Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie

Tates Beweis der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Eingereicht von:	Maximilian Alexander Kaske
Matrikelnummer:	1291670
Studiengang:	Mathematik (B.Sc.)
Betreut von:	Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen
Abgegeben am:	20. September 2017

Zusammenfassung

In seiner einzigen Arbeit im Bereich der Zahlentheorie, zeigte Riemann, dass der Ausdruck $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ unverändert bleibt, wenn man s mit $1-s$ vertauscht. Wir gehen nun der Frage nach, woher der Faktor $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ kommt und warum er so nahtlos in diese Funktionalgleichung passt. Dazu besprechen wir die unter dem Namen *Tate's Thesis* bekannte Doktorarbeit von John Tate im Spezialfall der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Es werden zunächst die nötigen Voraussetzungen im Bereich lokalkompakter Gruppen, p-adischer Zahlen und harmonischer Analysis behandelt. Anschließend übertragen wir diese Konzepte in die globale Theorie der Adele- und Idelegruppen. Dies führt zu Tates Beweis der Funktionalgleichung globaler Zeta-Funktionen, welcher eine Verallgemeinerung von Riemanns klassischen Beweis darstellt, jedoch ein wesentlich klareres Bild über das Zustandekommen der Gleichung liefert.

Inhaltsverzeichnis

1 Von Riemann zu Tate

Im Jahr 1859 erschien mit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ [8] Bernhard Riemanns erste und einzige veröffentlichte Arbeit im Bereich der Zahlentheorie. Als Startpunkt nimmt Riemann die heute als *Riemannsche Zeta-Funktion** $\zeta(s)$ bekannte Abbildung, welche für $\Re(s) > 1$ durch

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

als absolut konvergente Reihe oder durch die *Euler-Produktformel* dargestellt werden kann. Neben einer Vielzahl neuer Notationen, Definitionen und Ideen, darunter die bekannte *Riemannsche Vermutung*, dass alle nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ den Realteil $1/2$ haben, gab er auch zwei Beweise der Funktionalgleichung

$$\Xi(s) = \Xi(1 - s),$$

wobei $\Xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ und $\Gamma(s)$ das bekannte Euler-Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

bezeichnet†.

1.1 Die klassische Funktionalgleichung

In seinem ersten Beweis erhält Riemann zunächst durch Aufsummieren von

$$\Gamma(s)\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^s \frac{dx}{x}, \tag{1}$$

die Gleichung

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Über Wegintegration des Integrals

$$\int \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

etablierte er anschließend die meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion (wenn auch nicht im Sinne von Weierstrass) und zeigte die erste Form der Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = \Gamma(s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin(s\pi/2)\zeta(1 - s).$$

Riemann nutzte nun geläufige Identitäten der Gamma-Funktion, um dieses Ergebnis umzuformulieren: Der Ausdruck

$$\Xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

*Obwohl diese Funktion heute nach Riemann benannt ist, war es Leonhard Euler, der sich zuerst näher mit ihr beschäftigte.

†Riemann selbst benutze noch die durch Gauß definierte Notation $\Pi(s - 1) = \Gamma(s)$.

bleibt unverändert, wie Riemann schreibt, „wenn s in $s-1$ verwandelt wird."

Diese symmetrische Darstellung der Funktionalgleichung veranlasste Riemann dazu, in Gleichung (1) den Ausdruck $\Gamma(s/2)$ anstatt $\Gamma(s)$ für die Grundlage eines weiteren Beweises zu betrachten. Diesen möchten wir im folgenden etwas genauer besprechen, wobei wir uns Konvergenzgedanken ganz im Geiste Riemanns aufsparen.

Satz 1.1. *Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ kann zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, welche die Funktionalgleichung*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s)$$

erfüllt. Sie besitzt zwei einfache Pole bei $s=0$ und $s=1$.

Beweis der Funktionalgleichung. Durch den Variablenwechsel $y = n^2\pi t^2$ in Eulers Integraldarstellung der Gamma-Funktion erhalten wir für $\Re(s) > 1$

$$\frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\int_0^\infty e^{-n^2\pi t}n^s\pi^{s/2}t^{s/2}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi t}t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

Anschließendes aufsummieren und ausnutzen von Fubinis Integralgleichung ergibt die Formel

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \left(e^{-n^2\pi t}\right)t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

Die rechte Seite entspricht gerade der Ξ-Funktion. Wir führen nun die *Thetafunktion*

$$\Theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = 1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\pi t n^2}$$

ein. Damit können wir obige Gleichung etwas vereinfacht darstellen als

$$\Xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

Teilen wir nun das Integral auf in

$$\int_0^\infty (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t} = \int_0^1 (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t}. \tag{2}$$

Als nächstes benötigen wir die *Theta-Transformationsformel*

$$\Theta(t) = t^{-1/2}\Theta(1/t). \tag{3}$$

Um deren Gültigkeit einzusehen, benötigt man Zweierlei. Zuerst erinnern wir uns an die *klassische Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ einer L^1-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Mit dieser Abbildung können wir folgenden Satz formulieren.

Satz 1.2 (Klassische Poisson Summenformel)**.** *Für jede Schwartz Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und deren Fouriertransformation $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt:*

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} f(a) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} \hat{f}(a) \tag{4}$$

Beweis. Siehe zum Beispiel Deitmar [2] Proposition 5.4.10. □

Als Zweites halten wir fest, dass die *Fouriertransformierte* von $f_t(x) = e^{-\pi t x^2}$ gleich $\hat{f}_t(x) = t^{-1/2} f_{1/t}(x)$ ist. Einsetzen in die Poisson Summenformel (4) ergibt dann die Transformationsformel (3). Mit dieser kann man den ersten Summanden in Gleichung (2) umformen zu

$$\int_0^1 \left(t^{-1/2}\Theta(1/t) - 1\right) t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \Theta(1/t) t^{(s-1)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s}.$$

Anschließend nutzen wir die Substitution $t \mapsto t^{-1}$ und rechnen

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Theta(1/t) t^{(s-1)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s} &= \int_1^\infty \Theta(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s} \\ &= \int_1^\infty (\Theta(t) - 1) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s} - \frac{2}{1-s}.\end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung von $\Xi(s)$ ergibt dann

$$\Xi(s) = \frac{1}{2}\left(\int_1^\infty (\Theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty (\Theta(t) - 1) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t}\right) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

und wir sehen, dass dieser Ausdruck unverändert bleibt, wenn „s in $1-s$ verwandelt wird.“ □

1.2 Auf dem Weg zu Tate

Riemanns Beweise haben eine kleine Schwäche. Beide starten mit einem Ausdruck, in dem die Gamma-Funktion bereits vorkommt. Die Herkunft des Faktors und ein Grund, warum er zur Bildung der Funktionalgleichung so nahtlos an die Zeta-Funktion passt, wird nicht ersichtlich. Auftritt John Tate.

Tate kommt aus einer langen Linie von Mathematikern, deren Arbeit mehr oder weniger direkt durch Riemanns Ideen in *Ueber die Anzahl...* beeinflusst wurde. Unter der Aufsicht Emil Artins verfasste er 1950, fast 100 Jahre nach Riemann, seine Doktorarbeit* „Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions“ [9]. In ihr bewies er die analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung der Dedekind Zeta-Funktionen und Hecke L-Funktionen, eine Art Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Funktion. Dieses Ergebnis war keineswegs neu und wurde bereits 30 Jahre zuvor von Erich Hecke gezeigt. Was Tates Doktorarbeit so besonders macht – und einer der Gründe dafür, warum sie als „Tate's Thesis“ gewissen Kultstatus erreicht hat – ist die elegante Herangehensweise an Heckes Problemstellung in der globalen Sprache der *Adele und Idele*. Sogar noch verblüffender: Ist Tates theoretischer Rahmen etabliert, so stimmen die einzelnen Beweisschritte größtenteils mit Riemanns klassischen zweiten Beweis überein. Es ergibt sich allerdings ein viel klareres Bild über das Zustandekommen der einzelnen Bestandteile der Funktionalgleichung.

Ziel dieser Arbeit wird es nun sein, Tates Doktorarbeit in ihrer einfachsten Form, d.h. im Fall des algebraischen Körpers $\mathbb{Q}$, Revue passieren zu lassen, um die zentrale Frage

Woher kommt die Gamma-Funktion in der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion?

*Sie ist zum Beispiel in [1] zu finden.

zu beantworten.

Wir beginnen dazu in Kapitel 2 mit einer Einführung zu topologischen Gruppen, Lokalkompaktheit und Haar-Maßen. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht unnötigen zu zerren, werden wir allerdings Pontryagin Dualität und abstrakte Fourieranalyis – beides wichtige Grundlagen für Tates Beweis in höhrer Allgemeinheit – nur in einem kurzen Ausblick behandeln. In Kapitel 3 wiederholen wir kurz die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften zu Absolutbeträgen. Anschließend führen wir die p-adischen Zahlen ein und beschäftigen uns etwas mit deren Eigenheiten. Als Ersatz zur harmonischen Fourieranalysis definieren wir am Anfang von Kapitel 4 die Fouriertransformation auf den p-adischen Zahlen neu und zeigen, dass unser eigener Ansatz mit der abstrakten Theorie übereinstimmt. Damit werden wir genug Grundlagen gesammelt haben, um Tates erstes Ergebnis, die Funktionalgleichung lokaler Zeta-Funktion, zu beweisen. Wir schließen das Kapitel und die erste Hälfte der Arbeit mit der expliziten Berechnung für den Beweis wichtiger Integrale. In Kapitel 5 beginnen wir mit der Theorie des eingeschränkten direkten Produkts, um die Problemstellung in einen globalen Kontext zu übertragen. Wir stellen uns die Frage, wie man auf dieser abstrakten Gruppe integriert und welche Form die Quasi-Charaktere annehmen. Daraufhin lernen wir in Kapitel 6 mit den Gruppen der Adele $\mathbb{A}$ und Idele $\mathbb{I}$ zwei konkrete Beispiele für eingeschränkte dirkte Produkte kennen. Kapitel 7 behandelt die Fourieranalysis im globalen Kontext der Adele und Idele. Dort beweisen wir die zahlentheoretische Variante des Satzes von Riemann-Roch und geben Tates vollen Beweis der Funktionalgleichung globaler Zeta-Funktionen. Zum Schluss runden wir die Arbeit ab und besprechen wie aus diesem Ergebnis direkt die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion folgt.

2 Lokalkompakte Gruppen

Auch wenn es der Beweis Riemanns nicht direkt vermuten lässt, die Fouriertransformation von Funktionen wird eine entscheidende Rolle im Beweis der Funktionalgleichung spielen. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit den Grundlagen der (abstrakten) harmonischen Analysis, einer Verallgemeinerung der klassischen Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$. Im Mittelpunkt stehen hier die lokalkompakten Gruppen. Auf diesen lässt sich sehr natürlich ein zum klassischen Lebesgue-Maß analoges Maß definieren, wodurch wir Integral und auch Fouriertransformation definieren können. Wir werden in dieser Arbeit jedoch nicht den vollen Weg zu abstrakten Fourieranalysis gehen. Stattdessen definieren wir in Kapitel 4 eine eigene Fouriertransformation und geben im letzten Abschnitt dieses Kapitels nur einen kurzen Ausblick. Für die Behandlung des Stoffes halten wir uns dabei an Ramakrishnan und Valenza [7] Kapitel 1 und 3.

2.1 Lokalkompakte Gruppen

Am Anfang steht immer eine

Definition 2.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine (nicht unbedingt abelsche) Gruppe G zusammen mit einer Topologie, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

ist stetig auf der Produkttopologie von $G \times G$.

(ii) Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ist stetig auf G.

Ein *Homomorphismus topologischer Gruppen* von G_1 auf G_2 ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G_1 \to G_2$. Ist dieser bijektiv und die Umkehrabbildung wieder ein Homomorphismus topologischer Gruppen, so sprechen wir von einem *Isomorphismus topologischer Gruppen.*

Man sieht sofort, dass jede Translation um ein beliebiges Gruppenelement einen Homöomorphismus $G \to G$ bildet. Die Topologie ist also *translationsinvariant* in dem Sinne, dass für alle $g \in G$ und jede Mengen U die Äquivalenzen

$$U \text{ ist offen} \Leftrightarrow gU = \{gu \in G : u \in U\} \text{ ist offen} \Leftrightarrow Ug = \{ug \in G : u \in U\} \text{ ist offen}$$

gelten. Analog verhält es sich für die Umkehrabbildung. Sie ist ebenso ein Homöomorphismus und U ist genau dann offen, wenn $U^{-1} = \{u^{-1} \in G : u \in U\}$ offen ist.

Die Translationsinvarianz der Topologie hat einige Vorteile. Zum Beispiel wird die gesamte Topologie bereits durch eine Umgebungsbasis des neutralen Elements definiert. Durch Translation erhalten wir Umgebungsbasen beliebiger anderer Elemente und damit zwangsläufig die komplette Topologie. Für ein weiteres Beispiel erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit in topologischen Räumen. Eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt stetig, wenn für alle $g \in G_1$ und jede offene Umgebung U von $f(g)$ eine offene Umgebung V von g existiert, sodass $f(V) \subseteq U$. Sind G_1 und G_2 topologische Gruppen und ist f ein (nicht unbedingt topologischer) Gruppenhomomorphismus, so reicht es die Stetigkeit in dem neutralen Element e_1 der Gruppe G_1 nachzuweisen. Denn ist f stetig in e_1 und sei g ein beliebiges weiteres Element der Gruppe, so ist für jede offene Umgebung U von $f(g)$ die Menge $U' \coloneqq f(g)^{-1}U$ eine offene Umgebung des neutralen Elements e_2. Aufgrund der Stetigkeit in e_1 gibt es dann eine offene Umgebung V' mit $f(V') \subseteq U'$. Es ist aber $V \coloneqq gV'$ eine offene Umgebung von g und, da f ein Gruppenhomomorphismus ist, erhalten wir

$$f(V) = f(gV') = f(g)f(V') \subseteq f(g)U' = f(g)f(g)^{-1}U = U.$$

Folglich ist die Abbildung überall stetig.

Betrachten wir wieder zwei topologische Gruppen G_1 und G_2, so ist deren direktes Produkt $G_1 \times G_2$, wie man leicht feststellen kann, wieder eine topologische Gruppe. Dieses Ergebnis lässt sich auch auf endliche, abzählbare und sogar beliebige Mengen von Gruppen übertragen.

Lemma 2.2. *Sei I eine beliebige Indexmenge und G_ν eine topologische Gruppe für alle $\nu \in I$. Das direkte Produkt $G = \prod_{\nu \in I} G_\nu$, versehen mit der Produkttopologie und komponentenweiser Gruppenverknüpfung, ist wieder eine topologische Gruppe.*

Beweis. Wir erinnern uns daran, dass eine Basis der Produkttopologie durch Rechtecke der Form

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu$$

gegeben ist, wobei E eine endliche Teilmenge von I und jedes U_ν offen in G_ν ist. Ohne Einschränkung sei also

$$W = \prod_{\nu \in E} W_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu$$

eine offene Umgebung von $gh = (g_\nu h_\nu)$. Da alle G_ν topologische Gruppen sind, finden wir für jeden Index $\nu \in E$ eine offene Umgebungen U_ν und V_ν von g_ν bzw. h_ν, sodass $U_\nu V_\nu \subseteq W_\nu$. Wir behaupten , dass

$$(\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu) \times (\prod_{\nu \in E} V_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu) \subseteq G \times G$$

eine offene Umgebung von $(g, h) \in G \times G$ ist, deren Bild in W liegt. Der erste Aussage ist klar, beide Faktoren des Produkts sind offene Basiselemente der Topologie und enthalten g bzw. h. Weiter ist das Bild unter der Gruppenoperation durch

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu V_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu$$

gegeben, was wiederum nach den obigen Überlegungen in W liegt. Somit folgt die Stetigkeit der Gruppenverknüpfung. Der Beweis für die Stetigkeit der Umkehrabbildung funktioniert analog. □

Definition 2.3. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung hat. Eine *lokalkompakte Gruppe* ist eine topologische Gruppe, die sowohl lokalkompakt, als auch hausdorffsch ist.

Wir kennen bereits einige lokalkompakte Gruppen aus der.

Beispiele 2.4.

(a) Jede diskrete topologische Gruppe G, also eine Gruppe in der alle Teilmengen offen sind, ist lokalkompakt. Für jedes $x \in G$ ist $\{x\}$ eine kompakte offene Umgebung von x.

(b) Die additive Gruppe $\mathbb{R}^+$ mit der gewohnten Topologie ist lokalkompakt. Denn ist $x \in \mathbb{R}^+$, so ist $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ für $\varepsilon > 0$ eine kompakte Umgebung von x. Ähnlich verhält es sich für die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Analog kann man sich überlegen, dass die Gruppen $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{C}^\times$ lokalkompakt sind, wobei in diesem Fall die abgeschlossenen Bälle $\overline{B_\varepsilon(x)}$ die kompakten Umgebung von $x \in \mathbb{C}$ bilden.

Wieder können wir das direkte Produkt zweier lokalkompakter Gruppen betrachten.

Lemma 2.5. *Seien G_1 und G_2 zwei lokalkompakte Gruppen. Dann ist $G_1 \times G_2$ wieder lokalkompakt. Insbesondere ist also jedes endliche direkte Produkt lokalkompakter Gruppen lokalkompakt.*

Beweis. Sei $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Wegen der Lokalkompaktheit von G_1 und G_2 finden wir kompakte Umgebungen K_1 bzw. K_2 von g_1 bzw. g_2. Dann ist aber $K_1 \times K_2$ eine kompakte Umgebung von (g_1, g_2). Weiter ist das direkte Produkt zweier Hausdorff-Räume wieder hausdorffsch, wodurch $G_1 \times G_2$ zu einer lokalkompakten Gruppe wird. $\square$

Wie wir später in Lemma 5.1 sehen werden, kann diese Aussage nicht ohne Weiteres auf beliebig große direkte Produkte übertragen werden.

2.2 Das Haar-Maß

Weiter mit etwas Maßtheorie. Wir beginnen mit einer kleinen Auffrischung der wichtigsten Konzepte. Eine *σ-Algebra* auf einer Menge X ist eine Teilmenge Ω von $\mathcal{P}(X)$, so dass

(i) $X \in \Omega$

(ii) Wenn $A \in \Omega$, dann $X \setminus A \in \Omega$.

(iii) Ω ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, d.h. $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Omega$, falls $A_k \in \Omega$ für alle k.

Die Teilmengen in Ω werden *messbar* genannt. Aus den Axiomen lässt sich leicht folgern, dass die leere Menge und abzählbare Schnitte von messbaren Mengen wiederum messbar sind. Weiter ist der Schnitt $\bigcap_n \Omega_n$ beliebiger Familien $\{\Omega_n\}$ von σ-Algebren auf X selbst wieder eine σ-Algebra.

Zusammen bilden eine Menge X und eine σ-Algebra Ω den *messbaren Raum* (X, Ω). Ist X ein topologischer Raum, so können wir die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ betrachten, die alle offenen Mengen von X enthält. Die Elemente von $\mathcal{B}$ werden *Borelmengen* von X genannt.

Ein *Maß* auf einem beliebigen messbaren Raum (X, Ω) ist eine nicht-negative Abbildung $\mu : \Omega \to [0, \infty]$, die *$\sigma$-additiv* ist und $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt. Das bedeutet

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

für beliebige Familien $\{A_n\}_1^\infty$ von paarweise disjunkten Mengen in Ω. Zusammen definiert dies den *Maßraum* (X, Ω, μ). Ist dieses Maß auf der σ-Algebra der Borelmengen definiert, so nennen wir es ein *Borel-Maß*.

Ein wichtiges Ziel der Maßtheorie war es, den Begriff des Integrals zu verallgemeinern. Wir geben eine kurze, stark vereinfachte Variante der Grundkonzepte der Integrationstheorie und verweisen auf Folland [3] Kapitel 2 für eine vollständige Einführung.

Für einen beliebigen Maßraum (X, Ω, μ) geschieht dies über die so genannten *Treppenfunktionen* auf X

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und der *charakteristischen Funktion* der messbaren Menge A_k

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A_k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Integral dieser Funktionen wird definiert durch

$$\int_G f d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k),$$

mit der Konvention $0 \times \infty = 0$. Eine Möglichkeit, dies auf beliebige andere Funktionen f zu erweitern, ist es Folgen (f_n) von solchen Treppenfunktionen zu betrachten. Diese nennen wir *L^1-Cauchy-Folge*, wenn sie eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm $\|g\|_{L^1} \coloneqq \int_X |g| d\mu$ ist. Konvergiert die Folge zusätzlich fast überall punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, so definieren wir durch

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

das Integral von f über X. Komplexwertige Funktionen $h = f + ig$ können dann durch

$$\int h d\mu = \int f d\mu + i \int g d\mu$$

integriert werden.

Ist $Y \subseteq X$ messbar in X, so setzen wir $\int_Y f d\mu \coloneqq \int \mathbb{1}_Y f d\mu$ und definieren

$$\mathrm{Vol}(Y, d\mu) = \int_Y d\mu = \int \mathbb{1}_Y d\mu = \mu(Y).$$

Wir nennen eine Funktion f integrierbar auf Y, wenn das Integral $\int_Y |f| d\mu$ endlich ist. Allgemeiner heißt eine Funktion integrierbar, wenn sie auf X integrierbar ist und wir schreiben* dann $f \in L^1(X, \Omega, \mu)$. Wenn es klar ist, über welchen Maßraum wir reden, lassen wir häufig auch die σ-Algebra und das Maß weg und schreiben dx für das Maß, $\int_X f(x)dx = \int f d\mu$ für das Integral und $L^1(X)$ für die integrierbaren Funktionen auf X. Damit endet unsere kurze Wiederholung.

Sei μ ein Borel-Maß auf einem lokalkompakten, hausdorffschen Raum X und sei E ein eine beliebige Borelmenge von X. Wir nennen μ von *innen regulär* auf E, falls

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Umgekehrt heißt μ von *außen regulär* auf E, wenn

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U,\ U \text{ offen}\}.$$

Definition 2.6. Ein *Radon-Maß* auf X ist ein Borel-Maß, das endlich auf kompakten Mengen, von innen regulär auf allen offenen Mengen und von außen regulär auf allen Borelmengen ist.

Radon-Maße stehen in einem engen Zusammenhang mit positiven linearen Funktionalen auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger $C_c(X)$. Dies sind lineare Abbildungen I von $C_c(X)$ nach $\mathbb{R}$, so dass $I(f) \geq 0$, wenn $f \geq 0$.

Satz 2.7 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei I solch ein positives lineares Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger $C_c(X)$. Dann gibt es ein eindeutiges Radon-Maß μ auf X, so dass $I(f) = \int f d\mu$ für alle $C_c(X)$.*

Beweisskizze. Für die Konstruktion des Maßes definiert man die Abbildungen

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1 \text{ und } \mathrm{supp}(f) \subseteq U\}$$

für alle U offen und

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E \text{ und } U \text{ offen}\}$$

für beliebige Teilmengen $E \subseteq X$. Anschließend zeigt man

(i) μ^* ist ein äußeres Maß.

(ii) Jede offene Menge ist μ^*-messbar.

(iii) $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X), f \geq \mathbb{1}_K\}$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$.

(iv) $I(f) = \int f d\mu$ für alle $f \in C_c(X)$.

(i) und (ii) implizieren zusammen mit dem Satz von Caratheodory, dass μ ein von außen reguläres Borel-Maß ist. (iii) liefert uns die Endlichkeit auf kompakten Mengen und die Regularität von innen auf offenen Mengen und (iv) vollendet den Satz. Für den vollständigen Beweis verweisen wir auf Folland [3] Satz 7.2. □

*Hier missbrauchen wir etwas die Notation des L^1-Raumes. (vgl. Folland [3] Seite 53)

Dieser Satz ist ein wichtiger Grundstein für viele Aussagen über Radon-Maße. Sind zum Beispiel X und Y zwei lokalkompakte Gruppen mit dazugehörigen Radon-Maßen μ und ν, so ist im Allgemeinen das klassische Produktmaß $\mu \times \nu$ kein Borel- und daher kein Radon-Maß auf $X \times Y$. Wir definieren daher das Radonprodukt von μ und ν als das Radon-Maß, welches durch das positive Funktional $I(f) = \int f d(\mu \times \nu)$ nach dem Rieszschen Darstellungssatz gegeben wird. Dieses Produkt wird in Kapitel 5 eine Rolle spielen. Danach müssen wir es nicht weiter beachten, denn erfüllen X und Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom, entspricht das Radonprodukt genau dem Produktmaß. Für eine ausführliche Behandlung dieser Konzepte verweisen wir auf Folland [3] Kapitel 7.

Damit kommen wir zum großen Ziel dieses Abschnitts. Sei G eine lokalkompakte Gruppe und μ ein beliebiges Borel-Maß. Wir können uns dann fragen, wie sich das Maß einer beliebigen Borelmenge E bezüglich μ nach der Translation durch beliebige Gruppenelemente $g \in G$ verhält. Gilt $\mu(gE) = \mu(E)$ für jede Borelmenge, so nennen wir μ *linksinvariant*. Analog heißt μ *rechtsinvariant*, falls $\mu(Eg) = \mu(E)$. Ist G abelsch, fallen diese beiden Begriffe natürlich zusammen und wir sprechen nur von einem *translationsinvarianten* Maß μ.

Nun haben wir alle wichtigen Grundlagen zusammen für folgende wichtige

Definition 2.8. Ein *linkes* bzw. *rechtes Haar-Maß* auf G ist ein linksinvariantes bzw. rechtsinvariantes Radon-Maß, das auf nichtleeren offenen Mengen positiv ist.

