Zusammenfassung

Inspiriert durch den Blogpost „*Tate's proof of the functional equation*" [6] von Terence Tao werde ich die Frage beantworten, woher der Gamma-Faktor $\Gamma(s/2)$ in der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion kommt und warum genau dieser benötigt wird. Dazu vollziehen wir die unter dem Namen Tate's Thesis bekanntgewordene Doktorarbeit von John Tate für den Spezialfall der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nach. Es werden zunächst die Grundlagen lokalkompakter Gruppen und Haar-Maßen behandelt, überspringen jedoch die für den allgemeineren Fall benötigte Pontryagin-Dualität. Nach einem Ausflug in die Welt der p-adischen Zahlen etablieren Fourieranalysis auf den lokalen Körpern $\mathbb{Q}_p$ und folgen Tate beim Beweis der Funktionalgleichung der lokalen Zeta-Funktionen und geben die Berechnung der für den Beweis benötigten Funktionen. Um diese Ergebnisse in einer globalen Theorie zusammenzufassen führen wir das eingeschränkte direkte Produkt ein und definieren damit die Adele- und Idelegruppe. Diese Arbeit endet mit Tates Beweis der Funktionalgleichung globaler Zeta-Funktionen. Wir werden feststellen, dass dieser eine Verallgemeinerung von Riemanns klassischen Beweis ist und die Funktionalgleichung der Riemannsche Zeta-Funktion als ein Spezialfall auftritt.

Inhaltsverzeichnis

1 Von Riemann zu Tate

Im Jahr 1859 erschien mit *„Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“* Bernhard Riemanns erste und einzige veröffentlichte Arbeit im Bereich der Zahlentheorie. Als Startpunkt nimmt Riemann die heute als *Riemannsche Zeta-Funktion** $\zeta(s)$ bekannte Abbildung, welche für $\Re(s) > 1$ durch

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

als absolut konvergente Reihe oder durch die *Euler-Produktformel* dargestellt werden kann. Neben einer Vielzahl neuer Notationen, Definitionen und Ideen, darunter die bekannte *Riemannsche Vermutung*, dass alle nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ den Realteil $1/2$ haben, gab er auch zwei Beweise der Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s),$$

wobei $\xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ und $\Gamma(s)^\dagger$ das bekannte Euler-Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\frac{dx}{x}$$

ist.

1.1 Der Beweis der Funktionalgleichung

In seinem ersten Beweis erhält Riemann zunächst durch Anwendung von

$$\Gamma(s)\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx}x^s\frac{dx}{x}, \tag{1}$$

die Gleichung

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}.$$

Über Wegintegration des Integrals

$$\int \frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx$$

etablierte er anschließend die meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion (auch wenn nicht im Sinne von Weierstrass) und etablierte seine erste Form der Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = \Gamma(s)(2\pi)^{s-1}2\sin(s\pi/2)\zeta(1-s).$$

Riemann benutzte nun geläufige Identitäten der Gamma-Funktion um dieses Ergebnis umzuformen: Der Ausdruck

$$\xi(s) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

bleibt unverändert, wie Riemann schreibt, „wenn s in $s-1$ verwandelt wird.“

Diese symmetrische Darstellung der Funktionalgleichung veranlasste Riemann nun dazu in Gleichung (1) den Ausdruck $\Gamma(s/2)$ anstatt $\Gamma(s)$ für die Grundlage eines weiteren Beweises zu betrachten. Diesen möchten wir uns im folgenden etwas genauer anschauen, wobei wir uns Konvergenzgedanken ganz im Geiste Riemanns aufsparen.

*Obwohl diese Funktion heute nach Riemann benannt ist, war es Leonhard Euler der sich zuerst näher mit ihr beschäftigte

†Riemann selbst benutze noch den durch Gauß definierte Notation $\Pi(s-1) = \Gamma(s)$

Satz 1.1. *Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ kann zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, welche die* Funktionalgleichung

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s)$$

erfüllt. Sie besitzt zwei einfache Pole bei $s = 0$ und $s = 1$.

Beweis der Funktionalgleichung. Durch den Variablenwechsel $y = n^2\pi x^2$ in Eulers Integraldarstellung der Gamma-Funktion erhalten wir für $\Re(s) > 1$

$$\frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}n^s\pi^{s/2}x^{s/2}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{s/2}\frac{dx}{x}.$$

Anschließendes aufsummieren ergibt die Formel

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n^2\pi x}\right)x^{s/2}\frac{dx}{x}$$

Wir führen nun die *Thetafunktion*

$$\Theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = 1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\pi t n^2}$$

ein und formen obige Gleichung um zu

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(x)-1)x^{s/2}\frac{dx}{x}.$$

Nun können wir das Integral aufteilen in

$$\int_0^\infty (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t} = \int_0^1 (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t}$$

und erhalten mit der Substitution $t \mapsto 1/t$ im ersten Summanden

$$\int_0^1 (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t} = \int_0^1 \Theta(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} - \frac{2}{s}.$$

Als nächstes benötigen wir die *Theta-Transformationsformel*

$$\Theta(t) = t^{-1/2}\Theta(1/t).$$

Um deren Gültigkeit einzusehen benötigen wir zweierlei: Zuerst erinnern wir uns an die *klassische Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ einer L^1-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Mit dieser Abbildung haben wir folgenden

Satz 1.2. *Für jedes geeignete $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und deren Fouriertransformation $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt:*

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} f(a) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} \hat{f}(a) \tag{2}$$

Beweis. In dieser klassischen Form zum Beispiel in Deitmar [1] Proposition 5.4.10. □

Als Zweites halten wir fest, dass die *Fouriertransformierte* von $f_t(x) = e^{-\pi t x^2}$ gleich $\hat{f}_t(x) = t^{-1/2}f_{\frac{1}{t}}(x)$ ist. Beide Aussagen kombiniert ergeben die Transformationsformel. Mit dieser haben wir nun

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \Theta(1/t)t^{-s/2}\frac{dt}{t} - \frac{2}{s} &= \int_1^\infty t^{1/2}\Theta(t)t^{-s/2}\frac{dt}{t} - \frac{2}{s} = \int_1^\infty t^{1/2}\Theta(t)t^{-s/2}\frac{dt}{t} - \frac{2}{s}\\ &= \int_1^\infty (\Theta(t)-1)t^{(1-s)/2}\frac{dt}{t} - \frac{2}{s} - \frac{2}{1-s}.\end{aligned}$$

Kombinieren wir beides, so erhalten wir

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \frac{1}{2}\left(\int_1^\infty (\Theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty (\Theta(t)-1)t^{(1-s)/2}\frac{dt}{t}\right) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

und sehen, dass dieser Ausdruck unverändert bleibt wenn wir s in $1-s$ verwandeln. □

1.2 Auf dem Weg zu Tate

Beide Beweise haben eine kleine Schwäche: Sie starten bereits mit der Gamma-Funktion als einen notwendigen Faktor zur Bildung der Funktionalgleichung. Warum sie aber gerade so nahtlos zur Zeta-Funktion passt wird nicht ersichtlich. Auftritt John Tate.

Tate kommt aus einer langen Linie von Mathematikern deren Arbeit mehr oder weniger direkt durch Riemanns Ideen in *Ueber die Anzahl...* beeinflusst wurde. Unter der Aufsicht Emil Artins verfasste er 1950, fast 100 Jahre nach Riemann, seine Doktorarbeit „Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions" [7]. In ihr bewies er die analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung der Dedekind Zeta-Funktionen und Hecke L-Funktionen, eine Art Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Funktion. Dieses Ergebnis war keineswegs neu und wurde 30 Jahre früher bereits durch Erich Hecke gezeigt. Was Tates Doktorarbeit jedoch so besonders macht - und einer der Gründe warum sie als „Tate's Thesis"gewissen Kultstatus erreicht hat - ist die elegante Herangehensweise an Heckes Problemstellung mit der globalen Sprache der *Adele und Idele*.

Ziel dieser Arbeit wird es nun sein Tates Doktorarbeit in seiner einfachsten Form, d.h. im Fall des algebraischen Körper $\mathbb{Q}$, Revue passieren zu lassen und die zentrale Frage

Woher kommt die Gamma-Funktion in der Funktionalgleichung?

zu beantworten. Dabei wollen wir auch besonders die Ähnlichkeiten von Riemanns und Tates Beweis hervorheben.

Wir beginnen dazu in Kapitel 2 mit einer Einführung zu topologischen Gruppen, Lokalkompaktheit und Haar-Maße. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht unnötigen zu zerren werden wir allerdings Pontryagin Dualität und abstrakte Fourieranalyis - beides wichtige Grundlagen für Tates Beweis in höhrer Allgemeinheit - nur in einem kurzen Ausblick behandeln. In Kapitel 3 wiederholen wir kurz die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften zu Absolutbeträgen. Anschließend führen wir die p-adischen Zahlen ein und untersuchen deren Eigenheiten. Um unser Auslassen der abstrakten Fourieranalysis wieder gut zu machen, definieren wir am Anfang von Kapitel 4 die Fouriertransformation auf den p-adischen Zahlen neu und zeigen, dass diese Definition der abstrakten entspricht. Damit haben wir dann genug Grundlagen gesammelt um Tates erstes Ergebnis, die Funktionalgleichung lokaler Zeta-Funktion, zu beweisen. Wir schließen das Kapitel und die erste Hälfte der Arbeit mit der expliziten Berechnung für den Beweis wichtiger Integrale. Es geht weiter mit der globale Betrachtung der Problemstellung in Kapitel 5 mit der wichtigen Theorie des eingeschränkten direkten Produkts. Wir stellen uns die Frage wie man auf dieser abstrakten Gruppe integriert und wie Charaktere aussehen. Daraufhin lernen wir in Kapitel 6 mit der Adele- und Idelegruppe $\mathbb{A}$ und $\mathbb{I}$ zwei konkrete Beispiele kennen. Kapitel 7 behandelt nun die Fourieranalysis im globalen Kontext der Adele und Idele, beweisen die algebraische Variante des Satzes von Riemann-Roch und geben Tates vollen Beweis der Funktionalgleichung globaler Zeta-Funktion. Zum Schluss runden wir die Arbeit ab und besprechen wie aus diesem Ergebnis direkt die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion folgt.

2 Harmonische Analysis

Die (abstrakte) harmonische Analysis ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung der klassischen Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$. Im Mittelpunkt der Theorie stehen dabei die lokalkompakten Gruppen. Auf diesen lässt sich ein zum klassischen Lebesgue-Maß analagoes Maß definieren, welches uns erlaubt die Integration und später in Kapitel 4 die Fouriertransformation in diesen Kontext zu übertragen. Für die Behandlung des Stoffes halten wir uns Ramakrishnan und Valenza [2] Kapitel 1, wobei der letzte Abschnitt einige Konzepte aus Kapitel 3 anspricht.

2.1 Lokalkompakte Gruppen

Am Anfang steht immer eine

Definition 2.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

stetig auf der Produkttopologie von $G \times G$.

(ii) Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ist stetig.

Ein *Homomorphismus topologischer Gruppen* G_1 und G_2 ist eine stetiger Gruppenhomomorphismus $G_1 \to G_2$. Ist dieser bijektiv und die Umkehrabbildung wieder ein Homomorphismus topologischer Gruppen, so sprechen wir von einem *Isomorphismus topologischer Gruppen.*

Man sieht sofort, dass die Translationen um ein beliebiges Gruppenelement ein Homeomorphismus $G \to G$ bilden. Die Topologie ist also *translationsinvariant* in dem Sinne, dass für alle $g \in G$ und jede Mengen U die Äquivalenzen

$$U \text{ ist offen} \Leftrightarrow gU = \{gu \in G : u \in U\} \text{ ist offen} \Leftrightarrow Ug = \{ug \in G : u \in U\} \text{ ist offen}$$

gelten. Analog verhält es sich für die Umkehrabbildung. Sie ist ein Homeomorphismus und U ist genau dann offen, wenn $U^{-1} = \{u^{-1} \in G : u \in U\}$ offen ist.

Die Translationsinvarianz der Topologie hat nun einige nette Vorteile. Zum Beispiel wird bereits die ganze Topologie durch die Umgebungsbasis des neutralen Elements definiert. Durch Translation erhalten wir Umgebungsbasen beliebiger anderer Elemente und damit zwangsläufig die komplette Topologie. Für ein weiteres Beispiel erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit in topologischen Räumen. Eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ zwischen zweier topologischer Räume heißt stetig, wenn für alle $g \in G_1$ und jede offene Umgebung U von $f(g)$ eine offene Umgebung V von g existiert, sodass $f(V) \subseteq U$. Sind G_1 und G_2 nun topologische Gruppen und ist f ein (nicht unbedingt topologischer) Gruppenhomomorphismus reicht es jetzt die Stetigkeit in dem neutralen Element e_1 der Gruppe G_1 nachzuweisen. Denn ist f stetig in e_1 und sei g ein beliebiges weiteres Element der Gruppe, so ist für jede offene Umgebung U von $f(g)$ ist $U' := f(g)^{-1}U$ eine offene Umgebung des neutralen Elements e_2. Wegen Stetigkeit gibt es dann eine offene Umgebung

V' mit $f(V') \subseteq U'$. Nun ist aber $V \coloneqq gV'$ eine offene Umgebung von g und da f ein Gruppenhomomorphismus ist, haben wir

$$f(V) = f(gV') = f(g)f(V') \subseteq f(g)U' = f(g)f(g)^{-1}U = U,$$

also ist die Abbildung stetig.

Haben wir wieder zwei topologische Gruppen G_1 und G_1, so ist deren direktes Produkt $G_1 \times G_2$, wie man leicht sieht, wieder eine topologische Gruppe. Dieses Ergebnis lässt sich nuch auf endliche, abzählbare und sogar beliebige Indexmengen übertragen.

Lemma 2.2. *Sei I eine Indexmenge und G_i eine topologische Gruppe für alle $i \in I$. Das direkte Produkt $G = \prod_{i\in I} G_i$ versehen mit der Produkttopologie ist und komponentenweiser Gruppenverknüpfung ist wieder eine topologische Gruppe.*

Beweis. Wir erinnern uns daran, dass eine Basis der Produkttopologie gegeben ist durch Rechtecke der Form

$$\prod_{i\in E} U_i \times \prod_{i\in I\setminus E} G_i,$$

wobei E eine endliche Teilmenge von I und jedes U_i offen in G_i ist. Ohne Einschränkung sei also

$$W = \prod_{i\in E} W_i \times \prod_{i\in I\setminus E} G_i$$

eine offene Umgebung von $gh = (g_i h_i)$. Da die G_i topologische Gruppen sind, finden wir für alle $i \in E$ offene Umgebungen U_i und V_i von g_i und h_i, sodass $U_i V_i \subseteq W_i$. Wir behaupten nun, dass

$$(\prod_{i\in E} U_i \times \prod_{i\in I\setminus E} G_i) \times (\prod_{i\in E} V_i \times \prod_{i\in I\setminus E} G_i) \subseteq G \times G$$

eine offene Umgebung von $(g, h) \in G \times G$ ist, deren Bild in W liegt. Der erste Aussage ist klar, beide Faktoren des Produkts sind offene Basiselemente der Topologie und enthalten jeweils g bzw. h. Weiter ist das Bild unter Gruppenoperation gegeben durch

$$\prod_{i\in E} U_i V_i \times \prod_{i\in I\setminus E} G_i,$$

was nach obigen Überlegungen in W liegt. Somit folgt die Stetigkeit der Gruppenverknüpfung. Der Beweis für die Stetigkeit der Umkehrabbildung funktioniert analog. □

Definition 2.3. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung hat. Eine *lokalkompakte Gruppe* ist eine topologische Gruppe, die sowohl lokalkompakt als auch hausdorffsch ist.

Wir kennen bereits einige lokalkompakte Gruppen.

Beispiele 2.4.

(i) Jede diskrete topologische Gruppe G, also eine Gruppe versehen mit diskreter Topologie, ist lokalkompakt, denn für jedes $x \in G$ ist $\{x\}$ eine kompakte Umgebung von x.

(ii) Die additive Gruppe $\mathbb{R}^+$ mit der gewohnten Topologie ist lokalkompakt. Denn ist $x \in \mathbb{R}^+$, so ist $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ für $\varepsilon > 0$ eine kompakte Umgebung von x. Ähnlich verhält es sich für die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(iii) Analog kann man sich überlegen, dass die Gruppen $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{C}^\times$ lokalkompakt sind, wobei wir hier die abgeschlossenen Bälle $\overline{B_\varepsilon(x)}$ als kompakte Umgebung von x haben.

Auch hier können wir uns das direkte Produkt zweier lokalkompakter Gruppen anschauen.

Lemma 2.5. *Seien G_1 und G_2 zwei lokalkompakte Gruppen. Dann ist $G_1 \times G_2$ wieder lokalkompakt. Insbesondere ist also jedes endliche direkte Produkt lokalkompakter Gruppen lokalkompakt.*

Beweis. Sei $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Wegen der Lokalkompaktheit von G_1 und G_2 finden wir kompakte Umgebungen K_1, K_2 von g_1 bzw. g_2. Dann ist aber $K_1 \times K_2$ eine kompakte Umgebung von (g_1, g_2). Weiter ist das direkte Produkt zweier Hausdorff-Räume wieder hausdorffsch, wodurch $G_1 \times G_2$ zu einer lokalkompakten Gruppe wird. □

Wie wir später in Lemma 5.1 sehen werden, kann diese Aussage nicht ohne Weiteres auf beliebig große direkte Produkte übertragen werden.

2.2 Das Haar-Maß

Nun zu etwas Maßtheorie. Wir beginnen mit einer kleinen Auffrischung der wichtigsten Objekte. Eine *σ-Algebra* auf einer Menge X ist eine Teilmenge Ω von $P(X)$, so dass

(i) $X \in \Omega$

(ii) Wenn $A \in \Omega$, dann $X \setminus A \in \Omega$.

(iii) Ω ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, d.h. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Omega$, falls $A_k \in \Omega$ für alle k.

Die Elemente in Ω werden *messbar* genannt. Aus den Axiomen lässt sich leicht folgern, dass die leere Menge und abzählbare Schnitte von messbaren Mengen wiederum messbar sind. Weiter ist der Schnitt $\bigcap_n \Omega_n$ beliebiger Familien $\{\Omega_n\}$ von σ-Algebren auf X selbst wieder eine σ-Algebra.

Eine Menge X zusammen mit einer σ-Algebra Ω bilden den *messbaren Raum* (X, Ω). Ist X ein topologischer Raum, so können wir die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ betrachten, die alle offenen Mengen von X enthält. Die Elemente von $\mathcal{B}$ werden *Borelmengen* von X genannt.

. Ein *Maß* auf einem beliebigen messbaren Raum (X, Ω) ist eine Funktion $\mu : \Omega \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und die *σ-additiv* ist. Das bedeutet

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

für beliebige Familien $\{A_n\}_1^\infty$ von paarweise disjunkten Mengen in Ω. Zusammen definiet dies den *Maßraum* (X, Ω, μ). Ist dieses Maß definiert auf der σ-Algebra der Borelmengen, so nennen wir es ein Borel-Maß.

Ein wichtiges Ziel der Maßtheorie war es den Begriff des Integrals zu verallgemeinern. Wir geben eine kurze, stark vereinfachte Variante der Grundkonzepte der Integrationstheorie und verweisen auf Folland [3] Kapitel 2 für eine vollständige Einführung.

Für einen beliebigen Maßraum (X, Ω, μ) geschieht dies über dieso genannten *Treppenfunktionen* auf X

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und der *charakteristischen Funktion* der messbaren Menge A_k

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A_k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Integral dieser Funktionen wird definiert durch

$$\int_G f d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k),$$

mit der Konvention, dass $0 \times \infty = 0$. Eine Möglichkeit dies auf andere Funktionen f zu erweitern ist es Folgen (f_n) von solchen Treppenfunktionen zu betrachten. Diese nennen wir L^1*-Cauchy-Folge*, wenn sie eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm $\|g\|_{L^1} := \int_X |g| d\mu$ ist. Konvergiert die Folge zusätzlich fast überall punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, so definieren wir mit

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

das Integral von f über X.

