dx = b^2 - a^2 - \int_a^b x dx$ . Portanto,  $\int_a^b x dx = (b^2 - a^2)/2$ .
3. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função monótona crescente e contínua, então  $\int f df = [f(b)]^2 - [f(a)]^2 - \int f df$ . Portanto,

$$\int f df = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$$

**Teorema\* 10.19.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada que é contínua em  $(a, b]$  e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Se  $f$  é descontínua no ponto  $a$  e  $\alpha$  é contínua nesse ponto, então  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ . Como  $\alpha$  é contínua no ponto  $a$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que  $\alpha(c) - \alpha(a) < \epsilon/4M$ . Por outro lado, como  $f$  é uniformemente contínua em  $[c, b]$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2[\alpha(b) - \alpha(a)]$  para quaisquer  $x, y \in [c, b]$  satisfazendo a condição  $|x - y| < \delta$ . Se  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  é uma partição de  $[a, b]$  tal que  $x_k = c$  e  $|P| < \delta$ , então

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^k \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\quad + \sum_{j=k}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \\ &\leq 2M[\alpha(c) - \alpha(a)] + \frac{\epsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} [\alpha(b) - \alpha(c)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é integrável. □

**Corolário\* 10.20.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente. Se  $f$  é descontínua em apenas um número finito de pontos e  $\alpha$  é contínua nesses pontos, então  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ .*

Exemplo: Se  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $f(x) = \sin(1/x)$  para todo  $x \in (0, 1]$ , então  $f$  é integrável à Riemann independentemente do valor de  $f(0)$ .

**Teorema\* 10.21.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente, derivável e cuja derivada é integrável à Riemann. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável à Riemann, então  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$  e vale a relação*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

*Demonstração.* Como  $\alpha'$  é integrável, ela é limitada. Logo, existe  $M > 0$  tal que  $0 \leq \alpha'(x) \leq M$ . Além disso, como  $f$  é integrável à Riemann, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon/M$ . Temos que

$$S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})].$$

Pelo teorema do valor médio, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  existem  $t_j \in (x_{j-1}, x_j)$  tais que

$$\begin{aligned} S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x) - f(y)| (x_j - x_{j-1}) \\ &= M[S(f, P) - s(f, P)] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é integrável em relação a  $\alpha$ . Por outro lado, para quaisquer partições  $P$  e  $Q$  de  $[a, b]$  tais que  $R = P \cup Q = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  temos que

$$\begin{aligned} S(f, R, \alpha) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j=1}^n f(t_j) \alpha'(t_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} [f(x) \alpha'(x)](x_j - x_{j-1}) \\ &= s(f \alpha', R), \end{aligned}$$

em que, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ . Logo,  $S(f, P, \alpha) \geq s(f \alpha', Q)$ , o que implica que  $\int_a^b f d\alpha \geq \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$ . De maneira análoga podemos obter que  $s(f, P, \alpha) \leq S(f \alpha', Q)$  e, por conseguinte,  $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$ . Portanto,  $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$ .  $\square$

Exemplo: Se  $0 \leq a < b$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\int_a^b x^n dx = b^{n+1} - a^{n+1} - \int_a^b x d(x^n) = b^{n+1} - a^{n+1} - n \int_a^b x^n dx.$$

Portanto,  $\int_a^b x^n dx = [b^{n+1} - a^{n+1}]/(n+1)$ .

**Teorema\* 10.22.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\int_a^b f(x) dx - \epsilon < s(f, P) \leq S(f, P) < \int_a^b f(x) dx + \epsilon$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com norma menor do que  $\delta$ .*

*Demonstração.* Consideremos inicialmente que  $f$  seja não-negativa e seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $P_0 = \{x_0 < x_1 <$

$\dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \epsilon/2$ . Pondo  $\delta = \min\{\epsilon/2nM, x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ , seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \delta$ . Essa partição divide o intervalo  $[a, b]$  em subintervalos  $I_p = [a_p, b_p] \subset [x_{j-1}, x_j]$  para alguns  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $J_q = [c_q, d_q] \not\subset [x_{k-1}, x_k]$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Temos que

$$\sum_p \sup_{x \in [a_p, b_p]} f(x)(b_p - a_p) \leq S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, cada intervalo  $J_q$  contém só uma extremidade dos intervalos  $[x_{j-1}, x_j]$ . Logo, existem no máximo  $n$  intervalos  $J_q$ . Dessa maneira,

