

Zusammenfassung

Inspiziert durch den Blogpost „*Tate’s proof of the functional equation*“ [9] von Terence Tao werde ich die Frage beantworten, woher der Gamma-Faktor $\Gamma(s/2)$ in der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion kommt und warum genau dieser benötigt wird. Dazu vollziehen wir die unter dem Namen Tate’s Thesis bekanntgewordene Doktorarbeit von John Tate für den Spezialfall der rationalen Zahlen \mathbb{Q} nach. Es werden zunächst die Grundlagen lokalkompakter Gruppen und Haar-Maße behandelt, überspringen jedoch die für den allgemeineren Fall benötigte Pontryagin-Dualität. Nach einem Ausflug in die Welt der p -adischen Zahlen etablieren Fourieranalysis auf den lokalen Körpern \mathbb{Q}_p und folgen Tate beim Beweis der Funktionalgleichung der lokalen Zeta-Funktionen und geben die Berechnung der für den Beweis benötigten Funktionen. Um diese Ergebnisse in einer globalen Theorie zusammenzufassen führen wir das eingeschränkte direkte Produkt ein und definieren damit die Adele- und Idelegruppe. Diese Arbeit endet mit Tates Beweis der Funktionalgleichung globaler Zeta-Funktionen. Wir werden feststellen, dass dieser eine Verallgemeinerung von Riemanns klassischen Beweis ist und die Funktionalgleichung der Riemannsche Zeta-Funktion als ein Spezialfall auftritt.

Inhaltsverzeichnis

1	Von Riemann zu Tate	1
1.1	Der Beweis der Funktionalgleichung	1
1.2	Auf dem Weg zu Tate	3
2	Lokalkompakte Gruppen und harmonische Analysis	5
2.1	Lokalkompakte Gruppen	5
2.2	Das Haar-Maß	7
2.3	Charaktere und Quasi-Charaktere	10
2.4	Ausblick: Fouriertransformation und Pontryagin-Dualität	11
3	Exkurs: p-adische Zahlen	13
3.1	Absolutbeträge und der Satz von Ostrowski	13
3.2	Vervollständigungen von \mathbb{Q}	15
3.3	Topologische Eigenheiten	16
3.4	Die Potenzreihendarstellung	19
4	Die lokale Theorie	21
4.1	Lokale Körper	21
4.2	Lokale Fourieranalysis	23
4.3	Die lokale Funktionalgleichung	27
4.4	Lokale Berechnungen	31
4.4.1	Der Fall $p = \infty$	31
4.4.2	Der Fall $p < \infty$	32
5	Eingeschränkte direkte Produkt abstrakter Gruppen	36
5.1	Definitionen	36
5.2	Quasi-Charaktere	38
5.3	Integration	39
6	Adele und Idele	41
6.1	Die Gruppe der Adele	41
6.2	Die Gruppe der Idele	42
7	Tates Beweis der Funktionalgleichung	45
7.1	Globale Fourieranalysis	45
7.2	Adelische Poisson-Summenformel und der Satz von Riemann-Roch	47
7.3	Die globale Funktionalgleichung	49
7.4	Globale Berechnung: Die Riemannsche Zeta-Funktion	53
A	Beweis des Satz von Ostrowski	55
B	Tates Beweis der Poisson-Summenformel	56

1 Von Riemann zu Tate

Im Jahr 1859 erschien mit „*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*“ [8] Bernhard Riemanns erste und einzige veröffentlichte Arbeit im Bereich der Zahlentheorie. Als Startpunkt nimmt Riemann die heute als *Riemannsche Zeta-Funktion** $\zeta(s)$ bekannte Abbildung, welche für $\Re(s) > 1$ durch

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

als absolut konvergente Reihe oder durch die *Euler-Produktformel* dargestellt werden kann. Neben einer Vielzahl neuer Notationen, Definitionen und Ideen, darunter die bekannte *Riemannsche Vermutung*, dass alle nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ den Realteil $1/2$ haben, gab er auch zwei Beweise der Funktionalgleichung

$$\Xi(s) = \Xi(1 - s),$$

wobei $\Xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ und $\Gamma(s)^\dagger$ das bekannte Euler-Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

ist.

1.1 Der Beweis der Funktionalgleichung

In seinem ersten Beweis erhält Riemann zunächst durch Anwendung von

$$\Gamma(s) \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^s \frac{dx}{x}, \quad (1)$$

die Gleichung

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Über Wegintegration des Integrals

$$\int \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

etablierte er anschließend die meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion (auch wenn nicht im Sinne von Weierstrass) und etablierte seine erste Form der Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = \Gamma(s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin(s\pi/2) \zeta(1 - s).$$

Riemann benutzte nun geläufige Identitäten der Gamma-Funktion um dieses Ergebnis umzuformen: Der Ausdruck

$$\Xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

bleibt unverändert, wie Riemann schreibt, „wenn s in $s - 1$ verwandelt wird.“

Diese symmetrische Darstellung der Funktionalgleichung veranlasste Riemann nun dazu in Gleichung (1) den Ausdruck $\Gamma(s/2)$ anstatt $\Gamma(s)$ für die Grundlage eines weiteren Beweises zu betrachten. Diesen möchten wir uns im folgenden etwas genauer anschauen, wobei wir uns Konvergenzgedanken ganz im Geiste Riemanns aufsparen.

*Obwohl diese Funktion heute nach Riemann benannt ist, war es Leonhard Euler der sich zuerst näher mit ihr beschäftigte

†Riemann selbst benutzte noch die durch Gauß definierte Notation $\Pi(s - 1) = \Gamma(s)$

Satz 1.1. Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ kann zu einer meromorphen Funktion auf ganz \mathbb{C} fortgesetzt werden, welche die Funktionalgleichung

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-(1-s)/2} \zeta(1-s)$$

erfüllt. Sie besitzt zwei einfache Pole bei $s = 0$ und $s = 1$.

Beweis der Funktionalgleichung. Durch den Variablenwechsel $y = n^2 \pi t^2$ in Eulers Integraldarstellung der Gamma-Funktion erhalten wir für $\Re(s) > 1$

$$\frac{1}{n^s} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{n^s} \pi^{-s/2} \int_0^\infty e^{-n^2 \pi t} n^s \pi^{s/2} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-n^2 \pi t} t^{s/2} \frac{dt}{t}.$$

Anschließendes aufsummieren und ausnutzen von Fubinis Integralgleichung ergibt die Formel

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty (e^{-n^2 \pi t}) t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

Die rechte Seite entspricht gerade der Ξ -Funktion. Wir führen nun die *Thetafunktion*

$$\Theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\pi t n^2}$$

ein. Damit können wir obige Gleichung etwas vereinfacht darstellen mit

$$\Xi(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\Theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t}.$$

Teilen wir nun das Integral auf in

$$\int_0^\infty (\Theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^1 (\Theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty (\Theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t}. \quad (2)$$

Wie benötigen nun die *Theta-Transformationsformel*

$$\Theta(t) = t^{-1/2} \Theta(1/t). \quad (3)$$

Um deren Gültigkeit einzusehen benötigen man Zweierlei: Zuerst erinnern wir uns an die *klassische Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ einer L^1 -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Mit dieser Abbildung haben wir folgenden

Satz 1.2 (Klassische Poisson Summenformel). Für jedes geeignete $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und deren Fouriertransformation $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}} f(a) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \hat{f}(a) \quad (4)$$

Beweis. In dieser klassischen Form zum Beispiel in Deitmar [2] Proposition 5.4.10. \square

Als Zweites halten wir fest, dass die *Fouriertransformierte* von $f_t(x) = e^{-\pi t x^2}$ gleich $\hat{f}_t(x) = t^{-1/2} f_{\frac{1}{t}}(x)$ ist. Einsetzen in die Poisson Summenformel (4) ergibt dann die Transformationsformel (3). Mit dieser kann man nun den ersten Summanden in Gleichung (2) umformen zu

$$\int_0^1 (t^{-1/2} \Theta(1/t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \Theta(1/t) t^{(s-1)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s}$$

Anschließend nutzen wir die Substitution $t \mapsto t^{-1}$ und rechnen

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Theta(1/t) t^{(s-1)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s} &= \int_1^\infty \Theta(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s} \\ &= \int_1^\infty (\Theta(t) - 1) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s} - \frac{2}{1-s}. \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung von $\Xi(s)$ ergibt dann

$$\Xi(s) = \frac{1}{2} \left(\int_1^\infty (\Theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty (\Theta(t) - 1) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} \right) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

und wir sehen, dass dieser Ausdruck unverändert bleibt wenn wir s in $1-s$ verwandeln. \square

1.2 Auf dem Weg zu Tate

Beide Beweise haben eine kleine Schwäche: Sie starten bereits mit der Gamma-Funktion als einen notwendigen Faktor zur Bildung der Funktionalgleichung. Warum sie aber gerade so nahtlos zur Zeta-Funktion passt wird nicht ersichtlich. Auftritt John Tate.

Tate kommt aus einer langen Linie von Mathematikern deren Arbeit mehr oder weniger direkt durch Riemanns Ideen in *Ueber die Anzahl...* beeinflusst wurde. Unter der Aufsicht Emil Artins verfasste er 1950, fast 100 Jahre nach Riemann, seine Doktorarbeit „Fourier Analysis in Number Fields and Hecke’s Zeta-Functions“ [10]. Sie ist zum Beispiel in [1] zu finden. In ihr bewies er die analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung der Dedekind Zeta-Funktionen und Hecke L-Funktionen, eine Art Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Funktion. Dieses Ergebnis war keineswegs neu und wurde 30 Jahre früher bereits durch Erich Hecke gezeigt. Was Tates Doktorarbeit jedoch so besonders macht - und einer der Gründe dafür warum sie als „Tate’s Thesis“ gewissen Kultstatus erreicht hat - ist die elegante Herangehensweise an Heckes Problemstellung in der globalen Sprache der *Adele und Idele*. Sogar noch verblüffender: Ist Tates theoretischer Rahmen erstmal etabliert, so stimmen die einzelnen Beweisschritte größtenteils mit Riemanns klassischen zweiten Beweis überein. Es ergibt sich aber ein viel klareres Bild über das Zustandekommen der einzelnen Bestandteile der Funktionalgleichung.

Ziel dieser Arbeit wird es nun sein Tates Doktorarbeit in ihrer einfachsten Form, d.h. im Fall des algebraischen Körper \mathbb{Q} , Revue passieren zu lassen um nun die zentrale Frage

Woher kommt die Gamma-Funktion in der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion?

zu beantworten.

Wir beginnen dazu in Kapitel 2 mit einer Einführung zu topologischen Gruppen, Lokalkompaktheit und Haar-Maße. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht unnötigen zu zerren werden wir allerdings Pontryagin Dualität und abstrakte Fourieranalysis - beides wichtige Grundlagen für Tates Beweis in höherer Allgemeinheit - nur in einem kurzen Ausblick behandeln. In Kapitel 3 wiederholen wir kurz die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften zu Absolutbeträgen. Anschließend führen wir die p -adischen Zahlen ein und untersuchen deren Eigenheiten. Um unser Auslassen der abstrakten Fourieranalysis wieder gut zu machen, definieren wir am Anfang von Kapitel 4 die Fouriertransformation auf den p -adischen Zahlen neu und zeigen, dass diese Definition der abstrakten entspricht. Damit haben wir dann genug Grundlagen gesammelt um Tates erstes Ergebnis, die Funktionalgleichung lokaler Zeta-Funktion, zu beweisen. Wir schließen das Kapitel und die erste Hälfte der Arbeit mit der expliziten Berechnung für den Beweis wichtiger Integrale. Es geht weiter mit der globalen Betrachtung der Problemstellung in Kapitel 5 mit der wichtigen Theorie des eingeschränkten direkten Produkts. Wir stellen uns die Frage wie man auf dieser abstrakten Gruppe integriert und wie Charaktere aussehen. Daraufhin lernen wir in Kapitel 6 mit der Adele- und Idelegruppe \mathbb{A} und \mathbb{I} zwei konkrete Beispiele kennen. Kapitel

7 behandelt nun die Fourieranalysis im globalen Kontext der Adele und Idele, beweisen die algebraische Variante des Satzes von Riemann-Roch und geben Tates vollen Beweis der Funktionalgleichung globaler Zeta-Funktion. Zum Schluss runden wir die Arbeit ab und besprechen wie aus diesem Ergebnis direkt die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion folgt.

2 Lokalkompakte Gruppen und harmonische Analysis

Auch wenn es der Beweis Riemanns nicht direkt vermuten lässt, die Fouriertransformation von Funktionen wird eine entscheidende Rolle im Beweis der Funktionalgleichung spielen. Wir werfen also zunächst einen Blick auf die (abstrakte) harmonische Analysis, eine Verallgemeinerung der klassischen Fourieranalysis auf \mathbb{R} . Im Mittelpunkt stehen hier die lokalkompakten Gruppen. Auf diesen lässt sich sehr natürlich ein zum klassischen Lebesgue-Maß analoges Maß definieren, wodurch wir Integrieren und auch Fourier-transformieren können. Wir werden in dieser Arbeit jedoch nicht den vollen Weg zu abstrakten Fourieranalysis gehen. Stattdessen definieren wir in Kapitel 4 eine eigene Fouriertransformation und geben hier im letzten Abschnitt nur einen kurzen Ausblick. Für die Behandlung des Stoffes halten wir uns dabei an Ramakrishnan und Valenza [7] Kapitel 1 und 3.

2.1 Lokalkompakte Gruppen

Am Anfang steht immer eine

Definition 2.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine (nicht unbedingt abelsche) Gruppe G zusammen mit einer Topologie, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) Die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

stetig auf der Produkttopologie von $G \times G$.

- (ii) Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ist stetig auf G .

Ein *Homomorphismus topologischer Gruppen* zwischen G_1 und G_2 ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G_1 \rightarrow G_2$. Ist dieser bijektiv und die Umkehrabbildung wieder ein Homomorphismus topologischer Gruppen, so sprechen wir von einem *Isomorphismus topologischer Gruppen*.

Man sieht sofort, dass jede Translation um ein beliebiges Gruppenelement einen Homeomorphismus $G \rightarrow G$ bildet. Die Topologie ist also *translationsinvariant* in dem Sinne, dass für alle $g \in G$ und jede Mengen U die Äquivalenzen

$$U \text{ ist offen} \Leftrightarrow gU = \{gu \in G : u \in U\} \text{ ist offen} \Leftrightarrow Ug = \{ug \in G : u \in U\} \text{ ist offen}$$

gelten. Analog verhält es sich für die Umkehrabbildung. Sie ist ebenso ein Homeomorphismus und U ist genau dann offen, wenn $U^{-1} = \{u^{-1} \in G : u \in U\}$ offen ist.

Die Translationsinvarianz der Topologie hat nun einige nette Vorteile. Zum Beispiel wird bereits die ganze Topologie durch die Umgebungsbasis des neutralen Elements definiert. Durch Translation erhalten wir Umgebungsbasen beliebiger anderer Elemente und damit zwangsläufig die komplette Topologie. Für ein weiteres Beispiel erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit in topologischen Räumen. Eine Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt stetig, wenn für alle $g \in G_1$ und jede offene Umgebung U von $f(g)$ eine offene Umgebung V von g existiert, sodass $f(V) \subseteq U$. Sind G_1 und G_2 nun topologische Gruppen und ist f ein (nicht unbedingt topologischer) Gruppenhomomorphismus reicht es jetzt die Stetigkeit in dem neutralen Element e_1 der

Gruppe G_1 nachzuweisen. Denn ist f stetig in e_1 und sei g ein beliebiges weiteres Element der Gruppe, so ist für jede offene Umgebung U von $f(g)$ ist $U' := f(g)^{-1}U$ eine offene Umgebung des neutralen Elements e_2 . Wegen Stetigkeit in e_1 gibt es dann eine offene Umgebung V' mit $f(V') \subseteq U'$. Nun ist aber $V := gV'$ eine offene Umgebung von g und da f ein Gruppenhomomorphismus ist, haben wir

$$f(V) = f(gV') = f(g)f(V') \subseteq f(g)U' = f(g)f(g)^{-1}U = U,$$

also ist die Abbildung überall stetig.

Haben wir wieder zwei topologische Gruppen G_1 und G_2 , so ist deren direktes Produkt $G_1 \times G_2$, wie man leicht feststellen kann, wieder eine topologische Gruppe. Dieses Ergebnis lässt sich auch auf endliche, abzählbare und sogar beliebige Mengen von Gruppen übertragen.

Lemma 2.2. *Sei I eine beliebige Indexmenge und G_ν eine topologische Gruppe für alle $\nu \in I$. Das direkte Produkt $G = \prod_{\nu \in I} G_\nu$ versehen mit der Produkttopologie und komponentenweiser Gruppenverknüpfung ist wieder eine topologische Gruppe.*

Beweis. Wir erinnern uns daran, dass eine Basis der Produkttopologie gegeben ist durch Rechtecke der Form

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu,$$

wobei E eine endliche Teilmenge von I und jedes U_ν offen in G_ν ist. Ohne Einschränkung sei also

$$W = \prod_{\nu \in E} W_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu$$

eine offene Umgebung von $gh = (g_\nu h_\nu)$. Da die G_ν topologische Gruppen sind, finden wir für alle $\nu \in E$ offene Umgebungen U_ν und V_ν von g_ν und h_ν , sodass $U_\nu V_\nu \subseteq W_\nu$. Wir behaupten nun, dass

$$\left(\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu \right) \times \left(\prod_{\nu \in E} V_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu \right) \subseteq G \times G$$

eine offene Umgebung von $(g, h) \in G \times G$ ist, deren Bild in W liegt. Der erste Aussage ist klar, beide Faktoren des Produkts sind offene Basiselemente der Topologie und enthalten jeweils g bzw. h . Weiter ist das Bild unter Gruppenoperation gegeben durch

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu V_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} G_\nu,$$

was nach obigen Überlegungen in W liegt. Somit folgt die Stetigkeit der Gruppenverknüpfung. Der Beweis für die Stetigkeit der Umkehrabbildung funktioniert analog. \square

Definition 2.3. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung hat. Eine *lokalkompakte Gruppe* ist eine topologische Gruppe, die sowohl lokalkompakt als auch hausdorffsch ist.

Wir kennen bereits einige lokalkompakte Gruppen.

Beispiele 2.4.

- (a) Jede diskrete topologische Gruppe G , also eine Gruppe in der alle Teilmengen offen sind, ist lokalkompakt. Für jedes $x \in G$ ist $\{x\}$ eine kompakte Umgebung von x .

- (b) Die additive Gruppe \mathbb{R}^+ mit der gewohnten Topologie ist lokalkompakt. Denn ist $x \in \mathbb{R}^+$, so ist $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ für $\varepsilon > 0$ eine kompakte Umgebung von x . Ähnlich verhält es sich für die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (c) Analog kann man sich überlegen, dass die Gruppen \mathbb{C}^+ und \mathbb{C}^\times lokalkompakt sind, wobei wir hier die abgeschlossenen Bälle $\overline{B_\varepsilon(x)}$ als kompakte Umgebung von x haben.

Auch hier können wir uns das direkte Produkt zweier lokalkompakter Gruppen anschauen.

Lemma 2.5. *Seien G_1 und G_2 zwei lokalkompakte Gruppen. Dann ist $G_1 \times G_2$ wieder lokalkompakt. Insbesondere ist also jedes endliche direkte Produkt lokalkompakter Gruppen lokalkompakt.*

Beweis. Sei $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Wegen der Lokalkompaktheit von G_1 und G_2 finden wir kompakte Umgebungen K_1, K_2 von g_1 bzw. g_2 . Dann ist aber $K_1 \times K_2$ eine kompakte Umgebung von (g_1, g_2) . Weiter ist das direkte Produkt zweier Hausdorff-Räume wieder hausdorffsch, wodurch $G_1 \times G_2$ zu einer lokalkompakten Gruppe wird. \square

Wir werden später in Lemma 5.1 sehen, kann diese Aussage nicht ohne Weiteres auf beliebig große direkte Produkte übertragen werden.

2.2 Das Haar-Maß

Nun zu etwas Maßtheorie. Wir beginnen mit einer kleinen Auffrischung der wichtigsten Konzepte. Eine σ -Algebra auf einer Menge X ist eine Teilmenge Ω von $P(X)$, so dass

- (i) $X \in \Omega$
- (ii) Wenn $A \in \Omega$, dann $X \setminus A \in \Omega$.
- (iii) Ω ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, d.h. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Omega$, falls $A_k \in \Omega$ für alle k .

Die Elemente in Ω werden *messbar* genannt. Aus den Axiomen lässt sich leicht folgern, dass die leere Menge und abzählbare Schnitte von messbaren Mengen wiederum messbar sind. Weiter ist der Schnitt $\bigcap_n \Omega_n$ beliebiger Familien $\{\Omega_n\}$ von σ -Algebren auf X selbst wieder eine σ -Algebra.

Eine Menge X zusammen mit einer σ -Algebra Ω bilden den *messbaren Raum* (X, Ω) . Ist X ein topologischer Raum, so können wir die kleinste σ -Algebra \mathcal{B} betrachten, die alle offenen Mengen von X enthält. Die Elemente von \mathcal{B} werden *Borelmengen* von X genannt.

Ein *Maß* auf einem beliebigen messbaren Raum (X, Ω) ist eine Funktion $\mu : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und die σ -*additiv* ist. Das bedeutet

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

für beliebige Familien $\{A_n\}_1^\infty$ von paarweise disjunkten Mengen in Ω . Zusammen definiert dies den *Maßraum* (X, Ω, μ) . Ist dieses Maß definiert auf der σ -Algebra der Borelmengen, so nennen wir es ein *Borel-Maß*.

Ein wichtiges Ziel der Maßtheorie war es den Begriff des Integrals zu verallgemeinern. Wir geben eine kurze, stark vereinfachte Variante der Grundkonzepte der Integrations-theorie und verweisen auf Folland [3] Kapitel 2 für eine vollständige Einführung.

Für einen beliebigen Maßraum (X, Ω, μ) geschieht dies über diese genannten *Treppenfunktionen* auf X

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und der *charakteristischen Funktion* der messbaren Menge A_k

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A_k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Integral dieser Funktionen wird definiert durch

$$\int_G f d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k),$$

mit der Konvention, dass $0 \times \infty = 0$. Eine Möglichkeit dies auf andere Funktionen f zu erweitern ist es Folgen (f_n) von solchen Treppenfunktionen zu betrachten. Diese nennen wir *L^1 -Cauchy-Folge*, wenn sie eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm $\|g\|_{L^1} := \int_X |g| d\mu$ ist. Konvergiert die Folge zusätzlich fast überall punktweise gegen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, so definieren wir mit

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

das Integral von f über X . Komplexwertige Funktionen $h = f + ih$ können dann durch

$$\int h d\mu = \int f d\mu + i \int g d\mu$$

integriert werden.

Ist $Y \subseteq X$ messbar in X , so setzen wir $\int_Y f d\mu := \int \mathbb{1}_Y f d\mu$ und definieren

$$\text{Vol}(Y, d\mu) = \int_Y d\mu = \int \mathbb{1}_Y d\mu = \mu(Y).$$

Wir nennen eine Funktion f integrierbar auf Y , wenn das Integral $\int_Y |f| d\mu$ endlich ist. Allgemeiner heißt eine Funktion integrierbar, wenn sie auf X integrierbar ist und wir schreiben* dann $f \in L^1(X, \Omega, \mu)$. Wenn es ist klar ist, über welchen Maßraum wir reden, lassen wir häufig auch die einfach σ -Algebra und Maß weg und schreiben dann dx für das Maß, $\int_X f(x) dx = \int f d\mu$ für das Integral und $L^1(X)$ für die integrierbaren Funktionen auf X . Damit beenden wir uns kurze Wiederholung.

Sei nun μ ein Borel-Maß auf einem lokalkompakten, hausdorffschen Raum X und sei E eine beliebige Borelmenge von X . Wir nennen μ von *innen regulär* auf E , falls

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$$

Umgekehrt heißt μ von *außen regulär* auf E , wenn

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

Definition 2.6. Ein *Radon-Maß* auf X ist ein Borel-Maß, das endlich auf kompakten Mengen, von innen regulär auf allen offenen Mengen und von außen regulär auf allen Borelmengen ist.

Radon-Maße stehen in einem engen Zusammenhang mit positiven linearen Funktionalen auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger $C_c(X)$. Dies sind lineare Abbildungen I von $C_c(X)$ nach \mathbb{R} , so dass $I(f) \geq 0$ wenn $f \geq 0$.

Satz 2.7 (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei I solch ein positives lineares Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger $C_c(X)$. Dann gibt es ein eindeutiges Radon-Maß μ auf X , so dass $I(f) = \int f d\mu$ für alle $C_c(X)$.*

*Hier missbrauchen wir etwas die Notation des L^1 -Raumes. (vgl. Folland [3] Seite 53)

Beweisskizze. Für die Konstruktion des Maßes definiert man die Abbildungen

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1 \text{ und } \text{supp}(f) \subseteq U\}$$

für alle U offen und

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E \text{ und } U \text{ offen}\}$$

für beliebige Teilmengen $E \subseteq X$. Anschließend zeigt man

- (i) μ^* ist ein äußeres Maß.
- (ii) Jede offene Menge ist μ^* -messbar.
- (iii) $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X), f \geq \mathbb{1}_K\}$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$.
- (iv) $I(f) = \int f d\mu$ für alle $f \in C_c(X)$.