Ist $Y \subseteq X$ messbar in X, so setzen wir $\int_Y f d\mu := \int \mathbb{1}_Y f d\mu$ und definieren

$$\mathrm{Vol}(Y, d\mu) = \int_Y d\mu = \int \mathbb{1}_Y d\mu = \mu(Y).$$

Wir nennen eine Funktion f integrierbar auf Y, wenn das Integral $\int_Y |f| d\mu$ endlich ist. Allgemeiner heißt eine Funktion integrierbar, wenn sie auf X integrierbar ist und wir schreiben* dann $f \in L^1(X, \Omega, \mu)$. Wenn es ist klar ist, über welchen Maßraum wir reden, lassen wir häufig auch die einfach σ-Algebra und Maß weg und schreiben dann dx für das Maß, $\int_X f(x)dx = \int f d\mu$ für das Integral und $L^1(X)$ für die integrierbaren Funktionen auf X. Damit beenden wir uns kurze Wiederholung.

Sei nun μ ein Borel-Maß auf einem lokalkompakten, hausdorffschen Raum X und sei E ein eine beliebige Borelmenge von X. Wir nennen μ von *innen regulär* auf E, falls

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$$

Umgekehrt heißt μ von *außen regulär* auf E, wenn

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

Definition 2.6. Ein *Radon-Maß* auf X ist ein Borel-Maß, das endlich auf kompakten Mengen, von innen regulär auf allen offenen Mengen und von außen regulär auf allen Borelmengen ist.

Satz 2.7 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei I ein positives lineares Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Trager $C_c(X)$. Dann gibt es ein eindeutiges Radon-Maß μ auf X, so dass $I(f) = \int f d\mu$ für alle $C_c(X)$.*

Beweisskizze. Für die Konstruktion des Maßes definiert man die Abbildungen

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1 \text{ und } \mathrm{supp}(f) \subseteq U\}$$

für alle U offen und

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E \text{ und } U \text{ offen}\}$$

für beliebige Teilmengen $E \subseteq X$. Anschließend zeigt man

*Hier missbrauchen wir etwas die Notation des L^1-Raumes. (vgl. Folland [3] Seite 53)

(i) $\mu*$ ist ein äußeres Maß.

(ii) Jede offene Menge ist μ^*-messbar.

(iii) $\mu(K) = \inf\{I(f) : f \in C_c(X), f \geq \mathbb{1}_K\}$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$.

(iv) $I(f) = \int f d\mu$ für alle $f \in C_c(X)$.

(i) und (ii) implizieren zusammen mit dem Satz von Caratheodory, dass μ ein Borel-Maß, welches von außen regulär ist. (iii) liefert uns die Endlichkeit auf kompakten Mengen und die Regularität von innen auf offenen Mengen und (iv) vollendet den Satz. Für den vollständigen Satz verweisen wir auf Folland [3] Kapitel 7 Satz 7.2. □

Dieser Satz ist ein wichtiger Grundstein für viele Aussagen über Radonmaße. Sind zum Beispiel X und Y zwei lokalkompakte Gruppen mit dazugehörigen Radonmaßen μ und ν so ist im Allgemeinen das klassische Produktmaß $\mu \times \nu$ kein Borel- und daher Radonmaß auf $X \times Y$. Wir definieren daher das Radonprodukt von μ und ν als das Radonmaß welches durch das positive Funktional $I(f) = \int f d(\mu \times \nu)$ nach Rieszschen Darstellungssatz gegeben wird. Dieses Produkt wird in Kapitel 5.1 eine Rolle spielen. Für unsere späteren Berechnungen müssen wir uns allerdings keine Sorgen machen, denn erfüllen X und Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom so entspricht das Radonprodukt genau dem Produktmaß. Für eine ausfürhliche Behandlung dieser Konzepte verweisen wir auf Folland [3] Kapitel 7.

Damit kommen wir zum großen Ziel dieses Abschnitts. Sei nun G eine lokalkompakte Gruppe und μ ein beliebiges Borel-Maß. Wir können uns dann anschauen, wie sich μ bezüglich der Translation durch beliebige Gruppenelemente $g \in G$ verhält. Gilt $\mu(gE) = \mu(E)$ für jede Borelmenge, so nennen wir μ *linksinvariant.* Analog heißt μ *rechtsinvariant*, falls $\mu(Eg) = \mu(E)$. Diese beiden Begriffe fallen natürlich zusammen, wenn G abelsch ist.

Nun haben wir alle wichtigen Konzepte zusammen für folgende wichtige

Definition 2.8. Ein *linkes* (beziehungsweise *rechtes*) *Haar-Maß* auf G ist ein linksinvariantes (beziehungsweise rechtsinvariantes) Radon-Maß, das auf nichtleeren offenen Mengen positiv ist.

Wir haben bereits einige solcher Haar-Maße kennengelernt:

Beispiele 2.9.

(i) Ist G eine diskrete Gruppe, dann ist das Zählmaß ein Haar-Maß.

(ii) Für $G = \mathbb{R}^+$ definiert das Lebesgue-Maß dx ein Haar-Maß.

(iii) Für $G = \mathbb{R}^\times$ wird durch $\mu(E) := \int_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{1}_E \frac{1}{|x|} dx$ ein Haar-Maß, wie wir in Satz 4.3sehen werden.

Diese Beispiele sind keine Ausnahmen. Einer der Hauptgründe, warum wir uns mit lokalkompakten Gruppen beschäftigen ist nämlich folgender Satz.

Satz 2.10 (Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Maß)**.** *Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann existiert ein linksinvariantes Haar-Maß auf G. Dieses ist eindeutig bis auf skalares Vielfaches.*

Beweis. Der etwas längere Beweis befindet sich in Ramakrishnan und Valenza [2] Kapitel 1 und benutzt den Rieszschen Darstellungssatz. Ziel ist es dabei, ein links-invariantes lineares Funktional auf $C_c(G)$ zu konstruieren. □

Dieser stellt quasi die bestmögliche Situation dar, die man erwarten kann, denn offensichtlich ist für jedes Haar-Maß μ und eine Konstante $c > 0$ das Maß $c \cdot \mu$ wieder ein Haar-Maß. Wir beenden diesen Abschnitt mit einem kleinen Lemma, welches uns einige bekannte Eigenschaften des Lebesgue-Maß auf Haar-Maße verallgemeinert.

Lemma 2.11. *Für jede integrierbare Funktion $f \in L^1(G)$ gilt*

(i) $\int_G f(yx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$

(ii) $\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$

Beweis. (i) folgt leicht aus der Definition des Integrals und der Translationsinvarianz des Maßes, denn $\mathbb{1}_A(yx) = \mathbb{1}_{y^{-1}A}(x)$ und $\mathrm{Vol}(y^{-1}A, dx) = \mathrm{Vol}(A, dx)$.

Für (ii) überlegen wir uns zunächst, dass $\tilde{\mu}(E) := \mu(E^{-1})$ ein weiteres Haar-Maß auf G definiert. Nach der Eindeutigkeit unterscheiden sich beide Maße nur um eine Konstante $c > 0$. Wir wollen zeigen, dass $c = 1$ ist. Sei dazu K eine kompakte Umgebung der 1. Dann gibt es eine offene Umgebung U der 1 mit $G \subseteq K$. Definieren wir nun $S := KK^{-1}$, so ist S kompakt, $U \subseteq S$ und es gilt $0 < \mu(U) \leq \mu(S) < \infty$. Es folgt $c \cdot \mu(S) = \tilde{\mu}(S) = \mu(S^{-1}) = \mu(S)$ und damit $c = 1$. Das Haar-Maß ist also invariant unter der Umkehrabbildung. Der Rest folgt dann aus der Definition des Integrals. □

2.3 Charaktere und Quasi-Charaktere

Definition 2.12. Ein *Quasi-Charakter* einer topologischen Gruppe G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus von G in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ der komplexen Zahlen. Ein *Charakter* ist ein Quasi-Charakter, dessen Bild auf dem Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ liegt.

In der Literatur werden Quasi-Charaktere häufig auch einfach nur als Charaktere bezeichnet. Was wir unter einem Charakter verstehen, wird unitärer Charakter genannt. Beginnen wir mit ein paar Beispielen.

Beispiele 2.13.

- Für jede topologische Gruppe G ist die Abbildung $g \mapsto 1$ ein Charakter. Er wird trivialer Charakter genannt und ist der einzige konstante Charakter, denn für jeden Gruppenhomomorphismus χ gilt $\chi(1) = 1$.
- Ein nicht-triviales Beispiel für einen unitären Charakter ist die Abbildung $t \mapsto \exp(it)$ von der additiven Gruppe $\mathbb{R}^+$ in den Einheitskreis S^1.
- Die bekannte Abbildung $\exp : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^\times$ von der additiven Gruppe in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen ist ein Charakter, jedoch nicht unitär.

Lemma 2.14. *Sei K eine kompakte Gruppe mit Haar-Maß dx und $\chi : K \to \mathbb{C}^\times$ ein Quasi-Charakter. Dann gilt*

(i) *χ ist bereits ein Charakter.*

(ii) *Für das Integral von χ über K gilt*

$$\int_K \chi(x)dx = \begin{cases} \mathrm{Vol}(K, dx), & \text{falls } \chi \equiv 1 \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Beweis. Für (i) sei x ein beliebiges Element von K. Sei H der Abschluss der von x erzeugten Untergruppe von K. Damit ist H selbst eine Untergruppe von K und als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums kompakt. Da χ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, muss $\chi(H)$ eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ sein. Diese liegen aber gerade alle auf S^1 und die Behauptung folgt.

Nun zu (ii): Der erste Fall ist klar. Im zweiten Fall gibt es ein $x_0 \in K$ mit $\chi(x_0) \neq 1$ und mit Translationsinvarianz daher

$$\int_K \chi(x)dx = \int_K \chi(x_0 x)dx = \chi(x_0) \int_K \chi(x)dx.$$

Umstellen und Division durch $\chi(x_0) - 1 \neq 0$ ergibt $\int_K \chi(x)dx = 0$. □

Wir werden noch mehrmals auf (Quasi-)Charaktere stoßen und sie gründlich kategoresieren.

2.4 Ausblick: Fouriertransformation und Pontryagin-Dualität

Zum Schluss blicken wir etwas über den Tellerrand hinaus. Dieser Abschnitt ist für das Verständis der späteren Beweise absolut optional, bietet aber Einblick die nötigen Abstraktionen, die in Tates wesentlich allgemeinerer Argumentation zum tragen kamen. Wir erwähnen daher die für Tates Doktorarbeit wichtigsten Konzepte aus der abstrakten Harmonischen Analysis und werden in den späteren Kapiteln zeigen, dass unsere noch ausstehende, etwas naivere Definition der Fouriertransformation mit diesen übereinstimmen.

Beginnen wir mit der Charaktergruppe auf einer beliebigen topologischen Gruppe G. Die unitären Charaktere auf G bilden mit der punktweisen Multiplikation $\chi\psi(x) = \chi(x)\psi(x)$ selbst wieder eine Gruppe, welche als die *duale Gruppe* $\hat{G}$ bezeichnet wird. Wir statten $\hat{G}$ mit einer Topologie aus: Sei K eine kompakte Teilmenge von G und V eine Umgebung der $1 \in S^1$. Dann wird durch die Teilmengen

$$W(K,V) = \{\chi \in \hat{G} : \chi(K)\} \subseteq V$$

eine Umgebungsbasis des trivialen Charakters definiert und induziert damit eine Topologie, die sogenannte *kompakt-offen Topologie*, die $\hat{G}$ zu einer topologischen Gruppe macht. Man hat nun folgenden Satz

Satz 2.15. *Sei G eine abelsche topologische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Ist G diskret, so ist $\hat{G}$ kompakt.*

(ii) *Ist G kompakt, so ist $\hat{G}$ diskret.*

(iii) *Ist G lokalkompakt, so ist auch $\hat{G}$ lokalkompakt.*

Aussage (iii) macht das Ganze recht interessant. Eine erste Vermutung wäre, dass G isomorph zu $\hat{G}$ sein könnte. Im Allgemeinen stimmt dies leider nicht. Wir haben aber das nächstbeste:

Satz 2.16 (Pontryagin Dualität)**.** *Jede lokalkompakte Gruppe G ist kanonisch isomorph zu ihrem Doppel-Dual $\hat{\hat{G}}$.*

Der Isomorphismus topologischer Gruppen α ist gegeben durch die Auswertungsabbildung $\alpha(y)(\chi) = \chi(y)$.

Beweis. Der etwas längere Beweis ist zum Beispiel zu finden in Ramakrishnan und Valenza [2] Kapitel 3, Theorem 3-20. □

Für den Beweis wird ein klassisches Konzept nun verallgemeinert. Wir wissen bereits, dass jede abelsche lokalkompakte Gruppe G ein eindeutiges Haar-Maß dx besitzt. Damit können wir auf G integrieren und definieren das abstrakte Analogon zur klassischen Fouriertransformation.

Definition 2.17 (Fouriertransformation)**.** Sei $f \in L^1(G)$. Wir definieren dann die *Fouriertransformation* $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ von f durch die Formel

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi}(x)dx$$

für alle $\chi \in \hat{G}$.

Diese Formel macht Sinn, denn für alle $x \in G$ hat $\chi(x)$ den Betrag 1. Ist also f integrierbar, so ist es auch das Produkt im Integranden. Da $\hat{G}$ selber wieder lokalkompakt ist, besitzt das Duale ein Haar-Maß $d\chi$ und es macht Sinn die Fouriertransformation auf $\hat{G}$ betrachten. Durch geeignete Normierung der verwendeten Maße gelangen wir zu folgendem Satz der unter Anderem in Tates Beweis der verallgemeinerten Poisson-Summenformel eine wichtige Rolle spielt.

Satz 2.18 (Fourier-Umkehrformel für lokalkompakte Gruppen)**.** *Es gibt ein Haar-Maß $d\chi$ auf $\hat{G}$, so dass alle $f \in L^1(G)$ stetig mit $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$, die Gleichung*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)d\chi$$

erfüllen. Insbesondere ist also $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.

Beweis. Siehe zum Beispiel Folland [3] Kapitel 4, Satz 4.32 oder Ramakrishnan und Valenza [2] Kapitel 3, Satz 3-9. □

Damit schließen wir den Abschnitt über Harmonische Analysis und kommen zu einigen Anwendungsbeispielen bei der Berechnung kleinerer Funktionalgleichungen.

3 Exkurs: p-adische Zahlen

Lokalkompakte Gruppen treten relativ natürlich im Zusammenhang mit algebraischen Zahlkörpern wie $\mathbb{Q}$ auf. Wir wissen bereits, dass die Gruppen $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^\times$ lokalkompakt sind und das ist kein Zufall. Ganz allgemeinen sind die additiven und multiplikativen Gruppen jeder Vervollständigung eines algebraischen Zahlenkörpers $\mathbb{K}$ bezüglich der Primideale $\mathfrak{p}$ lokalkompakte Gruppen. So weit müssen wir in dieser Arbeit nicht gehen. Wir werden uns im folgenden Kapitel auf den Zahlkörper $\mathbb{Q}$ beschränken und lernen dadurch die recht unintuitive Welt der p-adischen Zahlen kennen. Dabei orientieren wir uns ganz an Gouveas exzellenten Einführungtext wie er in [4] zu finden ist.

3.1 Absolutbeträge und der Satz von Ostrowski

Beginnen wir mit einer Wiederholung. Sei $\mathbb{K}$ zunächst ein beliebiger Körper und $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

Definition 3.1. Ein *Absolutbetrag* auf $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung

$$|\cdot| : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(ii) $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (Multiplikativität)

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (Dreiecksungleichung)

Wir nennen einen Absolutbetrag $|\cdot|$ nicht-archimedisch, wenn er zusätzlich die stärkere Bedingung

(iii)′ $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ (verschärfte Dreiecksungleichung)

erfüllt. Anderenfalls sagen wir der Absolutbetrag ist archimedisch.

Die verschärfte Dreiecksungleichung kann auch so interpretiert werden, dass jedes Dreieck bezüglich eines nicht-archimedischen Absolutbetrags gleichschenklig ist. Halten wir einige bereits bekannte und allgemeingültige Eigenschaften von Absolutbeträgen in einem Lemma fest.

Lemma 3.2. *Für beliebige Absolutbeträge $|\cdot|$ auf $\mathbb{K}$ und Elemente $x \in \mathbb{K}$ gilt:*

(i) $|1| = 1$

(ii) $|-1| = 1$

(iii) *Falls* $|x^n| = 1,$ *dann* $|x| = 1$

(iv) $|-x| = |x|$

Beweis. (i) folgt direkt aus $|1| = |1 \cdot 1| = |1| \cdot |1|$ und $|1| \neq 0$. Ähnlich bei (ii): $1 = |-1 \cdot -1| = |-1| \cdot |-1|$ und mit $|-1| > 0$ folgt die Behauptung. (iii) folgt aus $|x^n| = |x|^n$ und (iv) wegen $|-x| = |-1||x| = |x|$. □

Beschränken wir uns nun auf den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Dort kennen wir bereits den archimedischen *reellen Absolutbetrag*

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

welchen wir von nun an mit $|\cdot|_\infty$ bezeichnen.

Es stellt sich nun die Frage, ob es auch nicht-archimedische Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ gibt. Betrachte mit $x \in \mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ eine beliebige rationale Zahl ungleich 0. Dann existiert eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$x = \prod_p p^{v_p},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ geht und $v_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle p gleich 0 ist. Legen wir uns auf ein p fest, so ermöglicht sich die

Definition 3.3. Für beliebige $x \in \mathbb{Q}^\times$ sei der *p-adische Absolutbetrag* von x gegeben durch

$$|x|_p = p^{-v_p}$$

mit $v_p \in \mathbb{Z}$ wie oben. Durch $|0|_p := 0$ vervollständigen wir die Definition.

Der Name der Abbildung ist nicht willkürlich gewählt, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 3.4. *Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist $|\cdot|_p$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Die Definitheit folgt sofort aus der Definition. Für die Multiplikativität schreiben wir $x = p^k \frac{m}{n}$ und $y = p^{k'} \frac{m'}{n'}$ mit m, m', n, n' teilerfremd zu p. Dann ist

$$|xy|_p = \left| p^{k+k'} \frac{mm'}{nn'} \right|_p = p^{-(k+k')} = p^{-k} p^{-k'} = |x|_p |y|_p.$$

Zuletzt zur verschärften Dreiecksungleichung. Mit x und y wie eben können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $k \leq k'$. Es gilt

$$x + y = p^k \frac{mn' + p^{k'-k} nm'}{nn'}.$$

Für $|x|_p \neq |y|_p$ ist $k' > k$, also $mn' + p^{k'-k} nm'$ teilerfremd zu p und es folgt $|x+y|_p = p^{-k} = \max(|x|_p, |y|_p)$. Ist dagegen $|x|_p \neq |y|_p$, so kann p ein Teiler des Zählers sein und wir erhalten $|x+y|_p \leq p^{-k} = \max(|x|_p, |y|_p)$. □

Somit haben wir neben dem archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ auch unendlich viele nicht-archimedische Beträge $|\cdot|_p$ gefunden. Es stellt sich nun die Frage: Gibt es mehr? Jein! Fixiren wir einen beliebigen Absolutbetrag $|\cdot|$, so ist auch $|\cdot|^\alpha$ für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ein weiterer Absolutbetrag. Wir nennen solche Beträge *äquivalent* und zeigen, dass wir auf $\mathbb{Q}$ bereits alle Äquivalenzklassen von Beträgen gefunden haben.