$$\sum_q \sup_{x \in [c_q, d_q]} f(x)(d_q - c_q) < Mn\delta < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto,  $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \epsilon$ . Vejamos o caso geral agora. Se  $f$  é uma função limitada arbitrária, existe  $c > 0$  tal que  $f(x) \geq -c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x) + c$  é não-negativa. Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $S(g, P) < \overline{\int_a^b} g(x) dx + \epsilon$  para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com norma menor do que  $\delta$ . Como  $S(g, P) = S(f, P) + c(b - a)$  e  $\overline{\int_a^b} g(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) + c(b - a)$ , segue que  $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \epsilon$ . A desigualdade envolvendo a soma inferior pode ser provada de forma análoga.  $\square$

Seja  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  uma partição de um intervalo  $[a, b]$ . Se para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  é escolhido  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ , obtem-se uma **partição pontilhada** de  $[a, b]$ , denotada por  $P_\xi$ , em que  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Definiremos a norma da partição pontilhada  $P_\xi$  como a norma da partição  $P$ .

Dada uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $P_\xi$  uma partição pontilhada de  $[a, b]$ , em que  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ . A soma

$$\Sigma(f, P_\xi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

é chamada de uma **soma de Riemann**. Diz-se que  $L$  é o limite de  $\Sigma(f, P_\xi)$  quando  $|P|$  tende a 0 se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|\Sigma(f, P_\xi) - L| < \epsilon$  para toda partição pontilhada  $P_\xi$  com norma menor do que  $\delta$ . Nesse caso, escreve-se  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma(f, P_\xi) = L$ .

**Corolário 10.23.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável à Riemann. Tem-se que*

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma(f, P^*) = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemplos:

1. Dado  $p \in \mathbb{N}$ , a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^p$  é integrável à Riemann. Considerando a partição pontilhada  $P_\xi$  de  $[0, 1]$  em que  $P = \{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$  e  $\xi = (1/n, 2/n, \dots, 1)$ , temos que

$$\Sigma(f, P_\xi) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}.$$

Como  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma(f, P_\xi) = \int_0^1 f(x) dx = 1/(p+1)$ , temos em particular que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

2. Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis à Riemann e  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P| = 0$ . Escolhendo  $\xi_j, \eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$  de forma arbitrária para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g(\eta_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (10.1)$$

Para provar isso, vamos começar provando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) = 0. \quad (10.2)$$

Se  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) \right| &\leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| |g(\xi_j) - g(\eta_j)|(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq M \sum_{j=1}^n |g(\xi_j) - g(\eta_j)|(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq M \sum_{j=1}^n \sup_{x, y \in [x_{j-1}, x_j]} |g(x) - g(y)|(x_j - x_{j-1}) \\ &= M[S(g, P) - s(g, P)]. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{|P| \rightarrow 0} S(g, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} s(g, P) = \int_a^b g(x) dx$ , segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)[g(\xi_j) - g(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) \right| = 0,$$

da qual decorre a equação (10.2). Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

a equação (10.1) segue da equação (10.2).



# Capítulo 11

## O teorema fundamental do cálculo

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Diz-se que uma função  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **primitiva** de uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ . Vemos imediatamente que, se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então  $F + c$  também é uma primitiva de  $f$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 11.1.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$  são primitivas de uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , então existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x) - G(x) = c$  para todo  $x \in I$ .*

*Demonstração.* Temos que  $F'(x) = f(x)$  e  $G'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ . Segue daqui que  $(F - G)'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Portanto,  $F - G$  é uma função constante.  $\square$

**Teorema 11.2.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável cuja derivada é integrável à Riemann. Logo, para qualquer  $x \in [a, b]$  tem-se que*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

*Demonstração.* Seja  $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  uma partição de  $[a, x]$ . Temos que

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^n [f(x_j) - f(x_{j-1})].$$

Logo, pelo teorema do valor médio, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  existem  $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$  tais que

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^n f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Dessa maneira,  $s(f', P) \leq f(x) - f(a) \leq S(f', P)$ . Como  $f'$  é integrável, segue que  $\int_a^x f'(t) dt \leq f(x) - f(a) \leq \int_a^x f'(t) dt$ .  $\square$

