

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lokalkompakte Gruppen</b>	<b>1</b>
1.1	Haarsche Maß . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Lokale Betrachtungen</b>	<b>5</b>
2.1	Exkurs: $p$ -adische Zahlen . . . . .	5
2.2	Lokale Fourieranalysis . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Der Adele- und Idelering</b>	<b>9</b>
3.1	Eingeschränktes Direktes Produkt . . . . .	9
3.2	Charaktere . . . . .	10
3.3	Integration auf dem eingeschränkten Produkt . . . . .	11
3.4	Der Adelering . . . . .	13
3.5	Der Idelering . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Tates Beweis</b>	<b>14</b>
4.1	Adelische Poisson Summenformel und der Satz von Riemann-Roch .	14
4.2	Die globalen Funktionalgleichungen . . . . .	16

# 1 Lokalkompakte Gruppen

**Definition 1.1.** Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe  $G$  zusammen mit einer Topologie, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) Die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

stetig auf der Produkttopologie von  $G \times G$

- (ii) Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ist stetig

**Lemma 1.2.** Sei  $I$  eine Indexmenge und  $G_i$  eine topologische Gruppe für alle  $i \in I$ . Das direkte Produkt  $G = \prod_{i \in I} G_i$  versehen mit der Produkttopologie ist und komponentenweiser Gruppenverknüpfung ist wieder eine topologische Gruppe.

*Beweis.* Wir erinnern uns daran, dass eine Basis der Produkttopologie gegeben ist durch Rechtecke der Form

$$\prod_{i \in E} U_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i,$$

wobei  $E$  eine endliche Teilmenge von  $I$  und jedes  $U_i$  offen in  $G_i$  ist. Ohne Einschränkung sei also

$$W = \prod_{i \in E} W_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i$$

eine offene Umgebung von  $gh = (g_i h_i)$ . Da die  $G_i$  topologische Gruppen sind, finden wir für alle  $i \in E$  offene Umgebungen  $U_i$  und  $V_i$  von  $g_i$  und  $h_i$ , sodass  $U_i V_i \subseteq W_i$ . Wir behaupten nun, dass

$$\left( \prod_{i \in E} U_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i \right) \times \left( \prod_{i \in E} V_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i \right)$$

eine offene Umgebung von  $(g, h) \in G \times G$  ist, deren Bild in  $W$  liegt. Der erste Aussage ist klar, da beide Faktoren des Produkts offene Basiselemente der Topologie sind. Das Bild unter Gruppenoperation ist gegeben durch

$$\prod_{i \in E} U_i V_i \times \prod_{i \in I \setminus E} G_i,$$

was nach unseren Überlegungen in  $W$  liegt. Der Beweis für die Umkehrabbildung funktioniert analog.  $\square$

**Definition 1.3.** Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung hat. Eine *lokalkompakte Gruppe* ist eine topologische Gruppe, die lokalkompakt und hausdorffsch ist.

**Lemma 1.4.** Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei lokalkompakte Gruppen. Dann ist  $G_1 \times G_2$  wieder lokalkompakt. Insbesondere ist also jedes endliche direkte Produkt lokalkompakter Gruppen lokalkompakt.

*Beweis.* Sei  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ . Wegen der Lokalkompaktheit von  $G_1$  und  $G_2$  finden wir kompakte Umgebungen  $K_1, K_2$  von  $g_1$  bzw.  $g_2$ . Dann ist aber  $K_1 \times K_2$  eine kompakte Umgebung von  $(g_1, g_2)$ . Weiter ist das direkte Produkt zweier Hausdorff-Räume wieder hausdorffsch, wodurch  $G_1 \times G_2$  zu einer lokalkompakten Gruppe wird.  $\square$

Wie wir in Lemma 3.1 sehen werden, kann diese Aussage nicht ohne Weiteres auf beliebig große direkte Produkte übertragen werden.

## 1.1 Haarsche Maß

Nun zu etwas Maßtheorie. Wir beginnen mit einer kleinen Auffrischung der wichtigsten Objekte. Eine  $\sigma$ -Algebra auf einer Menge  $X$  ist eine Teilmenge  $\Omega$  von  $P(X)$ , so dass

- (i)  $X \in \Omega$
- (ii) Wenn  $A \in \Omega$ , dann  $A^c \in \Omega$ , wobei hier  $A^c := X \setminus A$  das Komplement von  $A$  in  $X$  notiert.
- (iii)  $\Omega$  ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, d.h.  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \Omega$ , falls  $A_k \in \Omega$  für alle  $k$ .

Die Elemente in  $\Omega$  werden *messbar* genannt. Aus den Axiomen lässt sich leicht folgern, dass die leere Menge und abzählbare Schnitte von messbaren Mengen wiederum messbar sind. Weiter ist der Schnitt  $\bigcap_n \Omega_n$  beliebiger Familien  $\{\Omega_n\}$  von  $\sigma$ -Algebren auf  $X$  selbst wieder eine  $\sigma$ -Algebra.

Eine Menge  $X$  zusammen mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\Omega$  bilden den *messbaren Raum*  $(X, \Omega)$ . Ist  $X$  ein topologischer Raum, so können wir die kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  betrachten, die alle offenen Mengen von  $X$  enthält. Die Elemente von  $\mathcal{B}$  werden *Borelmengen* von  $X$  genannt.

Nun zum eigentlichen Messen der messbaren Mengen. Ein *Maß* auf einem beliebigen messbaren Raum  $(X, \Omega)$  ist eine Funktion  $\mu : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\mu(\emptyset) = 0$  und die  $\sigma$ -additiv ist. Das bedeutet

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

für beliebige Familien  $\{A_n\}_1^{\infty}$  von paarweise disjunkten Mengen in  $\Omega$ .

Sei nun  $\mu$  ein Borelmaß auf einem lokalkompakten hausdorffschen Raum  $X$  und sei  $E$  eine beliebige Borelmenge von  $X$ . Wir nennen  $\mu$  von *innen regulär* auf  $E$ , falls

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$$

Umgekehrt heißt  $\mu$  von *außen regulär* auf  $E$ , wenn

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

**Definition 1.5.** Ein *Radonmaß* auf  $X$  ist ein Borelmaß, das endlich auf kompakten Mengen, von innen regulär auf allen offenen Mengen und von außen regulär auf allen Borelmengen ist.

**Satz 1.6** (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei  $I$  ein positives lineares Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Trager  $C_c(G)$ . Dann gibt es ein eindeutiges Radonmaß  $\mu$  auf  $G$ , so dass  $I(f) = \int f d\mu$  für alle  $C_c(G)$ .*

Dieser Satz ist ein wichtiger Grundstein für viele Sätze über Radonmaße. Sind zum Beispiel  $X$  und  $Y$  zwei lokalkompakte Gruppen mit dazugehörigen Radonmaßen  $\mu$  und  $\nu$  so ist im Allgemeinen das Produktmaß  $\mu \times \nu$  kein Borel- und daher Radonmaß auf  $X \times Y$ . Wir definieren daher das Radonprodukt von  $\mu$  und  $\nu$  als das Radonmaß welches durch das positive Funktional  $I(f) = \int f d(\mu \times \nu)$  nach Riesz-schen Darstellungssatz gegeben wird. Dieses Produkt wird in Kapitel 3.1 eine Rolle spielen. Für unsere späteren Berechnungen müssen wir uns allerdings keine Sorgen machen, denn erfüllen  $X$  und  $Y$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom so entspricht das Radonprodukt genau dem Produktmaß. Für eine ausführliche Behandlung dieser Konzepte siehe Folland [2] Kapitel 7.