Satz 3.5 (Ostrowski)**.** *Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu einem der Absolutbeträge $|\cdot|_p$, wobei p entweder eine Primzahl ist oder $p = \infty$.*

Beweis. Sei $|\cdot|$ ein beliebiger nicht-trivialer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Wir untersuchen die zwei möglichen Fälle.

a) $|\cdot|$ ist archimedisch. Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $|n_0| > 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|n_0|^\alpha = n_0$. Wir wollen nun zeigen, dass $|n| = |n|_\infty^\alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der allgemeine Fall für $\mathbb{Q}$ folgt dann aus den Eigenschaften des Betrags. Dazu bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Für $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir die Darstellung zur Basis n_0, d.h.

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i$$

mit $a_i \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$, $a_k \neq 0$ und $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$. Nehmen wir davon den Absolutbetrag und beachten, dass $|a_i| \leq 1$ nach unserer Wahl von n_0 gilt, so erhalten wir

$$|n| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| n_0^{i\alpha} \leq \sum_{i=0}^{k} n_0^{i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{k} n_0^{-i\alpha} \leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}.$$

Setzt man nun $C := \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} > 0$, so sehen wir

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Ziehen wir nun auf beiden Seiten die N-te Wurzel und lassen N gegen ∞ laufen, so konvergiert $\sqrt[N]{C}$ gegen 0 und wir erhalten

$$|n| \leq n^\alpha$$

Damit wäre die erste Hälfte geschafft. Gehen wir nun zurück zu unserer Basisdarstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i n_0^i.$$

Da $n < n_0^{k+1}$ erhalten wir die Abschätzung

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|.$$

mit dem Ergebnis aus der ersten Hälfte des Beweises und $n \geq n_0^k$ sehen wir

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha \\ &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) \\ &> n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Setzen wir wieder $C' := \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\right) > 0$ folgt analog zum ersten Teil, dass

$$|n| \geq n^\alpha$$

und daher $|n| = n^\alpha$. Damit haben wir gezeigt, dass $|\cdot|$ äquivalent zum klassischen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ ist.

b) $|\cdot|$ ist nicht archimedisch. Dann ist $|n_0| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und, da $|\cdot|$ nicht-trivial ist, muss es eine kleinste Zahl n_0 geben mit $|n_0| < 1$. Insbesondere muss n_0 eine Primzahl sein, denn sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von n_0, also $n_0 = p \cdot n'$ mit $n' \in \mathbb{N}$ und $n' < n$, dann gilt nach unserer Wahl von n_0

$$|p| = |p| \cdot |n'| = |p \cdot n'| = |n_0| < 1.$$

Folglich muss schon $p = n_0$ gelten. Ziel wird es jetzt natürlich sein zu zeigen, dass $|\cdot|$ äquivalent zum p-adischen Absolutbetrag ist. Zunächst finden wir ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $|p| = |p|_p^\alpha = \frac{1}{p^\alpha}$. Sei als nächstes $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid n$. Wir schreiben

$$n = rp + s, r \in \mathbb{Z}, 0 < s < p$$

Nach unserer Wahl von $p = n_0$ gilt $|s| = 1$ und $|rp| < 1$. Es folgt

$$|n| = \max\{|rp|, |s|\} = 1.$$

Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir schreiben $n = p^v n'$ mit $p \not| n'$ und sehen

$$|n| = |p|^v |n'| = |p|^v = (|p|_p^\alpha)^v = |n|_p^\alpha.$$

Mit den gleichen Überlegungen aus dem ersten Fall folgt damit die Behauptung.

$\square$

3.2 Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$

Eine Möglichkeit die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu definieren war über die *Vervollständigung* der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bezüglich des Absolutbetrags $|\cdot|_\infty$. Wir werden diese Konstruktion für unsere p-adischen Beträge $|\cdot|_p$ benutzen und geben daher im folgenden Abschnitt eine kurze Wiederholung der wichtigsten Konzepte.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehen aus einer nichtleeren Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

erfüllt. Eine Folge (x_n) in X heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn die reelle Folge $(d(x_n, x))$ eine Nullfolge ist. Eine *Cauchy-Folge* in dem metrischen Raum X ist eine Folge (x_n) in X, so dass für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Im nicht-archimedischen Fall vereinfacht sich diese Definition etwas.

Lemma 3.6. *Eine Folge (x_n) rationaler Zahlen ist genau dann bezüglich eines nicht-archimedischen Absolutbetrags $|\cdot|$ eine Cauchy-Folge, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$$

Beweis. Wenn $m > n$, so haben wir

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} x_{k+1} - x_k \right| \leq \max\{|x_m - x_{m-1}|, \ldots, |x_{n+1} - x_n|\}$$

und das Lemma folgt sofort aus den Definitionen. $\square$

Man sieht leicht, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Die Umkehrung gilt allerdings im Allgemeinen nicht. Ist jede Cauchy-Folge konvergent, so nennen wir den metrischen Raum (X, d) *vollständig.*

Die Absolutbeträge $|\cdot|_p$ induzieren durch $d_p(x, y) = |x - y|_p$ eine Metrik auf $\mathbb{Q}$. Es ist bereits bekannt, dass $(\mathbb{Q}, d_\infty)$ nicht vollständig ist. Für $p < \infty$ haben wir folgendes

Lemma 3.7. *Der metrische Raum $(\mathbb{Q}, d_p)$ ist nicht vollständig.*

Beweis. Wir geben einen kurzen Beweis für $p > 3$ und verweisen auf Gouvea [4] Lemma 3.2.3 für die verbleibenden zwei Fälle.

Betrachten wir die Folge $(x_n) = (a^{p^n})$, wobei $1 < a < p - 1$ eine natürliche Zahl ist. Es gilt

$$\left| a^{p^{n+1}} - a^{p^n} \right|_p = \left| a^{p^n} (a^{p^n(p-1)} - 1) \right|_p.$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat wissen wir $a^{p^n(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$, also ist p^n ein Teiler von $a^{p^n(p-1)} - 1$ und es folgt

$$|x_{n+1} - x_n|_p = \left|a^{p^n}\right|_p \cdot \left|(a^{p^n(p-1)} - 1)\right|_p \leq p^{-n} \to 0.$$

Damit ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Angenommen (x_n) konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Q}$. Dann haben wir

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^p = x^p$$

und folglich $x = 1$ oder $x = -1$. Für n genügend groß gilt

$$\begin{aligned} |x-a|_p &= |x - x_n + x_n - a|_p \leq \max\{|x-x_n|_p, |x_n - a|_p\} \\ &= |x_n - a|_p = \underbrace{|a|_p}_{\leq 1} \cdot \left|a^{p^n-1} - 1\right|_p \leq \left|a^{p^n-1} - 1\right|_p < 1, \end{aligned}$$

am Ende wieder nach dem kleinen Satz von Fermat. Also ist p ein Teiler von $x-a$. Wegen $x = \pm 1$ und der Wahl von a ist aber $0 < x - a < p$. Ein Widerspruch. □

Satz 3.8. *Für jedes $p \leq \infty$ auf $\mathbb{Q}$ gibt es eine Vervollständigung $\mathbb{Q}_p$ und ein Absolutbetrag $|\cdot|_p$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es gibt eine Inklusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ und der durch $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}$ induzierte Betrag ist der p-adische bzw. reelle Absolutbetrag.*

2. *Das Bild von $\mathbb{Q}$ bezüglich dieser Inklusion ist dicht in $\mathbb{Q}_p$.*

3. *$\mathbb{Q}_p$ ist vollständig bezüglich des Absolutbetrags $|\cdot|_p$.*

Der Körper $\mathbb{Q}_p$ mit diesen Eigenschaften ist eindeutig bis auf isometrische Isomorphie.

Beweisidee. Die Grundidee der Konstruktion ist mit der Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ zu beginnen. Diese wird zu einem Ring wenn wir Addition und Multiplikation gliedweise definieren. Anschließend teilen wir alle Nullfolgen raus, d.h. zwei Cauchy-Folgen sind genau dann äquivalent, wenn sie sich um eine Nullfolge unterscheiden. Zu guter letzt lässt sich $\mathbb{Q}$ einbetten als die Menge aller konstanten Folgen. Von diesem Raum kann gezeigt werden, dass jede Cauchy-Folge (also eine Cauchy-Folge von Cauchy-Folgen auf $\mathbb{Q}$) konvergiert.

Für die genaue Konstruktion und den Beweis der Eindeutigkeit, siehe zum Beispiel Gouvea [4] Theorem 3.2.13. □

3.3 Topologische Eigenheiten

Wir haben zwei Gruppenstrukturen auf $\mathbb{Q}_p$, nämlich die additive Gruppe $\mathbb{Q}_p^+ = (\mathbb{Q}_p, +, 0)$ und die multiplikative Gruppe $\mathbb{Q}_p^\times = (\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Zudem induziert der p-adische Betrag eine Topologie auf $\mathbb{Q}_p^+$, welche durch den Übergang zur Teilraumtopologie zu einer auf $\mathbb{Q}_p^\times$ wird. Es macht daher Sinn $\mathbb{Q}_p$ im Kontext topologischer Gruppen zu betrachten.

Satz 3.9. *Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ gilt*

(i) *$\mathbb{Q}_p^+$ ist eine topologische Gruppe.*

(ii) *$\mathbb{Q}_p^\times$ ist eine topologische Gruppe.*

Beweis. Zu (i): Die Stetigkeit der Addition und der Negierung sind eigentlich direkte Folgen der Konstruktion als Vervollständigung. Als kleine Auffrischung zeigen wir sie trotzdem im Kontext metrischer Räume. Seien $x_n \to x$ und $y_n \to y$ konvergente Folgen in $\mathbb{Q}_p$. Es ist zu zeigen, dass $x_n + y_n$ gegen $x + y$ konvergiert. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|(x_n + y_n) - (x + y)|_p = |(x_n - x) + (y_n - y)|_p \leq |(x_n - x)|_p + |(y_n - y)|_p.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0, also ist die linke eine Nullfolge und die Stetigkeit der Addition folgt. Ähnlich zeigen wir $-x_n \to -x$, denn $|(-x_n) - (-x)|_p = |x_n - x|_p$. Damit ist $\mathbb{Q}_p$ eine topologische Gruppe.

Zu (ii): $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ ist ein offener Teilraum von $\mathbb{Q}_p$ und somit selbst wieder hausdorffsch und lokalkompakt. Für die Stetigkeit seien $x_n \to x$ und $y_n \to y$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{Q}_p^\times$. Wir zeigen, dass $x_n y_n$ gegen xy konvergiert. Dies folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy|_p &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|_p \\ &\leq |x_n y_n - x_n y|_p + |x_n y - xy|_p \\ &= \underbrace{|x_n|_p}_{\text{beschränkt}} \underbrace{|y_n - y|_p}_{\to 0} + \underbrace{|x_n - x|_p}_{\to 0} |y|_p \to 0 \end{aligned}$$

Weiter zur Invertierung. Wegen

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right|_p = \frac{|x_n - x|_p}{|x_n x|_p} \to 0$$

folgt, dass x_n^{-1} gegen x^{-1} konvergiert und die Stetigkeit ist gezeigt. □

Bisher haben wir uns noch keine nähren Gedanken über die offenen Mengen der Topologie gemacht. Da wir auf $\mathbb{Q}_p^\times$ nur die Teilraumtopologie haben sollten wir uns auf $\mathbb{Q}_p^+$ konzentrieren. Die offenen Mengen werden gerade erzeugt aus den *offenen Bällen*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{Q}_p : |x - y|_p < \varepsilon\}$$

mit $x \in \mathbb{Q}_p$ und $\varepsilon > 0$ Da wir es aber mit einer topologische Gruppe zu tun haben, reicht es nur die offenen Bälle $B(\varepsilon) := B(0, \varepsilon)$ zu betrachten. Diese bilden dann eine Umgebungsbasis der 0. Wir haben aber gesehen, dass $|\mathbb{Q}_p|_p = p^{\mathbb{Z}}$. Folglich ist $B(\varepsilon) = B(\varepsilon')$ für $p^k < \varepsilon, \varepsilon' \leq p^{k+1}$. Es sind also nur solche ε interessant, die selber Potenzen von p sind. Dies hat aber noch weitere ungewohnte Folgen. Es gilt

$$\overline{B(p^k)} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^k\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < p^{k+1}\} = B(p^{k+1}).$$

Alle abgeschlossenen Bälle sind offen. Umgekehrt sind alle offenen Bälle abgeschlossenen, wir müssen nur die Gleichung von rechts nach links lesen. Im Englischen haben wir für diese Art von Mengen die schöne Wortschöpfung *clopen** für *closed* und *open*. Definieren wir nun die offene, abgeschlossene Menge der *p-adischen ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < p\}.$$

Diese bildet eine offene, abgeschlossene Umgebung der 0. Wir können aber jedes Element der Umgebungsbasis durch $\mathbb{Z}_p$ darstellen, denn es gilt

$$p^k \mathbb{Z}_p = \{p^k x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^{-k}\}.$$

Diese Mengen haben noch eine weitere Eigenschaft: Sie sind Untergruppen. Die verschärfte Dreicksungleich garantiert uns nämlich, dass für alle $x, y \in p^k \mathbb{Z}_p$ die Summe wieder in $p^k \mathbb{Z}_p$ liegt.

---

*Abgeschloffen?

Wir haben nun für jede p-adische Zahl x eine Basis offener Umgebungen gefunden Dessen Elemente haben alle die Form $x + p^k\mathbb{Z}_p$. Diese Mengen haben wieder ihre Eigenheiten. In den p-adischen Zahlen ist bekanntlich jedes Dreieck gleichschenklig. Das hat zur Folge, dass jeder Punkt innerhalb des Kreises bereits der Mittelpunkt ist! Betrachten wir dazu die Kreisscheibe $x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$ und sei $x_2 \in x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$ eine beliebige Zahl. Offensichtlich ist $x_1 \in x_2 + p^k\mathbb{Z}_p$. Es reicht also zu zeigen, dass $x_2 + p^k\mathbb{Z}_p \subseteq x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$, die andere Richtung folgt analog. Für ein beliebiges $y \in x_2 + p^k\mathbb{Z}_p$ haben wir

$$|x_1 - y|_p = |x_1 - x_2 + x_2 - y|_p \leq \max\{= |x_1 - x_2|_p, |x_2 - y|_p\} \leq p^{-k},$$

also $y \in x_1 + p^k\mathbb{Z}_p$ und folglich $x_1 + p^k\mathbb{Z}_p = x_2 + p^k\mathbb{Z}_p$. Es geht noch mehr. $\mathbb{Q}$ liegt dich in $\mathbb{Q}_p$, d.h. jede Umgebung $x + p^k\mathbb{Z}_p$ enthält eine rationale Zahl a. Damit können wir jede Umgebung schreiben als $a + p^k\mathbb{Z}_p$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $a \in Q$.

Wir haben bisher nur offene und abgeschlossene Mengen betrachtet. Wie sieht es mit kompakten Mengen aus? Dabei hilft uns folgender Satz.

Satz 3.10. *$\mathbb{Z}_p$ ist kompakt*

Beweis. Da wir uns in einem metrischen Raum befinden nutzen die Charakterisierung kompakter Mengen als vollständige und totalbschränkte Mengen. Ersteres folgt daraus, dass $\mathbb{Z}_p$ als abgeschlossene Menge des vollständigen Raumes $\mathbb{Q}_p$ selber vollständig ist. Eine Menge heißt totalbeschränkt, wenn wir sie für jedes $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen ε-Bällen überdecken können. Da wir nur der Betrag nur diskrete Werte annimmt betrachten wir ε der Form p^k. Der Fall $k \geq 0$ ist klar, da dann $\mathbb{Z}_p \subseteq p^{-k}\mathbb{Z}_p$. Sei also $k < 0$. Es ist $p^{-k+1}\mathbb{Z}_p$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_p$ und für den Index gilt $[\mathbb{Z}_p : p^{-k+1}\mathbb{Z}_p] = p^{-k+1}$. Das bedeutet, dass die p^k-Bälle

$$a + p^{-k+1}\mathbb{Z}_p = \{y \in \mathbb{Z}_p : |y - a|_p \leq p^{k-1}\} = \{y \in \mathbb{Z}_p : |y - a|_p < p^k\} = B(a, p^k)$$

mit $a = 0 \ldots p^{-k+1} - 1$ die Menge $\mathbb{Z}_p$ überdecken. Als vollständige und totalbeschränkte Menge ist $\mathbb{Z}_p$ somit kompakt. □

Damit sieht man aber auch schnell ein, dass alle Mengen der Form $a + p^k\mathbb{Z}_p$ als stetiges Bild einer kompakter Menge wieder kompakt sind. Hier muss man sich nur kurz bewusst machen, dass die Abbildung $x \mapsto p^k x$ in $\mathbb{Q}_p^+$ stetig ist.

Zum Ende dieses Abschnitts wenden wir uns noch einer wichtigen multiplikativen Untergruppe zu: die Gruppe der ganzzahligen Einheiten

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}.$$

Sie entspricht dem Einheitskreis S^1 im Komplexen und spielt später in der Berechnung von Integralen eine wichtige Rolle. Zuerst bemerken wir, dass $\mathbb{Z}_p^\times$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\} \subset \mathbb{R}_0^+$ unter der stetigen Betragsabbildung selbst wieder abgeschlossen ist. Damit ist aber $\mathbb{Z}_p^\times$ als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{Z}_p$ kompakt. Ähnlich zu $\mathbb{C}^\times = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} rS^1$ haben wir zudem auch im p-adischen Fall eine disjunkte Zerlegung der Einheiten $\mathbb{Q}_p^\times$ in Translationen von $\mathbb{Z}_p^\times$. Diese hat aber eine entscheidende Besonderheit: Da unser Betrag nur diskrete Werte annimmt, ist die Zerlegung $\mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^k\mathbb{Z}_p^\times$ sogar abzählbar.

3.4 Die Potenzreihendarstellung

Nachdem wir die Struktur und Topolgie auf $\mathbb{Q}_p$ besser verstanden haben, sollten wir uns etwas mit den eigentlichen Objekten, den p-adischen Zahlen beschäftigen. Wie auch schon im Fall der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_\infty$ sind die Objekte dieser Konstruktion etwas unhandlich. In $\mathbb{R}$ hatten wir die Dezimalbruchentwicklung $x = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} x_k 10^k$,

$x_k \in \{0, \ldots, 9\}$ oder etwas allgemeiner die b-adische Darstellung $x = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} x_k b^k$, $x_k \in \{0, \ldots, b-1\}$ für eine natürliche Zahl $b > 1$, die zwar nicht unbedingt eindeutig ist ($0,999\cdots = 1,000\ldots$) aber wesentlich anschaulicher als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zu unserer Freude werden wir feststellen, dass es auch in $\mathbb{Q}_p$ eine ähnliche Darstellung gibt. Diese ist im Gegensatz zu der in $\mathbb{R}$ eindeutig und kann wieder etwas ungewohnt unendliche viele Stellen vor dem Komma, aber nur endlich viele Nachkommastellen haben

Satz 3.11. *Jede Element $x \in \mathbb{Q}_p$ lässt sich eindeutig als eine Potenzreihe*

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$$

mit $x_k \in \{0, \ldots, p-1\}$, $x_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ darstellen. Insbesondere gilt $|x|_p = p^{-n}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst das die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=N}^{n} x_k p^k$ in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert.

$$|S_n - S_{n-1}|_p = |x_n p^n|_p \leq p^{-n} \to 0$$

und damit haben wir schon gezeigt, dass die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Da $\mathbb{Q}_p$ vollständig ist konvergiert diese gegen einen Wert für den wir $\sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$ schreiben.