Wir haben bereits einige solcher Haar-Maße kennengelernt:

Beispiele 2.9.

(a) Sei G wieder eine diskrete Gruppe, dann ist das Zählmaß ein Haar-Maß.

(b) Für $G = \mathbb{R}^+$ definiert das klassische Lebesgue-Maß dx ein Haar-Maß.

(c) Für $G = \mathbb{R}^\times$ wird durch $\mu(E) := \int_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{1}_E \frac{1}{|x|} dx$ ein Haar-Maß definiert, wie wir später in Satz 4.3 sehen werden.

Diese Beispiele sind keine Ausnahmen. Einer der Hauptgründe, warum wir uns mit lokalkompakten Gruppen beschäftigen, ist der folgende Satz.

Satz 2.10 (Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Maßes)**.** *Auf jeder lokalkompakten Gruppe G existiert ein linksinvariantes Haar-Maß. Dieses ist eindeutig bis auf skalares Vielfaches.*

Beweis. Der etwas längere Beweis befindet sich in Ramakrishnan und Valenza [7] Theorem 1-8 und benutzt den oben vorgestellten Rieszschen Darstellungssatz. □

Dieser Satz stellt gewissermaßen die bestmögliche Situation dar, die man sich erhoffen kann. Ist nämlich μ ein Haar-Maß und $c > 0$ eine Konstante, so erhalten wir durch $c \cdot \mu$ wieder ein Haar-Maß. Wir beenden diesen Abschnitt mit einem kleinen Lemma, welches uns einige bekannte Eigenschaften des Lebesgue-Maß auf Haar-Maße verallgemeinert.

Lemma 2.11. *Sei μ ein Haar-Maß auf einer lokalkompakten abelschen Gruppe. Für jede integrierbare Funktion $f \in L^1(G)$ gilt:*

(i) $\int_G f(yx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$. *(ii)* $\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$.

Beweis. (i) folgt leicht aus der Definition des Integrals und der Translationsinvarianz des Maßes, denn $\mathbb{1}_A(yx) = \mathbb{1}_{y^{-1}A}(x)$ und $\mu(y^{-1}A) = \mu(A)$.

Für (ii) überlegen wir uns zunächst, dass $\tilde{\mu}(E) := \mu(E^{-1})$ ein weiteres Haar-Maß auf G definiert. Nach der Eindeutigkeit unterscheiden sich beide Maße nur um eine Konstante $c > 0$. Wir wollen zeigen, dass $c = 1$ ist. Sei dazu K eine kompakte Umgebung der 1. Dann gibt es eine offene Umgebung U der 1 mit $U \subseteq K$. Definieren wir $S := KK^{-1}$, so ist S kompakt, $U \subseteq S$ und es gilt $0 < \mu(U) \leq \mu(S) < \infty$. Wir folgern

$$c \cdot \mu(S) = \tilde{\mu}(S) = \mu(S^{-1}) = \mu(S)$$

und damit $c = 1$. Das Haar-Maß ist also invariant unter der Umkehrabbildung. Der Rest folgt dann aus der Definition des Integrals. □

2.3 Charaktere und Quasi-Charaktere

Im Rest dieser Arbeit beschränken wir uns auf abelsche lokalkompakte Gruppen. Um die Fouriertransformation auf diesen Gruppen definieren zu können, müssen wir uns erst mit Charakteren beschäftigen. Auch wenn wir sie in diesem Kontext nicht (explizit) brauchen, werden sie eine wichtige Rolle im Beweis der Funktionalgleichung spielen.

Definition 2.12. Ein *Quasi-Charakter* einer topologischen abelschen Gruppe G ist ein Homomorphismus topologischer Gruppen von G in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ der komplexen Zahlen. Ein *Charakter* ist ein Quasi-Charakter, dessen Bild auf dem komplexen Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ liegt.

In der Literatur werden Quasi-Charaktere häufig auch einfach nur als Charaktere bezeichnet. Was wir in dieser Arbeit unter einem Charakter verstehen, wird dann unitärer Charakter genannt. Beginnen wir mit ein paar Beispielen.

Beispiele 2.13.

(a) Für jede topologische Gruppe G ist die Abbildung $g \mapsto 1$ ein Charakter, der sogenannte *triviale Charakter*. Er ist der einzige konstante Charakter, denn für jeden Gruppenhomomorphismus χ gilt bekanntlich $\chi(1) = 1$.

(b) Ein nicht-triviales Beispiel für einen Charakter ist die Abbildung $t \mapsto \exp(it)$ von der additiven Gruppe $\mathbb{R}^+$ in den Einheitskreis S^1.

(c) Die bekannte Abbildung $\exp : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^\times$ von der additiven Gruppe in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen ist ein Quasi-Charakter, jedoch kein Charakter.

Werfen wir einen Blick auf die Quasi-Charaktere kompakter Gruppen.

Lemma 2.14. *Sei K eine kompakte Gruppe mit Haar-Maß dx und $\chi : K \to \mathbb{C}^\times$ ein Quasi-Charakter. Dann gilt*

(i) χ ist bereits ein Charakter.

(ii) Für das Integral von χ über K gilt

$$\int_K \chi(x)dx = \begin{cases} \mathrm{Vol}(K, dx), & \text{falls } \chi \text{ trivial} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. (i) Sei x ein beliebiges Element von K. Sei H der Abschluss der von x erzeugten Untergruppe von K. Damit ist H selbst wieder eine Untergruppe von K und als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums kompakt. Da χ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, muss $\chi(H)$ eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ sein. Diese liegen aber gerade alle auf S^1 und die Behauptung folgt.

(ii) Der erste Fall ist klar. Im zweiten Fall gibt es ein $x_0 \in K$ mit $\chi(x_0) \neq 1$ und mit Translationsinvarianz daher

$$\int_K \chi(x)dx = \int_K \chi(x_0 x)dx = \chi(x_0) \int_K \chi(x)dx.$$

Umstellen und Division durch $\chi(x_0) - 1$ ergibt $\int_K \chi(x)dx = 0$. □

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir Quasi-Charaktere noch gründlicher untersuchen.

2.4 Ausblick: Pontryagin-Dualität

Zum Ende dieses Kapitels blicken wir etwas über den Tellerrand hinaus. Dieser Abschnitt ist für das Verständnis der kommenden Beweise der Arbeit absolut optional, bietet aber Einblick in die nötigen Abstraktionen, die in Tates eigener Argumentation zum tragen kamen. Wir werden daher die für Tates Doktorarbeit wichtigsten Grundlagen der abstrakten harmonischen Analysis nur anschneiden und versprechen in den späteren Kapiteln zu zeigen, dass unsere eigenen Definitionen mit denen in diesem Abschnitt verträglich sind.

Beginnen wir mit der Charaktergruppe auf einer beliebigen topologischen Gruppe G. Die Charaktere auf G werden mit punktweiser Multiplikation $(\chi\psi)(x) := \chi(x)\psi(x)$ selbst wieder eine Gruppe, welche als die *duale Gruppe* $\hat{G}$ bezeichnet wird. Wir statten $\hat{G}$ mit einer Topologie aus. Sei K eine kompakte Teilmenge von G und $V \subseteq S^1$ eine Umgebung der $1 \in S^1$. Dann wird durch die Mengen

$$W(K, V) = \{\chi \in \hat{G} : \chi(K) \subseteq V\}$$

eine Umgebungsbasis des trivialen Charakters definiert und induziert damit eine Topologie: die sogenannte *kompakt-offen Topologie*. Damit wird $\hat{G}$ zu einer topologischen Gruppe. Es ergibt sich folgender Satz.

Satz 2.15. *Sei G eine abelsche topologische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Ist G diskret, so ist $\hat{G}$ kompakt.

(ii) Ist G kompakt, so ist $\hat{G}$ diskret.

(iii) Ist G lokalkompakt, so ist auch $\hat{G}$ lokalkompakt.

Beweis. Siehe Ramakrishnan und Valenza [7] Proposition 3-2. □

Aussage (iii) sieht verdächtig aus. Eine erste Vermutung wäre, dass G isomorph zu $\hat{G}$ ist. Dieser Verdacht stimmt im Allgemeinen leider nicht. Dafür gilt aber das nächstbeste Ergebnis.

Satz 2.16 (Pontryagin Dualität)**.** *Jede lokalkompakte Gruppe G ist kanonisch isomorph zu ihrem Doppel-Dual $\hat{\hat{G}}$. Der Isomorphismus topologischer Gruppen α ist durch die Auswertungsabbildung $\alpha(y)(\chi) = \chi(y)$ gegeben.*

Beweis. Der etwas längere Beweis ist zum Beispiel zu finden in Ramakrishnan und Valenza [7] Theorem 3-20. □

Für diesen Beweis wird ein klassisches Konzept verallgemeinert. Wir wissen bereits, dass jede abelsche lokalkompakte Gruppe G ein eindeutiges Haar-Maß dx besitzt. Damit können wir auf G integrieren und eine abstrakte Variante der klassischen Fouriertransformation definieren.

Definition 2.17 (Abstrakte Fouriertransformation)**.** Sei $f \in L^1(G)$. Wir definieren die *Fouriertransformation* $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ von f durch die Formel

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx$$

für alle $\chi \in \hat{G}$.

Diese Formel ist wohldefiniert, denn für alle $x \in G$ hat $\chi(x)$ den Betrag 1. Ist also f integrierbar, so ist es auch das Produkt im Integranden. Da die Gruppe $\hat{G}$ selbst wieder lokalkompakt ist, besitzt sie ein Haar-Maß $d\chi$ und es macht Sinn, die Fouriertransformation auf $\hat{G}$ betrachten. Durch geeignete Normierung der verwendeten Maße gelangen wir zu folgendem Satz, der unter Anderem in Tates Beweis der verallgemeinerten Poisson Summenformel, eine wichtige Rolle spielt.

Satz 2.18 (Umkehrformel für lokalkompakte Gruppen)**.** *Es gibt ein Haar-Maß $d\chi$ auf $\hat{G}$, so dass alle $f \in L^1(G)$ stetig mit $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$, die Gleichung*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)d\chi$$

erfüllen. Insbesondere ist also $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.

Beweis. Siehe Ramakrishnan und Valenza [7] Theorem 3-9. □

3 Exkurs: p-adische Zahlen

Die Tatsache, dass die Gruppen $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^\times$ lokalkompakt sind, ist kein Zufall. Lokalkompakte Gruppen treten relativ natürlich im Zusammenhang mit algebraischen Zahlkörpern auf. Ganz Allgemein sind die additiven und multiplikativen Gruppen jeder Vervollständigung eines algebraischen Zahlenkörpers $\mathbb{K}$ bezüglich der Primideale $\mathfrak{p}$ seines Ganzheitsring $\mathcal{O}$ lokalkompakte Gruppen*. So weit gehen wir in dieser Arbeit jedoch nicht. Wir beschränken uns im folgenden Kapitel auf den Zahlkörper $\mathbb{Q}$ und lernen die p-adischen Zahlen kennen. Dabei orientieren wir uns an Gouveas exzellenten Einführungtext [4] und Deitmar [2] Kapitel 4.

3.1 Absolutbeträge und der Satz von Ostrowski

Beginnen wir mit einer Wiederholung. Sei $\mathbb{K}$ zunächst ein beliebiger Körper.

Definition 3.1. Ein *Absolutbetrag* auf $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung

$$|\cdot| : \mathbb{Q} \longrightarrow [0, \infty)$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(ii) $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (Multiplikativität)

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (Dreiecksungleichung)

Wir nennen einen Absolutbetrag $|\cdot|$ *nicht-archimedisch*, wenn er zusätzlich die stärkere Bedingung

(iii)′ $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (verschärfte Dreiecksungleichung)

erfüllt. Anderenfalls sagen wir der Absolutbetrag ist *archimedisch*.

Beispiele 3.2.

(a) Auf jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ist der *triviale Absolutbetrag*

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für x= 0} \end{cases}$$

ein nicht-archimedischer Absolutbetrag.

(b) Auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist der klassische *reelle Absolutbetrag* bzw. der *komplexe Absolutbetrag* ein archimedischer Absolutbetrag.

Lemma 3.3. *Sei $|\cdot|$ ein beliebiger Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ und $x \in \mathbb{K}$. Dann gilt:*

(i) $|1| = 1$

(ii) $|-1| = 1$

(iii) Falls $|x^n| = 1$, *dann* $|x| = 1$

(iv) $|-x| = |x|$

*Genauer induziert $\mathfrak{p}$ einen Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ und damit eine Topologie.

Beweis. (i) folgt direkt aus $|1| = |1 \cdot 1| = |1| \cdot |1|$ und $|1| \neq 0$. Ähnlich rechnen wir bei (ii): $1 = |-1 \cdot -1| = |-1| \cdot |-1|$ und mit $|-1| > 0$ folgt die Behauptung. (iii) folgt mit $|x| \geq 0$ aus $|x^n| = |x|^n$ und (iv) gilt wegen $|-x| = |-1||x| = |x|$. □

Wir wollen uns im Folgenden auf den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen beschränken. Dort kennen wir bereits den archimedischen reellen Absolutbetrag

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

welchen wir von hier an mit $|\cdot|_\infty$ bezeichnen wollen.

Wir können uns die Frage stellen, ob es neben dem trivialen Betrag noch weitere nicht-archimedische Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ gibt. Betrachten wir dazu eine beliebige rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}^\times$ ungleich 0. Dann existiert eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$x = \pm \prod_p p^{v_p},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ läuft und $v_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle* p gleich 0 ist. Legen wir uns auf ein p fest, so ermöglicht sich folgende Definition.

Definition 3.4. Der *p-adische Absolutbetrag* auf $\mathbb{Q}$ sein definiert durch

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p}, & \text{für } x \in \mathbb{Q}^\times \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit $v_p \in \mathbb{Z}$ aus der obigen Primfaktorzerlegung.

Der Name der Abbildung ist nicht willkürlich gewählt, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 3.5. *Für jede Primzahl p ist $|\cdot|_p$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Die Definitheit folgt sofort aus der Definition. Für die Multiplikativität schreiben wir $x = p^k \frac{m}{n}$ und $y = p^{k'} \frac{m'}{n'}$ mit m, m', n, n' teilerfremd zu p. Dann ist

$$|xy|_p = \left| p^{k+k'} \frac{mm'}{nn'} \right|_p = p^{-(k+k')} = p^{-k} p^{-k'} = |x|_p |y|_p.$$

Zuletzt zur verschärften Dreiecksungleichung. Mit $x = p^k \frac{m}{n}$ und $y = p^{k'} \frac{m'}{n'}$ wie eben können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $k \leq k'$. Es gilt

$$x + y = p^k \frac{mn' + p^{k'-k} nm'}{nn'}.$$

Für $k < k'$ ist $mn' + p^{k'-k} nm'$ teilerfremd zu p und es folgt $|x + y|_p = p^{-k} = \max(|x|_p, |y|_p)$. Ist dagegen $k = k'$, so hat der Zähler die Form $mn' + nm'$ und ist nicht unbedingt teilerfremd zu p. Wir erhalten dann $|x + y|_p \leq p^{-k} = \max(|x|_p, |y|_p)$. □

*Für diese Arbeit gebrauchen wir die Bedeutung: für alle bis auf endlich viele

Korollar 3.6. *Alle Dreiecke sind bezüglich des p-adischen Absolutbetrags gleichschenklig.*

Beweis. Im Beweis des Lemmas haben wir gezeigt, dass Gleichheit der verschärften Dreiecksungleichung eintrifft, wenn $|x|_p \neq |y|_p$. □

Somit haben wir neben dem trivialen Absolutbetrag und $|\cdot|_\infty$ auch unendlich viele nicht-archimedische Beträge $|\cdot|_p$ gefunden. Es stellt sich die Frage: Gibt es mehr? Jein!

Fixieren wir einen beliebigen Absolutbetrag $|\cdot|$, so ist auch $|\cdot|^\alpha$ für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ein weiterer Absolutbetrag. Wir nennen solche Beträge *äquivalent* und folgender Satz zeigt, dass wir auf $\mathbb{Q}$ bereits alle Äquivalenzklassen von Beträgen gefunden haben.

Satz 3.7 (Ostrowski)**.** *Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu einem der Absolutbeträge $|\cdot|_p$, wobei p entweder eine Primzahl ist oder $p = \infty$.*

Der Beweis ist etwas länger und trägt nicht unmittelbar zum Verständnis der Arbeit bei. Wir werden ihn daher im Anhang besprechen.

3.2 Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$

Eine Möglichkeit die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu konstruieren war durch die (metrische) *Vervollständigung* der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bezüglich des Absolutbetrags $|\cdot|_\infty$. Wir werden diese Konstruktion zusammen mit den p-adischen Beträgen $|\cdot|_p$ nutzen und geben daher im folgenden Abschnitt eine kurze Wiederholung der wichtigsten Ideen.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer nichtleeren Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)^*$, die

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

erfüllt. Eine Metrik induziert für jedes $x \in X$, durch die *offenen Bälle* $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon)\}$, eine Umgebungsbasis und damit eine Topologie auf ganz X. Eine Folge (x_n) in X heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn die reelle Folge $(d(x_n, x))$ eine Nullfolge ist. Wir nennen (x_n) eine *Cauchy-Folge* in X, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Man sieht leicht, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Die Umkehrung gilt allerdings im Allgemeinen nicht. Ist jede Cauchy-Folge konvergent, so nennen wir den metrischen Raum (X, d) *vollständig*.

Ist $X = \mathbb{K}$ sogar ein Körper, definiert jeder Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{K}$ durch $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik. Wir sprechen dann von der durch $|\cdot|$ induzierten Metrik auf $\mathbb{K}$. Im Fall, dass dieser Absolutbetrag sogar nicht-archimedisch ist, vereinfacht sich die Definition einer Cauchy-Folge.

---

*Bei der Konstruktion der reellen Zahlen spielen hier natürlich nur die rationalen Elemente des Intervalls eine Rolle.

Lemma 3.8. *Sei $|\cdot|$ ein nicht-archimedischen Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$. Eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ ist genau eine Cauchy-Folge, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

Beweis. Wenn $m > n$ gilt, so haben wir

$$|x_m - x_n| = \left|\sum_{k=n}^{m-1} x_{k+1} - x_k\right| \leq \max\{|x_m - x_{m-1}|, \ldots, |x_{n+1} - x_n|\}$$

und das Lemma folgt sofort aus den Definitionen. □

Gehen wir wieder auf $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ über und setzen $d_p(x, y) = |x - y|_p$. Es ist bereits bekannt, dass $\mathbb{Q}$ bezüglich d_∞ vollständig ist. Für $p < \infty$ haben wir folgendes

Lemma 3.9. *Der metrische Raum $(\mathbb{Q}, d_p)$ ist nicht vollständig.*

Beweis. Wir geben einen kurzen Beweis für $p > 3$ und verweisen auf Gouvea [4] Lemma 3.2.3 für die verbleibenden zwei Fälle.

Betrachten wir die Folge $(x_n) = (a^{p^n})$, wobei $1 < a < p - 1$ eine natürliche Zahl ist. Es gilt

$$\left|a^{p^{n+1}} - a^{p^n}\right|_p = \left|a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1)\right|_p.$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat wissen wir $a^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0 \bmod p^n$, also ist p^n ein Teiler von $a^{p^n(p-1)} - 1$ und es folgt

$$|x_{n+1} - x_n|_p = \left|a^{p^n}\right|_p \cdot \left|(a^{p^n(p-1)} - 1)\right|_p \leq p^{-n} \to 0.$$

Nach Lemma 3.8 ist (x_n) also eine Cauchy-Folge. Angenommen (x_n) konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Q}$. Dann haben wir

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n^p = x^p$$

und folglich $x = 1$ oder $x = -1$. Für n genügend groß gilt

$$\begin{aligned} |x - a|_p &= |x - x_n + x_n - a|_p \leq \max\{|x - x_n|_p, |x_n - a|_p\} \\ &= |x_n - a|_p = \underbrace{|a|_p}_{\leq 1} \cdot \left|a^{p^n - 1} - 1\right|_p \leq \left|a^{p^n-1} - 1\right|_p < 1, \end{aligned}$$

wieder nach dem kleinen Satz von Fermat. Also ist p ein Teiler von $x - a$. Wegen $x = \pm 1$ und der Wahl von a ist aber $0 < a - x < p$. Ein Widerspruch. □

Es macht also Sinn, ganz wie im Fall der reellen Zahlen, eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$ zu konstruieren.

Satz 3.10. *Für jede Primzahl p oder $p = \infty$ gibt es eine Vervollständigung $\mathbb{Q}_p$ von $\mathbb{Q}$ und einen Absolutbetrag $|\cdot|_p$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Es gibt eine Inklusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ und der durch $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}$ induzierte Betrag ist der p-adische bzw. reelle Absolutbetrag.

(ii) Das Bild von $\mathbb{Q}$ bezüglich dieser Inklusion ist dicht in $\mathbb{Q}_p$.

(iii) $\mathbb{Q}_p$ ist vollständig bezüglich des Absolutbetrags $|\cdot|_p$.

Der Körper $\mathbb{Q}_p$ mit diesen Eigenschaften ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphismen, die den Absolutbetrag erhalten.

Beweisidee. Die Grundidee der Konstruktion ist es, mit der Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ zu beginnen. Diese wird zu einem Ring wenn wir Addition und Multiplikation gliedweise definieren. Anschließend teilen wir alle Nullfolgen heraus, d.h. zwei Cauchy-Folgen sind genau dann äquivalent, wenn sie sich um eine Nullfolge unterscheiden. War haben eine Einbettug von $\mathbb{Q}$ als die Menge aller konstanten Folgen. Von diesem Raum kann gezeigt werden, dass jede Cauchy-Folge (also eine Cauchy-Folge von Cauchy-Folgen auf $\mathbb{Q}$) konvergiert.

Für die genaue Konstruktion und den Beweis der Eindeutigkeit, siehe zum Beispiel Gouvea [4] Theorem 3.2.13. □

Lemma 3.11. *Für jede Primzahl p ist das Bild von $\mathbb{Q}_p$ unter $|\cdot|_p$ gleich $p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$.*

Beweis. Auch hier verweisen wir auf Gouvea [4], genauer auf Lemma 3.3.1. Die Grundidee ist zu zeigen, dass für jede Cauchy-Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ die Folge der Beträge $(|x_n|_p)$ gegen 0 konvergiert oder irgendwann konstant wird. □

3.3 Topologische Eigenheiten

Wir haben zwei Gruppenstrukturen auf $\mathbb{Q}_p$: die additive Gruppe $\mathbb{Q}_p^+ = (\mathbb{Q}_p, +, 0)$ und die multiplikative Gruppe $\mathbb{Q}_p^\times = (\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Zudem induziert der p-adische Betrag eine Topologie auf $\mathbb{Q}_p^+$, welche, durch den Übergang zur Teilraumtopologie, zu einer auf $\mathbb{Q}_p^\times$ wird. Es macht daher Sinn $\mathbb{Q}_p$ im Kontext topologischer Gruppen zu betrachten.

Satz 3.12. *Für jede Primzahl p gilt:*

(i) $\mathbb{Q}_p^+$ ist eine topologische Gruppe.

(ii) $\mathbb{Q}_p^\times$ ist eine topologische Gruppe.

Beweis. Zu (i): Die Stetigkeit der Addition und der Negierung sind direkte Folgen der Konstruktion als Vervollständigung. Als kleine Auffrischung zeigen wir sie trotzdem im Kontext metrischer Räume. Seien $x_n \to x$ und $y_n \to y$ konvergente Folgen in $\mathbb{Q}_p^+$. Es ist zu zeigen, dass $x_n + y_n$ gegen $x + y$ konvergiert. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|(x_n + y_n) - (x + y)|_p = |(x_n - x) + (y_n - y)|_p \leq |x_n - x|_p + |y_n - y|_p.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0, also ist die linke eine Nullfolge und die Stetigkeit der Addition folgt. Ähnlich zeigen wir $-x_n \to -x$, denn $|(-x_n) - (-x)|_p = |x_n - x|_p$. Damit ist $\mathbb{Q}_p$ eine topologische Gruppe.

Zu (ii): Für die Stetigkeit seien $x_n \to x$ und $y_n \to y$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{Q}_p^\times$. Wir zeigen, dass $x_n y_n$ gegen xy konvergiert. Dies folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy|_p &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|_p \\ &\leq |x_n y_n - x_n y|_p + |x_n y - xy|_p \\ &= \underbrace{|x_n|_p}_{\to |x|_p} \underbrace{|y_n - y|_p}_{\to 0} + \underbrace{|x_n - x|_p}_{\to 0} |y|_p \to 0 \end{aligned}$$

Weiter zur Invertierung. Wegen

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right|_p = \frac{|x_n - x|_p}{|x_n x|_p} \to 0$$

folgt, dass x_n^{-1} gegen x^{-1} konvergiert und die Stetigkeit ist gezeigt. $\square$

Bisher haben wir uns noch keine nähren Gedanken über die offenen Mengen der Topologie gemacht. Da $\mathbb{Q}_p^\times$ nur die Teilraumtopologie erbt, reicht es sich zunächst auf $\mathbb{Q}_p^+$ zu konzentrieren. Wir wissen bereits, dass die offenen Mengen durch die offenen Bälle

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{Q}_p : |x - y|_p < \varepsilon\}$$

mit $x \in \mathbb{Q}_p$ und $\varepsilon > 0$ erzeugt werden. Da wir es aber mit einer topologische Gruppe zu tun haben, reicht es nur die offenen Bälle $B(\varepsilon) := B(0, \varepsilon)$ zu betrachten. Diese bilden dann eine Umgebungsbasis der 0. In Lemma 3.11 haben wir gesehen, dass $|\mathbb{Q}_p|_p = p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$. Folglich ist $B(\varepsilon) = B(\varepsilon')$ für $p^k < \varepsilon, \varepsilon' \leq p^{k+1}$. Es sind also nur solche ε interessant, die selber Potenzen von p sind. Dies hat aber noch weitere Auswirkungen. Es gilt

$$\overline{B(p^k)} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^k\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < p^{k+1}\} = B(p^{k+1}).$$

Alle *abgeschlossenen Bälle* sind offen. Umgekehrt sind alle offenen Bälle abgeschlossen, wir müssen nur die Gleichung von rechts nach links lesen. Im Englischen haben wir für diese Art von Mengen die schöne Wortschöpfung *clopen**, zusammengesetzt aus *closed* und *open*. Definieren wir nun die offene und abgeschlossene Menge der *p-adischen ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < p\}.$$

Diese bildet eine offene und abgeschlossene Umgebung der 0. Wir können jedes Element der Umgebungsbasis durch $\mathbb{Z}_p$ darstellen, denn es gilt

$$p^k \mathbb{Z}_p = \{p^k x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^{-k}\}.$$

Diese Mengen haben noch eine weitere Eigenschaft. Sie sind Untergruppen von $\mathbb{Q}_p^+$. Offensichtlich ist für jedes $x \in p^k \mathbb{Z}_p$, auch $-x \in p^k \mathbb{Z}_p$. Die verschärfte Dreiecksungleichung garantiert uns dann, dass für alle $x, y \in p^k \mathbb{Z}_p$, auch die Summe $x + y$ wieder in $p^k \mathbb{Z}_p$ liegt.