Sei nun  $G$  eine topologische Gruppe und  $\mu$  ein Borelmaß auf  $G$ . Wir können untersuchen, wie sich das Maß bezüglich der Translation durch beliebige Gruppenelemente  $g \in G$  verhält. Gilt  $\mu(gE) = \mu(E)$  für jede Borelmenge, so nennen wir  $\mu$  *linksinvariant*. Analog heißt  $\mu$  *rechtsinvariant*, falls  $\mu(Eg) = \mu(E)$ . Diese beiden Begriffe fallen natürlich zusammen, wenn  $G$  abelsch ist.

Nun haben wir alle wichtigen Konzepte zusammen für folgende wichtige

**Definition 1.7.** Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe. Ein *linkes* (beziehungsweise *rechtes*) *Haar-Maß* auf  $G$  ist ein linksinvariantes (beziehungsweise rechtsinvariantes) Radon-Maß, das auf nichtleeren offenen Mengen positiv ist.

### Beispiele 1.8.

- (i) Ist  $G$  eine diskrete Gruppe, dann ist das Zählmaß ein Haar-Maß.
- (ii) Für  $G = \mathbb{R}^+$  definiert das Lebesgue-Maß  $dx$  ein Haarsches Maß.
- (iii) Für  $G = \mathbb{R}^\times$  wird durch  $\mu(E) := \int_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{1}_E \frac{1}{|x|} dx$  ein Haar-Maß, wie wir in TODO sehen werden.

**Satz 1.9** (Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Maß). *Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe. Dann existiert ein linksinvariantes Haar-Maß auf  $G$ . Dieses ist eindeutig bis auf skalares Vielfaches.*

*Beweis.* Einen ausführlichen Beweis befindet sich in [3] Kapitel 1. □

**Lemma 1.10.** *Sei  $K$  eine kompakte Gruppe mit Haar-Maß  $dx$  und  $\chi : K \rightarrow S^1$  ein Charakter. Dann gilt*

$$\int_K \chi(x) dx = \begin{cases} \text{Vol}(K, dx), & \text{falls } \chi \equiv 1 \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

*Beweis.* Der erste Fall ist klar. Im zweiten Fall gibt es ein  $x_0 \in K$  mit  $\chi(x_0) \neq 1$  und mit Translationsinvarianz daher

$$\int_K \chi(x) dx = \int_K \chi(x_0 x) dx = \chi(x_0) \int_K \chi(x) dx.$$

Umstellen und Division durch  $\chi(x_0) - 1 \neq 0$  ergibt  $\int_K \chi(x) dx = 0$ . □

**Lemma 1.11.** *Für jede Abbildung  $f \in L^1(G, \mu)$  gilt*

- (a)  $\int_G f(xy) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$
- (b)  $\int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$

*Beweis.* (a) folgt leicht aus der Definition des Integrals und der Translationsinvarianz des Maßes.

Für (b) überlegen wir uns zunächst, dass  $\tilde{\mu}(E) := \mu(E^{-1})$  ein weiteres Haar Maß auf  $G$  definiert. Nach der Eindeutigkeit unterscheiden sich beide Maße nur um eine Konstante  $c > 0$ . Wir wollen zeigen, dass  $c = 1$  ist. Sei dazu  $K$  eine kompakte Umgebung der 1. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  der 1 mit  $G \subseteq K$ . Definieren wir nun  $S := KK^{-1}$ , so ist  $S$  kompakt,  $U \subseteq S$  und es gilt  $0 < \mu(U) \leq \mu(S) < \infty$ . Es folgt  $c \cdot \mu(S) = \tilde{\mu}(S) = \mu(S^{-1}) = \mu(S)$  und damit  $c = 1$ . Das Haar-Maß ist also invariant unter der Umkehrabbildung. Der Rest folgt dann aus der Definition des Integrals.  $\square$

## 2 Lokale Betrachtungen

### 2.1 Exkurs: $p$ -adische Zahlen

Sei  $\mathbb{Q}$  ein beliebiger Körper und  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

**Definition 2.1.** Ein *Absolutbetrag* auf  $\mathbb{Q}$  ist eine Abbildung

$$|\cdot| : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Definitheit)
- (ii)  $|xy| = |x||y|$  für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  (Multiplikativität)
- (iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  (Dreiecksungleichung)

Wir nennen den Absolutbetrag  $|\cdot|$  nicht-archimedisch, wenn er zusätzlich die stärkere Bedingung

- (iii)'  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$  für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  (verschärfte Dreiecksungleichung)

erfüllt. Anderenfalls sagen wir der Absolutbetrag ist archimedisch.

Wir möchten zunächst ein paar allgemeingültige Eigenschaften von Absolutbeträgen im folgenden Lemma festhalten.

**Lemma 2.2.** Für beliebige Absolutbeträge  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{Q}$  und Elemente  $x \in \mathbb{Q}$  gilt:

- (i)  $|1| = 1$
- (ii)  $|-1| = 1$
- (iii) Falls  $|x^n| = 1$ , dann  $|x| = 1$
- (iv)  $|-x| = |x|$

Betrachten wir nun den Körper  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen. Sei  $x \in \mathbb{Q}^\times$  eine beliebige rationale Zahl. Dann existiert eine eindeutige (bis auf Reihenfolge) Primfaktorzerlegung

$$x = \prod_p p^{v_p},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen  $p \in \mathbb{N}$  geht und  $v_p \in \mathbb{Z}$  für fast alle  $p$  gleich 0 ist. Legen wir uns auf ein  $p$  fest, so ermöglicht sich die

**Definition 2.3.** Für beliebige  $x \in \mathbb{Q}$  sei der  $p$ -adische Absolutbetrag von  $x$  gegeben durch

$$|x|_p = p^{-v_p}$$

für  $x \neq 0$  und  $v_p \in \mathbb{Z}$  wie oben. Durch  $|0|_p := 0$  vervollständigen wir die Definition.

**Lemma 2.4.**  $|\cdot|_p$  ist ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf  $\mathbb{Q}$

*Beweis.*

□

## 2.2 Lokale Fourieranalysis

Für die unendliche Stelle  $p = \infty$  definieren wir die *Schwartz-Bruhat Funktion* als eine komplexwertige, glatte Funktion  $f$ , die für alle nicht-negativen ganzen Zahlen  $n$  und  $m$  die Bedingung

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_\infty} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right| < \infty$$

erfüllt.<sup>1</sup> Für die endlichen Stellen  $p < \infty$  definieren wir eine *Schwartz-Bruhat Funktion* als eine lokal konstante Funktion mit kompakten Träger. Die Menge aller solcher Funktionen bilden einen komplexen Vektorraum, den wir mit  $S(\mathbb{Q}_p)$  bezeichnen. Im Fall  $p < \infty$  erkennt man leicht, dass  $S(\mathbb{Q}_p) \subseteq L^1(\mathbb{Q}_p)$ . Für  $p = \infty$  gilt nach obiger Bedingung  $(|1| + |x^2|)|f(x)| \leq C$ , also  $|f(x)| \leq C(1+x^2)^{-1}$  und  $(1+x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{Q}_\infty)$