Als nächstes sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Wir konstruieren nun eine Folge (x_k) mit $x_k \in \{0, \ldots, p-1\}$, so dass die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k p^k$ gegen x konvergieren. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ liegt finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ der

$$\left|x - \frac{a}{b}\right|_p \leq p^{-n} < 1$$

In der Tat finden wir sogar eine ganze Zahl. Denn für $\frac{a}{b}$ wie oben haben wir

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p \leq \max\left\{|x|_p, \left|x - \frac{a}{b}\right|_p\right\} \leq 1,$$

was zeigt, dass p kein Teiler von b ist. Wir finden daher eine Bezout-Darstellung $1 = b'b + p'p^n$, also $b'b \equiv 1 \pmod{p^n}$ für $b', p' \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$\left|\frac{a}{b} - ab'\right|_p = \left|\frac{a(1-bb')}{b}\right|_p = \left|\frac{a(p'p^n)}{b}\right|_p \leq p^{-n}$$

und natürlich $ab' \in \mathbb{Z}$. Wir definieren nun $y_n \in \mathbb{Z}$ als die eindeutige Zahl, so dass

$$0 \leq y_n \leq p^n - 1 \text{ und } y_n \equiv ab' \pmod{p^n}.$$

Wir folgern analog zu eben

$$|x - y_n|_p = \left|x - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - ab'\right|_p \leq \max\left\{\left|x - \frac{a}{b}\right|_p, \left|\frac{a}{b} - y_n\right|_p\right\} = p^{-n}$$

und folglich konvergiert die Folge (y_n) gegen x. Wir zeigen, dass diese Folge eindeutig ist. Sei dazu y_n' eine weiter Zahl mit $0 \leq y_n' \leq p^n - 1$ und $|x - y_n'|_p \leq p^{-n}$. Dann gilt aber wie eben

$$|y_n - y_n'|_p = |y_n - x + x - y_n'|_p \leq p^{-n},$$

also ist p^n ein Teiler von $y_n - y_n'$ und folglich $y_n - y_n' = 0$. Aus dieser Eindeutigkeit folgt unter anderem auch, dass $y_n \equiv y_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$, denn

$$|y_n - y_{n-1}|_p = |y_n - x + x - y_{n-1}|_p \leq \max\left\{|y_n - x|_p, |x - y_{n-1}|_p\right\} = p^{-n+1},$$

und folglich p^{n-1} ein Teiler von $y_n - y_{n-1}$. Die eindeutigen p-adischen Entwicklungen dieser y_n sind genau die gesuchten Partialsummen S_n und definieren die x_k daher induktiv.

Für jedes beliebige $x \in \mathbb{Q}_p$ finden wir ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $p^n x \in \mathbb{Z}_p$ und damit eine Entwicklung $p^n x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$. Also haben wir

$$x = \sum_{k=-n}^{\infty} x_{k+n} p^k$$

$\square$

Die Potenzreihendarstellung verschafft uns nun einen alternativen Blick auf die im letzten Abschnitt behandelten Mengen. Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der verschärfte Dreiecksungleichung jedes $x = \sum_{k=n}^{\infty} x_k p^k$ mit $x_n \neq 0$ den p-adischen Betrag $|x|_p = p^{-n}$ hat. Folglich ist dann

$$p^n \mathbb{Z}_p = \{\sum_{k=n}^{\infty} x_k p^k \in \mathbb{Q}_p\}.$$

Als Analogie zu der Laurent-Reihenentwicklung meromorpher Funktion auf, so entspricht $\mathbb{Z}_p$ den holomorphen Funktionen und $p^n \mathbb{Z}_p$ den meromorphen Funktionen mit Pol- bzw. Nullstelle vom Grad n. Weiter ist

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{\sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k \in \mathbb{Q}_p \, x_0 \neq 0\}$$

und entspricht den holomorphen Funktionen die am Entwicklungspunkt nicht verschwinden.

4 Die lokale Theorie

Nach diesem kurzen Ausflug in die ungewohnte Welt der p-adischen Zahlen machen wir uns wieder auf den Weg zum ersten Teil von Tates Beweis. Eingen wir uns auf etwas Notation. Eine *Stelle* von $\mathbb{Q}$ ist eine Primzahl oder ∞. Erstere werden auch *endliche Stellen* oder in Anlehnung an ihre Absolutbeträge *nicht-archimedische Stellen*. Analog bezeichnen wir ∞ als die *unendliche* oder auch *archimedische Stelle*. Im Folgenden werden wir immer p für eine Stelle verwenden. Es wird also keine Verwirrung stiften, wenn wir $p < \infty$ schreiben und damit meinen, dass p eine Primzahl ist. Umgekehrt schreiben wir $p \leq \infty$ wenn eine beliebige Stelle gemeint ist. Setzt man zudem noch $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$ haben wir einen Körper $\mathbb{Q}_p$ für jede Stelle, der aus der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$ hervorgeht.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die endliche Stellen gewisse Ähnlichkeiten mit der lokalen Darstellung meromorpher Funktionen als Laurent-Reihe haben. Wir werden also im folgenden Abschnitt den Körper $\mathbb{Q}$ „lokal“ an den Stellen $p \leq \infty$ genauer untersuchen. Dabei richten wir uns an einer Mischung aus Tates Doktorarbeit [7], deren Behandlung durch Ramakrishnan und Valenza [2] und Deitmar [1].

4.1 Lokale Körper

Halten wir zunächst ein wichtiges Ergebnis des letzten Abschnitts fest.

Satz 4.1. *Für alle Stellen $p \leq \infty$ haben wir:*

(a) $\mathbb{Q}_p^+$ *ist eine lokalkompakte Gruppe.*

(b) $\mathbb{Q}_p^\times$ *ist eine lokalkompakte Gruppe.*

Ein Körper, dessen additive und multiplikativen Gruppen lokalkompakt sind, nennt man auch *Lokaler Körper*.

Beweis. Für $p = \infty$ sind diese Aussagen bereits bekannt. Für $p < \infty$ müssen wir nur kurz argumentieren, dass $\mathbb{Q}_p^+$ und $\mathbb{Q}_p^\times$ hausdorffsch sind. Dies ist aber klar, da $\mathbb{Q}_p^+$ ein metrischer Raum und $\mathbb{Q}_p^\times$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{Q}_p^+$ ist. Die restlichen Eigenschaften haben wir im letzten Abschnitt gezeigt. $\square$

Als lokalkompakte Gruppe exisitert nach Satz 2.10 ein Haar-Maß auf $\mathbb{Q}_p^+$, welches wir mit dx_p bezeichnen. Im Fall $p = \infty$ können wir als dx_∞ einfach das Lebesgue-Maß nehmen und ersparen uns bei jeder Integration umdenken zu müssen. $p < \infty$ dagegen ist Neuland für uns und daher nicht beeinflusst von Gewohnheiten. Der folgende Satz wird allerdings zeigen, dass es sinnvoll ist die Normierung mit $\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) = 1$ zu wählen.

Satz 4.2. *Schreiben μ für das Maß dx_p. Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{Q}_p$ und jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ gilt*

$$\mu(xA) = |x|_p \cdot \mu(A).$$

Insbesondere folgt für jedes $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ und $x \neq 0$:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x^{-1}y)d\mu(y) = |x|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(y)d\mu(y).$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Die Funktion μ_x definiert durch

$$\mu_x(A) = \mu(xA)$$

definiert wieder ein Haar-Maß auf $\mathbb{Q}_p$ und unterscheidet sich daher nur durch Skalierung mit einer positiven Konstante $c > 0$ von μ. Ziel wird es nun sein $c = |x|_p$ zu zeigen. Dies ist klar im Fall $p = \infty$.

Für $p < \infty$ reicht es dank unserer Normierung $\mu(x\mathbb{Z}_p) = |x|_p$ zu zeigen. Sei dazu $|x|_p = p^{-k}$. Dann ist $x = p^k y$ mit $y \in \mathbb{Z}_p$ und $x\mathbb{Z}_p = p^k\mathbb{Z}_p$. Daher reduziert sich unsere Betrachtung auf $\mu(p^k\mathbb{Z}_p) = p^{-k}$. Beginnen wir mit dem Fall $k \geq 0$. Dann ist $p^k\mathbb{Z}_p$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_p$ und für den Index gilt $[\mathbb{Z}_p : p^k\mathbb{Z}_p] = p^k$. Wir haben also eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{a=0}^{p^k-1} a + p^k\mathbb{Z}_p$. Aus der Translationsinvarianz folgern wir dann

$$1 = \mu(\mathbb{Z}_p) = \sum_{a=0}^{p^k-1} \mu(a + p^k\mathbb{Z}_p) = \sum_{a=0}^{p^k-1} \mu(p^k\mathbb{Z}_p) = p^k\mu(p^k\mathbb{Z}_p).$$

Die Behauptung folgt dann durch einfaches Umformen. Im anderen Fall $k < 0$ ist umgekehrt $\mathbb{Z}_p$ eine Untergruppe von $p^k\mathbb{Z}_p$ mit Index $[p^k\mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}_p] = p^{-k}$ und die Behauptung folgt analog. □

Damit haben wir ein sinnvolle Normierung des additiven Maßes dx_p gefunden. Wie sieht es auf den multiplikativen Gruppen $\mathbb{Q}_p^\times$ aus? Zunächst können wir einen Bezug zwischen additiven und multiplikativen Maßen herstellen.

Satz 4.3. *Ist dx_p ein additives Haar-Maß auf $\mathbb{Q}_p$, so definiert $\frac{dx_p}{|x|_p}$ ein multiplikatives Haar-Maß $d^\times x_p$ auf $\mathbb{Q}_p^\times$. Insbesondere gilt dann für alle $g \in L^1(\mathbb{Q}_p^\times)$*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} g(x)dx_p = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(x)\frac{dx_p}{|x|_p}$$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ eine lokalkompakte Gruppe ist und folglich ein Haar-Maß besitzt. Wenn wir nun ein positives, lineares Funktional auf $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$ angeben, erhalten wir nach Rieszschen Darstellungssatz ein Radonmaß, welches diesem Funktional entspricht. Ist nun $g \in C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$, so ist $g|\cdot|_p^{-1} \in C_c(\mathbb{Q}_p \setminus \{0\})$. Dies ist in der Tat eine eins-zu-eins Zuweisung. Wir definieren nun das Funktional

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(x)\frac{dx_p}{|x|_p}.$$

Dieses ist offensichtlich ein positives, nicht-triviales, lineares Funktional auf $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$. Es ist translationsinvariant, denn

$$\int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(y^{-1}x)\frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(x)\frac{|y|_p dx_p}{|yx|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} g(x)\frac{dx_p}{|x|_p},$$

folglich kommt es von einem Haar-Maß dx_p. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Funktionen in $C_c(\mathbb{Q}_p^\times)$ dicht in $L^1(\mathbb{Q}_p^\times)$ liegen. Beim Übergang zum Grenzwert erhalten wir die Gleichung auf Funktionen in L^1. □

Wir können also die Normierung abhänging von dx_p machen. Für $p = \infty$ spricht nichts dagegen einfach $d^\times x_\infty = \frac{dx_\infty}{|x|_\infty}$ beizubehalten. Im endlichen Fall machen wir uns etwas mehr Gedanken. Wir haben die multiplikative Untergruppe $\mathbb{Z}_p^\times$ kennengelernt und gesehen, dass $\mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} p^k\mathbb{Z}_p^\times$. Aufgrund der (multiplikativen) Translationsinvarianz ist $\mathrm{Vol}(p^k\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p}) = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p})$. Es ist daher interessant zu erfahren, welchen Wert $\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p})$ annimmt. Da $\mathbb{Z}_p^\times$ kompakt ist, muss er endlich sein. Wir rechnen

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, \frac{dx_p}{|x|_p}) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} dx_p = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx_p).$$

Nun können wir aber $\mathbb{Z}_p^\times$ disjunkt zerlegen durch

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigcup_{k=1}^{p-1}(k + p\mathbb{Z}_p)$$

und haben daher

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx_p) = \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{Vol}(k + p\mathbb{Z}_p, dx_p) = (p-1)\mathrm{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p) = \frac{p-1}{p},$$

wobei wir im letzten Schritt $\mathrm{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p) = |p|_p \mathrm{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p)$ ausgenutzt haben.

Wir normieren dx_p im Fall $p < \infty$ durch $dx_p = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{dx_p}{|x|_p}$, also gerade die Normierung, so dass $\mathbb{Z}_p^\times$ das Maß Eins hat.

4.2 Lokale Fourieranalysis

Im Kapitel über topologische Gruppen haben wir bereits einen Ausblick auf die abstrakte Fourieranalysis gegeben. Im Folgenden verfolgen wir einen naiveren Ansatz und entwickeln unsere eigene Variante auf den lokalen Körpern $\mathbb{Q}_p$, wobei wir im unendlichen Fall uns nicht groß von der klassischen Theorie entfernen. Zudem achten wir auch darauf eine Brücke zur abstrakten Theorie zu schlagen, so dass sich die hier behandelten Konzepte leicht auch auf den allgemeineren Fall übertragen lassen.

Fassen wir die Normierungen des letzten Abschnitts in einer Definition zusammen.

Definition 4.4. Das normalisierte additive Haar-Maß dx_p auf $\mathbb{Q}_p^+$ ist definiert durch

- dx_∞ entspricht dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.
- dx_p so normiert, dass $\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) = 1$ für $p < \infty$.

Das normalisierte multiplikative Haar-Maß dx_p auf $\mathbb{Q}_p^\times$ ist definiert durch

- $d^\times x_\infty = \frac{dx_p}{|x|_\infty}$.
- $dx_p = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{dx_p}{|x|_p}$ für $p < \infty$.

Wir beginnen nun damit eine Klasse von Funktionen zu definieren, die besonders gutes Konvergenzverhalten bei der Integration aufweist. Für die unendliche Stelle $p = \infty$ definieren wir eine *lokale Schwartz-Bruhat Funktion* als eine komplexwertige, glatte Funktion f, die für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n und m die Bedingung

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_\infty} \left| x^n \frac{d^m}{dx_p^m} f(x) \right| < \infty$$

erfüllt. Das entspricht der Definition der klassischen Schwartz-Funktion. Für die endlichen Stellen $p < \infty$ definieren wir eine *Schwartz-Bruhat Funktion* als eine lokal konstante Funktion mit kompakten Träger. Die Menge aller solcher Funktionen bilden einen komplexen Vektorraum, den wir mit $S(\mathbb{Q}_p)$ bezeichnen. Im Fall $p < \infty$ erkennt man leicht, dass $S(\mathbb{Q}_p) \subseteq L^1(\mathbb{Q}_p)$. Für $p = \infty$ gilt nach obiger Bedingung $(|1| + |x^2|)|f(x)| \leq C$, also $|f(x)| \leq C(1 + x^2)^{-1}$ und $(1 + x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{Q}\infty)$

Beispiele 4.5.

(i) Im Fall $p = \infty$ ist die Funktion $f_k = x^k e^{-x^2}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ in $S(\mathbb{Q}_\infty)$. Die Ableitungen $\frac{d^m}{dx_p^m} f_k(x)$ sind von der Form $p(x)e^{-x^2}$, wobei $p(x)$ ein Polynom ist. Aus der Analysis ist dann bekannt, dass $\left|x^n p(x) e^{-x^2}\right|$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ beschränkt ist.

(ii) Im Fall $p < \infty$ sind offensichtlich die charakteristischen Funktionen kompakter Mengen in $S(\mathbb{Q}_p)$. Beispiele für Kompakta sind Mengen der Form $a + p^k\mathbb{Z}_p$ mit $a \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Lemma 4.6. *Für jede endliche Stelle $p < \infty$ sind die lokalen Schwartz-Bruhat Funktion $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen der Mengen $a + p^k\mathbb{Z}_p$, wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $k \in \mathbb{Z}$.*

Damit sieht man auch leicht ein, dass solche Schwartz-Bruhat Funktionen integrierbar sind.

Beweis. Sei $f \in S(\mathbb{Q}_p)$. Da f lokal konstant ist, ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ das Urbild $f^{-1}(z)$ offen in $\mathbb{Q}_p$. Also ist $f^{-1}(0)$ offen, folglich $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ abgeschlossen und daher schon $\operatorname{supp}(f) = \mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$. Per Definition hat die Schwartz-Bruhat Funktion f kompakten Träger, also ist $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ kompakt. Diese Menge wird von den offenen Mengen $f^{-1}(x)$ mit $x \neq 0$ überdeckt, wovon nach Kompaktheit schon endlich viele reichen. f hat somit endliches Bild. Weiter ist jede offene Menge $f^{-1}(x)$ eine disjunkte Vereinigung offener Bällen in $\mathbb{Q}_p$. Diese haben aber genau die gesuchte Form $a + p^k\mathbb{Z}_p$ wie oben. Aufgrund der Kompaktheit, reichen wieder endliche viele solcher Bälle. Damit folgt auch schon das Lemma. $\square$

Bevor wir nun die Fouriertransformation definieren, schauen wir uns im Sinne der harmonischen Analysis die Charaktere auf $\mathbb{Q}_p^+$ an. Wir beginnen mit der Definition eines nicht-trivialen Charakters e_p und zeigen anschließend, dass wir jeden beliebigen Charakter $\psi \in \widehat{\mathbb{Q}}_p^+$ durch e_p darstellen können.

Definition 4.7. Wir definieren den *Standardcharakter* $e_p : \mathbb{Q}_p^+ \to S^1$ wie folgt:

- Für die unendliche Stelle setzten wir $e_\infty(x) = \exp(-2\pi i x)$
- Im endlichen Fall wird die Definition etwas aufwendiger. Zunächst haben wir eine natürliche Projektion $\mathbb{Q}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Die Äquivalenzklassen von $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ werden nach unseren Überlegungen zur Potenzreihendarstellung eindeutig repräsentiert durch Zahlen der Form $\sum_{k=-n}^{-1} a_k p^k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq a_k \leq p-1$. Wir definieren den stetigen Homomorphismus $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ indem wir diese Repräsentanten als summen in $\mathbb{Q}$ interpretieren. Zu guter Letzt schicken wir diese Summe in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ durch $e : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to S^1, x \mapsto \exp(2\pi i x)$ in den Einheitskreis. Alle diese Abbildungen sind stetige Gruppenhomomorphismen, bilden also selber wieder einen stetigen Gruppenhomomorphismus, den wir mit e_p bezeichnen. Interpretieren wir die Potenzreihenentwicklung der p-adischen Zahlen als nicht unbedingt konvergente Summe in $\mathbb{Q}$, so können wir (etwas unschön) schreiben
$$e_p\left(\sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k\right) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k\right) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=-n}^{-1} a_k p^k\right).$$

e_∞ ist offensichtlich trivial auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Analog dazu ist im Endlichen e_p konstant auf den p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$. Das hat aber zur Folge, dass der Charakter für $p \leq \infty$ lokal konstant ist, denn für jedes $a \in \mathbb{Q}_p$ ist $a + \mathbb{Z}_p$ eine offene Umgebung auf der e_p nur den Wert $e_p(a)$ annimmt.

Sei nun ψ ein beliebiger weiterer Charakter auf $\mathbb{Q}_p^+$, $p < \infty$ und U eine offene Umgebung der $1 \in S^1$, die nur die triviale Untergruppe 1 enthält. Aufgrund der Stetigkeit von ψ gibt es dann eine offene Umgebung V der $0 \in \mathbb{Q}_p^+$ mit $\psi(V) \subseteq U$. Ohne Einschränkung ist V eine offene Untergruppe der Form $p^k\mathbb{Z}_p$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber $\psi(V)$ eine Untergruppe von S^1 und somit gleich 1. Die kleinste solche Untergruppe $p^k\mathbb{Z}_p$ nennen wir den *Konduktor* des additiven Charakters ψ. Dieser wird uns im folgenden Lemma zur Hilfe kommen.

Lemma 4.8. *Jeder Charakter* $\psi : \mathbb{Q}_p \to S^1$ *ist von der Form* $x \mapsto e_p(ax)$ *für ein* $a \in \mathbb{Q}_p$.

