SUP

Inhaltsverzeichnis

1 Lokalkompakte Gruppen

Definition 1.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

stetig auf der Produkttopologie von $G \times G$

(ii) Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ist stetig

Lemma 1.2. *Sei I eine Indexmenge und G_i eine topologische Gruppe für alle $i \in I$. Das direkte Produkt $G = \prod_{i \in I} G_i$ versehen mit der Produkttopologie ist und komponentenweiser Gruppenverknüpfung ist wieder eine topologische Gruppe.*

Beweis. Wir erinnern uns daran, dass eine Basis der Produkttopologie gegeben ist durch Rechtecke der Form

$$\prod_{i \in E} U_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i,$$

wobei E eine endliche Teilmenge von I und jedes U_i offen in G_i ist. Ohne Einschränkung sei also

$$W = \prod_{i \in E} W_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i$$

eine offene Umgebung von $gh = (g_i h_i)$. Da die G_i topologische Gruppen sind, finden wir für alle $i \in E$ offene Umgebungen U_i und V_i von g_i und h_i, sodass $U_i V_i \subseteq W_i$. Wir behaupten nun, dass

$$\Big(\prod_{i \in E} U_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i\Big) \times \Big(\prod_{i \in E} V_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i\Big)$$

eine offene Umgebung von $(g, h) \in G \times G$ ist, deren Bild in W liegt. Der erste Aussage ist klar, da beide Faktoren des Produkts offene Basiselemente der Topologie sind. Das Bild unter Gruppenoperation ist gegeben durch

$$\prod_{i \in E} U_i V_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i,$$

was nach unseren Überlegungen in W liegt. Der Beweis für die Umkehrabbildung funktioniert analog. □

Definition 1.3. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung hat. Eine *lokalkompakte Gruppe* ist eine topologische Gruppe, die lokalkompakt und hausdorffsch ist.

Lemma 1.4. *Seien G_1 und G_2 zwei lokalkompakte Gruppen. Dann ist $G_1 \times G_2$ wieder lokalkompakt. Insbesondere ist also jedes endliche direkte Produkt lokalkompakter Gruppen lokalkompakt.*

Beweis. Sei $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Wegen der Lokalkompaktheit von G_1 und G_2 finden wir kompakte Umgebungen K_1, K_2 von g_1 bzw. g_2. Dann ist aber $K_1 \times K_2$ eine kompakte Umgebung von (g_1, g_2). Weiter ist das direkte Produkt zweier Hausdorff-Räume wieder hausdorffsch, wodurch $G_1 \times G_2$ zu einer lokalkompakten Gruppe wird. $\square$

Wie wir in **??** sehen werden, kann diese Aussage nicht ohne Weiteres auf beliebig große direkte Produkte übertragen werden.

1.1 Haarsche Maß

Nun zu etwas Maßtheorie. Wir beginnen mit einer kleinen Auffrischung der wichtigsten Objekte. Eine *σ-Algebra* auf einer Menge X ist eine Teilmenge Ω von $P(X)$, so dass

(i) $X \in \Omega$

(ii) Wenn $A \in \Omega$, dann $A^c \in \Omega$, wobei hier $A^c := X \setminus A$ das Komplement von A in X notiert.

(iii) Ω ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, d.h. $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \Omega$, falls $A_k \in \Omega$ für alle k.

Die Elemente in Ω werden *messbar* genannt. Aus den Axiomen lässt sich leicht folgern, dass die leere Menge und abzählbare Schnitte von messbaren Mengen wiederum messbar sind. Weiter ist der Schnitt $\bigcap_n \Omega_n$ beliebiger Familien $\{\Omega_n\}$ von σ-Algebren auf X selbst wieder eine σ-Algebra.

Eine Menge X zusammen mit einer σ-Algebra Ω bilden den *messbaren Raum* (X, Ω). Ist X ein topologischer Raum, so können wir die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ betrachten, die alle offenen Mengen von X enthält. Die Elemente von $\mathcal{B}$ werden *Borelmengen* von X genannt.