(i) und (ii) implizieren zusammen mit dem Satz von Caratheodory, dass μ ein Borel-Maß, welches von außen regulär ist. (iii) liefert uns die Endlichkeit auf kompakten Mengen und die Regularität von innen auf offenen Mengen und (iv) vollendet den Satz. Für den vollständigen Satz verweisen wir auf Folland [3] Kapitel 7 Satz 7.2. \square

Dieser Satz ist ein wichtiger Grundstein für viele Aussagen über Radon-Maße. Sind zum Beispiel X und Y zwei lokalkompakte Gruppen mit dazugehörigen Radonmaßen μ und ν so ist im Allgemeinen das klassische Produktmaß $\mu \times \nu$ kein Borel- und daher kein Radon-Maß auf $X \times Y$. Wir definieren daher das Radonprodukt von μ und ν als das Radon-Maß welches durch das positive Funktional $I(f) = \int f d(\mu \times \nu)$ nach Rieszschen Darstellungssatz gegeben wird. Dieses Produkt wird für uns in Kapitel 5 eine Rolle spielen. Danach können wir es wieder vergessen, denn erfüllen X und Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom so entspricht das Radonprodukt genau dem Produktmaß. Für eine ausführliche Behandlung dieser Konzepte verweisen wir auf Folland [3] Kapitel 7.

Damit kommen wir zum großen Ziel dieses Abschnitts. Sei nun G eine lokalkompakte Gruppe und μ ein beliebiges Borel-Maß. Wir können uns dann anschauen, wie sich μ bezüglich der Translation durch beliebige Gruppenelemente $g \in G$ verhält. Gilt $\mu(gE) = \mu(E)$ für jede Borelmenge, so nennen wir μ *linksinvariant*. Analog heißt μ *rechtsinvariant*, falls $\mu(Eg) = \mu(E)$. Ist G abelsch fallen diese beiden Begriffe natürlich zusammen und wir sprechen nur von einem *translationsinvarianten* Maß μ .

Nun haben wir alle wichtigen Grundlagen zusammen für folgende wichtige

Definition 2.8. Ein *linkes* bzw. *rechtes Haar-Maß* auf G ist ein linksinvariantes bzw. rechtsinvariantes Radon-Maß, das auf nichtleeren offenen Mengen positiv ist.

Wir haben bereits einige solcher Haar-Maße kennengelernt:

Beispiele 2.9.

- (a) Ist G wieder eine diskrete Gruppe, dann ist das Zählmaß ein Haar-Maß.
- (b) Für $G = \mathbb{R}^+$ definiert das Lebesgue-Maß dx ein Haar-Maß.
- (c) Für $G = \mathbb{R}^\times$ wird durch $\mu(E) := \int_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{1}_E \frac{1}{|x|} dx$ ein Haar-Maß, wie wir später in Satz 4.3 sehen werden.

Diese Beispiele sind keine Ausnahmen. Einer der Hauptgründe, warum wir uns mit lokalkompakten Gruppen beschäftigen ist nämlich folgender Satz.

Satz 2.10 (Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Maß). *Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann existiert ein linksinvariantes Haar-Maß auf G . Dieses ist eindeutig bis auf skalares Vielfaches.*

Beweis. Der etwas längere Beweis befindet sich in Ramakrishnan und Valenza [7] Kapitel 1 Theorem 1-8 und benutzt den oben vorgestellten Rieszschen Darstellungssatz. Ziel ist es dabei, ein links-invariantes lineares Funktional auf $C_c(G)$ zu konstruieren. \square

Dieser stellt quasi die bestmögliche Situation dar, die man sich erhoffen kann. Ist nämlich μ ein Haar-Maß und $c > 0$ eine Konstante, so erhalten wir durch $c \cdot \mu$ wieder ein Haar-Maß. Wir beenden diesen Abschnitt mit einem kleinen Lemma, welches uns einige bekannte Eigenschaften des Lebesgue-Maß auf Haar-Maße verallgemeinert.

Lemma 2.11. *Sei μ ein Haar-Maß auf einer lokalkompakten abelschen Gruppe. Für jede integrierbare Funktion $f \in L^1(G)$ gilt*

$$(i) \int_G f(yx) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x) \qquad (ii) \int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$$

Beweis. (i) folgt leicht aus der Definition des Integrals und der Translationsinvarianz des Maßes, denn $\mathbb{1}_A(yx) = \mathbb{1}_{y^{-1}A}(x)$ und $\mu(y^{-1}A) = \mu(A)$.

Für (ii) überlegen wir uns zunächst, dass $\tilde{\mu}(E) := \mu(E^{-1})$ ein weiteres Haar-Maß auf G definiert. Nach der Eindeutigkeit unterscheiden sich beide Maße nur um eine Konstante $c > 0$. Wir wollen zeigen, dass $c = 1$ ist. Sei dazu K eine kompakte Umgebung der 1. Dann gibt es eine offene Umgebung U der 1 mit $G \subseteq K$. Definieren wir nun $S := KK^{-1}$, so ist S kompakt, $U \subseteq S$ und es gilt $0 < \mu(U) \leq \mu(S) < \infty$. Es folgt $c \cdot \mu(S) = \tilde{\mu}(S) = \mu(S^{-1}) = \mu(S)$ und damit $c = 1$. Das Haar-Maß ist also invariant unter der Umkehrabbildung. Der Rest folgt dann aus der Definition des Integrals. \square

2.3 Charaktere und Quasi-Charaktere

Im Rest dieser Arbeit beschränken wir uns nun auf lokalkompakte abelsche Gruppen G . Um die Fouriertransformation auf beliebigen lokalkompakten Gruppen definieren zu können, müssen wir uns erst mit Charakteren beschäftigen. Auch wenn wir sie in diesem Kontext nicht (explizit) brauchen, werden sie für uns eine wichtige Rolle im Beweis der Funktionalgleichung spielen.

Definition 2.12. Ein *Quasi-Charakter* einer topologischen abelschen Gruppe G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus von G in die multiplikative Gruppe \mathbb{C}^\times der komplexen Zahlen. Ein *Charakter* ist ein Quasi-Charakter, dessen Bild auf dem komplexen Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ liegt.

In der Literatur werden Quasi-Charaktere häufig auch einfach nur als Charaktere bezeichnet. Was wir in dieser Arbeit unter einem Charakter verstehen, wird dann unitärer Charakter genannt. Beginnen wir mit ein paar Beispielen.

Beispiele 2.13.

- (a) Für jede topologische Gruppe G ist die Abbildung $g \mapsto 1$ ein Charakter, der sogenannte *triviale Charakter*. Er ist der einzige konstante Charakter, denn für jeden Gruppenhomomorphismus χ gilt bekanntlich $\chi(1) = 1$.
- (b) Ein nicht-triviales Beispiel für einen Charakter ist die Abbildung $t \mapsto \exp(it)$ von der additiven Gruppe \mathbb{R}^+ in den Einheitskreis S^1 .
- (c) Die bekannte Abbildung $\exp : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^\times$ von der additiven Gruppe in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen ist ein (Quasi-)Charakter, jedoch kein Charakter.

Werfen wir einen Blick auf die Quasi-Charaktere kompakter Gruppen.

Lemma 2.14. *Sei K eine kompakte Gruppe mit Haar-Maß dx und $\chi : K \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Quasi-Charakter. Dann gilt*

- (i) χ ist bereits ein Charakter.
- (ii) Für das Integral von χ über K gilt

$$\int_K \chi(x) dx = \begin{cases} \text{Vol}(K, dx), & \text{falls } \chi \equiv 1 \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Beweis. Für (i) sei x ein beliebiges Element von K . Sei H der Abschluss der von x erzeugten Untergruppe von K . Damit ist H selbst eine Untergruppe von K und als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums kompakt. Da χ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, muss $\chi(H)$ eine kompakte Untergruppe von \mathbb{C}^\times sein. Diese liegen aber gerade alle auf S^1 und die Behauptung folgt.

Nun zu (ii): Der erste Fall ist klar. Im zweiten Fall gibt es ein $x_0 \in K$ mit $\chi(x_0) \neq 1$ und mit Translationsinvarianz daher

$$\int_K \chi(x) dx = \int_K \chi(x_0 x) dx = \chi(x_0) \int_K \chi(x) dx.$$

Umstellen und Division durch $\chi(x_0) - 1 \neq 0$ ergibt $\int_K \chi(x) dx = 0$. □

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir Quasi-Charaktere noch gründlicher untersuchen.

2.4 Ausblick: Fouriertransformation und Pontryagin-Dualität

Zum Ende dieses Kapitels blicken wir etwas über den Tellerrand hinaus. Dieser Abschnitt ist für das Verständnis der kommenden Beweise dieser Arbeit absolut optional, bietet aber Einblick die nötigen Abstraktionen, die in Tates eigener Argumentation zum tragen kamen. Wir schneiden daher die für Tates Doktorarbeit wichtigsten Grundlagen der abstrakten harmonischen Analysis an und versprechen in den späteren Kapiteln zu zeigen, dass unsere eigenen Definitionen mit denen in diesem Abschnitt verträglich sind.

Beginnen wir mit der Charaktergruppe auf einer beliebigen topologischen Gruppe G . Die unitären Charaktere auf G werden mit punktwiser Multiplikation $\chi\psi(x) := \chi(x)\psi(x)$ selbst wieder eine Gruppe, welche als die *duale Gruppe* \hat{G} bezeichnet wird. Wir statten \hat{G} mit einer Topologie aus: Sei K eine kompakte Teilmenge von G und V eine Umgebung der $1 \in S^1$. Dann wird durch die Teilmengen

$$W(K, V) = \{\chi \in \hat{G} : \chi(K) \subseteq V\}$$

eine Umgebungsbasis des trivialen Charakters definiert und induziert damit eine Topologie: die sogenannte *kompakt-offen Topologie*. Damit wird \hat{G} zu einer topologischen Gruppe. Man hat nun folgenden Satz

Satz 2.15. *Sei G eine abelsche topologische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Ist G diskret, so ist \hat{G} kompakt.*
- (ii) *Ist G kompakt, so ist \hat{G} diskret.*
- (iii) *Ist G lokalkompakt, so ist auch \hat{G} lokalkompakt.*

Aussage (iii) sieht verdächtig aus. Eine erste Vermutung wäre, dass G isomorph zu \hat{G} sein könnte. Dieser Verdacht stimmt im Allgemeinen leider nicht. Dafür haben wir aber das nächstbeste Ergebnis:

Satz 2.16 (Pontryagin Dualität). *Jede lokalkompakte Gruppe G ist kanonisch isomorph zu ihrem Doppel-Dual $\hat{\hat{G}}$. Der Isomorphismus topologischer Gruppen α ist gegeben durch die Auswertungsabbildung $\alpha(y)(\chi) = \chi(y)$.*

Beweis. Der etwas längere Beweis ist zum Beispiel zu finden in Ramakrishnan und Valenza [7] Kapitel 3, Theorem 3-20. \square

Für den Beweis wird ein klassisches Konzept nun verallgemeinert. Wir wissen bereits, dass jede abelsche lokalkompakte Gruppe G ein eindeutiges Haar-Maß dx besitzt. Damit können wir auf G integrieren und definieren das abstrakte Analogon zur klassischen Fouriertransformation.

Definition 2.17 (Fouriertransformation). Sei $f \in L^1(G)$. Wir definieren dann die *Fouriertransformation* $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ von f durch die Formel

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi}(x) dx$$

für alle $\chi \in \hat{G}$.

Diese Formel macht Sinn, denn für alle $x \in G$ hat $\chi(x)$ den Betrag 1. Ist also f integrierbar, so ist es auch das Produkt im Integranden. Da \hat{G} selber wieder lokalkompakt ist, besitzt das Duale ein Haar-Maß $d\chi$ und es macht Sinn die Fouriertransformation auf \hat{G} betrachten. Durch geeignete Normierung der verwendeten Maße gelangen wir zu folgendem Satz der unter Anderem in Tates Beweis der verallgemeinerten Poisson-Summenformel eine wichtige Rolle spielt.

Satz 2.18 (Umkehrformel für lokalkompakte Gruppen). *Es gibt ein Haar-Maß $d\chi$ auf \hat{G} , so dass alle $f \in L^1(G)$ stetig mit $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$, die Gleichung*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x) d\chi$$

erfüllen. Insbesondere ist also $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.

Beweis. Siehe zum Beispiel Folland [3] Kapitel 4, Satz 4.32 oder Ramakrishnan und Valenza [7] Kapitel 3, Satz 3-9. \square

3 Exkurs: p -adische Zahlen

Die Tatsache, dass die Gruppen \mathbb{R}^+ und \mathbb{R}^\times lokalkompakt sind, ist kein Zufall. Lokalkompakte Gruppen treten relativ natürlich im Zusammenhang mit algebraischen Zahlkörpern auf. Ganz Allgemeinen sind die additiven und multiplikativen Gruppen jeder Vervollständigung eines algebraischen Zahlkörpers \mathbb{K} bezüglich seiner Primideale \mathfrak{p} (oder genauer, bezüglich der durch \mathfrak{p} induzierten Topologie) lokalkompakte Gruppen. So weit gehen wir in dieser Arbeit jedoch nicht. Wir beschränken uns im folgenden Kapitel auf den Zahlkörper \mathbb{Q} und lernen die p -adischen Zahlen kennen. Dabei orientieren wir uns ganz an Gouveas exzellenten Einführungstext [4].

3.1 Absolutbeträge und der Satz von Ostrowski

Beginnen wir mit einer Wiederholung. Sei \mathbb{K} zunächst ein beliebiger Körper und $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

Definition 3.1. Ein *Absolutbetrag* auf \mathbb{K} ist eine Abbildung

$$|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)
- (ii) $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (Multiplikativität)
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (Dreiecksungleichung)

Wir nennen einen Absolutbetrag $|\cdot|$ *nicht-archimedisch*, wenn er zusätzlich die stärkere Bedingung

$$(iii)' \quad |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{K} \text{ (verschärfte Dreiecksungleichung)}$$

erfüllt. Anderenfalls sagen wir der Absolutbetrag ist *archimedisch*.

Beispiele 3.2.

- (a) Auf jedem beliebigen Körper \mathbb{L} ist der *triviale Absolutbetrag*

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ein nicht-archimedischer Absolutbetrag.

- (b) Auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist der *reellen Absolutbetrag* bzw. der *komplexen Absolutbetrag* ein archimedischer Absolutbetrag.

Halten wir einige Eigenschaften von Absolutbeträgen in einem Lemma fest.

Lemma 3.3. Für beliebige Absolutbeträge $|\cdot|$ auf \mathbb{K} und Elemente $x \in \mathbb{K}$ gilt:

- (i) $|1| = 1$
- (ii) $|-1| = 1$
- (iii) Falls $|x^n| = 1$, dann $|x| = 1$
- (iv) $|-x| = |x|$

Beweis. (i) folgt direkt aus $|1| = |1 \cdot 1| = |1| \cdot |1|$ und $|1| \neq 0$. Ähnlich bei (ii): $1 = |-1 \cdot -1| = |-1| \cdot |-1|$ und mit $|-1| > 0$ folgt die Behauptung. (iii) folgt mit $|x| \geq 0$ aus $|x^n| = |x|^n$ und (iv) gilt wegen $|-x| = |-1||x| = |x|$. \square

Wir wollen uns im Folgenden auf den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen beschränken. Dort kennen wir bereits den archimedischen reellen Absolutbetrag

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

welchen wir von nun an mit $|\cdot|_\infty$ bezeichnen wollen.

Es stellt sich nun die Frage, ob es auch nicht-archimedische Absolutbeträge auf \mathbb{Q} gibt. Betrachten wir dazu mit $x \in \mathbb{Q}^\times$ eine beliebige rationale Zahl ungleich 0. Dann existiert eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$x = \prod_p p^{v_p},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ geht und $v_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle* p gleich 0 ist. Legen wir uns auf ein p fest, so ermöglicht sich die

Definition 3.4. Für beliebige $x \in \mathbb{Q}^\times$ sei der *p-adische Absolutbetrag* von x gegeben durch

$$|x|_p = p^{-v_p}$$

mit $v_p \in \mathbb{Z}$ wie oben. Durch $|0|_p := 0$ erhalten wir dann eine Abbildung $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Der Name der Abbildung ist nicht willkürlich gewählt wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 3.5. Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist $|\cdot|_p$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf \mathbb{Q} .

Beweis. Die Definitheit folgt sofort aus der Definition. Für die Multiplikativität schreiben wir $x = p^k \frac{m}{n}$ und $y = p^{k'} \frac{m'}{n'}$ mit m, m', n, n' teilerfremd zu p . Dann ist

$$|xy|_p = \left| p^{k+k'} \frac{mm'}{nn'} \right|_p = p^{-(k+k')} = p^{-k} p^{-k'} = |x|_p |y|_p.$$

Zuletzt zur verschärften Dreiecksungleichung. Mit $x = p^k \frac{m}{n}$ und $y = p^{k'} \frac{m'}{n'}$ wie eben können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $k \leq k'$. Es gilt

$$x + y = p^k \frac{mn' + p^{k'-k} nm'}{nn'}.$$

Für $k < k'$ ist $mn' + p^{k'-k} nm'$ teilerfremd zu p und es folgt $|x + y|_p = p^{-k} = \max(|x|_p, |y|_p)$. Ist dagegen $k = k'$, so hat der Zähler die Form $mn' + nm'$ und ist nicht unbedingt teilerfremd zu p . Wir erhalten dann $|x + y|_p \leq p^{-k} = \max(|x|_p, |y|_p)$. \square

Korollar 3.6. Jedes Dreieck ist bezüglich des p-adischen Absolutbetrags gleichschenkelig.

Beweis. Der Beweis des Lemmas zeigt, dass Gleichheit der verschärften Dreiecksungleichung eintritt, wenn $|x|_p \neq |y|_p$. \square

Somit haben wir neben den archimedischen trivialen Absolutbetrag und $|\cdot|_\infty$ auch unendlich viele nicht-archimedische Beträge $|\cdot|_p$ gefunden. Es stellt sich nun die Frage: Gibt es mehr? Jein! Fixieren wir einen beliebigen Absolutbetrag $|\cdot|$, so ist auch $|\cdot|^\alpha$ für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ein weiterer Absolutbetrag. Wir nennen solche Beträge *äquivalent* und zeigen, dass wir auf \mathbb{Q} bereits alle Äquivalenzklassen von Beträgen gefunden haben.

Satz 3.7 (Ostrowski). Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf \mathbb{Q} ist äquivalent zu einem der Absolutbeträge $|\cdot|_p$, wobei p entweder eine Primzahl ist oder $p = \infty$.

Der Beweis ist etwas länger und trägt nicht unmittelbar dem Verständnis der Arbeit bei. Wir haben uns daher vorbehalten ihn in den Anhang zu verschieben.

*Für diese Arbeit gebrauchen wir die Bedeutung: für alle bis auf endlich viele

3.2 Vervollständigungen von \mathbb{Q}

Eine Möglichkeit die reellen Zahlen \mathbb{R} zu konstruieren war über die (metrische) (*Vervollständigung*) der rationalen Zahlen \mathbb{Q} bezüglich des Absolutbetrags $|\cdot|_\infty$. Wir werden diese Konstruktion mit den p -adischen Beträgen $|\cdot|_p$ nutzen und geben daher im folgenden Abschnitt eine kurze Wiederholung der wichtigsten Ideen.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer nichtleeren Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)^*$, die

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Positive Definitheit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

erfüllt. Jede Metrik induziert durch für jedes $x \in X$ durch die *offenen Bälle* $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ eine Umgebungsbasis und damit eine Topologie auf ganz X . Eine Folge (x_n) in X heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn die reelle Folge $(d(x_n, x))$ eine Nullfolge ist. Eine *Cauchy-Folge* in dem metrischen Raum X ist eine Folge (x_n) in X , so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Man sieht leicht, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Die Umkehrung gilt allerdings im Allgemeinen nicht. Ist jede Cauchy-Folge konvergent, so nennen wir den metrischen Raum (X, d) *vollständig*.

Ausgehend von einem Körper \mathbb{K} definiert jeder Absolutbetrag $|\cdot|$ auf \mathbb{K} durch $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik. Wir sprechen dann von der durch $|\cdot|$ induzierten Metrik auf \mathbb{K} . Ist dieser Absolutbetrag sogar nicht-archimedisch vereinfacht sich die Definition einer Cauchy-Folge. Im nicht-archimedischen Fall vereinfacht sich diese Definition etwas.

Lemma 3.8. *Eine Folge (x_n) auf \mathbb{K} ist genau dann bezüglich eines nicht-archimedischen Absolutbetrags $|\cdot|$ eine Cauchy-Folge, wenn*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

Beweis. Wenn $m > n$, so haben wir

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} x_{k+1} - x_k \right| \leq \max\{|x_m - x_{m-1}|, \dots, |x_{n+1} - x_n|\}$$

und das Lemma folgt sofort aus den Definitionen. \square

Gehen wir nun wieder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ über. Es ist bereits bekannt, dass \mathbb{Q} bezüglich der durch $|\cdot|_\infty$ induzierten Metrik nicht vollständig ist. Für $p < \infty$ haben wir folgendes

Lemma 3.9. *Der metrische Raum (\mathbb{Q}, d_p) ist nicht vollständig.*

Beweis. Wir geben einen kurzen Beweis für $p > 3$ und verweisen auf Gouvea [4] Lemma 3.2.3 für die verbleibenden zwei Fälle.

Betrachten wir die Folge $(x_n) = (a^{p^n})$, wobei $1 < a < p - 1$ eine natürliche Zahl ist. Es gilt

$$\left| a^{p^{n+1}} - a^{p^n} \right|_p = \left| a^{p^n} (a^{p^n(p-1)} - 1) \right|_p.$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat wissen wir $a^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$, also ist p^n ein Teiler von $a^{p^n(p-1)} - 1$ und es folgt

$$|x_{n+1} - x_n|_p = \left| a^{p^n} \right|_p \cdot \left| (a^{p^n(p-1)} - 1) \right|_p \leq p^{-n} \rightarrow 0.$$

*Bei der Konstruktion der reellen Zahlen spielen hier natürlich nur die rationalen Elemente des Intervalls eine Rolle

Damit ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Angenommen (x_n) konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Q}$. Dann haben wir

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^p = x^p$$

und folglich $x = 1$ oder $x = -1$. Für n genügend groß gilt

$$\begin{aligned} |x - a|_p &= |x - x_n + x_n - a|_p \leq \max\{|x - x_n|_p, |x_n - a|_p\} \\ &= |x_n - a|_p = \underbrace{|a|_p}_{\leq 1} \cdot |a^{p^n-1} - 1|_p \leq |a^{p^n-1} - 1|_p < 1, \end{aligned}$$

am Ende wieder nach dem kleinen Satz von Fermat. Also ist p ein Teiler von $x - a$. Wegen $x = \pm 1$ und der Wahl von a ist aber $0 < x - a < p$. Ein Widerspruch. \square

Es macht also Sinn \mathbb{Q} ganz wie im Falle der reellen Zahlen bezüglich $|\cdot|_p$ vervollständigen.

Satz 3.10. *Für jede Primzahl p oder $p = \infty$ gibt es eine Vervollständigung \mathbb{Q}_p von \mathbb{Q} und einen Absolutbetrag $|\cdot|_p$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es gibt eine Inklusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ und der durch $|\cdot|_p$ auf \mathbb{Q} induzierte Betrag ist der p -adische bzw. reelle Absolutbetrag.*
2. *Das Bild von \mathbb{Q} bezüglich dieser Inklusion ist dicht in \mathbb{Q}_p .*
3. *\mathbb{Q}_p ist vollständig bezüglich des Absolutbetrags $|\cdot|_p$.*

Der Körper \mathbb{Q}_p mit diesen Eigenschaften ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphismen, die den Absolutbetrag erhalten.

Beweisidee. Die Grundidee der Konstruktion ist mit der Menge aller Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} zu beginnen. Diese wird zu einem Ring wenn wir Addition und Multiplikation gliedweise definieren. Anschließend teilen wir alle Nullfolgen raus, d.h. zwei Cauchy-Folgen sind genau dann äquivalent, wenn sie sich um eine Nullfolge unterscheiden. Zu guter Letzt lässt sich \mathbb{Q} einbetten als die Menge aller konstanten Folgen. Von diesem Raum kann gezeigt werden, dass jede Cauchy-Folge (also eine Cauchy-Folge von Cauchy-Folgen auf \mathbb{Q}) konvergiert.

