SUP

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wenden wir Poissonsummenformel auf die Gaußsche Funktion $g_\infty(x_\infty) := e^{-\pi|x_\infty|^2}$ an erhalten wir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_\infty(nx_\infty) = \tag{1}$$

Nach formaler Anwendung der Mellin Transformation auf $\Theta(x)$ erhalten wir

$$\int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \tag{2}$$

$$= \int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^{1-s} d^\times x_\infty \tag{3}$$

nach einen CoV von $x = \frac{1}{y}$ und $dx = -\frac{1}{y^2}dy$ unter Beachtung der Integrationsgrenzen.

2 Formeln und Definitionen

Definition 2.1. Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ ist für $Re(s) > 1$ definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} \tag{4}$$

Sie kann meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden und erfüllt die Funktionalgleichung.

Satz 2.2.

$$\Xi(s) = \Xi(1-s) \tag{5}$$

Definition 2.3.

$$\Xi(s) := \Gamma_\infty(s)\zeta(s) \tag{6}$$

Definition 2.4.

$$\Gamma_\infty(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \tag{7}$$

Satz 2.5 (Poisson Summenformel). *Für k_∞ und $t_\infty \in k_\infty^*$, f_∞ Schwartzfunktion, $|t_\infty|_\infty := |t_\infty|$ Absolutbetrag und $\hat{f}_\infty$ Fourier-transformierte von f_∞ gilt:*

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}} f_\infty(at_\infty) = \frac{1}{|t_\infty|_\infty} \sum_{a \in \mathbb{Z}} \hat{f}_\infty\left(\frac{a}{t_\infty}\right) \tag{8}$$

Definition 2.6 (Fouriertransformation).

$$\hat{f}_\infty(\xi_\infty) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(-x_\infty \xi_\infty)} f_\infty(x_\infty) dx_\infty \tag{9}$$

Satz 2.7. *Die (archimedische) Gaussche Funktion*

$$g_\infty(x_\infty) := e^{-\pi|x_\infty|^2} \tag{10}$$

ist ihre eigene Fouriertransformierte.

Beweis. Die Fouriertransformation von $g_\infty(x)$ ist definiert als

$$\hat{g}_\infty(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

Betrachten wir zunächst den Integranden etwas genauer sehen wir, dass wir dank

$$g(x)e^{-2\pi i x\xi} = e^{-\pi(x^2+2ix\xi-\xi^2)}e^{-\pi\xi^2} = e^{-pi(x+i\xi)^2}g(\xi)$$

die Fouriertransformierte $\hat{g}(\xi)$ umschreiben können zu

$$\hat{g}(\xi) = g(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx$$

Fuer den Beweis reicht es also zu zeigen, dass das verbleibende Integral gleich 1 ist. Wir berechnen zunächst

$$g(x)e^{-2\pi i x\xi} = e^{-\pi(x^2+2ix\xi-\xi^2)}e^{-\pi\xi^2} = e^{-pi(x+i\xi)^2}g(\xi)$$

und stellen erfreut fest, dass die Fouriertransformierte von g gerade

$$\hat{g}(\xi) = g(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$$

ist. Es reicht also zu zeigen, dass das zweite Integral 1 ist.
Sei zunächst γ eine Kurve entlang des Rechtecks mit den Ecken $-R$, R, $R+i\eta$ und $-R+i\eta$. Nach dem Cauchy Integralsatz gilt für unsere ganze Funktion $g(z)$

$$0 = \int_{-R}^{R} g(z)dz + \int_{R}^{R+i\eta} g(z)dz + \int_{R+i\eta}^{-R+i\eta} g(z)dz + \int_{-R+i\eta}^{-R} g(z)dz$$

Weiter gilt $|g(z)| = e^{-\pi(R^2-y^2)}$ für $z = \pm R + iy$ und $0 \leq y \leq \eta$ und so verschwinden das zweite und vierte Integral für $R \to \infty$. Nach Umstellen der verbleibenden Integrale und genauen hinsehen stellen wir fest, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} = 1$$