Nun zum eigentlichen Messen der messbaren Mengen. Ein *Maß* auf einem beliebigen messbaren Raum (X, Ω) ist eine Funktion $\mu : \Omega \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und die *σ-additiv* ist. Das bedeutet

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

für beliebige Familien $\{A_n\}_1^\infty$ von paarweise disjunkten Mengen in Ω.

Sei nun μ ein Borelmaß auf einem lokalkompakten hausdorffschen Raum X und sei E ein eine beliebige Borelmenge von X. Wir nennen μ von *innen regulär* auf E, falls

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$$

Umgekehrt heißt μ von *außen regulär* auf E, wenn

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

Ein *Radonmaß* auf X ist ein Borelmaß, das endlich auf kompakten Mengen, von innen regulär auf allen offenen Mengen und von außen regulär auf allen Borelmengen ist.

Sei nun G eine topologische Gruppe und μ ein Borelmaß auf G. Wir können untersuchen, wie sich das Maß bezüglich der Translation durch beliebige Gruppenelemente $g \in G$ verhält. Gilt $\mu(gE) = \mu(E)$ für jede Borelmenge, so nennen wir μ *linksinvariant*. Analog heißt μ *rechtsinvariant*, falls $\mu(Eg) = \mu(E)$. Diese beiden Begriffe fallen natürlich zusammen, wenn G abelsch ist.

Nun haben wir alle wichtigen Konzepte zusammen für folgende wichtige

Definition 1.5. Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Ein *linkes* (beziehungsweise *rechtes*) *Haar-Maß* auf G ist ein linksinvariantes (beziehungsweise rechtsinvariantes) Radon-Maß, das auf nichtleeren offenen Mengen positiv ist.

Beispiele 1.6.
1. Ist G eine diskrete Gruppe, dann ist das Zählmaß ein Haarsches Maß.
2. Für $G = \mathbb{R}^+$ definiert das Lebesgue-Maß dx ein Haarsches Maß.
3. Für $G = \mathbb{R}^\times$ wird durch $\mu(E) := \int_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{1}_E \frac{1}{|x|} dx$ ein Haarsches Maß, wie wir in TODO sehen werden.

Satz 1.7 (Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Maß)**.** *Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann existiert ein linksinvariantes Haar-Maß auf G. Dieses ist eindeutig bis auf skalares Vielfaches.*

Beweis. Einen ausfürhlichen Beweis befindet sich in [2] Kapitel 1. □

Lemma 1.8. *Für jede Abbildung $f \in L^1(G, \mu)$ gilt*

(a) $\int_G f(xy) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$

(b) $\int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$

Beweis. (a) folgt leicht aus der Definition des Integrals und der Translationsinvarianz des Maßes.

Für (b) überlegen wir uns zunächst, dass $\tilde{\mu}(E) := \mu(E^{-1})$ ein weiteres Haar Maß auf G definiert. Nach der Eindeutigkeit unterscheiden sich beide Maße nur um eine Konstante $c > 0$. Wir wollen zeigen, dass $c = 1$ ist. Sei dazu K eine kompakte Umgebung der 1. Dann gibt es eine offene Umgebung U der 1 mit $G \subseteq K$. Definieren wir nun $S := KK^{-1}$, so ist S kompakt, $U \subseteq S$ und es gilt $0 < \mu(U) \leq \mu(S) < \infty$. Es folgt $c \cdot \mu(S) = \tilde{\mu}(S) = \mu(S^{-1}) = \mu(S)$ und damit $c = 1$. Das Haar-Maß ist also invariant unter der Umkehrabbildung. Der Rest folgt dann aus der Definition des Integrals. □

2 Exkurs: p-adische Zahlen

Sei k ein beliebiger Körper und $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

Definition 2.1. Ein *Absolutbetrag* auf k ist eine Abbildung

$$|\cdot| : k \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(ii) $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in k$ (Multiplikativität)

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in k$ (Dreiecksungleichung)

Wir nennen den Absolutbetrag $|\cdot|$ nicht-archimedisch, wenn er zusätzlich die stärkere Bedingung

(iii)′ $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ für alle $x, y \in k$ (verschärfte Dreiecksungleichung)

erfüllt. Anderenfalls sagen wir der Absolutbetrag ist archimedisch.