Für die genaue Konstruktion und den Beweis der Eindeutigkeit, siehe zum Beispiel Gouvea [4] Theorem 3.2.13. \square

Lemma 3.11. *Das Bild von \mathbb{Q}_p unter $|\cdot|_p$ ist gleich $p^{\mathbb{Z}}$.*

Beweis. Auch hier verweisen wir auf Gouvea [4] und zwar Lemma 3.3.1. Die Grundidee ist zu zeigen, dass für jede Cauchy-Folge (x_n) in \mathbb{Q} die Folge der Beträge $(|x_n|_p)$ gegen 0 konvergiert oder irgendwann konstant wird. \square

3.3 Topologische Eigenheiten

Wir haben zwei Gruppenstrukturen auf \mathbb{Q}_p , nämlich die additive Gruppe $\mathbb{Q}_p^+ = (\mathbb{Q}_p, +, 0)$ und die multiplikative Gruppe $\mathbb{Q}_p^\times = (\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Zudem induziert der p -adische Betrag eine Topologie auf \mathbb{Q}_p^+ , welche durch den Übergang zur Teilraumtopologie zu einer auf \mathbb{Q}_p^\times wird. Es macht daher Sinn \mathbb{Q}_p im Kontext topologischer Gruppen zu betrachten.

Satz 3.12. *Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ gilt*

- (i) \mathbb{Q}_p^+ *ist eine topologische Gruppe.*
- (ii) \mathbb{Q}_p^\times *ist eine topologische Gruppe.*

Beweis. Zu (i): Die Stetigkeit der Addition und der Negierung sind eigentlich direkte Folgen der Konstruktion als Vervollständigung. Als kleine Auffrischung zeigen wir sie trotzdem im Kontext metrischer Räume. Seien $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ konvergente Folgen in \mathbb{Q}_p . Es ist zu zeigen, dass $x_n + y_n$ gegen $x + y$ konvergiert. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|(x_n + y_n) - (x + y)|_p = |(x_n - x) + (y_n - y)|_p \leq |x_n - x|_p + |y_n - y|_p.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0, also ist die linke eine Nullfolge und die Stetigkeit der Addition folgt. Ähnlich zeigen wir $-x_n \rightarrow -x$, denn $|(-x_n) - (-x)|_p = |x_n - x|_p$. Damit ist \mathbb{Q}_p eine topologische Gruppe.

Zu (ii): $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p^+ \setminus \{0\}$ ist ein offener Teilraum von \mathbb{Q}_p^+ und somit selbst wieder hausdorffsch und lokalkompakt. Für die Stetigkeit seien $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ zwei konvergente Folgen in \mathbb{Q}_p^\times . Wir zeigen, dass $x_n y_n$ gegen xy konvergiert. Dies folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy|_p &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|_p \\ &\leq |x_n y_n - x_n y|_p + |x_n y - xy|_p \\ &= \underbrace{|x_n|_p}_{\text{beschränkt}} \underbrace{|y_n - y|_p}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|x_n - x|_p}_{\rightarrow 0} |y|_p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Weiter zur Invertierung. Wegen

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right|_p = \frac{|x_n - x|_p}{|x_n x|_p} \rightarrow 0$$

folgt, dass x_n^{-1} gegen x^{-1} konvergiert und die Stetigkeit ist gezeigt. \square

Bisher haben wir uns noch keine nähren Gedanken über die offenen Mengen der Topologie gemacht. Da \mathbb{Q}_p^\times nur die Teilraumtopologie erbt, reicht es sich zunächst auf \mathbb{Q}_p^+ zu konzentrieren. Wir wissen bereits, dass die offenen Mengen gerade durch die offenen Bälle

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{Q}_p : |x - y|_p < \varepsilon\}$$

mit $x \in \mathbb{Q}_p$ und $\varepsilon > 0$ erzeugt werden. Da wir es aber mit einer topologischen Gruppe zu tun haben, reicht es nur die offenen Bälle $B(\varepsilon) := B(0, \varepsilon)$ zu betrachten. Diese bilden dann eine Umgebungsbasis der 0. Wir haben aber gesehen, dass $|\mathbb{Q}_p|_p = p^{\mathbb{Z}}$. Folglich ist $B(\varepsilon) = B(\varepsilon')$ für $p^k < \varepsilon, \varepsilon' \leq p^{k+1}$. Es sind also nur solche ε interessant, die selber Potenzen von p sind. Dies hat aber noch weitere Auswirkungen. Es gilt

$$\overline{B(p^k)} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^k\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < p^{k+1}\} = B(p^{k+1}).$$

Alle abgeschlossenen Bälle sind offen. Umgekehrt sind alle offenen Bälle abgeschlossen, wir müssen nur die Gleichung von rechts nach links lesen. Im Englischen haben wir für diese Art von Mengen die schöne Wortschöpfung *clopen** für *closed* und *open*. Definieren wir nun die offene und abgeschlossene Menge der *p*-adischen ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < p\}.$$

Diese bildet eine offene, abgeschlossene Umgebung der 0. Wir können jedes Element der Umgebungsbasis durch \mathbb{Z}_p darstellen, denn es gilt

$$p^k \mathbb{Z}_p = \{p^k x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^{-k}\}.$$

Diese Mengen haben noch eine weitere Eigenschaft: Sie sind Untergruppen von \mathbb{Q}_p^+ . Offensichtlich ist für jedes $x \in p^k \mathbb{Z}_p$ auch $-x \in p^k \mathbb{Z}_p$. Die verschärfte Dreiecksungleichung garantiert uns dann, dass für alle $x, y \in p^k \mathbb{Z}_p$ auch die Summe $x + y$ wieder in $p^k \mathbb{Z}_p$ liegt.

*Abgeschlossen?

Wir können nun für jede p -adische Zahl x eine Basis offener Umgebungen angeben. Diese besteht aus offenen Mengen der Form $x + p^k \mathbb{Z}_p$. Solche Mengen haben wieder ihre Eigenheiten. Wir haben uns überlegt, dass in den p -adischen Zahlen jedes Dreieck gleichschenkelig ist. Das hat aber zur Folge, dass auch jeder Punkt innerhalb eines Kreises bereits der Mittelpunkt ist! Betrachten wir dazu die Kreisscheibe $x_1 + p^k \mathbb{Z}_p$ und sei $x_2 \in x_1 + p^k \mathbb{Z}_p$ beliebig. Offensichtlich ist $x_1 \in x_2 + p^k \mathbb{Z}_p$. Es reicht also zu zeigen, dass $x_2 + p^k \mathbb{Z}_p \subseteq x_1 + p^k \mathbb{Z}_p$, die andere Richtung folgt dann analog. Für ein beliebiges $y \in x_2 + p^k \mathbb{Z}_p$ haben wir

$$|x_1 - y|_p = |x_1 - x_2 + x_2 - y|_p \leq \max\{|x_1 - x_2|_p, |x_2 - y|_p\} \leq p^{-k},$$

also $y \in x_1 + p^k \mathbb{Z}_p$ und folglich $x_1 + p^k \mathbb{Z}_p = x_2 + p^k \mathbb{Z}_p$. Wir können sogar noch mehr zeigen. \mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{Q}_p , d.h. jede Umgebung $x + p^k \mathbb{Z}_p$ enthält eine rationale Zahl a . Damit lässt jedes Element der Umgebungsbasis schreiben als $a + p^k \mathbb{Z}_p$ für $k \in \mathbb{Z}$ und ein $a \in \mathbb{Q}$.

Bisher haben wir nur offene und abgeschlossene Mengen betrachtet. Wie sieht es mit kompakten Mengen aus?

Satz 3.13. \mathbb{Z}_p ist kompakt

Beweis. Da wir uns in einem metrischen Raum befinden nutzen die Charakterisierung kompakter Mengen als vollständige und totalbeschränkte Mengen. Ersteres folgt daraus, dass \mathbb{Z}_p als abgeschlossene Menge des vollständigen Raumes \mathbb{Q}_p selber vollständig ist. Eine Menge heißt totalbeschränkt, wenn wir sie für jedes $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen ε -Bällen überdecken können. Da der Betrag nur diskrete Werte annimmt reicht es wieder ε der Form p^k zu betrachten. Der Fall $k \geq 0$ ist klar, da dann $\mathbb{Z}_p \subseteq p^{-k} \mathbb{Z}_p$.

Sei also $k < 0$. Wir haben eine (nicht unbedingt endliche) Überdeckung von \mathbb{Z}_p durch alle $x + p^k \mathbb{Z}_p$ mit $x \in \mathbb{Z}_p$. Aus vorherigen Überlegungen wissen wir, dass wir diese Mengen auch darstellen können durch $a + p^k \mathbb{Z}_p$ mit $a \in \mathbb{Q}$. Genauer muss a auch in \mathbb{Z}_p liegen, wodurch wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $a \in \mathbb{Z}$ liegt. Wir stellen jetzt einen Bezug zwischen p -adischen Absolutbetrag und modularer Arithmetik her. Es ist $a_1 + p^k \mathbb{Z}_p = a_2 + p^k \mathbb{Z}_p$ genau dann, wenn $a_1 \in a_2 + p^k \mathbb{Z}_p$, also $|a_1 - a_2| \leq p^{-k}$. Das bedeutet gerade, dass p^k ein Teiler von $a_1 - a_2$ ist, oder anders ausgedrückt $a_1 \equiv a_2 \pmod{p^k}$. Folglich kann es nur p^k verschiedene Mengen der Form $a + p^k \mathbb{Z}_p$ geben, welche dann durch $a = 0 \dots p^{-k+1} - 1$ repräsentiert werden. Die Überdeckung ist also schon endlich. Als vollständige und totalbeschränkte Menge ist \mathbb{Z}_p somit kompakt. \square

Damit sieht man aber auch schnell ein, dass alle Mengen der Form $a + p^k \mathbb{Z}_p$ als stetiges Bild einer kompakter Menge wieder kompakt sind. Hier muss man sich nur kurz bewusst machen, dass die Abbildung $x \mapsto p^k x$ in \mathbb{Q}_p^+ auch tatsächlich stetig ist.

Zum Ende dieses Abschnitts wenden wir uns noch einer wichtigen multiplikativen Untergruppe zu: die Gruppe der ganzzahligen Einheiten

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}.$$

Sie entspricht dem Einheitskreis S^1 im Komplexen und spielt später bei der Berechnung von Integralen eine wichtige Rolle. Zuerst bemerken wir, dass \mathbb{Z}_p^\times als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\} \subset \mathbb{R}_0^+$ unter der stetigen Betragsabbildung selbst wieder abgeschlossen ist. Damit ist aber \mathbb{Z}_p^\times als abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{Z}_p kompakt. Ähnlich zu $\mathbb{C}^\times = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} r S^1$ haben wir zudem auch im p -adischen Fall eine disjunkte Zerlegung der Einheiten \mathbb{Q}_p^\times in Translationen von \mathbb{Z}_p^\times . Diese hat aber eine wichtige Besonderheit: Da unser Betrag nur diskrete Werte annimmt, ist die Zerlegung $\mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^k \mathbb{Z}_p^\times$ sogar abzählbar.

3.4 Die Potenzreihendarstellung

Nachdem wir die Struktur und Topologie auf \mathbb{Q}_p besser verstanden haben, sollten wir uns etwas mit den eigentlichen Objekten, den p -adischen Zahlen beschäftigen. Wie auch schon im Fall der Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich $|\cdot|_\infty$ sind die Objekte dieser Konstruktion etwas unhandlich. In \mathbb{R} hatten wir die Dezimalbruchentwicklung $x = \pm \sum_{k=-\infty}^n x_k 10^k$, $x_k \in \{0, \dots, 9\}$ oder etwas allgemeiner die b -adische Darstellung $x = \pm \sum_{k=-\infty}^n x_k b^k$, $x_k \in \{0, \dots, b-1\}$ für eine natürliche Zahl $b > 1$, die zwar nicht unbedingt eindeutig ist ($0,999\dots = 1,000\dots$) aber wesentlich anschaulicher als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zu unserer Freude werden wir feststellen, dass es auch in \mathbb{Q}_p eine ähnliche Darstellung gibt. Diese ist im Gegensatz zu der Darstellung in \mathbb{R} sogar eindeutig und kann, wieder etwas ungewohnt, unendliche viele Stellen vor dem Komma, aber nur endlich viele Nachkommastellen haben

Satz 3.14. *Jede Element $x \in \mathbb{Q}_p$ lässt sich eindeutig als eine Potenzreihe*

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$$

mit $x_k \in \{0, \dots, p-1\}$, $x_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ darstellen. Insbesondere gilt $|x|_p = p^{-n}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst dass die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=N}^n x_k p^k$ in \mathbb{Q}_p konvergiert.

$$|S_n - S_{n-1}|_p = |x_n p^n|_p = p^{-n} \rightarrow 0$$

und damit haben wir schon gezeigt, dass die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Da \mathbb{Q}_p vollständig ist, konvergiert diese gegen einen Wert für den wir $\sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$ schreiben.

Als nächstes sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Wir konstruieren nun eine Folge (x_k) mit $x_k \in \{0, \dots, p-1\}$, so dass die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n x_k p^k$ gegen x konvergieren. Da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{Q}_p liegt finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit

$$\left| x - \frac{a}{b} \right|_p \leq p^{-n} \leq 1.$$

In der Tat finden wir sogar eine ganze Zahl: Für $\frac{a}{b}$ wie eben haben wir

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p \leq \max \left\{ |x|_p, \left| x - \frac{a}{b} \right|_p \right\} \leq 1.$$

Dies zeigt, dass p kein Teiler von b ist und wir folglich eine Bezout-Darstellung $1 = b'b + p'p^n$ (also $b'b \equiv 1 \pmod{p^n}$) für $b', p' \in \mathbb{Z}$ haben. Weiter ist

$$\left| \frac{a}{b} - ab' \right|_p = \left| \frac{a(1 - bb')}{b} \right|_p = \left| \frac{a(p'p^n)}{b} \right|_p \leq p^{-n}$$

und natürlich $ab' \in \mathbb{Z}$. Wir definieren nun $y_n \in \mathbb{Z}$ als die eindeutig bestimmte Zahl, so dass

$$0 \leq y_n \leq p^n - 1 \quad \text{und} \quad y_n \equiv ab' \pmod{p^n}.$$

Dann gilt

$$|x - y_n|_p = \left| x - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - y_n \right|_p \leq \max \left\{ \left| x - \frac{a}{b} \right|_p, \left| \frac{a}{b} - ab' \right|_p \right\} \leq p^{-n}$$

und daher konvergiert die Folge (y_n) gegen x . Wir zeigen, dass diese Folge eindeutig ist. Sei dazu y'_n eine weitere Zahl mit $0 \leq y'_n \leq p^n - 1$ und $|x - y'_n|_p \leq p^{-n}$. Dann gilt aber wie eben

$$|y_n - y'_n|_p = |y_n - x + x - y'_n|_p \leq p^{-n},$$

also ist p^n ein Teiler von $y_n - y'_n$ und folglich $y_n - y'_n = 0$. Aus dieser Eindeutigkeit folgt unter anderem auch, dass $y_n \equiv y_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$, denn

$$|y_n - y_{n-1}|_p = |y_n - x + x - y_{n-1}|_p \leq \max\{|y_n - x|_p, |x - y_{n-1}|_p\} \leq p^{-n+1},$$

und folglich p^{n-1} ein Teiler von $y_n - y_{n-1}$. Die eindeutigen p -adischen Entwicklungen dieser y_n sind genau die gesuchten Partialsummen S_n und definieren induktiv die gesuchten x_k . Damit haben wir die Aussage für \mathbb{Z}_p gezeigt.

Für beliebige $x \in \mathbb{Q}_p$ existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $p^N x \in \mathbb{Z}_p$. Damit haben wir eine eindeutige Entwicklung $p^N x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$ und folglich mit

$$x = \sum_{k=-N}^{\infty} x_{(k+N)} p^k$$

die geforderte Entwicklung für x . □

Die Potenzreihendarstellung verschafft uns nun einen alternativen Blick auf die im letzten Abschnitt behandelten Mengen. Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der verschärften Dreiecksungleichung jedes $x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$ mit $x_N \neq 0$ den p -adischen Betrag $|x|_p = p^{-N}$ hat. Folglich ist dann

$$p^N \mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k \in \mathbb{Q}_p \right\}.$$

Fassen wir diese Potenzreihenentwicklung als Analogie zur Laurent-Reihenentwicklung meromorpher Funktion auf, so entspricht \mathbb{Z}_p den holomorphen Funktionen und $p^n \mathbb{Z}_p$ den meromorphen Funktionen mit Pol- bzw. Nullstelle vom Grad n . Weiter ist

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k \in \mathbb{Q}_p \mid x_0 \neq 0 \right\}$$

und entspricht den holomorphen Funktionen die am Entwicklungspunkt nicht verschwinden.

4 Die lokale Theorie

Nach diesem kurzen Ausflug in die Welt der p -adischen Zahlen machen wir uns wieder auf den Weg zu Tates Beweis. Eingenen wir uns zunächst auf etwas Notation. Eine *Stelle* von \mathbb{Q} ist eine Primzahl oder ∞ . Erstere werden auch *endliche Stellen* oder in Anlehnung an ihre Absolutbeträge *nicht-archimedische Stellen*. Analog bezeichnen wir ∞ als die *unendliche* oder auch *archimedische Stelle*. Im Folgenden werden wir immer p für eine Stelle verwenden. Es wird also keine Verwirrung stiften, wenn wir $p < \infty$ schreiben und damit meinen, dass p eine Primzahl ist. Umgekehrt schreiben wir $p \leq \infty$ wenn eine beliebige Stelle gemeint ist. Setzt man zudem noch $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$, so haben wir für jede Stelle einen Körper \mathbb{Q}_p , der aus der Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich $|\cdot|_p$ hervorgeht. Wenn wir $|\cdot|$ schreiben, somit ist stets der komplexen Betrag gemeint.

Zum Schluss des letzten Kapitels haben wir gesehen, dass die endliche Stellen gewisse Ähnlichkeiten mit der lokalen Darstellung meromorpher Funktionen als Laurent-Reihe haben. Wir werden also im folgenden Abschnitt den Körper \mathbb{Q} „lokal“ an den Stellen $p \leq \infty$ genauer untersuchen. Dabei richten wir uns an einer Mischung aus Tates Doktorarbeit [10], deren Behandlung durch Ramakrishnan und Valenza[7] und Deitmar [2].

4.1 Lokale Körper

Halten wir zunächst ein wichtiges Resultat des letzten Kapitels fest.

Satz 4.1. *Für alle Stellen $p \leq \infty$ haben wir:*

- (i) \mathbb{Q}_p^+ ist eine lokalkompakte Gruppe.
- (ii) \mathbb{Q}_p^\times ist eine lokalkompakte Gruppe.

Ein Körper, dessen additive und multiplikativen Gruppen lokalkompakt sind, nennt man auch *Lokaler Körper*.

Beweis. Für $p = \infty$ sind diese Aussagen bereits bekannt. Für $p < \infty$ müssen wir nur kurz argumentieren, dass \mathbb{Q}_p^+ und \mathbb{Q}_p^\times hausdorffsch sind. Dies ist aber klar, da \mathbb{Q}_p^+ ein metrischer Raum und \mathbb{Q}_p^\times eine offene Teilmenge von \mathbb{Q}_p^+ ist. Die restlichen Eigenschaften haben wir in Kapitel 3 gezeigt. \square

Als lokalkompakte Gruppe existiert nach Satz 2.10 ein Haar-Maß auf \mathbb{Q}_p^+ , welches wir mit dx_p bezeichnen. Im Fall $p = \infty$ können wir als dx_∞ einfach das Lebesgue-Maß nehmen und ersparen uns bei jeder Integration eine Konstante mitschleppen zu müssen. Die Stellen $p < \infty$ sind dagegen Neuland für uns und daher nicht beeinflusst von alten Gewohnheiten. Der folgende Satz wird allerdings zeigen, dass es sinnvoll ist die Normierung mit $\text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) = 1$ zu wählen.

Satz 4.2. *Schreibe μ für das Maß dx_p . Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{Q}_p$ und jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ gilt*

$$\mu(xA) = |x|_p \cdot \mu(A).$$

Insbesondere folgt für jedes $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ und $x \neq 0$:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x^{-1}y) d\mu(y) = |x|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(y) d\mu(y).$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Die Funktion μ_x definiert durch

$$\mu_x(A) = \mu(xA)$$

definiert wieder ein Haar-Maß auf \mathbb{Q}_p und unterscheidet sich daher nur durch Skalierung mit einer positiven Konstante $c > 0$ von μ . Ziel wird es nun sein $c = |x|_p$ zu zeigen. Dies ist klar im Fall $p = \infty$.

Für $p < \infty$ reicht es dank unserer Normierung $\mu(x\mathbb{Z}_p) = |x|_p$ zu zeigen. Sei dazu $|x|_p = p^{-k}$. Dann ist $x = p^k y$ mit $y \in \mathbb{Z}_p$ und $x\mathbb{Z}_p = p^k \mathbb{Z}_p$. Daher reduziert sich unsere Betrachtung auf $\mu(p^k \mathbb{Z}_p) = p^{-k}$. Beginnen wir mit dem Fall $k \geq 0$. Dann ist $p^k \mathbb{Z}_p$ eine Untergruppe von \mathbb{Z}_p und für den Index gilt $[\mathbb{Z}_p : p^k \mathbb{Z}_p] = p^k$. Wir haben also eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{Z}_p = \bigcup_{a=0}^{p^k-1} a + p^k \mathbb{Z}_p$. Aus der Translationsinvarianz folgern wir dann

$$1 = \mu(\mathbb{Z}_p) = \sum_{a=0}^{p^k-1} \mu(a + p^k \mathbb{Z}_p) = \sum_{a=0}^{p^k-1} \mu(p^k \mathbb{Z}_p) = p^k \mu(p^k \mathbb{Z}_p).$$

Die Behauptung folgt dann durch einfaches Umformen. Im anderen Fall $k < 0$ ist umgekehrt \mathbb{Z}_p eine Untergruppe von $p^k \mathbb{Z}_p$ mit Index $[p^k \mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}_p] = p^{-k}$ und die Behauptung folgt analog. \square

Damit haben wir eine sinnvolle Normierung des additiven Maßes dx_p gefunden. Wie sieht es auf den multiplikativen Gruppen \mathbb{Q}_p^\times aus? Zunächst können wir einen Bezug zwischen additiven und multiplikativen Mäßen herstellen.

Satz 4.3. *Ist dx_p ein additives Haar-Maß auf \mathbb{Q}_p , so definiert $\frac{dx_p}{|x|_p}$ ein multiplikatives Haar-Maß $d^\times x_p$ auf \mathbb{Q}_p^\times . Insbesondere gilt dann für alle $g \in L^1(\mathbb{Q}_p^\times)$*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} g(x) dx_p = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} g(x) \frac{dx_p}{|x|_p}$$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass \mathbb{Q}_p^\times eine lokalkompakte Gruppe ist und folglich ein Haar-Maß besitzt. Wenn wir nun ein positives, lineares Funktional auf $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$ angeben, erhalten wir nach Riesz'schen Darstellungssatz ein Radonmaß, welches diesem Funktional entspricht. Ist nun $g \in C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$, so ist $g \cdot |\cdot|_p^{-1} \in C_c(\mathbb{Q}_p^+ \setminus \{0\})$. Dies ist in der Tat eine eins-zu-eins Zuweisung. Wir definieren nun das nicht-triviale, positive lineare Funktional

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} g(x) \frac{dx_p}{|x|_p}.$$

auf $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$. Es ist translationsinvariant, denn

$$\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} g(y^{-1}x) \frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} g(x) \frac{|y|_p dx_p}{|yx|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} g(x) \frac{dx_p}{|x|_p}$$

und folglich kommt es von einem Haar-Maß $d^\times x_p$. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Funktionen in $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$ dicht in $L^1(\mathbb{Q}_p^\times)$ liegen. Beim Übergang zum Grenzwert erhalten wir die Gleichung auf den integrierbaren Funktionen. \square

Wir können also die Normierung abhängig von dx_p machen. Für $p = \infty$ spricht nichts dagegen einfach $d^\times x_\infty = \frac{dx_\infty}{|x|_\infty}$ beizubehalten. Im endlichen Fall machen wir uns etwas mehr Gedanken. Wir haben die multiplikative Untergruppe \mathbb{Z}_p^\times kennengelernt und gesehen, dass $\mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^k \mathbb{Z}_p^\times$. Aufgrund der (multiplikativen) Translationsinvarianz ist $\text{Vol}(p^k \mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p}) = \text{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p})$. Es ist daher interessant zu erfahren, welchen Wert $\text{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p})$ annimmt. Da \mathbb{Z}_p^\times kompakt ist muss er endlich sein. Wir rechnen

$$\text{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p}) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} dx_p = \text{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx_p).$$

Nun können wir aber \mathbb{Z}_p^\times disjunkt zerlegen durch

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigcup_{k=1}^{p-1} (k + p\mathbb{Z}_p)$$

und haben daher

$$\text{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx_p) = \sum_{k=1}^{p-1} \text{Vol}(k + p\mathbb{Z}_p, dx_p) = (p-1) \text{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p) = \frac{p-1}{p},$$

wobei wir im letzten Schritt $\text{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p) = |p|_p \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)$ ausgenutzt haben.

Wir normieren $d^\times x_p$ im Fall $p < \infty$ durch $d^\times x_p = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{dx_p}{|x|_p}$. Damit hat \mathbb{Z}_p^\times gerade das Maß Eins hat.

4.2 Lokale Fourieranalysis

Fassen wir zunächst die Normierungen des letzten Abschnitts in einer Definition zusammen.