**Corolário 11.3. Teorema fundamental do cálculo.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável à Riemann que possui uma primitiva  $F$ . Logo,*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Teorema 11.4.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável à Riemann. A função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  é uniformemente contínua. Além disso, se  $f$  é contínua no ponto  $c \in [a, b]$ , então  $F$  é derivável no ponto  $c$  e  $F'(c) = f(c)$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ . Dados  $x, y \in [a, b]$  com  $x < y$ , temos que

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(x) dx \right| \leq \int_x^y |f(x)| dx \leq M(y - x).$$

Logo,  $F$  é lipchitziana e, por conseguinte, é uniformemente contínua. Por outro lado, para qualquer  $h > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(c) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(x) - f(c)| dx. \end{aligned}$$

Como  $f$  é contínua no ponto  $c$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(c)| < \epsilon$  para todo  $x \in [a, b]$  satisfazendo a condição  $|x - c| < \delta$ . Logo, se  $0 < h < \delta$ ,

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| < \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \epsilon dx = \epsilon.$$

Portanto,  $F'_+(c) = f(c)$ . De forma análoga, pode-se provar que  $F'_-(c) = f(c)$ . □

**Corolário 11.5.** *Toda função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma primitiva.*

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável que possui uma primitiva  $F$ . Define-se a **integral indefinida** de  $f$  como uma primitiva arbitrária de  $f$ , ou seja,

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

Exemplos:

1. Sabemos que, para qualquer  $r \in \mathbb{Q}$ ,

$$\frac{d}{dx} x^{r+1} = (r+1)x^r.$$

Logo,  $x^{r+1}$  é uma primitiva de  $(r+1)x^r$  e, por conseguinte,  $x^{r+1}/(r+1)$  é uma primitiva de  $x^r$  se  $r \neq -1$ . Portanto,

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad (r \neq -1),$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

2. Sabemos que

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x.$$

Logo,

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c \quad \text{e} \quad \int \sec^2 x dx = \tan x + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

3. Sabemos que

$$\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Logo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + c = -\arccos x + d \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c,$$

em que  $c, d \in \mathbb{R}$  são constantes arbitrárias. Segue do primeiro resultado que, para qualquer  $x \in (-1, 1)$ ,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsen t|_0^x = -\arccos t|_0^x.$$

Portanto,  $\arcsen x + \arccos x = \pi/2$  para todo  $x \in (-1, 1)$ .

A função  $f(x) = 1/x$  é contínua. Logo, ela possui uma primitiva em qualquer intervalo fechado. Define-se a **função logaritmo (natural)**  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Segue imediatamente daqui que  $\log 1 = 0$ , que a função logaritmo é derivável e que

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}.$$

De forma mais geral temos que

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{|x|} \frac{d}{dx} |x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

e com isso

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c.$$

Como  $\log'(x) > 0$  para todo  $x > 0$ , a função logaritmo é estritamente crescente. Além disso,  $\log''(x) = -1/x^2 < 0$  para todo  $x > 0$ , o que implica que a função logaritmo é uma função côncava. Em particular, para qualquer  $x > 0$ , tem-se que  $\log x \leq \log 1 + (x - 1)$  e, por conseguinte,

$$\log x \leq x - 1$$

para todo  $x > 0$ .

Agora vamos obter a propriedade algébrica fundamental do logaritmo. Dado  $a > 0$ , temos que

$$\frac{d}{dx} \log(ax) = \frac{1}{ax} a = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \log x.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx} [\log(ax) - \log x] = 0.$$

Isso implica que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\log(ax) - \log x = c$ . Considerando  $x = 1$ , obtemos que  $c = \log a$ . Portanto,

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

para quaisquer  $a, b > 0$ . Como consequência direta dessa relação podemos obter que  $\log(a^n) = n \log a$  para quaisquer  $a > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, se  $b > 0$ ,  $\log b = \log((b^{1/n})^n) = n \log b^{1/n}$  e, por conseguinte,  $\log b^{1/n} = (\log b)/n$ . Logo, dados  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $a > 0$ , tem-se que  $\log a^{m/n} = (m/n) \log a$ . Finalmente, como  $\log 1 = \log(a^{m/n} a^{-m/n}) = \log(a^{m/n}) + \log(a^{-m/n})$ , segue que  $\log a^{-m/n} = -(m/n) \log a$  e, portanto, para quaisquer  $r \in \mathbb{Q}$  e  $a > 0$ , tem-se que

$$\log a^r = r \log a.$$

A função logaritmo não é limitada superiormente nem inferiormente. Com efeito, dado  $A > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\log(2^n) = n \log 2 > A$ , pois  $\log 2 > \log 1 = 0$ . Segue daqui também que  $\log 2^{-n} < -A$ . Logo, como a função logaritmo é estritamente crescente, segue que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$ . Além disso, como a função logaritmo é contínua, sua imagem deve ser  $\mathbb{R}$ . Dessa maneira, a função logaritmo possui inversa.

