

Notas de álgebra linear

Max Jáuregui

14 de Setembro de 2019

Estas notas foram criadas principalmente para meu uso pessoal e pode eventualmente ser usado como um curso elementar de álgebra linear. Todo o conteúdo foi produzido por mim, seguindo como roteiro o livro: E. L. Lima, *Álgebra linear*, 8 ed. (IMPA, Rio de Janeiro, 2012).

Max Jáuregui

Conteúdo

1	Matrizes	3
---	----------	---

Capítulo 1

Matrizes

Uma **matriz** de **ordem** $m \times n$ é um arranjo retangular de mn números reais ou complexos que tem m linhas e n colunas. Se \mathbf{a} é uma matriz $m \times n$, então

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, o número a_{ij} é chamado de **elemento** na posição (i, j) da matriz \mathbf{a} .

Formatos especiais de matrizes:

1. **Matriz quadrada:** É uma matriz cujo número de linhas é igual ao seu número de colunas. Se \mathbf{a} é uma matriz quadrada, os elementos a_{ii} são chamados de elementos da **diagonal** de \mathbf{a} . Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & \pi \end{bmatrix}.$$

Os elementos da diagonal dessas matrizes são $(4, -1)$ e $(5, 0, \pi)$ respectivamente.

2. **Matriz diagonal:** É uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

3. **Matriz identidade:** É uma matriz diagonal na qual todos os elementos da diagonal são iguais a 1. A matriz identidade $n \times n$ é denotada por \mathbf{I}_n . Exemplos:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. **Matriz triangular superior:** É uma matriz quadrada na qual todos os elementos debaixo da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

5. **Matriz triangular inferior:** É uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \pi \end{bmatrix}.$$

6. **Matriz simétrica:** É uma matriz quadrada \mathbf{a} tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer i e j , ou seja, é uma matriz simétrica em relação à sua diagonal. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \pi \end{bmatrix}.$$

7. **Matriz antissimétrica:** É uma matriz quadrada \mathbf{a} tal que $a_{ij} = -a_{ji}$ para quaisquer i e j . Segue daqui que $a_{ii} = -a_{ii}$ para todo i , o que implica que os elementos da diagonal de \mathbf{a} são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. **Matriz hermitiana:** É uma matriz quadrada \mathbf{a} tal que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para quaisquer i e j , em que $\overline{a_{ji}}$ denota o complexo conjugado de a_{ji} ($\overline{x+iy} = x-iy$, em que $i = \sqrt{-1}$). Segue daqui que $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ para todo i , o que implica que os elementos da diagonal de \mathbf{a} são reais. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3i \\ -3i & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3+i & 0 \\ 3-i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & \pi \end{bmatrix}.$$

Como veremos mais na frente, o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ é um espaço vetorial, pois nele podem ser definidas duas operações: adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um número (real ou complexo dependendo das circunstâncias). As seguintes equações definem essas operações:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \alpha \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar facilmente que essas operações têm as seguintes propriedades:

1. Associatividade: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ e $\alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$.
2. Comutatividade: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
3. Elemento neutro: Existe uma matriz $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ para qualquer \mathbf{a} .
4. Elemento inverso: Para cada \mathbf{a} existe uma matriz $-\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

5. Multiplicação por 1: $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

6. Distributividade: $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ e $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Define-se a **transposta** de uma matriz \mathbf{a} como a matriz \mathbf{a}^T cujas linhas são as colunas de \mathbf{a} , ou seja, $a_{ij}^T = a_{ji}$ para quaisquer i e j . Segue diretamente dessa definição que $(\mathbf{a}^T)^T = \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T$ e $(\alpha\mathbf{a})^T = \alpha\mathbf{a}^T$.

Exemplos:

1. Uma matriz \mathbf{a} é simétrica (antissimétrica) se, e somente se, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^T$ ($\mathbf{a} = -\mathbf{a}^T$).
2. Uma matriz \mathbf{a} é hermitiana se, e somente se, $\mathbf{a}^T = \bar{\mathbf{a}}$, em que $\bar{\mathbf{a}}$ é a matriz obtida ao tomar o complexo conjugado de cada elemento de \mathbf{a} .
3. Toda matriz quadrada \mathbf{a} pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. Com efeito, definindo $\mathbf{s} = (\mathbf{a} + \mathbf{a}^T)/2$ e $\mathbf{t} = (\mathbf{a} - \mathbf{a}^T)/2$, temos que $\mathbf{s} = \mathbf{s}^T$, $\mathbf{t} = -\mathbf{t}^T$ e $\mathbf{a} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$.

Além das duas operações anteriores, pode ser definida uma **multiplicação de matrizes**. Se \mathbf{a} é uma matriz $m \times n$ e \mathbf{b} é uma matriz $n \times p$, então a multiplicação de \mathbf{a} com \mathbf{b} pode ser efetuada e o produto é uma matriz \mathbf{c} de ordem $m \times p$ tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

Em outras palavras, o elemento c_{ik} da matriz produto \mathbf{c} é obtido multiplicando cada elemento da linha i da matriz \mathbf{a} com o elemento respectivo na coluna k da matriz \mathbf{b} e somando esses produtos.

Exemplos:

1. Dadas as matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

No entanto, o produto \mathbf{ba} não está definido, pois o número de linhas de \mathbf{a} é diferente do número de colunas de \mathbf{b} .