Definition 4.4. Das *normalisierte additive Haar-Maß* dx_p auf \mathbb{Q}_p^+ ist definiert durch

- dx_∞ entspricht dem Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} .
- dx_p so normiert, dass $\text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) = 1$ für $p < \infty$.

Das *normalisierte multiplikative Haar-Maß* $d^\times x_p$ auf \mathbb{Q}_p^\times ist definiert durch

- $d^\times x_\infty = \frac{dx_\infty}{|x|_\infty}$.
- $d^\times x_p = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{dx_p}{|x|_p}$ für $p < \infty$.

Im Kapitel über topologische Gruppen haben wir bereits einen Ausblick auf die abstrakte Fourieranalysis gegeben. Wir werden nun unseren eigenen, naiveren Ansatz auf den lokalen Körpern \mathbb{Q}_p verfolgen, wobei im unendlichen Fall die klassische Theorie fast direkt übernommen werden kann. Wie versprochen bauen wir eine Brücke zur abstrakten harmonischen Analysis und schauen uns im Sinne der harmonischen Analysis die Charaktere auf \mathbb{Q}_p^+ an. Dazu beginnen mit der Definition eines nicht-trivialen Charakters e_p und zeigen anschließend, dass wir jeden beliebigen Charakter $\psi \in \widehat{\mathbb{Q}_p^+}$ durch e_p darstellen können.

Definition 4.5. Wir definieren den *Standardcharakter* $e_p : \mathbb{Q}_p^+ \rightarrow S^1$ wie folgt:

- Für die unendliche Stelle setzen wir $e_\infty(x) = \exp(-2\pi i x)$
- Im endlichen Fall wird die Definition etwas aufwendiger. Zunächst haben wir eine natürliche Projektion $\mathbb{Q}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Die Äquivalenzklassen von $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ werden nach unseren Überlegungen zur Potenzreihendarstellung eindeutig repräsentiert durch die p -adischen Zahlen der Form $\sum_{k=-n}^{-1} a_k p^k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq a_k \leq p-1$. Wir definieren einen stetigen Homomorphismus $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ indem wir die Repräsentanten als Summen in \mathbb{Q} interpretieren. Zu guter Letzt schicken wir diese Summe in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} durch $e : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, x \mapsto \exp(2\pi i x)$ in den Einheitskreis. Alle diese Abbildungen sind stetige Gruppenhomomorphismen, bilden also selber wieder einen stetigen Gruppenhomomorphismus, den wir mit e_p bezeichnen. Interpretieren wir die Potenzreihenentwicklung der p -adischen Zahlen als nicht unbedingt konvergente Summe in \mathbb{Q} , so können wir (etwas unschön) schreiben

$$e_p \left(\sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k \right) = \exp \left(2\pi i \sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k \right) = \exp \left(2\pi i \sum_{k=-n}^{-1} a_k p^k \right).$$

Der Charakter e_∞ ist offensichtlich trivial auf den ganzen Zahlen \mathbb{Z} . Analog dazu ist im Endlichen e_p konstant auf den p -adischen ganzen Zahlen \mathbb{Z}_p . Das hat aber zur Folge, dass der Standardcharakter für $p < \infty$ lokal konstant ist, denn für jedes $a \in \mathbb{Q}_p$ ist $a + \mathbb{Z}_p$ eine offene Umgebung auf der e_p nur den Wert $e_p(a)$ annimmt.

Sei nun ψ ein beliebiger Charakter auf \mathbb{Q}_p^+ , $p < \infty$ und U eine offene Umgebung der $1 \in S^1$, die nur die triviale Untergruppe 1 enthält. Aufgrund der Stetigkeit von ψ gibt es dann eine offene Umgebung V der $0 \in \mathbb{Q}_p^+$ mit $\psi(V) \subseteq U$. Ohne Einschränkung ist V eine offene Untergruppe der Form $p^k \mathbb{Z}_p$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber $\psi(V)$ eine Untergruppe von S^1 und somit gleich 1 . Die kleinste solche Untergruppe $p^k \mathbb{Z}_p$ nennen wir den *Konduktor* des additiven Charakters ψ . Dieser wird uns im folgenden Lemma zur Hilfe kommen.

Lemma 4.6. *Jeder Charakter $\psi : \mathbb{Q}_p \rightarrow S^1$ ist von der Form $x \mapsto e_p(ax)$ für ein $a \in \mathbb{Q}_p$.*

Beweis. Fangen wir mit $p = \infty$ an. Sei $\psi : \mathbb{Q}_\infty \rightarrow S^1$ ein beliebiger Charakter. Wegen der Stetigkeit von ψ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\psi((- \varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \{z \in S^1 : \Re(z) > 0\}$. Machen wir ε noch ein Stück kleiner können wir sogar

$$\psi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \{z \in S^1 : \Re(z) > 0\} \quad (5)$$

garantieren. Definiere nun a als das eindeutig bestimmte Element aus $[-\frac{1}{4\varepsilon}, \frac{1}{4\varepsilon}]^*$, so dass $\psi(\varepsilon) = \exp(2\pi i a \varepsilon)$. Als nächstes behaupten wir, dass auch

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \exp\left(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

gilt. Wegen $\psi(\varepsilon/2)^2 = \psi(\varepsilon) = \exp(2\pi i a \varepsilon)$ ist $\psi(\varepsilon/2) = \pm \exp(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2})$. Da aber $\psi(\varepsilon/2)$ wegen (5) positiven Realteil haben muss, kommt nur $\exp(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2})$ in Frage. Durch Iteration des Arguments erhalten wir $\psi(\frac{\varepsilon}{2^n}) = \exp(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2^n})$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Setzen wir jetzt $\varepsilon = 2^{-n_0}$ für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist ε^{-1} eine natürliche Zahl und für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ haben wir

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{k}{2^n}\right) &= \psi\left(\frac{k\varepsilon}{2^{n-n_0}}\right) = \psi\left(\frac{\varepsilon}{2^{n-n_0}}\right)^{k/\varepsilon} \\ &= \exp\left(2\pi i a \frac{\varepsilon}{2^{n-n_0}}\right)^{k/\varepsilon} = \exp\left(2\pi i a \frac{k}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Die Menge aller $\frac{k}{2^n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ liegt dicht in \mathbb{R} und wir können aus der Stetigkeit $\psi(x) = \exp(2\pi i a x)$ schließen. Um die Eindeutigkeit von a zu sehen, reicht es die Ableitung von $x \mapsto \exp(2\pi i a x)$ zu berechnen und an der Stelle $x = 0$ auszuwerten. Der Wert beträgt gerade $2\pi i a$.

Kommen wir nun zum Fall $p < \infty$. Sei ψ ein Charakter auf \mathbb{Q}_p^+ und sei $p^k \mathbb{Z}_p$ dessen Konduktor. Für $k \leq 0$ gilt offensichtlich $\psi(\mathbb{Z}_p) = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur solche Charaktere, denn im Fall $k > 0$ können wir auch den Charakter $x \mapsto \psi(p^k x)$ betrachten und die Aussage folgt aus $\psi(p^k x) = \psi(x)^{(p^k)}$.

Suchen wir ein geeignetes $a \in \mathbb{Q}_p$. Uns fällt zunächst auf, dass der Charakter bereits eindeutig durch seine Werte an p^{-k} mit $k \in \mathbb{N}$ bestimmt wird. Da ψ trivial auf \mathbb{Z}_p wirkt, gilt nämlich

$$\psi\left(\sum_{k=-n}^{\infty} x_k p^k\right) = \sum_{k=-n}^{\infty} \psi(p^k)^{x_k} = \sum_{k=-n}^{-1} \psi(p^k)^{x_k}.$$

Es reicht also ein geeignetes a für diese Potenzen zu finden. Schauen wir uns $\psi(p^{-1})$ genauer an, so erkennen wir, dass dies eine p -te Einheitswurzel sein muss. Damit ist $\psi(p^{-1}) =$

*Also der Logarithmuszweig, dass $-\pi/2 < \varepsilon a < \pi/2$

$\exp(2\pi i \frac{a_1}{p})$ für ein eindeutig bestimmtes natürliches $0 \leq a_1 \leq p-1$. Analog argumentieren wir auch $\psi(p^{-k}) = \exp(2\pi i \frac{a_k}{p^k})$ mit $0 \leq a_k \leq p^k - 1$. Zudem gilt

$$\exp\left(2\pi i \frac{a_{k+1}}{p^k}\right) = \exp\left(2\pi i \frac{a_{k+1}}{p^{k+1}}\right)^p = \psi(p^{-k-1})^p = \psi(p^{-k}) = \exp\left(2\pi i \frac{a_k}{p^k}\right).$$

Für unsere Folge heißt das aber gerade $a_k \equiv a_{k+1} \pmod{p^k}$. Im Beweis der Potenzreihendarstellung nach Satz 3.14 haben wir gesehen, dass eine solche Folge gerade eine eindeutig bestimmte p -adische Zahl a definiert, die $a \equiv a_k \pmod{p^k}$ erfüllt. Es folgt

$$e_p\left(\frac{a}{p^k}\right) = \exp\left(2\pi i \frac{a_k}{p^k}\right) = \psi\left(\frac{1}{p^k}\right)$$

und das Lemma wurde gezeigt. \square

Der Beweis liefert uns sogar einen kleinen Bonus.

Korollar 4.7. *Wirkt $\psi : \mathbb{Q}_p \rightarrow S^1$ trivial auf \mathbb{Z}_p , so gilt $\psi(x) = e_p(ax)$ mit $a \in \mathbb{Z}_p$.*

Beweis. Das ist wieder eine Folgerung aus Satz 3.14 zur Potenzreihendarstellung. Die im vorherigen Beweis definierte Folge konvergiert demnach genau gegen einen Wert aus \mathbb{Z}_p . \square

Die Standardcharaktere induzieren gewissermaßen einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe \mathbb{Q}_p^+ und deren Dualgruppe $\hat{\mathbb{Q}}_p^+$. Wir können also guten Gewissens die Fouriertransformation als eine Funktion auf \mathbb{Q}_p^+ zu definieren.

Definition 4.8 (Lokale Fouriertransformation). Sei $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$. Wir definieren die *Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ von f durch die Formel

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) e_p(-\xi x) dx_p$$

für alle $\xi \in \mathbb{Q}_p$.

Diese Definition entspricht im Fall $p = \infty$ der klassischen Fouriertransformation. Von daher möchten wir auch einige klassische Ergebnisse auf die p -adischen Zahlen übertragen.

Lemma 4.9. *Sei $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$.*

- (i) *Ist $g(x) = f(x)e_p(ax)$ mit $a \in \mathbb{Q}_p$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)$.*
- (ii) *Ist $g(x) = f(x - a)$ mit $a \in \mathbb{Q}_p$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)e_p(-ax)$.*
- (iii) *Ist $g(x) = f(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$, dann gilt $\hat{g}(x) = \frac{1}{|\lambda|_p} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.*

Beweis. (i) und (ii) sind einfache Folgerungen aus der Definition mit der Multiplikativität von e_p und der Translationsinvarianz des Haar-Maß. Bei (iii) spielt unsere Normierung des Maßes eine Rolle, denn mit der Translation $y \mapsto \lambda^{-1}y$ erhalten wir

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(\lambda x) e_p(-\xi x) dx_p = \frac{1}{|\lambda|_p} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) e_p(-\xi \lambda^{-1} x) dx_p = \frac{1}{|\lambda|_p} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

\square

Für die unendliche Stelle $p = \infty$ definieren wir nun eine *lokale Schwartz-Bruhat Funktion* als eine komplexwertige, glatte Funktion $f : \mathbb{Q}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$, die für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n und m die Bedingung

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_\infty} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right| < \infty$$

erfüllt. Das entspricht der Definition der klassischen Schwartz Funktion. Für die endlichen Stellen $p < \infty$ definieren wir eine lokale Schwartz-Bruhat Funktion als eine lokal konstante Funktion mit kompakten Träger. Die Menge aller solcher Funktionen bilden einen komplexen Vektorraum, den wir mit $S(\mathbb{Q}_p)$ bezeichnen. Im Fall $p < \infty$ erkennt man leicht, dass $S(\mathbb{Q}_p) \subseteq L^1(\mathbb{Q}_p)$. Für $p = \infty$ gilt nach der Definition $(|1| + |x^2|)|f(x)| \leq C$, also $|f(x)| \leq C(1 + x^2)^{-1}$ und $(1 + x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{Q}_\infty)$.

Beispiele 4.10.

- (a) Im Fall $p = \infty$ ist die Funktion $f_k(x) = x^k e^{-x^2}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ in $S(\mathbb{Q}_\infty)$. Die Ableitungen $\frac{d^m}{dx^m} f_k(x)$ sind von der Form $p(x)e^{-x^2}$, wobei $p(x)$ ein Polynom ist. Aus der Analysis ist dann bekannt, dass $|x^n p(x)e^{-x^2}|$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ beschränkt ist.
- (b) Im Fall $p < \infty$ sind offensichtlich die charakteristischen Funktionen kompakter Mengen wie $a + p^k \mathbb{Z}_p$ mit $a \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$ in $S(\mathbb{Q}_p)$.

Lemma 4.11. *Für jede endliche Stelle $p < \infty$ sind die lokalen Schwartz-Bruhat Funktion $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen der Mengen $a + p^k \mathbb{Z}_p$, wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Für jedes lokal konstante f und jedes $z \in \mathbb{C}$ ist das Urbild $f^{-1}(z)$ offen in \mathbb{Q}_p , darunter auch $f^{-1}(0)$. Folglich ist $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ abgeschlossen und daher schon $\text{supp}(f) = \mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$. Per Definition hat die Schwartz-Bruhat Funktion f kompakten Träger, also ist $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ kompakt. Diese Menge wird durch die offenen Mengen $f^{-1}(z)$ mit $z \neq 0$ überdeckt, wovon nach Kompaktheit schon endlich viele reichen. f hat somit endliches Bild. Weiter ist jede offene Menge $f^{-1}(z)$ eine Vereinigung offener Bälle in \mathbb{Q}_p . Diese haben aber genau die oben beschriebene Form $a + p^k \mathbb{Z}_p$. Aufgrund der Kompaktheit, reichen wieder endliche viele solcher Bälle und es folgt auch schon das Lemma. \square

Beschränken wir uns jetzt auf die Fouriertransformation von lokalen Schwartz-Bruhat Funktionen. Aus der klassischen Fourieranalysis auf \mathbb{R} ist bekannt, dass für jede Schwartz Funktion f deren Fouriertransformierte \hat{f} wieder eine Schwartz Funktion ist. Man kann dann \hat{f} betrachten und sieht, dass diese Funktion in einem engen Bezug zu f steht. Für eine geeignete Normierung des Haar-Maßes haben wir die Umkehrformel $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$. Wir nennen ein so normiertes Haar-Maß *selbstdual*. Übertragen wir dieses Ergebnis nun auf den p -adischen Fall.

Satz 4.12. *Ist $p \leq \infty$ und $f \in S(\mathbb{Q}_p)$, so ist $\hat{f} \in S(\mathbb{Q}_p)$ und es gilt die Umkehrformel*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

Beweis. Im Fall $p = \infty$ folgt $\hat{f} \in S(\mathbb{Q}_p)$ und die Umkehrformel (mal einer Konstanten) aus der klassischen Analysis. Um zu sehen, dass unsere Normierung von dx_∞ tatsächlich selbstdual ist, reicht es eine geeignete Funktion zu betrachten und zu zeigen, dass die Konstante gleich 1 ist. Dafür verweisen wir auf die Berechnungen am Ende des Kapitels.

Kommen wir zum Fall $p < \infty$. Wie wir in Lemma 4.11 gesehen haben, ist jede Funktion in $S(\mathbb{Q}_p)$ eine Linearkombination von Funktionen der Form $f = \mathbb{1}_{a+p^k \mathbb{Z}_p}$. Es

reicht also die Aussage für solche f zu zeigen. Sei dazu $h := \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Wir zeigen $\hat{h} = h$ durch folgende Rechnung

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} h(x) e_p(-\xi x) dx_p = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-\xi x) dx_p.$$

Nun ist $\chi(x) := e_p(-\xi x)$ ein Charakter auf \mathbb{Z}_p und genau dann trivial, wenn $\xi \in \mathbb{Z}_p$. Weiter ist \mathbb{Z}_p kompakt. Nach Lemma 2.14 und unserer Normierung von dx_p folgt also

$$\hat{h}(\xi) = \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = h(\xi).$$

An dieser Stelle würde der Beweis mit einer anderen Normierung des Maßes scheitern.

Wir führen nun folgende Operatoren auf $S(\mathbb{Q}_p)$ ein

$$L_a f(x) = f(x - a) \quad M_\lambda f(x) = f(\lambda x),$$

wobei $a \in \mathbb{Q}_p$ und $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$. Nun können wir f schreiben als $L_a M_{p^{-k}} h$. Es folgt

$$\hat{f} = (L_a M_{p^{-k}} h)^\wedge = \Omega_{-a} p^k M_{p^k} \hat{h} = \Omega_{-a} p^{-k} M_{p^k} h.$$

Also ist $\hat{f}(\xi) = p^k e_p(-a\xi) \mathbb{1}_{p^{-k}\mathbb{Z}_p}(\xi)$. Somit ist \hat{f} als das Produkt lokal konstanter Funktionen selbst wieder lokal konstant und daher in $S(\mathbb{Q}_p)$. Wir haben also den ersten Teil der Aussage gezeigt.

Für den zweiten Teil sehen wir

$$\hat{\hat{f}} = (L_a M_{p^{-k}} h)^\wedge^\wedge = L_{-a} (M_{p^k} h)^\wedge = L_{-a} M_{p^k} \hat{h} = L_{-a} M_{p^k} h,$$

also $\hat{\hat{f}}(x) = \mathbb{1}_{-a+p^k\mathbb{Z}_p}(x) = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}(-x) = f(-x)$, wobei wir $p^k\mathbb{Z}_p = -p^k\mathbb{Z}_p$ ausnutzen. Damit ist die Umkehrformel für den p -adischen Fall gezeigt. \square

4.3 Die lokale Funktionalgleichung

Die Einheiten \mathbb{Q}_p^\times der lokalen Körper \mathbb{Q}_p können dargestellt werden als direktes Produkt $\mathcal{O}_p^\times \times V(\mathbb{Q}_p)$, wobei \mathcal{O}_p^\times die Untergruppe der Elemente von \mathbb{Q}_p^\times mit Absolutbetrag 1 und

$$V(\mathbb{Q}_p) := |\mathbb{Q}_p^\times|$$

der Wertebereich des Absolutbetrags auf den Einheiten ist. Wir haben nämlich einen stetigen Homomorphismus $\tilde{\cdot} : x \mapsto \tilde{x} := \frac{x}{|x|_p}$ von \mathbb{Q}_p^\times nach \mathcal{O}_p^\times .

Für $p = \infty$ ist $\mathcal{O}_p^\times = \{-1, 1\}$ und $V(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{R}_+^\times$. Jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ hat gerade Form $x = \text{sgn}(x)|x|_p$, denn \tilde{x} ist die Signumsabbildung.

Wenn $p < \infty$ ist $\mathcal{O}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times$, $V(\mathbb{Q}_p) = p^\mathbb{Z}$ und wir können jedes Element $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ schreiben als $x = |x|_p \tilde{x}$. Es wird nun von Interesse sein, wie die multiplikativen Charaktere auf die Untergruppe \mathcal{O}_p^\times wirken. Dazu zunächst eine kleine Definition.

Definition 4.13. Ein multiplikativer Quasi-Charakter χ ist *unverzweigt*, wenn er trivial auf die Untergruppe \mathcal{O}_p^\times wirkt.

Die unverzweigten Charaktere haben eine recht einfache Form, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 4.14. Jeder unverzweigte Charakter χ auf \mathbb{Q}_p^\times hat die Form $\chi(x) = |x|_p^s$ mit $s \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es ist klar, dass Funktionen dieser Form unverzweigte Quasi-Charaktere sind. Umgekehrt sei χ ein unverzweigter Quasi-Charakter. Dann gilt $\chi(x) = \chi(|x|_p \tilde{x}) = \chi(|x|_p)$. Dadurch induziert χ eine stetige Abbildung auf dem Wertebereich $V(\mathbb{Q}_p)$. Wir zeigen, dass diese Abbildung gerade die Form $t \mapsto t^s$ hat.

Sei zuerst $p = \infty$, also $V(\mathbb{Q}_\infty) = \mathbb{R}_+^\times$. Wir definieren $s := \log(\chi(e))$, also $\chi(e) = e^s$. Induktiv lässt sich nun leicht $\chi(e^n) = e^{ns}$ für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ zeigen. Analog zeigt man

$$\chi(e^{\frac{n}{m}})^m = \chi(e^{m \frac{n}{m}}) = \chi(e^n) = e^{ns},$$

woraus

$$\chi(e^{\frac{n}{m}}) = \left(\chi(e^{\frac{n}{m}})^m \right)^{\frac{1}{m}} = (e^{ns})^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}s}$$

folgt, so dass wir $\chi(e^q) = e^{qs}$ für alle rationalen Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ haben. Wegen Stetigkeit gilt nach Übergang zu Grenzwerten $\chi(e^r) = e^{rs}$ für alle reellen $r \in \mathbb{R}$, also $\chi(t) = t^s$ für alle $t \in \mathbb{R}_+^\times$.

Der Fall $p < \infty$ ist etwas leichter. Wir definieren dieses mal $s := \frac{\log(\chi(p))}{\log(p)}$, so dass $\chi(p) = p^s$. Da der Wertebereich aber gerade $p^\mathbb{Z}$ war, folgt die Behauptung sofort. \square

Satz 4.15. *Jeder Quasi-Charakter χ von \mathbb{Q}_p^\times hat die Form*

$$\chi(x) = \mu(\tilde{x})|x|_p^s,$$

wobei μ ein Charakter auf \mathcal{O}_p^\times , $\tilde{\cdot}$ der stetige Homomorphismus von \mathbb{Q}_p^\times nach \mathcal{O}_p^\times und $s \in \mathbb{C}$ ist.

Beweis. Es ist wieder klar, dass $\mu(\tilde{\cdot})|\cdot|_p^s$ tatsächlich ein Charakter ist. Betrachten wir nun einen beliebigen Charakter χ und definieren μ als die Einschränkung von χ auf \mathcal{O}_p^\times . Da die Untergruppe \mathcal{O}_p^\times kompakt und μ eine Quasi-Charakter folgt nach Lemma 2.14, dass μ sogar ein Charakter ist. Damit definiert der stetige Homomorphismus $x \mapsto \chi(x)\mu(\tilde{x})^{-1}$ einen unverzweigten Charakter auf \mathbb{Q}_p^\times , hat also nach vorherigem Lemma die Form $\chi(x)\mu(\tilde{x})^{-1} = |x|_p^s$ für ein $s \in \mathbb{C}$. Der Satz folgt sofort. \square

Aus $|\mu(\tilde{x})|_p^s| = |x|_p^\sigma$ folgt, dass der Realteil $\sigma = \Re(s)$ eindeutig bestimmt ist. Er wird auch *Exponent* des Charakters χ genannt.

Erinnern wir uns zurück an Riemanns Beweis der Funktionalgleichung. Er beginnen nicht mit der Reihendarstellung oder Produktdarstellung der Zeta-Funktion. Stattdessen betrachtet Riemann mit

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

die Zeta-Funktion als ein Integral über die positiven Einheiten. Nach der Umformung

$$2\Gamma(s)\zeta(s) = \int_{\mathbb{R}^\times} \frac{1}{e^{|x|_\infty} - 1} |x|_\infty^s \frac{dx}{|x|_\infty}$$

erkennen wir, dass die Zeta-Funktion nichts weiter als ein Integral über die multiplikative Gruppe \mathbb{R}^\times ist, deren Integrand das Produkt einer Schwartz-Funktion mit einem multiplikativen Charakter ist. Genau das wird unsere Definition einer lokalen Zeta-Funktion.

Definition 4.16. Sei $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ eine lokale Schwartz-Bruhat Funktion und $\chi = \mu|\cdot|_p^s$ multiplikativer Quasi-Charakter. Die *lokale Zeta-Funktion* von f und χ ist definiert als das Integral

$$Z_p(f, \chi) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\chi(x)d^\times x_p.$$

Wir schreiben auch $Z_p(f, \mu, s)$ für $Z_p(f, \mu|\cdot|_p^s)$.

Fixieren wir eine Funktion f und einen multiplikativen Charakter μ auf \mathcal{O}_p^\times , so können wir $Z_p(f, \mu, s)$ als eine Funktion in der komplexen Variable s ansehen. Es wird daher Sinn machen, der Frage nach Holomorphie bzw. Meromorphie der lokalen Zeta-Funktionen nachzugehen.

Zuletzt definieren wir noch für jeden Quasi-Charakter χ mittels

$$\check{\chi}(x) = \frac{|x|_p}{\chi(x)},$$

das *verschobene Dual* des Charakters. Mit $\chi = \mu| \cdot |_p^s$ gilt dann $Z_p(f, \check{\chi}) = Z_p(f, 1/\mu, 1-s)$. Damit kommen wir zum ersten großen Satz dieser Arbeit.