Beweis. Klären wir zuerst den Fall $p = \infty$. Sei $\psi : \mathbb{Q}_\infty \to S^1$ ein beliebiger Charakter. Wegen der Stetigkeit von ψ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\psi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \{z \in S^1 : \Re(z) > 0\}$. Machen wir ε noch etwas kleiner können wir sogar

$$\psi([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \{z \in S^1 : \Re(z) > 0\} \tag{3}$$

garantieren. Definiere nun a als das eindeutig bestimmte Element aus $[-\frac{1}{4\varepsilon}, \frac{1}{4\varepsilon}]$ *, so dass $\psi(\varepsilon) = \exp(2\pi i a\varepsilon)$. Als nächstes behaupten wir, dass auch

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \exp\left(2\pi i a\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

gilt. Wegen $\psi(\frac{\varepsilon}{2})^2 = \psi(\varepsilon) = \exp(2\pi i a\varepsilon)$ ist $\psi(\frac{\varepsilon}{2}) = \pm\exp(2\pi i a\frac{\varepsilon}{2})$. Da aber $\psi(\frac{\varepsilon}{2})$ wegen (3) positiven Realteil haben muss, kommt nur $\exp(2\pi i a\frac{\varepsilon}{2})$ in Frage. Durch Iteration des Arguments erhalten wir $\psi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \exp(2\pi i a\frac{\varepsilon}{2^n})$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Setzen wir jetzt $\varepsilon = 2^{-n_0}$ für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist ε^{-1} eine natürliche Zahl und für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ haben wir

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{k}{2^n}\right) &= \psi\left(\frac{k\varepsilon}{2^n\varepsilon}\right) = \psi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^{\frac{k}{\varepsilon}} \\ &= \exp\left(2\pi i a\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^{\frac{k}{\varepsilon}} = \exp\left(2\pi i a\frac{k}{2^n}\right)\end{aligned}$$

Die Menge aller $\frac{k}{2^n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ liegt dicht in $\mathbb{R}$ und wir können aus der Stetigkeit $\chi(x) = \exp(2\pi i a x)$ schließen. Um die Eindeutigkeit von a zu sehen, reicht es die Ableitung von $x \mapsto \exp(2\pi i a x)$ zu berechnen und an der Stelle $x = 0$ auszuwerten. Der Wert beträgt gerade $2\pi i a$.

Kommen wir nun zum Fall $p < \infty$. Sei ψ ein unitärer Charakter auf $\mathbb{Q}_p^+$ und sei $p^k\mathbb{Z}_p$ dessen Konduktor. Für $k \leq 0$ gilt offensichtlich $\psi(\mathbb{Z}_p) = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur solche Charaktere, denn im Fall $k > 0$ können wir auch den Charakter $x \mapsto \psi(p^k x)$ betrachten und die Aussage folgt aus $\psi(p^k x) = \psi(x)^{(p^k)}$.

Suchen wir ein geeignetes $a \in \mathbb{Q}_p$. Uns fällt zunächst auf, dass der Charakter bereits eindeutig durch seine Werte an p^{-k} mit $k \in \mathbb{N}$ bestimmt wird. Da ψ trivial auf $\mathbb{Z}_p$ wirkt, gilt nämlich

$$\psi\left(\sum_{k=-n}^{\infty} x_k p^k\right) = \sum_{k=-n}^{\infty} \psi\left(p^k\right)^{x_k} = \sum_{k=-n}^{-1} \psi\left(p^k\right)^{x_k}.$$

Es reicht also ein geeignetes a für diese Potenzen zu finden. Schauen wir uns $\psi(p^{-1})$ genauer an, so erkennen wir, dass dies eine p-te Einheitswurzel sein muss. Damit ist $\psi(p^{-1}) = \exp(2\pi i\frac{a_1}{p})$ für ein eindeutig bestimmtes natürliches $0 \leq a_1 \leq p-1$. Analog argumentieren wir auch $\psi(p^{-k}) = \exp(2\pi i\frac{a_k}{p^k})$ mit $0 \leq a_k \leq p^k - 1$. Zudem gilt

$$\exp\left(2\pi i\frac{a_{k+1}}{p^k}\right) = \exp\left(2\pi i\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}}\right)^p = \psi(p^{-k-1})^p = \psi(p^{-k}) = \exp\left(2\pi i\frac{a_k}{p^k}\right).$$

Für unsere Folge heißt das aber gerade $a_k \equiv a_{k+1} \pmod{p^k}$. Im Beweis der Potenzreihendarstellung haben wir aber gesehen, dass eine solche Folge gerade eine eindeutig bestimmte p-adische Zahl a definiert, die $a \equiv a_k \pmod{p^k}$ erfüllt. Wir haben also

$$e_p\left(\frac{a}{p^k}\right) = \exp\left(2\pi i\frac{a_k}{p^k}\right) = \psi\left(\frac{1}{p^k}\right).$$

Damit sind wir dann aber auch schon fertig. □

*Also der Logarithmuszweig, dass $-\pi/2 < \varepsilon a < \pi/2$

Der Beweis liefert uns sogar einen kleinen Bonus.

Korollar 4.9. *Wirkt $\psi : \mathbb{Q}_p \to S^1$ trivial auf $\mathbb{Z}_p$, so gilt $\psi(x) = e_p(ax)$ mit $a \in \mathbb{Z}_p$.*

Beweis. Das ist wieder eien Folgerung aus Satz 3.11 zur Potenzreihendarstellung. Demnach konvergiert die im vorherigen Beweis definierte Folge gegen einen Wert aus $\mathbb{Z}_p$. □

Die Standard-Charaktere induzieren gewissermaßen einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe $\mathbb{Q}_p^+$ und deren Dualgruppe $\widehat{\mathbb{Q}_p^+}$. Wir können also gutem Gewissens die Fouriertransformation als eine Funktion auf $\mathbb{Q}_p^+$ zu definieren.

Definition 4.10 (Lokale Fouriertransformation)**.** Sei $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$. Wir definieren dann die *Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ von f durch die Formel

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) e_p(-\xi x) dx_p$$

für alle $\xi \in \mathbb{Q}_p$.

Diese Definition entspricht im Fall $p = \infty$ der klassischen Fouriertransformation (bis auf eventuelle Normierung und komplexen Konjugation des Charakters). Von daher möchten wir auch einige klassische Ergebnisse festhalten und beweisen.

Lemma 4.11. *Sei $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$.*

(a) *Ist $g(x) = f(x)e_p(ax)$ mit $a \in \mathbb{Q}_p$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)$.*

(b) *Ist $g(x) = f(x - a)$ mit $a \in \mathbb{Q}_p$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)e_p(-ax)$.*

(c) *Ist $g(x) = f(\lambda x)$ mit $\lambda \in {\mathbb{Q}_p}^\times$, dann gilt $\hat{g}(x) = \frac{1}{|\lambda|_p} \hat{f}(\frac{x}{\lambda})$.*

Beweis. (a) und (b) sind einfache Folgerungen aus der Definition mit der Multiplikativität von e_p und der Translationsinvarianz des Haar-Maß. Bei (c) spielt unsere Normierung des Maßes eine Rolle, denn mit der Translation $y \mapsto \lambda^{-1} y$ erhalten wir

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(\lambda y) e_p(-xy) dy = \frac{1}{|\lambda|_p} \int_{\mathbb{Q}_p} f(y) e_p(-x\lambda^{-1} y) dy = \frac{1}{|\lambda|_p} \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

□

Beschränken wir uns jetzt auf die Fouriertransformation von lokalen Schwartz-Bruhat Funktionen. Aus der klassischen Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$ ist bekannt, dass für jede Schwartz Funktion f deren Fouriertransformierte $\hat{f}$ wieder eine Schwartz Funktion ist. Man kann dann $\hat{\hat{f}}$ betrachten und sieht, dass diese Funktion in einem engen Bezug zu f steht. Für eine geeignete Normierung des Haar-Maßes haben wir die Umkehrformel $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$. Wir nennen ein so normiertes Haar-Maß *selbst-dual.* Übertragen wir dies nun auf den p-adischen Fall.

Satz 4.12. *Ist $p \leq \infty$ und $f \in S(\mathbb{Q}_p)$, so ist $\hat{f} \in S(\mathbb{Q}_p)$ und es gilt die* Umkehrformel

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

Beweis. Im Fall $p = \infty$ folgt $\hat{f} \in S(\mathbb{Q}_p)$ und die Umkehrformel (mal einer Konstanten) aus der klassischen Analysis. Um zu sehen, dass unsere Normierung von dx_∞ tatsächlich selbst-dual ist, reicht es eine geeignete Funktion zu betrachten und zu zeigen, dass die Konstante gleich 1 ist. Dafür verweisen wir auf die Berechnungen am Ende des Kapitels.

Kommen wir zum Fall $p < \infty$. Wie wir eben in Lemma 4.6 gesehen haben haben, ist jede Funktion in $S(\mathbb{Q}_p)$ eine Linearkombination von Funktionen der Form $f = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}$.

Es reicht also die Aussage für solche f zu zeigen. Sei dazu $h := \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Wir zeigen $\hat{h} = h$ durch folgende Rechnung

$$\hat{h}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} h(y) e_p(-xy) dy_p = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-xy) dy_p.$$

Nun ist $\chi(y) := e_p(-xy)$ ein Charakter auf $\mathbb{Z}_p$ und genau dann trivial, wenn $x \in \mathbb{Z}_p$. Weiter ist $\mathbb{Z}_p$ kompakt. Nach Lemma 2.14 und unserer Normierung von dy_p folgt also

$$\hat{h}(x) = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dy_p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} = h(x)$$

Wir führen nun folgende Operatoren auf $S(\mathbb{Q}_p)$ ein

$$L_a f(x) = f(x-a), \qquad M_\lambda f(x) = f(\lambda x),$$

wobei $a \in \mathbb{Q}_p$ und $\lambda \in \mathbb{Q}_p{}^\times$. Nun können wir f schreiben als $L_a M_{p^{-k}} h$. Es folgt

$$\hat{f} = (L_a M_{p^{-k}} h)\widehat{\ } = \Omega_{-a} p^k M_{p^k} \hat{h} = \Omega_{-a} p^{-k} M_{p^k} h.$$

Also ist $\hat{f}(x) = e_p(-ax) p^k \mathbb{1}_{p^{-k}\mathbb{Z}_p}(x)$. Der Charakter e_p ist lokal konstant. Somit ist $\hat{f}$ als das Produkt lokal konstanter Funktionen selbst wieder lokal konstant und daher in $S(\mathbb{Q}_p)$. Wir haben also den ersten Teil der Aussage gezeigt.

Für den zweiten Teil sehen wir

$$\hat{\hat{f}} = (L_a M_{p^{-k}} h)\widehat{\widehat{\ }} = L_{-a} (M_{p^k} h)\widehat{\ } = L_{-a} M_{p^k} \hat{h} = L_{-a} M_{p^k} h,$$

also $\hat{\hat{f}}(x) = \mathbb{1}_{-a+p^k\mathbb{Z}_p}(x) = \mathbb{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}(-x) = f(-x)$. Hier haben wir $p^k\mathbb{Z}_p = -p^k\mathbb{Z}_p$ ausgenutzt. Damit haben wir die Umkehrformel für den p-adischen Fall gezeigt. $\square$

4.3 Die lokale Funktionalgleichung

Die Einheiten $\mathbb{Q}_p^\times$ der lokalen Körper $\mathbb{Q}_p$ können dargestellt werden als direktes Produkt $\mathcal{O}_p^\times \times V(\mathbb{Q}_p)$, wobei $\mathcal{O}_p^\times$ die Untergruppe der Elemente von $\mathbb{Q}_p^\times$ mit Absolutbetrag 1 und

$$V(\mathbb{Q}_p) := \left|\mathbb{Q}_p^\times\right|$$

der Wertebereich des Absolutbetrags auf den Einheiten ist. Wir haben nämlich einen stetigen Homomorphismus $\tilde{\cdot} : x \mapsto \frac{x}{|x|_p}$ von $\mathbb{Q}_p^\times$ nach $\mathcal{O}_p^\times$.

Für $p = \infty$ ist $\mathcal{O}_p^\times = \{-1, 1\}$ und $V(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{R}_+^\times$. Jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ hat gerade Form $x = \mathrm{sgn}(x)|x|_p$, denn $\tilde{x}$ ist gerade die Signumsabbildung.

Wenn $p < \infty$ ist $\mathcal{O}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times$, $V(\mathbb{Q}_p) = p^\mathbb{Z}$ und wir können jedes Element $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ schreiben als $x = |x|_p \tilde{x}$. Es wird nun von Interesse sein, wie die multiplikativen Charaktere auf die Untergruppe $\mathcal{O}_p^\times$ wirken. Dazu zunächst eine kleine Definition.

Definition 4.13. Ein Charakter $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Q}_p^\times, \mathbb{C}^\times)$ ist *unverzweigt*, wenn er trivial auf die Untergruppe $\mathcal{O}_p^\times$ wirkt.

Die unverzweigten Charaktere haben eine recht einfache Form, was folgendes Lemma zeigt.

Lemma 4.14. *Jeder unverzweigte Charakter χ auf $\mathbb{Q}_p^\times$ hat die Form $\chi(x) = |x|_p^s$ mit $s \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Es ist klar, dass Funktionen dieser Form tatsächlich unverzweigte Quasi-Charaktere sind. Umgekehrt sei χ ein unverzweigter Quasi-Charakter. Dann gilt $\chi(x) = \chi(|x|_p \tilde{x}) = \chi(|x|_p)$. Dadurch induziert χ eine stetige Abbildung auf dem Wertebereich $V(\mathbb{Q}_p)$. Wir zeigen, dass diese Abbildung gerade die Form $t \mapsto t^s$ hat.

Sei zuerst $p = \infty$, also $V(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{R}_+^\times$. Wir definieren $s := \log(\chi(e))$, also $\chi(e) = e^s$. Induktiv lässt sich nun leicht $\chi(e^n) = e^{ns}$ für ganze Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ zeigen. Analog zeigt man

$$\chi(e^{\frac{n}{m}})^m = \chi(e^{m\frac{n}{m}}) = \chi(e^n) = e^{ns},$$

woraus

$$\chi(e^{\frac{n}{m}}) = \left(\chi(e^{\frac{n}{m}})^m\right)^{\frac{1}{m}} = (e^{ns})^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}s}$$

folgt, so dass wir $\chi(e^q) = e^{qs}$ für alle rationalen Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ haben. Wegen Stetigkeit gilt nach Übergang zu Grenzwerten $\chi(e^r) = e^{rs}$ für alle reellen $r \in \mathbb{R}$, also $\chi(t) = t^s$ für alle $t \in \mathbb{R}_+^\times$.

Der Fall $p < \infty$ ist etwas leichter. Wir definieren dieses mal $s := \frac{\log(\chi(p))}{\log(p)}$, so dass $\chi(p) = p^s$. Da der Wertebereich aber gerade $p^{\mathbb{Z}}$ war, folgt die Behauptung sofort. □

Satz 4.15. *Jeder Quasi-Charakter χ von $\mathbb{Q}_p^\times$ hat die Form*

$$\chi(x) = \mu(\tilde{x})|x|_p^s,$$

wobei μ ein Charakter auf $\mathcal{O}_p^\times$, $\tilde{\cdot}$ der stetige Homomorphismus von $\mathbb{Q}_p^\times$ nach $\mathcal{O}_p^\times$ und $s \in \mathbb{C}$ ist.

Beweis. Es ist wieder klar, dass $\mu(\tilde{\cdot})|\cdot|_p^s$ tatsächlich ein Charakter ist. Betrachten wir nun einen beliebigen Charakter χ und definieren μ als die Einschränkung von χ auf $\mathcal{O}_p^\times$. Da die Untergruppe $\mathcal{O}_p^\times$ kompakt und μ eine stetige Abbildung nach $\mathbb{C}^\times$ ist, muss $\mu(\mathcal{O}_p^\times)$ eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ sein und ist damit in S^1 enthalten. Folglich ist μ ein unitärter Charakter auf $\mathcal{O}_p^\times$. Damit definiert der stetige Homomorphismus $x \mapsto \chi(x)\mu(\tilde{x})^{-1}$ einen unverzweigten Charakter auf $\mathbb{Q}_p^\times$, hat also nach vorherigem Lemma die Form $\chi(x)\mu(\tilde{x})^{-1} = |x|_p^s$ für ein $s \in \mathbb{C}$. Der Satz folgt sofort. □

Aus $\left|\mu(\tilde{x})|x|_p^s\right| = |x|_p^\sigma$ folgt, dass der Realteil $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ eindeutig bestimmt ist. Er wird auch *Exponent* des Charakters χ genannt.

Wir definieren nun das lokale Analogon zur Mellin-Transformation,dh. eine multiplikative Variante der Fourier-Transformation.

Definition 4.16. Für jede lokale Schwartz-Bruhat Funktion $f \in S(\mathbb{Q}_p)$ und multiplikativen Quasi-Charakter χ mit Exponenten $\sigma > 0$ sei

$$Z_p(f, \chi) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\chi(x)dx_p$$

eine *lokale Zeta-Funktion* auf $\mathbb{Q}_p$.

Fixieren wir einen multiplikativen Charakter μ auf $\mathcal{O}_p^\times$, so können wir $Z(f, \mu|\cdot|_p^s)$ als eine Funktion in der komplexen Variable s ansehen.

Bevor wir gleich zum ersten großen Ergebnis aus Tates Doktorarbeit kommen, definieren wir für jeden Quasi-Charakter χ noch mittels

$$\check{\chi}(x) = \frac{|x|_p}{\chi(x)},$$

das *verschobene Dual* des Charakters. Damit etablieren wir nun:

Satz 4.17 (Lokale Funktionalgleichung). *Sei $f_p \in S(\mathbb{Q}_p)$ und $\chi = \mu|\cdot|_p^s$. Sei weiter $\sigma = Re(s)$ der Exponent von χ. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *$Z(f,\chi) = Z(f,\mu,s)$ ist holomorph und absolut konvergent für $\sigma > 0$*

(ii) *Auf dem Streifen $0 < \sigma < 1$ haben wir eine Funktionalgleichung*

$$Z(\hat{f},\check{\chi}) = \gamma(\chi, e_p, dx_p)Z(f,\chi),$$

wobei $\gamma(\chi,\psi,dx_p)$ unabhängig von f und meromorph als Funktion in s ist. Damit besitzt $Z(f,\chi)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$

Beweis. (i) Es reicht im Allgemeinen zu zeigen, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} |f|\cdot|x|_p^{\sigma}\frac{dx_p}{|x|_p} = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} |f|\cdot|x|_p^{\sigma-1}dx_p$$

endlich ist, denn dx_p ist ein konstantes Vielfaches von dx_p.

Sei zunächst $p=\infty$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und setzen $K = [-\varepsilon,\varepsilon]$. Nun teilen wir das Integral auf in

$$\int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} |f|\cdot|x|_p^{\sigma-1}dx_p = \int_{K\setminus\{0\}} |f|\cdot|x|_p^{\sigma-1}dx_p + \int_{\mathbb{Q}_p\setminus K} |f|\cdot|x|_p^{\sigma-1}dx_p.$$

Nun ist f stetig und damit beschränkt auf K. Für den ersten Summanden müssen wir also nur die Integrierbarkeit von $|x|_p^{\sigma-1}$ nahe 0 überprüfen. Aus der Analysis folgt diese für $\sigma - 1 > -1$, also umgeformt $\sigma > 0$. Im zweiten Summanden können wir den Integranden geeignet abschätzen. Da f eine Schwartz Funktion ist, haben wir zum Beispiel $|f(x)|_p \leq \frac{C}{|x|_p^n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1+\sigma$ und C eine positive reelle Zahl ist. Einsetzen in den Summanden ergibt

$$\int_{\mathbb{Q}_p\setminus K} |f|\cdot|x|_p^{\sigma-1}dx_p \leq C\cdot\int_{\mathbb{Q}_p\setminus K}\frac{|x|_p^{\sigma-1}}{|x|_p^n}dx_p \leq C\cdot\int_{\mathbb{Q}_p\setminus K}\frac{1}{|x|_p^2}dx_p < \infty.$$

Es folgt die absolute Konvergenz.