### Beispiele 2.5.

- (i) Im Fall  $p = \infty$  ist die Funktion  $f_k = x^k e^{-x^2}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  in  $S(\mathbb{Q}_\infty)$ . Die Ableitungen  $\frac{d^m}{dx^m} f_k(x)$  sind von der Form  $p(x)e^{-x^2}$ , wobei  $p(x)$  ein Polynom ist. Aus der Analysis ist dann bekannt, dass  $|x^n p(x)e^{-x^2}|$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  beschränkt ist.
- (ii) Im Fall  $p < \infty$  sind offensichtlich die charakteristischen Funktionen kompakter Mengen in  $S(\mathbb{Q}_p)$ . Beispiele für Kompakta sind Mengen der Form  $a + p^k \mathbb{Z}_p$  mit  $a \in \mathbb{Q}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Lemma 2.6.** *Jede Funktion  $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ ,  $p < \infty$ , ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen der Form  $\mathbb{1}_{a+p^k \mathbb{Z}_p}$ , wobei  $a \in \mathbb{Q}$  und  $k \in \mathbb{Z}$*

*Beweis.* Sei  $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ . Da  $f$  lokal konstant ist, ist für jedes  $z \in \mathbb{C}$  das Urbild  $f^{-1}(z)$  offen in  $\mathbb{Q}_p$ . Also ist  $f^{-1}(0)$  offen, folglich  $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$  abgeschlossen und daher schon  $\text{supp}(f) = \mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ . Per Definition hat die Schwartz-Bruhat Funktion  $f$  kompakten Träger, also ist  $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$  kompakt. Diese Menge wird von den offenen Mengen  $f^{-1}(x)$  mit  $x \neq 0$  überdeckt, wovon nach Kompaktheit schon endlich viele reichen.  $f$  hat somit endliches Bild. Weiter ist jede offene Menge  $f^{-1}(x)$  eine disjunkte Vereinigung offener Bälle in  $\mathbb{Q}_p$ . Diese haben aber genau die gesuchte Form  $a + p^k \mathbb{Z}_p$  wie oben. Aufgrund der Kompaktheit, reichen wieder endlich viele solcher Bälle. Damit folgt auch schon das Lemma.  $\square$

**Lemma 2.7.** *Sei  $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ .*

- (a) *Ist  $g(x) = f(x)e_p(ax)$  mit  $a \in \mathbb{Q}_p$ , dann gilt  $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)$ .*
- (b) *Ist  $g(x) = f(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{Q}_p$ , dann gilt  $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)e_p(-ax)$ .*
- (c) *Ist  $g(x) = f(\lambda x)$  mit  $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$ , dann gilt  $\hat{g}(x) = \frac{1}{|\lambda|_p} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ .*

*Beweis.* (a) und (b) sind einfache Folgerungen aus der Definition mit der Multiplikativität von  $e_p$  und der Translationsinvarianz des Haar-Maß. Bei (c) spielt unsere Normierung des Absolutbetrags eine Rolle, denn mit dem Variablenwechsel  $y \mapsto \lambda^{-1}y$  erhalten wir

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(\lambda y) e_p(-xy) dy = \frac{1}{|\lambda|_p} \int_{\mathbb{Q}_p} f(y) e_p(-x\lambda^{-1}y) dy = \frac{1}{|\lambda|_p} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$\square$

<sup>1</sup>Hier ist mit  $|\cdot|$  der komplexe Absolutbetrag gemeint.

**Satz 2.8.** Ist  $p \leq \infty$  und  $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ , so ist  $\hat{f} \in S(\mathbb{Q}_p)$  und es gilt die Umkehrformel

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

*Beweis.* Betrachten wir zuerst den Fall  $p < \infty$ . Wie wir eben in Lemma 2.6 gesehen haben, ist jede Funktion in  $S(\mathbb{Q}_p)$  eine Linearkombination von Funktionen der Form  $f = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}$ . Es reicht also die Aussage für solche  $f$  zu zeigen. Sei dazu  $h := \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ . Wir zeigen  $\hat{\hat{h}} = h$  durch folgende Rechnung

$$\hat{(h)}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} h(y) e_p(-xy) dy_p = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-xy) dy_p.$$

Nun ist  $\chi(y) := e_p(-xy)$  ein Charakter auf  $\mathbb{Z}_p$  und genau dann trivial, wenn  $x \in \mathbb{Z}_p$ . Weiter ist  $\mathbb{Z}_p$  kompakt. Nach Lemma 1.10 und unserer Normierung von  $dy_p$  folgt also

$$\hat{(h)}(x) = \text{Vol}(\mathbb{Z}_p, dy_p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} = h(x)$$

Wir führen nun folgende Operatoren auf  $S(\mathbb{Q}_p)$  ein

$$L_a f(x) = f(x - a), M_\lambda f(x) = f(\lambda x),$$

wobei  $a \in \mathbb{Q}_p$  und  $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$ . Nun können wir  $f$  schreiben als  $L_a M_{p^{-k}} h$ . Es folgt

$$\hat{f} = (L_a M_{p^{-k}} h)^\wedge = \Omega_{-a} p^k M_{p^k} \hat{h} = \Omega_{-a} p^{-k} M_{p^k} h.$$

Also ist  $\hat{f}(x) = e_p(-ax) p^k \mathbb{1}_{p^{-k}\mathbb{Z}_p}(x)$ . Der Charakter  $e_p$  ist lokal konstant,  $\hat{f}$  als das Produkt lokal konstanter Funktionen selbst wieder lokal konstant und damit in  $S(\mathbb{Q}_p)$ . Damit haben wir den ersten Teil der Aussage gezeigt.

Für den zweiten Teil sehen wir

$$\hat{\hat{f}} = (L_a M_{p^{-k}} h)^\wedge^\wedge = L_{-a} (M_{p^k} h)^\wedge = L_{-a} M_{p^k} \hat{h} = L_{-a} M_{p^k} h,$$

also  $\hat{\hat{f}}(x) = \mathbb{1}_{-a+p^k\mathbb{Z}_p}(x) = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}(-x) = f(-x)$ . Hier haben wir  $p^k\mathbb{Z}_p = -p^k\mathbb{Z}_p$  ausgenutzt. Damit haben wir die Umkehrformel für den  $p$ -adischen Fall gezeigt. Für  $p = \infty$  ist die Formel bereits aus der klassischen Fourieranalysis bekannt.  $\square$

**Satz 2.9** (Ostrowski). Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf  $\mathbb{Q}$  ist äquivalent zu einem der Absolutbeträge  $|\cdot|_p$ , wobei  $p$  entweder eine Primzahl ist oder  $p = \infty$ .