*Abgeschloffen?

Wir können für jede p-adische Zahl x eine Basis offener Umgebungen angeben. Diese besteht aus offenen Mengen der Form $x + p^k\mathbb{Z}_p$. Solche Mengen haben ungewohnte Eigenschaften. Wir haben uns überlegt, dass in den p-adischen Zahlen jedes Dreieck gleichschenklig ist. Das hat aber zur Folge, dass auch jeder Punkt innerhalb eines Kreises bereits der Mittelpunkt ist! Betrachten wir dazu die Kreisscheibe $x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$ und sei $x_2 \in x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$ beliebig. Offensichtlich ist $x_1 \in x_2 + p^k\mathbb{Z}_p$. Es reicht also zu zeigen, dass $x_2 + p^k\mathbb{Z}_p \subseteq x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$, die andere Richtung folgt dann analog. Für ein beliebiges $y \in x_2 + p^k\mathbb{Z}_p$ haben wir somit

$$|x_1 - y|_p = |x_1 - x_2 + x_2 - y|_p \leq \max\{|x_1 - x_2|_p, |x_2 - y|_p\} \leq p^{-k},$$

also $y \in x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$ und folglich $x_1 + p^k\mathbb{Z}_p = x_2 + p^k\mathbb{Z}_p$.

Korollar 3.13. *Jeder Punkt einer Kreisscheibe auf $\mathbb{Q}_p$ ist bereits deren Mittelpunkt.*

Wir können sogar noch mehr zeigen. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen dich in $\mathbb{Q}_p$, d.h. jede Umgebung $x + p^k\mathbb{Z}_p$ enthält eine rationale Zahl $a_k \in \mathbb{Q}$. Damit lässt sich jedes Element der Umgebungsbasis von x schreiben als $a_k + p^k\mathbb{Z}_p$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und ein $a_k \in Q$.

Bisher haben wir nur offene und abgeschlossene Mengen betrachtet. Wie sieht es mit kompakten Mengen aus?

Satz 3.14. *$\mathbb{Z}_p$ ist kompakt.*

Beweis. Da wir uns in einem metrischen Raum befinden nutzen wir die Charakterisierung kompakter Mengen als vollständige und totalbschränkte Mengen. Ersteres folgt daraus, dass $\mathbb{Z}_p$ als abgeschlossene Menge des vollständigen Raumes $\mathbb{Q}_p$ selbst vollständig ist. Eine Menge heißt totalbeschränkt, wenn wir sie für jedes $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen ε-Bällen überdecken können. Für uns bedeutet das also $\mathbb{Z}_p$ mit endlich vielen Mengen der Form $x + p^k\mathbb{Z}_p$ zu überdecken. Der Fall $k \leq 0$ ist klar, da dann $\mathbb{Z}_p \subseteq p^k\mathbb{Z}_p$.

Sei also $k > 0$. Wir haben eine (nicht unbedingt endliche) Überdeckung von $\mathbb{Z}_p$ durch alle $x + p^k\mathbb{Z}_p$ mit $x \in \mathbb{Z}_p$. Aus vorherigen Überlegungen wissen wir, dass wir diese Mengen auch durch $a + p^k\mathbb{Z}_p$ mit $a \in \mathbb{Q}$ darstellen können. Genauer liegt a auch in $\mathbb{Z}_p$, wodurch wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $a \in \mathbb{Z}$. Wir stellen jetzt einen Bezug zwischen p-adischen Absolutbetrag und modularer Arithmetik her. Es gilt $a_1 + p^k\mathbb{Z}_p = a_2 + p^k\mathbb{Z}_p$ genau dann, wenn $a_1 \in a_2 + p^k\mathbb{Z}_p$, also $|a_1 - a_2|_p \leq p^{-k}$. Dies bedeutet gerade, dass p^k ein Teiler von $a_1 - a_2$ ist, oder anders ausgedrückt $a_1 \equiv a_2 \bmod p^k$. Folglich kann es nur p^k verschiedene Mengen der Form $a + p^k\mathbb{Z}_p$ geben, welche dann durch $a = 0 \ldots p^{-k+1} - 1$ repräsentiert werden. Die Überdeckung ist also schon endlich. Als vollständige und totalbeschränkte Menge ist $\mathbb{Z}_p$ somit kompakt. $\square$

Mit diesem Satz sieht man schnell ein, dass alle Mengen der Form $x + p^k\mathbb{Z}_p$ als stetiges Bild einer kompakter Menge wieder kompakt sind. Hier muss man sich nur kurz bewusst machen, dass die Abbildung $x \mapsto p^k x$ in $\mathbb{Q}_p^+$ auch tatsächlich stetig ist.

Zum Ende dieses Abschnitts wenden wir uns noch einer wichtigen multiplikativen Untergruppe zu: die Gruppe der ganzzahligen Einheiten

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}.$$

Sie entspricht dem Einheitskreis S^1 der komplexen Zahlen und wird bei der Berechnung von Integralen eine wichtige Rolle spielen. Zuerst bemerken wir, dass $\mathbb{Z}_p^\times$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\} \subset \mathbb{R}_0^+$ unter der stetigen Betragsabbildung selbst wieder abgeschlossen ist. Damit ist $\mathbb{Z}_p^\times$ als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{Z}_p$ kompakt. Ähnlich zu $\mathbb{C}^\times = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+^\times} rS^1$ haben wir im p-adischen Fall eine disjunkte Zerlegung der Einheiten $\mathbb{Q}_p^\times$ in Translationen von $\mathbb{Z}_p^\times$. Diese hat aber eine wichtige Besonderheit. Da unser Betrag nur diskrete Werte annimmt, ist diese Zerlegung $\mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^k \mathbb{Z}_p^\times$ sogar abzählbar.

3.4 Die Potenzreihendarstellung

Nachdem wir die Struktur und Topologie auf $\mathbb{Q}_p$ besser verstanden haben, sollten wir uns etwas mit den eigentlichen Objekten, den p-adischen Zahlen, beschäftigen. Wie auch schon im Fall der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_\infty$, sind die Objekte dieser Konstruktion etwas unhandlich. In $\mathbb{R}$ hatten wir die Dezimalbruchentwicklung $x = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} x_k 10^k$, $x_k \in \{0, \ldots, 9\}$ oder etwas allgemeiner die b-adische Darstellung $x = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} x_k b^k$, $x_k \in \{0, \ldots, b-1\}$ für eine natürliche Zahl $b > 1$, die zwar nicht unbedingt eindeutig ist $(0,999\cdots = 1,000\ldots)$, aber wesentlich anschaulicher als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zu unserer Freude werden wir feststellen, dass es auch in $\mathbb{Q}_p$ eine ähnliche Darstellung gibt. Diese ist im Gegensatz zu der Darstellung in $\mathbb{R}$ sogar eindeutig und kann, wieder etwas ungewohnt, unendliche viele Stellen vor dem Komma, aber nur endlich viele Nachkommastellen haben

Satz 3.15. *Jede p-adische Zahl $x \in \mathbb{Q}_p \backslash \{0\}$ lässt sich eindeutig als eine Potenzreihe*

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$$

mit $x_k \in \{0, \ldots, p-1\}$, $x_N \neq 0$ und $N \in \mathbb{Z}$ darstellen. Insbesondere gilt $|x|_p = p^{-N}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=N}^{n} x_k p^k$ in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert.

$$|S_n - S_{n-1}|_p = |x_n p^n|_p = p^{-n} \to 0$$

und damit haben wir schon gezeigt, dass die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Da $\mathbb{Q}_p$ vollständig ist, konvergiert diese gegen einen Wert für den wir $\sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$ schreiben.

Als nächstes sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Wir konstruieren nun eine Folge (x_k) mit $x_k \in \{0, \ldots, p-1\}$, so dass die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k p^k$ gegen x konvergieren. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ liegt finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit

$$\left| x - \frac{a}{b} \right|_p \leq p^{-n} \leq 1.$$

In der Tat finden wir sogar eine ganze Zahl: Für $\frac{a}{b}$ wie eben haben wir

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p \leq \max \left\{ |x|_p, \left| x - \frac{a}{b} \right|_p \right\} \leq 1.$$

Dies zeigt, dass p kein Teiler von b ist und folglich eine Bezout-Darstellung $1 = b'b + p'p^n$ (also $b'b \equiv 1 \bmod p^n$) für $b', p' \in \mathbb{Z}$ existiert. Weiter ist

$$\left|\frac{a}{b} - ab'\right|_p = \left|\frac{a(1-bb')}{b}\right|_p = \left|\frac{a(p'p^n)}{b}\right|_p \leq p^{-n}$$

und natürlich $ab' \in \mathbb{Z}$. Wir definieren $y_n \in \mathbb{Z}$ als die eindeutig bestimmte Zahl, welche

$$0 \leq y_n \leq p^n - 1 \quad \text{und} \quad y_n \equiv ab' \bmod p^n$$

erfüllt. Dann gilt

$$|x - y_n|_p = \left|x - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - y_n\right|_p \leq \max\left\{\left|x - \frac{a}{b}\right|_p, \left|\frac{a}{b} - ab'\right|_p\right\} \leq p^{-n}$$

und daher konvergiert die Folge (y_n) gegen x. Wir zeigen, dass diese Folge eindeutig ist. Sei dazu y'_n eine weitere Zahl mit $0 \leq y'_n \leq p^n - 1$ und $|x - y'_n|_p \leq p^{-n}$. Dann gilt aber wie eben

$$|y_n - y'_n|_p = |y_n - x + x - y'_n|_p \leq p^{-n},$$

also ist p^n ein Teiler von $y_n - y'_n$ und folglich $y_n - y'_n = 0$. Aus dieser Eindeutigkeit folgt unter anderem auch, dass $y_n \equiv y_{n-1} \bmod p^{n-1}$, denn

$$|y_n - y_{n-1}|_p = |y_n - x + x - y_{n-1}|_p \leq \max\left\{|y_n - x|_p, |x - y_{n-1}|_p\right\} \leq p^{-n+1},$$

und folglich ist p^{n-1} ein Teiler von $y_n - y_{n-1}$. Die eindeutigen p-adischen Entwicklungen dieser y_n sind genau die gesuchten Partialsummen S_n und definieren induktiv die x_k. Damit haben wir die Aussage für $\mathbb{Z}_p$ gezeigt.

Für beliebige $x \in \mathbb{Q}_p$ existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $p^N x \in \mathbb{Z}_p$. Dadurch erhalten wir eine eindeutige Entwicklung $p^N x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$ und folglich mit

$$x = \sum_{k=-N}^{\infty} x_{(k+N)} p^k$$

die geforderte Entwicklung für x. □

Die Potenzreihendarstellung verschafft uns einen alternativen Blick auf die im letzten Abschnitt behandelten Mengen. Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der verschärften Dreiecksungleichung jedes $x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$ mit $x_N \neq 0$ den p-adischen Betrag $|x|_p = p^{-N}$ hat. Folglich ist dann

$$p^n \mathbb{Z}_p = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} x_k p^k \in \mathbb{Q}_p\right\}.$$

Fassen wir diese Potenzreihenentwicklung als Analogie zur Entwicklung meromorpher Funktion als Laurent-Reihen auf, so entspricht $\mathbb{Z}_p$ den holomorphen Funktionen und $p^n\mathbb{Z}_p$ den meromorphen Funktionen mit Pol- bzw. Nullstelle vom Grad n. Weiter ist

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k \in \mathbb{Q}_p : x_0 \neq 0\right\}$$

und entspricht den holomorphen Funktionen, die am Entwicklungspunkt nicht verschwinden.

4 Die lokale Theorie

Nach diesem kurzen Ausflug in die Welt der p-adischen Zahlen machen wir uns wieder auf den Weg zu Tates Beweis. Einigen wir uns zunächst auf etwas Notation. Eine *Stelle* von $\mathbb{Q}$ ist entweder eine Primzahl oder ∞. Erstere werden auch *endliche Stellen* oder, in Anlehnung an ihre Absolutbeträge, *nicht-archimedische Stellen* genannt. Analog bezeichnen wir ∞ als die *unendliche* oder auch *archimedische Stelle*. Im Folgenden werden wir immer p für eine Stelle verwenden. Es wird also keine Verwirrung stiften, wenn wir $p < \infty$ schreiben und damit meinen, dass p eine Primzahl ist. Umgekehrt schreiben wir $p \leq \infty$ wenn eine beliebige Stelle gemeint ist. Setzt man zudem noch $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$, so haben wir für jede Stelle einen Körper $\mathbb{Q}_p$, der aus der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$ hervorgeht. Wenn wir nur $|\cdot|$ ohne Index schreiben, so meinen wir damit den klassischen komplexen Betrag.

Zum Schluss des letzten Kapitels haben wir gesehen, dass die endliche Stellen gewisse Ähnlichkeiten mit der lokalen Darstellung meromorpher Funktionen als Laurent-Reihe haben. Wir werden also im folgenden Abschnitt den Körper $\mathbb{Q}$ „lokal" an den Stellen $p \leq \infty$ genauer untersuchen. Dabei orientieren wir uns an einer Mischung aus Tates Doktorarbeit [9], deren Behandlung in Ramakrishnan und Valenza [7] und Deitmar [2].

4.1 Lokale Körper

Halten wir zunächst ein wichtiges Resultat des letzten Kapitels fest.

Satz 4.1. *Für alle Stellen $p \leq \infty$ haben wir:*

(i) $\mathbb{Q}_p^+$ ist eine lokalkompakte Gruppe.

(ii) $\mathbb{Q}_p^\times$ ist eine lokalkompakte Gruppe.

Ein Körper, dessen additive und multiplikativen Gruppen lokalkompakt sind, heißt auch *lokaler Körper*.

Beweis. Für $p = \infty$ sind diese Aussagen bereits bekannt und für $p < \infty$ müssen wir nur kurz argumentieren, dass $\mathbb{Q}_p^+$ und $\mathbb{Q}_p^\times$ hausdorffsch sind. Dies ist aber klar, da $\mathbb{Q}_p^+$ ein metrischer Raum und $\mathbb{Q}_p^\times$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{Q}_p^+$ ist. Die restlichen Eigenschaften haben wir in Kapitel 3 gezeigt. □

Als lokalkompakte Gruppe existiert nach Satz 2.10 ein Haar-Maß auf $\mathbb{Q}_p^+$, welches wir mit dx_p bezeichnen. Einigen wir uns auf eine Normierung. Im Fall $p = \infty$ können wir für dx_∞ einfach das Lebesgue-Maß nehmen und ersparen uns bei jeder Integration eine Konstante mitschleppen zu müssen. Die Stellen $p < \infty$ sind dagegen Neuland für uns und daher nicht von alten Gewohnheiten beeinflusst. Der folgende Satz wird allerdings zeigen, dass es sinnvoll ist die Normierung mit $\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) = 1$ zu wählen.

Satz 4.2. *Schreibe μ für das Maß dx_p. Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{Q}_p$ und jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ gilt*

$$\mu(xA) = |x|_p \cdot \mu(A).$$

Insbesondere folgt für jedes $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ und $x \in \mathbb{Q}_p^\times$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(\xi) d\mu(\xi) = |x|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x\xi) d\mu(\xi).$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Die Funktion

$$\mu_x(A) \coloneqq \mu(xA)$$

definiert wieder ein Haar-Maß auf $\mathbb{Q}_p$ und unterscheidet sich daher nur durch Skalierung mit einer positiven Konstante $c > 0$ von μ. Ziel wird es sein $c = |x|_p$ zu zeigen. Dies ist klar im Fall $p = \infty$.

Für $p < \infty$ müssen wir, mit unserer Normierung, also $\mu(x\mathbb{Z}_p) = |x|_p$ zeigen. Sei dazu $|x|_p = p^{-k}$. Dann ist $x = p^k y$ mit $y \in \mathbb{Z}_p$ und folglich $x\mathbb{Z}_p = p^k\mathbb{Z}_p$. Daher reicht es bereits $\mu(p^k\mathbb{Z}_p) = p^{-k}$ zu zeigen. Beginnen wir mit dem Fall $k \geq 0$. In diesem ist $p^k\mathbb{Z}_p$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_p$ und für den Index gilt $[\mathbb{Z}_p : p^k\mathbb{Z}_p] = p^k$, wie man leicht aus der Potenzreihenentwicklung der p-adischen Zahlen folgert. Wir haben also eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{Z}_p = \bigcup_{a=0}^{p^k-1} a + p^k\mathbb{Z}_p$. Aus der Translationsinvarianz erhalten wir

$$1 = \mu(\mathbb{Z}_p) = \sum_{a=0}^{p^k-1} \mu(a + p^k\mathbb{Z}_p) = \sum_{a=0}^{p^k-1} \mu(p^k\mathbb{Z}_p) = p^k\mu(p^k\mathbb{Z}_p).$$

Die Behauptung folgt dann durch einfaches Umformen. Im zweiten Fall $k < 0$ ist umgekehrt $\mathbb{Z}_p$ eine Untergruppe von $p^k\mathbb{Z}_p$ mit Index $[p^k\mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}_p] = p^{-k}$ und die Behauptung folgt analog. □

Damit haben wir ein sinnvolle Normierung des additiven Maßes dx_p gefunden. Analog existiert auch auf der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Q}_p^\times$ ein Haar-Maß $d^\times x_p$, doch in diesem Fall ist die Normierung weit weniger offensichtlich. Können wir sie sinnvoll wählen? Dazu stellen wir zunächst einen Bezug zwischen additiven und multiplikativen Maß her.

Satz 4.3. *Ist dx_p ein additives Haar-Maß auf $\mathbb{Q}_p$, so definiert $\frac{dx_p}{|x|_p}$ ein multiplikatives Haar-Maß $d^\times x_p$ auf $\mathbb{Q}_p^\times$. Insbesondere gilt dann*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} g(x) d^\times x_p = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} g(x) \frac{dx_p}{|x|_p}$$

für alle $g \in L^1(\mathbb{Q}_p^\times)$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ eine lokalkompakte Gruppe ist und folglich ein Haar-Maß besitzt. Wenn wir ein positives lineares Funktional auf $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$ angeben, erhalten wir nach Rieszschen Darstellungssatz ein Radon-Maß, welches diesem Funktional entspricht. Ist $g \in C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$, so ist $g|\cdot|_p^{-1} \in C_c(\mathbb{Q}_p^+ \setminus \{0\})$. Dies ist in der Tat eine eins-zu-eins Zuweisung. Wir definieren daher das nicht-triviale, positive lineare Funktional

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} g(x) \frac{dx_p}{|x|_p}.$$

auf $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$. Es ist translationsinvariant, denn

$$\int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(y^{-1}x)\frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(x)\frac{|y|_p dx_p}{|yx|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(x)\frac{dx_p}{|x|_p}$$

und folglich kommt es von einem Haar-Maß $d^\times x_p$.

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Funktionen in $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$ dicht in $L^1(\mathbb{Q}_p^\times)$ liegen. Beim Übergang zum Grenzwert erhalten wir die Gleichung auf den integrierbaren Funktionen. □

Wir können also die Normierung von $d^\times x_p$ von dx_p abhängig machen. Für $p = \infty$ spricht nichts dagegen, einfach $d^\times x_\infty = \frac{dx_\infty}{|x|_\infty}$ beizubehalten. Im endlichen Fall machen wir uns wieder etwas mehr Gedanken. Wir haben die multiplikative Untergruppe $\mathbb{Z}_p^\times$ kennengelernt und gesehen, dass $\mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} p^k\mathbb{Z}_p^\times$ gilt. Aufgrund der (multiplikativen) Translationsinvarianz ist $\mathrm{Vol}(p^k\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p}) = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p})$. Es ist daher interessant zu wissen, welchen Wert $\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p})$ annimmt. Da $\mathbb{Z}_p^\times$ kompakt ist, muss das Volumen endlich sein. Wir rechnen

$$\mathrm{Vol}\left(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p}\right) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} dx_p = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx_p).$$

Nun können wir $\mathbb{Z}_p^\times$ durch

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigcup_{k=1}^{p-1} (k + p\mathbb{Z}_p)$$

disjunkt zerlegen und erhalten

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx_p) = \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{Vol}(k + p\mathbb{Z}_p, dx_p) = (p-1)\,\mathrm{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p) = \frac{p-1}{p},$$

wobei wir im letzten Schritt $\mathrm{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p) = |p|_p \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)$ ausgenutzt haben. Wir normieren $d^\times x_p$ im Fall $p < \infty$ durch $d^\times x_p = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{dx_p}{|x|_p}$. Damit hat $\mathbb{Z}_p^\times$ gerade das Maß 1.

4.2 Lokale Fourieranalysis

Fassen wir zunächst die Normierungen des letzten Abschnitts in einer Definition zusammen.

Definition 4.4. Das *normalisierte additive Haar-Maß* dx_p auf $\mathbb{Q}_p^+$ ist definiert durch:

- dx_∞ entspricht dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.
- dx_p ist so normiert, dass $\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) = 1$ für $p < \infty$.

Das *normalisierte multiplikative Haar-Maß* $d^\times x_p$ auf $\mathbb{Q}_p^\times$ ist definiert durch:

- $d^\times x_\infty = \frac{dx_\infty}{|x|_\infty}$.

- $d^\times x_p = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{dx_p}{|x|_p}$ für $p < \infty$.

Im Kapitel über topologische Gruppen haben wir bereits einen Ausblick auf die abstrakte Fourieranalysis gegeben. Wir werden im Folgenden unseren eigenen, naiveren Ansatz auf den lokalen Körpern $\mathbb{Q}_p$ verfolgen, wobei wir im unendlichen Fall die klassischen Theorie fast direkt übernehmen. Wie versprochen bauen wir eine Brücke zur abstrakten harmonischen Analysis und betrachten, im Sinne der harmonischen Analysis, die Charaktere auf $\mathbb{Q}_p^+$ an. Dazu beginnen wir mit der Definition eines nicht-trivialen Charakters e_p und zeigen anschließend, dass jeder beliebige Charakter $\psi \in \widehat{\mathbb{Q}}_p^+$ durch e_p darstellen werden kann.

Definition 4.5. Wir definieren den *Standardcharakter* $e_p : \mathbb{Q}_p^+ \to S^1$ wie folgt:

- Für die unendliche Stelle setzten wir $e_\infty(x) = \exp(2\pi i x)$.
- Im endlichen Fall wird die Definition etwas aufwendiger. Zunächst haben wir eine natürliche Projektion $\mathbb{Q}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Die Äquivalenzklassen von $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ werden, nach unseren Überlegungen zur Potenzreihendarstellung, eindeutig repräsentiert durch die p-adischen Zahlen der Form $\sum_{k=-n}^{-1} a_k p^k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq a_k \leq p-1$. Wir definieren einen stetigen Homomorphismus $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ indem wir die Repräsentanten als Summen in $\mathbb{Q}$ interpretieren. Zu guter Letzt schicken wir diese Summe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ durch $x \mapsto \exp(-2\pi i x)$ in den Einheitskreis S^1. Alle diese Abbildungen sind stetige Gruppenhomomorphismen, bilden also zusammen selbst wieder einen stetigen Gruppenhomomorphismus, den wir mit e_p bezeichnen. Interpretieren wir die Potenzreihenentwicklung der p-adischen Zahlen als nicht unbedingt konvergente Summe in $\mathbb{Q}$, so können wir (etwas unschön) schreiben
$$e_p\left(\sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k\right) = \exp\left(-2\pi i \sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k\right) = \exp\left(-2\pi i \sum_{k=-n}^{-1} a_k p^k\right).$$

Der Charakter e_∞ ist offensichtlich trivial auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Ähnlich ist im Endlichen e_p konstant auf den p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$. Das hat aber zur Folge, dass der Standardcharakter für $p < \infty$ mitunter lokal konstant ist, denn für jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ ist $x + \mathbb{Z}_p$ eine offene Umgebung von x, auf der e_p nur den Wert $e_p(x)$ annimmt.

Mit Hilfe des Standardcharakters lässt sich die duale Gruppe $\widehat{\mathbb{Q}_p^+}$ genauer charakterisieren.