$\square$

3 Riemanns Beweis

Wenden wir die Poisson-Summenformel für k_∞ auf die Schwartz-Funktion $g_\infty(x_\infty) := e^{-\pi|x_\infty|^2}$ an, sehen wir, dass die Thetafunktion

$$\Theta_\infty(x_\infty) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_\infty(nx_\infty) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2|x_\infty|_\infty^2} \tag{11}$$

die Funktionalgleichung

$$\Theta_\infty(x_\infty) = \frac{1}{|x_\infty|_\infty}\Theta_\infty(\frac{1}{x_\infty}) \tag{12}$$

für $x_\infty \in k_\infty^\times := k_\infty \setminus 0$. Da insbesondere $\Theta_\infty(x_\infty) - 1$ für $x_\infty \to \infty$ schnell fällt, sehen wir, dass $\Theta_\infty(x_\infty) - 1/x_\infty$ schnell fällt wenn $x_\infty \to 0$. Formal können wir die Mellin-Transformation auf (12) anwenden und folgern

$$\int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^{1-s} d^\times x_\infty \tag{13}$$

für beliebige s, wobei $d^\times x_\infty := \frac{dx_\infty}{|x_\infty|_\infty}$ das standard multiplikative Haarmaß auf $k_\infty^\times$ ist. Dies macht streng genommen keinen Sinn, da die beiden Integranden hier bei 0 und ∞ divergieren (was letztendlich auf die Pole der Riemannschen Xi Funktion bei $s = 0$ und $s = 1$ zurückgeht). Setzen wir hier trotzdem weiter an. Verwenden wir den Trafo $y := \pi n^2 t^2$ und erinnern uns an die Formeln der Riemannschen Xi Funktion und des Gamma-Faktors, erhalten wir

$$\int_{k_\infty} e^{-\pi n^2 x_\infty^2}|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \Gamma_\infty(s)n^{-s} \tag{14}$$

und somit formal

$$\int_{k_\infty} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \int_{k_\infty} |x_\infty|^s d^\times x_\infty + 2\Gamma_\infty(s)\zeta(s) \tag{15}$$

Schmeißen wir das divergente Integral $\int_{k_\infty} |x_\infty|^s d^\times x_\infty$ weg und wenden (13) erhalten wir rein formal die Funktionalgleichung (2.2). Diese Berechnungen waren nur formeller Natur.

Dieser Teil soll die Arbeit abrunden und ein kurzes Fazit liefern.

4 Exkurs: p-adische Zahlen

Satz 4.1 (Ostrowski)**.** *Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu einem der Absolutbeträge $|.|_p$, wobei p entweder eine Primzahl ist oder $p = \infty$.*

Beweis. Sei $|.|$ ein beliebiger nicht-trivialer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Wir untersuchen die zwei möglichen Fälle.

(1) $|.|$ ist archimedisch. Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $|n_0| > 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|n_0|^\alpha = n_0$. Wir wollen nun zeigen, dass $|n| = |n|_\infty^\alpha$ für alle $nin\mathbb{N}$ gilt. Der allgemeine Fall für $\mathbb{Q}$ folgt dann aus den Eigenschaften des Betrags. Dazu bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Für $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir die Darstellung zur Basis n_0, d.h.

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i$$

mit $a_i \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, $a_k \neq 0$ und $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$. Nehmen wir davon den Absolutbetrag und beachten, dass $|a_i| \leq 1$ nach unserer Wahl von n_0 gilt, so erhalten wir

$$|n| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| n_0^{i\alpha} \leq \sum_{i=0}^{k} n_0^{i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{k} n_0^{-i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}.$$

Setzt man nun $C := \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} > 0$, so sehen wir