Satz 4.17 (Lokale Funktionalgleichung). *Sei $f_p \in S(\mathbb{Q}_p)$ und $\chi = \mu| \cdot |_p^s$. Sei weiter $\sigma = \Re(s)$ der Exponent von χ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) $Z_p(f, \chi) = Z_p(f, \mu, s)$ ist holomorph und absolut konvergent für $\sigma > 0$.
- (ii) Auf dem Streifen $0 < \sigma < 1$ haben wir eine Funktionalgleichung

$$Z_p(\hat{f}, \check{\chi}) = \gamma(\chi, e_p, dx_p) Z_p(f, \chi),$$

wobei $\gamma(\chi, e_p, dx_p)$ unabhängig von f und meromorph als Funktion in s ist. Damit besitzt $Z_p(f, \chi)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C}

Beweis. (i) Es reicht im Allgemeinen zu zeigen, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_p^{\sigma-1} dx_p$$

endlich ist, denn $d^\times x_p$ ist ein konstantes Vielfaches von dx_p .

Sei zunächst $p = \infty$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und setzen $K = [-\varepsilon, \varepsilon]$. Nun teilen wir das Integral auf in

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty = \int_{K \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty + \int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty.$$

Nun ist f stetig und damit beschränkt auf K . Für den ersten Summanden müssen wir also nur die Integrierbarkeit von $|x|_\infty^{\sigma-1}$ nahe 0 überprüfen. Aus der Analysis folgt diese für $\sigma - 1 > -1$, also umgeformt $\sigma > 0$. Im zweiten Summanden können wir den Integranden geeignet abschätzen. Da f eine Schwartz-Bruhat Funktion ist, haben wir zum Beispiel $|f(x)| \leq \frac{C}{|x|_\infty^n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1 + \sigma$ und C eine positive reelle Zahl ist. Einsetzen in den Summanden ergibt

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} |f(x)| \cdot |x|_\infty^{\sigma-1} dx_\infty \leq C \cdot \int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} \frac{|x|_\infty^{\sigma-1}}{|x|_\infty^n} dx_\infty \leq C \cdot \int_{\mathbb{Q}_\infty \setminus K} \frac{1}{|x|_\infty^2} dx_\infty < \infty.$$

Es folgt die absolute Konvergenz auf $\sigma > 0$.

Kommen wir zum endlichen Fall. Die lokale Schwartz-Bruhat Funktion ist dann eine Linearkombination von Funktionen der Form $f = \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$. Es reicht also nur solche zu betrachten. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} |f(x)| \cdot |x|_p^{\sigma-1} dx_p &= \int_{a+p^n\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^{\sigma-1} dx_p = \int_{p^n\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x - a|_p^{\sigma-1} dx_p \\ &\leq \int_{p^n\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} + |a|_p^{\sigma-1} \text{Vol}(p^n\mathbb{Z}_p, dx_p), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die (normale) Dreiecksungleichung verwendet haben. Der zweite Summand ist endlich, da $p^n\mathbb{Z}_p$ kompakt ist. Schauen wir uns also den ersten Summanden

an. Wir nutzen nun einen kleinen Trick. Der Betrag ist konstant auf den Kreislinien $p^k \mathbb{Z}_p^\times$. Zudem gibt es mit $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^k \mathbb{Z}_p^\times$ eine disjunkte Zerlegung von \mathbb{Q}_p^\times in genau diese Kreislinien. Übertragen wir den Gedanken nun auf das Integral erhalten wir

$$\int_{p^n \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{p^k \mathbb{Z}_p^\times} |x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} |p^k x|_p^\sigma \frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^{\infty} p^{-k\sigma} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \frac{dx_p}{|x|_p}$$

Das Integral haben wir bereits bestimmt. Es ist gleich $\frac{p-1}{p}$. Übrig bleibt also nur eine geometrische Reihe, diese konvergiert aber gerade für $\sigma > 0$. Damit haben wir absolute Konvergenz für die nicht-archimedischen Stellen gezeigt und kommen nun zur Funktionalgleichung.

(ii) Wir folgen Tate und beweisen ein kleines Lemma.

Lemma 4.18. *Für alle Charaktere χ mit Exponenten $0 < \sigma < 1$ und beliebige Funktionen $f, g \in S(\mathbb{Q}_p)$ gilt:*

$$Z_p(f, \chi) Z_p(\hat{g}, \check{\chi}) = Z_p(\hat{f}, \check{\chi}) Z_p(g, \chi)$$

Beweis. Nach (i) haben wir absolute Konvergenz der Integrale für Exponenten $\sigma > 0$. Zudem ist $\check{\chi} = |\cdot|_p \chi^{-1} = |\cdot|_p^{1-\sigma} \mu^{-1}$, also haben wir in diesem Fall Konvergenz für $\sigma < 1$. Damit sind die obigen Zeta-Funktionen wohldefiniert auf dem Streifen den wir betrachten. Wir schreiben das Produkt als Doppelintegral über $\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$

$$\begin{aligned} Z_p(f, \chi) Z_p(\hat{g}, \check{\chi}) &= \iint_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x) \chi(x) \hat{g}(y) \chi(y)^{-1} |y|_p d^\times(x_p, y_p) \\ &= \iint_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(y) \chi(xy^{-1}) |y|_p d^\times(x_p, y_p) \end{aligned}$$

Das Integral ist invariant unter der Translation $(x, y) \mapsto (x, xy)$ und wir erhalten

$$Z_p(f, \chi) Z_p(\hat{g}, \check{\chi}) = \iint_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(xy) \chi(y^{-1}) |xy|_p d^\times(x_p, y_p).$$

Nach Fubini ist das wiederum gleich

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(xy) |x|_p d^\times x_p \right) \chi(y^{-1}) |y|_p d^\times y_p.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das innere Integral symmetrisch in f und g ist. Dazu erinnern wir uns, dass $d^\times x_p = c \frac{dx_p}{|x|_p}$ und nach der Definition der Fouriertransformation daher

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x) \hat{g}(xy) |x|_p d^\times x_p = c \int_{\mathbb{Q}_p} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) g(z) e_p(-xyz) dz_p dx_p = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} g(z) \hat{f}(zy) |z|_p d^\times z_p,$$

wobei wieder Fubini das Vertauschen der Reihenfolge bei der Integration erlaubt. \square

Damit sind wir auch schon fast fertig. Wir versprechen nun die Existenz geeigneter Funktionen $g \in S(\mathbb{Q}_p)$, so dass der Ausdruck

$$\gamma(\chi, e_p, dx_p) := \frac{Z_p(\hat{g}, \check{\chi})}{Z_p(g, \chi)}$$

wohldefiniert ist. Aus dem gerade bewiesenen Lemma folgt, dass dieser Quotient unabhängig von der Wahl von g ist und durch Umformen der Gleichung erhalten wir die lokale Funktionalgleichung

$$Z_p(\hat{f}, \check{\chi}) = \gamma(\chi, e_p, dx_p) Z_p(f, \chi).$$

\square

4.4 Lokale Berechnungen

In diesem Abschnitt kommen wir dem Versprechen des letzten Beweises nach und werden nicht nur die Funktionen angeben, sondern auch die γ -Faktoren explizit berechnen. Die Berechnungen werden sich in die Fälle $p = \infty$ und $p < \infty$ und dort jeweils in χ verzweigt und χ unverzweigt aufteilen.

4.4.1 Der Fall $p = \infty$

Wir betrachten zuerst die Klasse $\chi = |\cdot|_\infty^s$ und nehmen die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f(x) = e^{-\pi x^2}.$$

Wir behaupten, dass f ihre eigene Fouriertransformierte ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} e_\infty(-x\xi) dx_\infty = \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x \xi} dx_\infty \\ &= \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi(x^2 - 2ix\xi - \xi^2)} e^{-\pi\xi^2} dx_\infty = f(\xi) \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi(x-i\xi)^2} dx_\infty.\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass das Integral gleich 1 ist. Dazu nutzen wir das bekannte Integral $\int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} dx_\infty = 1$ und etwas Kontourintegration. Sei γ das Rechteck von $-r$ nach r auf der reellen Achse, dann runter zu $r - i\xi$, horizontal zu $-r - i\xi$ und wieder zurück zu $-r$. Da f eine ganze Funktion ist, gilt $\int_\gamma f(z) dz = 0$. Die Integrale an der linken und rechten Seite des Rechtecks konvergieren gegen 0 wenn r anwächst, denn für $z = \pm r - iy$ und $0 \leq y \leq \xi$ gilt

$$|f(z)| = \left| e^{-\pi(\pm r - iy)^2} \right| = e^{-\pi(r^2 - y^2)}$$

und wir haben die Abschätzung

$$\left| \int_{\pm r}^{\pm r - i\xi} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\xi f(\pm r - iy) dy \right| \leq e^{-\pi r^2} \int_0^\xi e^{\pi y^2} dy \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich muss schon $\int_{\mathbb{Q}_\infty} f(x - i\xi) dx_\infty = \int_{\mathbb{Q}_\infty} f(x) dx_\infty = 1$ gelten und wir sind fertig. Damit haben wir auch die nötigen Berechnung für die Selbstdualität von dx_∞ nach Satz 4.12 gezeigt.

Nun zu den Zeta-Funktionen:

$$\begin{aligned}Z_\infty(f, \chi) &= Z_\infty(f, |\cdot|_\infty^s) = \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x) |x|_\infty^s d^\times x_\infty \\ &= \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x^2} |x|_\infty^s d^\times x_\infty = 2 \int_0^\infty e^{-\pi x^2} x^{s-1} dx_\infty\end{aligned}$$

Wir benutzen den Trafo $u = \pi x^2 \Rightarrow du = 2\pi^{1/2} u^{1/2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}Z_\infty(f, \chi) &= \int_0^\infty e^{-u} (u\pi^{-1})^{\frac{s-1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\end{aligned}$$

Mit dem gleichen Argumentation rechnen wir auch

$$Z_\infty(\hat{f}, \check{\chi}) = Z_\infty(f, |\cdot|_\infty^{1-s}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right).$$

Jetzt können wir endlich den versprochenen Faktor

$$\gamma(|\cdot|_\infty^s, e_\infty, dx_\infty) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

angeben und sehen, dass dieser auf dem Streifen $0 < \sigma < 1$ als Quotient holomorpher Funktionen meromorph ist.

Nun zur zweiten und auch schon letzten Klasse $\chi = \text{sgn}|\cdot|_\infty^s$ von multiplikativen Charakteren auf \mathbb{Q}_∞ . Wir wählen die Funktion

$$f_\pm(x) = xe^{-\pi x^2} \in S(\mathbb{Q}_\infty)$$

und bemerken zunächst die Beziehung $f_\pm(x) = (-2\pi)^{-1} f'(x)$. Damit können wir die Fouriertransformation schnell aus einem Ergebnis der klassischen Fourieranalysis gewinnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \hat{f}_\pm(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\pm(x) e_\infty(-x\xi) dx_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi)^{-1} f'(x) e_\infty(-x\xi) dx_\infty \\ &= \left[(-2\pi)^{-1} f(x) e_\infty(-x\xi) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi)^{-1} f(x) \cdot (-2\pi i \xi) e_\infty(-x\xi) dx_\infty \\ &= 0 - i\xi \hat{f}(\xi) = -i\xi f(\xi) = -i f_\pm(\xi). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Zeta-Funktionen

$$\begin{aligned} Z_\infty(f_\pm, \chi) &= Z_\infty(f, \text{sgn}|\cdot|_\infty^s) = \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f_\pm(x) \text{sgn}(x) |x|_\infty^s d^\times x_\infty \\ &= \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} x f(x) \text{sgn}(x) |x|_\infty^s d^\times x_\infty = \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x) |x|_\infty^{s+1} d^\times x_\infty \\ &= Z_\infty(f, |\cdot|_\infty^{s+1}) = \pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \end{aligned}$$

und mit $\check{\chi} = \text{sgn}^{-1}|\cdot|_\infty^{1-s} = \text{sgn}|\cdot|_\infty^{1-s}$

$$\begin{aligned} Z_\infty(\hat{f}_\pm, \chi) &= Z_\infty(-i f_\pm, \text{sgn}|\cdot|_\infty^{1-s}) = -i \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f_\pm(x) \text{sgn}(x) |x|_\infty^{1-s} d^\times x_\infty \\ &= -i \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} x f(x) \text{sgn}(x) |x|_\infty^{1-s} d^\times x_\infty = -i \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x) |x|_\infty^{2-s} d^\times x_\infty \\ &= -i Z_\infty(f, |\cdot|_\infty^{2-s}) = -i \pi^{-\frac{2-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right). \end{aligned}$$

Damit haben wir den Faktor

$$\gamma(\text{sgn}|\cdot|_\infty^s, e_\infty, dx_\infty) = i \frac{\pi^{-\frac{2-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}$$

der nach der gleichen Begründung wie im unverzweigten Fall meromorph ist.

4.4.2 Der Fall $p < \infty$

Wir beginnen wieder mit dem unverzweigten Fall $\chi = |\cdot|_p$ und betrachten die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f_0(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x).$$

Wie auch schon im archimedischen Fall ist f_0 ihre eigene Fouriertransformierte ist. Dies wurde bereits im Beweis von Satz 4.12 gezeigt. Mit unserer Normierung des Haar-Maßes folgt dann

$$\hat{f}_0(\xi) = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-x\xi) dx_p = \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = f_0(\xi).$$

Für die Berechnungen der Zeta-Funktionen nutzen wir die disjunkte Vereinigung $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} p^k \mathbb{Z}_p^\times$.

$$\begin{aligned} Z_p(f_0, \chi) &= Z_p(f_0, |\cdot|_p^s) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_0(x) |x|_p^s d^\times x_p = \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^s d^\times x_p \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p^k \mathbb{Z}_p^\times} |x|_p^s d^\times x_p = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} |p^k x|_p^s d^\times x_p \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} p^{-ks} d^\times x_p = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} \text{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, d^\times x_p) = \frac{1}{1 - p^{-s}} \end{aligned}$$

und analog

$$Z_p(\hat{f}_0, \check{\chi}) = Z_p(f_0, |\cdot|_p^{1-s}) = \frac{1}{1 - p^{s-1}}.$$

Der Faktor hat damit die Form

$$\gamma(|\cdot|_p^s, e_p, dx_p) = \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{s-1}}$$

und ist insbesondere somit holomorph im betrachteten Streifen $0 < \sigma < 1$.

Nun kommen wir zum verzweigten Fall $\chi = \mu | \cdot |_p^s$. Bevor wir allerdings mit den eigentlichen Berechnungen anfangen, schauen wir uns den unitären Charakter $\mu : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow S^1$ etwas genauer an.

Wählen wir eine offene Umgebung U der $1 \in S^1$, die nur die triviale Untergruppe enthält, so finden wir aufgrund der Stetigkeit von μ eine offene Umgebung V der $1 \in \mathbb{Z}_p^\times$ mit $\mu(V) \subseteq U$. Diese enthalten aber stets eine Untergruppe der Form $1 + p^n \mathbb{Z}_p$. Da μ aber ein Gruppenhomomorphismus ist, muss diese Untergruppe bereits auf 1 abgebildet werden. Es gibt also für jeden Charakter $\chi = \mu | \cdot |_p^s$ ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(1 + p^n \mathbb{Z}_p) = 1$. Wir nennen dann p^n den *Konduktor des multiplikativen Charakters* χ .

Abhängig vom Konduktor p^n von χ definieren wir nun die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f_n(x) = e_p(x) \mathbb{1}_{p^{-n} \mathbb{Z}_p}(x).$$

Die Berechnung der Fouriertransformation erfolgt ähnlich zum unverzweigten Fall:

$$\hat{f}_n(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f_n(x) e_p(-x\xi) dx_p = \int_{p^{-n} \mathbb{Z}_p} e_p(x(1 - \xi)) dx_p$$

Der additive Charakter $\psi(x) = e_p(x(1 - \xi))$ wirkt genau dann trivial auf $p^{-n} \mathbb{Z}_p$, wenn $1 - \xi \in p^n \mathbb{Z}_p$, oder äquivalent $\xi \in 1 + p^n \mathbb{Z}_p$. Es folgt

$$\hat{f}_n(\xi) = \text{Vol}(p^{-n} \mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{1 + p^n \mathbb{Z}_p}(\xi) = p^n \mathbb{1}_{1 + p^n \mathbb{Z}_p}(\xi).$$

Weiter zur Zeta-Funktion:

$$\begin{aligned} Z_p(f_n, \chi) &= Z_p(f_n, \mu | \cdot |_p^s) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_n(x) \mu(\tilde{x}) |x|_p^s d^\times x_p = \int_{p^{-n} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} e_p(x) \mu(\tilde{x}) |x|_p^s d^\times x_p \\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} \int_{p^k \mathbb{Z}_p^\times} e_p(x) \mu(\tilde{x}) |x|_p^s d^\times x_p = \sum_{k=-n}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e_p(p^k x) \mu(\widetilde{p^k x}) |p^k x|_p^s d^\times x_p \\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e_p(p^k x) \mu(x) d^\times x_p. \end{aligned}$$

Ein Integral der Form $g(\omega, \lambda) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x) \lambda(x) d^\times x_p$ mit multiplikativen Charakter $\omega : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow S^1$ und additiven Charakter $\lambda : \mathbb{Z}_p \rightarrow S^1$ wird *Gauß-Summe** genannt. Mit $e_{p,k}(x) := e_p(p^k x)$ schreiben wir die Zeta-Funktion als

$$Z_p(f_n, \chi) = \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks} g(\mu, e_{p,k}). \quad (6)$$

Für die weitere Berechnung beweisen wir ein kleines Lemma über Gauß-Summen. Weiter definieren wir im Folgenden $U_k = 1 + p^k \mathbb{Z}_p$ für $k \in \mathbb{N}$ und setzen $U_0 = \mathbb{Z}_p^\times$.

Lemma 4.19. *Seien ω und λ wie oben. Seien weiter p^n und p^r die Konduktoren von ω bzw. λ . Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) Wenn $n > r$, dann $g(\omega, \lambda) = 0$.
- (ii) Wenn $n = r$, dann

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c \operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \operatorname{Vol}(U_n, dx_p)$$

- (iii) Wenn $n < r$, dann

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c \operatorname{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \left[\operatorname{Vol}(U_n, dx_p) - p^{-1} \operatorname{Vol}(U_{r-1}, dx_p) \right]$$

Beweis. Eine Kleinigkeit vorneweg: r und n sind nicht-negative ganze Zahlen, da wir nur Charaktere auf \mathbb{Z}_p bzw. \mathbb{Z}_p^\times betrachten.

Für (i) zerlegen wir \mathbb{Z}_p^\times in Nebenklassen, die von der Untergruppe $U_r = 1 + p^r \mathbb{Z}_p$ erzeugt werden. Diese haben mit $R = \{x \in \{1, \dots, p^r - 1\} : x \not\equiv 0 \pmod{p}\}$ ein endliches Repräsentantensystem. Für ein $a \in R$ können wir die zugehörige Nebenklassen schreiben als aU_r . Deren Elemente haben die Form $a(1 + p^r b)$ und man folgert $\lambda(a(1 + p^r b)) = \lambda(a)\lambda(p^r ab) = \lambda(a)$ nach der Definition des Konduktors. Daher

$$g(\omega, \lambda) = \sum_{aU_r} \int_{aU_r} \omega(x) \lambda(x) d^\times x_p = \sum_{aU_r} \omega(a) \lambda(a) \int_{U_r} \omega(x) dx_p.$$

Da aber $n > r$ wirkt ω nicht trivial auf U_r und somit verschwindet das Integral.

Weiter zu (ii) und (iii): Sei also $n \leq r$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} |g(\omega, \lambda)|^2 &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x) \lambda(x) d^\times x_p \cdot \overline{\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(y) \lambda(y) d^\times y_p} \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(xy^{-1}) \lambda(x - y) d^\times x_p d^\times y_p \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x) h(x) d^\times x_p \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt zum einen die Translation $x \mapsto xy$ und zum anderen die Funktion

$$h(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(xy - y) d^\times y_p = c \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(y(x - 1)) \frac{dy_p}{|y|_p} = c \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(y(x - 1)) dy_p$$

eingeführt haben. Wegen $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$ können wir das Integral weiter aufspalten.

$$h(x) = c \int_{\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x - 1)) dy_p = c \int_{\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x - 1)) dy_p - c \int_{p\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x - 1)) dy_p.$$

*Nicht zu verwechseln mit der Gaußschen Summenformel

Nun haben wir den Fall von Lemma 2.14. $y \mapsto \lambda(y(x-1))$ ist trivial auf \mathbb{Z}_p genau dann wenn $x-1 \in p^r \mathbb{Z}_p$, d.h. wenn $x \in U_r$. Ähnlich verhält es sich mit $y \mapsto \lambda(y(x-1))$ auf $p\mathbb{Z}_p$, wobei dieser genau dann trivial ist, wenn $x \in U_{r-1}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} h(x) &= c \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{U_r} - c \text{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{U_{r-1}} \\ &= c \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{U_r} - cp^{-1} \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{U_{r-1}} \end{aligned}$$

Einfügen in $|g(\omega, \lambda)|^2$ ergibt dann

$$\begin{aligned} |g(\omega, \lambda)|^2 &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x) h(x) d^\times x_p \\ &= c \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \int_{U_r} \omega(x) d^\times x_p - cp^{-1} \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \int_{U_{r-1}} \omega(x) d^\times x_p. \end{aligned}$$

Im Fall (ii) haben wir $n = r$. Damit ist der erste Integrand trivial, der zweite jedoch nicht. Folglich verschwindet das zweite Integral. Wir haben

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \text{Vol}(U_n, d^\times x_p)$$

und sind somit fertig. Im Fall (iii) ist $n < r$, beide Integranden sind trivial und es folgt mit

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \text{Vol}(U_r, d^\times x_p) - cp^{-1} \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \text{Vol}(U_{r-1}, d^\times x_p)$$

die Behauptung. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Zurück zur Berechnung der Zeta-Funktion. Der multiplikative Charakter μ hat den Konduktor p^n , während die additiven Charaktere $e_{p,k}(x) = e_p(p^k x)$ den Konduktor p^{-k} haben. Nach Lemma 4.19 (i) verschwinden in (6) fast alle Summanden und wir erhalten

$$Z_p(f_n, \chi) = \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks} g(\mu, e_{p,k}) = p^{ns} g(\mu, e_{p,-n})$$

Die verbleibende Gauß-Summe konvergiert dann nach Aussage (ii) des Lemmas.

Für die Berechnung der zweiten Zeta-Funktion bemerken wir zunächst, dass $\mu^{-1} = 1/\mu = \bar{\mu}/(\mu\bar{\mu}) = \bar{\mu}$ den gleichen Konduktor wie μ hat.

$$\begin{aligned} Z_p(\hat{f}_n, \check{\chi}) &= Z_p(\hat{f}_n, \bar{\mu} \cdot |\cdot|_p^{1-s}) = p^n \int_{1+p^n \mathbb{Z}_p} \bar{\mu}(\tilde{x}) |x|_p^{1-s} d^\times x_p \\ &= p^n \int_{1+p^n \mathbb{Z}_p} d^\times x_p = p^n c \int_{p^n \mathbb{Z}_p} dx_p = c. \end{aligned}$$

Zu guter Letzt der erhalten wir den holomorphen Faktor

$$\gamma(\mu | \cdot |_p^s, e_p, dx_p) = \frac{c}{p^{ns} g(\mu, e_{p,-n})} = \frac{cp^{-ns} \overline{g(\mu, e_{p,-n})}}{c^2 p^{-n}} = c^{-1} p^{n(1-s)} \overline{g(\mu, e_{p,-n})}$$

5 Eingeschränkte direkte Produkt abstrakter Gruppen

Ziel dieses Kapitels ist es, die nötigen Grundlagen zu schaffen um alle bisherigen lokalen fourieranalytischen Berechnung in einer einzigen globalen fourieranalytischen Berechnung zu vereinen. Wir werden erklären, warum der Ansatz über das direkte Produkt schiefgeht und führen dann das eingeschränkte direkte Produkt mit der dazugehörigen eingeschränkten Produkttopologie ein. Anschließend schauen wir uns die Besonderheiten der Charaktere und der Integration auf diesem neuen Produkt an. Dabei halten wir uns an Ramakrishnans und Valenzas Definitionen in [7] Abschnitt 5.1, die sich wiederum an Tates Doktorarbeit [10] orientieren. Für eine etwas alternative, etwas strengere Definition siehe zum Beispiel Deitmar [2] Abschnitt 5.1.

5.1 Definitionen

Beginnen wir mit einer (endlichen, abzählbaren, überabzählbaren) Indexmenge I und zu jedem $\nu \in I$ haben wir eine lokalkompakte Gruppen G_ν . Gesucht ist zunächst ein Objekt G , welches alle G_ν umfasst und auf dem wir idealerweise ein Haar-Maß haben. G sollte also eine lokalkompakte Gruppe sein. Ein erster Ansatz wäre natürlich das direkte Produkt der Gruppen G_ν zu bilden, allerdings zeigt folgendes Lemma, dass dieser Versuch im allgemeinen Fall fehlschlagen wird.