Kommen wir zum endlichen Fall. Die lokale Schwartz-Bruhat Funktion ist dann eine Linearkombination von Funktionen der Form $f = \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$. Es reicht also nur solche zu betrachten. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} |f|\cdot|x|_p^{\sigma-1}dx_p &= \int_{a+p^n\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^{\sigma-1}dx_p = \int_{p^n\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x-a|_p^{\sigma-1}dx_p \\ &\leq \int_{p^n\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^{\sigma}\frac{dx_p}{|x|_p} + |a|_p^{\sigma-1}\mathrm{Vol}(p^n\mathbb{Z}_p, dx_p),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die (normale) Dreiecksungleichung verwendet haben. Der zweite Summand ist endlich, da $p^n\mathbb{Z}_p$ kompakt ist. Schauen wir uns also den ersten Summanden an. Wir nutzen nun einen kleinen Trick. Der Betrag ist konstant auf den Kreislinien $p^k\mathbb{Z}_p^\times$. Zudem hatten hatten mit $\mathbb{Q}_p\setminus\{0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} p^k\mathbb{Z}_p^\times$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{Q}_p^\times$ in genau diese Kreislinien. Übertragen wir den Gedanken nun auf das Integral erhalten wir

$$\int_{p^n\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^{\sigma}\frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^{\infty}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}|x|_p^{\sigma}\frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^{\infty}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\left|p^k x\right|_p^{\sigma}\frac{dx_p}{|x|_p} = \sum_{k=n}^{\infty}p^{-k\sigma}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\frac{dx_p}{|x|_p}$$

Das Integral haben wir bereits bestimmt. Es ist gleich $\frac{p-1}{p}$. Übrig bleibt also nur eine geometrische Reihe, diese konvergiert aber gerade für $\sigma > 0$. Damit haben wir absolute Konvergenz im endlichen gezeigt und kommen nun zur Funktionalgleichung.

(ii) Wir folgen Tate und beweisen ein kleines Lemma.

Lemma 4.18. *Für alle Charaktere χ mit Exponenten $0 < \sigma < 1$ und beliebige Funktionen $f, g \in S(\mathbb{Q}_p)$ gilt:*

$$Z(f, \chi)Z(\hat{g}, \check{\chi}) = Z(\hat{f}, \check{\chi})Z(g, \chi)$$

Beweis. Nach (i) haben wir absolute Konvergenz der Integrale für Exponenten $\sigma > 0$. Zudem ist $\check{\chi} = |\cdot|_p \chi^{-1} = |\cdot|_p^{1-s}\mu^{-1}$, also haben wir in diesem Fall Konvergenz für $\sigma < 1$. Damit sind die obigen Zeta-Funktionen wohldefiniert auf dem Streifen den wir betrachten. Wir schreiben das Produkt als Doppelintegral über $\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$

$$\begin{aligned} Z(f, \chi)Z(\hat{g}, \check{\chi}) &= \iint\limits_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x)\chi(x)\hat{g}(y)\chi^{-1}(y)|y|_p d^\times(x, y) \\ &= \iint\limits_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x)\hat{g}(y)\chi(xy^{-1})|y|_p d^\times(x, y) \end{aligned}$$

Das Integral ist invariant unter der Translation $(x, y) \mapsto (x, xy)$ und wir erhalten

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} f(x)\hat{g}(xy)\chi(y^{-1})|xy|_p d^\times(x, y).$$

Nach Fubini ist das wiederum gleich

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\hat{g}(xy) d^\times x \right) \chi(y^{-1})|y|_p d^\times y.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das innere Integral symmetrisch in f und g ist. Dazu erinnern wir uns, dass $d^\times x = c\frac{dx_p}{|x|_p}$ und nach der Definition der Fouriertransformation daher

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\hat{g}(xy) d^\times x = c \int_{\mathbb{Q}_p} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)g(z)e_p(-xyz)dzdx_p = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} g(z)\hat{f}(zy)d^\times z,$$

wobei wieder Fubini das Vertauschen der Reihenfolge bei der Integration erlaubt. □

Damit sind wir auch schon fast fertig. Wir versprechen nun die Existenz geeigneter Funktionen $g \in S(\mathbb{Q}_p)$, so dass der Ausdruck

$$\gamma(\chi, e_p, dx_p) := \frac{Z(\hat{g}, \check{\chi})}{Z(g, \chi)}.$$

wohldefiniert ist. Aus dem gerade bewiesenen Lemma folgt, dass dieser Quotient unabhängig von der Wahl von g ist. Zu guter Letzt erhalten wir die lokale Funktionalgleichung

$$Z(\hat{f}, \check{\chi}) = \gamma(\chi, e_p, dx_p)Z(f, \chi).$$

□

4.4 Lokale Berechnungen

In diesem Abschnitt kommen wir dem Versprechen des letzten Beweises nach und werden nicht nur die Funktionen angeben, sondern auch die γ-Faktoren explizit berechnen. Die Berechnungen werden sich in die Fälle $p = \infty$ und $p < \infty$ und dort jeweils in χ verzweigt und χ unverzweigt aufteilen. Wir möchten hier noch besonders die unverzweigten Berechnungen hervorheben, da sie hoffentlich einen Bezug zum eigentlichen Ziel dieser Arbeit erahnen lassen.

4.4.1 Der Fall $p = \infty$

Wir betrachten zuerst die Klasse $\chi = |\cdot|_\infty^s$ und nehmen die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f(x) = e^{-\pi x^2}.$$

Wir behaupten, dass f ihre eigene Fouriertransformierte ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} e_\infty(-x\xi) dx_p = \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x\xi} dx_p \\ &= \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi(x^2 - 2ix\xi - \xi^2)} e^{-\pi\xi^2} dx_p = f(\xi) \int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi(x - i\xi)^2} dx_p.\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass das Integral gleich 1 ist. Dazu nutzen wir das bekannte Integral $\int_{\mathbb{Q}_\infty} e^{-\pi x^2} dx_p = 1$ und etwas Kontourintegration. Sei γ das Rechteck von $-r$ nach r auf der reellen Achse, dann runter zu $r - i\xi$, horizontal zu $-r - i\xi$ und wieder zurück zu $-r$. Da f eine ganze Funktion ist, gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Die Integrale an der linken und rechten Seite des Rechtecks konvergieren gegen 0 wenn r anwächst, denn für $z = \pm r - iy$ und $0 \leq y \leq \xi$ gilt

$$|f(z)| = \left| e^{-\pi(\pm r - iy)^2} \right| = e^{-\pi(r^2 - y^2)}$$

und wir haben die Abschätzung

$$\left| \int_{\pm r}^{\pm r - i\xi} f(z)dz \right| = \left| \int_0^\xi f(\pm r - iy)dy \right| \leq e^{-\pi r^2} \int_0^\xi e^{\pi y^2} dy \xrightarrow{r \to \infty} 0.$$

Folglich muss schon $\int_{\mathbb{Q}_\infty} f(x - i\xi)dx_p = \int_{\mathbb{Q}_\infty} f(x)dx_p = 1$ gelten und wir sind fertig mit der Fouriertransformation.

Nun zu den Zeta-Funktionen:

$$Z(f, \chi) = Z(f, |\cdot|_\infty^s) = \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x)|x|_p^s d^\times x_p = \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x^2} |x|_\infty^s d^\times x_p = 2\int_0^\infty e^{-\pi x^2} x^{s-1} dx_p$$

Wir benutzen den Trafo $u = \pi x^2 \Rightarrow du = 2\pi^{1/2}u^{1/2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}Z(f, \chi) &= \int_0^\infty e^{-u}(u\pi^{-1})^{\frac{s-1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\end{aligned}$$

Mit dem gleichen Argumentation rechnen wir auch

$$Z(\hat{f}, \check{\chi}) = Z(f, |\cdot|_\infty^{1-s}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right).$$

Jetzt können wir endlich den versprochenen Faktor

$$\gamma(|\cdot|_\infty^s, e_\infty, dx_p) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

angeben und sehen, dass dieser auf dem Streifen $0 < \sigma < 1$ als Quotient holomorpher Funktionen meromorph ist.

Nun zur zweiten und auch schon letzten Klasse $\chi = \operatorname{sgn}|\cdot|_\infty^s$ von multiplikativen Charakteren auf $\mathbb{Q}_\infty$. Wir wählen die Funktion

$$f_\pm(x) = xe^{-\pi x^2} \in S(\mathbb{Q}_\infty)$$

und bemerken zunächst die Beziehung $f_\pm(x) = (-2\pi)^{-1} f'(x)$. Damit können wir die Fouriertransformation schnell aus einem Ergebnis der klassischen Fourieranalysis gewinnen. Denn wir haben

$$\begin{aligned}
\hat{f}_\pm(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\pm(x) e_\infty(-x\xi) dx_p = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi)^{-1} f'(x) e_\infty(-x\xi) dx_p \\
&= \Big[(-2\pi^{-1} f(x) e_\infty(-x\xi)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi^{-1} f(x) \cdot (-2\pi i\xi) e_\infty(-x\xi) dx_p \\
&= 0 - i\xi \hat{f}(\xi) = -i\xi f(\xi) = -i f_\pm(\xi).
\end{aligned}$$

Wir berechnen die Zeta-Funktionen

$$\begin{aligned}
Z(f_\pm, \chi) = Z(f, \mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^s) &= \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f_\pm(x) \mathrm{sgn}(x) |x|_\infty^s d^\times x_p \\
&= \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} x f(x) \mathrm{sgn}(x) |x|_\infty^s d^\times x_p = \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x) |x|_\infty^{s+1} d^\times x_p \\
&= Z(f, |\cdot|_\infty^{s+1}) = \pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

und mit $\check{\chi} = \mathrm{sgn}^{-1}|\cdot|_\infty^{1-s} = \mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^{1-s}$

$$\begin{aligned}
Z(\hat{f}_\pm, \chi) = Z(-if_\pm, \mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^{1-s}) &= -i \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f_\pm(x) \mathrm{sgn}(x) |x|_\infty^{1-s} d^\times x_p \\
&= -i \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} x f(x) \mathrm{sgn}(x) |x|_\infty^{1-s} d^\times x_p = -i \int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} f(x) |x|_\infty^{2-s} d^\times x_p \\
&= -iZ(f, |\cdot|_\infty^{2-s}) = -i\pi^{-\frac{2-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir den Faktor

$$\gamma(\mathrm{sgn}|\cdot|_\infty^s, e_\infty, dx_p) = i \frac{\pi^{-\frac{2-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}$$

der nach der gleichen Begründung wie oben meromorph ist.

4.4.2 Der Fall $p < \infty$

Wir beginnen wieder mit dem unverzweigten Fall $\chi = |\cdot|_p$ und definieren unsere Schwartz-Bruhat Funktion

$$f_0(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x).$$

Wie auch schon im archimedischen Fall werden wir feststellen, dass f_0 ihre eigene Fouriertransformierte ist. Wir rechnen

$$\hat{f}_0(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f_0(x) e_p(-x\xi) dx_p = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-x\xi) dx_p.$$

Nun wissen wir, dass $\mathbb{Z}_p$ kompakt ist und der Charakter $e_p(-x\xi)$ genau dann trivial auf $x \in \mathbb{Z}_p$ wirkt, wenn auch $\xi \in \mathbb{Z}_p$. In diesem Fall entpricht das Integral nach Lemma 2.14 gerade dem Volumen von $\mathbb{Z}_p$ bezüglich dx_p. Ansonsten verschwindet es. Mit unserer Normierung des Haar-Maßes folgt dann

$$\hat{f}_0(\xi) = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(-x\xi) dx_p = \mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\xi) = f_0(\xi).$$

Für die Berechnungen der Zeta-Funktionen erinnern wir uns an die Beobachtung $\mathbb{Z}_p\backslash\{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} p^k\mathbb{Z}_p^\times$ als disjunkte Vereinigung.

$$\begin{aligned}
Z(f_0,\chi) = Z(f_0,|\cdot|_p^s) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_0(x)|x|_p^s d^\times x_p = \int_{\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}} |x|_p^s d^\times x_p \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times} |x|_p^s d^\times x_p = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \left|p^k x\right|_p^s d^\times x_p \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} p^{-ks} d^\times x_p = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p^\times, d^\times x_p) = \frac{1}{1-p^{-s}}
\end{aligned}$$

und analog

$$Z(\hat{f}_0,\check{\chi}) = Z(f_0,|\cdot|_p^{1-s}) = \frac{1}{1-p^{s-1}}.$$

Der Faktor hat damit die Form

$$\gamma(|\cdot|_p^s, e_p, dx_p) = \frac{1-p^{-s}}{1-p^{s-1}}$$

und ist insbesondere somit holomorph im betrachteten Streifen.

Nun kommen wir zum verzweigten Fall $\chi = \mu|\cdot|_p^s$. Bevor wir allerdings mit den eigentliche Berechnungen anfangen, schauen wir uns den unitären Charakter $\mu : \mathbb{Z}_p^\times \to S^1$ etwas genauer an. Wählen wir eine offene Umgebung U der $1 \in S^1$, die nur die triviale Untergruppe enthält, so finden wir aufgrund der Stetigkeit von μ eine offene Umgebung V der $1 \in \mathbb{Z}_p^\times$ mit $\mu(V) \subseteq U$. Diese enthalten aber stets eine Untergruppe der Form $1+p^n\mathbb{Z}_p$. Da μ aber ein Gruppenhomomorphismus ist, muss diese Untergruppe bereits auf 1 abgebildet werden. Es gibt also für jeden Charakter $\chi = \mu|\cdot|_p^s$ ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(1+p^n\mathbb{Z}_p) = 1$. Wir nennen dann p^n den *Konduktor von* χ. Analog lässt sich auch der Konduktor eines additiven Charakters definieren. Mit Hilfe des Konduktors p^n definieren wir nun die Schwartz-Bruhat Funktion

$$f_n(x) = e_p(x)\mathbb{1}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(x).$$

Die Berechnung der Fouriertransformation erfolgt ähnlich zum unverzweigten Fall:

$$\hat{f}_n(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f_n(x)e_p(-x\xi)dx_p = \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} e_p\left(x(1-\xi)\right)dx_p$$

Der Charakter $\psi(x) = e_p(x(1-\xi))$ wirkt genau dann trivial auf $p^{-n}\mathbb{Z}_p$, wenn $1-\xi \in p^n\mathbb{Z}_p$, oder äquivalent $\xi \in 1+p^n\mathbb{Z}_p$. Es folgt

$$\hat{f}_n(\xi) = \mathrm{Vol}(p^{-n}\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{1+p^n\mathbb{Z}_p}(\xi) = p^n\mathbb{1}_{1+p^n\mathbb{Z}_p}(\xi).$$

Weiter zur Zeta-Funktion:

$$\begin{aligned}
Z(f_n,\chi) = Z(f_n,\mu|\cdot|_p^s) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_n(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s d^\times x_p = \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}} e_p(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s d^\times x_p \\
&= \sum_{k=-n}^{\infty}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times} e_p(x)\mu(\tilde{x})|x|_p^s d^\times x_p = \sum_{k=-n}^{\infty}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} e_p(p^k x)\mu(\widetilde{p^k x})\left|p^k x\right|_p^s d^\times x_p \\
&= \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} e_p(p^k x)\mu(x)d^\times x_p.
\end{aligned}$$

Ein Integral der Form $g(\omega, \lambda) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)\lambda(x)d^\times x_p$ mit multiplikativen Charakter $\omega : \mathbb{Z}_p^\times \to S^1$ und additiven Charakter $\lambda : \mathbb{Z}_p \to S^1$ wird *Gauß-Summe* genannt. Mit $e_{p,k}(x) = e_p(p^k x)$ haben wir dann

$$Z(f_n, \chi) = \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks} g(\mu, e_{p,k}). \tag{4}$$

Für die weitere Berechnung beweisen wir ein kleines Lemma über Gauß-Summen. Weiter definieren wir im Folgenden $U_k = 1 + p^k\mathbb{Z}_p$ für $k \in \mathbb{N}$ und setzen $U_0 = \mathbb{Z}_p^\times$.

Lemma 4.19. *Seien ω und λ wie oben. Seien weiter p^n und p^r die Konduktoren von ω bzw. λ. Es gelten folgende Aussagen:*

(i) *Wenn $n > r$, dann $g(\omega, \lambda) = 0$.*

(ii) *Wenn $n = r$, dann*

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c\, Vol(\mathbb{Z}_p, dx_p)\, Vol(U_n, dx_p)$$

(iii) *Wenn $n < r$, dann*

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c\, Vol(\mathbb{Z}_p, dx_p) \Big[Vol(U_n, dx_p) - p^{-1}\, Vol(U_{r-1} dx_p) \Big]$$

Beweis. Eine Kleinigkeiten vorneweg: r und n sind nicht-negative ganze Zahlen, da wir nur Charaktere auf $\mathbb{Z}_p$ bzw. $\mathbb{Z}_p^\times$ betrachten. Für (i) zerlegen wir $\mathbb{Z}_p^\times$ in Nebenklassen, die von $U_r = 1 + p^r\mathbb{Z}_p$ erzeugt werden. Diese haben mit $R = \{x \in \{1, \ldots, p^r - 1\} : x \not\equiv 0 \pmod p\}$ ein endliches Repräsentantensystem. Für ein $a \in R$ können wir die zugehörige Nebenklassen schreiben als aU_r. Insbesondere haben deren Elemente die Form $a(1 + p^r b)$. Wir erhalten $\lambda(a(1 + p^r b)) = \lambda(a)\lambda(p^r ab) = \lambda(a)$ nach der Definition des Konduktors. Daher

$$g(\omega, \lambda) = \sum_{aU_r} \int_{aU_r} \omega(x)\lambda(x)d^\times x_p = \sum_{aU_r} \omega(a)\lambda(a) \int_{U_r} \omega(x)dx_p.$$

Da aber $n > r$ wirkt ω nicht trivial auf U_r und somit verschwindet das Integral.

Weiter zur Aussage (ii) und (iii): Sei also $n \leq r$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} |g(\omega, \lambda)|^2 &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)\lambda(x)d^\times x_p \cdot \overline{\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)\lambda(x)d^\times x_p} \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(xy^{-1})\lambda(x - y)d^\times x_p d^\times y_p \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)h(x)d^\times x_p \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt zum einen die Translation $x \mapsto xy$ und zum anderen die Funktion

$$h(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(xy - y))d^\times y_p = c \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(y(x-1)) \frac{dy_p}{|y|_p} = c \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \lambda(y(x-1))dy_p$$

eingeführt haben. Wegen $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$ können wir das Integral weiter aufspalten.

$$h(x) = c \int_{\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x-1))dy_p = c \int_{\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x-1))dy_p - c \int_{p\mathbb{Z}_p} \lambda(y(x-1))dy_p.$$

Nun haben wir wieder den Fall von Lemma 2.14. $y \mapsto \lambda(y(x-1))$ ist trivial auf $\mathbb{Z}_p$ genau dann wenn $x - 1 \in p^r\mathbb{Z}_p$, d.h. wenn $x \in U_r$. Ähnlich verhält es sich mit $y \mapsto \lambda(y(x-1))$ auf $p\mathbb{Z}_p$, wobei dieser genau dann trivial ist, wenn $x \in U_{r-1}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} h(x) =& c\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_r} - c\mathrm{Vol}(p\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_{r-1}} \\ =& c\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_r} - cp^{-1}\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathbb{1}_{U_{r-1}} \end{aligned}$$

Einfügen in $|g(\omega, \lambda)|^2$ ergibt dann

$$\begin{aligned} |g(\omega, \lambda)|^2 &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega(x)h(x)d^\times x_p \\ &= c\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\int_{U_r} \omega(x)d^\times x_p - cp^{-1}\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\int_{U_{r-1}} \omega(x)d^\times x_p. \end{aligned}$$

Im Fall (ii) haben wir $n = r$. Damit ist der erste Integrand trivial, der zweite jedoch nicht. Folglich verschwindet das zweite Integral. Wir haben

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathrm{Vol}(U_n, dx_p)$$

und sind somit fertig. Im Fall (iii) ist $n < r$. Beide Integranden sind trivial und es folgt mit

$$|g(\omega, \lambda)|^2 = c\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathrm{Vol}(U_r, d^\times x_p) - cp^{-1}\mathrm{Vol}(\mathbb{Z}_p, dx_p)\mathrm{Vol}(U_{r-1}, d^\times x_p)$$

die Behauptung. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Zurück zur Berechnung der Zeta-Funktion. Der multiplikative Charakter μ hat den Konduktor p^n, während die additiven Charaktere $e_{p,k}(x) = e_p(p^k x)$ offensichtlich den Konduktor p^{-k} haben. Nach Lemma 4.19 (i) verschwinden in 4 fast alle Summanden und wir erhalten

$$Z(f_n, \chi) = \sum_{k=-n}^{\infty} p^{-ks}g(\mu, e_{p,k}) = p^{ns}g(\mu, e_{p,-n})$$

Die verbleibende Gauß-Summe konvergiert dann nach Aussage (ii) des Lemmas.

