SUP

Inhaltsverzeichnis

1 Lokalkompakte Gruppen

Definition 1.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

stetig auf der Produkttopologie von $G \times G$

(ii) Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ist stetig

Definition 1.2. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung hat. Eine *lokalkompakte Gruppe* ist eine topologische Gruppe, die lokalkompakt und hausdorffsch ist.

1.1 Haarsche Maß

Nun zu etwas Maßtheorie. Wir beginnen mit einer kleinen Auffrischung der wichtigsten Objekte. Eine *σ-Algebra* auf einer Menge X ist eine Teilmenge Ω von $P(X)$, so dass

(i) $X \in \Omega$

(ii) Wenn $A \in \Omega$, dann $A^c \in \Omega$, wobei hier $A^c := X \setminus A$ das Komplement von A in X notiert.

(iii) Ω ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, d.h. $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \Omega$, falls $A_k \in \Omega$ für alle k.

Die Elemente in Ω werden *messbar* genannt. Aus den Axiomen lässt sich leicht folgern, dass die leere Menge und abzählbare Schnitte von messbaren Mengen wiederum messbar sind. Weiter ist der Schnitt $\bigcap_n \Omega_n$ beliebiger Familien $\{\Omega_n\}$ von σ-Algebren auf X selbst wieder eine σ-Algebra.

Eine Menge X zusammen mit einer σ-Algebra Ω bilden den *messbaren Raum* (X, Ω). Ist X ein topologischer Raum, so können wir die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ betrachten, die alle offenen Mengen von X enthält. Die Elemente von $\mathcal{B}$ werden *Borelmengen* von X genannt.

Nun zum eigentlichen Messen der messbaren Mengen. Ein *Maß* auf einem beliebigen messbaren Raum (X, Ω) ist eine Funktion $\mu : \Omega \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und die *σ-additiv* ist. Das bedeutet

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

für beliebige Familien $\{A_n\}$ von disjunkten Mengen in Ω.

Sei nun μ ein Borelmaß auf einem lokalkompakten hausdorffschen Raum X und sei E ein eine beliebige Borelmenge von X. Wir nennen μ von *innen regulär* auf E, falls

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$$

Umgekehrt heißt μ von *außen regul"r* auf E, wenn

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

Ein *Radonmaß* auf X ist ein Borelmaß, das endlich auf kompakten Mengen, von innen regulär auf allen offenen Mengen und von außen regulär auf allen Borelmengen ist.

Sei nun G eine topologische Gruppe und μ ein Borelmaß auf G. Wir können untersuchen, wie sich das Maß bezüglich der Translation durch beliebige Gruppenelemente $g \in G$ verhält. Gilt $\mu(gE) = \mu(E)$ für jede Borelmenge, so nennen wir μ *linksinvariant*. Analog heißt μ *rechtsinvariant*, falls $\mu(Eg) = \mu(E)$. Diese beiden Begriffe fallen natürlich zusammen, wenn G abelsch ist.

Nun haben wir alle wichtigen Konzepte zusammen für folgende wichtige

Definition 1.3 (Haarsche Maß)**.** Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Ein *linkes* (beziehungsweise *rechtes*) *Haarsches Maß* auf G ist ein linksinvariantes (beziehungsweise rechtsinvariantes) Radonmaß, das auf nichtleeren offenen Mengen positiv ist.

Beispiele 1.4.

1. Ist G diskret, dann ist das Zählmaß ein Haarsches Maß.
2. Für $G = \mathbb{R}^+$ definiert das Lebesguemaß ein Haarsches Maß.
3. Für $G = \mathbb{R}^\times$ wird durch $\mu(E) := \int_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{1}_E \frac{1}{|x|} dx$ ein Haarsches Maß, wie wir in TODO sehen werden.