Wir möchten zunächst ein paar allgeimgültige Eigenschaften von Absolutbeträgen im folgenden Lemma festhalten.

Lemma 2.2. *Für beliebige Absolutbeträge $|\cdot|$ auf k und Elemente $x \in k$ gilt:*

(i) $|1| = 1$

(ii) $|-1| = 1$

(iii) Falls $|x^n| = 1$, dann $|x| = 1$

(iv) $|-x| = |x|$

Betrachten wir nun den Körper $k = \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Sei $x \in \mathbb{Q}^\times$ eine beliebige rationale Zahl. Dann existiert eine eindeutige (bis auf Reihenfolge) Primfaktorzerlegung

$$x = \prod_p p^{v_p},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ geht und $v_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle p gleich 0 ist. Legen wir uns auf ein p fest, so ermöglicht sich die

Definition 2.3. Für beliebige $x \in \mathbb{Q}$ sei der *p-adische Absolutbetrag* von x gegeben durch

$$|x|_p = p^{-v_p}$$

für $x \neq 0$ und $v_p \in \mathbb{Z}$ wie oben. Durch $|0|_p := 0$ vervollständigen wir die Definition.

Lemma 2.4. $|\cdot|_p$ *ist ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf* $\mathbb{Q}$

Beweis. □

Satz 2.5 (Ostrowski). *Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu einem der Absolutbeträge $|\cdot|_p$, wobei p entweder eine Primzahl ist oder $p = \infty$.*

Beweis. Sei $|\cdot|$ ein beliebiger nicht-trivialer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Wir untersuchen die zwei möglichen Fälle.

a) $|\cdot|$ ist archimedisch. Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $|n_0| > 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|n_0|^\alpha = n_0$. Wir wollen nun zeigen, dass $|n| = |n|_\infty^\alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der allgemeine Fall für $\mathbb{Q}$ folgt dann aus den Eigenschaften des Betrags. Dazu bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Für $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir die Darstellung zur Basis n_0, d.h.

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i$$

mit $a_i \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$, $a_k \neq 0$ und $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$. Nehmen wir davon den Absolutbetrag und beachten, dass $|a_i| \leq 1$ nach unserer Wahl von n_0 gilt, so erhalten wir

$$|n| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| n_0^{i\alpha} \leq \sum_{i=0}^{k} n_0^{i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{k} n_0^{-i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}.$$

Setzt man nun $C := \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} > 0$, so sehen wir

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten die N-te Wurzel und lassen N gegen ∞ laufen, so konvergiert $\sqrt[N]{C}$ gegen 0 und wir erhalten

$$|n| \leq n^\alpha$$

Damit wäre die erste Hälfte geschafft. Gehen wir nun züruck zu unserer Basisdarstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i.$$

Da $n < n_0^{k+1}$ erhalten wir die Abschätzung

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|.$$

mit dem Ergebnis aus der ersten Hälfte des Beweises und $n \geq n_0^k$ sehen wir

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha \\ &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \\ &> n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Setzen wir wieder $C' := \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) > 0$ folgt analog zum ersten Teil, dass

$$|n| \geq n^\alpha$$

und daher $|n| = n^\alpha$. Damit haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ äquivalent zum klassischen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ ist.

b) $|\cdot|$ ist nicht archimedisch. Dann ist $|n_0| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und, da $|\cdot|$ nicht-trivial ist, muss es eine kleinste Zahl n_0 geben mit $|n_0| < 1$. Insbesondere muss n_0 eine Primzahl sein, denn sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von n_0, also $n_0 = p \cdot n'$ mit $n' \in \mathbb{N}$ und $n' < n$, dann gilt nach unserer Wahl von n_0

$$|p| = |p| \cdot |n'| = |p \cdot n'| = |n_0| < 1.$$

Folglich muss schon $p = n_0$ gelten. Ziel wird es jetzt natürlich sein zu zeigen, dass $|\cdot|$ äquivalent zum p-adischen Absolutbetrag ist. Zunächst finden wir ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|p| = |p|_p^\alpha = \frac{1}{p^\alpha}$. Sei als nächstes $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \not| n$. Wir schreiben