Lemma 4.6. *Jeder Charakter $\psi : \mathbb{Q}_p^+ \to S^1$ ist von der Form $x \mapsto e_p(ax)$ für ein $a \in \mathbb{Q}_p$.*

Bevor wir allerdings zum Beweis des Lemmas kommen, müssen wir im Fall $p < \infty$ noch einen wichtigen Begriff einführen. Sei U eine offene Umgebung der $1 \in S^1$, welche nur die triviale Untergruppe 1 enthält. Aufgrund der Stetigkeit von ψ gibt es dann eine offene Umgebung V der $0 \in \mathbb{Q}_p^+$ mit $\psi(V) \subseteq U$. Ohne Einschränkung ist V eine offene Untergruppe der Form $p^k\mathbb{Z}_p$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber $\psi(V)$ eine Untergruppe von S^1 und somit gleich 1. Die kleinste solche Untergruppe $p^k\mathbb{Z}_p$ nennen wir den *Führer des additiven Charakters ψ*.

Beweis. Fangen wir mit $p = \infty$ an. Sei $\psi : \mathbb{Q}_\infty \to S^1$ ein beliebiger Charakter. Aufgrund der Stetigkeit von ψ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass Bild $\psi((-\varepsilon, \varepsilon))$ eine Teilmenge von $\{z \in S^1 : \Re(z) > 0\}$ ist. Wenn wir ε noch ein Stück kleiner machen, können wir sogar

$$\psi([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \{z \in S^1 : \Re(z) > 0\} \tag{5}$$

garantieren. Definiere a als das eindeutig bestimmte Element aus $[-\frac{1}{4\varepsilon}, \frac{1}{4\varepsilon}]$, so dass $\psi(\varepsilon) = \exp(2\pi i a \varepsilon)$. Als nächstes behaupten wir, dass auch

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \exp\left(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

gilt. Wegen $\psi(\varepsilon/2)^2 = \psi(\varepsilon) = \exp(2\pi i a \varepsilon)$, ist $\psi(\varepsilon/2) = \pm\exp(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2})$. Da aber $\psi(\varepsilon/2)$ wegen (5) positiven Realteil haben muss, kommt nur $\exp(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2})$ in Frage. Durch Iteration des Arguments erhalten wir $\psi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \exp(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2^n})$, für $n \in \mathbb{N}_0$.

Setzen wir jetzt $\varepsilon = 2^{-n_0}$ für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist ε^{-1} eine natürliche Zahl und, für beliebige $k \in \mathbb{Z}$, haben wir

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{k}{2^n}\right) &= \psi\left(\frac{k\varepsilon}{2^n\varepsilon}\right) = \psi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^{k/\varepsilon} \\ &= \exp\left(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2^n}\right)^{k/\varepsilon} = \exp\left(2\pi i a \frac{k}{2^n}\right)\end{aligned}$$

Die Menge aller $\frac{k}{2^n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ liegt dicht in $\mathbb{R}$ und wir können aus der Stetigkeit $\psi(x) = \exp(2\pi i a x)$ schließen. Um die Eindeutigkeit von a zu sehen, reicht es die Ableitung von $x \mapsto \exp(2\pi i a x)$ zu berechnen und an der Stelle $x = 0$ auszuwerten. Der Wert beträgt gerade $2\pi i a$.

Kommen wir zum Fall $p < \infty$. Sei ψ ein Charakter auf $\mathbb{Q}_p^+$ und sei $p^k\mathbb{Z}_p$ dessen Führer. Für $k \geq 0$ gilt offensichtlich $\psi(\mathbb{Z}_p) = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur solche Charaktere, denn im Fall $k < 0$ können wir auch den Charakter $x \mapsto \psi(p^k x)$ nehmen und die Aussage folgt aus $\psi(x) = \psi(p^k x)^{(p^{-k})}$.

Suchen wir nun ein geeignetes $a \in \mathbb{Q}_p$. Uns fällt zunächst auf, dass der Charakter bereits eindeutig durch seine Werte an p^{-k}, mit $k \in \mathbb{N}$, bestimmt wird. Da ψ trivial auf $\mathbb{Z}_p$ wirkt, gilt nämlich

$$\psi\left(\sum_{k=-n}^{\infty} x_k p^k\right) = \sum_{k=-n}^{\infty} \psi\left(p^k\right)^{x_k} = \sum_{k=-n}^{-1} \psi\left(p^k\right)^{x_k}.$$

Es reicht also ein geeignetes a für diese Potenzen zu finden. Betrachten wir $\psi(p^{-1})$ genauer, so erkennen wir, dass dies wegen $\psi(p^{-1})^p = \psi(1) = 1$ eine p-te Einheitswurzel sein muss. Damit gilt $\psi(p^{-1}) = \exp(-2\pi i \frac{a_1}{p})$ für ein eindeutig bestimmtes ganzzahliges $0 \leq a_1 \leq p - 1$. Analog argumentieren wir auch $\psi(p^{-k}) = \exp(-2\pi i \frac{a_k}{p^k})$ mit $0 \leq a_k \leq p^k - 1$. Zudem gilt

$$\exp\left(-2\pi i \frac{a_{k+1}}{p^k}\right) = \exp\left(-2\pi i \frac{a_{k+1}}{p^{k+1}}\right)^p = \psi(p^{-k-1})^p = \psi(p^{-k}) = \exp\left(-2\pi i \frac{a_k}{p^k}\right).$$

Für unsere Folge heißt das aber gerade $a_k \equiv a_{k+1} \bmod p^k$. Im Beweis der Potenzreihendarstellung nach Satz 3.15 haben wir gesehen, dass eine solche Folge eine eindeutig bestimmte p-adische Zahl a definiert, die $a \equiv a_k \bmod p^k$ erfüllt. Es folgt

$$e_p\left(\frac{a}{p^k}\right) = \exp\left(-2\pi i \frac{a_k}{p^k}\right) = \psi\left(\frac{1}{p^k}\right)$$

und wir haben das Lemma gezeigt. □

Der Beweis liefert uns sogar einen kleinen Bonus.

Korollar 4.7. *Wirkt $\psi : \mathbb{Q}_p \to S^1$ trivial auf $\mathbb{Z}_p$, so gilt $\psi(x) = e_p(ax)$ mit $a \in \mathbb{Z}_p$.*

Beweis. Das ist wieder eine Folgerung aus Satz 3.15 zur Potenzreihendarstellung. Die im vorherigen Beweis definierte Folge konvergiert demnach genau gegen einen Wert aus $\mathbb{Z}_p$. □

Der Standardcharakter induziert folglich einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe $\mathbb{Q}_p^+$ und deren Dualgruppe $\widehat{\mathbb{Q}_p^+}$. Wir können also guten Gewissens die Fouriertransformation als eine Funktion auf $\mathbb{Q}_p^+$ zu definieren.

Definition 4.8 (Lokale Fouriertransformation)**.** Sei $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$. Wir definieren die *lokale Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ von f als die Abbildung

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) e_p(-\xi x) dx_p$$

für alle $\xi \in \mathbb{Q}_p$.

Diese Definition entspricht im Fall $p = \infty$ der klassischen Fouriertransformation. Von daher möchten wir auch einige klassische Ergebnisse auf die p-adischen Zahlen übertragen.

Lemma 4.9. *Sei $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$.*

(i) Ist $g(x) = f(x)e_p(ax)$ mit $a \in \mathbb{Q}_p$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x-a)$.

(ii) Ist $g(x) = f(x-a)$ mit $a \in \mathbb{Q}_p$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x-a)e_p(-ax)$.

(iii) Ist $g(x) = f(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{Q}_p{}^\times$, dann gilt $\hat{g}(x) = \frac{1}{|\lambda|_p}\hat{f}(\frac{x}{\lambda})$.

Beweis. (i) und (ii) sind einfache Folgerungen aus der Definition mit der Multiplikativität von e_p und der Translationsinvarianz des Haar-Maß. Bei (iii) spielt unsere Normierung des Maßes eine Rolle, denn mit der Translation $y \mapsto \lambda^{-1} y$ erhalten wir

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(\lambda x) e_p(-\xi x) dx_p = \frac{1}{|\lambda|_p} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) e_p(-\xi \lambda^{-1} x) dx_p = \frac{1}{|\lambda|_p} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

□

Für die unendliche Stelle $p = \infty$ definieren wir eine *lokale Schwartz-Bruhat Funktion* als eine komplexwertige, glatte Funktion $f : \mathbb{Q}_\infty \to \mathbb{C}$, die für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n und m die Bedingung

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_\infty} \left| x^n \frac{d^m}{dx_p^m} f(x) \right| < \infty$$

erfüllt. Das entspricht der Definition der klassischen Schwartz Funktion. Für die endlichen Stellen $p < \infty$ definieren wir eine lokale Schwartz-Bruhat Funktion als eine lokal konstante Funktion mit kompakten Träger. Die Menge aller solcher Funktionen bilden einen komplexen Vektorraum, den wir mit $S(\mathbb{Q}_p)$ bezeichnen. Im Fall $p < \infty$ erkennt man leicht, dass $S(\mathbb{Q}_p) \subseteq L^1(\mathbb{Q}_p)$. Für $p = \infty$ gilt per Definition $(|1| + |x^2|)|f(x)| \leq C$, also $|f(x)| \leq C(1+x^2)^{-1}$ und $(1+x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{Q}_\infty)$.

Beispiele 4.10.

(a) Im Fall $p = \infty$ ist die Funktion $f_k(x) = x^k e^{-x^2}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ in $S(\mathbb{Q}_\infty)$. Die Ableitungen $\frac{d^m}{dx_p^m} f_k(x)$ sind von der Form $p(x)e^{-x^2}$, wobei $p(x)$ ein Polynom ist. Aus der Analysis ist bekannt, dass $\left|x^n p(x) e^{-x^2}\right|$ dann für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ beschränkt ist.

(b) Im Fall $p < \infty$ sind die charakteristischen Funktionen kompakter Mengen, wie $a + p^k\mathbb{Z}_p$, mit $a \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$ offensichtlich in $S(\mathbb{Q}_p)$.

Lemma 4.11. *Für jede endliche Stelle $p < \infty$ sind die lokalen Schwartz-Bruhat Funktion $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen der Mengen $a + p^k\mathbb{Z}_p$, wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Für jedes lokal konstante f und jedes $z \in \mathbb{C}$ ist das Urbild $f^{-1}(z)$ offen in $\mathbb{Q}_p$, darunter auch $f^{-1}(0)$. Folglich ist $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ abgeschlossen und daher schon $\text{supp}(f) = \mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$. Per Definition hat die Schwartz-Bruhat Funktion f kompakten Träger, also ist $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ kompakt. Diese Menge wird durch die offenen Urbilder $f^{-1}(z)$ mit $z \neq 0$ überdeckt, wovon nach Kompaktheit schon endlich viele ausreichen. f hat somit ein endliches Bild. Weiter ist jede offene Menge $f^{-1}(z)$ eine Vereinigung offener Bällen in $\mathbb{Q}_p$. Diese haben aber genau die oben beschriebene Form $a + p^k\mathbb{Z}_p$. Aufgrund der Kompaktheit, reichen wieder endliche viele solcher Bälle und es folgt auch schon das Lemma. $\square$

Beschränken wir uns jetzt auf die Fouriertransformation von lokalen Schwartz-Bruhat Funktionen. Aus der klassischen Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$ ist bekannt, dass für jede Schwartz Funktion f deren Fouriertransformierte $\hat{f}$ wieder eine Schwartz Funktion ist. Man kann dann $\hat{\hat{f}}$ betrachten und sieht, dass diese Funktion in einem engen Bezug zu f steht. Für eine geeignete Normierung des Haar-Maßes ergibt sich die Umkehrformel $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$. Wir nennen ein so normiertes Haar-Maß *selbstdual.* Übertragen wir dieses Ergebnis nun auf den p-adischen Fall.

Satz 4.12. *Sei $p \leq \infty$. Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ ist die Fouriertransformation wohldefiniert und liegt wieder in $S(\mathbb{Q}_p)$. Insbesondere gilt die* Umkehrformel

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

für alle $x \in \mathbb{Q}_p$.

Der folgende Beweis orientiert sich an Deitmar [2] Satz 5.4.6.

Beweis. Im Fall $p = \infty$ folgt $\hat{f} \in S(\mathbb{Q}_p)$ und die Umkehrformel (mal einer Konstanten) aus der klassischen Analysis. Um zu sehen, dass unsere Normierung von dx_∞ tatsächlich selbstdual ist, reicht es eine geeignete Funktion zu betrachten und zu zeigen, dass die Konstante gleich 1 ist. Dafür verweisen wir auf die Berechnungen in Abschnitt 4.4.1 am Ende des Kapitels.

Kommen wir zum Fall $p < \infty$. Wie wir in Lemma 4.11 gesehen haben, ist jede Funktion in $S(\mathbb{Q}_p)$ eine Linearkombination von Funktionen der Form $f = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}$. Es reicht also die Aussage für solche f zu zeigen. Sei dazu $h = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Wir zeigen $\hat{h} = h$ durch folgende Rechnung

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} h(x)e_p(-\xi x)dx_p = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-\xi x)dx_p.$$

Nun ist $\chi(x) \coloneqq e_p(-\xi x)$ ein Charakter auf $\mathbb{Z}_p$ und genau dann trivial, wenn $\xi \in \mathbb{Z}_p$. Weiter ist $\mathbb{Z}_p$ kompakt. Nach Lemma 2.14 und unserer Normierung von dx_p folgt also

$$\hat{h}(\xi) = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = h(\xi).$$

Wir führen folgende Operatoren auf $S(\mathbb{Q}_p)$ ein

$$\Omega_a f(x) = e_p(ax)f(x), \qquad L_a f(x) = f(x-a), \qquad M_\lambda f(x) = f(\lambda x),$$

wobei $a \in \mathbb{Q}_p$ und $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$. Somit können wir $f = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}$ schreiben als $L_a M_{p^{-k}} h$. Aus Lemma 4.9 folgern wir

$$\hat{f} = (L_a M_{p^{-k}} h)^\wedge = \Omega_{-a} p^k M_{p^k} \hat{h} = \Omega_{-a} p^{-k} M_{p^k} h.$$

Also ist $\hat{f}(\xi) = p^k e_p(-a\xi)\mathbb{1}_{p^{-k}\mathbb{Z}_p}(\xi)$. Somit ist $\hat{f}$ als das Produkt lokal konstanter Funktionen selbst wieder lokal konstant und daher in $S(\mathbb{Q}_p)$. Wir haben also den ersten Teil der Aussage gezeigt.

Für den zweiten Teil sehen wir

$$\hat{\hat{f}} = (L_a M_{p^{-k}} h)^{\wedge\wedge} = L_{-a}(M_{p^k} h)^{\wedge\wedge} = L_{-a} M_{p^{-k}} \hat{h} = L_{-a} M_{p^{-k}} h,$$

also $\hat{\hat{f}}(x) = \mathbb{1}_{-a+p^k\mathbb{Z}_p}(x) = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}(-x) = f(-x)$, wobei wir $p^k\mathbb{Z}_p = -p^k\mathbb{Z}_p$ ausgenutzt haben. Damit ist die Umkehrformel für den p-adischen Fall gezeigt. □

4.3 Die lokale Funktionalgleichung

Die Einheiten $\mathbb{Q}_p^\times$ der lokalen Körper $\mathbb{Q}_p$ können als direktes Produkt $\mathcal{O}_p^\times \times V(\mathbb{Q}_p)$ dargestellt werden, wobei $\mathcal{O}_p^\times$ die Untergruppe der Elemente von $\mathbb{Q}_p^\times$ mit Absolutbetrag 1 und

$$V(\mathbb{Q}_p) \coloneqq \left|\mathbb{Q}_p^\times\right|$$

den Wertebereich des Absolutbetrags auf den Einheiten bezeichnet. Dafür betrachten wir den stetigen Homomorphismus $\tilde{\cdot} : x \mapsto \tilde{x} \coloneqq \frac{x}{|x|_p}$ von $\mathbb{Q}_p^\times$ nach $\mathcal{O}_p^\times$.

Für $p = \infty$ ist $\mathcal{O}_p^\times = \{-1, 1\}$ und $V(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{R}_+^\times$. Jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ hat gerade Form $x = \mathrm{sgn}(x)|x|_p$, denn $\tilde{x}$ ist die Signumfunktion. Für $p < \infty$ dagegen ist $\mathcal{O}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times$, $V(\mathbb{Q}_p) = p^{\mathbb{Z}}$ und wir können jedes Element $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ schreiben als $x = |x|_p\tilde{x}$. Es wird von Interesse sein, wie die multiplikativen Quasi-Charaktere auf die Untergruppe $\mathcal{O}_p^\times$ wirken. Dazu zunächst eine kleine Definition.

Definition 4.13. Ein multiplikativer Quasi-Charakter χ heißt *unverzweigt*, wenn er trivial auf die Untergruppe $\mathcal{O}_p^\times$ wirkt. Anderenfalls nennen wir ihn *verzweigt.*

Die unverzweigten Quasi-Charaktere haben eine recht einfache Form, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 4.14. *Jeder unverzweigte Quasi-Charakter χ auf $\mathbb{Q}_p^\times$ hat die Form $\chi(x) = |x|_p^s$ mit $s \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Es ist klar, dass Funktionen dieser Form unverzweigte Quasi-Charaktere sind. Sei umgekehrt χ ein unverzweigter Quasi-Charakter auf $\mathbb{Q}_p^\times$. Dann gilt $\chi(x) = \chi(|x|_p \tilde{x}) = \chi(|x|_p)$. Dadurch induziert χ eine stetige Abbildung auf dem Wertebereich $V(\mathbb{Q}_p)$. Wir zeigen, dass diese Abbildung gerade die Form $t \mapsto t^s$ hat.

Betrachten wir zuerst den Fall $p = \infty$ mit $V(\mathbb{Q}_\infty) = \mathbb{R}_+^\times$. Wir definieren $s := \log(\chi(e))$, also $\chi(e) = e^s$. Induktiv lässt sich leicht $\chi(e^n) = e^{ns}$ für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ zeigen. Weiter zeigt man

$$\chi(e^{\frac{n}{m}})^m = \chi(e^{m\frac{n}{m}}) = \chi(e^n) = e^{ns},$$

woraus

$$\chi(e^{\frac{n}{m}}) = \left(\chi(e^{\frac{n}{m}})^m\right)^{\frac{1}{m}} = (e^{ns})^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}s}$$

folgt, so dass wir $\chi(e^q) = e^{qs}$ für alle rationalen Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ erhalten. Aufgrund der Stetigkeit von χ, gilt nach Übergang zu den Grenzwerten $\chi(e^r) = e^{rs}$ für alle reellen $r \in \mathbb{R}$, also $\chi(t) = t^s$ für alle $t \in \mathbb{R}_+^\times$.

Der Fall $p < \infty$ ist etwas leichter. Wir definieren dieses mal $s := \frac{\log(\chi(p))}{\log(p)}$, so dass $\chi(p) = p^s$. Da der Wertebereich aber gerade $p^{\mathbb{Z}}$ war, folgt die Behauptung sofort. □

Satz 4.15. *Jeder Quasi-Charakter χ von $\mathbb{Q}_p^\times$ hat die Form*

$$\chi(x) = \mu(\tilde{x})|x|_p^s,$$

wobei μ ein Charakter auf $\mathcal{O}_p^\times$ und $s \in \mathbb{C}$ ist.

Beweis. Es ist wieder klar, dass $\mu(\tilde{\cdot})|\cdot|_p^s$ tatsächlich ein Charakter ist. Betrachten wir einen beliebigen Charakter χ und definieren μ als die Einschränkung von χ auf $\mathcal{O}_p^\times$. Da die Untergruppe $\mathcal{O}_p^\times$ kompakt und μ eine Quasi-Charakter ist, folgt nach Lemma 2.14, dass μ sogar ein Charakter ist. Damit definiert der stetige Homomorphismus $x \mapsto \chi(x)\mu(\tilde{x})^{-1}$ einen unverzweigten Charakter auf $\mathbb{Q}_p^\times$, hat also nach vorherigem Lemma die Form $\chi(x)\mu(\tilde{x})^{-1} = |x|_p^s$ für ein $s \in \mathbb{C}$. Der Satz folgt sofort. □

Aus $\left|\mu(\tilde{x})|x|_p^s\right| = |x|_p^\sigma$ folgt, dass der Realteil $\sigma = \Re(s)$ eindeutig bestimmt ist. Er wird auch *Exponent* des Charakters χ genannt.

Erinnern wir uns zurück an Riemanns Beweis der Funktionalgleichung. Er beginnt nicht mir der Reihen- oder Produktdarstellung der Zeta-Funktion und betrachtet stattdessen mit

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - 1}\frac{dx}{x}$$

die Zeta-Funktion als ein Integral über die positiven Einheiten. Nach der Umformung

$$2\Gamma(s)\zeta(s) = \int_{\mathbb{R}^\times} \frac{1}{e^{|x|_\infty} - 1} |x|_\infty^s \frac{dx}{|x|_\infty}$$

erkennen wir, dass die Zeta-Funktion nichts weiter als ein Integral über die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times$ ist, deren Integrand das Produkt einer Schwartz-Funktion mit einem multiplikativen Quasi-Charakter ist. Genau das wird unsere Definition einer lokalen Zeta-Funktion.

Definition 4.16. Sei $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ eine lokale Schwartz-Bruhat Funktion und $\chi = \mu|\cdot|_p^s$ multiplikativer Quasi-Charakter. Die *lokale Zeta-Funktion* von f und χ ist definiert als das Integral

$$Z_p(f, \chi) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\chi(x) d^\times x_p.$$

Wir schreiben auch $Z_p(f, \mu, s)$ für $Z_p(f, \mu|\cdot|_p^s)$.

Fixieren wir eine Funktion f und einen multiplikativen Charakter μ auf $\mathcal{O}_p^\times$, so können wir $Z_p(f, \mu, s)$ als eine Funktion in der komplexen Variable s ansehen. Es wird daher Sinn machen, der Frage nach Holomorphie bzw. Meromorphie der lokalen Zeta-Funktionen nachzugehen.

Bevor wir uns gleich dem ersten Ergebnis Tates widmen, definieren wir noch für jeden Quasi-Charakter χ mittels

$$\check{\chi}(x) = \frac{|x|_p}{\chi(x)},$$

das *verschobene Dual* des Charakters. Offensichtlich gilt $\check{\check{\chi}} = \chi$ und mit $\chi = \mu|\cdot|_p^s$ sehen wir $Z_p(f, \check{\chi}) = Z_p(f, 1/\mu, 1-s)$. Damit können wir den ersten großen Satz dieser Arbeit formulieren.

Satz 4.17 (Lokale Funktionalgleichung)**.** *Sei $f_p \in S(\mathbb{Q}_p)$ und $\chi = \mu|\cdot|_p^s$. Sei weiter σ der Exponent von χ. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $Z_p(f, \chi)$ *ist holomorph und absolut konvergent für* $\sigma > 0$.

(ii) *Auf dem Streifen* $0 < \sigma < 1$ *gilt die Funktionalgleichung*

$$Z_p(\hat{f}, \check{\chi}) = \gamma(\chi) Z_p(f, \chi),$$

wobei $\gamma(\chi)$ *unabhängig von* f *und meromorph als Funktion in* s *ist.*

(iii) $Z_p(f, \chi)$ *besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz* $\mathbb{C}$.

Beweis. (i) Für die Konvergenz reicht es zu zeigen, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_p^{\sigma - 1} dx_p$$

endlich ist, denn $d^\times x_p$ ist ein konstantes Vielfaches von $\frac{dx_p}{|x|_p}$.

Sei zunächst $p = \infty$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und setzen $K = [-\varepsilon, \varepsilon]$. Anschließen teilen wir das Integral in

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty = \int_{K \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty + \int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty.$$

Als lokale Schwartz-Bruhat Funktion ist f stetig und damit beschränkt auf dem Kompaktum K. Für den ersten Summanden müssen wir also nur die Integrierbarkeit von $|x|_\infty^{\sigma-1}$ nahe 0 überprüfen. Aus der Analysis folgt diese für $\sigma - 1 > -1$, also $\sigma > 0$. Im zweiten Summanden können wir den Integranden geeignet abschätzen. Aus der Definition folgt zum Beispiel $|f(x)| \leq \frac{C}{|x|_\infty^n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1 + \sigma$ und C eine positive reelle Zahl ist. Abschätzen des Summanden ergibt

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty \leq C \cdot \int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} \frac{|x|_\infty^{\sigma-1}}{|x|_\infty^n} dx_\infty \leq C \cdot \int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} \frac{1}{|x|_\infty^2} dx_\infty < \infty.$$

Es folgt die absolute Konvergenz auf $\sigma > 0$.

Kommen wir zum endlichen Fall. Die lokale Schwartz-Bruhat Funktion ist dann eine Linearkombination von Funktionen der Form $f = \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$. Es reicht also, nur solche zu betrachten. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_p^{\sigma-1} dx_p &= \int_{a+p^n\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^{\sigma-1} dx_p = \int_{p^n\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x-a|_p^{\sigma-1} dx_p \\ &\leq \int_{p^n\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} + |a|_p^{\sigma-1} \operatorname{Vol}(p^n\mathbb{Z}_p, dx_p),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die (normale) Dreiecksungleichung verwendet haben. Der zweite Summand ist endlich, da $p^n\mathbb{Z}_p$ kompakt ist. Schauen wir uns also den ersten Summanden an. Wir nutzen einen kleinen Trick. Der Betrag ist konstant auf den Kreislinien $p^k\mathbb{Z}_p^\times$. Zudem haben wir mit $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^k\mathbb{Z}_p^\times$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{Q}_p^\times$ in genau diese Kreislinien kennengelernt. Wenn wir diesen Gedanken auf das Integral übertragen, erhalten wir

$$\int_{p^n\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^\infty \int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times} |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^\infty \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \left|p^k x\right|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^\infty p^{-k\sigma} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \frac{dx_p}{|x|_p}$$

Das Integral am Schluss haben wir bereits bei der Normierung des multiplikativen Maßes bestimmt. Es ist gleich $\frac{p-1}{p}$. Übrig bleibt also nur eine geometrische Reihe, diese konvergiert aber gerade für $\sigma > 0$. Damit haben wir absolute Konvergenz für die nicht-archimedischen Stellen gezeigt und kommen zur Funktionalgleichung.