Für die Berechnung der zweiten Zeta-Funktion bemerken wir zunächst, dass $\mu^{-1} = 1/\mu = \overline{\mu}/(\mu\overline{\mu}) = \overline{\mu}$ den gleichen Konduktor wie μ hat.

$$\begin{aligned} Z(\hat{f}_n, \check{\chi}) = Z(\hat{f}_n, \overline{\mu}|\cdot|_p^{1-s}) &= p^n \int_{1+p^n\mathbb{Z}_p} \overline{\mu}(\tilde{x})|x|_p^{1-s}d^\times x_p \\ &= p^n \int_{1+p^n\mathbb{Z}_p} d^\times x_p = p^n c \int_{p^n\mathbb{Z}_p} dx_p = c. \end{aligned}$$

Zu guter Letzt der erhalten wir den holomorphen Faktor

$$\gamma(\mu|\cdot|_p^s, e_p, dx_p) = \frac{c}{p^{ns}g(\mu, e_{p,-n})} = \frac{cp^{-ns}\overline{g(\mu, e_{p,-n})}}{c^2p^{-n}} = c^{-1}p^{n(1-s)}\overline{g(\mu, e_{p,-n})}$$

5 Eingeschränkte direkte Produkt abstrakter Gruppen

Ziel dieses Kapitels ist es, die nötigen Grundlagen zu schaffen um alle bisherigen lokalen fourieranalytischen Berechnung in einer einzigen globalen fourieranalytischen Berechnung zu vereinen. Wir werden erklären, warum der Ansatz über das direkte Produkt schiefgeht und führen dann das eingeschränkte direkte Produkt mit der dazugehörigen eingeschränkten Produkttopologie ein. Anschließend schauen wir uns die Besonderheiten der Charaktere und der Integration auf diesem neuen Produkt an. Wir halten uns dabei an Ramakrishnans und Valenzas Definitionen in [2], die sich wiederum an denen aus Tates Doktorarbeit [7] orientieren. Für eine etwas alternative, etwas strengere Definition siehe zum Beispiel Deitmar [1]

5.1 Definitionen

Beginnen wir mit einer (endlichen, abzählbaren, überabzählbaren) Indexmenge I und zu jedem $\nu \in I$ haben wir eine lokalkompakte Gruppen G_ν. Gesucht ist zunächst ein Objekt G, welches alle G_ν umfasst und auf dem wir Fourieranalysis betreiben können. G sollte also eine lokalkompakte Gruppe sein. Ein erster Ansatz wäre natürlich das direkte Produkt der Gruppen G_ν zu bilden, allerdings zeigt folgendes Lemma, dass dieser Versuch im allgemeinen Fall fehlschlagen wird.

Lemma 5.1. *Sei I eine Indexmenge und X_ν ein lokalkompakter Hausdorff-Raum für alle $\nu \in I$. Der Raum $X := \prod_{\nu \in I} X_\nu$ ist genau dann lokalkompakt, wenn fast alle X_ν kompakt sind.*

Bevor wir den Beweis nach Deitmar [1] geben noch eine kurze Beobachtung: Ist X kompakt, so ist auch jedes X_ν kompakt als Bild von X unter den stetigen Projektionen $\pi_\nu : X \to X_\nu$.

Beweis. Sei $E \subseteq I$ eine endliche Teilmenge und für jedes $\nu \in E$ sei $U_\nu \in X_\nu$ eine offene Menge. Wir betrachten die offenen Rechtecke

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} X_\nu,$$

welche eine Basis der Produkttopologie bilden. Ist X lokalkompakt, so gibt es ein offenes Rechteck, dessen Abschluß kompakt ist. Folglich sind fast alle X_ν kompakt. Die Rückrichtung ist eine Folgerung des Satzes von Tychonov, der besagt, dass das direkte Produkt beliebiger Familien kompakter Mengen wieder kompakt ist, und der Tatsache, dass endliche Produkte lokalkompakter Räume wieder lokalkompakt sind (vgl. Lemma 2.5). $\square$

Das direkte Produkt lokalkompakter Gruppen liefert uns daher im Allgemeinen keine neue lokalkompakte Gruppe. Wir sehen jetzt aber, welche Einschränkung nötig ist, damit wir doch lokalkompakt werden.

Definition 5.2 (Eingeschränkte direkte Produkt)**.** Sei $I = \{v\}$ eine Indexmenge und für jedes $v \in I$ sei G_v eine lokalkompakte Gruppe. Sei weiter $I_\infty \subseteq I$ eine endliche Teilmenge von I und für jedes $v \notin I_\infty$ sei $H_v \leq G_v$ eine kompakte offene (und damit abgeschlossene) Untergruppe. Das *eingeschränkte direkte Produkt* der G_v bezüglich H_v ist definiert als

$$G = \prod_{v \in I}{}' G_v := \{(x_v) : x_v \in G_v \text{ und } x_v \in H_v \text{ für alle bis auf endlich viele } v\}.$$

mit komponentenweiser Verknüpfung. Die Topologie auf G ist gegeben durch die *eingeschränkte Produktopologie.* Diese wird erzeugt durch die Basis der *eingeschränkten offenen*

Rechtecke

$$\prod_{\nu \in E} U_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus E} H_\nu,$$

wobei $E \subset I$ eine endliche Teilmenge mit $I_\infty \subset E$ und $U_\nu \in G_\nu$ offen für alle $\nu \in E$ ist.

G ist damit (gruppentheoretisch) zwischen der direkten Summe und dem direkten Produkt der Komponenten G_ν anzusiedeln. Topologisch entspricht die eingeschränkte Produkttopologie jedoch nicht der vom direkten Produkt induzierten Teilraumtopologie. Sie ist im Allgemeinen feiner, was zur Folge hat, dass die *Projektion*

$$\begin{aligned} \pi_\nu : G &\to G_\nu \\ g &\mapsto g_\nu \end{aligned}$$

auf die ν-te Komponenten von G eine stetige Abbildungen ist.

Schauen wir uns einige Untergruppen des eingeschränkten direkten Produkts an. Die Gruppen G_ν können über die stetige *Inklusion*

$$\begin{aligned} \iota_\nu : G_\nu &\to G \\ g &\mapsto (\dots, 1, g, 1, \dots) \end{aligned}$$

auf natürliche Weise in G eingebettet werden und bilden damit eine Familie von abgeschlossenen Untergruppen.

Sei S eine endliche Teilmenge von I, die I_∞ enthält. Wir definieren die offene Untergruppe

$$G_S := \prod_{\nu \in S} G_\nu \times \prod_{\nu \in I \setminus S} H_\nu$$

von G. Bezüglich der Produkttopologie sind diese G_S nach Lemma 2.2 und Lemma 5.1 selbst wieder lokalkompakte Gruppen. Die Produkttopologie stimmt aber mit der durch G induzierten Teilraumtopologie überein und die G_S bilden eine Familie von lokalkompakten Untergruppen in G Nun liegt jeder Punkt $x \in G$ in einer Untergruppe dieser Form und daher folgt sofort, dass G selbst eine lokalkompakte Gruppe ist. Damit haben wir einen geeignet Kandidaten gefunden, der uns hoffentlich die globale Kalkulation ermöglicht.

Zum Abschluss dieser Untersektion richten wir unseren Blick auf die kompakten Mengen des eingeschränkten direkten Produkts.

Satz 5.3. *Eine Teilmenge Y von G hat genau dann kompakten Abschluss, wenn $Y \subseteq \prod K_\nu$ für eine Familie von kompakten Teilmengen $K_\nu \subseteq G_\nu$ mit $K_\nu = H_\nu$ für fast alle Indizes i.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, denn jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist wieder kompakt.

Für die Hinrichtung sei nun K der Abschluss von Y und kompakt in G. Da die Untergruppen G_S eine offene Überdeckung von G bilden, gibt es eine endliche Familie $\{G_{S_n}\}$, die K überdecken. Wir können sogar noch mehr sagen. Da die die S_k endlich sind, ist $S = \bigcup S_k$ endlich, also wird K sogar von nur einem G_S überdeckt. Sei K_ν das Bild von K der natürlichen Einbettung nach G_ν. Da die Topologie auf G_S gerade der Produkttopologie entspricht und $K \subseteq G_S$ ist diese Abbildung stetig und K_ν damit kompakt als stetiges Bild einer kompakten Menge. Außerdem ist $K_\nu \subseteq H_\nu$ für alle $i \notin S$, sodass wir hier K_ν durch die kompakten H_ν ersetzen können. Dann ist $Y \subseteq K \subseteq \prod K_\nu$ und wir sind fertig. □

Korollar 5.4. *Jede kompakte Teilmenge K von G liegt in einer der Untergruppen G_S.*

5.2 (Quasi-)Charaktere

Machen wir uns einige Gedanken über die (Quasi-)Charaktere auf dem eingeschränkten direkten Produkt. Jede stetige Abbildung f auf G induziert durch die Inklusion $\iota_\nu : G_\nu \to G$ eine stetige Abbildung $f_\nu = f \circ \iota_\nu$ auf der Komponente G_ν. Analog ist f_ν ein Homomorphismus auf G_ν, wenn f selbst ein Homomorphismus auf G ist. Damit lassen sich die Quasi-Charaktere auf G wie folgt charakterisieren.

Lemma 5.5. *Sei $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ ein (Quasi-)Charakter. Dann sind alle $\chi_\nu : G_\nu \to \mathbb{C}^\times$ (Quasi-)Charaktere und wirken fast alle trivial auf H_ν Folglich haben wir fast überall $\chi_\nu(g_\nu) = 1$ mit $g = (g_\nu) \in G$ und es gilt die Produktformel*

$$\chi(g) = \prod_\nu \chi_\nu(g_\nu).$$

Beweis. Das alle χ_ν (Quasi-)Charaktere sind folgt aus unseren Vorüberlegungen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass fast alle χ_ν trivial auf die Untergruppen H_ν wirken. Dazu wählen wir uns eine offene Umgebung V der 1 in $\mathbb{C}^\times$, die nur die triviale Untergruppe $\{1\}$ enthält. Aufgrund der Stetigkeit von χ finden wir eine offene Umgebung $U = \prod_\nu U_\nu$ der 1 in G mit $U_\nu = H_\nu$ für alle i außerhalb einer endlichen Indexmenge S und $\chi(U) \subseteq V$. Dann gilt aber

$$(\prod_{\nu \in S} 1) \times (\prod_{i \notin S} H_\nu) \subseteq U$$

und daher

$$\chi((\prod_{\nu \in S} 1) \times (\prod_{i \notin S} H_\nu)) \subseteq V$$

Die linke Seite ist aber als Bild einer Gruppe unter einem Homomorphismus selbst wieder eine Gruppe. Nach unserer Wahl von V folgt also

$$\chi((\prod_{\nu \in S} 1) \times (\prod_{i \notin S} H_\nu)) = \{1\}.$$

Folglich $\chi_\nu(H_\nu) = \{1\}$ für alle $i \notin S$. Damit ist aber klar, dass für jedes $g \in G$ das Produkt $\prod_\nu \chi_\nu(g_\nu)$ endlich ist und wegen $g = \prod_\nu \iota_\nu(g_\nu)$ genau $\chi(g)$ entspricht. □

Wir können das Lemma aber auch umdrehen und Quasi-Charaktere auf G durch solche auf G_ν konstruieren.

Lemma 5.6. *Seien $\chi_\nu : G_\nu \to \mathbb{C}^\times$ (Quasi-)Charaktere und nehmen wir an, dass fast alle trivial auf H_ν wirken. Dann ist*

$$\chi(g) = \prod_\nu \chi_\nu(g_\nu)$$

ein (Quasi-)Charakter auf G.

Beweis. Das Produkt χ ist sicherlich wohldefiniert und bildet ein Gruppenhomomorphismus auf G. Es bleibt noch zu zeigen, dass χ stetig ist. Da G und $\mathbb{C}^\times$ topologische Gruppen sind, genügt es sich offene Umgebungen der 1 anzuschauen. Sei daher U eine offene Umgebung der $1 \in \mathbb{C}^\times$. Sei S die endliche Menge aller Indizes, so dass χ_ν nicht trivial auf H_ν wirkt, und setze $n = |S|$. Wir finden eine weitere Umgebung W der 1 in $\mathbb{C}^\times$, so dass das Produkt von n beliebigen Elementen aus W wieder in U liegt. Da die χ_ν stetig sind, finden wir offene Umgebungen V_ν der $1 \in G_\nu$ mit $\chi_\nu(V_\nu) \subseteq W$. Für $\nu \in S$ können wir ohne Probleme $V_\nu = H_\nu$ setzen. Dann ist $V = \prod_\nu V_\nu$ eine offene Umgebung der $1 \in G$ und für jedes $g \in V$ ist $\chi(g)$ das endliche Produkt von n Faktoren aus W, also $\chi(g) \in V$. □

5.3 Integration

Wie wir gesehen haben ist $G = \prod'_{\nu \in I} G_\nu$ eine lokalkompakte Gruppe, besitzt also nach Satz 2.10 ein Haar-Maß. Dieses möchten wir abhängig von den lokalen Maßen normalisieren.

Satz 5.7. *Sei $G = \prod'_{\nu \in I} G_\nu$ das eingeschränkte direkte Produkt einer Familie lokalkompakter Gruppen G_ν bezüglich der kompakten Untergruppen $H_\nu \subseteq G_\nu$. Bezeichne dg_ν das Haar-Maß auf G_ν mit der Normalisierung*

$$Vol(H_\nu, dg_\nu) = \int_{H_\nu} dg_\nu = 1$$

für fast alle ν. Dann gibt es ein eindeutiges Haar-Maß dg auf G, so dass für jede endliche Teilmenge $S \supseteq I_\infty$ der Indexmenge I die Einschränkung dg_S von dg auf G_S genau das Produktmaß ist.

Beweis. Die im Satz angesprochene Normalisierung der dg_ν ist möglich, da per Definition die Untergruppen H_ν offen und kompakt sind und daher positives und endliches Maß haben.

Sei S nun eine beliebige Menge wie im Satz beschrieben und definiere dg_S als das Produktmaß $dg_S := (\prod_{s \in S} dg_\nu) \times dg^S$, wobei dg^S das Haar-Maß auf der kompakten Gruppe $G^S := \prod_{i \notin S} H_\nu$, sodass $\mathrm{Vol}(G^S, dg^S) = 1$. Für die Existenz von dg^S siehe zum Beispiel Folland [3] Kapitel 7, Satz 7.28. Als endliches Produkt von Haar-Maßen ist dg_S selbst wieder Haar-Maß und wir können das Maß dg auf G so normieren, dass dessen Einschränkung auf G_S mit dg_S übereinstimmt. Damit haben wir eine Normierung, zunächst noch abhängig von unserer Wahl der Indexmenge S. Das macht allerdings nichts. Denn sei $T \supseteq S$ eine weitere endliche Indexmenge. Per Definition ist G_S eine Untergruppe von G_T. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass die Einschränkung von dg^T auf G^S mit dg^S übereinstimmt. Man erkennt, dass $G^S = \left(\prod_{\nu \in T \setminus S} H_\nu\right) \times G^T$. Daher bildet $\left(\prod_{\nu \in T \setminus S} dg_\nu\right) \times dg^T$ ein Haar-Maß, welches der kompakten Gruppe G_S das oben geforderte Maß 1 zuweist. Aus der Eindeutigkeit des Haar-Maßes auf (lokal)kompakten Gruppen folgt somit die Gleichheit zu dg^S. Sei nun S' eine beliebige weitere Indexmenge, die I_∞ enthält. Das normierte Maß dg wird auf $G_{S \cup S'}$ eingeschränkt zu einem Maß, welches ein konstantes Vielfaches von $dg_{S \cup S'}$ ist. Da aber $G_S \subseteq G_{S \cup S'}$ muss diese Konstante 1 sein, denn nach obigen Überlegungen ist die Einschränkung von $dg_{S \cup S'}$ auf G_S gerade dg_S. Umgekehrt ist aber $dg_{S'}$ die die Einschränkung von $dg_{S \cup S'}$ auf $G_{S'}$, also ist die Normalisierung unabhängig von der Wahl unserer Indexmenge S. □

Als nächstes lernen wir, wie man einfache Funktionen auf G bezüglich dg integriert.

Satz 5.8. *Sei G das eingeschränkte direkte Produkt mit dem induzierten Maß dg*

(i) *Sei $f \in L(G)$ eine integrierbare Funktion auf G. Dann gilt*

$$\int_G f(g) dg = \lim_S \int_{G_S} f(g_S) dg_S,$$

Nehmen wir nur an, dass f stetig ist, so gilt diese formale Identität immer noch, wenn wir den unendliche Werte erlauben.

(ii) *Sei S_0 ein beliebige endliche Indexmenge, die I_∞ und alle ν enthält, für die $Vol(H_\nu, dg_\nu) \neq 1$. Für jeden Index ν sei eine stetige Funktion f_ν auf G_ν, so dass $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ für alle $\nu \notin S_0$. Wir definieren nun für alle $g \in G$*

$$f(g) = \prod_\nu f_\nu(g_\nu).$$

Dann ist f wohldefiniert und stetig auf G. Ist S eine beliebige endliche Indexmenge, die S_0 enthählt, so haben wir

$$\int_{G_S} f(g_S)dg_S = \prod_{\nu\in S}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big). \tag{5}$$

Ist ferner das Produkt

$$\prod_{\nu\in S}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big)$$

sogar endlich, dann ist f insbesondere integrierbar und es gilt sogar

$$\int_G f(g)dg = \prod_{\nu\in S}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big).$$

Beweis. (i) Wir halten zünachst fest was überhaupt mit dem Ausdruck $\lim_S \phi(S) = \phi_0$ für eine Funktion ϕ auf den endlichen Indexmengen S mit Werten in einem abgeschlossenen topologischen Raum gemeint ist: Gegeben eine beliebige Umgebung V von ϕ_0, dann gibt es eine Indexmenge $S(V)$, sodass für alle weiteren Indexmengen $S \supseteq S(V)$ der Wert $\phi(S)$ in V liegt. Intuitiv ist also $\lim_S \phi(S)$ der Limes von $\phi(S)$ über größer und größere S.

Damit kommen wir zum Beweis der Aussage. Aus der Integrationstheorie (vgl. Folland [3] Kapitel 7 Korollar 7.13) ist bekannt, dass

$$\int_G f(g) = \sup_{K \text{ kompakt}} \left\{\int_K f(g)dg\right\}.$$

Da aber jedes solches K in einer der Mengen G_S liegt, folgt die Gleichung sofort.
(ii) Aus der Bedingung $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ folgt, dass das Produkt $f(g) = \prod_\nu f_\nu(g_\nu)$ für alle $g \in G$ endlich, und die Funktion damit wohldefiniert ist. Um die Stetigkeit zu zeigen schauen wir uns die offenen Umgebungen von g an. Als Basis haben wir die offenen Rechtecke $\prod N_\nu \times \prod H_\nu$, wobei in dem ersten endlichen Produkt die N_ν offene Umgebungen von g_ν sind. Dies bleibt auch eine Basis wenn wir zusätzlich noch verlangen, dass das erste Produkt auch die Indizes enthält, für die f_ν nicht trivial auf H_ν wirkt. Lokal betrachtet ist f also nicht weiter als das endliches Produkt stetiger Funktionen und daher selbst stetig.