$$n = rp + s, r \in \mathbb{Z}, 0 < s < p$$

Nach unserer Wahl von $p = n_0$ gilt $|s| = 1$ und $|rp| < 1$. Es folgt $|n| = \max\{|rp|, |s|\} = 1$. Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir schreiben $n = p^v n'$ mit $p \not| n'$ und sehen

$$|n| = |p|^v |n'| = |p|^v = (|p|_p^\alpha)^v = |n|_p^\alpha.$$

Mit den gleichen Überlegungen aus dem ersten Fall folgt damit die Behauptung.

$\square$

3 Der Adele- und Idelering

In der vorherigen Sektion haben wir uns die Lokalisierungen k_p im einzelnen angeschaut. Jetzt wollen wir einen Schritt weiter gehen und alle k_p auf einmal betrachten, indem wir sie in einem neuen Objekt einkapseln.

3.1 Eingeschränktes Direktes Produkt

Lemma 3.1. *Sei I eine Indexmenge und X_i ein lokalkompakter Hausdorff-Raum für alle $i \in I$. Der Raum $X := \prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann lokalkompakt, wenn fast alle X_i kompakt sind.*

Wir geben den Beweis von Deitmar [1]:

Beweis. Zunächst eine Beobachtung: Ist X kompakt, so ist auch jedes X_i kompakt als Bild von X unter der (stetigen) Projektion $\pi_i : X \to X_i$. Sei $E \subset I$ eine endliche Teilmenge und $U_i \in X_i$ eine offene Menge für jedes $i \in E$. Wir betrachten die offenen Rechtecke

$$\prod_{i\in E} U_i \times \prod_{i\in I\setminus E} X_i,$$

welche eine Basis der Produkttopologie bilden. Ist X lokalkompakt, so gibt es ein offenes Rechteck, dessen Abschlußkompakt ist. Folglich sind fast alle X_i kompakt. Die Rückrichtung ist eine Folgerung des Satzes von Tychonov, der besagt, dass das direkte Produkt beliebiger Familien kompakter Mengen wieder kompakt ist, und der Tatsache, dass endliche Produkte lokalkompakter Räume wieder lokalkompakt sind. $\square$

Das direkte Produkt lokalkompakter Gruppen liefert uns daher im Allgemeinen keine neue lokalkompakte Gruppe. Wir sehen nun aber, was wir zu tun haben damit doch eine runde Sache daraus wird und geben folgende

Definition 3.2 (Eingeschränkte direkte Produkt)**.** Sei $I = \{v\}$ eine Indexmenge und für jedes $v \in I$ sei G_v eine lokalkompakte Gruppe. Sei weiter $I_\infty \subseteq I$ eine endliche Teilmenge von I und für jedes $v \notin I_\infty$ sei $H_v \leq G_v$ eine kompakte offene Untergruppe. Das *eingeschränkte direkte Produkt* der G_v bezüglich H_v ist definiert als

$$G = \prod_{v\in I}{}' G_v := \{(x_v) : x_v \in G_v \text{ und } x_v \in H_v \text{ für alle bis auf endlich viele } v\}.$$

mit komponentenweiser Verknüpfung. Die Topologie auf G ist gegeben durch die *eingeschränkte Produktopologie.* Diese wird erzeugt durch die Basis der *eingeschränkten offenen Rechtecke*

$$\prod_{i\in E} U_i \times \prod_{i\in I\setminus E} H_i,$$

wobei $E \subset I$ eine endliche Teilmenge mit $I_\infty \subset E$ und $U_i \in G_i$ offen für alle $i \in E$ ist.

G ist offensichtlich eine Untergruppe des direkten Produkts, die eingeschränkte Produkttopologie ist jedoch nicht die Teilraumtopologie.