A inversa da função logaritmo é chamada de **função exponencial**, denotada por  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  (ver figura 11.1). A função exponencial é estritamente crescente,  $\exp(0) = 1$  e  $\exp'(y) = 1/\log'(\exp y) = \exp y$ . Assim, escrevemos

$$\frac{d}{dx} \exp x = \exp x.$$

Além disso,  $\exp''(x) = \exp x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo, a função exponencial é convexa e, em particular, temos a desigualdade

$$\exp x \geq 1 + x$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

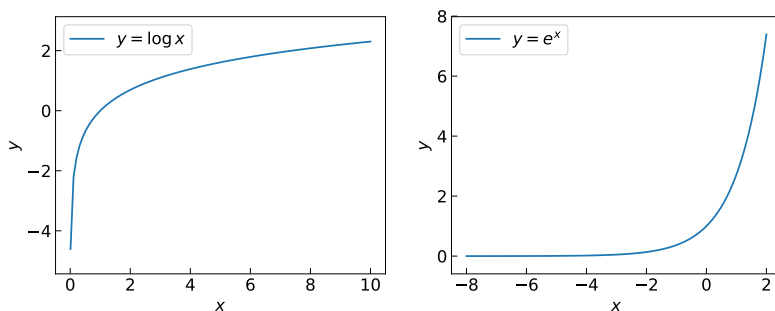


Figura 11.1: Gráficos das funções logaritmo e exponencial.

Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos que  $\log(\exp x \exp y) = x + y$ . Logo,

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y.$$

Definindo  $e = \exp 1$ , temos que  $\exp n = e^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, dados  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $e^m = \exp m = [\exp(m/n)]^n$  e, por conseguinte,  $\exp(m/n) = e^{m/n}$ . Como  $\exp 0 = \exp(m/n - m/n) = e^{m/n} \exp(-m/n)$ , segue que  $\exp(-m/n) = e^{-m/n}$ . Portanto, para qualquer  $r \in \mathbb{Q}$ , tem-se

$$\exp r = e^r.$$

Isso motiva a escrever  $\exp x$  como  $e^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Agora vamos provar que o número  $e = \exp 1$  coincide com o número  $e$  visto na seção 6. Dado  $a > 0$ , temos que

$$a = \log'(1/a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1/a + h) - \log(1/a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log(1 + ha) = \lim_{h \rightarrow 0} \log(1 + ha)^{1/h}.$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + ha)^{1/h} = e^a.$$

Se  $a = 1$ , temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = e.$$

Em particular, como  $1/n \downarrow 0$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dados  $a > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , define-se a potência  $a^x = e^{x \log a}$ . Vemos que

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Logo, a função  $f(x) = a^x$  é estritamente crescente (decrescente) se  $a > 1$  ( $a < 1$ ). Além disso,  $f''(x) = a^x (\log a)^2 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Assim, a função  $f$  é convexa para qualquer  $a \neq 1$  (ver figura 11.2). Como  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  é monótona e contínua em qualquer caso, ela possui uma inversa, a qual é chamada de **função logaritmo na base  $a$** , denotada por  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado qualquer  $x > 0$ , temos que  $x = a^{\log_a x} = e^{(\log_a x) \log a}$ . Logo,  $\log x = (\log_a x) \log a$  e, por conseguinte,

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}.$$

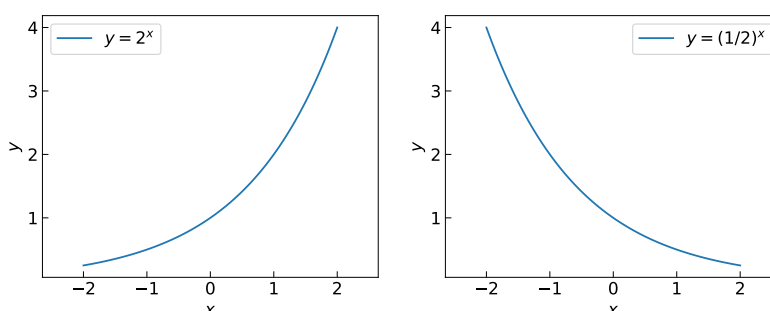


Figura 11.2: Gráfico da função  $f(x) = a^x$  quando  $a = 2$  e  $a = 1/2$ .