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten die N-te Wurzel und lassen N gegen ∞ laufen, so konvergiert $\sqrt[N]{C}$ gegen 0 und wir erhalten

$$|n| \leq n^\alpha$$

Ein gutes Ergebnis zur Ende der ersten Halbzeit.
Züruck zur unserer Basisdarstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i.$$

Da $n < n_0^{k+1}$ erhalten wir die Abschätzung

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|$$

so dass wir mit dem Ergebnis vor der Halbzeit und $n \geq n_0^k$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha \\ &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \\ &> n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \end{aligned}$$

erhalten. Setzen wir wieder $C' := \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) > 0$ folgt analog zum ersten Teil, dass

$$|n| \geq n^\alpha$$

und daher $|n| = n^\alpha$. Damit haben wir gezeigt, dass $|.|$ äquivalent zum klassischen Absolutbetrag $|.|_\infty$ ist. *(2)* $|.|$ ist nicht archimedisch. Dann ist $|n_0| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und, da $|.|$ nicht-trivial ist, muss es eine kleinste Zahl n_0 geben mit $|n_0| < 1$. Insbesondere muss n_0 eine Primzahl sein, denn sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von n_0, also $n_0 = p \cdot n'$ mit $n' \in \mathbb{N}$ und $n' < n$, dann gilt nach unserer Wahl von n_0

$$|p| = |p| \cdot |n'| = |p \cdot n'| = |n_0| < 1.$$

Folglich muss schon $p = n_0$ gelten. Ziel wird es jetzt natürlich sein zu zeigen, dass $|.|$ äquivalent zum p-adischen Absolutbetrag ist. Zunächst finden wir ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|p| = |p|_p^\alpha = \frac{1}{p^\alpha}$. Sei als nächstes $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \not| n$. Wir schreiben

$$n = rp + s, r \in \mathbb{Z}, 0 < s < p$$

Nach unserer Wahl von $p = n_0$ gilt $|s| = 1$ und $|rp| < 1$. Es folgt $|n| = \max\{|rp|, |s|\} = 1$. Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir schreiben $n = p^v n'$ mit $p \not| n'$ und sehen

$$|n| = |p|^v |n'| = |p|^v = (|p|_p^\alpha)^v = |n|_p^\alpha.$$

Mit den gleichen Überlegungen aus dem ersten Fall folgt damit die Behauptung. $\square$

5 Der Adel- und Idel-Ring

In Zukunft möchten wir gerne auch unsere lokalen Ergebnisse

5.1 Eingeschränktes Direktes Produkt

Wir beginnen mit einer

Definition 5.1 (Eingeschränkte direkte Produkt)**.** Sei $J = \{v\}$ eine Indexmenge und für jedes $v \in J$ sei G_v eine lokal kompakte Gruppe. Sei weiter $J_\infty \subseteq J$ eine endliche Teilmenge von J und für jedes $v \notin J_\infty$ sei $H_v \leq G_v$ eine kompakte offene Untergruppe. Das *eingeschränkte direkte Produkt* der G_v bezüglich H_v ist definiert als

$$\widehat{\prod_{v \in J}} G_v := \{(x_v) : x_v \in G_v \text{ und } x_v \in H_v \text{ für alle bis auf endlich viele } v\}.$$

Sei G das eingeschränkte direkte Produkt der obigen G_v bezüglich der H_v.

G als topologische Gruppe zu realisieren, geben wir eine Umgebungsbasis der Identität an. Diese soll aus den Mengen der Form $\prod_{v \in J} N_v$ bestehen, wobei N_v eine Umgebung der Identität von G_v ist und zus"tszlich $N_v = H_v$ für fast alle $v \in J$ gelten soll. Die dadurch induzierte Topologie auf G unterscheidet sich im Allgemeinen von der Produkttopologie und wird als *eingeschränkte Produkttopologie* bezeichnet.

5.2 Der Adelering $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$

5.3 Der Idelering $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$

6 Tates Beweis

6.1 Adelische Poisson Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

Satz 6.1 (Poisson Summenformel). *Sei $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Dann gilt:*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma + x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma + x) \tag{16}$$

für alle $x \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$.