*Beweis.* Sei  $|\cdot|$  ein beliebiger nicht-trivialer Absolutbetrag auf  $\mathbb{Q}$ . Wir untersuchen die zwei möglichen Fälle.

a)  $|\cdot|$  ist archimedisch. Sei dann  $n_0 \in \mathbb{N}$  die kleinste natürliche Zahl mit  $|n_0| > 1$ . Dann gibt es ein  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  mit  $|n_0|^\alpha = n_0$ . Wir wollen nun zeigen, dass  $|n| = |n|_\infty^\alpha$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Der allgemeine Fall für  $\mathbb{Q}$  folgt dann aus den Eigenschaften des Betrags. Dazu bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Für  $n \in \mathbb{N}$  nehmen wir die Darstellung zur Basis  $n_0$ , d.h.

$$n = \sum_{i=0}^k a_i n_0^i$$

mit  $a_i \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$ ,  $a_k \neq 0$  und  $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$ . Nehmen wir davon den Absolutbetrag und beachten, dass  $|a_i| \leq 1$  nach unserer Wahl von  $n_0$  gilt, so erhalten wir

$$|n| \leq \sum_{i=0}^k |a_i| n_0^{i\alpha} \leq \sum_{i=0}^k n_0^{i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^k n_0^{-i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}.$$



Setzt man nun  $C := \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} > 0$ , so sehen wir

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha$$

für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ , also insbesondere auch

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten die  $N$ -te Wurzel und lassen  $N$  gegen  $\infty$  laufen, so konvergiert  $\sqrt[N]{C}$  gegen 0 und wir erhalten

$$|n| \leq n^\alpha$$

Damit wäre die erste Hälfte geschafft. Gehen wir nun zurück zu unserer Basisdarstellung

$$n = \sum_{i=0}^k a_i n_0^i.$$

Da  $n < n_0^{k+1}$  erhalten wir die Abschätzung

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|.$$

mit dem Ergebnis aus der ersten Hälfte des Beweises und  $n \geq n_0^k$  sehen wir

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha \\ &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \\ &> n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Setzen wir wieder  $C' := \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) > 0$  folgt analog zum ersten Teil, dass

$$|n| \geq n^\alpha$$

und daher  $|n| = n^\alpha$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $|\cdot|$  äquivalent zum klassischen Absolutbetrag  $|\cdot|_\infty$  ist.

b)  $|\cdot|$  ist nicht archimedisch. Dann ist  $|n_0| \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und, da  $|\cdot|$  nicht-trivial ist, muss es eine kleinste Zahl  $n_0$  geben mit  $|n_0| < 1$ . Insbesondere muss  $n_0$  eine Primzahl sein, denn sei  $p \in \mathbb{N}$  ein Primteiler von  $n_0$ , also  $n_0 = p \cdot n'$  mit  $n' \in \mathbb{N}$  und  $n' < n$ , dann gilt nach unserer Wahl von  $n_0$

$$|p| = |p| \cdot |n'| = |p \cdot n'| = |n_0| < 1.$$

Folglich muss schon  $p = n_0$  gelten. Ziel wird es jetzt natürlich sein zu zeigen, dass  $|\cdot|$  äquivalent zum  $p$ -adischen Absolutbetrag ist. Zunächst finden wir ein  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  mit  $|p| = |p|_p^\alpha = \frac{1}{p^\alpha}$ . Sei als nächstes  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $p \nmid n$ . Wir schreiben

$$n = rp + s, r \in \mathbb{Z}, 0 < s < p$$

Nach unserer Wahl von  $p = n_0$  gilt  $|s| = 1$  und  $|rp| < 1$ . Es folgt  $|n| = \max\{|rp|, |s|\} = 1$ . Sei nun  $n \in \mathbb{Z}$  beliebig. Wir schreiben  $n = p^v n'$  mit  $p \nmid n'$  und sehen

$$|n| = |p|^v |n'| = |p|^v = (|p|_p^\alpha)^v = |n|_p^\alpha.$$

Mit den gleichen Überlegungen aus dem ersten Fall folgt damit die Behauptung. □

### 3 Der Adele- und Idelering

#### 3.1 Eingeschränktes Direktes Produkt

In der vorherigen Sektion haben wir uns die Lokalisierungen  $\mathbb{Q}_p$  im einzelnen angeschaut. Jetzt wollen wir einen Schritt weiter gehen und alle  $\mathbb{Q}_p$  auf einmal betrachten, indem wir sie in einem neuen Objekt einkapseln. Die naheliegendste Idee wäre natürlich das direkte Produkt, allerdings zeigt folgendes Lemma, dass dieser Versuch fehlschlagen wird.

**Lemma 3.1.** *Sei  $I$  eine Indexmenge und  $X_i$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum für alle  $i \in I$ . Der Raum  $X := \prod_{i \in I} X_i$  ist genau dann lokalkompakt, wenn fast alle  $X_i$  kompakt sind.*

Wir geben den Beweis aus Deitmar [1]:

*Beweis.* Zunächst eine Beobachtung: Ist  $X$  kompakt, so ist auch jedes  $X_i$  kompakt als Bild von  $X$  unter der (stetigen) Projektion  $\pi_i : X \rightarrow X_i$ . Sei  $E \subset I$  eine endliche Teilmenge und  $U_i \in X_i$  eine offene Menge für jedes  $i \in E$ . Wir betrachten die offenen Rechtecke

$$\prod_{i \in E} U_i \times \prod_{i \in I \setminus E} X_i,$$

welche eine Basis der Produkttopologie bilden. Ist  $X$  lokalkompakt, so gibt es ein offenes Rechteck, dessen Abschlußkompakt ist. Folglich sind fast alle  $X_i$  kompakt. Die Rückrichtung ist eine Folgerung des Satzes von Tychonov, der besagt, dass das direkte Produkt beliebiger Familien kompakter Mengen wieder kompakt ist, und der Tatsache, dass endliche Produkte lokalkompakter Räume wieder lokalkompakt sind.  $\square$

Das direkte Produkt lokalkompakter Gruppen liefert uns daher im Allgemeinen keine neue lokalkompakte Gruppe. Wir sehen jetzt aber, was zu tun ist, damit doch noch eine runde Sache daraus wird und geben folgende

**Definition 3.2** (Eingeschränkte direkte Produkt). Sei  $I = \{v\}$  eine Indexmenge und für jedes  $v \in I$  sei  $G_v$  eine lokalkompakte Gruppe. Sei weiter  $I_\infty \subseteq I$  eine endliche Teilmenge von  $I$  und für jedes  $v \notin I_\infty$  sei  $H_v \leq G_v$  eine kompakte offene Untergruppe. Das *eingeschränkte direkte Produkt* der  $G_v$  bezüglich  $H_v$  ist definiert als

$$G = \prod'_{v \in I} G_v := \{(x_v) : x_v \in G_v \text{ und } x_v \in H_v \text{ für alle bis auf endlich viele } v\}.$$

mit komponentenweiser Verknüpfung. Die Topologie auf  $G$  ist gegeben durch die *eingeschränkte Produkttopologie*. Diese wird erzeugt durch die Basis der *eingeschränkten offenen Rechtecke*

$$\prod_{i \in E} U_i \times \prod_{i \in I \setminus E} H_i,$$

wobei  $E \subset I$  eine endliche Teilmenge mit  $I_\infty \subset E$  und  $U_i \in G_i$  offen für alle  $i \in E$  ist.

$G$  ist offensichtlich eine Untergruppe des direkten Produkts, die eingeschränkte Produkttopologie ist jedoch nicht die Teilraumtopologie.

Wir führen nun eine nützliche Familie von Untergruppen von  $G$  ein. Sei  $S$  eine endliche Teilmenge von  $I$  mit  $I_\infty \in S$ . Wir definieren die Untergruppe

$$G_S := \prod_{i \in S} G_i \times \prod_{i \in I \setminus S} H_i$$

von  $G$ . Diese ist offensichtlich offen. Nach Lemma 1.2 und Lemma 3.1 ist  $G_S$  selbst wieder eine lokalkompakte Gruppe bezüglich der Produkttopologie. Man sieht aber leicht, dass diese mit der durch  $G$  induzierten Teilraumtopologie übereinstimmt. Da jeder Punkt  $x \in G$  in einer Untergruppe dieser Form liegt folgt sofort, dass  $G$  wieder eine lokalkompakte Gruppe ist.