2 Exkurs: p-adische Zahlen

Sei K ein beliebiger Körper und $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

Definition 2.1. Ein *Absolutbetrag* auf K ist eine Abbildung

$$|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(ii) $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in K$ (Multiplikativität)

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in K$ (Dreiecksungleichung)

Wir nennen den Absolutbetrag $|\cdot|$ nicht-archimedisch, wenn er zusätzlich die stärkere Bedingung

(iii)′ $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ für alle $x, y \in K$ (verschärfte Dreiecksungleichung)

erfüllt. Anderenfalls sagen wir der Absolutbetrag ist archimedisch.

Wir möchten zunächst ein paar allgeimgültige Eigenschaften von Absolutbeträgen im folgenden Lemma festhalten.

Lemma 2.2. *Für beliebige Absolutbeträge $|\cdot|$ auf K und Elemente $x \in K$ gilt:*

(i) $|1| = 1$

(ii) $|-1| = 1$

(iii) Falls $|x^n| = 1$, *dann* $|x| = 1$

(iv) $|-x| = |x|$

Betrachten wir nun den Körper $K = \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Sei $x \in \mathbb{Q}^\times$ eine beliebige rationale Zahl. Dann existiert eine eindeutige (bis auf Reihenfolge) Primfaktorzerlegung

$$x = \prod_p p^{v_p},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ geht und $v_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle p gleich 0 ist. Legen wir uns auf ein p fest, so ermöglicht sich die

Definition 2.3. Für beliebige $x \in \mathbb{Q}$ sei der p-adischen Absolutbetrag von x gegeben durch

$$|x|_p = p^{-v_p}$$

für $x \neq 0$ und $v_p \in \mathbb{Z}$ wie oben. Durch $|0|_p := 0$ vervollständigen wir die Definition.

Lemma 2.4. $|\cdot|_p$ *ist ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf* $\mathbb{Q}$

Beweis. □

Satz 2.5 (Ostrowski)**.** *Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu einem der Absolutbeträge $|\cdot|_p$, wobei p entweder eine Primzahl ist oder $p = \infty$.*

Beweis. Sei $|\cdot|$ ein beliebiger nicht-trivialer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Wir untersuchen die zwei möglichen Fälle.

a) $|\cdot|$ ist archimedisch. Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $|n_0| > 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|n_0|^\alpha = n_0$. Wir wollen nun zeigen, dass $|n| = |n|_\infty^\alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der allgemeine Fall für $\mathbb{Q}$ folgt dann aus den Eigenschaften des Betrags. Dazu bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Für $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir die Darstellung zur Basis n_0, d.h.

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i$$

mit $a_i \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$, $a_k \neq 0$ und $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$. Nehmen wir davon den Absolutbetrag und beachten, dass $|a_i| \leq 1$ nach unserer Wahl von n_0 gilt, so erhalten wir

$$|n| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| n_0^{i\alpha} \leq \sum_{i=0}^{k} n_0^{i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{k} n_0^{-i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}.$$

Setzt man nun $C := \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} > 0$, so sehen wir

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten die N-te Wurzel und lassen N gegen ∞ laufen, so konvergiert $\sqrt[N]{C}$ gegen 0 und wir erhalten

$$|n| \leq n^\alpha$$

Ein gutes Ergebnis zur Ende der ersten Halbzeit.
Züruck zur unserer Basisdarstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i.$$

Da $n < n_0^{k+1}$ erhalten wir die Abschätzung

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|$$

so dass wir mit dem Ergebnis vor der Halbzeit und $n \geq n_0^k$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha \\ &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \\ &> n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \end{aligned}$$

erhalten. Setzen wir wieder $C' := \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) > 0$ folgt analog zum ersten Teil, dass

$$|n| \geq n^\alpha$$

und daher $|n| = n^\alpha$. Damit haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ äquivalent zum klassischen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ ist.