2. Se \mathbf{a} é uma matriz $m \times n$, o produto de \mathbf{a} com \mathbf{I}_n é o próprio \mathbf{a} (isso justifica o nome de matriz identidade). Com efeito, os elementos da matriz \mathbf{I}_n são dados pelo **símbolo de Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Logo, se $\mathbf{c} = \mathbf{aI}_n$, então $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$. De forma análoga pode-se provar que $\mathbf{I}_m\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

3. Duas matrizes não nulas podem ter como produto a matriz nula. Com efeito,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix},$$

o que mostra que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

4. Mesmo a multiplicação de duas matrizes quadradas não é comutativa, pois, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.1. *Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} matrizes $m \times n$, \mathbf{c} e \mathbf{d} matrizes $n \times p$ e α um número. Tem-se que $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ e $\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}$.*

Demonstração. Se $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, então

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk},$$

o que implica que $\mathbf{p} = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$. A igualdade $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ pode ser provada de forma análoga. \square

Exemplo: Dada a matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\mathbf{a}^n = \begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, definindo

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $\mathbf{a} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{t}$ e que $\mathbf{t}^2 = \mathbf{0}$. Logo,

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{t})^2 = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{t})(\mathbf{I}_2 + \mathbf{t}) = \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_2\mathbf{t} + \mathbf{tI}_2 + \mathbf{t}^2 = \mathbf{I}_2 + 2\mathbf{t}.$$

Supondo que $\mathbf{a}^n = \mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n\mathbf{a} = (\mathbf{I}_2 + n\mathbf{t})(\mathbf{I}_2 + \mathbf{t}) = \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_2\mathbf{t} + n\mathbf{tI}_2 + n\mathbf{t}^2 = \mathbf{I}_2 + (n+1)\mathbf{t}.$$

Portanto, $\mathbf{a}^n = \mathbf{I}_2 + n\mathbf{t}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2. Sejam \mathbf{a} uma matriz $m \times n$, \mathbf{b} uma matriz $n \times p$ e \mathbf{c} uma matriz $p \times q$. Tem-se que $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{r} = \mathbf{ab}$, $\mathbf{s} = \mathbf{bc}$ e $\mathbf{t} = \mathbf{as}$. Temos que

$$t_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}s_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{l=1}^p b_{jl}c_{lk} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ij}b_{jl}c_{lk} = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jl} \right) c_{lk} = \sum_{l=1}^p r_{il}c_{lk}.$$

Portanto, $\mathbf{t} = \mathbf{rc}$. □

Teorema 1.3. Sejam \mathbf{a} uma matriz $m \times n$ e \mathbf{b} uma matriz $n \times p$. Tem-se que $(\mathbf{ab})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{a}^T$.

Demonstração. Se $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$, então

$$c_{ik}^T = c_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{kj}b_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{jk}^T b_{ij}^T = \sum_{j=1}^n b_{ij}^T a_{jk}^T.$$

Portanto, $\mathbf{c}^T = \mathbf{b}^T \mathbf{a}^T$. □

Define-se o **traço** de uma matriz quadrada \mathbf{a} como a soma dos elementos da sua diagonal. O traço de \mathbf{a} é denotado por $\text{tr}(\mathbf{a})$. Segue imediatamente dessa definição que $\text{tr}(\mathbf{a}) = \text{tr}(\mathbf{a}^T)$, pois \mathbf{a} e \mathbf{a}^T têm a mesma diagonal. Além disso, $\text{tr}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{tr}(\mathbf{a}) + \text{tr}(\mathbf{b})$ e $\text{tr}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \text{tr}(\mathbf{a})$.

Teorema 1.4. Sejam \mathbf{a} uma matriz $m \times n$ e \mathbf{b} uma matriz $n \times m$. Tem-se que $\text{tr}(\mathbf{ab}) = \text{tr}(\mathbf{ba})$.

Demonstração. Se $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$, então $\text{tr}(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^m c_{ii}$. Como $c_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$, segue que

$$\text{tr}(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji}a_{ij}.$$

Portanto, $\text{tr}(\mathbf{ab}) = \text{tr}(\mathbf{ba})$. □

Diz-se que uma matriz é **escalonada** quando o primeiro elemento não-nulo de cada linha está à esquerda dos primeiros elementos não-nulos das linhas subsequentes. Dessa maneira, debaixo do primeiro elemento não-nulo de cada linha só se tem zeros. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora descrever o método de eliminação de Gauss que nos permite transformar uma matriz qualquer em uma matriz escalonada. O método de eliminação consiste em usar sistematicamente as seguintes operações nas linhas da matriz até obter uma matriz escalonada:

1. permutar duas linhas;
2. multiplicar uma linha por um número diferente de 0;

3. somar a uma linha um múltiplo não-nulo de uma outra linha.

Essas operações são às vezes chamadas de **operações elementares**.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 + 9L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Define-se o **posto** de uma matriz como o número de linhas não-nulas da matriz escalonada obtida usando o método de eliminação. Segue imediatamente daqui que o posto de uma matriz $m \times n$ é no máximo igual a m . O posto de uma matriz não depende dos detalhes do processo de eliminação (isso será justificado mais na frente). Por exemplo, a matriz considerada no exemplo anterior tem posto 3.

Diz-se que uma matriz \mathbf{a} de ordem $n \times n$ é **invertível** se existe uma matriz \mathbf{a}^{-1} de ordem $n \times n$, chamada de **inversa** da matriz \mathbf{a} , tal que $\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{I}_n$. Como será justificado mais na frente, uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, seu posto é igual ao seu número de colunas (ou linhas).

Exemplos:

1. A matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

não é invertível. Com efeito, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 7L_1]{L_2 - 4L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

do qual segue que o posto de \mathbf{a} é $2 \neq 3$.