Abschließend möchten wir noch einen kleinen Satz festhalten.

**Satz 3.3.** *Eine Teilmenge  $Y$  von  $G$  hat genau dann kompakten Abschluss, wenn  $Y \subseteq \prod K_i$  für eine Familie von kompakten Teilmengen  $K_i \subseteq G_i$  mit  $K_i = H_i$  für fast alle Indizes  $i$ .*

*Beweis.* Die Rückrichtung ist klar, denn jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist wieder kompakt. Für die Hinrichtung sei nun  $K$  der Abschluss von  $Y$  und kompakt in  $G$ . Da die Untergruppen  $G_S$  eine offene Überdeckung von  $G$  bilden, gibt es eine endliche Familie  $\{G_{S_n}\}$ , die  $K$  überdecken. Wir können sogar noch mehr sagen. Da die  $S_k$  endlich sind, ist  $S = \bigcup S_k$  endlich, also wird  $K$  sogar von nur einem  $G_S$  überdeckt. Sei  $K_i$  das Bild von  $K$  der natürlichen Einbettung nach  $G_i$ . Da die Topologie auf  $G_S$  gerade der Produkttopologie entspricht und  $K \subseteq G_S$  ist diese Abbildung stetig und  $K_i$  damit kompakt als stetiges Bild einer kompakten Menge. Außerdem ist  $K_i \subseteq H_i$  für alle  $i \notin S$ , sodass wir hier  $K_i$  durch die kompakten  $H_i$  ersetzen können. Dann ist  $Y \subseteq K \subseteq \prod K_i$  und wir sind fertig.  $\square$

## 3.2 Charaktere

**Lemma 3.4.** *Sei  $\chi$  ein Charakter  $\chi$  auf  $G$ . Dann ist  $\chi$  trivial auf fast allen  $H_i$ . Folglich ist für  $g \in G$   $\chi(g_i) = 1$  für fast alle  $i$  und es gilt*

$$\chi(g) = \prod_i \chi_i(g_i).$$

*Beweis.* Wir überlegen uns zunächst, dass Abbildungen in der angegebenen Form tatsächlich Charaktere auf  $G$  sind.  $\chi$  ist sicherlich wohldefiniert und offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus auf  $\mathbb{C}^\times$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\chi$  stetig ist. Da  $G$  und  $\mathbb{C}^\times$  topologische Gruppen sind, genügt es sich offene Umgebungen der 1 anzuschauen. Sei daher  $V$  eine offene Umgebung der  $1 \in \mathbb{C}^\times$ . Sei  $S$  die endliche Menge aller Indizes, sodass  $\chi$  nicht trivial auf  $H_i$  ist, und setze  $n = |S|$ . Wir finden eine weitere Umgebung  $W$  der  $1 \in \mathbb{C}^\times$ , so dass das Produkt von  $n$  beliebigen Elementen aus  $W$  wieder in  $V$  liegt. Da die  $\chi_i$  stetig sind, finden wir offene Umgebungen  $U_i$  der  $1 \in G_i$  mit  $\chi_i(U_i) \subseteq W$ . Für  $i \in S$  können wir ohne Probleme  $U_i = H_i$  setzen. Dann ist  $U = \prod_i U_i$  eine offene Umgebung der  $1 \in G$  und für jedes  $g \in U$  ist  $\chi(g)$  das endliche Produkt von  $n$  Faktoren aus  $W$ , also  $\chi(g) \in V$ .

Nun zur Rückrichtung sei  $\chi$  ein beliebiger Charakter auf  $G$ . Für beliebige  $g_i \in G_i$  definieren wir  $\chi_i(g_i) = \chi \circ \iota(g_i)$ . Offensichtlich ist  $\chi_i$  ein Gruppenhomomorphismus und stetig als Komposition stetiger Funktionen, also ein Charakter. Wir müssen nun noch zeigen, dass fast alle  $\chi_i$  trivial auf die Untergruppen  $H_i$  wirken. Dazu wählen wir uns eine offene Umgebung  $V$  der 1 in  $\mathbb{C}^\times$ , die nur die triviale Untergruppe  $\{1\}$  enthält. Aufgrund der Stetigkeit von  $\chi$  finden wir eine offene Umgebung  $U = \prod_i U_i$  der 1 in  $G$  mit  $U_i = H_i$  für alle  $i$  außerhalb einer endlichen Indexmenge  $S$  und  $\chi(U) \subseteq V$ . Dann gilt aber

$$\left(\prod_{i \in S} 1\right) \times \left(\prod_{i \notin S} H_i\right) \subseteq U$$

und daher

$$\chi\left(\left(\prod_{i \in S} 1\right) \times \left(\prod_{i \notin S} H_i\right)\right) \subseteq V$$

Die linke Seite ist aber als Bild einer Gruppe unter einem Gruppenhomomorphismus selbst wieder eine Gruppe. Nach unserer Wahl von  $V$  folgt also

$$\chi\left(\left(\prod_{i \in S} 1\right) \times \left(\prod_{i \notin S} H_i\right)\right) = \{1\}.$$

Folglich  $\chi_i(H_i) = \{1\}$  für alle  $i \notin S$ . Damit ist aber klar, dass für jedes  $g \in G$  das Produkt  $\prod_i \chi_i(g_i)$  endlich ist und  $\chi(g)$  entspricht.  $\square$

### 3.3 Integration auf dem eingeschränkten Produkt

Wie wir gesehen haben ist  $G = \prod_{i \in I} G_i$  eine lokalkompakte Gruppe, besitzt also nach Satz 1.9 ein Haar-Maß. Wir wollen dieses geeignet normalisieren.

**Satz 3.5.** *Sei  $G = \prod_{i \in I} G_i$  das eingeschränkte direkte Produkt einer Familie lokalkompakter Gruppen  $G_i$  bezüglich der Untergruppen  $H_i \subseteq G_i$ . Bezeichne  $dg_i$  das Haar-Maß auf  $G_i$  mit der Normalisierung*

$$\int_{H_i} dg_i = 1$$

*für fast alle  $i \notin I_\infty$ . Dann gibt es ein eindeutiges Haar-Maß  $dg$  auf  $G$ , so dass für jede endliche Teilmenge  $S \supseteq I_\infty$  der Indexmenge  $I$  die Einschränkung  $dg_S$  von  $dg$  auf  $G_S$  genau das Produktmaß ist.*

*Beweis.* Wir vergewissern uns zunächst, dass die Normalisierung der  $dg_i$  möglich ist, da per Definition die Untergruppen  $H_i$  offen und kompakt sind und daher positives und endliches Maß haben.