Zeigen wir noch die Holomorphie auf $\sigma > 0$. über die dominierte Konvergenz kann man jetzt leicht einsehen, dass $Z_p(f, \mu, s)$ auf $\sigma > 0$ stetig ist. Sei δ die Randkurve eines in $\sigma > 0$ liegenden Dreiecks. Wir rechnen

$$\int_\delta Z_p(f, \mu, s) ds = \int_\delta \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s d^\times x_p ds = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \int_\delta f(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s ds d^\times x_p$$

und begründen Vertauschen der Integral mit Fubini. Offensichtlch ist $f(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s$ für festes x holomorph in s und folglich verschwindet nach Cauchy Integralsatz das Integral entlang δ. Wir erhalten damit

$$\int_\delta Z_p(f, \mu|\cdot|_p^s) ds = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} 0 d^\times x_p = 0$$

und schließen mit dem Satz von Morera, dass $Z_p(f, \mu, s)$ holomorph auf der Teilebene $\sigma > 0$ ist.

(ii) Wir folgen Tate und beweisen zunächst ein kleines Lemma.

Lemma 4.18. *Für alle Charaktere χ mit Exponenten $0 < \sigma < 1$ und beliebige Funktionen $f, g \in S(\mathbb{Q}_p)$ gilt:*

$$Z_p(f, \chi) Z_p(\hat{g}, \check{\chi}) = Z_p(\hat{f}, \check{\chi}) Z_p(g, \chi)$$

Beweis. Nach (i) haben wir absolute Konvergenz der Integrale für Exponenten $\sigma > 0$. Zudem ist $\check{\chi} = |\cdot|_p \chi^{-1} = |\cdot|_p^{1-s} \mu^{-1}$, also haben wir in diesem Fall Konvergenz für $\sigma < 1$. Damit sind die obigen Zeta-Funktionen auf dem Streifen, den wir betrachten, wohldefiniert. Wir schreiben das Produkt als Doppelintegral über $\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$

$$\begin{aligned} Z_p(f, \chi) Z_p(\hat{g}, \check{\chi}) &= \iint\limits_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x) \chi(x) \hat{g}(y) \chi(y)^{-1} |y|_p d^\times(x_p, y_p) \\ &= \iint\limits_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(y) \chi(xy^{-1}) |y|_p d^\times(x_p, y_p). \end{aligned}$$

Das Integral ist invariant unter der Translation $(x, y) \mapsto (x, xy)$ und wir erhalten

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(xy) \chi(y^{-1}) |xy|_p d^\times(x_p, y_p).$$

Nach Fubini ist dies wiederum gleich

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(xy) |x|_p d^\times x_p \right) \chi(y^{-1}) |y|_p d^\times y_p.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das innere Integral symmetrisch in f und g ist. Dazu erinnern wir uns, dass $d^\times x_p = c \frac{dx_p}{|x|_p}$ und, per Definition der Fouriertransformation, daher

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(xy) |x|_p d^\times x_p = c \int_{\mathbb{Q}_p} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) g(z) e_p(-xyz) dz_p dx_p = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} g(z) \hat{f}(zy) |z|_p d^\times z_p,$$

wobei wieder Fubini das Vertauschen der Reihenfolge bei der Integration erlaubt. □

Damit sind wir auch schon fast fertig. Wir versprechen die Existenz geeigneter Funktionen $g \in S(\mathbb{Q}_p)$, so dass der Ausdruck

$$\gamma(\chi) \coloneqq \frac{Z_p(\hat{g}, \check{\chi})}{Z_p(g, \chi)}.$$

wohldefiniert ist. Aus dem gerade bewiesenen Lemma folgt, dass dieser Quotient unabhängig von der Wahl von g ist und durch Umformen der Gleichung erhalten wir die lokale Funktionalgleichung

$$Z_p(\hat{f}, \check{\chi}) = \gamma(\chi) Z_p(f, \chi)$$

(iii) Der Exponent von $\check{\chi}$ ist gerade $1 - \sigma$ und folglich ist $\mathbb{Z}_p(\hat{f}, \check{\chi})$ holomorph für alle $\sigma < 1$. Mit der Funktionalgleichung lässt sich also $Z_p(f, \chi)$ auf den Bereich $\sigma \leq 0$ meromorph fortsetzen, solange wir nur versprechen, dass $\gamma\chi$ eine meromorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ ist. □

4.4 Lokale Berechnungen

In diesem Abschnitt kommen wir dem Versprechen des letzten Beweises nach und werden nicht nur die Funktionen angeben, sondern auch die γ-Faktoren explizit berechnen. Die Berechnungen werden sich in die Fälle $p = \infty$ und $p < \infty$ und dort jeweils in χ verzweigt und χ unverzweigt aufteilen.

4.4.1 Der Fall $p = \infty$

Wir betrachten zuerst den unverzweigten Charakter $\chi = |\cdot|_\infty^s$ und wählen die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f(x) = e^{-\pi x^2}.$$

Wir behaupten, dass f ihre eigene Fouriertransformierte ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} e_\infty(-x\xi) dx_\infty = \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx_\infty \\ &= \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi(x^2+2ix\xi-\xi^2)} e^{-\pi\xi^2} dx_\infty = f(\xi) \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx_\infty.\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass das Integral gleich 1 ist. Dazu nutzen wir das bekannte Integral $\int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} dx_\infty = 1$ und etwas Wegintegration. Sei γ das Rechteck von $-r$ nach r auf der reellen Achse, dann hoch zu $r + i\xi$, horizontal zu $-r + i\xi$ und wieder zurück zu $-r$. Da f eine ganze Funktion ist, gilt nach Cauchy-Integralsatz $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Die Integrale an der linken und rechten Seite des Rechtecks konvergieren gegen 0 wenn r anwächst, denn für $z = \pm r + iy$ und $0 \leq y \leq \xi$ gilt

$$|f(z)| = \left|e^{-\pi(\pm r+iy)^2}\right| = e^{-\pi(r^2-y^2)}$$

und wir haben die Abschätzung

$$\left|\int_{\pm r}^{\pm r+i\xi} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\xi f(\pm r + iy)dy\right| \leq e^{-\pi r^2} \int_0^\xi e^{\pi y^2} dy \xrightarrow{r\to\infty} 0.$$

Folglich muss schon $\int_{\mathbb{Q}_\infty} f(x+i\xi)dx_\infty = \int_{\mathbb{Q}_\infty} f(x)dx_\infty = 1$ gelten und wir sind fertig. Damit haben wir auch die nötigen Berechnung für die Selbstdualität von dx_∞ nach Satz 4.12 gegeben.

Weiter mit den Zeta-Funktionen:

$$Z_\infty(f, \chi) = \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x)|x|_\infty^s d^\times x_\infty = \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x^2}|x|_\infty^s d^\times x_\infty = 2\int_0^\infty e^{-\pi x^2} x^{s-1} dx_\infty.$$

Wir benutzen die Transformation $t = \pi x^2$ und erhalten

$$Z_\infty(f, \chi) = \int_0^\infty e^{-t}(\pi^{-1}t)^{\frac{s-1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Mit dem gleichen Argumentation rechnen wir auch

$$Z_\infty(\hat{f}, \check{\chi}) = Z_\infty(f, |\cdot|_\infty^{1-s}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right).$$

Jetzt können wir endlich den versprochenen Faktor

$$\gamma(|\cdot|_\infty^s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

angeben und sehen, dass dieser meromorph ist.

Nun zum zweiten Fall: χ unverzweigt, also $\chi = \mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^s$. Wir wählen die Funktion

$$f_\pm(x) = xe^{-\pi x^2} \in S(\mathbb{Q}_\infty)$$

und bemerken zunächst die Beziehung $f_\pm(x) = (-2\pi)^{-1}f'(x)$. Damit können wir die Fouriertransformation schnell aus einem Ergebnis der klassischen Fourieranalysis gewinnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\hat{f}_\pm(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\pm(x)e_\infty(-x\xi)dx_\infty = \int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi)^{-1}f'(x)e_\infty(-x\xi)dx_\infty \\
&= \Big[(-2\pi)^{-1}f(x)e_\infty(-x\xi)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi)^{-1}f(x)\cdot(-2\pi i\xi)e_\infty(-x\xi)dx_\infty \\
&= 0 - i\xi\hat{f}(\xi) = -i\xi f(\xi) = -if_\pm(\xi).
\end{aligned}$$

Wir berechnen die Zeta-Funktionen

$$\begin{aligned}
Z_\infty(f_\pm,\chi) = Z_\infty(f_\pm,\mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^s) &= \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f_\pm(x)\mathrm{sgn}(x)|x|_\infty^s d^\times x_\infty \\
&= \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} xf(x)\mathrm{sgn}(x)|x|_\infty^s d^\times x_\infty = \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x)|x|_\infty^{s+1}d^\times x_\infty \\
&= Z_\infty(f,|\cdot|_\infty^{s+1}) = \pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

und mit $\check{\chi} = \mathrm{sgn}^{-1}|\cdot|_\infty^{1-s} = \mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^{1-s}$

$$\begin{aligned}
Z_\infty(\hat{f}_\pm,\check{\chi}) = Z_\infty(-if_\pm,\mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^{1-s}) &= -i\int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f_\pm(x)\mathrm{sgn}(x)|x|_\infty^{1-s}d^\times x_\infty \\
&= -i\int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} xf(x)\mathrm{sgn}(x)|x|_\infty^{1-s}d^\times x_\infty = -i\int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x)|x|_\infty^{2-s}d^\times x_\infty \\
&= -iZ_\infty(f,|\cdot|_\infty^{2-s}) = -i\pi^{-\frac{2-s}{2}}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir den Faktor

$$\gamma(\mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^s) = i\frac{\pi^{-\frac{2-s}{2}}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},$$

der wie im unverzweigten Fall meromorph ist.

4.4.2 Der Fall $p < \infty$

Wir beginnen auch hier wieder mit dem unverzweigten Charakter $\chi = |\cdot|_p^s$ und betrachten die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f_0(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x).$$

Wie im archimedischen Fall ist f_0 ihre eigene Fouriertransformierte. Dies wurde bereits im Beweis von Satz 4.12 gezeigt. Mit unserer Normierung des Haar-Maßes folgt daher

$$\hat{f}_0(\xi) = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-x\xi)dx_p = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = f_0(\xi).$$

Für die Berechnungen der Zeta-Funktionen nutzen wir die disjunkte Vereinigung $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} p^k \mathbb{Z}_p^\times$.

$$\begin{aligned} Z_p(f_0, \chi) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_0(x)|x|_p^s d^\times x_p = \int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^s d^\times x_p \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times} |x|_p^s d^\times x_p = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \left|p^k x\right|_p^s d^\times x_p \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} p^{-ks} d^\times x_p = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, d^\times x_p) = \frac{1}{1-p^{-s}} \end{aligned}$$

und analog

$$Z_p(\hat{f}_0, \check{\chi}) = Z_p(f_0, |\cdot|_p^{1-s}) = \frac{1}{1-p^{s-1}}.$$

Der Faktor hat damit die Form

$$\gamma(|\cdot|_p^s) = \frac{1-p^{-s}}{1-p^{s-1}}$$

und ist meromorph auf $\mathbb{C}$.

Kommen wir zum verzweigten Fall $\chi = \mu|\cdot|_p^s$. Bevor wir allerdings mit den eigentliche Berechnungen anfangen, schauen wir uns den Charakter $\mu : \mathbb{Z}_p^\times \to S^1$ etwas genauer an.

Wählen wir eine offene Umgebung U der $1 \in S^1$, die nur die triviale Untergruppe enthält, so finden wir aufgrund der Stetigkeit von μ eine offene Umgebung V der $1 \in \mathbb{Z}_p^\times$ mit $\mu(V) \subseteq U$. Diese enthalten aber stets eine Untergruppe der Form $1 + p^n\mathbb{Z}_p$. Da μ aber ein Gruppenhomomorphismus ist, muss diese Untergruppe bereits auf 1 abgebildet werden. Es gibt also für jeden Charakter $\chi = \mu|\cdot|_p^s$ ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(1+p^n\mathbb{Z}_p) = 1$. Wir nennen dann p^n den *Führer des multiplikativen Charakters* χ.

Abhängig vom Führer p^n von χ definieren wir die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f_n(x) = e_p(x)\mathbb{1}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(x).$$

Die Berechnung der Fouriertransformation erfolgt ähnlich zum unverzweigten Fall:

$$\hat{f}_n(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f_n(x)e_p(-x\xi)dx_p = \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} e_p\left(x(1-\xi)\right)dx_p$$

Der additive Charakter $\psi(x) = e_p(x(1-\xi))$ wirkt genau dann trivial auf $p^{-n}\mathbb{Z}_p$, wenn $1-\xi \in p^n\mathbb{Z}_p$, oder äquivalent $\xi \in 1 + p^n\mathbb{Z}_p$. Es folgt

$$\hat{f}_n(\xi) = \mathrm{Vol}(p^{-n}\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{1+p^n\mathbb{Z}_p}(\xi) = p^n\mathbb{1}_{1+p^n\mathbb{Z}_p}(\xi).$$

Weiter zur Zeta-Funktion:

$$\begin{aligned}
Z_p(f_n,\chi) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_n(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s d^\times x_p = \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} e_p(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s d^\times x_p \\
&= \sum_{k=-n}^{\infty} \int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times} e_p(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s d^\times x_p = \sum_{k=-n}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e_p(p^k x)\mu(\widetilde{p^k x})\left|p^k x\right|_p^s d^\times x_p \\
&= \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e_p(p^k x)\mu(x) d^\times x_p.
\end{aligned}$$

Ein solches Integral der Form $g(\omega,\lambda) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)\lambda(x)d^\times x_p$ mit multiplikativen Charakter $\omega : \mathbb{Z}_p^\times \to S^1$ und additiven Charakter $\lambda : \mathbb{Z}_p \to S^1$ wird *Gauß-Summe** genannt. Mit $e_{p,k}(x) \coloneqq e_p(p^k x)$ schreiben wir die Zeta-Funktion als

$$Z_p(f_n,\chi) = \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks} g(\mu, e_{p,k}). \tag{6}$$

Für die weitere Berechnung beweisen wir ein kleines Lemma über Gauß-Summen. Weiter definieren wir im Folgenden $U_k = 1 + p^k\mathbb{Z}_p$ für $k \in \mathbb{N}$ und setzen $U_0 = \mathbb{Z}_p^\times$.

Lemma 4.19. *Seien ω und λ wie oben. Seien weiter p^n und p^r die Führeren von ω bzw. λ. Es gelten folgende Aussagen:*

(i) *Wenn $n > r$, dann $g(\omega,\lambda) = 0$.*

(ii) *Wenn $n = r$, dann*

$$|g(\omega,\lambda)|^2 = c\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\operatorname{Vol}(U_n, d^\times x_p).$$

(iii) *Wenn $n < r$, dann*

$$|g(\omega,\lambda)|^2 = c\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\left[\operatorname{Vol}(U_n, d^\times x_p) - p^{-1}\operatorname{Vol}(U_{r-1}, d^\times x_p)\right].$$

Eine Kleinigkeit vorneweg: r und n sind in diesem Fall nicht-negative ganze Zahlen, da wir nur Charaktere auf $\mathbb{Z}_p$ bzw. $\mathbb{Z}_p^\times$ betrachten.

Beweis. Für (i) zerlegen wir $\mathbb{Z}_p^\times$ in Nebenklassen, die von der Untergruppe $U_r = 1 + p^r\mathbb{Z}_p$ erzeugt werden. Diese haben mit $R = \{x \in \{1,\dots,p^r-1\} : x \not\equiv 0 \bmod p\}$ ein endliches Repräsentantensystem. Für ein $a \in R$ können wir die zugehörige Nebenklassen als aU_r schreiben. Deren Elemente haben die Form $a(1+p^r b)$ und man folgert $\lambda(a(1+p^r b)) = \lambda(a)\lambda(p^r ab) = \lambda(a)$ nach der Definition des Führers. Wir erhalten

$$g(\omega,\lambda) = \sum_{aU_r} \int_{aU_r} \omega(x)\lambda(x)d^\times x_p = \sum_{aU_r} \omega(a)\lambda(a)\int_{U_r}\omega(x)dx_p.$$

Aufgrund der Ungleichung $n > r$, wirkt der Charakter ω nicht trivial auf U_r und somit verschwindet das Integral.

*Nicht zu verwechseln mit der Gaußschen Summenformel!

Weiter zu (ii) und (iii): Sei zunächst $n \leq r$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
|g(\omega,\lambda)|^2 &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)\lambda(x)d^\times x_p \cdot \overline{\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(y)\lambda(y)d^\times y_p} \\
&= \int_{\mathbb{Z}_p^\times}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(xy^{-1})\lambda(x-y)d^\times x_p d^\times y_p \\
&= \int_{\mathbb{Z}_p^\times}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)\lambda(x(1-y))d^\times x_p d^\times y_p
\end{aligned}$$

wobei wir den letzten Schritt durch die Translation $x \mapsto xy$ erhalten haben. Setzen wir nun $h(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(x(1-y))d^\times y_p$, so lässt sich dieser Ausdruck schreiben als

$$|g(\omega,\lambda)|^2 = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)h(x)d^\times x_p. \tag{7}$$

Wir rechnen weiter

$$h(x) = c\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(y(x-1))\frac{dy_p}{|y|_p} = c\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(y(x-1))dy_p.$$

Wegen $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$ können wir das Integral weiter aufspalten.

$$h(x) = c\int_{\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x-1)dy_p = c\int_{\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x-1))dy_p - c\int_{p\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x-1))dy_p.$$

Hier haben wir den Fall von Lemma 2.14. Der Charakter $y \mapsto \lambda(y(x-1))$ ist genau dann trivial auf $\mathbb{Z}_p$, wenn $x - 1 \in p^r\mathbb{Z}_p$, d.h. wenn $x \in U_r$. Ähnlich verhält es sich mit $y \mapsto \lambda(y(x-1))$ auf $p\mathbb{Z}_p$, wobei dieser Charakter genau dann trivial ist, wenn $x \in U_{r-1}$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
h(x) =& c\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_r} - c\operatorname{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_{r-1}} \\
=& c\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_r} - cp^{-1}\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_{r-1}}
\end{aligned}$$

Einfügen in Gleichung (7) ergibt dann

$$|g(\omega,\lambda)|^2 = c\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\int_{U_r} \omega(x)d^\times x_p - cp^{-1}\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\int_{U_{r-1}} \omega(x)d^\times x_p.$$

Im Fall (ii) haben wir $n = r$. Damit ist der erste Integrand trivial, der zweite jedoch nicht. Folglich verschwindet das zweite Integral und wir erhalten

$$|g(\omega,\lambda)|^2 = c\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\operatorname{Vol}(U_n, d^\times x_p).$$

Im Fall (iii) ist $n < r$, beide Integranden sind trivial und es folgt mit

$$|g(\omega,\lambda)|^2 = c\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\operatorname{Vol}(U_r, d^\times x_p) - cp^{-1}\operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\operatorname{Vol}(U_{r-1}, d^\times x_p)$$

die Behauptung. $\square$

Korollar 4.20. *Seien ω und λ wie eben. Mit unserer Normierung der Maße dx_p und $d^\times x_p$ erhalten wir folgende Aussagen:*

(i) Wenn $n > r$, dann $g(\omega,\lambda) = 0$.

(ii) Wenn $n = r$, dann $|g(\omega, \lambda)|^2 = c^2 p^{-n}$.

(iii) Wenn $n < r$, dann $|g(\omega, \lambda)|^2 = c^2(p^{-n} - p^{-r})$.

Beweis. Wir müssen nur noch $\mathrm{Vol}(U_k, d^\times x_p)$ berechnen. Wegen $d^\times x_p = c\frac{dx_p}{|x|_p}$ und $|x|_p = 1$ für alle $x \in 1 + p^k\mathbb{Z}_p$, berechnen wir

$$\mathrm{Vol}(U_k, d^\times x_p) = c\int_{1+p^k\mathbb{Z}_p} \frac{dx_p}{|x|_p} = c\int_{1+p^k\mathbb{Z}_p} dx_p = cp^{-k}.$$

□

Zurück zur Berechnung der Zeta-Funktion. Der Führer des multiplikative Charakter μ ist p^n, während die additiven Charaktere $e_{p,k}(x) = e_p(p^k x)$ den Führer p^{-k} besitzt. Nach Korollar 4.20 (i) verschwinden in (6) fast alle Summanden und wir erhalten

$$Z_p(f_n, \chi) = \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks} g(\mu, e_{p,k}) = p^{ns} g(\mu, e_{p,-n}).$$

Die verbleibende Gauß-Summe konvergiert dann nach Aussage (ii) des gleichen Korollars.

Für die Berechnung der zweiten Zeta-Funktion halten wir fest zunächst, dass der Charakter $1/\mu = \overline{\mu}/(\mu\overline{\mu}) = \overline{\mu}$ den gleichen Führer wie μ hat.

$$Z_p(\hat{f}_n, \check{\chi}) = Z_p(\hat{f}_n, \overline{\mu}|\cdot|_p^{1-s}) = p^n \int_{1+p^n\mathbb{Z}_p} \overline{\mu}(\tilde{x})|x|_p^{1-s} d^\times x_p = p^n \int_{1+p^n\mathbb{Z}_p} d^\times x_p$$

Mit den Berechnungen aus Korollar 4.20 folgt dann

$$Z_p(\hat{f}_n, \check{\chi}) = p^n \int_{1+p^n\mathbb{Z}_p} d^\times x_p = c$$

und wir erhalten den offensichtlich holomorphen Faktor

$$\gamma(\mu|\cdot|_p^s) = \frac{c}{p^{ns} g(\mu, e_{p,-n})} = \frac{c\overline{g(\mu, e_{p,-n})}}{p^{ns}|g(\mu, e_{p,-n})|^2} = c^{-1} p^{n(1-s)} \overline{g(\mu, e_{p,-n})},$$

wobei wir im letzten Schritt Korollar 4.20 (ii) angewendet haben.

Zum Schluss möchten wir noch anmerken, dass der γ-Faktor im Allgemeinen von der getroffenen Normierung des Haar-Maßes dx_p und der Wahl des Standardcharakters e_p abhängig ist. Dies ist auch der Grund, warum sich unser zuletzt berechneter γ-Faktor um den Skalar $\overline{\mu(-1)}$ von dem aus Ramakrishnan und Valenza [7] unterscheidet. Sei e_p' der Standardcharakter nach Ramakrishnan und Valenzas Definition. Er steht durch $e_p'(x) = e_p(-x)$ in einem engen Zusammenhang mit unserem Standardcharakter e_p. Für die im γ-Faktor vorkommende Gauß-Summe folgt

$$g(\mu, e_{p,-n}) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \mu(x) e_{p,-n}(x) d^\times x_p = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \mu(-x) e_{p,-n}(-x) d^\times x_p = \mu(-1) g(\mu, e'_{p,-n})$$

und wir erkennen, woher der Unterschied zwischen beiden Ergebnissen kommt.

5 Das Eingeschränkte direkte Produkt abstrakter Gruppen

Ziel dieses Kapitels ist es, die nötigen Grundlagen zu schaffen, um alle bisherigen lokalen fourieranalytischen Berechnungen in einer einzigen globalen fourieranalytischen Berechnung zu vereinen. Wir werden erklären, warum der Ansatz über das direkte Produkt aller lokalen Körper schiefgeht und führen darauf das eingeschränkte direkte Produkt mit der dazugehörigen eingeschränkten Produkttopologie ein. Anschließend schauen wir uns die Besonderheiten der Quasi-Charaktere und der Integration auf diesem neuen Produkt an. Dabei halten wir uns an Ramakrishnans und Valenzas Definitionen in [7] Kapitel 5.1, die sich wiederum an Tates Doktorarbeit [9] orientieren. Für einen etwas alternativen Ansatz bei der Definition des eingeschränkten direkten Produkts verweisen wir auf Deitmar [2] Kapitel 5.1.

5.1 Definitionen

Wir beginnen mit einer (endlichen, abzählbaren, überabzählbaren) Indexmenge I und für alle $\nu \in I$ sei G_ν eine lokalkompakte Gruppe. Gesucht ist zunächst ein Objekt G, welches alle G_ν umfasst und auf dem wir wieder Integration und Fouriertransformation definieren können. G sollte also idealerweise eine lokalkompakte Gruppe sein. Ein erster Ansatz über das direkte Produkt der Gruppen G_ν wird allerdings, wie folgendes Lemma zeigt, im Allgemeinen scheitern.

Lemma 5.1. *Sei I eine Indexmenge und X_ν ein lokalkompakter Hausdorff-Raum für alle $\nu \in I$. Der Raum $X := \prod_{\nu\in I} X_\nu$ ist genau dann lokalkompakt, wenn fast alle X_ν kompakt sind.*

Bevor wir den Beweis nach Deitmar [2] Lemma 5.1.1 geben, noch eine kurze Beobachtung: Ist X kompakt, so ist auch jedes X_ν als Bild von X unter den stetigen Projektionen $\pi_\nu : X \to X_\nu$ kompakt.