Wir führen nun eine nützliche Familie von Untergruppen von G ein. Sei S eine endliche Teilmenge von I mit $I_\infty \in S$. Wir definieren die Untergruppe

$$G_S := \prod_{i\in S} G_i \times \prod_{i\in I\setminus S} H_i$$

von G. Diese ist offensichtlich offen. Nach Lemma 1.2 und Lemma 3.1 ist G_S selbst wieder eine lokalkompakte Gruppe bezüglich der Produkttopologie. Man sieht aber leicht, dass diese mit der durch G induzierten Teilraumtopologie übereinstimmt. Da jeder Punkt $x \in G$ in einer Untergruppe dieser Form liegt folgt sofort, dass G wieder eine lokalkompakte Gruppe ist.

Abschließend möchten wir noch einen kleinen Satz festhalten.

Satz 3.3. *Eine Teilmenge Y von G hat genau dann kompakten Abschluss, wenn $Y \subseteq \prod K_i$ für eine Familie von kompakten Teilmengen $K_i \subseteq G_i$ mit $K_i = H_i$ für fast alle Indizes i.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, denn jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist wieder kompakt. Für die Hinrichtung sei nun K der Abschluss von Y und kompakt in G. Da die Untergruppen G_S eine offene Überdeckung von G bilden, gibt es eine endliche Familie $\{G_{S_n}\}$, die K überdecken. Wir können sogar noch mehr sagen. Da die die S_k endlich sind, ist $S = \bigcup S_k$ endlich, also wird K sogar von nur einem G_S überdeckt. Sei K_i das Bild von K der natürlichen Einbettung nach G_i. Da die Topologie auf G_S gerade der Produkttopologie entspricht und $K \subseteq G_S$ ist diese Abbildung stetig und K_i damit kompakt als stetiges Bild einer kompakten Menge. Außerdem ist $K_i \subseteq H_i$ für alle $i \notin S$, sodass wir hier K_i durch die kompakten H_i ersetzen können. Dann ist $Y \subseteq K \subseteq \prod K_i$ und wir sind fertig. $\square$

3.2 Integration auf dem eingeschränkten Produkt

Wie wir gesehen haben ist $G = \prod'_{i \in I} G_i$ eine lokalkompakte Gruppe, besitzt also nach Satz 1.7 ein Haar-Maß. Wir wollen dieses geeignet normalisieren.

Satz 3.4. *Sei $G = \prod'_{i \in I} G_i$ das eingeschränkte direkte Produkt einer Familie lokalkompakter Gruppen G_i bezüglich der Untergruppen $H_i \subseteq G_i$. Bezeichne dg_i das Haar-Maß auf G_i mit der Normalisierung*

$$\int_{H_i} dg_i = 1$$

für fast alle $i \notin I_\infty$. Dann gibt es ein eindeutiges Haar-Maß dg auf G, so dass für jede endliche Teilmenge $S \supseteq I_\infty$ der Indexmenge I die Einschränkung dg_S von dg auf G_S genau das Produktmaß ist.

Beweis. Wir vergewissern uns zunächst, dass die Normalisierung der dg_i möglich ist, da per Definiton die Untergruppen H_i offen und kompakt sind und daher positives und endliches Maß haben.

Sei S nun eine beliebige Menge wie im Satz beschrieben und definiere dg_S als das Produktmäß $dg_S := (\prod_{s \in S} dg_i) \times dg^S$, wobei dg^S das Haar-Maß auf der kompakten Gruppe $G^S := \prod_{i \notin S} H_i$ mit $\int_{G^S} dg^S = 1$ ist. Siehe Folland **??** Kapitel 7, Satz 7.28 für eine genauere Beschreibung des Maßes dg^S. Als endliches Produkt von Haar-Maßen ist dg_S selbst wieder Haar-Maß und wir können dg normieren, dass dessen Einschränkung auf G_S mit dg_S übereinstimmt. Unsere Wahl von der Teilmenge war willkürlich, allerdings können wir zeigen, dass die gewählte Normierung unabhängig von S ist. Sei dazu $T \supseteq S$ eine weitere endliche Indexmenge. Per Definition ist G_S eine Untergruppe von G_T. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass die Einschränkung von dg^T auf G^S mit dg^S übereinstimmt. Man erkennt, dass $G^S = \left(\prod_{i \in T \setminus S} H_i\right) \times G^T$. Daher bildet $\left(\prod_{i \in T \setminus S} dg_i\right) \times dg^T$. ein Haar-Maß, welches der kompakten Gruppe G_S das oben geforderte Maß 1 zuweist. Aus der Eindeutigkeit des Haar-Maßes auf (lokal)kompakten Gruppen folgt somit die Gleichheit zu dg^S. Sei nun S' eine beliebige weitere Indexmenge, die I_∞ enthält. Das normierte Maß dg wird auf $G_{S\cup S'}$ eingeschränkt zu einem Maß, welches ein konstantes Vielfaches von $dg_{S\cup S'}$ ist. Da aber $G_S \subseteq G_{S\cup S'}$ muss diese Konstante 1 sein, denn nach obigen Überlegungen ist die Einschränkung von $dg_{S\cup S'}$ auf G_S gerade dg_S. Umgekehrt ist aber $dg_{S'}$ die die Einschränkung von $dg_{S\cup S'}$ auf $G_{S'}$, also ist die Normalisierung unabhängig von der Wahl unserer Indexmenge S. $\square$