Dados  $x > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ , definimos a potência  $x^a = e^{a \log x}$ . Vemos que

$$\frac{d}{dx} x^a = e^{a \log x} \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Agora vamos comparar os crescimentos exponencial e logarítmico com o crescimento tipo lei de potência. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0,$$

ou seja, a função exponencial cresce mais rápido do que qualquer potência. Com efeito, a afirmação é trivial se  $a \leq 0$ . Se  $a > 0$  e  $x > 0$ ,  $e^x = (e^{x/2a})^{2a} > (x/2a)^{2a}$ . Logo,

$$0 < \frac{x^a}{e^x} < \frac{x^a}{(x/2a)^{2a}} = \frac{(2a)^{2a}}{x^a}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^a = 0$ , segue que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a/e^x = 0$ . Por outro lado, dado  $a > 0$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0,$$

ou seja, a função exponencial cresce mais devagar do que qualquer potência positiva. Com efeito, temos que  $\log x = \log[(x^{a/2})^{2/a}] = 2 \log(x^{a/2})/a < 2x^{a/2}/a$ . Logo, se  $x > 1$ ,

$$0 < \frac{\log x}{x^a} < \frac{2x^{a/2}}{ax^a} = \frac{2}{ax^{a/2}}.$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)/x^a = 0$ .

Definem-se as funções **seno hiperbólico**  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e **cosseno hiperbólico**  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Pode-se verificar imediatamente que a função seno hiperbólico é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno hiperbólico é par. Além disso, verifica-se facilmente que  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e que

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x.$$

Como  $\cosh x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , a função seno hiperbólico é monótona crescente (ver figura 11.3).

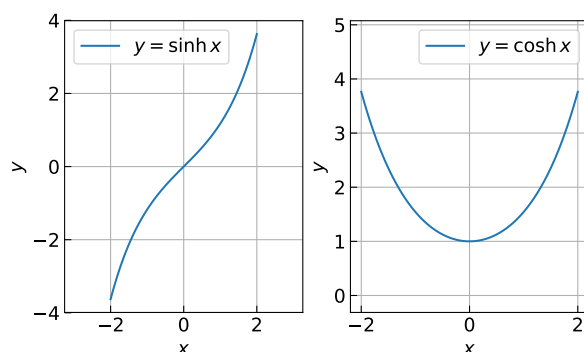


Figura 11.3: Gráficos das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

Define-se a função **tangente hiperbólica**  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Verifica-se imediatamente que a função tangente hiperbólica é uma função ímpar. Além disso,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$  e

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{\cosh x}{\cosh x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Segue daqui que a função tangente hiperbólica é monótona crescente (ver figura 11.4).

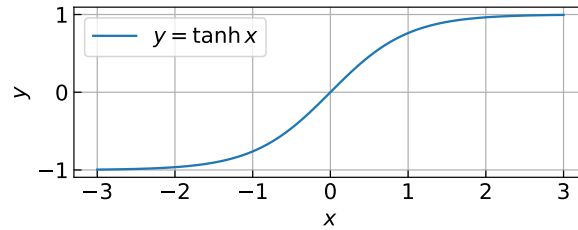


Figura 11.4: Gráfico da função tangente hiperbólica.

**Teorema 11.6. Mudança de variável.** *Seja  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo e  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável tal que  $\phi(a) = \alpha$  e  $\phi(b) = \beta$  para alguns  $a, b \in I$  e, além disso,  $\phi'$  é integrável à Riemann no intervalo de extremidades  $a$  e  $b$ , então*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx.$$

*Demonstração.* Como  $f$  é contínua, ela possui uma primitiva  $F$ . Logo,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(x)|_{\alpha}^{\beta} = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia,  $(F \circ \phi)'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$  e, por conseguinte,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx = (F \circ \phi)(x)|_a^b = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a).$$

Portanto,  $\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx$ . □

Exemplos:

1. Sejam  $I$  um intervalo e  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivada integrável. Temos que

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy,$$

no qual utilizamos a mudança de variáveis  $y = \phi(x)$ . Logo,

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \log |y| + c = \log |\phi(x)| + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

2. Temos que

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + c = \log |\sec x| + c$$

e

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log |\sin x| + c = -\log |\csc x| + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

3. Usando a identidade  $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$ , temos que

$$\int \csc x \, dx = \int \frac{1}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} \, dx = \int \frac{\sec^2(x/2)}{2 \tan(x/2)} \, dx.$$

Portanto,

$$\int \csc x \, dx = \log \left| 2 \tan \frac{x}{2} \right| + c = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + d,$$

em que  $c, d \in \mathbb{R}$  são constantes arbitrárias.