Lemma 5.1. *Sei I eine Indexmenge und X_ν ein lokalkompakter Hausdorff-Raum für alle $\nu \in I$. Der Raum $X := \prod_{\nu \in I} X_\nu$ ist genau dann lokalkompakt, wenn fast alle X_ν kompakt sind.*

Bevor wir den Beweis nach Deitmar geben noch eine kurze Beobachtung: Ist X kompakt, so ist auch jedes X_ν kompakt als Bild von X unter den stetigen Projektionen $\pi_\nu : X \rightarrow X_\nu$.

Beweis. Sei $E \subseteq I$ eine endliche Teilmenge und für jedes $\nu \in E$ sei $U_\nu \in X_\nu$ eine offene Menge. Wir betrachten die offenen Rechtecke

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} X_\nu,$$

welche eine Basis der Produkttopologie bilden. Ist X lokalkompakt, so gibt es ein offenes Rechteck, dessen Abschluss kompakt ist. Folglich sind fast alle X_ν kompakt. Die Rückrichtung ist eine Folgerung des Satzes von Tychonoff (das direkte Produkt beliebiger Familien kompakter Mengen wieder kompakt ist) und Lemma 2.5 (das endliche direkte Produkt lokalkompakter Räume ist wieder lokalkompakt). \square

Das direkte Produkt lokalkompakter Gruppen liefert uns daher im Allgemeinen keine neue lokalkompakte Gruppe. Wir sehen jetzt aber, welche Einschränkung nötig ist, damit wir doch lokalkompakt werden.

Definition 5.2 (Eingeschränkte direkte Produkt). Sei $I = \{\nu\}$ eine Indexmenge und für jedes $\nu \in I$ sei G_ν eine lokalkompakte Gruppe. Sei weiter $I_\infty \subseteq I$ eine endliche Teilmenge von I und für jedes $\nu \notin I_\infty$ sei $H_\nu \leq G_\nu$ eine kompakte offene (und damit abgeschlossene) Untergruppe. Das *eingeschränkte direkte Produkt* der Gruppen G_ν bezüglich H_ν ist definiert als

$$G = \prod'_{\nu \in I} G_\nu := \{(x_\nu) : x_\nu \in G_\nu \text{ und } x_\nu \in H_\nu \text{ für alle bis auf endlich viele } \nu\}.$$

mit komponentenweiser Verknüpfung. Die Topologie auf G ist gegeben durch die *eingeschränkte Produkttopologie*. Diese wird erzeugt durch die Basis der *eingeschränkten offenen Rechtecke*

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} H_\nu,$$

wobei $E \subset I$ eine endliche Teilmenge mit $I_\infty \subset E$ und $U_\nu \in G_\nu$ offen für alle $\nu \in E$ ist.

G ist damit (gruppentheoretisch) zwischen der direkten Summe und dem direkten Produkt der Komponenten G_ν anzusetzen. Topologisch entspricht die eingeschränkte Produkttopologie jedoch nicht der vom direkten Produkt induzierten Teilraumtopologie. Sie ist im Allgemeinen feiner, wodurch die *Projektion*

$$\begin{aligned} \pi_\nu : G &\rightarrow G_\nu \\ g &\mapsto g_\nu \end{aligned}$$

auf die ν -te Komponenten von G eine wie auch bei der Produkttopologie stetige Abbildungen ist.

Schauen wir uns einige Untergruppen des eingeschränkten direkten Produkts an. Die Gruppen G_ν können über die stetige *Inklusion*

$$\begin{aligned} \iota_\nu : G_\nu &\rightarrow G \\ g &\mapsto (\dots, 1, g, 1, \dots) \end{aligned}$$

auf natürliche Weise in G eingebettet werden und bilden damit eine Familie von abgeschlossenen Untergruppen. Sei S eine endliche Teilmenge von I , die I_∞ enthält. Wir definieren die offene Untergruppe

$$G_S := \prod_{\nu \in S} G_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus S} H_\nu$$

von G . Bezüglich der Produkttopologie sind diese G_S nach Lemma 2.2 und Lemma 5.1 selbst wieder lokalkompakte Gruppen. Die Produkttopologie stimmt aber mit der durch G induzierten Teilraumtopologie überein und die G_S bilden eine Familie von lokalkompakten Untergruppen in G . Nun liegt jeder Punkt $x \in G$ in einer Untergruppe dieser Form und daher folgt sofort, dass G selbst eine lokalkompakte Gruppe ist. Damit haben wir einen geeigneten Kandidaten gefunden, der uns hoffentlich die globale Kalkulation ermöglicht.

Zum Abschluss dieses Abschnitts richten wir unseren Blick auf die kompakten Mengen des eingeschränkten direkten Produkts.

Satz 5.3. *Eine Teilmenge Y des eingeschränkten direkten Produkts G hat genau dann kompakten Abschluss, wenn $Y \subseteq \prod_\nu K_\nu$ für eine Familie von kompakten Teilmengen $K_\nu \subseteq G_\nu$ und $K_\nu = H_\nu$ für fast alle Indizes $\nu \in I$.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, denn jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist wieder kompakt.

Für die Hinrichtung sei nun K der Abschluss von Y und damit kompakt in G . Da die Untergruppen G_S eine offene Überdeckung von G bilden, gibt es eine endliche Familie $\{G_{S_n}\}$, die K überdecken. Wir können sogar noch mehr sagen. Da die S_k endlich sind, ist $S = \bigcup_k S_k$ endlich, also wird K sogar von nur einem G_S überdeckt. Sei K_ν das kompakte Bild von K unter der natürlichen Projektion π_ν . Es ist $K_\nu \subseteq H_\nu$ für alle $\nu \notin S$, sodass wir hier K_ν durch die kompakten H_ν ersetzen können. Dann ist $Y \subseteq K \subseteq \prod_\nu K_\nu$ und wir sind fertig. \square

Korollar 5.4. *Jede kompakte Teilmenge K von G liegt in einer der Untergruppen G_S .*

5.2 Quasi-Charaktere

Machen wir uns einige Gedanken über die Quasi-Charaktere auf dem eingeschränkten direkten Produkt. Jede stetige Abbildung f auf G induziert durch die Inklusion $\iota_\nu : G_\nu \rightarrow G$ eine stetige Abbildung $f_\nu = f \circ \iota_\nu$ auf der Komponente G_ν . Analog ist f_ν ein Homomorphismus auf G_ν , wenn f selbst ein Homomorphismus auf G ist. Damit lassen sich die Quasi-Charaktere auf G wie folgt charakterisieren.

Lemma 5.5. *Sei $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein (Quasi-)Charakter. Dann sind alle $\chi_\nu : G_\nu \rightarrow \mathbb{C}^\times$ (Quasi-)Charaktere und wirken fast alle trivial auf H_ν . Folglich haben wir fast überall $\chi_\nu(g_\nu) = 1$ mit $g = (g_\nu) \in G$ und es gilt die Produktformel*

$$\chi(g) = \prod_\nu \chi_\nu(g_\nu).$$

Beweis. Das alle χ_ν (Quasi-)Charaktere sind folgt aus unseren Vorüberlegungen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass fast alle χ_ν jeweils trivial auf die Untergruppen H_ν wirken. Dazu wählen wir uns eine offene Umgebung U der 1 in \mathbb{C}^\times , die nur die triviale Untergruppe $\{1\}$ enthält. Aufgrund der Stetigkeit von χ finden wir eine offene Umgebung $V = \prod_\nu V_\nu$ der 1 in G mit $V_\nu = H_\nu$ für alle ν außerhalb einer endlichen Indexmenge S und $\chi(V) \subseteq U$. Dann gilt aber

$$\left(\prod_{\nu \in S} 1\right) \times \left(\prod_{\nu \notin S} H_\nu\right) \subseteq V$$

und daher

$$\chi\left(\left(\prod_{\nu \in S} 1\right) \times \left(\prod_{\nu \notin S} H_\nu\right)\right) \subseteq U$$

Die linke Seite ist aber als Bild einer Gruppe unter einem Homomorphismus selbst wieder eine Gruppe. Nach unserer Wahl von U folgt also

$$\chi\left(\left(\prod_{\nu \in S} 1\right) \times \left(\prod_{\nu \notin S} H_\nu\right)\right) = \{1\}.$$

Folglich $\chi_\nu(H_\nu) = \{1\}$ für alle $\nu \notin S$. Damit ist aber klar, dass für jedes $g \in G$ das Produkt $\prod_\nu \chi_\nu(g_\nu)$ endlich ist und wegen $g = \prod_\nu \iota_\nu(g_\nu)$ genau $\chi(g)$ entspricht. \square

Wir können das Lemma aber auch umdrehen und so Quasi-Charaktere auf G konstruieren.

Lemma 5.6. *Seien $\chi_\nu : G_\nu \rightarrow \mathbb{C}^\times$ (Quasi-)Charaktere und nehmen wir an, dass fast alle trivial auf H_ν wirken. Dann ist*

$$\chi(g) = \prod_\nu \chi_\nu(g_\nu)$$

ein (Quasi-)Charakter auf G .

Beweis. Das Produkt χ ist wohldefiniert da fast alle $g_\nu \in H_\nu$ und bildet einen Gruppenshomomorphismus auf G . Es bleibt noch zu zeigen, dass χ stetig ist. Da G und \mathbb{C}^\times topologische Gruppen sind, genügt es sich offene Umgebungen der 1 anzuschauen. Sei daher U eine offene Umgebung der 1 in \mathbb{C}^\times . Sei S die endliche Menge aller Indizes ν , so dass χ_ν nicht trivial auf H_ν wirkt, und setze $n = |S|$. Wir finden eine weitere Umgebung W der 1 in \mathbb{C}^\times , so dass das Produkt von n beliebigen Elementen aus W wieder in U liegt. Aufgrund der Stetigkeit von χ_ν , finden wir für jedes $\nu \in S$ eine offene Umgebungen V_ν der 1 in G_ν mit $\chi_\nu(V_\nu) \subseteq W$. Für $\nu \notin S$ setzen wir $V_\nu = H_\nu$. Dann ist $V = \prod_\nu V_\nu$ eine offene Umgebung der 1 in G und für jedes $g \in V$ ist $\chi(g)$ das endliche Produkt von n Faktoren aus W , also $\chi(g) \in U$. \square

5.3 Integration

Wie wir gesehen haben ist $G = \prod_{\nu \in I} G_\nu$ eine lokalkompakte Gruppe, besitzt also nach Satz 2.10 ein Haar-Maß. Dieses möchten wir abhängig von den lokalen Maßen normalisieren.

Satz 5.7. *Sei G das eingeschränkte direkte Produkt einer Familie lokalkompakter Gruppen G_ν bezüglich der kompakten Untergruppen $H_\nu \subseteq G_\nu$. Bezeichne dg_ν das Haar-Maß auf G_ν mit der Normalisierung*

$$\text{Vol}(H_\nu, dg_\nu) = \int_{H_\nu} dg_\nu = 1$$

für fast alle $\nu \in I$. Dann gibt es ein eindeutiges Haar-Maß dg auf G , so dass für jede endliche Teilmenge $S \supseteq I_\infty$ der Indexmenge I die Einschränkung dg_S von dg auf G_S genau das (Radon-)Produktmaß ist.

Beweis. Die im Satz angesprochene Normalisierung der dg_ν ist möglich, da per Definition die Untergruppen H_ν offen und kompakt sind und daher ein nicht verschwindendes endliches Maß haben.

Sei S nun eine beliebige Menge wie im Satz beschrieben und definiere dg_S als das Produktmaß $dg_S := (\prod_{\nu \in S} dg_\nu) \times dg^S$, wobei dg^S das Haar-Maß auf der kompakten Gruppe $G^S := \prod_{i \notin S} H_\nu$ mit $\text{Vol}(G^S, dg^S) = 1$ ist. Für die Existenz von dg^S siehe zum Beispiel Folland [3] Kapitel 7, Satz 7.28. Als endliches Produkt von Haar-Maßen ist dg_S selbst wieder ein Haar-Maß und wir können das dg auf G so normieren, dass dessen Einschränkung auf G_S mit dg_S übereinstimmt.

Damit haben wir eine Normierung, von der wir noch nicht wissen, ob sie unabhängig von unserer Wahl der Indexmenge S ist. Sei daher $T \supseteq S$ eine weitere endliche Indexmenge. Per Definition ist G_S eine Untergruppe von G_T . Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass das Maß dg_T mit dg_S auf G_S übereinstimmt. Zerlegt man $G^S = (\prod_{\nu \in T \setminus S} H_\nu) \times G^T$, so bildet $(\prod_{\nu \in T \setminus S} dg_\nu) \times dg^T$ ein Haar-Maß, welches der kompakten Gruppe G^S das oben geforderte Maß 1 zuweist. Aus der Eindeutigkeit des Haar-Maßes auf (lokal)kompakten Gruppen folgt somit die Gleichheit zu dg^S und daher

$$dg_S = \left(\prod_{\nu \in S} dg_\nu \right) \times dg^S = \left(\prod_{\nu \in S} dg_\nu \right) \times \left(\prod_{\nu \in T \setminus S} dg_\nu \right) \times dg^T = \left(\prod_{\nu \in T} dg_\nu \right) \times dg^T = dg_T$$

auf G_S . Sei nun S' eine beliebige weitere Indexmenge, die I_∞ enthält. Das normierte Maß dg wird auf $G_{S \cup S'}$ eingeschränkt zu einem Maß, welches ein konstantes Vielfaches von $dg_{S \cup S'}$ ist. Da aber $G_S \subseteq G_{S \cup S'}$ muss diese Konstante 1 sein, denn nach obigen Überlegungen ist die Einschränkung von $dg_{S \cup S'}$ auf G_S gerade dg_S . Umgekehrt ist aber $dg_{S'}$ die Einschränkung von $dg_{S \cup S'}$ auf $G_{S'}$, also ist die Normalisierung unabhängig von der Wahl unserer Indexmenge S . \square

Als nächstes lernen wir, wie man einfache Funktionen auf G bezüglich dg integriert.

Satz 5.8. *Sei G das eingeschränkte direkte Produkt mit dem induzierten Maß dg*

(i) *Sei $f \in L(G)$ eine integrierbare Funktion auf G . Dann gilt*

$$\int_G f(g) dg = \lim_S \int_{G_S} f(g_S) dg_S,$$

Nehmen wir nur an, dass f stetig ist, so gilt diese formale Identität immer noch, wenn wir unendliche Werte erlauben.

- (ii) Sei S_0 eine beliebige endliche Indexmenge, die I_∞ und alle ν enthält, für die $\text{Vol}(H_\nu, dg_\nu) \neq 1$. Für jeden Index ν sei f_ν eine stetige Funktion auf G_ν , so dass $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ für alle $\nu \notin S_0$. Wir definieren nun für alle $g \in G$

$$f(g) = \prod_{\nu} f_\nu(g_\nu).$$

Dann ist f wohldefiniert und stetig auf G . Ist S eine beliebige endliche Indexmenge, die S_0 enthält, so haben wir

$$\int_{G_S} f(g_S) dg_S = \prod_{\nu \in S} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu) dg_\nu \right). \quad (7)$$

Nimmt ferner das Produkt

$$\prod_{\nu \in S} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu) dg_\nu \right)$$

sogar nur einen endlichen Wert an, dann ist f insbesondere integrierbar und es gilt

$$\int_G f(g) dg = \prod_{\nu \in I} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu) dg_\nu \right).$$

Bevor wir zum Beweis kommen, halten wir zunächst fest was überhaupt mit dem Ausdruck $\lim_S \phi(S) = \phi_0$ für eine Funktion ϕ auf den endlichen Indexmengen S mit Werten in einem abgeschlossenen topologischen Raum gemeint ist: Gegeben eine beliebige Umgebung V von ϕ_0 , dann gibt es eine Indexmenge $S(V)$, sodass für alle weiteren Indexmengen $S \supseteq S(V)$ der Wert $\phi(S)$ in V liegt. Intuitiv ist also $\lim_S \phi(S)$ der Limes von $\phi(S)$ über größer und größere S .

Beweis. (i) Aus der Integrationstheorie (vgl. Folland [3] Kapitel 7 Korollar 7.13) ist bekannt, dass

$$\int_G f(g) dg = \sup_{K \text{ kompakt}} \left\{ \int_K f(g) dg \right\}.$$

Da aber jedes solche K in einer der Mengen G_S liegt, folgt die Gleichung sofort.

(ii) Aus der Bedingung $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ folgt, dass das Produkt $f(g) = \prod_{\nu} f_\nu(g_\nu)$ für alle Elemente $g \in G$ endlich und die Funktion damit wohldefiniert ist. Um die Stetigkeit zu zeigen schauen wir uns die offenen Umgebungen von g an. Als Basis haben wir die offenen Rechtecke $\prod N_\nu \times \prod H_\nu$, wobei in dem ersten endlichen Produkt die N_ν offene Umgebungen von g_ν sind. Dies bleibt auch eine Basis wenn wir zusätzlich noch verlangen, dass das erste Produkt zusätzlich auch alle Indizes enthält, für die f_ν nicht trivial auf H_ν wirkt. Auf diesen Rechtecken ist f lokal betrachtet dann nichts weiter als ein endliches Produkt stetiger Funktionen und daher selbst stetig.

Für den zweiten Teil der Behauptung sei S nun eine Indexmenge nach den Bedingungen von (ii). Unter der Annahme $\text{Vol}(H_\nu, dg_\nu) = 1$ für alle $\nu \notin S$ haben wir auf G_S das durch dg induzierte Produktmaß $dg_S = (\prod_{s \in S} dg_s) \times dg^S$. Weiter hat f wegen $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ für $\nu \notin S$ dort die Form $f(g) = \prod_{\nu \in S} f_\nu(g_\nu)$. Es folgt

$$\int_{G_S} f(g_S) dg_S = \prod_{\nu \in S} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu) dg_\nu \right) \cdot \int_{G^S} dg^S = \prod_{\nu \in S} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu) dg_\nu \right)$$

Nehmen wir nun an, dass das Produkt endlich ist. Dann gilt aber nach (i) und Gleichung (7)

$$\prod_{\nu \in I} \left(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu) dg_\nu \right) = \lim_S \int_{G_S} f(g_S) dg_S = \int_G f(g) dg$$

und wir sind fertig. □

6 Adele und Idele

Für die lokalen Funktionalgleichungen haben wir im wesentlichen zwei Sachen benötigt. Zum einen die Fouriertransformation: ein Integral über die additive Gruppe, welches als Funktion auf den additiven Charakteren definiert war. Zum anderen die Zeta-Funktion, gewissermaßen ein multiplikatives Gegenstück zur Fouriertransformation: eine Funktion mitunter auf den multiplikativen Quasi-Charakteren, definiert als Integral über der multiplikativen Gruppe. Dieses Zusammenspiel von additiven und multiplikativen Strukturen ziehen wir in den nächsten zwei Kapiteln in die globale Welt des eingeschränkten direkten Produkts und beginnen mit der Betrachtung zweier lokalkompakter Gruppen: die additive Gruppe der Adele und die multiplikative Gruppe der Idele.

6.1 Die Gruppe der Adele

Wir definieren die *Adelegruppe* \mathbb{A} von \mathbb{Q} als das eingeschränkte direkte Produkt über alle lokalkompakten Gruppen \mathbb{Q}_p^+ bezüglich der Untergruppen \mathbb{Z}_p , d.h.

$$\mathbb{A} := \prod_{p \leq \infty}' \mathbb{Q}_p^+ = \{(x_p) : x_p \in \mathbb{Q}_p^+ \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ für fast alle } p < \infty\}$$

und nennen ein beliebiges Element $x \in \mathbb{A}$ dieser Gruppe eine *Adele*. Es gibt eine algebraische (aber nicht topologische) Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ x &\longmapsto (x, x, x, \dots) \end{aligned}$$

der rationalen Zahlen in die Adele. Diese ist tatsächlich wohldefiniert, denn für fast alle Stellen $p < \infty$ ist $|x|_p = 1$ und damit $x \in \mathbb{Z}_p$. Es wird also keine Verwirrung stiften, wenn wir (algebraisch) \mathbb{Q} mit dieser Einbettung identifizieren. Wie sieht dann aber die Topologie aus?

Satz 6.1. (i) \mathbb{Q} liegt diskret in \mathbb{A} . (ii) \mathbb{A}/\mathbb{Q} ist kompakt.

Beweis. Für (i) betrachten wir die offene Nullumgebung

$$U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p.$$

Ist nun $r \in \mathbb{Q} \cap U$, so gilt $|r|_p \leq 1$ für alle $p < \infty$, also $r \in \mathbb{Z}$. Nun ist aber $|r|_\infty < \frac{1}{2}$ und damit muss schon $r = 0$ gelten. Für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{Q}$ erhalten wir mit $x + U$ eine entsprechende offene Umgebung von x .

Für (ii) zeigen wir, dass das Bild der Menge $K := [0, 1] \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$ unter der Projektion $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ schon ganz \mathbb{A}/\mathbb{Q} ist. Dann ist \mathbb{A}/\mathbb{Q} als stetiges Bild des Kompaktums K selber kompakt. Sei $x \in \mathbb{A}$ beliebig und S die endliche Stellenmenge $\{p : x_p \notin \mathbb{Z}_p\}$. Wählen wir ein $p \in S$, $p < \infty$ und schreiben

$$x_p = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k.$$

Dann ist

$$x_p - \underbrace{\sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k}_{=: r \in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}_p$$

und für jede weitere endliche Stelle $q \neq p$ gilt

$$|r|_q = \left| \sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k \right|_q \leq \max \left\{ |a_k p^k|_q \right\} \leq 1,$$

also ist $r \in \mathbb{Z}_q$. Ersetzen wir nun x durch $x - r$, so reduziert sich die Stellenmenge S zu $S \setminus \{p\}$. Dieses Argument setzen wir induktiv bis $S = \{\infty\}$ fort und erhalten damit ein x , welches sich nur um eine Zahl aus \mathbb{Q} von dem ursprünglichen Adel unterscheidet und selbst in $\mathbb{R} \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$ liegt. Nun können wir aber noch x modulo \mathbb{Z} nach $[0, 1] \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$ verschieben und sind fertig. \square

Unter einer *einfachen Funktion* auf \mathbb{A} wollen wir nun Funktionen der Form $f = \prod_{p \leq \infty} f_p$ mit $f_p = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle Stellen p verstehen. Solche haben bereits im vorherigen Kapitel im Kontext der Integration kennengelernt, daher überrascht uns das folgende Ergebnis nicht wirklich.

Satz 6.2. *Sei $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ eine einfache integrierbare Funktion auf den Adelen. Es gilt die Produktformel*

$$\int_{\mathbb{A}} f(x) dx = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p) dx_p$$

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus Satz 5.8, denn für einfache Funktionen ist nach unserer Normierung das Produkt auf der rechten Seite endlich. \square

Die Gruppe der Adele erhält über die komponentenweise Multiplikation eine Ringstruktur. Diese ist nicht nullteilerfrei, denn zum Beispiel gilt für zwei verschiedene Stellen $p, q \leq \infty$, dass $\iota_p(1) \cdot \iota_q(1) = 0$. Zudem ist in \mathbb{A}^\times versehen mit der Teilraumtopologie die Inversenbildung nicht stetig, folglich bildet \mathbb{A}^\times bezüglich der Multiplikation keine topologische Gruppe. Um dieses Problem zu umgehen wiederholen wir in der nächsten Untersektion die Konstruktion, jedoch diesmal mit den multiplikativen Gruppen \mathbb{Q}_p^\times .

6.2 Die Gruppe der Idele

Analog zu den Adelen definieren wir die *Idelegruppe* \mathbb{I} von \mathbb{Q} als das eingeschränkte direkte Produkt über alle lokalkompakten Gruppen \mathbb{Q}_p^\times bezüglich der Untergruppen \mathbb{Z}_p^\times , d.h.

$$\mathbb{I} = \prod_{p \leq \infty}' \mathbb{Q}_p^\times = \{(x_p) : x_p \in \mathbb{Q}_p^\times \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ für fast alle } p < \infty\}$$

und nennen ein Element $x \in \mathbb{I}$ dieser Gruppe ein *Idel*. Wieder gibt es die algebraische Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^\times &\longrightarrow \mathbb{I} \\ x &\longmapsto (x, x, x, \dots) \end{aligned}$$

der rationalen Einheiten in die Idele, denn wie wir bereits bei den Adelen festgestellt haben, ist für fast jede Stelle $|x|_p = 1$ und somit $x \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Wir haben uns bereits zweimal die lokalen Beträge auf dem eingeschränkten direkten Produkt angeschaut. Die Definition der Idele erlaubt es uns diese miteinander zu einem globalen Absolutbetrag zu multiplizieren.

Definition 6.3. Wir definieren den *adelischen (globalen) Absolutbetrag* $|\cdot|_{\mathbb{A}} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ durch das wohldefinierte Produkt

$$|x|_{\mathbb{A}} = \prod_{p \leq \infty} |x_p|_p$$

Der Begriff „Betrag“ sollte hier vorsichtig behandelt werden, denn streng genommen ist $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ auf keinem Körper definiert. Wir wollen diese Unzulänglichkeit jedoch verzeihen, denn es lassen sich mit dieser Abbildung Aussagen aus dem Lokalen in das Globale übertragen.