Wir schreiben manchmal $\prod_i dg_i$ für das wie oben normierte Maß dg.

Satz 3.5. *Sei G das eingeschränkte direkte Produkt mit dem induzierten Maß dg*

(i) Sei $f \in L(G)$ eine integrierbare Funktion auf G. Dann gilt

$$\int_G f(g)dg = \lim_S \int_{G_S} f(g_S)dg_S,$$

wobei S über alle endlichen Indexmengen läuft, die I_∞ enthalten.

(ii) Sei S_0 ein beliebige endliche Indexmenge, die I_∞ und alle i enthält, für die $Vol(H_i, dg_i) \neq 1$. Für jeden Index i haben wir eine stetige Funktion f_i auf G_i, so dass $f_i|_{H_i} = 1$ für alle $i \notin S_0$. Wir definieren

$$f(g) = \prod_i f_i(g_i),$$

für $g = (g_i) \in G$. Dann ist f wohldefiniert und stetig auf G. Sind die f_i sogar integrierbar und ist S eine weitere endliche Indexmenge, die S_0 enthählt, haben wir

$$\int_{G_S} f(g_S)dg_S = \prod_{i\in S}\Big(\int_{G_i} f_i(g_i)dg_i\Big).$$

Ist das Produkt

$$\prod_{i\in S}\Big(\int_{G_i} f_i(g_i)dg_i\Big)$$

sogar endlich, dann ist f insbesondere integrierbar und es gilt

$$\int_G f(g)dg = \prod_{i\in S}\Big(\int_{G_i} f_i(g_i)dg_i\Big).$$

3.3 Der Adelering

3.4 Der Idelering

4 Tates Beweis

4.1 Adelische Poisson Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

Satz 4.1 (Poisson Summenformel)**.** *Sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann gilt:*

$$\sum_{\gamma \in k} f(\gamma + x) = \sum_{\gamma \in k} \hat{f}(\gamma + x) \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{A}$.

Beweis. Jede k-invariante Funktion ϕ auf $\mathbb{A}$ induziert eine Funktion auf $\mathbb{A}/k$, welche wir wieder ϕ nennen. Wir können dann die Fouriertransformation von $\phi : \mathbb{A}/k \to \mathbb{C}$ als Funktion auf k betrachten, da k gerade die duale Gruppe von $\mathbb{A}/k$ ist. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{A}/k} \phi(t)\Psi(tx)\overline{dt}$$

wobei $\overline{dt}$ das Quotientenmaßauf $\mathbb{A}/k$ ist, welches von dem Maßdt auf $\mathbb{A}$ induziert wird. Dieses Haarmaßist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}/k} \tilde{f}(t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}/k} \sum \gamma \in k f(\gamma + t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}} f(t)dt$$

für alle stetigen Funktionen f auf $\mathbb{A}$ mit geeigneten Konvergenzeigenschaften (z.b. $f \in S(\mathbb{A})$). Für den eigentlichen Beweis benötigen wir zwei