4. Usando a identidade  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ , temos que

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\sin(x + \pi/2)} \, dx = \int \frac{1}{\sin y} \, dy,$$

em que usamos a mudança de variáveis  $y = x + \pi/2$  ( $x = y - \pi/2$ ). Logo,

$$\int \sec x \, dx = \log \left| \tan \frac{y}{2} \right| + c = \log \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c.$$

5. Dado  $a > 0$ , temos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} \frac{1}{a} \, dx.$$

Usando a mudança de variáveis  $y = x/a$  ( $x = ay$ ), obtemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \, dy = \arcsen y + c = \arcsen \frac{x}{a} + c.$$

6. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \int \frac{1}{1 + (x/a)^2} \frac{1}{a^2} \, dx = \int \frac{1}{1 + y^2} \frac{1}{a} \, dy,$$

em que usamos a mudança de variáveis  $y = x/a$ . Logo,

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan y + c = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c.$$

**Teorema 11.7. Integração por partes.** Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções deriváveis cujas derivadas são integráveis à Riemann, então

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx.$$

*Demonstração.* Temos que  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Logo,  $(fg)'$  é integrável e  $\int_a^b (fg)'(x) \, dx = \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$ . Por outro lado,  $\int_a^b (fg)'(x) \, dx = f(x)g(x)|_a^b$ . Portanto,  $\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx$ .  $\square$

Exemplos:



1. Temos que

$$\int \log x \, dx = \int (\log x) 1 \, dx = (\log x)x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \log x - x + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária.

2. Temos que

$$\int \arcsen x \, dx = (\arcsen x)x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Usando a mudança de variáveis  $x = \sqrt{1-y}$  ( $y = 1 - x^2$ ), temos que

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \int \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \, dy = x \arcsen x + \sqrt{y} + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

3. Temos que

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx.$$

Usando a mudança de variáveis  $x = \sqrt{y-1}$  ( $y = 1 + x^2$ ), temos que

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{\sqrt{y-1}}{y} \frac{1}{2\sqrt{y-1}} \, dy = x \arctan x - \frac{1}{2} \log |y| + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

4. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  não ambos nulos. Se  $a \neq 0$ , temos que

$$\int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sen(bx) - \int \frac{e^{ax}}{a} b \cos(bx) \, dx.$$

Usando a fórmula de integração por partes na integral do lado direito, temos que

$$\int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sen(bx) - \frac{b}{a} \left( \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \int \frac{e^{ax}}{a} b \sen(bx) \, dx \right).$$

Logo,

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} [a \sen(bx) - b \cos(bx)].$$

Portanto,

$$\int e^{ax} \sen(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sen(bx) - b \cos(bx)] + c,$$

em que  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Vemos que esse resultado é verdadeiro mesmo no caso em que  $a = 0$  e  $b \neq 0$ .

5. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \, dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin x \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , temos que

$$\int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx.$$

Portanto,

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

Em particular, segue daqui que

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} \quad \text{e} \quad \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}.$$

6. **Fórmula de Wallis:** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

De forma análoga, temos

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx = \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-1}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{3}{4} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n-1} \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx}. \quad (11.1)$$

Se  $0 \leq x \leq \pi/2$ , temos que  $\cos^{2n+1} x \leq \cos^{2n} x \leq \cos^{2n-1} x$ . Logo,

$$\frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x.$$

Dessa maneira temos que

$$\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx} \leq 1,$$

o que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx} = 1.$$

Portanto, da equação (11.1) obtemos que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{3^2} \frac{4^2}{5^2} \cdots \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2} 2n.$$

Além disso, segue dessa relação que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \sqrt{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \sqrt{2n}.$$

Logo,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \frac{n^2}{n^2} \frac{2}{2} \sqrt{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1} (n!)^2}{(2n)!} \frac{\sqrt{2n}}{n}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$