Beweis. Jede $\mathbb{Q}$-invariante Funktion ϕ auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ induziert eine Funktion auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$, welche wir wieder ϕ nennen. Wir können dann die Fouriertransformation von $\phi : \mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ als Funktion auf $\mathbb{Q}$ betrachten, da $\mathbb{Q}$ gerade die duale Gruppe von $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ ist. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \phi(t)\Psi(tx)\overline{dt}$$

wobei $\overline{dt}$ das Quotientenmaßauf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ ist, welches von dem Maßdt auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ induziert wird. Dieses Haarmaßist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \sum \gamma \in \mathbb{Q} f(\gamma + t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} f(t)dt$$

für alle stetigen Funktionen f auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ mit geeigneten Konvergenzeigenschaften (z.b. $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$). Für den eigentlichen Beweis benötigen wir zwei

Lemma 6.2. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ gilt:*

$$\hat{f}|_\mathbb{Q} = \hat{\tilde{f}}|_\mathbb{Q}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}$ beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir wegen $\Psi|_\mathbb{Q} = 1$

$$\Psi(tx) = \Psi(tx)\Psi(\gamma x) = \Psi((\gamma + t)x)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{Q}$ und $t \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ haben. Per Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{f}}(x) &= \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(t)\Psi(tx)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma + t)\right)\Psi(tx)\overline{dt} = \\ &= \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma + t)\Psi((\gamma + t)x)\right)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} f(t)\Psi(tx)dt = \hat{f}(x)\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung des Quotientenmaßes $\overline{dt}$ ausgenutzt haben. □

Lemma 6.3. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ und jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

Beweis. Wie wir eben bewiesen haben gilt $\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\hat{f}}|_{\mathbb{Q}}$ und daher

$$\left|\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| = \left|\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| \leq \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass Ψ unitär ist. Die rechte Seite der Gleichung ist also normal konvergent, da $f \in S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Analog folgt, dass auch $\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)$ normal konvergiert. Wir erinnern uns, dass das Pontryagin Duale $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ als topologische Gruppe isomorph zu $\mathbb{Q}$[1] ist. Also $\hat{\hat{f}} \in L^1(\mathbb{Q})$ und

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte[2] von $\hat{\hat{f}}$ ausgewertet am Punkt $-x$. Nach Fourierinversionsformel erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{\hat{\hat{f}}}(-x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. □

Zurück zum Beweis der Summenformel. Wir erhalten aufgrund des zweiten Lemmas mit $x = 0$ und anschließenden Anwenden des Ersten

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\bar{\Psi}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}$$

Aber per Definition gilt gerade $\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma)$, also

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}$$

und wir sind fertig. □

Satz 6.4 (Riemann-Roch)**.** *Sei $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ ein Idel von $\mathbb{Q}$ und sei $f \in S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Dann*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma x) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}} \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma x^{-1})$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ beliebig aber fest. Für beliebige $y \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ definieren wir eine Funktion $h(y) := f(yx)$. Diese ist wieder in $S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ und erfüllt damit die Poisson-Summenformel

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} h(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{h}.$$

Berechnen wir allerdings die Fouriertransformation von h erhalten wir mit Translation um x^{-1}

$$\begin{aligned}
\hat{(h)}\gamma) &= \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} h(y)\Psi(\gamma y)dy \\
&= \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(yx)\Psi(\gamma y)dy \\
&= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}} \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(y)\Psi(\gamma y x^{-1})dy \\
&= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}} \hat{f}(\gamma x^{-1}).
\end{aligned}$$

[1] Achtung: Hier ist Q versehen mit der diskreten Topologie gemeint

[2] Wir erinnern uns, dass in diesem Fall das Zählmaßein Haar-Maßist

□

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat. Alle Ausführungen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Kaske, Maximilian

Friedberg, der 19. Juli 2017