Sei  $S$  nun eine beliebige Menge wie im Satz beschrieben und definiere  $dg_S$  als das Produktmaß  $dg_S := \left(\prod_{s \in S} dg_s\right) \times dg^S$ , wobei  $dg^S$  das Haar-Maß auf der kompakten Gruppe  $G^S := \prod_{i \notin S} H_i$  mit  $\int_{G^S} dg^S = 1$  ist. Siehe Folland [2] Kapitel 7, Satz 7.28 für eine genauere Beschreibung des Maßes  $dg^S$ . Als endliches Produkt von Haar-Maßen ist  $dg_S$  selbst wieder Haar-Maß und wir können  $dg$  normieren, dass dessen Einschränkung auf  $G_S$  mit  $dg_S$  übereinstimmt. Unsere Wahl von der Teilmenge war willkürlich, allerdings können wir zeigen, dass die gewählte Normierung unabhängig von  $S$  ist. Sei dazu  $T \supseteq S$  eine weitere endliche Indexmenge. Per Definition ist  $G_S$  eine Untergruppe von  $G_T$ . Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass die Einschränkung von  $dg^T$  auf  $G^S$  mit  $dg^S$  übereinstimmt. Man erkennt, dass  $G^S = \left(\prod_{i \in T \setminus S} H_i\right) \times G^T$ .

Daher bildet  $\left(\prod_{i \in T \setminus S} dg_i\right) \times dg^T$  ein Haar-Maß, welches der kompakten Gruppe  $G_S$  das oben geforderte Maß 1 zuweist. Aus der Eindeutigkeit des Haar-Maßes auf (lokal)kompakten Gruppen folgt somit die Gleichheit zu  $dg^S$ . Sei nun  $S'$  eine beliebige weitere Indexmenge, die  $I_\infty$  enthält. Das normierte Maß  $dg$  wird auf  $G_{S \cup S'}$  eingeschränkt zu einem Maß, welches ein konstantes Vielfaches von  $dg_{S \cup S'}$  ist. Da aber  $G_S \subseteq G_{S \cup S'}$  muss diese Konstante 1 sein, denn nach obigen Überlegungen ist die Einschränkung von  $dg_{S \cup S'}$  auf  $G_S$  gerade  $dg_S$ . Umgekehrt ist aber  $dg_{S'}$  die Einschränkung von  $dg_{S \cup S'}$  auf  $G_{S'}$ , also ist die Normalisierung unabhängig von der Wahl unserer Indexmenge  $S$ .  $\square$

**Satz 3.6.** *Sei  $G$  das eingeschränkte direkte Produkt mit dem induzierten Maß  $dg$*

(i) Sei  $f \in L(G)$  eine integrierbare Funktion auf  $G$ . Dann gilt

$$\int_G f(g) dg = \lim_S \int_{G_S} f(g_S) dg_S,$$

wobei  $S$  über alle endlichen Indexmengen läuft, die  $I_\infty$  enthalten.

(ii) Sei  $S_0$  ein beliebige endliche Indexmenge, die  $I_\infty$  und alle  $i$  enthält, für die  $\text{Vol}(H_i, dg_i) \neq 1$ . Für jeden Index  $i$  haben wir eine stetige Funktion  $f_i$  auf  $G_i$ , so dass  $f_i|_{H_i} = 1$  für alle  $i \notin S_0$ . Wir definieren

$$f(g) = \prod_i f_i(g_i),$$

für  $g = (g_i) \in G$ . Dann ist  $f$  wohldefiniert und stetig auf  $G$ . Sind die  $f_i$  sogar integrierbar und ist  $S$  eine weitere endliche Indexmenge, die  $S_0$  enthält, haben wir

$$\int_{G_S} f(g_S) dg_S = \prod_{i \in S} \left( \int_{G_i} f_i(g_i) dg_i \right). \quad (1)$$

Ist das Produkt

$$\prod_{i \in S} \left( \int_{G_i} f_i(g_i) dg_i \right)$$

sogar endlich, dann ist  $f$  insbesondere integrierbar und es gilt

$$\int_G f(g) dg = \prod_{i \in S} \left( \int_{G_i} f_i(g_i) dg_i \right).$$

*Beweis.* (i) Aus der Integrationstheorie ist bekannt, dass

$$\int_G f(g) dg = \lim_K \int_K f(g) dg,$$

wobei der Limesüber immer größer und größere kompakte Mengen  $K$  geht. Da aber jedes solches  $K$  in einer der Mengen  $G_S$  liegt, folgt die Gleichung sofort.

(ii) Aus der Bedingung  $f_i|_{H_i} = 1$  folgt, dass das Produkt  $f(g) = \prod_i f_i(g_i)$  für alle  $g \in G$  endlich, und die Funktion damit wohldefiniert ist. Eine Umgebung von  $g$  ist gegeben durch ein offenes beschränktes Rechteck. Diese liegen in einem der  $G_S$  (versehen mit der Produkttopologie) und wir können ohne Einschränkung  $S$  um alle Indizes  $i$  mit  $f_i|_{H_i} \neq 1$  vergrößern. Lokal betrachtet ist  $f$  also ein endliches Produkt stetiger Funktionen auffassen und daher  $f$  selber stetig.

Für den anderen Teil der Behauptung sei  $S$  nun eine Indexmenge nach den Bedingungen des Satzes. Nach der Definition von  $G_S$  und den Annahmen  $f_i|_{H_i} = 1$ ,  $\text{Vol}(H_i, dg_i) = 1$  für alle  $i$  nicht in  $S$ , ist es klar, dass Gleichung 1 gilt, denn  $dg_S$  war gerade das Produktmaß auf  $G_S$ . Nehmen wir nun an, dass das Produkt endlich ist. Dann gilt aber nach (i) und Gleichung 1

$$\prod_i \left( \int_{G_i} f_i(g_i) dg_i \right) = \lim_S \int_{G_S} f(g_S) dg_S = \int_G f(g) dg$$

und wir sind fertig. □

### 3.4 Der Adelering

**Satz 3.7.** (a)  $\mathbb{Q}$  liegt diskret in  $\mathbb{A}$ .

(b)  $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$  ist kompakt.

*Beweis.* Für (a) betrachten wir die offene Nullumgebung

$$U = \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Ist nun  $r \in \mathbb{Q} \cap U$ , so gilt  $|r|_p \leq 1$  für alle  $p < \infty$ , also  $r \in \mathbb{Z}$ . Nun ist aber  $|r|_\infty < \frac{1}{2}$  und damit muss schon  $r = 0$  gelten. Für einen beliebigen Punkt  $x \in \mathbb{Q}$  erhalten wir mit  $x + U$  eine entsprechende offene Umgebung von  $x$ .

Für (b) zeigen wir, dass das Bild der Menge  $K := \prod_{p < \infty} \times [0, 1]$  unter der Projektion  $\rho : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{Q}$  schon ganz  $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$  ist. Dann ist  $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$  als stetiges Bild des Kompaktums  $K$  selber kompakt. Sei  $x \in \mathbb{A}$  beliebig und  $S$  die endliche Stellenmenge  $\{p | x_p \notin \mathbb{Z}_p\}$ . Wählen wir ein  $p \in S$ ,  $p < \infty$  und schreiben

$$x_p = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k.$$

Dann ist

$$x_p - \underbrace{\sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k}_{=: r \in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}_p$$

und für jede weitere endliche Stelle  $q \neq p$  gilt

$$|r|_q = \left| \sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k \right|_q \leq \max \left\{ |a_k p^k|_q \right\} \leq 1,$$

also ist  $r \in \mathbb{Z}_q$ . Ersetzen wir nun  $x$  durch  $x - r$ , so reduziert sich die Stellenmenge  $S$  zu  $S \setminus \{p\}$ . Dieses Argument setzen wir induktiv bis  $S = \{\infty\}$  fort und erhalten damit ein  $x$ , welches sich nur um eine Zahl aus  $\mathbb{Q}$  von dem ursprünglichen Adel unterscheidet und selbst in  $\prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{R}$  liegt. Nun können wir aber noch  $x$  modulo  $\mathbb{Z}$  nach  $\prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p \times [0, 1]$ .  $\square$

### 3.5 Der Idelering

**Satz 3.8.** (a)  $\mathbb{Q}^\times$  liegt diskret in  $\mathbb{I}$ .

(b)  $F := \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p^\times \times \{1\}$  ist ein Fundamentalbereich der Gruppenwirkung von  $\mathbb{Q}^\times$  auf  $\mathbb{I}^1$ . Genauer haben wir einen Isomorphismus topologischer Gruppen  $F \cong \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$ .

