SUP

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wenden wir Poissonsummenformel auf die Gaußsche Funktion $g_\infty(x_\infty) := e^{-\pi|x_\infty|^2}$ an erhalten wir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_\infty(nx_\infty) = \tag{1}$$

Nach formaler Anwendung der Mellin Transformation auf $\Theta(x)$ erhalten wir

$$\int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \tag{2}$$

$$= \int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^{1-s} d^\times x_\infty \tag{3}$$

nach einen CoV von $x = \frac{1}{y}$ und $dx = -\frac{1}{y^2}dy$ unter Beachtung der Integrationsgrenzen.

2 Formeln und Definitionen

Definition 2.1. Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ ist für $Re(s) > 1$ definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} \tag{4}$$

Sie kann meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden und erfüllt die Funktionalgleichung.

Satz 2.2.

$$\Xi(s) = \Xi(1-s) \tag{5}$$

Definition 2.3.

$$\Xi(s) := \Gamma_\infty(s)\zeta(s) \tag{6}$$

Definition 2.4.

$$\Gamma_\infty(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \tag{7}$$

Satz 2.5 (Poisson Summenformel)**.** *Für k_∞ und $t_\infty \in k_\infty^*$, f_∞ Schwartzfunktion, $|t_\infty|_\infty := |t_\infty|$ Absolutbetrag und $\hat{f}_\infty$ Fourier-transformierte von f_∞ gilt:*

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} f_\infty(at_\infty) = \frac{1}{|t_\infty|_\infty} \sum_{a\in\mathbb{Z}} \hat{f}_\infty\left(\frac{a}{t_\infty}\right) \tag{8}$$

Definition 2.6 (Fouriertransformation)**.**

$$\hat{f}_\infty(\xi_\infty) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(-x_\infty\xi_\infty)} f_\infty(x_\infty) dx_\infty \tag{9}$$

Satz 2.7. *Die (archimedische) Gaussche Funktion*

$$g_\infty(x_\infty) := e^{-\pi|x_\infty|^2} \tag{10}$$

ist ihre eigene Fouriertransformierte.

Beweis. Die Fouriertransformation von $g_\infty(x)$ ist definiert als

$$\hat{g}_\infty(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

Betrachten wir zunächst den Integranden etwas genauer sehen wir, dass wir dank

$$g(x)e^{-2\pi i x\xi} = e^{-\pi(x^2+2ix\xi-\xi^2)}e^{-\pi\xi^2} = e^{-pi(x+i\xi)^2}g(\xi)$$

die Fouriertransformierte $\hat{g}(\xi)$ umschreiben können zu

$$\hat{g}(\xi) = g(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx$$

Fuer den Beweis reicht es also zu zeigen, dass das verbleibende Integral gleich 1 ist. Sei zunächst γ eine Kurve entlang des Rechtecks mit den Ecken $-R$, R, $R+i\eta$ und $-R+i\eta$. Nach dem Cauchy Integralsatz gilt für unsere ganze Funktion $g(z)$

$$0 = \int_{-R}^{R} g(z)dz + \int_{R}^{R+i\eta} g(z)dz + \int_{R+i\eta}^{-R+i\eta} g(z)dz + \int_{-R+i\eta}^{-R} g(z)dz$$

Weiter gilt $|g(z)| = e^{-\pi(R^2-y^2)}$ für $z = \pm R + iy$ und $0 \leq y \leq \eta$ und so verschwinden das zweite und vierte Integral für $R \to \infty$. Nach Umstellen der verbleibenden Integrale und genauen hinsehen stellen wir fest, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} = 1$$

$\square$

3 Riemanns Beweis

Wenden wir die Poisson-Summenformel für k_∞ auf die Schwartz-Funktion $g_\infty(x_\infty) := e^{-\pi|x_\infty|^2}$ an, sehen wir, dass die Thetafunktion

$$\Theta_\infty(x_\infty) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_\infty(nx_\infty) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2|x_\infty|_\infty^2} \tag{11}$$

die Funktionalgleichung

$$\Theta_\infty(x_\infty) = \frac{1}{|x_\infty|_\infty}\Theta_\infty(\frac{1}{x_\infty}) \tag{12}$$

für $x_\infty \in k_\infty^\times := k_\infty \setminus 0$. Da insbesondere $\Theta_\infty(x_\infty) - 1$ für $x_\infty \to \infty$ schnell fällt, sehen wir, dass $\Theta_\infty(x_\infty) - 1/x_\infty$ schnell fällt wenn $x_\infty \to 0$. Formal können wir die Mellin-Transformation auf (12) anwenden und folgern