Beweis. Sei $E \subseteq I$ eine endliche Teilmenge und für jedes $\nu \in E$ sei $U_\nu \in X_\nu$ eine offene Menge. Wir betrachten die offenen Rechtecke

$$\prod_{\nu\in E} U_\nu \times \prod_{\nu\in I\setminus E} X_\nu,$$

welche eine Basis der Produkttopologie bilden. Ist X lokalkompakt, so gibt es ein offenes Rechteck, dessen Abschluss kompakt ist. Folglich sind fast alle X_ν kompakt. Die Rückrichtung ist eine Folgerung des Satzes von Tychonoff (das direkte Produkt beliebiger Familien kompakter Mengen ist wieder kompakt) und Lemma 2.5 (das endliche direkte Produkt lokalkompakter Räume ist wieder lokalkompakt). $\square$

Das direkte Produkt lokalkompakter Gruppen liefert uns daher im Allgemeinen keine neue lokalkompakte Gruppe. Wir sehen aber, welche Einschränkung nötig ist, um doch eine lokalkompakte Gruppe zu erhalten.

Definition 5.2 (Eingeschränkte direkte Produkt)**.** Sei $I = \{\nu\}$ eine Indexmenge und für jedes $\nu \in I$ sei G_v eine lokalkompakte Gruppe. Sei weiter $I_\infty \subseteq I$ eine endliche Teilmenge von I und für jedes $\nu \notin I_\infty$ sei $H_\nu \leq G_\nu$ eine kompakte offene (und damit abgeschlossene) Untergruppe. Das *eingeschränkte direkte Produkt* der Gruppen G_ν bezüglich H_ν ist definiert als

$$G = \prod_{\nu \in I}{}' G_\nu := \{(x_\nu) : x_\nu \in G_\nu \text{ und } x_\nu \in H_\nu \text{ für alle bis auf endlich viele } \nu\}.$$

mit komponentenweiser Verknüpfung. Die Topologie auf G ist durch die *eingeschränkte Produktopologie* gegeben. Diese wird durch die Basis der *eingeschränkten offenen Rechtecke*

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} H_\nu$$

erzeugt, wobei $E \subset I$ eine endliche Teilmenge mit $I_\infty \subset E$ und $U_\nu \in G_\nu$ offen für alle $\nu \in E$ ist.

G ist damit (gruppentheoretisch) zwischen der direkten Summe und dem direkten Produkt der Komponenten G_ν anzusiedeln. Topologisch entspricht die eingeschränkte Produkttopologie jedoch nicht der vom direkten Produkt induzierten Teilraumtopologie. Sie ist im Allgemeinen feiner, weshalb die Projektionen

$$\begin{aligned} \pi_\nu : G &\to G_\nu \\ g &\mapsto g_\nu \end{aligned}$$

auf die ν-te Komponenten von G stetige Abbildungen sind.

Betrachten wir einige Untergruppen des eingeschränkten direkten Produkts. Die Gruppen G_ν können über die stetige Inklusion

$$\begin{aligned} \iota_\nu : G_\nu &\to G \\ g &\mapsto (\dots, 1, g, 1, \dots) \end{aligned}$$

auf natürliche Weise in G eingebettet werden und bilden damit eine Familie von abgeschlossenen Untergruppen. Sei S eine endliche Teilmenge von I, die I_∞ enthält. Wir definieren die offene Untergruppe

$$G_S := \prod_{\nu \in S} G_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus S} H_\nu$$

von G. Bezüglich der Produkttopologie sind diese G_S, nach Lemma 2.2 und Lemma 5.1, selbst wieder lokalkompakte Gruppen. Die Produkttopologie stimmt aber mit der durch G induzierten Teilraumtopologie überein und die G_S bilden eine Familie von lokalkompakten Untergruppen in G. Nun liegt jeder Punkt $x \in G$ in einer Untergruppe dieser Form und es folgt sofort, dass G selbst eine lokalkompakte Gruppe ist. Damit haben wir einen geeignet Kandidaten gefunden, der uns hoffentlich die globale Kalkulation ermöglicht.

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt den Quasi-Charakteren auf G widmen, richten wir unseren Blick noch auf die kompakten Mengen des eingeschränkten direkten Produkts.

Satz 5.3. *Eine Teilmenge Y des eingeschränkten direkten Produkts G hat genau dann kompakten Abschluss, wenn $Y \subseteq \prod_\nu K_\nu$ für eine Familie von kompakten Teilmengen $K_\nu \subseteq G_\nu$ und $K_\nu = H_\nu$ für fast alle Indizes $\nu \in I$.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, denn jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist wieder kompakt.

Für die Hinrichtung sei K der Abschluss von Y und damit kompakt in G. Da die Untergruppen G_S eine offene Überdeckung von G bilden, gibt es eine endliche Familie $\{G_{S_n}\}$, die K überdeckt. Wir können sogar noch mehr sagen. Da die die S_k endlich sind, ist $S = \bigcup_k S_k$ endlich, also wird K sogar von nur einem G_S überdeckt. Sei K_ν das kompakte Bild von K unter der natürlichen Projektion π_ν. Es ist $K_\nu \subseteq H_\nu$ für alle $\nu \notin S$, sodass wir hier K_ν durch die kompakten H_ν ersetzen können. Dann ist $Y \subseteq K \subseteq \prod_\nu K_\nu$ und wir sind fertig. □

Korollar 5.4. *Jede kompakte Teilmenge K von G liegt in einer der Untergruppen G_S.*

5.2 Quasi-Charaktere

Jede stetige Abbildung f auf G induziert durch die Inklusion $\iota_\nu : G_\nu \to G$ eine stetige Abbildung $f_\nu = f \circ \iota_\nu$ auf der Komponente G_ν. Analog ist f_ν ein Homomorphismus auf G_ν, wenn f selbst ein Homomorphismus auf G ist. Damit lassen sich die Charaktere und Quasi-Charaktere auf G wie folgt charakterisieren.

Lemma 5.5. *Sei $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ ein (Quasi-)Charakter. Dann sind alle $\chi_\nu : G_\nu \to \mathbb{C}^\times$ (Quasi-)Charaktere und wirken fast alle trivial auf H_ν. Folglich haben wir fast überall $\chi_\nu(g_\nu) = 1$ mit $g = (g_\nu) \in G$ und es gilt die Produktformel*

$$\chi(g) = \prod_\nu \chi_\nu(g_\nu).$$

Beweis. Das alle χ_ν (Quasi-)Charaktere sind folgt aus unseren Vorüberlegungen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass fast alle χ_ν jeweils trivial auf die Untergruppen H_ν wirken. Dazu wählen wir uns eine offene Umgebung U der 1 in $\mathbb{C}^\times$, die nur die triviale Untergruppe $\{1\}$ enthält. Aufgrund der Stetigkeit von χ finden wir eine offene Umgebung $V = \prod_\nu V_\nu$ des neutralen Elements 1 in G mit $V_\nu = H_\nu$ für alle ν außerhalb einer endlichen Indexmenge S und $\chi(V) \subseteq U$. Dann gilt aber

$$(\prod_{\nu \in S} 1) \times (\prod_{\nu \notin S} H_\nu) \subseteq V$$

und daher

$$\chi\Big((\prod_{\nu \in S} 1) \times (\prod_{\nu \notin S} H_\nu)\Big) \subseteq U.$$

Die linke Seite ist, als Bild einer Gruppe unter einem Homomorphismus, selbst wieder eine Gruppe. Nach unserer Wahl von U folgt also

$$\chi\Big((\prod_{\nu \in S} 1) \times (\prod_{\nu \notin S} H_\nu)\Big) = \{1\}$$

und daher $\chi_\nu(H_\nu) = \{1\}$ für alle $\nu \notin S$. Damit ist aber klar, dass für jedes $g \in G$ das Produkt $\prod_\nu \chi_\nu(g_\nu)$ endlich ist und, wegen $g = \prod_\nu \iota_\nu(g_\nu)$, genau $\chi(g)$ entspricht. □

Wir können das Lemma aber auch umdrehen und so Quasi-Charaktere auf G konstruieren.

Lemma 5.6. *Seien $\chi_\nu : G_\nu \to \mathbb{C}^\times$ (Quasi-)Charaktere und nehmen wir an, dass fast alle trivial auf H_ν wirken. Dann ist*

$$\chi(g) = \prod_\nu \chi_\nu(g_\nu)$$

ein (Quasi-)Charakter auf G.

Beweis. Das Produkt χ ist wohldefiniert, da fast alle $g_\nu \in H_\nu$, und bildet einen Gruppenhomomorphismus auf G. Es bleibt noch zu zeigen, dass χ stetig ist. Da G und $\mathbb{C}^\times$ topologische Gruppen sind, genügt es, sich offene Umgebungen der 1 anzuschauen. Sei daher U eine offene Umgebung der $1 \in \mathbb{C}^\times$. Sei S die endliche Menge aller Indizes ν, so dass χ_ν nicht trivial auf H_ν wirkt, und setze $n = |S|$. Wir finden eine weitere Umgebung W der 1 in $\mathbb{C}^\times$, so dass das Produkt von n beliebigen Elementen aus W wieder in U liegt. Aufgrund der Stetigkeit von χ_ν, finden wir für jedes $\nu \in S$ eine offene Umgebungen V_ν der $1 \in G_\nu$ mit $\chi_\nu(V_\nu) \subseteq W$. Für $\nu \notin S$ setzen wir $V_\nu = H_\nu$. Dann ist $V = \prod_\nu V_\nu$ eine offene Umgebung der $1 \in G$ und für jedes $g \in V$ ist $\chi(g)$ das endliche Produkt von n Faktoren aus W, also $\chi(g) \in V$. □

5.3 Integration

Wie wir gesehen haben ist $G = \prod'_{\nu \in I} G_\nu$ eine lokalkompakte Gruppe, besitzt also nach Satz 2.10 ein Haar-Maß. Dieses möchten, wir abhängig von den lokalen Maßen, normalisieren.

Satz 5.7. *Sei G das eingeschränkte direkte Produkt einer Familie lokalkompakter Gruppen G_ν bezüglich der kompakten Untergruppen $H_\nu \leq G_\nu$. Bezeichne dg_ν das Haar-Maß auf G_ν mit der Normalisierung*

$$\mathrm{Vol}(H_\nu, dg_\nu) = \int_{H_\nu} dg_\nu = 1$$

für fast alle $\nu \in I$. Dann gibt es ein eindeutiges Haar-Maß dg auf G, so dass für jede endliche Teilmenge $S \supseteq I_\infty$ der Indexmenge I die Einschränkung dg_S von dg auf G_S genau das (Radon-)Produktmaß ist.

Die im Satz angesprochene Normalisierung der dg_ν ist möglich, da die Untergruppen H_ν per Definition offen und kompakt sind und daher ein nicht verschwindendes, endliches Volumen besitzen.

Beweis. Sei S eine beliebige Indexmenge, die I_∞ enthält, und definiere dg_S als das Produktmaß $dg_S := (\prod_{\nu \in S} dg_\nu) \times dg^S$, wobei dg^S das Haar-Maß auf der kompakten Gruppe $G^S := \prod_{i \notin S} H_\nu$ mit $\mathrm{Vol}(G^S, dg^S) = 1$ bezeichnet. Für die Existenz von dg^S siehe zum Beispiel Folland [3] Satz 7.28. Als endliches Produkt von Haar-Maßen ist dg_S selbst wieder ein Haar-Maß und wir können dg auf G so normieren, dass dessen Einschränkung auf G_S mit dg_S übereinstimmt.

Damit haben wir eine Normierung, von der wir allerdings noch nicht wissen, ob sie unabhängig von unserer Wahl der Indexmenge S ist. Sei daher $T \supseteq S$ eine weitere endliche Indexmenge. Per Definition ist G_S eine Untergruppe von G_T. Wir wollen jetzt zeigen, dass das Maß dg_T mit dg_S auf G_S übereinstimmt. Zerlegt man $G^S = \prod_{\nu\in T\setminus S} H_\nu \times G^T$, so bildet $\prod_{\nu\in T\setminus S} dg_\nu \times dg^T$ ein Haar-Maß, welches der kompakten Gruppe G^S das oben geforderte Maß 1 zuweist. Aus der Eindeutigkeit des Haar-Maßes auf (lokal)kompakten Gruppen folgt somit die Gleichheit zu dg^S und daher

$$dg_S = \prod_{\nu\in S} dg_\nu \times dg^S = \prod_{\nu\in S} dg_\nu \times \prod_{\nu\in T\setminus S} dg_\nu \times dg^T = \prod_{\nu\in T} dg_\nu \times dg^T = dg_T$$

auf G_S. Sei S' eine weitere beliebige Indexmenge, die I_∞ enthält. Das normierte Maß dg wird auf $G_{S\cup S'}$ eingeschränkt zu einem Maß, welches ein konstantes Vielfaches von $dg_{S\cup S'}$ ist. Da aber $G_S \subseteq G_{S\cup S'}$, muss diese Konstante 1 sein, denn nach obigen Überlegungen ist die Einschränkung von $dg_{S\cup S'}$ auf G_S gerade dg_S. Umgekehrt ist aber $dg_{S'}$ die die Einschränkung von $dg_{S\cup S'}$ auf $G_{S'}$, also ist die Normalisierung unabhängig von der Wahl unserer Indexmenge S. □

Als nächstes lernen wir, wie man einfache Funktionen auf G bezüglich dg integriert.

Satz 5.8. *Sei G das eingeschränkte direkte Produkt mit dem induzierten Maß dg*

(i) Sei $f \in L(G)$ eine integrierbare Funktion auf G. Dann gilt

$$\int_G f(g)dg = \lim_S \int_{G_S} f(g_S)dg_S.$$

Nehmen wir nur an, dass f stetig ist, so gilt diese formale Identität immer noch, wenn wir unendliche Werte erlauben.

(ii) Sei S_0 ein beliebige endliche Indexmenge, die I_∞ und alle Indizes ν enthält, für die $\mathrm{Vol}(H_\nu, dg_\nu) \neq 1$ gilt. Für jeden Index ν sei f_ν eine stetige Funktion auf G_ν, so dass $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ für alle $\nu \notin S_0$. Wir definieren

$$f(g) = \prod_\nu f_\nu(g_\nu)$$

für alle $g \in G$. Dann ist f wohldefiniert und stetig auf G. Ist S eine beliebige endliche Indexmenge, die S_0 enthält, so haben wir

$$\int_{G_S} f(g_S)dg_S = \prod_{\nu\in S}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big). \tag{8}$$

Nimmt ferner das Produkt

$$\prod_{\nu\in I}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big) \tag{9}$$

sogar nur einen endlichen Wert an, dann ist f insbesondere integrierbar und es gilt

$$\int_G f(g)dg = \prod_{\nu\in I}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big).$$

Bevor wir zum Beweis kommen, halten wir zünachst fest, was überhaupt mit dem Ausdruck $\lim_S \phi(S) = \phi_0$ für eine Funktion ϕ auf den endlichen Indexmengen S, mit Werten in einem abgeschlossenen topologischen Raum, gemeint ist: Gegeben sei eine beliebige Umgebung V von ϕ_0, dann gibt es eine Indexmenge $S(V)$, sodass für alle weiteren Indexmengen $S \supseteq S(V)$ der Wert $\phi(S)$ in V liegt. Intuitiv ist also $\lim_S \phi(S)$ der Limes von $\phi(S)$ über größer und größere S.

Beweis. (i) Aus der Integrationstheorie (vgl. Folland [3] Korollar 7.13) ist bekannt, dass

$$\int_G f(g) = \sup_{K \text{ kompakt}} \left\{ \int_K f(g)dg \right\}.$$

Da aber jedes solche K nach Korollar 5.4 in einer der Untergruppen G_S liegt, folgt die Gleichung sofort.

(ii) Aus der Bedingung $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ folgt, dass das Produkt $f(g) = \prod_\nu f_\nu(g_\nu)$ für alle Elemente $g \in G$ endlich und die Funktion damit wohldefiniert ist. Um die Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir die offenen Umgebungen von g. Die offenen Rechtecke $\prod N_\nu \times \prod H_\nu$ bilden eine Umgebungsbasis, wobei in dem ersten endlichen Produkt die N_ν offene Umgebungen von g_ν sind. Dies bleibt auch eine Basis wenn wir zusätzlich noch verlangen, dass das erste Produkt zusätzlich auch alle Indizes enthält, für die f_ν nicht trivial auf H_ν wirkt. Auf diesen Rechtecken ist f lokal betrachtet dann nichts weiter als ein endliches Produkt stetiger Funktionen und daher selbst stetig.

Für den zweiten Teil der Behauptung sei S eine Indexmenge nach den Bedingungen von (ii). Unter der Annahme $\mathrm{Vol}(H_\nu, dg_\nu) = 1$, für alle $\nu \notin S$, haben wir auf G_S das durch dg induzierte Produktmaß $dg_S = (\prod_{s \in S} dg_\nu) \times dg^S$. Weiter hat f wegen $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ für $\nu \notin S$ dort die Form $f(g) = \prod_{\nu \in S} f_\nu(g_\nu)$. Es folgt:

$$\int_{G_S} f(g_S)dg_S = \prod_{\nu \in S} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu \right) \cdot \int_{G^S} dg^S = \prod_{\nu \in S} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu \right).$$

Nehmen wir nun an, dass das Produkt (9) endlich ist. Dann gilt nach Aussage (i) und Gleichung (8)

$$\prod_{\nu \in I} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu \right) = \lim_S \int_{G_S} f(g_S)dg_S = \int_G f(g)dg$$

und der Rest der Behauptung folgt. $\square$

6 Adele und Idele

Für die lokalen Funktionalgleichungen haben wir im wesentlichen zwei Konzepte benötigt. Zum einen die Fouriertransformation: ein Integral über die additive Gruppe, welches als Funktion auf den additiven Charakteren definiert war. Zum anderen die Zeta-Funktion, gewissermaßen das multiplikative Gegenstück zur Fouriertransformation: eine Integral über der multiplikativen Gruppe, definiert als Funktion auf den multiplikativen Quasi-Charakteren. Dieses Zusammenspiel von additiven und multiplikativen Strukturen ziehen wir in den nächsten zwei Kapiteln in die globale Welt des eingeschränkten direkten Produkts und beginnen nach Deitmar [2] Kapitel 5 mit der Betrachtung zweier lokalkompakter Gruppen: die additive Gruppe der Adele und die multiplikative Gruppe der Idele.

6.1 Die Gruppe der Adele

Wir definieren die *Adelegruppe* $\mathbb{A}$ von $\mathbb{Q}$ als das eingeschränkte direkte Produkt über alle lokalkompakten Gruppen $\mathbb{Q}_p^+$ bezüglich der Untergruppen $\mathbb{Z}_p$, d.h.

$$\mathbb{A} \coloneqq \prod_{p\leq\infty}{}' \mathbb{Q}_p^+ = \{(x_p) : x_p \in \mathbb{Q}_p^+ \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ für fast alle } p < \infty\},$$

und nennen ein beliebiges Element $x \in \mathbb{A}$ dieser Gruppe ein *Adel.* Es gibt eine algebraische (aber nicht topologische) Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ x &\longmapsto (x, x, x, \dots) \end{aligned}$$

der rationalen Zahlen in die Adele. Diese ist tatsächlich wohldefiniert, denn, für fast alle Stellen $p < \infty$, ist $|x|_p = 1$ und damit $x \in \mathbb{Z}_p$. Es wird also keine Verwirrung stiften, wenn wir (algebraisch) $\mathbb{Q}$ mit dieser Einbettung identifizieren. Wie sieht dann aber die Topologie aus?

Satz 6.1. *(i) $\mathbb{Q}$ liegt diskret in $\mathbb{A}$.* *(ii) $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist kompakt.*

Beweis. Für (i) betrachten wir die offene Nullumgebung

$$U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p.$$

Ist $r \in \mathbb{Q} \cap U$, so gilt $|r|_p \leq 1$ für alle $p < \infty$, also $r \in \mathbb{Z}$. Nun ist aber $|r|_\infty < \frac{1}{2}$ und damit muss schon $r = 0$ gelten. Für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{Q}$ erhalten wir mit $x + U$ eine entsprechende offene Umgebung von x.

Für (ii) zeigen wir, dass das Bild der Menge $K \coloneqq [0, 1] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ unter der Projektion $\rho : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ schon ganz $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist. Dann ist $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ als stetiges Bild des Kompaktums K selber kompakt. Sei $x \in \mathbb{A}$ beliebig und S die endliche Stellenmenge $\{p : x_p \notin \mathbb{Z}_p\}$. Wählen wir ein $p \in S$, $p < \infty$ und schreiben

$$x_p = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k.$$

Dann ist

$$x_p - \underbrace{\sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k}_{=:r\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}_p$$

und für jede weitere endliche Stelle $q \neq p$ gilt

$$|r|_q = \left|\sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k\right|_q \leq \max\left\{\left|a_k p^k\right|_q\right\} \leq 1,$$

also ist $r \in \mathbb{Z}_q$. Ersetzen wir x durch $x-r$, so reduziert sich die Stellenmenge S zu $S\setminus\{p\}$. Dieses Argument setzen wir induktiv bis $S = \{\infty\}$ fort. Damit erhalten wir ein x, welches sich nur um eine Zahl aus $\mathbb{Q}$ von dem ursprünglichen Adel unterscheidet und selbst in $\mathbb{R} \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ liegt. Nun können wir aber noch x modulo $\mathbb{Z}$ nach $[0,1] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ verschieben und sind fertig. □

Wir können die Integration auf $\mathbb{A}$ im Kontext eingeschränkter direkter Produkte betrachten. Unter einer *einfachen Funktion* auf $\mathbb{A}$ wollen wir eine Funktion der Form $f = \prod_{p\leq\infty} f_p$ mit $f_p = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle Sellen p verstehen. Solche Funktionen können nach Satz 5.8 besonders leicht integriert werden.

Satz 6.2. *Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine einfache integrierbare Funktion auf den Adelen. Es gilt die Produktformel*

$$\int_{\mathbb{A}} f(x)dx = \prod_{p\leq\infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p)dx_p.$$

Beweis. Dies ist im Wesentlichen eine direkte Folgerung aus Satz 5.8 (ii). □

Die Gruppe der Adele erhält über die komponentenweise Multiplikation eine Ringstruktur. Diese ist nicht nullteilerfrei, denn zum Beispiel gilt für zwei verschiedene Stellen $p, q \leq \infty$, dass $\iota_p(1) \cdot \iota_q(1) = 0$. Zudem ist in $\mathbb{A}^\times$ die Inversenbildung bezüglich der Teilraumtopologie nicht stetig, folglich bildet $\mathbb{A}^\times$ bezüglich der Multiplikation keine topologische Gruppe. Um dieses Problem zu umgehen wiederholen wir in der nächsten Untersektion die Konstruktion, jedoch diesmal mit den multiplikativen Gruppen $\mathbb{Q}_p^\times$.

6.2 Die Gruppe der Idele

Analog zu den Adelen definieren wir die *Idelegruppe* $\mathbb{I}$ von $\mathbb{Q}$ als das eingeschränkte direkte Produkt über alle lokalkompakten Gruppen $\mathbb{Q}_p^\times$ bezüglich der Untergruppen $\mathbb{Z}_p^\times$, d.h.

$$\mathbb{I} = \prod_{p\leq\infty}{}' \mathbb{Q}_p^\times = \{(x_p) : x_p \in \mathbb{Q}_p^\times \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ für fast alle } p < \infty\}.$$

Wir nennen ein Element $x \in \mathbb{I}$ dieser Gruppe ein *Idel*. Wieder gibt es die algebraische Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^\times &\longrightarrow \mathbb{I} \\ x &\longmapsto (x, x, x, \dots) \end{aligned}$$

der rationalen Einheiten in die Idele, denn wie wir bereits bei den Adelen festgestellt haben, ist für fast jede Stelle $|x|_p = 1$ und somit $x \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Wir haben schon mehrmals die lokalen Beträge auf dem eigneschränkten direkten Produkt betrachtet. Die Definition der Idele erlaubt es uns nun, diese miteinander zu einem globalen Absolutbetrag zu multiplizieren.

Definition 6.3. Wir definieren den *adelischen (globalen) Absolutbetrag* $|\cdot|_{\mathbb{A}} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}_+^\times$ durch das wohldefinierte Produkt

$$|x|_{\mathbb{A}} = \prod_{p \leq \infty} |x_p|_p$$

Der Begriff „Betrag“ sollte hier vorsichtig behandelt werden, denn streng genommen ist $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ nicht auf einem Körper definiert. Wir wollen diese Unzulänglichkeit jedoch verzeihen, denn es lassen sich, mit Hilfe dieser Abbildung, Aussagen aus dem Lokalen in das Globale übertragen.

Lemma 6.4. *Für das additive Haar-Maß dx auf $\mathbb{A}$ und jedes Idel $\lambda \in \mathbb{I}$ gilt*

$$d(\lambda x) = |\lambda|_{\mathbb{A}} \cdot dx$$

Beweis. Der Beweis funktioniert analog zu und mit Satz 4.2. Wir betrachten dazu wieder die kompakte Menge $K = [0, 1] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$. Die Menge $\lambda K = [0, \lambda_\infty] \times \prod_{p<\infty} \lambda_p \mathbb{Z}_p$ ist wieder ein Kompaktum. Insbesondere sind fast alle Komponenten gleich $\mathbb{Z}_p$ und wir rechnen nach Satz 6.2

$$\int_{\lambda K} dx = \int_{[0,\lambda_\infty]} dx_\infty \cdot \prod_{p<\infty} \int_{\lambda_p \mathbb{Z}_p} dx_p = |\lambda_\infty|_\infty \int_{[0,1]} dx_\infty \cdot \prod_{p<\infty} |\lambda_p|_p \int_{\mathbb{Z}_p} dx_p = |\lambda|_{\mathbb{A}} \int_K dx,$$

wobei wir in der dritten Gleichung Satz 4.2 benutzt haben. □

Halten wir eine weitere wichtige Aussage über diesen Betrag fest.