(c)  $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$  ist kompakt.

(d) Der adelische Betrag induziert einen Isomorphismus topologischer Gruppen  $\mathbb{I} \cong \mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$ .

## 4 Tates Beweis

### 4.1 Adelische Poisson Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

**Satz 4.1** (Poisson Summenformel). *Sei  $f \in S(\mathbb{A})$ . Dann gilt:*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma + x) \quad (2)$$

für alle  $x \in \mathbb{A}$ .

*Beweis.* Jede  $\mathbb{Q}$ -invariante Funktion  $\phi$  auf  $\mathbb{A}$  induziert eine Funktion auf  $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ , welche wir wieder  $\phi$  nennen. Wir können dann die Fouriertransformation von  $\phi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$  als Funktion auf  $\mathbb{Q}$  betrachten, da  $\mathbb{Q}$  gerade die duale Gruppe von  $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$  ist. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \phi(t) \Psi(tx) \overline{dt}$$

wobei  $\overline{dt}$  das Quotientenmaß auf  $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$  ist, welches von dem Maß  $dt$  auf  $\mathbb{A}$  induziert wird. Dieses Haarmaß ist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(t) \overline{dt} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + t) \overline{dt} = \int_{\mathbb{A}} f(t) dt$$

für alle stetigen Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{A}$  mit geeigneten Konvergenzeigenschaften (z.B.  $f \in S(\mathbb{A})$ ). Für den eigentlichen Beweis benötigen wir zwei

**Lemma 4.2.** *Für jede Funktion  $f \in S(\mathbb{A})$  gilt:*

$$\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\hat{f}}|_{\mathbb{Q}}.$$

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{Q}$  beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir wegen  $\Psi|_{\mathbb{Q}} = 1$

$$\Psi(tx) = \Psi(tx)\Psi(\gamma x) = \Psi((\gamma + t)x)$$

für alle  $\gamma \in \mathbb{Q}$  und  $t \in \mathbb{A}$  haben. Per Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \hat{\hat{f}}(x) &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \hat{f}(t) \Psi(tx) \overline{dt} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left( \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + t) \right) \Psi(tx) \overline{dt} = \\ &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left( \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + t) \Psi((\gamma + t)x) \right) \overline{dt} = \int_{\mathbb{A}} f(t) \Psi(tx) dt = \hat{f}(x) \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung des Quotientenmaßes  $\overline{dt}$  ausgenutzt haben.  $\square$

**Lemma 4.3.** *Für jede Funktion  $f \in S(\mathbb{A})$  und jedes  $x \in \mathbb{Q}$  gilt*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x)$$

*Beweis.* Wie wir eben bewiesen haben gilt  $\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\hat{f}}|_{\mathbb{Q}}$  und daher

$$\left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x) \right| = \left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x) \right| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass  $\Psi$  unitär ist. Die rechte Seite der Gleichung ist also normal konvergent, da  $f \in S(\mathbb{A})$ . Analog folgt, dass auch  $\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)$  normal konvergiert. Wir erinnern uns, dass das Pontryagin Duale  $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$  als topologische Gruppe isomorph zu  $\mathbb{Q}^2$  ist. Also  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{Q})$  und

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte<sup>3</sup> von  $\hat{f}$  ausgewertet am Punkt  $-x$ . Nach Fourierinversionsformel erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{f}(-x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. □

Zurück zum Beweis der Summenformel. Wir erhalten aufgrund des zweiten Lemmas mit  $x = 0$  und anschließenden Anwenden des Ersten

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \overline{\Psi}(0) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}$$

Aber per Definition gilt gerade  $\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma)$ , also

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}$$

und wir sind fertig. □

**Satz 4.4** (Riemann-Roch). *Sei  $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$  ein Idel von  $\mathbb{Q}$  und sei  $f \in S(\mathbb{A})$ . Dann*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma x) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma x^{-1})$$

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$  beliebig aber fest. Für beliebige  $y \in \mathbb{A}$  definieren wir eine Funktion  $h(y) := f(yx)$ . Diese ist wieder in  $S(\mathbb{A})$  und erfüllt damit die Poisson-Summenformel

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{h}(\gamma).$$

Berechnen wir allerdings die Fouriertransformation von  $h$  erhalten wir mit Translation um  $x^{-1}$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\gamma) &= \int_{\mathbb{A}} h(y) \Psi(\gamma y) dy \\ &= \int_{\mathbb{A}} f(yx) \Psi(\gamma y) dy \\ &= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} f(y) \Psi(\gamma y x^{-1}) dy \\ &= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \hat{f}(\gamma x^{-1}). \end{aligned}$$

□

---

<sup>2</sup>Achtung: Hier ist  $Q$  versehen mit der diskreten Topologie gemeint

<sup>3</sup>Wir erinnern uns, dass in diesem Fall das Zählmaßein Haar-Maß ist



## 4.2 Die globalen Funktionalgleichungen

**Satz 4.5.** Sei  $\chi = \mu|\cdot|^s$  ein unitärer Charakter auf  $\mathbb{I}$ , der trivial auf  $\mathbb{Q}^\times$  wirkt. Sei  $f \in S(\mathbb{A})$ . Dann konvergiert die globale Zeta-Funktion  $\zeta(f, \mu, s)$  für  $\operatorname{Re}(s) > 1$  absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen und definiert dort eine holomorphe Funktion, die zu einer meromorphen Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  fortgesetzt werden kann. Diese erfüllt die globale Funktionalgleichung

$$\zeta(f, \mu, s) = \zeta(\hat{f}, \frac{1}{\mu}, 1-s)$$

Diese Funktion ist Funktion ist überall holomorph, außer wenn  $\mu = |\cdot|^{-i\tau}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . Dann besitzt sie einen einfachen Pol bei  $s = i\tau$  mit Residuum  $-f(0)$  und einen einfachen Pol bei  $s = 1 + i\tau$  mit Residuum  $\hat{f}(0)$ .