b) $|\cdot|$ ist nicht archimedisch. Dann ist $|n_0| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und, da $|\cdot|$ nicht-trivial ist, muss es eine kleinste Zahl n_0 geben mit $|n_0| < 1$. Insbesondere muss n_0 eine Primzahl sein, denn sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von n_0, also $n_0 = p \cdot n'$ mit $n' \in \mathbb{N}$ und $n' < n$, dann gilt nach unserer Wahl von n_0

$$|p| = |p| \cdot |n'| = |p \cdot n'| = |n_0| < 1.$$

Folglich muss schon $p = n_0$ gelten. Ziel wird es jetzt natürlich sein zu zeigen, dass $|\cdot|$ äquivalent zum p-adischen Absolutbetrag ist. Zunächst finden wir ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|p| = |p|_p^\alpha = \frac{1}{p^\alpha}$. Sei als nächstes $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \not| n$. Wir schreiben

$$n = rp + s, r \in \mathbb{Z}, 0 < s < p$$

Nach unserer Wahl von $p = n_0$ gilt $|s| = 1$ und $|rp| < 1$. Es folgt $|n| = \max\{|rp|, |s|\} = 1$. Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir schreiben $n = p^v n'$ mit $p \not| n'$ und sehen

$$|n| = |p|^v |n'| = |p|^v = (|p|_p^\alpha)^v = |n|_p^\alpha.$$

Mit den gleichen Überlegungen aus dem ersten Fall folgt damit die Behauptung.

$\square$

3 Der Adele- und Idelering

In Zukunft möchten wir gerne auch unsere lokalen Ergebnisse

3.1 Eingeschränktes Direktes Produkt

Wir beginnen mit einer

Definition 3.1 (Eingeschränkte direkte Produkt)**.** Sei $J = \{v\}$ eine Indexmenge und für jedes $v \in J$ sei G_v eine lokal kompakte Gruppe. Sei weiter $J_\infty \subseteq J$ eine endliche Teilmenge von J und für jedes $v \notin J_\infty$ sei $H_v \leq G_v$ eine kompakte offene Untergruppe. Das *eingeschränkte direkte Produkt* der G_v bezüglich H_v ist definiert als

$$\widehat{\prod_{v \in J}} G_v := \{(x_v) : x_v \in G_v \text{ und } x_v \in H_v \text{ für alle bis auf endlich viele } v\}.$$

Sei G das eingeschränkte direkte Produkt der obigen G_v bezüglich der H_v.

G als topologische Gruppe zu realisieren, geben wir eine Umgebungsbasis der Identität an. Diese soll aus den Mengen der Form $\prod_{v \in J} N_v$ bestehen, wobei N_v eine Umgebung der Identität von G_v ist und zus"tszlich $N_v = H_v$ für fast alle $v \in J$ gelten soll. Die dadurch induzierte Topologie auf G unterscheidet sich im Allgemeinen von der Produkttopologie und wird als *eingeschränkte Produkttopologie* bezeichnet.

3.2 Der Adelering $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$

3.3 Der Idelering $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$

4 Tates Beweis

4.1 Adelische Poisson Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

Satz 4.1 (Poisson Summenformel)**.** *Sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann gilt:*

$$\sum_{\gamma \in K} f(\gamma + x) = \sum_{\gamma \in K} \hat{f}(\gamma + x) \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{A}$.

Beweis. Jede K-invariante Funktion ϕ auf $\mathbb{A}$ induziert eine Funktion auf $\mathbb{A}/K$, welche wir wieder ϕ nennen. Wir können dann die Fouriertransformation von $\phi : \mathbb{A}/K \to \mathbb{C}$ als Funktion auf K betrachten, da K gerade die duale Gruppe von $\mathbb{A}/K$ ist. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{A}/K} \phi(t)\Psi(tx)\overline{dt}$$

wobei $\overline{dt}$ das Quotientenmaßauf $\mathbb{A}/K$ ist, welches von dem Maßdt auf $\mathbb{A}$ induziert wird. Dieses Haarmaßist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}/K} \tilde{f}(t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}/K} \sum \gamma \in K f(\gamma + t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}} f(t)dt$$

für alle stetigen Funktionen f auf $\mathbb{A}$ mit geeigneten Konvergenzeigenschaften (z.b. $f \in S(\mathbb{A})$). Für den eigentlichen Beweis benötigen wir zwei