Lemma 6.4. *Für das additive Haar-Maß dx auf \mathbb{A} und jedes Idel $\lambda \in \mathbb{I}$ gilt*

$$d(\lambda x) = |\lambda|_{\mathbb{A}} \cdot dx$$

Beweis. Der Beweis funktioniert analog zu und mit Satz 4.2. Wir betrachten dazu wieder die kompakte Menge $K = [0, 1] \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$. Es ist $\lambda K = [0, \lambda_{\infty}] \times \prod_{p < \infty} \lambda_p \mathbb{Z}_p$ wieder kompakt. Insbesondere sind fast alle Komponenten gleich \mathbb{Z}_p und wir rechnen nach Satz 6.2

$$\int_{\lambda K} dx = \int_{[0, \lambda_{\infty}]} dx_{\infty} \cdot \prod_{p < \infty} \int_{\lambda_p \mathbb{Z}_p} dx_p = |\lambda_{\infty}|_{\infty} \int_{[0, 1]} dx_{\infty} \cdot \prod_{p < \infty} |\lambda_p|_p \int_{\mathbb{Z}_p} dx_p = |\lambda|_{\mathbb{A}} \int_K dx,$$

wobei wir in der dritten Gleichung Satz 4.2 benutzt haben. \square

Halten wir noch eine weitere wichtige Aussage über diesen Betrag fest.

Satz 6.5 (Artins Produktformel). *Für alle $x \in \mathbb{Q}^{\times}$ gilt $|x|_{\mathbb{A}} = 1$.*

Beweis. Aufgrund der Multiplikativität von $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ reicht es die Aussage für Primzahlen q zu zeigen. q hat aber an nur zwei Stellen nichttrivialen Betrag und daher

$$|q|_{\mathbb{A}} = |q|_{\infty} \cdot |q|_q = q \cdot q^{-1} = 1.$$

\square

Analog zu $\mathbb{Z}_p^{\times} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$ können wir auch auf den Idelen die Untergruppe

$$\mathbb{I}^1 = \{x \in \mathbb{I} : |x|_{\mathbb{A}} = 1\}$$

der *Betrag-Eins Ideale* betrachten. Die obige Produktformel sagt uns gerade, dass \mathbb{Q}^{\times} eine Teilmenge von \mathbb{I}^1 ist. Damit haben wir die nötigen Definitionen zusammen um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 6.6. (i) \mathbb{Q}^{\times} liegt diskret in \mathbb{I} .

(ii) $F := \{1\} \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p^{\times}$ ist ein Fundamentalbereich der Gruppenwirkung von \mathbb{Q}^{\times} auf \mathbb{I}^1 . Genauer haben wir einen Isomorphismus topologischer Gruppen $F \cong \mathbb{I}^1 / \mathbb{Q}^{\times}$.

(iii) $\mathbb{I}^1 / \mathbb{Q}^{\times}$ ist kompakt.

(iv) Der adelische Betrag $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ induziert einen Isomorphismus topologischer Gruppen $\mathbb{I} \cong \mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^{\times}$.

Beweis. (i) Wir wählen ein beliebiges $0 < \epsilon < 1$ und setzen

$$U := (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p^{\times}.$$

Dann ist U offensichtlich eine offene Umgebung der 1 in \mathbb{I} . Wir wollen nun zeigen, dass U keine weitere rationale Zahl enthält. Sei dazu $r \in \mathbb{Q}^{\times} \cap \mathbb{I}$. Das bedeutet, dass $r \in \mathbb{Z}_p^{\times}$, also $|r|_p = 1$, für alle Primzahlen $p < \infty$. Dann muss r aber schon eine ganze Zahl sein. Für diese gilt zudem $r \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$. Folglich ist $r = 1$.

(ii) Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta : F &\longrightarrow \mathbb{I}^1 / \mathbb{Q}^{\times} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

und behaupten, dass dies ein Isomorphismus topologischer Gruppen ist. Zunächst sehen wir, dass η als Komposition von Inklusion in \mathbb{I}^1 und Projektion in den Quotienten wieder ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist. Zudem können wir direkt eine Umkehrabbildung angeben durch

$$\begin{aligned}\eta^{-1} : \quad \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times &\longrightarrow F \\ [x] &\longmapsto x_\infty^{-1} \cdot x\end{aligned}$$

Wir vergewissern uns, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Zum einen folgt aus $x \in \mathbb{I}^1$ schon, dass $x_\infty \in \mathbb{Q}^\times$, denn $|x_\infty|_\infty = (\prod_{p<\infty} |x_p|_p)^{-1} \in \mathbb{Q}^\times$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von x_∞ und $|x|_\mathbb{A} = 1$ muss dann schon $|x_p/x_\infty|_p = 1$ folgen. Also kann uns nur noch die Wahl des Repräsentanten Probleme machen. Wir stellen aber erfreut fest, dass $rx = (rx_p)$ abgebildet wird auf $((rx_\infty)^{-1}rx_p) = (x_\infty^{-1}x_p)$ für beliebige $r \in \mathbb{Q}^\times$. Des weiteren ist sie stetig, denn sie lässt sich schreiben als $\eta^{-1}(x) = \iota(\pi_\infty(x))^{-1} \cdot x$. Damit ist dann η also ein topologischer Isomorphismus.

(iii) Dies ist eine einfache Folgerung aus (ii), da F als Produkt kompakter Untergruppen wieder kompakt ist.

(iv) Der Isomorphismus von \mathbb{I} nach $\mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$ wird definiert durch die Abbildung $x \mapsto (\tilde{x}, |x|_\mathbb{A})$, wobei

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_p) = \begin{cases} x_p & \text{falls } p < \infty \\ \frac{x_\infty}{|x|_\mathbb{A}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um zu sehen, dass die Abbildung ein topologischer Gruppenhomomorphismus ist, schreiben wir sie als $x \mapsto (\iota_\infty(|x|_\mathbb{A})^{-1} \cdot x, |x|_\mathbb{A})$. Die Umkehrabbildung ist dann gegeben durch $(x, y) \mapsto \iota_\infty(y) \cdot x$, welche wiederum stetig ist und wir somit einen Isomorphismus topologischer Gruppen haben. \square

Zum Schluss möchten wir auch hier die Integration der einfachen Funktionen $f = \prod_{p \leq \infty} f_p$ mit $f_p = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ fast überall betrachten.

Satz 6.7. *Sei $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{C}$ eine einfache integrierbare Funktion auf den Idelen. Es gilt die Produktformel*

$$\int_{\mathbb{I}} f(x) d^\times x = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_p(x_p) d^\times x_p$$

Beweis. Analog zu Satz 6.2, denn $f_p|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$ fast überall. \square

7 Tates Beweis der Funktionalgleichung

Wir haben nun alle Werkzeuge zusammen um die Ideen aus Kapitel 4 und Riemanns Beweis auf die Adele zu übertragen. Dazu führen wir die Fouriertransformation auf den Adelen ein und beweisen das Äquivalent zu Riemanns Thetaformel. Dafür weichen wir etwas von Tates Doktorarbeit um eine leichter verständliche Argumentation zu geben, die sich zwar nicht so leicht auf den Allgemeineren Fall übertragen lässt, jedoch weitaus weniger Vorwissen benötigt. Anschließend werden wir aber Tates Beweis der globalen Funktionalgleichung in seiner ganzen Fülle geben und zeigen zum Schluss des Kapitels und dieser Arbeit, wie dieses Resultat die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion liefert.

7.1 Globale Fourieranalysis

Wir spiegeln den Abschnitt über die lokale Fourieranalysis und beginnen mit der Definition eines Standardcharakters auf \mathbb{A} .

Definition 7.1. Der *globale Standardcharakter* $e : \mathbb{A} \rightarrow S^1$ ist durch

$$e(x) = \prod_{p \leq \infty} e_p(x_p)$$

definiert als Produkt aller lokalen Standardcharaktere $e_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow S^1$.

Nach Korollar 4.7 wirken fast alle e_p trivial auf \mathbb{Z}_p und von daher folgt mit Lemma 5.5 über die Charaktere des eingeschränkten direkten Produkts direkt, dass diese Abbildung wohldefiniert und ebenfalls ein Charakter ist.

Satz 7.2. Der Standardcharakter $e : \mathbb{A} \rightarrow S^1$ wirkt trivial auf \mathbb{Q} .

Für den Beweis benötigen wir noch ein kleines Lemma aus der Zahlentheorie.

Lemma 7.3. Jede rationale Zahl kann als endliche Summe von Zahlen der Form $\pm \frac{1}{p^m}$ geschrieben werden.

Beweis. Für die Zahl 0 entspricht das der leeren Summe und gilt trivialerweise. Sei nun $r = \pm a/b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ eine nicht verschwindende rationale Zahl. Wir können r zunächst mal als Summe von a Kopien von $\text{sgn} r/b$ geschrieben werden. Von daher reicht also rationale Zahlen der Form $1/b$ zu betrachten. Sei $b = \prod_{k=1}^n p_k^{m_k}$ die Primfaktorzerlegung von b . Dann gibt es eine Bezout-Darstellung $1 = up_1^{m_1} + vp_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$ mit ganzen Zahlen u und v . Es folgt

$$\frac{1}{b} = \frac{up_1^{m_1} + vp_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}}{p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}} = \frac{u}{p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}} + \frac{v}{p_1^{m_1}}.$$

Induktiv erhalten wir damit ganze Zahlen u_1, \dots, u_n , so dass

$$\frac{1}{b} = \frac{u_1}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{u_n}{p_n^{m_n}}.$$

Mit dem gleichen Argument vom Anfang des Beweises ist jeder dieser Summand wieder eine endliche Summe von $|u_k|$ Kopien von $\pm 1/p_k^{m_k}$ und es folgt das Lemma. \square

Kommen wir damit zum eigentlichen Beweis des Satzes.

Beweis von Satz 7.2. Da es sich bei dem Standardcharakter um einen additiven Charakter handelt, reicht es nach obigen Lemma sich auf rationale Zahlen der Form $1/p^m$ zu

beschränken. Für jede endliche Stelle $q \neq p$ ist aber $1/p^m \in \mathbb{Z}_q$, also $e_q(1/p^m) = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} e\left(\frac{1}{p^m}\right) &= \prod_{q \leq \infty} e_q\left(\frac{1}{p^m}\right) = e_\infty\left(\frac{1}{p^m}\right) e_p\left(\frac{1}{p^m}\right) \\ &= \exp(-2\pi i p^{-m}) \exp(2\pi i p^{-m}) = 1 \end{aligned}$$

□

Wir wollen wieder den Bezug zur abstrakten harmonischen Analysis herstellen und beginnen damit, das globale Äquivalent von Lemma 4.6 zu beweisen

Lemma 7.4. *Ist $\psi : \mathbb{A} \rightarrow S^1$ ein Charakter, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Adel $a \in \mathbb{A}$ mit $\psi(x) = e(ax)$.*

Beweis. Den Großteil der Arbeit haben wir bereits in Lemma 5.5 gemacht. Demnach ist $\psi(x) = \prod_{p \leq \infty} \psi_p(x_p)$, wobei die $\psi_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow S^1$ lokale Charaktere sind und fast alle ψ_p trivial auf \mathbb{Z}_p wirken. Nach Lemma 4.6 gilt $\psi_p(x_p) = e_p(a_p x_p)$ für eindeutige $a_p \in \mathbb{Q}_p$ und nach Korollar 4.7 liegen schon fast alle a_p bereits in \mathbb{Z}_p . Folglich ist $a = (a_p)$ ein eindeutig bestimmtes Adel und es gilt

$$\psi(x) = \prod_{p \leq \infty} \psi_p(x_p) = \prod_{p \leq \infty} e_p(a_p x_p) = e(ax).$$

□

Damit haben wir nun alles zusammen und kommen zur zentralen Definition dieses Abschnitts.

Definition 7.5 (Globale Fouriertransformation). Sei $f \in L^1(\mathbb{A})$. Wir definieren dann die *adelische Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ von f durch die Formel

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{A}} f(x) e(-\xi x) dx$$

für alle $\xi \in \mathbb{A}$.

Lokal haben wir gesehen, dass die Schwartz-Bruhat Funktionen $S(\mathbb{Q}_p)$ sich besonders für die Fourieranalysis geeignet haben. Was ist das Äquivalent im Globalen? Wir definieren zunächst die *faktorisierten Schwartz-Bruhat Funktion* $f = \prod_{p \leq \infty} f_p$ als Produkte lokaler Schwartz-Bruhat Funktionen f_p , wobei für fast alle Stellen $p < \infty$ dieser Faktor gleich der charakteristischen Funktion von \mathbb{Z}_p ist. Damit sind sie insbesondere im Sinne von Kapitel 6 einfache Funktionen auf \mathbb{A} und können nach Satz 6.2 vergleichsweise schmerzlos integriert werden. Mit der Charakterisierung der lokalen Schwartz-Bruhat Funktionen in Lemma 4.11 über allen endlichen Stellen können die faktorisierten Funktionen auch geschrieben werden als

$$f(x) = f_\infty(x) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{a_p + p^{k_p} \mathbb{Z}_p} \quad (8)$$

mit $a_p \in \mathbb{Z}_p$ und $k_p = 0$ für fast alle Stellen. Die *adelischen Schwartz-Bruhat Funktion* sind endliche Linearkombinationen faktorisierbarer Schwartz-Bruhat Funktionen über \mathbb{C} und notieren sie wieder mit $S(\mathbb{A})$. Es lässt sich wieder folgende Satz beweisen.

Satz 7.6. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ ist die Fouriertransformation wohldefiniert und liegt wieder in $S(\mathbb{A})$. Insbesondere gilt die Umkehrformel*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

für alle Adele $x \in \mathbb{A}$.

Beweis. Für den Beweis reicht es nur faktorisierbare f zu betrachten. Mit Satz 6.2 über die Integration einfacher Funktionen auf den Adelen folgt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{A}} f(x) e(-\xi x) dx = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p) e_p(-\xi_p x_p) dx_p = \prod_{p \leq \infty} \hat{f}_p(\xi_p).$$

Die Umkehrformel ergibt sich damit direkt aus den lokalen Umkehrformeln. \square

Mit der gleichen Argumentation zeigt man auch leicht:

Korollar 7.7. Sei $f \in S^1(\mathbb{A})$.

- (i) Ist $g(x) = f(x)e(ax)$ mit $a \in \mathbb{A}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)$.
- (ii) Ist $g(x) = f(x - a)$ mit $a \in \mathbb{A}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)e(-ax)$.
- (iii) Ist $g(x) = f(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{I}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \frac{1}{|\lambda|_{\mathbb{A}}} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

7.2 Adelische Poisson-Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

Werfen wir anfangs einen Blick auf die faktorisierbaren Schwartz-Bruhat Funktionen.

Lemma 7.8. Jede faktorisierbare adelische Schwartz-Bruhat Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ hat die Form

$$f = f_{\infty} \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p},$$

wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $k_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle Stellen p verschwindet.

Der Unterschied zur Darstellung der faktorisierbaren Schwartz-Bruhat Funktionen wie in Gleichung (8) liegt in der Tatsache, dass der Faktor a jetzt unabhängig von der jeweiligen Stelle ist.

Beweis. Für fast alle Stellen p ist $a \in \mathbb{Z}_p$ und $k_p = 0$, d.h. $\mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ fast überall. Damit ist klar, dass Funktionen dieser Form in $S(\mathbb{A})$ liegen.

Sei nun $f = \prod_{p \leq \infty} f_p \in S(\mathbb{A})$ eine faktorisierbare Schwartz-Bruhat Funktion und S die Menge der Stellen mit $f_p \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Für alle $p \in S$ gilt $f_p = \mathbb{1}_{a_p+p^{k_p}\mathbb{Z}_p}$ für ein $a_p \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Sind wir vorerst optimistisch und nehmen an, dass $k_p > 0$ und die a_p bereits ganze Zahlen sind. Wir suchen nun eine ganze Zahl a , die $a \equiv a_p \pmod{p^{k_p}}$ für alle $p \in S$ erfüllt. Das liefert uns aber gerade der chinesische Restsatz. Damit ist $a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p = a + p^{k_p}\mathbb{Z}_p$ und wir wären fertig.

Bleiben wir weiter optimistisch und versuchen die Funktionen für den allgemeinen Fall geeignet umzuformen. Sei dazu N der Hauptnenner der rationalen Zahlen a_p , $p \in S$ und sei $M = \prod_{p \in S} p^{|k_p|+1}$. Dann sind N und M natürliche Zahlen und wir betrachten die Funktion

$$f\left((NM)^{-1}x\right) = \prod_{p \leq \infty} f_p\left((NM)^{-1}x_p\right).$$

An fast alle Stellen ist $f_p\left((NM)^{-1}x_p\right)$ wieder gleich $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$, da $(NM)^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ fast überall. Für die restlichen endlichen Stellen dagegen entspricht sie der charakteristischen Funktion von $NM(a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p)$. Hier müssen wir nur aufpassen, da dies nicht mehr nur die Stellen in S betrifft. Wegen $NM \in \mathbb{Z}$ macht dies jedoch keine Probleme. Mit den bekannten Eigenschaften der p -adischen Zahlen erhalten wir dort $NM(a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p) = a'_p + p^{k'_p}\mathbb{Z}_p$ mit $a'_p \in \mathbb{Z}$ und $k'_p > 0$. Somit finden wir ein $a' \in \mathbb{Z}$ mit $NM(a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p) = a' + p^{k'_p}\mathbb{Z}_p$. Setzen wir nun $a := (NM)^{-1}a'$ folgt die Behauptung. \square

Diese schöne Form der globalen Schwartz-Bruhat Funktionen erlaubt es uns nun die Poisson Summenformel auf den Adelen zu beweisen.

Satz 7.9 (Poisson Summenformel). *Sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann konvergieren folgende Summen absolut und wir haben die Gleichung*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \quad (9)$$

Der folgende Beweis orientiert sich an Deitmar [2] Satz 5.4.9 und wurde etwas auf unsere Definition der Adele angepasst.

Beweis. Es genügt wieder die Aussage für faktorisierbare Schwartz-Bruhat Funktionen $f \in S(\mathbb{A})$ zu zeigen. Nach vorherigem Lemma 7.8 haben diese gerade die Form

$$f = f_\infty \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p}. \quad (10)$$

für ein $a \in \mathbb{Q}$ und $k_p = 0$ für fast alle Stellen p . Mit $N := \prod_{p < \infty} p^{-k_p} \in \mathbb{Q}$ haben wir dann

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma - a) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(N(\gamma - a)) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \left[f_\infty(N(\gamma - a)) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p}(N(\gamma - a)) \right] \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \left[f_\infty(N(\gamma - a)) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\gamma) \right] = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} f_\infty(N(\gamma - a)) \end{aligned}$$

Die Summe am Ende konvergiert aber absolut, da $f_\infty \in S(\mathbb{R})$.

Mit der Konvergenz aus dem Weg beschäftigen wir uns nun mit der Summenformel. Dabei werden sich die obigen Umformungen als sehr hilfreich erweisen. Erinnern wir uns zunächst an die Operatoren aus dem Beweis der lokalen Umkehrformeln in Satz 4.12. Dort haben wir die Notation $L_a f(x) = f(x - a)$ und $M_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ eingeführt. Mit ihnen können wir die Funktion (10) umschreiben zu

$$f = L_a M_N \left(\left(M_{1/N} L_{-a} f_\infty \right) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} \right).$$

Damit eröffnet sich nun folgende Beweisidee. Wir zeigen zuerst, dass Gleichung (9) (falls sie denn tatsächlich gilt) stabil unter den Operatoren L_a und M_λ ist. Anschließend zeigen wir sie für den einfacheren Fall $f = f_\infty \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Beides kombiniert ergibt dann den Beweis.

Gelte also $\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)$ und sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann haben wir

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} L_a f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma - a) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma).$$

Da der Standardcharakter e allerdings trivial auf \mathbb{Q} wirkt, ist dies gleich

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} e(-a\gamma) \hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \Omega_{-a} \hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} (L_a f)^\wedge(\gamma).$$

Für den zweiten Operator erinnern wir uns daran, dass $|\lambda|_{\mathbb{A}} = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} M_\lambda f(\gamma) &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\lambda\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\lambda\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \frac{1}{|\lambda|_{\mathbb{A}}} \hat{f}(\lambda^{-1}\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} (M_\lambda f)^\wedge(\gamma). \end{aligned}$$

Damit haben wir auch schon den ersten Teil der Beweisidee verwirklicht.

Der zweite Teil ist weniger Arbeit. Für $f = f_\infty \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ wissen wir aus den lokalen Berechnungen und Lemma 6.2, dass $\hat{f} = \hat{f}_\infty \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Zum anderen ist

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f_\infty(\gamma) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} f_\infty(\gamma),$$

denn das Produkt über alle endlichen Stellen verschwindet genau dann nicht, wenn γ eine ganze Zahl ist. Wir müssen also nur $\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} f_\infty(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \hat{f}_\infty(\gamma)$ zeigen. Aber das sagt uns gerade die klassische Poisson Summenformel aus Satz 1.2. \square

Ausgerüstet mit dieser Summenformel können wir jetzt Tates Variante der Thetaformel beweisen.

Satz 7.10 (Riemann-Roch). *Sei $x \in \mathbb{I}$ ein Idel und $f \in S(\mathbb{A})$. Dann*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma x) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma x^{-1}).$$

Insbesondere konvergieren die Summen absolut.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{I}$ beliebig aber fest. Für beliebige $y \in \mathbb{A}$ definieren wir eine Funktion $h(y) := f(yx)$. Diese ist wieder in $S(\mathbb{A})$, erfüllt damit die Poisson Summenformel

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{h}(\gamma)$$

und beide Summen konvergieren absolut. Nach Korollar 7.7 gilt aber

$$\hat{h}(\gamma) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \hat{f}(\gamma x^{-1}).$$

Damit sind wir auch schon fertig. \square

Für eine Interpretation dieses Resultats, die einen Bezug zum namensgebenden Satz von Riemann-Roch in der algebraischen Geometrie herstellt, verweisen wir auf Ramakrishnan und Valenza [7] Kapitel 7.2.

7.3 Die globale Funktionalgleichung

In Satz 6.6 haben wir gesehen, dass sich die Ideale \mathbb{I} als direktes Produkt $\mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$ schreiben lassen. Um nun auf \mathbb{I}^1 ein (multiplikatives) Haar-Maß d^*b zu fixieren, nehmen wir auf \mathbb{R}_+^\times das Maß $\frac{dt}{t}$ und verlangen $d^\times x = d^*b \times \frac{dt}{t}$. Für die Berechnungen haben wir dann ganz im Sinne von Fubini

$$\int_{\mathbb{I}} f(x) d^\times x = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{I}^1} f(t \cdot b) d^*b \right] \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{I}^1} \left[\int_0^\infty f(t \cdot b) \frac{dt}{t} \right] d^*b.$$

Die Notation $t \cdot b$ ist dabei als Multiplikation $\iota_\infty(t) \cdot b$ zu verstehen. Es folgt sofort, dass $|t \cdot b|_{\mathbb{A}} = |t|_\infty$ gilt. Weiter haben wir in Satz 6.6 auch den kompakten Fundamentalbereich $F = \{1\} \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p^\times$ der Wirkung von \mathbb{Q}^\times auf \mathbb{I}^1 kennengelernt. Das Volumen von F bezüglich d^*b wird für unsere Berechnung eine Rolle spielen. Berechnen wir es schnell. Mit der Normierung des Maßes $d^\times x$ haben wir

$$1 = \text{Vol} \left((1, e) \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p^\times, d^\times x \right) = \text{Vol}(F, d^*b) \cdot \text{Vol} \left((1, e), \frac{dt}{t} \right) = \text{Vol}(F, d^*b)$$

Bevor wir jetzt die globalen Zeta-Funktionen einführen benötigen wir noch geeignete multiplikative Charaktere. Es wird sich als sinnvoll erweisen die *Idelklassencharaktere* zu betrachten. Dies sind, wie der Name trügerisch verschweigt, Quasi-Charaktere auf \mathbb{I} , die trivial auf die Untergruppe \mathbb{Q}^\times wirken*. Aus dieser Definition wird klar, dass die Idelklassencharaktere χ das Vorzeichen nicht beachten. Es gilt nämlich $\chi(-x) = \chi(-1)\chi(x) = \chi(x)$ für jedes Idel $x \in \mathbb{I}$. Wir können aber noch mehr über sie aussagen.

Satz 7.11. *Jeder Idelklassencharakter χ hat die Form*

$$\chi(x) = \mu(\tilde{x})|x|_{\mathbb{A}}^s,$$

wobei μ ein Charakter auf \mathbb{I}^1 und $\tilde{\cdot} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^1$ der stetige Homomorphismus nach Satz 6.6 (iv) ist.

Beweis. Wir schreiben wie oben $x \in \mathbb{I}$ als eindeutiges Produkt $t \cdot b$ mit $t = |x|_{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}_+^\times$ und $b \in \mathbb{I}^1$. Dies ergibt die Zerlegung $\chi(x) = \chi_\infty(t) \cdot \chi(b)$. Da χ trivial auf \mathbb{Q}^\times wirkt, induziert er einen Charakter auf der kompakten Gruppe $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$, den wir wieder mit χ bezeichnen. Folglich ist (mit etwas Missbrauch der Notation) $\mu := \chi|_{\mathbb{I}^1} = \chi|_{\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times}$ nach Lemma 2.14 ein Charakter auf \mathbb{I}^1 . Weiter ist nach Lemma 4.14 $\chi_\infty(t) = |t|_\infty^s$ und wegen $|t|_\infty = |t|_{\mathbb{A}}$ folgt die Behauptung. \square

Auch hier ist in dieser Darstellung im Allgemeinen nur der *Exponenten* $\sigma = \Re(s)$ des Quasi-Charakters $\chi = \mu|_{\mathbb{A}}^s$ eindeutig. Ein Idelklassencharakter soll nun *unverzweigt* heißen, wenn er trivial auf \mathbb{I}^1 wirkt.