*Beweis.* Wir beweisen zunächst die Konvergenz. Dazu genügt es faktorisierbare Schwartz-Bruhat Funktionen  $f$  zu betrachten. Für alle endlichen Stellen  $p$  ist dann  $f_p$  die charakteristische Funktion von  $p^k \mathbb{Z}_p$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , wobei  $k = 0$  für alle Stellen außerhalb einer endlichen Stellenmenge, die wir im folgenden mit  $S$  bezeichnen. Nach Satz 3.6 gilt dann

$$|\zeta(f, \mu, s)| = \prod_{p \in S} p$$

Nun zur Funktionalgleichung. Aufgrund absoluter Konvergenz auf der Halbebene  $\operatorname{Re}(s) > 1$  haben wir

$$\zeta(f, \chi) = \int_{\mathbb{I}} f(x) \chi(x) d^\times x = \iint_{\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{I}^1} f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) (d^\times t \times db) = \int_0^\infty \left[ \int_{\mathbb{I}^1} (f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) db) \right] \frac{dt}{t}$$

Um uns etwas Schreibarbeit zu sparen definieren wir

$$\zeta_t(f, \chi) := \int_{\mathbb{I}^1} (f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) db).$$

. Wie in Riemanns Beweis teilen wir das Integral auf durch

$$\zeta(f, \chi) = \int_0^1 \zeta_t(f, \chi) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \zeta_t(f, \chi) \frac{dt}{t}.$$

Das Integral  $\int_1^\infty$  macht uns keine Probleme, denn

$$\int_1^\infty |\zeta_t(f, \chi)| \frac{dt}{t} \leq \int_1^\infty \int_F \left| \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} (f(at \cdot b)) \right| db |t|^{s-1} dt$$

Als nächstes erinnern wir uns daran, dass wir  $\mathbb{I}^1$  als disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup_{a \in \mathbb{Q}^\times} aF$  darstellen konnten, wobei  $F = \{1\} \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$ . Kombiniert mit der Translationsinvarianz von  $db$  und der Tatsache, dass  $\chi$  trivial auf  $\mathbb{Q}^\times$  wirkt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \zeta_t(f, \chi) &= \int_{\mathbb{I}} (f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) db) = \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} \int_{aF} (f(t \cdot b) \chi(t \cdot b) db) \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} \int_F (f(at \cdot b) \chi(t \cdot b) db) = \int_F \left( \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} (f(at \cdot b)) \right) \chi(t \cdot b) db \end{aligned}$$

Die Summe über  $a$  verleitet uns dazu Riemann-Roch anzuwenden, allerdings benötigen wir hierfür eine Summe über  $K$ . Das Problem lässt sich jedoch leicht beheben.

**Lemma 4.6.**

$$\zeta_t(f, \chi) = \zeta_{t^{-1}}(f, \check{\chi}) + \hat{f}(0) \int_F \check{\chi}(x/t) db - f(0) \int_F \chi(tx) db.$$

*Beweis.* Die Idee ist klar. Wir fügen  $f(0) \int_F \chi(tx) db$  zu  $\zeta_t(f, \chi)$  hinzu, erhalten

$$\zeta_t(f, \chi) + f(0) \int_F \chi(tb) db = \int_F \left( \sum_{a \in \mathbb{Q}} f(at \cdot b) \right) \chi(t \cdot b) db$$

und können jetzt unsere Version von Riemann-Roch anwenden:

$$\begin{aligned} \int_F \left( \sum_{a \in \mathbb{Q}} f(at \cdot b) \right) \chi(t \cdot b) db &= \int_F \left( \sum_{a \in \mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b^{-1}) \right) \frac{\chi(t \cdot b)}{|tx|_{\mathbb{A}}} db \\ &= \int_F \left( \sum_{a \in \mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b) \right) |t^{-1}b|_{\mathbb{A}} \chi(t \cdot b) db \\ &= \int_F \left( \sum_{a \in \mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b) \right) \check{\chi}(b/t) db + \hat{f}(0) \hat{f}(0) \int_F \check{\chi}(x/t) db \\ &= \zeta_{t^{-1}}(f, \check{\chi}) + \hat{f}(0) \int_F \check{\chi}(x/t) db \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt den Variablenwechsel  $b \mapsto b^{-1}$  und im dritten Schritt  $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1}$  ausgenutzt haben.  $\square$

Wir widmen uns nun dem Integral  $\int_0^1$ . Dank Riemann-Roch können wir es umformen zu

$$\int_0^1 \zeta_t(f, \chi) \frac{dt}{t} = \int_0^1 \left( \zeta_{t^{-1}}(\hat{f}, \check{\chi}) + \hat{f}(0) \check{\chi}(t^{-1}) \int_F \check{\chi}(x) db - f(0) \chi(t) \int_F \chi(x) db \right) \frac{dt}{t}$$

Mit einem Variablenwechsel  $t \mapsto t^{-1}$  im ersten Summanden ergibt sich

$$\int_0^1 \zeta_{t^{-1}}(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} = \int_1^\infty \zeta_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t}$$

was nach dem gleichen Argument wie oben auf ganz  $\mathbb{C}$  konvergiert. Verbleibt noch der Term

$$E(f, \chi) := \int_0^1 \hat{f}(0) \check{\chi}(t^{-1}) \left( \int_F \check{\chi}(x) db \right) \frac{dt}{t} - \int_0^1 f(0) \chi(t) \left( \int_F \chi(x) db \right) \frac{dt}{t}$$

. Ist  $\chi$  nicht trivial auf  $\mathbb{I}^1$ , so haben wir gesehen, dass  $\chi$  nicht trivial auf dem Kompaktum  $F$  wirkt. Folglich verschwinden beide Integrale und  $E(f, \chi) = 0$ . Ist  $\chi = \mu| \cdot |^s$  dagegen trivial auf  $\mathbb{I}^1$ , dann wissen wir, dass  $\chi = | \cdot |^{s'}$ , wobei  $s' = s - i\tau$  für ein  $\tau \in \mathbb{R}$ . Also,

$$\begin{aligned} E(f, \chi) &= \int_0^1 \hat{f}(0) t^{s'-1} \text{Vol}(F, db) - f(0) t^{s'} \text{Vol}(F, db) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\hat{f}(0)}{s' - 1} - \frac{f(0)}{s'} \end{aligned}$$

und wir sehen, dass  $E$  in diesem Fall eine rationale Funktion ist. Damit ist

$$\zeta(f, \chi) = \int_1^\infty \zeta_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \zeta_t(f, \chi) \frac{dt}{t} + E(f, \chi)$$

Eine meromorphe Erweiterung der Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$ . Zudem haben wir gezeigt, dass für  $\mu \neq |\cdot|^{-i\tau}$  die Funktion  $\zeta$  sogar ganz ist und im Fall  $\mu = |\cdot|^{-i\tau}$  ihre einzigen Pole bei  $s = i\tau$  und  $s = 1 + i\tau$  liegen mit den Residuen  $-f(0)$  bzw.  $\hat{f}(0)$ .

Zum Schluss kommen wir noch zur Funktionalgleichung. Aus

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \text{ und } \check{\check{\chi}} = \chi$$

folgt

$$\begin{aligned} \zeta(\hat{f}, \check{\chi}) &= \int_1^\infty \zeta_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \zeta_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} + E(\hat{f}, \check{\chi}) \\ &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(-tb) \chi(tb) db \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(tb) \check{\chi}(tb) db \frac{dt}{t} + E(f, \chi) \\ &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(tb) \chi(tb) db \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(tb) \check{\chi}(tb) db \frac{dt}{t} + E(f, \chi) = \zeta(f, \chi) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt im ersten Integral die Translationsinvarianz der Haar-Maßes  $db$  und die Eigenschaft des Idele-Klassencharakters  $\chi(-tx) = \chi(tx)$  ausgenutzt haben.  $\square$

## Literatur

- [1] Anton Deitmar (auth.). *Automorphe Formen*. Springer-Lehrbuch Masterclass 0. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. edition, 2010.
- [2] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley-Interscience, 2nd edition, 1999.
- [3] Rama. *Fourier*.