Lemma 4.2. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ gilt:*

$$\hat{f}|_K = \hat{\tilde{f}}|_K.$$

Beweis. Sei $x \in K$ beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir wegen $\Psi|_K = 1$

$$\Psi(tx) = \Psi(tx)\Psi(\gamma x) = \Psi((\gamma + t)x)$$

für alle $\gamma \in K$ und $t \in \mathbb{A}$ haben. Per Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{f}}(x) = \int_{\mathbb{A}/K} \tilde{f}(t)\Psi(tx)\overline{dt} &= \int_{\mathbb{A}/K} \left(\sum_{\gamma \in K} f(\gamma + t)\right) \Psi(tx)\overline{dt} = \\ = \int_{\mathbb{A}/K} \left(\sum_{\gamma \in K} f(\gamma + t)\Psi((\gamma + t)x)\right) \overline{dt} &= \int_{\mathbb{A}} f(t)\Psi(tx)dt = \hat{f}(x)\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung des Quotientenmaßes $\overline{dt}$ ausgenutzt haben. □

Lemma 4.3. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ und jedes $x \in K$ gilt*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in K} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

Beweis. Wie wir eben bewiesen haben gilt $\hat{f}|_K = \hat{\tilde{f}}|_K$ und daher

$$\left|\sum_{\gamma \in K} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| = \left|\sum_{\gamma \in K} \hat{f}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| \leq \sum_{\gamma \in K} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass Ψ unitär ist. Die rechte Seite der Gleichung ist also normal konvergent, da $f \in S(\mathbb{A})$. Analog folgt, dass auch $\sum_{\gamma \in K} \hat{\hat{f}}(\gamma)$ normal konvergiert. Wir erinnern uns, dass das Pontryagin Duale $\widehat{\mathbb{A}/K}$ als topologische Gruppe isomorph zu K[1] ist. Also $\hat{\hat{f}} \in L^1(K)$ und

$$\sum_{\gamma \in K} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte[2] von $\hat{\hat{f}}$ ausgewertet am Punkt $-x$. Nach Fourierinversionsformel erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{\hat{\hat{f}}}(-x) = \sum_{\gamma \in K} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. □

Zurück zum Beweis der Summenformel. Wir erhalten aufgrund des zweiten Lemmas mit $x = 0$ und anschließenden Anwenden des Ersten

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in K} \hat{\hat{f}}(\gamma)\bar{\Psi}(0) = \sum_{\gamma \in K} \hat{\hat{f}}(\gamma) = \sum_{\gamma \in K} \hat{f}$$

Aber per Definition gilt gerade $\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in K} f(\gamma)$, also

$$\sum_{\gamma \in K} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in K} \hat{f}$$

und wir sind fertig. □

Satz 4.4 (Riemann-Roch)**.** *Sei $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ ein Idel von K und sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann*

$$\sum_{\gamma \in K} f(\gamma x) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \sum_{\gamma \in K} \hat{f}(\gamma x^{-1})$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ beliebig aber fest. Für beliebige $y \in \mathbb{A}$ definieren wir eine Funktion $h(y) := f(yx)$. Diese ist wieder in $S(\mathbb{A})$ und erfüllt damit die Poisson-Summenformel

$$\sum_{\gamma \in K} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in K} \hat{h}(\gamma).$$

Berechnen wir allerdings die Fouriertransformation von h erhalten wir mit Translation um x^{-1}

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\gamma) &= \int_{\mathbb{A}} h(y)\Psi(\gamma y)dy \\
&= \int_{\mathbb{A}} f(yx)\Psi(\gamma y)dy \\
&= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} f(y)\Psi(\gamma y x^{-1})dy \\
&= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \hat{f}(\gamma x^{-1}).
\end{aligned}$$

□

[1] Achtung: Hier ist Q versehen mit der diskreten Topologie gemeint
[2] Wir erinnern uns, dass in diesem Fall das Zählmaßein Haar-Maßist

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat. Alle Ausführungen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Kaske, Maximilian

Friedberg, der 23. Juli 2017