Satz 6.5 (Artins Produktformel)**.** *Für alle $x \in \mathbb{Q}^\times$ gilt $|x|_{\mathbb{A}} = 1$.*

Beweis. Aufgrund der Multiplikativität von $|\cdot|_{\mathbb{A}}$, reicht es die Aussage für Primzahlen q zu zeigen. q hat aber an nur zwei Stellen nichtrivialen Betrag und daher

$$|q|_{\mathbb{A}} = |q|_\infty \cdot |q|_q = q \cdot q^{-1} = 1.$$

□

Analog zu $\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$, können wir auch auf den Idelen die Untergruppe

$$\mathbb{I}^1 = \{x \in \mathbb{I} : |x|_{\mathbb{A}} = 1\}$$

der *Betrag-Eins Idele* betrachten. Die obige Produktformel sagt uns gerade, dass $\mathbb{Q}^\times$ eine Teilmenge von $\mathbb{I}^1$ ist. Damit können wir folgenden Satz beweisen.

Satz 6.6.

(i) $\mathbb{Q}^\times$ *liegt diskret in* $\mathbb{I}$.

(ii) $F := \{1\} \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times$ *ist ein Fundamentalbereich der Gruppenwirkung von* $\mathbb{Q}^\times$ *auf* $\mathbb{I}^1$*. Genauer haben wir einen Isomorphismus topologischer Gruppen* $F \cong \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$*.*

(iii) $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$ *ist kompakt.*

(iv) Der adelische Betrag $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ *induziert einen Isomorphismus topologischer Gruppen* $\mathbb{I} \cong \mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$*.*

Beweis. (i) Wir wählen ein beliebiges $0 < \varepsilon < 1$ und setzen

$$U := (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times.$$

Dann ist U offensichtlich eine offene Umgebung der 1 in $\mathbb{I}$. Wir wollen zeigen, dass U keine weitere rationale Zahl enthält. Sei dazu $r \in \mathbb{Q}^\times \cap \mathbb{I}$. Das bedeutet, dass $r \in \mathbb{Z}_p^\times$, also $|r|_p = 1$, für alle Primzahlen $p < \infty$. Dann muss r aber schon eine ganze Zahl sein. Für diese gilt zudem $r \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Folglich ist $r = 1$.

(ii) Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta: \quad F &\longrightarrow \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

und behaupten, dass dies ein Isomorphismus topologischer Gruppen ist. Zunächst sehen wir, dass η, als Komposition von Inklusion in $\mathbb{I}^1$ und Projektion in den Quotienten, wieder ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist. Zudem können wir direkt eine Umkehrabbildung angeben, durch

$$\begin{aligned} \eta^{-1}: \quad \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times &\longrightarrow F \\ [x] &\longmapsto x_\infty^{-1} \cdot x \end{aligned}$$

Wir vergewissern uns, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Zum einen folgt aus $x \in \mathbb{I}^1$ schon, dass $x_\infty \in \mathbb{Q}^\times$, denn $|x_\infty|_\infty = (\prod_{p<\infty} |x_p|_p)^{-1} \in \mathbb{Q}^\times$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von x_∞ und $|x|_{\mathbb{A}} = 1$, muss dann schon $|x_p/x_\infty|_p = 1$ folgen. Also kann uns nur noch die Wahl des Repräsentanten Probleme machen. Wir stellen aber erfreut fest, dass $rx = (rx_p)$ auf $((rx_\infty)^{-1} r x_p) = (x_\infty^{-1} x_p)$ abgebildet wird für beliebige $r \in \mathbb{Q}^\times$. Des weiteren ist sie stetig, denn sie lässt sich schreiben als $\eta^{-1}(x) = \iota(\pi_\infty(x))^{-1} \cdot x$. Damit ist η also ein topologischer Isomorphismus.

(iii) Dies ist eine einfache Folgerung aus (ii), da F als Produkt kompakter Untergruppen wieder kompakt ist.

(iv) Der Isomorphismus von $\mathbb{I}$ nach $\mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$ wird durch die Abbildung $x \mapsto ((\tilde{x}_p), |x|_{\mathbb{A}})$ definiert, wobei

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} x_p & \text{falls } p < \infty \\ \frac{x_\infty}{|x|_{\mathbb{A}}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um zu sehen, dass die Abbildung ein topologischer Gruppenhomomorphismus ist, schreiben* wir sie als $x \mapsto (\iota_\infty(|x|_{\mathbb{A}})^{-1} \cdot x, |x|_{\mathbb{A}})$. Die Umkehrabbildung ist dann gegeben durch $(x,y) \mapsto \iota_\infty(y) \cdot x$, was wiederum stetig ist und somit haben wir einen Isomorphismus topologischer Gruppen. □

*Achtung: Auf den Adelen gilt $\iota_p(x) = (\dots, 0, x, 0, \dots)$.

7 Tates Beweis der Funktionalgleichung

Wir haben jetzt alle Werkzeuge zusammen, um die Ideen aus Kapitel 4 und aus Riemanns Beweis auf die Adele zu übertragen. Dazu führen wir zunächst die Fouriertransformation auf den Adelen ein und beweisen daraufhin das Äquivalent zu Riemanns Thetaformel. Wir weichen in Abschnitt 5.2 etwas von Tates Doktorarbeit ab, um eine leichter veständliche Argumentation nach Deitmar [2] zu geben, die sich zwar nicht so einfach auf den Allgemeineren Fall übertragen lässt, jedoch weitaus weniger Vorwissen benötigt. Anschließend werden wir den vollen Beweis der globalen Funktionalgleichung, wie er in Tate [9] und Ramakrishnan und Valenza [7] zu finden ist, geben und zeigen zum Schluss des Kapitels und dieser Arbeit, wie dieses Resultat zur Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion führt.

7.1 Globale Fourieranalysis

Wir spiegeln Abschnitt 4.2 über die lokale Fourieranalysis und beginnen mit der Definition eines Standardcharakters auf $\mathbb{A}$.

Definition 7.1. Der *globale Standardcharakter* $e : \mathbb{A} \to S^1$ ist, durch

$$e(x) = \prod_{p \leq \infty} e_p(x_p),$$

als Produkt aller lokalen Standardcharaktere $e_p : \mathbb{Q}_p \to S^1$ definiert.

Für alle archimedischen Stellen wirkt e_p trivial auf $\mathbb{Z}_p$ und daher folgt direkt aus Lemma 5.6, dass diese Abbildung wohldefiniert und ebenfalls ein Charakter ist.

Satz 7.2. *Der Standardcharakter $e : \mathbb{A} \to S^1$ wirkt trivial auf $\mathbb{Q}$.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir noch ein kleines Lemma aus der Zahlentheorie.

Lemma 7.3. *Jede rationale Zahl kann als endliche Summe von Zahlen der Form $\pm\frac{1}{p^m}$ geschrieben werden.*

Beweis. Für die Zahl 0 entspricht dies der leeren Summe und gilt trivialerweise. Sei also $r = \pm a/b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ eine rationale Einheit. Wir schreiben r zunächst als Summe von a Kopien von $\mathrm{sgn}(r)/b$. Daher reicht es also, rationale Zahlen der Form $1/b$ zu betrachten. Sei $b = \prod_{k=1}^{n} p_k^{m_k}$ die Primfaktorzerlegung von b. Dann gibt es eine Bezout-Darstellung $1 = up_1^{m_1} + vp_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$ mit ganzen Zahlen u und v. Es folgt

$$\frac{1}{b} = \frac{up_1^{m_1} + vp_2^{m_2} \dots p^{m_n}}{p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}} = \frac{u}{p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}} + \frac{v}{p_1^{m_1}}.$$

Induktiv erhalten wir somit ganze Zahlen $u_1, \dots, u_n$, so dass

$$\frac{1}{b} = \frac{u_1}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{u_n}{p_n^{m_n}}.$$

Mit dem gleichen Argument, wie am Anfang des Beweises, ist jeder dieser Summanden wieder eine endliche Summe von $|u_k|$ Kopien von $\pm 1/p_k^{m_k}$ und es folgt das Lemma. ☐

Kommen wir damit zum eigentlichen Beweis des Satzes.

Beweis von Satz 7.2. Da es sich bei dem Standardcharakter um einen additiven Charakter handelt, reicht es nach obigen Lemma sich auf rationale Zahlen der Form $1/p^m$ zu beschränken. Für jede endliche Stelle $q \neq p$ ist aber $1/p^m \in \mathbb{Z}_q$, also $e_q(1/p^m) = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} e\left(\frac{1}{p^m}\right) = \prod_{q \leq \infty} e_q\left(\frac{1}{p^m}\right) &= e_\infty\left(\frac{1}{p^m}\right) e_p\left(\frac{1}{p^m}\right) \\ &= \exp(2\pi i p^{-m}) \exp(-2\pi i p^{-m}) = 1 \end{aligned}$$

□

Wir wollen wieder den Bezug zur abstrakten harmonischen Analysis herstellen und beginnen damit, das globale Äquivalent von Lemma 4.6 zu beweisen.

Lemma 7.4. *Ist $\psi : \mathbb{A} \to S^1$ ein Charakter, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Adel $a \in \mathbb{A}$ mit $\psi(x) = e(ax)$.*

Beweis. Den Großteil der Arbeit haben wir bereits in Lemma 5.5 erledigt. Demnach ist $\psi(x) = \prod_{p \leq \infty} \psi_p(x_p)$, wobei die $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to S^1$ lokale Charaktere sind und fast alle ψ_p trivial auf $\mathbb{Z}_p$ wirken. Nach Lemma 4.6 gilt $\psi_p(x_p) = e_p(a_p x_p)$ für eindeutige $a_p \in \mathbb{Q}_p$ und nach Korollar 4.7 liegen schon fast alle a_p in $\mathbb{Z}_p$. Folglich ist $a = (a_p)$ ein eindeutig bestimmtes Adel und es gilt

$$\psi(x) = \prod_{p \leq \infty} \psi_p(x_p) = \prod_{p \leq \infty} e_p(a_p x_p) = e(ax).$$

□

Damit kommen wir zur zentralen Definition dieses Abschnitts.

Definition 7.5 (Globale Fouriertransformation)**.** Sei $f \in L^1(\mathbb{A})$. Wir definieren die *adelische* oder auch *globale Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ von f als die Abbildung

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{A}} f(x) e(-\xi x) dx$$

für alle $\xi \in \mathbb{A}$.

Lokal haben wir gesehen, dass sich die Schwartz-Bruhat Funktionen $S(\mathbb{Q}_p)$ besonders für die Fourieranalysis geeignet haben. Was ist ihr Äquivalent im Globalen? Wir definieren zunächst die *einfachen Schwartz-Bruhat Funktion* $f = \prod_{p \leq \infty} f_p$, als Produkte lokaler Schwartz-Bruhat Funktionen f_p, wobei für fast alle Stellen $p < \infty$ dieser Faktor gleich der charakteristischen Funktion von $\mathbb{Z}_p$ ist. Damit sind sie insbesondere im Sinne von Kapitel 6 einfache Funktionen auf $\mathbb{A}$ und können, nach Satz 6.2, vergleichsweise schmerzlos integriert werden. Mit der Charakterisierung der lokalen Schwartz-Bruhat Funktionen in Lemma 4.11 über allen endlichen Stellen können die einfachen Funktionen auch geschrieben werden als

$$f(x) = f_\infty(x) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p} \tag{10}$$

mit $a_p \in \mathbb{Z}_p$ und $k_p = 0$ für fast alle Stellen. Die *adelischen Schwartz-Bruhat Funktionen* sind endliche Linearkombinationen einfacher Schwartz-Bruhat Funktionen über $\mathbb{C}$ und wir notieren sie mit $S(\mathbb{A})$. Es lässt sich erneut die Umkehrformel beweisen.

Satz 7.6. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ ist die Fouriertransformation wohldefiniert und liegt wieder in $S(\mathbb{A})$. Insbesondere gilt die Umkehrformel*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

für alle Adele $x \in \mathbb{A}$.

Beweis. Für den Beweis reicht, es nur einfache f zu betrachten. Mit Satz 6.2, über die Integration einfacher Funktionen auf den Adelen, folgt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{A}} f(x)e(-\xi x)dx = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p)e_p(-\xi_p x_p)dx_p = \prod_{p \leq \infty} \hat{f}_p(\xi_p).$$

Die Umkehrformel ergibt sich damit direkt aus den lokalen Umkehrformeln. □

Mit der Argumentation am Ende dieses Beweises und Lemma 4.9 folgt auch ganz leicht:

Korollar 7.7. *Sei $f \in S^1(\mathbb{A})$.*

(i) Ist $g(x) = f(x)e(ax)$ mit $a \in \mathbb{A}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x-a)$.

(ii) Ist $g(x) = f(x-a)$ mit $a \in \mathbb{A}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x-a)e(-ax)$.

(iii) Ist $g(x) = f(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{I}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \frac{1}{|\lambda|_{\mathbb{A}}}\hat{f}(\frac{x}{\lambda})$.

7.2 Adelische Poisson Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

Werfen wir anfangs einen Blick auf die einfachen Schwartz-Bruhat Funkionen.

Lemma 7.8. *Jede einfache adelische Schwartz-Bruhat Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ hat die Form*

$$f = f_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p},$$

wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $k_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle Stellen p verschwindet.

Im Gegensatz zur Darstellung der einfachen Schwartz-Bruhat Funktionen in (10), ist hier der Faktor a unabhängig von der jeweiligen Stelle.

Beweis. Für fast alle Stellen p ist $a \in \mathbb{Z}_p$ und $k_p = 0$, d.h. $\mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ fast überall. Damit ist klar, dass Funktionen dieser Form in $S(\mathbb{A})$ liegen.

Sei $f = \prod_{p \leq \infty} f_p \in S(\mathbb{A})$ eine einfache Schwartz-Bruhat Funktion und S die Menge der Stellen mit $f_p \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Für alle $p \in S$ gilt $f_p = \mathbb{1}_{a_p+p^{k_p}\mathbb{Z}_p}$ für ein $a_p \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Seien wir vorerst optimistisch und nehmen an, dass $k_p > 0$ und die a_p bereits ganze Zahlen sind. Wir suchen eine ganze Zahl a, die $a \equiv a_p \pmod{p^{k_p}}$ für alle $p \in S$ erfüllt. Dies liefert uns aber gerade der chinesische Restsatz. Damit ist $a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p = a + p^{k_p}\mathbb{Z}_p$ und wir wären fertig.

Bleiben wir weiter optimistisch und versuchen die Funktionen für den allgemeinen Fall geeignet umzuformen. Sei dazu N der Hauptnenner der rationalen Zahlen

$a_p \in \mathbb{Q}$, $p \in S$ und sei $M = \prod_{p \in S} p^{|k_p|+1}$. Dann sind N und M natürliche Zahlen und wir betrachten die Funktion

$$f\left((NM)^{-1}x\right) = \prod_{p \le \infty} f_p\left((NM)^{-1}x_p\right).$$

An fast alle Stellen ist $f_p\left((NM)^{-1}x_p\right)$ wieder gleich $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$, da $(NM)^{-1} \in \mathbb{Z}_p^\times$ fast überall. Dagegen entspricht f_p an den restlichen endlichen Stellen der charakteristischen Funktion von $NM(a_p + p_p^k\mathbb{Z}_p)$. Hier müssen wir nur etwas aufpassen, da dies nicht mehr nur die Stellen in S betrifft. Mit den bekannten Eigenschaften der p-adischen Zahlen erhalten wir dort $NM(a_p + p_p^k\mathbb{Z}_p) = a'_p + p^{k'_p}\mathbb{Z}_p$ mit $a'_p \in \mathbb{Z}$ und $k'_p > 0$. Somit finden wir ein $a' \in \mathbb{Z}$ mit $NM(a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p) = a' + p^{k'_p}\mathbb{Z}_p$. Die Behauptung folgt, wenn wir $a \coloneqq (NM)^{-1}a'$ setzen. $\square$

Mit Hilfe dieser schönen Form der globalen Schwartz-Bruhat Funktionen können wir die Poisson Summenformel auf den Adelen beweisen.

Satz 7.9 (Poisson Summenformel). *Sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann konvergieren beide folgende Summen absolut und wir haben die Gleichung*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \tag{11}$$

Der folgende Beweis orientiert sich an Deitmar [2] Satz 5.4.9 und wurde etwas auf unsere Definition der Adele angepasst.

Beweis. Es genügt wieder die Aussage für einfache Schwartz-Bruhat Funktionen $f \in S(\mathbb{A})$ zu zeigen. Nach vorherigem Lemma 7.8 haben diese gerade die Form

$$f = f_\infty \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{a + p^{k_p}\mathbb{Z}_p} \tag{12}$$

für ein $a \in \mathbb{Q}$ und $k_p = 0$ für fast alle Stellen p. Mit $N \coloneqq \prod_{p<\infty} p^{-k_p} \in \mathbb{Q}$ haben wir dann

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma - a) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(N(\gamma - a)) \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \left[f_\infty(N(\gamma - a)) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{a + p^{k_p}\mathbb{Z}_p}(N(\gamma - a)) \right] \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \left[f_\infty(N(\gamma - a)) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\gamma) \right] = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} f_\infty(N(\gamma - a)).
\end{aligned}$$

Die Summe am Ende konvergiert absolut, da $f_\infty \in S(\mathbb{R})$.

Mit der Konvergenz aus dem Weg, beschäftigen wir uns mit der Summenformel. Dabei werden sich die obigen Umformungen als sehr hilfreich erweisen. Erinnern wir uns zunächst an die Operatoren aus dem Beweis der lokalen Umkehrformeln in Satz 4.12. Dort haben wir die Notation $\Omega_a f(x) = e(ax)f(x)$, $L_a f(x) = f(x - a)$ und $M_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ eingeführt. Mit ihnen können wir die Funktion (12) schreiben als

$$f = L_a M_N \left(\left(M_{1/N} L_{-a} f_\infty \right) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} \right).$$

Damit eröffnet sich folgende Beweisidee: Wir zeigen zuerst, dass Gleichung (11) (falls sie denn tatsächlich gilt) stabil unter den Operatoren L_a und M_λ ist. Anschließend zeigen wir sie für den einfacheren Fall $f = f_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Beides kombiniert ergibt dann den Beweis.

Gelte also $\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)$ und sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann haben wir

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} L_a f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma - a) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma).$$

Da der Standardcharakter e allerdings trivial auf $\mathbb{Q}$ wirkt, ist dies gleich

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} e(-a\gamma)\hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \Omega_{-a}\hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} (L_a f)\hat{\ }(\gamma).$$

Für den zweiten Operator erinnern wir uns an Artins Produktformel in Satz 6.5. Es ist $|\lambda|_{\mathbb{A}} = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$ und folglich

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} M_\lambda f(\gamma) &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\lambda\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\lambda\gamma)\\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \frac{1}{|\lambda|_{\mathbb{A}}}\hat{f}(\lambda^{-1}\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} (M_\lambda f)\hat{\ }(\gamma).\end{aligned}$$

Damit haben wir auch schon den ersten Teil der Beweisidee verwirklicht.

Der zweite Teil macht weniger Arbeit. Für $f = f_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ wissen wir, aus den lokalen Berechnungen und Lemma 6.2, dass $\hat{f} = \hat{f}_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Zum anderen ist

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f_\infty(\gamma) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f_\infty(\gamma),$$

denn das Produkt über alle endlichen Stellen verschwindet genau dann nicht, wenn γ eine ganze Zahl ist. Wir müssen also nur $\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f_\infty(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \hat{f}_\infty(\gamma)$ zeigen. Aber das sagt uns gerade die klassische Poisson Summenformel aus Satz 1.2. □

Ausgerüstet mit dieser Summenformel können wir jetzt Tates Variante der Thetaformel beweisen.

Satz 7.10 (Riemann-Roch)**.** *Sei $x \in \mathbb{I}$ ein Idel und $f \in S(\mathbb{A})$ eine Schwartz-Bruhat Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma x) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma x^{-1}).$$

Insbesondere konvergieren die Summen absolut.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{I}$ beliebig aber fest. Für beliebige $y \in \mathbb{A}$ definieren wir die Funktion $h(y) \coloneqq f(yx)$. Diese ist dann wieder in $S(\mathbb{A})$, erfüllt damit die Poisson Summenformel

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} h(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{h}(\gamma)$$

und beide Summen konvergieren absolut. Nach Korollar 7.7 gilt weiter

$$\hat{h}(\gamma) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}}\hat{f}(\gamma x^{-1}).$$

Damit sind wir auch schon fertig. □

Für eine Interpretation dieses Resultats, die einen Bezug zum namensgebenden Satz von Riemann-Roch in der algebraischen Geometrie herstellt, verweisen wir auf Ramakrishnan und Valenza [7] Kapitel 7.2.

7.3 Die globale Funktionalgleichung

In Satz 6.6 haben wir gesehen, dass sich die Idele $\mathbb{I}$ als direktes Produkt $\mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$ schreiben lassen. Um auf $\mathbb{I}^1$ ein (multiplikatives) Haar-Maß d^*b zu fixieren, nehmen wir auf $\mathbb{R}_+^\times$ das Maß $\frac{dt}{t}$ und verlangen $d^\times x = d^*b \times \frac{dt}{t}$. Für die Berechnungen haben wir dann, ganz im Sinne von Fubini,

$$\int_{\mathbb{I}} f(x) d^\times x = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{I}^1} f(t \cdot b) d^*b \right] \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{I}^1} \left[\int_0^\infty f(t \cdot b) \frac{dt}{t} \right] d^*b.$$

Die Notation $t{\cdot}b$ ist dabei als Multiplikation $\iota_\infty(t){\cdot}b$ zu verstehen. Es folgt sofort, dass $|t \cdot b|_{\mathbb{A}} = |t|_\infty$ gilt. Weiter haben wir in Satz 6.6 den kompakten Fundamentalbereich $F = \{1\} \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times$, der Wirkung von $\mathbb{Q}^\times$ auf $\mathbb{I}^1$ kennengelernt. Das Volumen von F bezüglich d^*b wird für unsere Berechnung eine Rolle spielen. Berechnen wir es schnell. Mit der Normierung des Maßes $d^\times x$ erhalten wir

$$1 = \mathrm{Vol}\left((1, e) \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times, d^\times x \right) = \mathrm{Vol}\,(F, d^*b) \cdot \mathrm{Vol}\left((1, e), \frac{dt}{t} \right) = \mathrm{Vol}(F, d^*b).$$

Bevor wir jetzt die die globalen Zeta-Funktionen einführen, benötigen wir noch geeignete multiplikative Charaktere. Es wird sich als sinnvoll erweisen, die *Idelklassencharaktere* zu betrachten. Dies sind, wie der Name trügerisch verschweigt, Quasi-Charaktere auf $\mathbb{I}$, die trivial auf die Untergruppe $\mathbb{Q}^\times$ wirken*. Aus dieser Definition wird klar, dass die Idelkassencharaktere χ das Vorzeichen nicht beachten. Es gilt nämlich $\chi(-x) = \chi(-1)\chi(x) = \chi(x)$ für jedes Idel $x \in I$. Wir können aber noch mehr über sie aussagen.

Satz 7.11. *Jeder Idelklassencharakter χ hat die Form*

$$\chi(x) = \mu(\tilde{x}) |x|_{\mathbb{A}}^s,$$

wobei μ ein Charakter auf $\mathbb{I}^1$ und $\tilde{\cdot} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}^1$ der stetige Homomorphismus nach Satz 6.6 (iv) ist.

Beweis. Wir schreiben wie oben $x \in \mathbb{I}$ als eindeutiges Produkt $t{\cdot}b$ mit $t = |x|_{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}_+^\times$ und $b \in \mathbb{I}^1$. Dies ergibt die Zerlegung $\chi(x) = \chi_\infty(t) \cdot \chi(b)$. Da χ trivial auf $\mathbb{Q}^\times$ wirkt, induziert er einen Charakter auf der kompakten Gruppe $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$, den wir wieder mit χ bezeichnen. Folglich ist (mit etwas Missbrauch der Notation) $\mu := \chi|_{\mathbb{I}^1} = \chi|_{\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times}$, nach Lemma 2.14, ein Charakter auf $\mathbb{I}^1$. Weiter ist, nach Lemma 4.14, $\chi_\infty(t) = |t|_\infty^s$ und wegen $|t|_\infty = |t|_{\mathbb{A}}$ folgt die Behauptung. □

Auch in dieser Darstellung ist im Allgemeinen nur der *Exponenten* $\sigma = \Re(s)$ des Quasi-Charakters $\chi = \mu |\cdot|_{\mathbb{A}}^s$ eindeutig. Ein Idelklassencharakter soll *unverzweigt* heißen, wenn er trivial auf $\mathbb{I}^1$ wirkt.

Korollar 7.12. *Jeder Idelklassencharakter χ ist genau dann unverzweigt, wenn er trivial auf F ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times \cong F$. □

*Der Name erklärt sich aus der Tatsache, dass sie gerade Quasi-Charaktere auf der sogenannten *Idelklassengruppe* $\mathbb{I}/\mathbb{Q}^\times$ sind. (vgl. Neukirch [6] S.375)

Nach obigen Satz hängt die Verzweigtheit also nur von dem Charakter μ ab.

Lemma 7.13. *Jeder unverzweigte Idelklassencharakter χ hat die Form $\chi = |\cdot|_{\mathbb{A}}^s$.*

Beweisidee. Dafür müssen wir im wesentlichen den Beweis von Lemma 4.14 kopieren □

Die Definition der Zeta-Funktionen auf $\mathbb{A}$ kann jetzt fast eins zu eins aus dem Lokalen übernommen werden.