Lemma 4.2. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ gilt:*

$$\hat{f}|_k = \hat{\tilde{f}}|_k.$$

Beweis. Sei $x \in k$ beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir wegen $\Psi|_k = 1$

$$\Psi(tx) = \Psi(tx)\Psi(\gamma x) = \Psi((\gamma + t)x)$$

für alle $\gamma \in k$ und $t \in \mathbb{A}$ haben. Per Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{f}}(x) &= \int_{\mathbb{A}/k} \hat{f}(t)\Psi(tx)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}/k} \left(\sum_{\gamma \in k} f(\gamma + t)\right) \Psi(tx)\overline{dt} = \\ &= \int_{\mathbb{A}/k} \left(\sum_{\gamma \in k} f(\gamma + t)\Psi((\gamma + t)x)\right) \overline{dt} = \int_{\mathbb{A}} f(t)\Psi(tx)dt = \hat{f}(x)\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung des Quotientenmaßes $\overline{dt}$ ausgenutzt haben. □

Lemma 4.3. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ und jedes $x \in k$ gilt*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in k} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

Beweis. Wie wir eben bewiesen haben gilt $\hat{f}|_k = \hat{\tilde{f}}|_k$ und daher

$$\left|\sum_{\gamma \in k} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| = \left|\sum_{\gamma \in k} \hat{f}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| \le \sum_{\gamma \in k} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass Ψ unitär ist. Die rechte Seite der Gleichung ist also normal konvergent, da $f \in S(\mathbb{A})$. Analog folgt, dass auch $\sum_{\gamma \in k} \hat{\hat{f}}(\gamma)$ normal konvergiert. Wir erinnern uns, dass das Pontryagin Duale $\widehat{\mathbb{A}/k}$ als topologische Gruppe isomorph zu k[1] ist. Also $\hat{\hat{f}} \in L^1(k)$ und

$$\sum_{\gamma \in k} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte[2] von $\hat{\hat{f}}$ ausgewertet am Punkt $-x$. Nach Fourierinversionsformel erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{\hat{\hat{f}}}(-x) = \sum_{\gamma \in k} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. □

Zurück zum Beweis der Summenformel. Wir erhalten aufgrund des zweiten Lemmas mit $x = 0$ und anschließenden Anwenden des Ersten

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in k} \hat{\hat{f}}(\gamma)\bar{\Psi}(0) = \sum_{\gamma \in k} \hat{\hat{f}}(\gamma) = \sum_{\gamma \in k} \hat{f}$$

Aber per Definition gilt gerade $\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in k} f(\gamma)$, also

$$\sum_{\gamma \in k} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in k} \hat{f}$$

und wir sind fertig. □

Satz 4.4 (Riemann-Roch)**.** *Sei $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ ein Idel von k und sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann*

$$\sum_{\gamma \in k} f(\gamma x) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \sum_{\gamma \in k} \hat{f}(\gamma x^{-1})$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ beliebig aber fest. Für beliebige $y \in \mathbb{A}$ definieren wir eine Funktion $h(y) := f(yx)$. Diese ist wieder in $S(\mathbb{A})$ und erfüllt damit die Poisson-Summenformel

$$\sum_{\gamma \in k} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in k} \hat{h}(\gamma).$$

Berechnen wir allerdings die Fouriertransformation von h erhalten wir mit Translation um x^{-1}

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\gamma) &= \int_{\mathbb{A}} h(y)\Psi(\gamma y)dy \\
&= \int_{\mathbb{A}} f(yx)\Psi(\gamma y)dy \\
&= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} f(y)\Psi(\gamma y x^{-1})dy \\
&= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \hat{f}(\gamma x^{-1}).
\end{aligned}$$

□

[1] Achtung: Hier ist Q versehen mit der diskreten Topologie gemeint
[2] Wir erinnern uns, dass in diesem Fall das Zählmaßein Haar-Maßist

Literatur

[1] Anton Deitmar (auth.). *Automorphe Formen*. Springer-Lehrbuch Masterclass 0. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2010.

[2] Rama. *Fourier*.

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat. Alle Ausführungen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Kaske, Maximilian

Friedberg, der 26. Juli 2017