**SUP**

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

## 2 Formeln und Definitionen

**Definition 2.1.** Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ ist definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

**Satz 2.2.**

$$\Xi(s) = \Xi(1-s) \tag{2}$$

**Definition 2.3.**

$$\Xi(s) := \Gamma_\infty(s)\zeta(s) \tag{3}$$

**Definition 2.4.**

$$\Gamma_\infty(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \tag{4}$$

**Satz 2.5** (Poisson Summenformel)**.** Für $k_\infty$ und $t_\infty \in k_\infty^*$, $f_\infty$ Schwartzfunktion, $|t_\infty|_\infty := |t_\infty|$ Absolutbetrag und $\hat{f}_\infty$ Fourier-transformierte von $f_\infty$ gilt:

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} f_\infty(at_\infty) = \frac{1}{|t_\infty|_\infty} \sum_{a\in\mathbb{Z}} \hat{f}_\infty\left(\frac{a}{t_\infty}\right) \tag{5}$$

**Definition 2.6** (Fouriertransformation)**.**

$$\hat{f}_\infty(\xi_\infty) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(-x_\infty\xi_\infty)} f_\infty(x_\infty)dx_\infty \tag{6}$$

**Satz 2.7.** Die Gaussche Funktion

$$g_\infty(x_\infty) := e^{-\pi|x_\infty|^2} \tag{7}$$

ist ihre eigene Fouriertransformierte.

*Beweis.* Wir berechnen zunächst

$$g(x)e^{-2\pi ix\xi} = e^{-\pi(x^2+2ix\xi-\xi^2)}e^{-\pi\xi^2} = e^{-pi(x+i\xi)^2}g(\xi)$$

und stellen erfreut fest, dass die Fouriertransformierte von $g$ gerade

$$\hat{g}(\xi) = g(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx$$

ist. Es reicht also zu zeigen, dass das zweite Integral 1 ist.
Sei zunächst $\gamma$ eine Kurve entlang des Rechtecks mit den Ecken $-R$, $R$, $R+i\eta$ und $-R+i\eta$. Nach dem Cauchy Integralsatz gilt für unsere ganze Funktion $g(z)$

$$0 = \int_{-R}^{R} g(z)dz + \int_{R}^{R+i\eta} g(z)dz + \int_{R+i\eta}^{-R+i\eta} g(z)dz + \int_{-R+i\eta}^{-R} g(z)dz$$

Weiter gilt $|g(z)| = e^{-\pi(R^2-y^2)}$ für $z = \pm R + iy$ und $0 \le y \le \eta$ und so verschwinden das zweite und vierte Integral für $R \to \infty$. Nach Umstellen der verbleibenden Integrale und genauen hinsehen stellen wir fest, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} = 1$$

$\square$

# 3 Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Teil soll die Arbeit abrunden und ein kurzes Fazit liefern.

## Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat. Alle Ausführungen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Kaske, Maximilian

Friedberg, der 14. August 2016