Korollar 7.12. *Jeder Idelklassencharakter χ ist genau dann unverzweigt, wenn er trivial auf F ist.*

Beweis. Das folgt sofort aus $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times \cong F$. \square

Nach obigen Satz hängt die Verzweigkeit also nur von dem Charakter μ ab.

Lemma 7.13. *Jeder unverzweigte Idelklassencharakter χ hat die Form $\chi = |\cdot|_{\mathbb{A}}^s$.*

Beweisidee. Dafür müssen wir im wesentlichen den Beweis von Lemma 4.14 kopieren \square

Die Definition der Zeta-Funktionen auf \mathbb{A} kann jetzt fast eins zu eins aus dem Lokalen übernommen werden.

Definition 7.14. Sei $f \in S(\mathbb{A})$ eine Schwartz-Bruhat Funktion und $\chi = \mu|_{\mathbb{A}}^s$ Idelklassencharakter. Die *globale Zeta-Funktion* von f und χ ist definiert als das Integral

$$Z(f, \chi) = \int_{\mathbb{I}} f(x) \chi(x) d^\times x.$$

Wir schreiben wieder $Z(f, \mu, s)$ für $Z(f, \mu|_{\mathbb{A}}^s)$.

Damit haben wir nun alles zusammen was wir brauchen um Riemanns Beweis in die Welt der Adele zu übertragen.

Satz 7.15 (Globale Funktionalgleichung). *Sei $\chi = \mu|_{\mathbb{A}}^s$ ein Idelklassencharakter und sei $f \in S(\mathbb{A})$ eine Schwartz-Bruhat Funktion. Dann konvergiert die globale Zeta-Funktion $Z(f, \mu, s)$ für $\Re(s) > 1$ absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen und definiert dort eine holomorphe Funktion, die zu einer meromorphen Funktion auf ganz \mathbb{C} fortgesetzt werden kann, welche die globale Funktionalgleichung*

$$Z(f, \chi) = Z(\hat{f}, \check{\chi})$$

*Der Name erklärt sich aus der Tatsache, dass sie gerade Quasi-Charaktere auf der sogenannten *Idelklassengruppe* $\mathbb{I}/\mathbb{Q}^\times$ sind (vgl. [6] S.375)

bzw.

$$Z(f, \mu, s) = Z(\hat{f}, 1/\mu, 1 - s)$$

erfüllt. Diese Funktion ist überall holomorph, außer wenn $\mu = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-i\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Dann besitzt sie einen einfachen Pol bei $s = i\tau$ mit Residuum $-f(0)$ und einen einfachen Pol bei $s = 1 + i\tau$ mit Residuum $\hat{f}(0)$.

Beweis. Starten wir mit der Konvergenz. Wie bisher genügt es faktorisierbare Schwartz-Bruhat Funktionen f zu betrachten. Ziel ist es dann zu zeigen, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{I}} |f(x)\chi(x)| d^\times x = \int_{\mathbb{I}} |f(x)| \cdot |x|_{\mathbb{A}}^\sigma d^\times x = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| \cdot |x_p|_p^\sigma d^\times x_p \quad (11)$$

endlich ist. Dazu teilen wir das Produkt auf. Es gibt eine Primzahl p_0 , so dass f_p für alle $p_0 \leq p < \infty$ gleich der charakteristischen Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ ist. Wir können Gleichung (11) also schreiben als

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} |f_\infty(x_\infty)| \cdot |x_\infty|_\infty^\sigma d^\times x_\infty \cdot \prod_{p < p_0} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| \cdot |x_p|_p^\sigma d^\times x_p \cdot \prod_{p_0 \leq p < \infty} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x_p|_p^\sigma d^\times x_p.$$

Das Integral setzt sich also als unendliches Produkt lokaler Zeta-Funktionen $Z_p(|f_p|, |x_p|_p^\sigma)$ zusammen. Der erste Faktor und das endliche Produkt in der Mitte konvergieren damit nach dem Satz über die lokalen Funktionalgleichungen für $\sigma > 0$, also sicherlich auch für $\sigma > 1$. Die Konvergenz der Zeta-Funktion hängt also nur noch von der des unendlichen Produkts

$$\prod_{p_0 \leq p < \infty} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x_p|_p^\sigma d^\times x_p$$

ab. Der aufmerksame Leser wird sich hier vielleicht an die genauen Berechnungen der lokalen Funktionalgleichungen erinnern und einen Bezug zur Riemannschen Zeta-Funktion erahnen. Um die spätere Überraschung aber nicht zu verderben, werden wir nur anmerken, dass dies ein Teilprodukt einer bekannten Produktformel ist, welche gleichmäßig auf jedem Kompaktum der gegebenen Halbebene konvergiert.

Weiter zur meromorphen Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} . Aufgrund absoluter Konvergenz auf der Halbebene $\Re(s) > 1$ haben wir

$$\begin{aligned} Z(f, \chi) &= \int_{\mathbb{I}} f(x)\chi(x) d^\times x \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{I}^1} f(t \cdot b)\chi(t \cdot b) (d^\times t \times d^*b) \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{I}^1} (f(t \cdot b)\chi(t \cdot b) d^*b) \right] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Um uns etwas Schreibarbeit zu sparen, definieren wir das innere Integral als

$$Z_t(f, \chi) := \int_{\mathbb{I}^1} f(t \cdot b)\chi(t \cdot b) d^*b.$$

Wie in Riemanns Beweis wollen wir nun eine auf ganz \mathbb{C} gültige meromorphe Darstellung der Zeta-Funktion finden. Dazu teilen wir, ganz analog, das Integral in die zwei Summanden

$$Z(f, \chi) = \int_0^1 Z_t(f, \chi) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(f, \chi) \frac{dt}{t}. \quad (12)$$

Das Integral \int_1^∞ macht uns keine Probleme. Wir haben festgestellt, dass

$$\int_1^\infty |Z_t(f, \chi)| \frac{dt}{t} = \int_{\{x \in \mathbb{I}: |x|_{\mathbb{A}} \geq 1\}} |f(x)| |x|_{\mathbb{A}}^\sigma d^\times x,$$

für $\sigma > 1$ konvergiert. Da $|x|_{\mathbb{A}} \geq 1$ verbessert sich das Konvergenzverhalten des Integranden umso kleiner σ ist und es folgt die Konvergenz auf ganz \mathbb{C} .

Widmen wir uns also dem Integral \int_0^1 zu. Zuerst überlegen wir uns, dass wir \mathbb{I}^1 nach Satz 6.6 als disjunkte Vereinigung $\bigcup_{a \in \mathbb{Q}^\times} aF$ darstellen konnten, wobei $F = \{1\} \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$ der Fundamentalbereich der Gruppenwirkung war. Kombiniert mit der Translationsinvarianz von d^*b und der Tatsache, dass χ als Ideleklassencharakter trivial auf \mathbb{Q}^\times wirkt, ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_t(f, \chi) &= \int_{\mathbb{I}} (f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) d^*b) = \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} \int_{aF} (f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) d^*b) \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} \int_F (f(at \cdot b) \chi(t \cdot b) d^*b) = \int_F \left(\sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} f(at \cdot b) \right) \chi(t \cdot b) d^*b, \end{aligned}$$

wobei wir auf $\sigma > 1$ wegen absoluter Konvergenz Summe und Integral vertauschen dürfen. Die Summe über $a \in \mathbb{Q}^\times$ erinnert dabei den Ausdruck $\Theta(x) - 1$ in Riemanns Beweis, welcher gerade $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \exp(-\pi x n^2)$ entspricht. Wir sind also dazu verleitet hier den Satz von Riemann-Roch anzuwenden, wofür wir allerdings eine Summe über ganz \mathbb{Q} benötigen. Dieses Problem lässt sich leicht beheben.

Lemma 7.16.

$$Z_t(f, \chi) = Z_{t^{-1}}(\hat{f}, \check{\chi}) + \hat{f}(0) \int_F \check{\chi}(x/t) d^*b - f(0) \int_F \chi(tx) d^*b.$$

Beweis. Die Idee ist klar. Wir addieren $f(0) \int_F \chi(tx) d^*b$ auf $Z_t(f, \chi)$, erhalten

$$Z_t(f, \chi) + f(0) \int_F \chi(tb) d^*b = \int_F \left(\sum_{a \in \mathbb{Q}} f(at \cdot b) \right) \chi(t \cdot b) d^*b$$

und können jetzt unsere Version von Riemann-Roch anwenden:

$$\begin{aligned} \int_F \left(\sum_{a \in \mathbb{Q}} f(at \cdot b) \right) \chi(t \cdot b) d^*b &= \int_F \left(\sum_{a \in \mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b^{-1}) \right) \frac{\chi(t \cdot b)}{|tb|_{\mathbb{A}}} d^*b \\ &= \int_F \left(\sum_{a \in \mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b) \right) |t^{-1}b|_{\mathbb{A}} \chi(t \cdot b) d^*b \\ &= \int_F \left(\sum_{a \in \mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b) \right) \check{\chi}(b/t) d^*b + \hat{f}(0) \int_F \check{\chi}(x/t) d^*b \\ &= Z_{t^{-1}}(\hat{f}, \check{\chi}) + \hat{f}(0) \int_F \check{\chi}(x/t) d^*b \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt den Variablenwechsel $b \mapsto b^{-1}$ und im dritten Schritt $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1}$ ausgenutzt haben. \square

Mit diesem Lemma lässt sich das Integral \int_0^1 also umformen zu

$$\int_0^1 Z_t(f, \chi) \frac{dt}{t} = \int_0^1 \left(Z_{t^{-1}}(\hat{f}, \check{\chi}) + \hat{f}(0) \check{\chi}(t)^{-1} \int_F \check{\chi}(x) d^*b - f(0) \chi(t) \int_F \chi(x) d^*b \right) \frac{dt}{t}$$

Ein Variablenwechsel $t \mapsto t^{-1}$ im ersten Summanden ergibt dann

$$\int_0^1 Z_{t^{-1}}(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} = \int_1^\infty Z_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t}$$

was nach dem gleichen Argument wie bei \int_1^∞ auf ganz \mathbb{C} konvergiert. Ganz nach Riemanns Vorbild haben wir nun zwei Integrale auf dem Bereich von 1 bis ∞ . Es bleibt noch der Term

$$E(f, \chi) := \int_0^1 \hat{f}(0) \check{\chi}(t)^{-1} \left(\int_F \check{\chi}(x) d^*b \right) \frac{dt}{t} - \int_0^1 f(0) \chi(t) \left(\int_F \chi(x) d^*b \right) \frac{dt}{t}.$$

Dieser entspricht wiederum den beiden Termen $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{1-s}$ aus Riemanns Beweis. Ist der Idelklassencharakter χ nicht unverzweigt, so wirkt er nach Korollar 7.12 auch nicht trivial auf dem Kompaktum F . Folglich verschwinden beide Integrale und $E(f, \chi) = 0$ ist offensichtlich eine ganze Funktion. Ist $\chi = \mu \cdot |\cdot|_{\mathbb{A}}^s$ dagegen unverzweigt, so haben wir in Lemma 7.13 gezeigt, dass $\chi = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{s'}$, wobei $s' = s - i\tau$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$. Wegen $\chi(t) = |t|_{\mathbb{A}}^{s'}$ ist damit

$$\begin{aligned} E(f, \chi) &= \text{Vol}(F, d^*b) \hat{f}(0) \int_0^1 t^{s'-1} \frac{dt}{t} - \text{Vol}(F, d^*b) f(0) \int_0^1 t^{s'} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\hat{f}(0)}{s' - 1} - \frac{f(0)}{s'} = \frac{\hat{f}(0)}{s - (i\tau + 1)} - \frac{f(0)}{s - i\tau} \end{aligned}$$

und wir sehen, dass E in diesem Fall eine rationale Funktion in s ist. Eingesetzt in Gleichung (12) erhält man

$$Z(f, \chi) = \int_1^\infty Z_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(f, \chi) \frac{dt}{t} + E(f, \chi),$$

einen auf ganz \mathbb{C} gültigen Ausdruck der Zeta-Funktion und damit eine meromorphe Fortsetzung der Funktion. Diese ist für $\mu \neq |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-i\tau}$ sogar ganz und hat im Fall $\mu = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-i\tau}$ nur zwei einfache Pole bei $s = i\tau$ und $s = 1 + i\tau$ mit Residuen $-f(0)$ bzw. $\hat{f}(0)$.

Zum Schluss kommen wir noch zur Funktionalgleichung. Es gilt zunächst $E(f, \chi) = E(\hat{f}, \check{\chi})$. Im unverzweigten Fall folgt dies sofort, und im verzweigten Fall $\chi = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{s'}$ haben wir

$$E(f, \chi) = \frac{\hat{f}(0)}{s' - 1} - \frac{f(0)}{s'} = -\frac{\hat{f}(0)}{1 - s'} + \frac{\hat{f}(0)}{1 - (1 - s')} = E(\hat{f}, \check{\chi}),$$

wobei wir hier die Umkehrformel $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ nach Satz 7.6 benutzt haben. Mit $\check{\check{\chi}} = \chi$ folgt

$$\begin{aligned} Z(\hat{f}, \check{\chi}) &= \int_1^\infty Z_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} + E(\hat{f}, \check{\chi}) \\ &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(-t \cdot b) \chi(t \cdot b) d^*b \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(t \cdot b) \check{\chi}(t \cdot b) d^*b \frac{dt}{t} + E(f, \chi) \\ &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) d^*b \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(t \cdot b) \check{\chi}(t \cdot b) d^*b \frac{dt}{t} + E(f, \chi) = Z(f, \chi) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt im ersten Integral die Translationsinvarianz der Haar-Maßes d^*b und die Eigenschaft des Idelklassencharakters $\chi(-tx) = \chi(tx)$ ausgenutzt haben. \square

7.4 Globale Berechnung: Die Riemannsche Zeta-Funktion

Wir wollen jetzt zeigen, dass unsere Berechnungen im letzten Abschnitt nicht ohne Inhalt sind. Immerhin besteht immer noch die Gefahr, dass wir gerade $0 = 0$ gezeigt haben. Betrachten wir also die adelische Schwartz-Bruhat Funktion

$$f(x) = \exp(-2\pi i x_\infty) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p).$$

Dank unserer Berechnung der lokalen Faktoren wissen wir, dass

$$\hat{f}(x) = \exp(-2\pi i x_\infty) \prod_{p < \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p),$$

also f ihre eigene Fouriertransformierte ist.

Für jede Stelle $p \leq \infty$ ist der Faktor f_p die Funktion, die wir bei den Berechnungen der lokalen Zeta-Funktionen $Z_p(f_p, 1, |\cdot|_p^s)$ im unverzweigten Fall verwendet haben. Bleiben wir also auch hier unverzweigt und betrachten den Charakter $|\cdot|_{\mathbb{A}}^s$. Damit vereinfacht sich die Berechnung der globalen Zeta-Funktion zu

$$Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = \int_{\mathbb{I}} f(x) |x|_{\mathbb{A}}^s d^\times x = \prod_{p \leq \infty} Z(f_p, 1, |\cdot|_p^s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \prod_{p < \infty} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Das Produkt am Ende sollte uns aber bekannt vorkommen. Es ist genau die Darstellung der Riemannschen Zeta-Funktion als Euler-Produkt. Damit ist also

$$Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \Xi(s)$$

genau Riemanns bequemer Ausdruck Ξ . Analog ist

$$Z(\hat{f}, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^{1-s}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) = \Xi(1-s)$$

und die globale Funktionalgleichung liefert uns damit gerade

$$\Xi(s) = Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = Z(\hat{f}, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^{1-s}) = \Xi(1-s),$$

die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion. Nun ist aber auch sofort klar woher der Faktor $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ rührt. Er ist gerade der Anteil, den die archimedische Stelle $p = \infty$ bei den Berechnungen liefert.

Böse Zungen mögen jetzt behaupten, dass wir durch die Wahl unserer Funktion f , vor allem durch die Wahl des Faktors $f_\infty(x_\infty) = \exp(-2\pi i x_\infty)$, die Form dieser Gleichung letztendlich beeinflusst haben um gerade auf das klassische Ergebnis zu kommen. Das stimmt, denn immerhin hätte ein anderer Faktor g_∞ eine andere Funktionalgleichung ergeben. Diese beiden Funktionalgleichungen unterscheiden sich dann aber nur um einen meromorphen Faktor, den wir dank

$$Z_\infty(g_\infty, |\cdot|_\infty^s) Z_\infty(\hat{f}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1}) = Z_\infty(f_\infty, |\cdot|_\infty^s) Z_\infty(\hat{g}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1}),$$

mit

$$\frac{Z_\infty(g_\infty, |\cdot|_\infty^s)}{Z_\infty(f_\infty, |\cdot|_\infty^s)} = \frac{Z_\infty(\hat{g}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1})}{Z_\infty(\hat{f}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1})}$$

angeben können. Unsere Wahl war also nur durch die besonders einfache Form der Faktoren und den damit verbundenen Berechnungen beeinflusst.

A Beweis des Satz von Ostrowski

Beweis von Satz 3.7. Sei $|\cdot|$ ein beliebiger nicht-trivialer Absolutbetrag auf \mathbb{Q} . Wir untersuchen die zwei möglichen Fälle.

Fall 1: $|\cdot|$ ist archimedisch. Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $|n_0| > 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|n_0|^\alpha = n_0$. Wir wollen nun zeigen, dass $|n| = |n|_\infty^\alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der allgemeine Fall für \mathbb{Q} folgt dann aus den Eigenschaften des Betrags. Dazu bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Für $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir die Darstellung zur Basis n_0 , d.h.

$$n = \sum_{i=0}^k a_i n_0^i$$

mit $a_i \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, $a_k \neq 0$ und $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$. Nehmen wir davon den Absolutbetrag und beachten, dass $|a_i| \leq 1$ nach unserer Wahl von n_0 gilt, so erhalten wir

$$|n| \leq \sum_{i=0}^k |a_i| n_0^{i\alpha} \leq \sum_{i=0}^k n_0^{i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^k n_0^{-i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}.$$

Setzt man nun $C := \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} > 0$, so sehen wir

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten die N -te Wurzel und lassen N gegen ∞ laufen, so konvergiert $\sqrt[N]{C}$ gegen 0 und wir erhalten

$$|n| \leq n^\alpha$$

Damit wäre die erste Hälfte geschafft. Gehen wir nun zurück zu unserer Basisdarstellung

$$n = \sum_{i=0}^k a_i n_0^i.$$

Da $n < n_0^{k+1}$ erhalten wir die Abschätzung

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|.$$

mit dem Ergebnis aus der ersten Hälfte des Beweises und $n \geq n_0^k$ sehen wir

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha \\ &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \\ &> n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Setzen wir wieder $C' := \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) > 0$ folgt analog zum ersten Teil, dass

$$|n| \geq n^\alpha$$

und daher $|n| = n^\alpha$. Damit haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ äquivalent zum klassischen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ ist.

Fall 2: $|\cdot|$ ist nicht archimedisch. Dann ist $|n_0| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und, da $|\cdot|$ nicht-trivial ist, muss es eine kleinste Zahl n_0 geben mit $|n_0| < 1$. Insbesondere muss n_0 eine Primzahl sein, denn sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von n_0 , also $n_0 = p \cdot n'$ mit $n' \in \mathbb{N}$ und $n' < n$, dann gilt nach unserer Wahl von n_0

$$|p| = |p| \cdot |n'| = |p \cdot n'| = |n_0| < 1.$$

Folglich muss schon $p = n_0$ gelten. Ziel wird es jetzt natürlich sein zu zeigen, dass $|\cdot|$ äquivalent zum p -adischen Absolutbetrag ist. Zunächst finden wir ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|p| = |p|_p^\alpha = \frac{1}{p^\alpha}$. Sei als nächstes $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid n$. Wir schreiben

$$n = rp + s, r \in \mathbb{Z}, 0 < s < p$$

Nach unserer Wahl von $p = n_0$ gilt $|s| = 1$ und $|rp| < 1$. Es folgt

$$|n| = \max\{|rp|, |s|\} = 1.$$

Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir schreiben $n = p^v n'$ mit $p \nmid n'$ und sehen

$$|n| = |p|^v |n'| = |p|^v = (|p|_p^\alpha)^v = |n|_p^{\alpha v}.$$

Mit den gleichen Überlegungen aus dem ersten Fall folgt damit die Behauptung. \square

B Tates Beweis der Poisson-Summenformel

Für diesen Beweis wird unser Ausblick in die abstrakte harmonische Analysis nützlich.

Beweis von Satz 7.9. Jede \mathbb{Q} -invariante Funktion ϕ auf \mathbb{A} induziert eine Funktion auf \mathbb{A}/\mathbb{Q} , welche wir wieder mit ϕ bezeichnen. Wir können dann die Fouriertransformation von $\phi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ als Funktion auf \mathbb{Q} betrachten, da \mathbb{Q} versehen mit der diskreten Topologie gerade mit den Pontryagin Dualen von \mathbb{A}/\mathbb{Q} identifiziert werden kann*. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \phi(x) \Psi(\xi \cdot x) \overline{dx}$$

wobei \overline{dx} das *Quotientenmaß* auf \mathbb{A}/\mathbb{Q} ist, welches von dem Maß dx auf \mathbb{A} induziert wird. Dieses Haar-Maß ist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(x) \overline{dx} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) \overline{dx} = \int_{\mathbb{A}} f(x) dx \quad (13)$$

für alle $f \in L^1(\mathbb{A})$. Für eine genauere Behandlung dieses Maßes verweisen wir auf Knightly und Li [5] Kapitel 7.2.

Für den eigentlichen Beweis benötigen wir zwei kleine Ergebnisse.

Lemma B.1. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ gilt:*

$$\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\hat{f}}|_{\mathbb{Q}}.$$

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{Q}$ beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir wegen $\Psi|_{\mathbb{Q}} = 1$

$$\Psi(\xi x) = \Psi(\xi x) \Psi(\gamma \xi) = \Psi((\gamma + x)\xi)$$

*vgl. Ramakrishnan und Valenza [7] Proposition 7-15

für alle $\gamma \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{A}$ haben. Per Definition der abstrakten Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(x) \Psi(\xi x) \overline{dx} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) \right) \Psi(-\xi x) \overline{dx} = \\ &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) \Psi((\gamma + x)\xi) \right) \overline{dx} = \int_{\mathbb{A}} f(t) \Psi(\xi x) dx = \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung (13) des Quotientenmaßes \overline{dx} ausgenutzt haben. \square

Lemma B.2. Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ und jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x)$$

Beweis. Wie wir eben bewiesen haben gilt $\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \tilde{f}|_{\mathbb{Q}}$ und daher

$$\left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x) \right| = \left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x) \right| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass Ψ ein Charakter ist. Die rechte Seite der Gleichung ist also normal konvergent, da $f \in S(\mathbb{A})$. Analog folgt, dass auch $\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)$ normal konvergiert. Also $\hat{f} \in L^1(\mathbb{Q})$ und

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte* von \hat{f} ausgewertet am Punkt $-x$. Nach Umkehrformel aus Satz 2.18 erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{f}(-x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. \square

Zurück zum Beweis der Summenformel. Mit Lemma B.2 und $x = 0$ und anschließendem Anwenden von Lemma B.1 erhält man

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(0) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma)$$

Aber per Definition gilt gerade

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma),$$

also

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)$$

und wir sind fertig. \square

*Wir erinnern uns, dass auf der diskreten Topologie das Zählmaß ein Haar-Maß ist.

Literatur

- [1] J. W. S. Cassels und A. Fröhlich, Hrsg. *Algebraic Number Theory*. 2. Aufl. Academic Press, 2010.
- [2] Anton Deitmar. *Automorphe Formen*. 1. Aufl. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [3] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2. Aufl. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley-Interscience, 1999.
- [4] Fernando Quadros Gouvea. *p -adic Numbers: An Introduction*. 2. Aufl. Universitext. Springer, 1997.
- [5] Andrew Knightly und Charles Li. *Traces of Hecke operators*. Mathematical Surveys and Monographs 133. American Mathematical Society, 2006.
- [6] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. 1. Aufl. 1992. Nachdruck. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer, 2006.
- [7] Dinakar Ramakrishnan und Robert J. Valenza. *Fourier Analysis on Number Fields*. 1. Aufl. Bd. 186. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.
- [8] Bernhard Riemann. „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“. In: *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß* 2 (1859), S. 145–155.
- [9] Terence Tao. *Tate’s proof of the functional equation*. 2008. URL: <https://terrytao.wordpress.com/2008/07/27/tates-proof-of-the-functional-equation/> (besucht am 01.09.2017).
- [10] John Tate. „Fourier analysis in number fields, and Hecke’s zeta-functions“. Diss. Princeton, 1950.