$$\int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \int_{k_\infty^\times} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^{1-s} d^\times x_\infty \tag{13}$$

für beliebige s, wobei $d^\times x_\infty := \frac{dx_\infty}{|x_\infty|_\infty}$ das standard multiplikative Haarmaß auf $k_\infty^\times$ ist. Dies macht streng genommen keinen Sinn, da die beiden Integranden hier bei 0 und ∞ divergieren (was letztendlich auf die Pole der Riemannschen Xi Funktion bei $s = 0$ und $s = 1$ zurückgeht). Setzen wir hier trotzdem weiter an. Verwenden wir den Trafo $y := \pi n^2 t^2$ und erinnern uns an die Formeln der Riemannschen Xi Funktion und des Gamma-Faktors, erhalten wir

$$\int_{k_\infty} e^{-\pi n^2 x_\infty^2}|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \Gamma_\infty(s) n^{-s} \tag{14}$$

und somit formal

$$\int_{k_\infty} \Theta_\infty(x_\infty)|x_\infty|_\infty^s d^\times x_\infty = \int_{k_\infty} |x_\infty|^s d^\times x_\infty + 2\Gamma_\infty(s)\zeta(s) \tag{15}$$

Schmeißen wir das divergente Integral $\int_{k_\infty} |x_\infty|^s d^\times x_\infty$ weg und wenden (13) erhalten wir rein formal die Funktionalgleichung (2.2). Diese Berechnungen waren nur formeller Natur.

Dieser Teil soll die Arbeit abrunden und ein kurzes Fazit liefern.

4 Exkurs: p-adische Zahlen

5 Tates Beweis

5.1 Adelische Poisson Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

Satz 5.1 (Poisson Summenformel)**.** *Sei $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Dann gilt:*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma + x) \tag{16}$$

für alle $x \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$.

Beweis. Jede $\mathbb{Q}$-invariante Funktion ϕ auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ induziert eine Funktion auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$, welche wir wieder ϕ nennen. Wir können dann die Fouriertransformation von $\phi : \mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ als Funktion auf $\mathbb{Q}$ betrachten, da $\mathbb{Q}$ gerade die duale Gruppe von $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ ist. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \phi(t)\Psi(tx)\overline{dt}$$

wobei $\overline{dt}$ das Quotientenmaßauf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ ist, welches von dem Maßdt auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ induziert wird. Dieses Haarmaßist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \sum \gamma \in \mathbb{Q} f(\gamma + t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} f(t)dt$$

für alle stetigen Funktionen f auf $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ mit geeigneten Konvergenzeigenschaften (z.b. $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$).

Lemma 5.2. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ gilt:*

$$\hat{f}|_\mathbb{Q} = \hat{\hat{f}}|_\mathbb{Q}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}$ beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir wegen $\Psi|_\mathbb{Q} = 1$

$$\Psi(tx) = \Psi(tx)\Psi(\gamma x) = \Psi((\gamma + t)x)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{Q}$ und $t \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ haben. Per Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\hat{\hat{f}}(x) &= \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \hat{f}(t)\Psi(tx)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + t)\right) \Psi(tx)\overline{dt} = \\ &= \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + t)\Psi((\gamma + t)x)\right) \overline{dt} = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} f(t)\Psi(tx)dt = \hat{f}(x)\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung des Quotientenmaßes $\overline{dt}$ ausgenutzt haben. □

Lemma 5.3. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ und jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

Beweis. Wie wir eben bewiesen haben gilt $\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\hat{f}}|_{\mathbb{Q}}$ und daher

$$\left|\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| = \left|\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)\right| \leq \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass Ψ unitär ist. Die rechte Seite der Gleichung ist also normal konvergent, da $f \in S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Analog folgt, dass auch $\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)$ normal konvergiert. Wir erinnern uns, dass das Pontryagin Duale $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ als topologische Gruppe isomorph zu $\mathbb{Q}$ (versehen mit der diskreten Topologie) ist. Also $\hat{\hat{f}} \in L^1(\mathbb{Q})$ und

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte von $\hat{\hat{f}}$ ausgewertet am Punkt $-x$. Nach Fourierinversionsformel erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{\hat{\hat{f}}}(-x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. $\square$

Zurück zum Beweis der Summenformel. Wir erhalten aufgrund des zweiten Lemmas mit $x = 0$ und anschließenden Anwenden des Ersten

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\bar{\Psi}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}$$

Aber per Definition gilt gerade $\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma)$, also

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}$$

und wir sind fertig.

$\square$

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat. Alle Ausführungen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Kaske, Maximilian

Friedberg, der 17. Juli 2017