Definition 7.14. Sei $f \in S(\mathbb{A})$ eine Schwartz-Bruhat Funktion und $\chi = \mu|\cdot|_p^s$ Idelklassencharakter. Die *globale Zeta-Funktion* von f und χ ist definiert, als das Integral

$$Z(f, \chi) = \int_{\mathbb{I}} f(x)\chi(x) d^\times x.$$

Wir schreiben wieder $Z(f, \mu, s)$ für $Z(f, \mu|\cdot|_p^s)$.

Damit haben wir alles zusammen, was wir brauchen um Riemanns Beweis in die Welt der Adele zu übertragen.

Satz 7.15 (Globale Funktionalgleichung)**.** *Sei $\chi = \mu|\cdot|_{\mathbb{A}}^s$ ein Idelklassencharakter und sei $f \in S(\mathbb{A})$ eine Schwartz-Bruhat Funktion. Dann konvergiert die globale Zeta-Funktion $Z(f, \mu, s)$ für $\Re(s) > 1$ absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen und definiert dort eine holomorphe Funktion, die zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann, welche die* globale Funktionalgleichung

$$Z(f, \chi) = Z(\hat{f}, \check{\chi})$$

bzw.

$$Z(f, \mu, s) = Z(\hat{f}, 1/\mu, 1 - s)$$

erfüllt. Diese Funktion ist überall holomorph, außer wenn $\mu = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-i\tau}$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$. Dann besitzt sie einen einfachen Pol bei $s = i\tau$ mit Residuum $-f(0)$ und einen einfachen Pol bei $s = 1 + i\tau$ mit Residuum $\hat{f}(0)$.

Beweis. Starten wir mit der Konvergenz. Wie bisher, genügt es einfache Schwartz-Bruhat Funktionen f zu betrachten. Ziel ist es dann zu zeigen, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{I}} |f(x)\chi(x)| d^\times x = \int_{\mathbb{I}} |f(x)| \cdot |x|_{\mathbb{A}}^\sigma d^\times x = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| \cdot |x_p|_p^\sigma d^\times x_p \tag{13}$$

endlich ist. Dazu teilen wir das Produkt auf. Es gibt eine Primzahl p_0, so dass f_p, für alle $p_0 \leq p < \infty$, gleich der charakteristischen Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ ist. Wir können Gleichung (13) also schreiben als

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} |f_\infty(x_\infty)| \cdot |x_\infty|_\infty^\sigma d^\times x_\infty \cdot \prod_{p < p_0} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| \cdot |x_p|_p^\sigma d^\times x_p \cdot \prod_{p_0 \leq p < \infty} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x_p|_p^\sigma d^\times x_p.$$

Der erste Faktor und das endliche Produkt in der Mitte konvergieren damit, nach dem Satz über die lokalen Funktionalgleichungen, für $\sigma > 0$, also sicherlich auch für $\sigma > 1$. Die Konvergenz der Zeta-Funktion hängt also nur noch von der, des unendlichen Produkts

$$\prod_{p_0 \leq p < \infty} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x_p|_p^\sigma d^\times x_p$$

ab. Die Integrale können wir leicht Ausrechnen und erhalten mit

$$\prod_{p_0 \leq p < \infty} \frac{1}{1 - p^{-\sigma}}$$

ein Teilprodukt der bekannten Euler-Produktformel, welche auf der gegebenen Halbebene gleichmäßig auf jedem Kompaktum konvergiert.

Die Holomorphie zeigen wir analog zum Beweis der lokalen Funktionalgleichung. Auch hier ist $Z(f, \mu, s)$ als Funktion auf $\sigma > 1$ stetig. Sei weiter δ die Randkurve eines in $\sigma > 1$ liegenden Dreiecks. Wir rechnen

$$\int_\delta Z_(f, \mu, s) dz = \int_\delta \int_\mathbb{I} f(x)\mu(\tilde{x})|x|_\mathbb{A}^s d^\times x ds = \int_\mathbb{I} \int_\delta f(x)\mu(\tilde{x})|x|_\mathbb{A}^s ds d^\times x = \int_\mathbb{I} 0 d^\times x = 0,$$

nach Fubini und Cauchy-Integralsatz. Der Satz von Morera liefert uns damit die Holomorphie von $Z(f, \mu, s)$ auf der Teilebene $\sigma > 1$.

Weiter zur meromorphen Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Aufgrund absoluter Konvergenz auf der Halbebene $\Re(s) > 1$ haben wir

$$\begin{aligned} Z(f, \chi) &= \int_\mathbb{I} f(x)\chi(x) d^\times x \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{I}^1} f(t \cdot b)\chi(t \cdot b)(d^\times t \times d^* b) \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{I}^1} (f(t \cdot b)\chi(t \cdot b) d^* b \right] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Um uns etwas Schreibarbeit zu sparen, definieren wir das innere Integral als

$$Z_t(f, \chi) \coloneqq \int_{\mathbb{I}^1} f(t \cdot b)\chi(t \cdot b) d^* b.$$

Wie in Riemanns Beweis, wollen wir eine auf ganz $\mathbb{C}$ gültige meromorphe Darstellung der Zeta-Funktion finden. Dazu teilen wir, ganz analog, das Integral in die zwei Summanden

$$Z(f, \chi) = \int_0^1 Z_t(f, \chi) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(f, \chi) \frac{dt}{t}. \tag{14}$$

Das Integral $\int_1^\infty$ macht uns keine Probleme. Wir haben festgestellt, dass

$$\int_1^\infty |Z_t(f, \chi)| \frac{dt}{t} = \int_{\{x \in \mathbb{I} : |x|_\mathbb{A} \geq 1\}} |f(x)||x|_\mathbb{A}^\sigma d^\times x,$$

für $\sigma > 1$ konvergiert. Da $|x|_\mathbb{A} \geq 1$, verbessert sich das Konvergenzverhalten des Integranden je kleiner σ ist und es folgt die Konvergenz auf ganz $\mathbb{C}$.

Widmen wir uns also dem Integral $\int_0^1$. Zuerst überlegen wir uns, dass wir $\mathbb{I}^1$ nach Satz 6.6 als disjunkte Vereinigung $\bigcup_{a \in \mathbb{Q}^\times} aF$ darstellen können, wobei $F = \{1\} \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$ der Fundamentalbereich der Gruppenwirkung ist. Kombiniert mit der Translationsinvarianz von d^*b und der Tatsache, dass χ als Idelklassencharakter trivial auf $\mathbb{Q}^\times$ wirkt, ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_t(f,\chi) &= \int_{\mathbb{I}} f(t\cdot b)\chi(t\cdot b)d^*b = \sum_{a\in\mathbb{Q}^\times}\int_{aF} f(t\cdot b)\chi(t\cdot b)d^*b \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Q}^\times}\int_F f(t\cdot ab)\chi(t\cdot b)d^*b = \int_F\left(\sum_{a\in\mathbb{Q}^\times} f(t\cdot ab)\right)\chi(t\cdot b)d^*b, \end{aligned}$$

wobei wir Summe und Integral auf $\sigma > 1$ wegen absoluter Konvergenz vertauschen dürfen. Die Summe über $a \in \mathbb{Q}^\times$ erinnert dabei an den Ausdruck $\Theta(x) - 1$ in Riemanns Beweis, welcher gerade $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\exp(-\pi x n^2)$ entspricht. Wir sind also dazu verleitet, hier den Satz von Riemann-Roch anzuwenden, wofür wir allerdings eine Summe über ganz $\mathbb{Q}$ benötigen. Dieses Problem lässt sich leicht beheben.

Lemma 7.16.

$$Z_t(f,\chi) = Z_{t^{-1}}(\hat{f},\check{\chi}) + \hat{f}(0)\int_F\check{\chi}(b/t)d^*b - f(0)\int_F\chi(tb)d^*b.$$

Beweis. Die Idee ist klar. Wir addieren $f(0)\int_F\chi(tx)d^*b$ auf $Z_t(f,\chi)$, erhalten

$$Z_t(f,\chi) + f(0)\int_F\chi(tb)d^*b = \int_F\left(\sum_{a\in\mathbb{Q}}(f(t\cdot ab)\right)\chi(t\cdot b)d^*b$$

und können jetzt die zahlentheoretische Version von Riemann-Roch anwenden.

$$\begin{aligned} \int_F\left(\sum_{a\in\mathbb{Q}} f(t\cdot ab)\right)\chi(t\cdot b)d^*b &= \int_F\left(\sum_{a\in\mathbb{Q}}\hat{f}(t^{-1}\cdot ab^{-1})\right)\frac{\chi(t\cdot b)}{|t\cdot b|_{\mathbb{A}}}d^*b \\ &= \int_F\left(\sum_{a\in\mathbb{Q}}\hat{f}(t^{-1}\cdot ab)\right)\frac{\chi(t\cdot b^{-1})}{|t\cdot b^{-1}|_{\mathbb{A}}}d^*b \\ &= \int_F\left(\sum_{a\in\mathbb{Q}}\hat{f}(t^{-1}\cdot ab)\right)\check{\chi}(b/t)d^*b \\ &= Z_{t^{-1}}(\hat{f},\check{\chi}) + \hat{f}(0)\int_F\check{\chi}(b/t)d^*b, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt den Variablenwechsel $b \mapsto b^{-1}$ und im dritten Schritt $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1}$ ausgenutzt haben. □

Mit diesem Lemma lässt sich das Integral $\int_0^1$ also umformen zu

$$\int_0^1 Z_t(f,\chi)\frac{dt}{t} = \int_0^1\left(Z_{t^{-1}}(\hat{f},\check{\chi}) + \hat{f}(0)\check{\chi}(t)^{-1}\int_F\check{\chi}(b)d^*b - f(0)\chi(t)\int_F\chi(b)d^*b\right)\frac{dt}{t}.$$

Ein Variablenwechsel $t \mapsto t^{-1}$ im ersten Summanden ergibt dann

$$\int_0^1 Z_{t^{-1}}(\hat{f},\check{\chi})\frac{dt}{t} = \int_1^\infty Z_t(\hat{f},\check{\chi})\frac{dt}{t},$$

was nach dem gleichen Argument, wie bei $\int_1^\infty$, auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Ganz nach Riemanns Vorbild, haben wir zwei Integrale auf dem Bereich von 1 bis ∞. Es bleibt noch der Term

$$E(f,\chi) := \int_0^1\hat{f}(0)\check{\chi}(t)^{-1}\left(\int_F\check{\chi}(x)d^*b\right)\frac{dt}{t} - \int_0^1 f(0)\chi(t)\left(\int_F\chi(x)d^*b\right)\frac{dt}{t}.$$

Dieser entspricht gerade den beiden Termen $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{1-s}$ aus Riemanns Beweis. Ist der Idelklassencharakter χ nicht unverzweigt, so wirkt er nach Korollar 7.12 auch nicht trivial auf dem Kompaktum F. Folglich verschwinden beide Integrale und $E(f,\chi) = 0$ ist offensichtlich eine ganze Funktion. Ist der Charakter $\chi = \mu|\cdot|_{\mathbb{A}}^{s}$ dagegen unverzweigt, so haben wir in Lemma 7.13 gezeigt, dass $\chi = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{s'}$, wobei $s' = s - i\tau$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$. Wegen $|t|_{\mathbb{A}} = t$ und $\mathrm{Vol}(F, d^*b) = 1$ ist damit

$$\begin{aligned} E(f,\chi) &= \mathrm{Vol}(F, d^*b)\hat{f}(0)\int_0^1 t^{1-s}\frac{dt}{t} - \mathrm{Vol}(F, d^*b)f(0)\int_0^1 t^{s'}\frac{dt}{t} \\ &= \frac{\hat{f}(0)}{s'-1} - \frac{f(0)}{s'} = \frac{\hat{f}(0)}{s-(i\tau+1)} - \frac{f(0)}{s-i\tau}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass E in diesem Fall eine rationale Funktion in s ist.

Formen wir nun Gleichung (14) mit diesen Resultaten um, erhalten wir mit

$$Z(f,\chi) = \int_1^\infty Z_t(\hat{f},\check{\chi})\frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(f,\chi)\frac{dt}{t} + E(f,\chi),$$

einen auf ganz $\mathbb{C}$ gültigen Ausdruck der Zeta-Funktion und damit eine meromorphe Fortsetzung der Funktion. Diese Fortsetzung ist für $\mu \neq |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-i\tau}$ sogar ganz und hat im Fall $\mu = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-i\tau}$ nur zwei einfache Pole bei $s = i\tau$ und $s = 1 + i\tau$ mit Residuen $-f(0)$ bzw. $\hat{f}(0)$.

Zum Schluss kommen wir noch zur Funktionalgleichung. Wir beginnen mit

$$Z(\hat{f},\check{\chi}) = \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{\hat{f}}(t\cdot b)\check{\check{\chi}}(t\cdot b)d^*b\frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(t\cdot b)\check{\chi}(t\cdot b)d^*b\frac{dt}{t} + E(\hat{f},\check{\chi}) \quad (15)$$

und überlegen uns, dass $E(\hat{f},\check{\chi}) = E(f,\chi)$. Im unverzweigten Fall folgt dies sofort. Im verzweigten Fall $\chi = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{s'}$, haben wir

$$E(f,\chi) = \frac{\hat{f}(0)}{s'-1} - \frac{f(0)}{s'} = -\frac{\hat{f}(0)}{1-s'} + \frac{\hat{\hat{f}}(0)}{1-(1-s')} = E(\hat{f},\check{\chi}),$$

wobei wir hier die Umkehrformel $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ nach Satz 7.6 ausgenutzt haben. Die Umkehrformel können wir auch mit $\check{\check{\chi}} = \chi$ kombinieren, um den ersten Summanden in (15) umzuformen, und erhalten dadurch

$$\int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(-t\cdot b)\chi(t\cdot b)d^*b\frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(t\cdot b)\check{\chi}(t\cdot b)d^*b\frac{dt}{t} + E(f,\chi).$$

Anschließend nutzen wir die Translation $b \mapsto -b$ zusammen mit $\chi(-x) = \chi(x)$ und sehen, dass dieser Ausdruck gleich

$$\int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(t\cdot b)\chi(t\cdot b)d^*b\frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(t\cdot b)\check{\chi}(t\cdot b)d^*b\frac{dt}{t} + E(f,\chi) = Z(f,\chi)$$

ist. Setzen wir die einzelnen Bestandteile dieser Gleichungskette zusammen, so haben wir gerade

$$Z(\hat{f},\check{\chi}) = Z(f,\chi)$$

gezeigt. In Tates Worten: „The main theorem is proved!“. □

7.4 Globale Berechnung: Die Riemannsche Zeta-Funktion

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, wie stark sich Riemanns und Tates Beweis der Funktionalgleichung ähneln. Zum Ende dieser Arbeit möchten wir noch zeigen, dass das Resultat des letzten Abschnitts nicht ohne Inhalt ist und wenden uns wieder Frage vom Anfang der Arbeit zu:

Woher kommt die Gamma-Funktion in der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion?

Betrachten wir dazu die einfache Schwartz-Bruhat Funktion

$$f(x) = \exp(-2\pi i x_\infty^2) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p).$$

Für jede Stelle $p \leq \infty$ ist der Faktor f_p genau die lokale Schwartz-Bruhat Funktion, die wir in Abschnitt 4.4, bei der Berechnung der lokalen Zeta-Funktionen Z_p im unverzweigten Fall, verwendet haben. Daher können wir ohne Probleme direkt die Fouriertransformation

$$\hat{f}(x) = \exp(-2\pi i x_\infty^2) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p)$$

angeben und sehen, dass $f = \hat{f}$.

Wir möchten nun explizit die Funktionalgleichung der globalen Zeta-Funktion bezüglich der Funktion f und des unverzweigten Charakters $|\cdot|_{\mathbb{A}}^s$ angeben. Einen Großteil der Arbeit haben wir dabei schon in Abschnitt 4.4 erledigt. Nach unseren lokalen Berechnungen gilt nämlich,

$$Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = \int_{\mathbb{I}} f(x)|x|_{\mathbb{A}}^s d^\times x = \prod_{p\leq\infty} Z_p(f_p, 1, |\cdot|_p^s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \prod_{p<\infty} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Das unendliche Produkt am Ende sollte uns bekannt vorkommen. Es ist genau die Euler-Produktformel der Riemannschen Zeta-Funktion. Damit ist aber die globale Zeta-Funktion

$$Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \Xi(s)$$

nichts weiter, als die Funktion Ξ der Riemannschen Funktionalgleichung. Analog berechnen wir

$$Z(\hat{f}, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^{1-s}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \Xi(1-s).$$

Aus Tates globaler Funktionalgleichung folgt damit direkt

$$\Xi(s) = Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = Z(\hat{f}, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^{1-s}) = \Xi(1-s),$$

die klassische Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion. Im Gegensatz zu Riemanns Beweis wird aber sofort klar, woher der Faktor $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ kommt. Er ist gerade der Anteil der archimedischen Stelle $p = \infty$, bei der Berechnung der globalen Zeta-Funktionen.

Damit sind wir aber noch nicht ganz zufrieden. Die Wahl der Faktoren f_p an den endlichen Stellen, in der Definition von f, können wir leicht erklären: sie bilden bei der Berechnung gerade die Riemannsche Zeta-Funktion. Doch wie begründen wir f_∞? Würde eine alternative Wahl des Faktors nicht zu einer anderen Funktionalgleichung führen?

Wir können uns überlegen, dass eine andere Wahl der lokalen Schwartz-Bruhat Funktion, nennen wir sie g_∞, bei der Berechnung andere Zeta-Funktionen und damit eine andere Funktionalgleichung

$$Z_p(g_\infty, |\cdot|_\infty^s) \cdot \zeta(s) = Z_p(\hat{g}_\infty, |\cdot|_\infty^{1-s}) \cdot \zeta(1-s)$$

ergibt. Diese neue Funktionalgleichung unterscheidet sich dann aber nur um einen meromorphen Faktor von $\Xi(s) = \Xi(1-s)$, welchen wir, dank Lemma 4.18, mit

$$\frac{Z_\infty(g_\infty, |\cdot|_\infty^s)}{Z_\infty(f_\infty, |\cdot|_\infty^s)} = \frac{Z_\infty(\hat{g}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1})}{Z_\infty(\hat{f}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1})}$$

einfach berechnen können. Die Wahl von f_∞ war also in erster Linie nur durch die besonders einfachen Berechnung der Zeta-Funktionen beeinflusst. Dass die daraus resultierende globale Funktionalgleichung genau mit dem klassischen Ergebnis übereinstimmt, haben wir in erster Linie Riemann zu verdanken.

A Beweis des Satzes von Ostrowski

Beweis von Satz 3.7. Sei $|\cdot|$ ein beliebiger nicht-trivialer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Wir untersuchen die zwei möglichen Fälle.

Fall 1: $|\cdot|$ ist archimedisch. Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $|n_0| > 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|n_0|^\alpha = n_0$. Wir wollen zeigen, dass $|n| = |n|_\infty^\alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der allgemeine Fall für $\mathbb{Q}$ folgt dann aus den Eigenschaften des Betrags. Dazu bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Darstellung zur Basis n_0, d.h.

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i$$

mit $a_i \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$, $a_k \neq 0$ und $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$. Nehmen wir davon den Absolutbetrag und beachten, dass, nach unserer Wahl von n_0, $|a_i| \leq 1$ gilt, so erhalten wir

$$|n| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| n_0^{i\alpha} \leq \sum_{i=0}^{k} n_0^{i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{k} n_0^{-i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}.$$

Setzt man $C := \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} > 0$, so sehen wir

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha,$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die N-te Wurzel und lassen N gegen ∞ laufen, so konvergiert $\sqrt[N]{C}$ gegen 0 und wir erhalten

$$|n| \leq n^\alpha$$

Damit wäre die erste Hälfte geschafft. Gehen wir zurück zu unserer Basisdarstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i.$$

Da $n < n_0^{k+1}$, erhalten wir die Abschätzung

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|.$$

Mit dem Ergebnis aus der ersten Hälfte des Beweises und $n \geq n_0^k$ sehen wir

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha \\ &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \\ &> n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Setzen wir wieder $C' := \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) > 0$ folgt analog zum ersten Teil, dass

$$|n| \geq n^\alpha$$

und daher $|n| = n^\alpha$. Damit haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ äquivalent zum klassischen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ ist.

Fall 2: $|\cdot|$ ist nicht archimedisch. Dann ist $|n_0| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und, da $|\cdot|$ nicht-trivial ist, muss es eine kleinste Zahl n_0 mit $|n_0| < 1$ geben. Insbesondere muss n_0 eine Primzahl sein, denn sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von n_0, also $n_0 = p \cdot n'$ mit $n' \in \mathbb{N}$ und $n' < n$, dann gilt, nach unserer Wahl von n_0,

$$|p| = |p| \cdot |n'| = |p \cdot n'| = |n_0| < 1.$$

Folglich muss schon $p = n_0$ gelten. Ziel wird es jetzt sein, zu zeigen, dass $|\cdot|$ äquivalent zum p-adischen Absolutbetrag ist. Zunächst finden wir ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|p| = |p|_p^\alpha = \frac{1}{p^\alpha}$. Sei als nächstes $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \not| \, n$. Wir schreiben

$$n = rp + s, r \in \mathbb{Z}, 0 < s < p.$$

Nach unserer Wahl von $p = n_0$ gilt $|s| = 1$ und $|rp| < 1$. Es folgt

$$|n| = \max\{|rp|, |s|\} = 1.$$

Sei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir schreiben $n = p^v n'$, mit $p \not| \, n'$, und sehen

$$|n| = |p|^v |n'| = |p|^v = (|p|_p^\alpha)^v = |n|_p^\alpha.$$

Mit den gleichen Überlegungen aus dem ersten Fall folgt damit die Behauptung. □

B Beweis der Poisson Summenformel nach Tate

Für diesen Beweis wird unser Ausblick in die abstrakte harmonische Analysis nützlich.

Beweis von Satz 7.9. Jede $\mathbb{Q}$-invariante Funktion ϕ auf $\mathbb{A}$ induziert eine Funktion auf $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, welche wir wieder mit ϕ bezeichnen. Wir können dann die Fouriertransformation von $\phi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ als Funktion auf $\mathbb{Q}$ betrachten, da $\mathbb{Q}$ versehen mit der diskreten Topologie gerade mit den Pontryagin Dualen von $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ identifiziert werden kann*. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \phi(x) \Psi(\xi \cdot x) \overline{dx},$$

wobei $\overline{dx}$ das *Quotientenmaß* auf $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist, welches von dem Maß dx auf $\mathbb{A}$ induziert wird. Dieses Haar-Maß ist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(x) \overline{dx} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) \overline{dx} = \int_{\mathbb{A}} f(x) dx, \tag{16}$$

für alle $f \in L^1(\mathbb{A})$. Für eine genauere Behandlung dieses Maßes verweisen wir auf Knightly und Li [5] Kapitel 7.2.

Für den eigentlichen Beweis benötigen wir zwei kleine Ergebnisse.

*vgl. Ramakrishnan und Valenza [7] Proposition 7-15

Lemma B.1. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ gilt:*

$$\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\tilde{f}}|_{\mathbb{Q}}.$$

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{Q}$ beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir aufgrund von $\Psi|_{\mathbb{Q}} = 1$,

$$\Psi(\xi x) = \Psi(\xi x)\Psi(\gamma\xi) = \Psi((\gamma + x)\xi)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{A}$ haben. Per Definition der abstrakten Fouriertransformation gilt

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{f}}(\xi) &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(x)\Psi(\xi x)\overline{dx} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) \right) \Psi(-\xi x)\overline{dx} = \\ &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x)\Psi((\gamma + x)\xi) \right) \overline{dx} = \int_{\mathbb{A}} f(t)\Psi(\xi x)dx = \hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung (16) des Quotientenmaßes $\overline{dx}$ ausgenutzt haben. □

Lemma B.2. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ und jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x).$$

Beweis. Wie wir eben bewiesen haben gilt $\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\tilde{f}}|_{\mathbb{Q}}$ und daher

$$\left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x) \right| = \left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x) \right| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass Ψ ein Charakter ist. Die rechte Seite der Gleichung ist normal konvergent, da $f \in S(\mathbb{A})$. Analog folgt, dass auch $\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)$ normal konvergiert. Also $\hat{\tilde{f}} \in L^1(\mathbb{Q})$ und

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte* von $\hat{\tilde{f}}$ ausgewertet am Punkt $-x$. Nach Umkehrformel aus Satz 2.18, erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{\hat{\tilde{f}}}(-x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. □

*Wir erinnern uns, dass auf der diskreten Topologie das Zählmaß ein Haar-Maß ist.

Zurück zum Beweis der Summenformel. Mit Lemma B.2 und $x = 0$ und anschließendem Anwenden von Lemma B.1, erhält man

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\bar{\Psi}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma).$$

Aber per Definition gilt gerade

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma),$$

also

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)$$

und wir sind fertig. $\square$

Literatur

[1] J. W. S. Cassels und A. Fröhlich, Hrsg. *Algebraic Number Theory.* 2. Aufl. Academic Press, 2010.

[2] Anton Deitmar. *Automorphe Formen.* 1. Aufl. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[3] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2. Aufl. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley-Interscience, 1999.

[4] Fernando Quadros Gouvea. *p-adic Numbers: An Introduction.* 2. Aufl. Universitext. Springer, 1997.

[5] Andrew Knightly und Charles Li. *Traces of Hecke operators.* Mathematical Surveys and Monographs 133. American Mathematical Society, 2006.

[6] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* 1. Aufl. 1992. Nachdruck. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer, 2006.

[7] Dinakar Ramakrishnan und Robert J. Valenza. *Fourier Analysis on Number Fields.* 1. Aufl. Bd. 186. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.

[8] Bernhard Riemann. „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“. In: *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß* 2 (1859), S. 145–155.

[9] John Tate. „Fourier analysis in number fields, and Hecke’s zeta-functions“. Diss. Princeton, 1950.