Für den zweiten Teil der Behauptung sei S nun eine Indexmenge nach den Bedingungen von Teil (ii). Unter der Annahme $\mathrm{Vol}(H_\nu, dg_\nu) = 1$ haben wir auf G_S das Produktmaß auf $dg_S = (\prod_{s\in S} dg_\nu) \times dg^S$ und wegen $f_\nu|_{H_\nu} = 1$ für $\nu \notin S$ hat f dort die Form $\prod_{\nu\in S} f_\nu(g_\nu) \cdot \prod_{\nu\notin S} 1$. Es folgt

$$\int_{G_S} f(g_S)dg_S = \prod_{\nu\in S}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big) \cdot \int_{G^S} dg^S = \prod_{\nu\in S}\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big)$$

Nehmen wir nun an, dass das Produkt endlich ist. Dann gilt aber nach (i) und Gleichung 5

$$\prod_i\Big(\int_{G_\nu} f_\nu(g_\nu)dg_\nu\Big) = \lim_S \int_{G_S} f(g_S)dg_S = \int_G f(g)dg$$

und wir sind fertig. □

Damit haben wir die wichtigsten Grundlagen etabliert.

6 Adele und Idele

Für die lokalen Funktionalgleichungen haben wir im wesentlichen zwei Sachen benötigt. Zum einen die Fouriertransformation: ein Integral bezüglich des additiven Haar-Maßes, welches als Funktion auf den additiven Charakteren definiert war. Zum anderen die Zeta-Funktion, das multiplikative Gegenstück zur Fouriertransformation: eine Funktion auf den multiplikativen Quasi-Charakteren, definiert als Integral bezüglich des multiplikativen Maßes. Dieses Zusammenspiel von additiven und multiplikativen Strukturen ziehen wir in den nächsten zwei Sektionen in die globale Welt des eingeschränkten direkten Produkts und beginnen mit der Betrachtung zweier lokalkompakter Gruppen: die additiven Adele und die multiplikativen Idele.

6.1 Die Gruppe der Adele

Wir definieren die *Adelegruppe* $\mathbb{A}$ von $\mathbb{Q}$ als das eingeschränkte direkte Produkt über alle lokalkompakten Gruppen $\mathbb{Q}_p^+$ bezüglich der Untergruppen $\mathbb{Z}_p$, d.h.

$$\mathbb{A} = {\prod_{p\leq\infty}}' \mathbb{Q}_p^+ = \{(x_p) : x_p \in \mathbb{Q}_p^+ \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ für fast alle } p < \infty\}$$

und nennen ein Element $x \in \mathbb{A}$ dieser Gruppe ein *Adele*. Es gibt eine algebraische (aber nicht topologische) Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ x &\longmapsto (x, x, x, \dots) \end{aligned}$$

der rationalen Zahlen in die Adele. Diese ist tatsächlich wohldefiniert, denn für fast alle Stellen $p < \infty$ ist $|x|_p = 1$ und damit $x \in \mathbb{Z}_p$. Es wird also keine Verwirrung stiften, wenn wir (algebraisch) $\mathbb{Q}$ mit dieser Einbettung identifizieren. Wie sieht aber die Topologie dann aus?

Satz 6.1.

(a) $\mathbb{Q}$ *liegt diskret in* $\mathbb{A}$*.*

(b) $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ *ist kompakt.*

Beweis. Für (a) betrachten wir die offene Nullumgebung

$$U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p.$$

Ist nun $r \in \mathbb{Q} \cap U$, so gilt $|r|_p \leq 1$ für alle $p < \infty$, also $r \in \mathbb{Z}$. Nun ist aber $|r|_\infty < \frac{1}{2}$ und damit muss schon $r = 0$ gelten. Für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{Q}$ erhalten wir mit $x + U$ eine entsprechende offene Umgebung von x.

Für (b) zeigen wir, dass das Bild der Menge $K \coloneqq [0,1] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Q}_p$ unter der Projektion $\rho : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ schon ganz $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist. Dann ist $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ als stetiges Bild des Kompaktums K selber kompakt. Sei $x \in \mathbb{A}$ beliebig und S die endliche Stellenmenge $\{p : x_p \notin \mathbb{Z}_p\}$. Wählen wir ein $p \in S$, $p < \infty$ und schreiben

$$x_p = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k.$$

Dann ist

$$x_p - \underbrace{\sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k}_{=:r\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}_p$$

und für jede weitere endliche Stelle $q \neq p$ gilt

$$|r|_q = \left| \sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k \right|_q \leq \max \left\{ \left| a_k p^k \right|_q \right\} \leq 1,$$

also ist $r \in \mathbb{Z}_q$. Ersetzen wir nun x durch $x - r$, so reduziert sich die Stellenmenge S zu $S \setminus \{p\}$. Dieses Argument setzen wir induktiv bis $S = \{\infty\}$ fort und erhalten damit ein x, welches sich nur um eine Zahl aus $\mathbb{Q}$ von dem ursprünglichen Adel unterscheidet und selbst in $\mathbb{R} \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ liegt. Nun können wir aber noch x modulo $\mathbb{Z}$ nach $[0,1] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ verschieben und sind fertig. □

Satz 6.2 (Integration einfacher Funktionen)**.** *Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine einfache integrierbare Funktion auf den Adelen. Es gilt die Produktformel*

$$\int_{\mathbb{A}} f(x)dx = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p)dx_p$$

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus Satz 5.8, denn für einfache Funktionen ist nach unserer Normierung das Produkt auf der rechten Seite endlich. □

Die Gruppe der Adele erhält über die komponentenweise Multiplikation eine Ringstruktur. Diese ist nicht nullteilerfrei, denn zum Beispiel gilt für zwei verschiedene Stellen $p, q \leq \infty$, dass $\iota_p(1) \cdot \iota_q(1) = 0$. Zudem ist in $\mathbb{A}^\times$ versehen mit der Teilraumtopologie die Inversenbildung nicht stetig, folglich bildet $\mathbb{A}^\times$ bezüglich der Multiplikation keine topologische Gruppe. Um dieses Problem zu umgehen wiederholen wir in der nächsten Untersektion die Konstruktion, jedoch diesmal mit den multiplikativen Gruppen $\mathbb{Q}_p^\times$.

6.2 Die Gruppe der Idele

Analog zu den Adelen definieren wir die *Idelegruppe* $\mathbb{I}$ von $\mathbb{Q}$ als das eingeschränkte direkte Produkt über alle lokalkompakten Gruppen $\mathbb{Q}_p^\times$ bezüglich der Untergruppen $\mathbb{Z}_p^\times$, d.h.

$$\mathbb{I} = \prod_{p \leq \infty}{}' \mathbb{Q}_p^\times = \{(x_p) : x_p \in \mathbb{Q}_p^\times \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ für fast alle } p < \infty\}$$

und nennen ein Element $x \in \mathbb{I}$ dieser Gruppe ein *Idel*. Wieder gibt es die algebraische Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^\times &\longrightarrow \mathbb{I} \\ x &\longmapsto (x, x, x, \dots) \end{aligned}$$

der rationalen Einheiten in die Idele, denn wie bereits bei den Adelen gesehen haben, ist für fast jede Stelle $|x|_p = 1$ und somit $x \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Wir haben uns bereits zweimal die lokalen Beträge auf dem eigneschränkten direkten Produkt angeschaut. Die Definition der Idele erlaubt es uns diese miteinander zu einem globalen Absolutbetrag zu multiplizeren.

Definition 6.3. Wir definieren den *adelischen (globalen) Absolutbetrag* $|\cdot|_{\mathbb{A}} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}_+^\times$ durch das wohldefinierte Produkt

$$|x|_{\mathbb{A}} = \prod_{p \leq \infty} |x_p|_p$$

Der Begriff "Betragßollte hier vorsichtig behandelt werden, denn streng genommen ist $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ auf keinem Körper definiert. Das soll uns aber nicht weiter stören, denn mit ihm lassen sich Aussagen aus dem Lokalen in das Globale übertragen.

Lemma 6.4. *Für das additive Haar-Maß dx auf $\mathbb{A}$ und jedes Idel $\lambda \in \mathbb{I}$ gilt*

$$d(\lambda x) = |\lambda|_{\mathbb{A}} \cdot dx$$

Beweis. Der Beweis funktioniert analog zu und mit Satz 4.2 im Lokalen. Wir betrachten dazu die kompakte Menge $K = [0,1] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$. Dann sehen wir, dass $\lambda K = [0, \lambda_\infty] \times \prod_{p<\infty} \lambda_p \mathbb{Z}_p$ wieder kompakt ist (insbesondere sind fast alle Komponenten gleich $\mathbb{Z}_p$) und rechnen

$$\begin{aligned}\int_{\lambda K} dx &= \int_{[0,\lambda_\infty]} dx_\infty \cdot \prod_{p<\infty} \int_{\lambda_p \mathbb{Z}_p} dx_p \\ &= |\lambda_\infty|_\infty \int_{[0,1]} dx_\infty \cdot \prod_{p<\infty} |\lambda_p|_p \int_{\mathbb{Z}_p} dx_p = |\lambda|_{\mathbb{A}} \int_K dx,\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Gleichung Satz 4.2 benutzt haben. □

Halten wir eine weitere wichtige Aussage über diesen Betrag fest.

Satz 6.5 (Artins Produktformel)**.** *Für alle $x \in \mathbb{Q}^\times$ gilt $|x|_{\mathbb{A}} = 1$.*

Beweis. Aufgrund der Multiplikativität von $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ reicht es die Aussage für Primzahlen q zu zeigen. q hat aber an nur zwei Stellen nichttrivialen Betrag und daher

$$|q|_{\mathbb{A}} = |q|_\infty \cdot |q|_q = q \cdot q^{-1} = 1.$$

□

Analog zu $\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$ können wir auch auf den Idelen die Untergruppe

$$\mathbb{I}^1 = \{x \in \mathbb{I} : |x|_{\mathbb{A}} = 1\}$$

der *Betrag-Eins Idele* betrachten. Die obige Produktformel sagt uns gerade, dass $\mathbb{Q}^\times$ eine Teilmenge von $\mathbb{I}^1$ ist. Damit haben wir die nötigen Definitionen zusammen um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 6.6.

(a) $\mathbb{Q}^\times$ *liegt diskret in* $\mathbb{I}$.

(b) $F := \{1\} \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times$ *ist ein Fundamentalbereich der Gruppenwirkung von* $\mathbb{Q}^\times$ *auf* $\mathbb{I}^1$. *Genauer haben wir einen Isomorphismus topologischer Gruppen* $F \cong \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$.

(c) $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$ *ist kompakt.*

(d) *Der adelische Betrag* $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ *induziert einen Isomorphismus topologischer Gruppen* $\mathbb{I} \cong \mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$.

Beweis. Zu (a): Wir wählen ein beliebiges $0 < \epsilon < 1$ und setzen

$$U := (1-\epsilon, 1+\epsilon) \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times.$$

Dann ist U offensichtlich eine offene Umgebung der 1 in $\mathbb{I}$. Wir wollen nun zeigen, dass U keine weitere rationale Zahl enthält. Sei dazu $r \in \mathbb{Q}^\times \cap \mathbb{I}$. Das bedeutet, dass $r \in \mathbb{Z}_p^\times$, also $|r|_p = 1$, für alle Primzahlen $p < \infty$. Dann muss r aber schon eine ganze Zahl sein. Für diese gilt zudem $r \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Folglich ist $r = 1$.

Zu (b): Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}\eta : \quad F &\longrightarrow \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times \\ x &\longmapsto [x]\end{aligned}$$

und behaupten, dass dies ein Isomorphismus topologischer Gruppen ist. Zunächst sehen wir, dass η als Komposition von Inklusion in $\mathbb{I}^1$ und Projektion in den Quotienten wieder ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist. Zudem können wir direkt eine Umkehrabbildung angeben durch

$$\eta^{-1}: \quad \mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times \longrightarrow F$$
$$[x] \longmapsto x_\infty^{-1} \cdot x$$

Wir vergewissern uns, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Zum einen folgt aus $x \in \mathbb{I}^1$ schon, dass $x_\infty \in \mathbb{Q}^\times$, denn $|x_\infty|_\infty = (\prod_{p<\infty} |x_p|_p)^{-1} \in \mathbb{Q}^\times$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von x_∞ und $|x|_\mathbb{A} = 1$ muss dann schon $|x_p/x_\infty|_p = 1$ folgen. Also kann uns nur noch die Wahl des Repräsentanten Probleme machen. Wir stellen aber erfreut fest, dass $rx = (rx_p)$ abgebildet wird auf $((rx_\infty)^{-1} rx_p) = (x_\infty^{-1} x_p)$ für beliebige $r \in \mathbb{Q}^\times$. Des weiteren ist sie stetig, denn sie lässt sich schreiben als $\eta^{-1}(x) = \iota(\pi_\infty(x))^{-1} \cdot x$. Damit ist dann η also ein topologischer Isomorphismus.

Zu (c): Dies ist eine einfache Folgerung aus (b), da F als Produkt kompakter Untergruppen wieder kompakt ist.

Zu (d): Der Isomorphismus von $\mathbb{I}$ nach $\mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$ wird definiert durch die Abbildung $x \mapsto (\tilde{x}, |x|_\mathbb{A})$, wobei

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_p) = \begin{cases} x_p & \text{falls } p < \infty \\ \frac{x_\infty}{|x|_\mathbb{A}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um zu sehen, dass die Abbildung ein topologischer Gruppenhomomorphismus ist, schreiben wir sie als $x \mapsto (\iota_\infty(|x|_\mathbb{A})^{-1} \cdot x, |x|_\mathbb{A})$. Die Umkehrabbildung ist dann gegeben durch $(x, y) \mapsto \iota_\infty(y) \cdot x$, welche wiederum stetig ist und wir somit einen Isomorphismus topologischer Gruppen haben. □

7 Tates Beweis der Funktionalgleichung

Wir kommen nun zum Kernstück dieser Arbeit.

7.1 Globale Fourieranalysis

Um auch bei unserer Definition der Fouriertransformation im Globalen ein gutes Gewissen zu haben geben wir den Adelen einen Standardcharakter. Dieser wird definiert durch

$$e(x) = \prod_{p \leq \infty} e_p(x_p),$$

was, wie wir bereits in Lemma 5.5 gesehen haben, wohldefiniert ist. Der Standardcharakter verhält sich besonders schön auf $\mathbb{Q}$. Wir haben nämlich folgenden

Satz 7.1. *Der Standardcharakter $e : \mathbb{A} \to S^1$ wirkt trivial auf $\mathbb{Q}$.*

Bevor wir das aber beweisen können brauchen wir noch ein kleines Lemma aus der Zahlentheorie.

Lemma 7.2. *Jede rationale Zahl kann geschrieben werden als endliche Summe von Zahlen der Form $\pm\frac{1}{p^m}$.*

Beweis. Jedes $r = \pm a/b$ mit natürlichen Zahlen a und b kann zunächstmal als Summe von a Kopien von $\operatorname{sgn} r/b$ geschrieben werden. Es reicht also rationale Zahlen der Form $1/b$ zu betrachten. Sei $b = \prod_{k=1}^n p_k^{m_k}$ die Primfaktorzerlegung von b. Wir haben eine Bezoutdarstellung $1 = up_1^{m_1} + vp_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$ mit ganzen Zahlen u und v. Es zeigt sich

$$\frac{1}{b} = \frac{up_1^{m_1} + vp_2^{m_2} \dots p^{m_n}}{p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}} = \frac{u}{p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}} + \frac{v}{p_1^{m_1}}$$

Induktiv erhalten wir damit ganze Zahlen $u_1, \dots, u_n$, so dass

$$\frac{1}{b} = \frac{u_1}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{u_n}{p_n^{m_n}}$$

Mit dem gleichen Argument vom Anfang des Beweises ist jeder Summand wieder eine endliche Summe von $|u_k|$ Kopien von $1/p_k^{m_k}$ und es folgt das Lemma □

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis des Satzes.

Beweis von Satz 7.1. Da es sich um einen additiven Charakter handelt, erlaubt uns das obige Lemma uns auf rationale Zahlen der Form $1/p^m$ zu beschränken. Für jede endliche Stelle $q \neq p$ ist aber $1/p^m \in \mathbb{Z}_q$, also $e_q(1/p^m) = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} e\left(\frac{1}{p^m}\right) = \prod_{q \leq \infty} e_q\left(\frac{1}{p^m}\right) &= e_\infty\left(\frac{1}{p^m}\right) e_p\left(\frac{1}{p^m}\right) \\ &= \exp(-2\pi i p^{-m}) \exp(2\pi i p^{-m}) = 1 \end{aligned}$$

□

Schlag auf Schlag geht es weiter. Als nächstes wollen wir sicher stellen, dass die Definition eines Standardcharakters auf den Adelen überhaupt Sinn macht. Dazu zeigen wir das Ergebnis, was wir mit Satz 4.15 im Lokalen bewiesen haben, nun auch im Globalen.

Satz 7.3. *Ist $\psi : \mathbb{A} \to S^1$ ein Charakter, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Adel $a \in \mathbb{A}$ mit $\psi(x) = e(ax)$. Weiter ist wirkt e trivial auf $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Den Großteil der Arbeit haben wir bereits in Lemma 5.5 gemacht. Demnach ist $\psi(x) = \prod_{p\leq\infty} \psi_p(x_p)$, wobei $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to S^1$ ein lokaler Charakter ist und fast alle ψ_p wirken trivial auf $\mathbb{Z}_p$. Wir haben bereits gesehen, dass $\psi_p(x_p) = e_p(a_p x_p)$ für eindeutige $a_p \in \mathbb{Q}_p$. Nach Korollar 4.9 liegen zudem fast alle a_p in $\mathbb{Z}_p$ Folglich ist $a = (a_p)$ ein eindeutig bestimmtes Adel und es gilt

$$\psi(x) = \prod_{p\leq\infty} \psi_p(x_p) = \prod_{p\leq\infty} e_p(a_p x_p) = e(ax).$$

□

Damit haben wir nun alles zusammen und kommen zur zentralen Definition dieses Abschnitts.

Definition 7.4 (Globale Fouriertransformation)**.** Sei $f \in L^1(\mathbb{A})$. Wir definieren dann die *adelische Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ von f durch die Formel

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{A}} f(x)e(-\xi x)dx$$

für alle $\xi \in \mathbb{A}$.

Lokal haben wir gesehen, dass die Schwartz-Bruhat Funktionen $S(\mathbb{Q}_p)$ sich besonders für die Fourieranalysis geeignet haben. Was ist das äquivalent im Globalen? Wir definieren eine *faktorisierbare Schwartz-Bruhat Funktion* $f = \prod_{p\leq\infty} f_p$ als ein Produkt lokaler Schwartz-Bruhat Funktionen f_p, wobei für fast alle Stellen $p < \infty$ der Faktor die charakteristische Funktion von $\mathbb{Z}_p$ ist. Mit unserer Charakterisierung der lokalen Schwartz-Bruhat Funktionen über den endlichen Stellen können die Faktorisierbaren auch schreiben als

$$f(x) = f_\infty(x) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p} \tag{6}$$

mit $a_p \in \mathbb{Z}_p$ (oder alternativ: für ein $a \in \mathbb{A}$) und $k_p = 0$ für fast alle Stellen. Die *adelischen Schwartz-Bruhat Funktion* sind endliche Linearkombinationen dieser über $\mathbb{C}$. Wir notieren sie wieder mit $S(\mathbb{A})$. Damit können wir wieder folgenden Satz beweisen.

Satz 7.5. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ ist die Fouriertransformation wohldefiniert und liegt wieder in $S(\mathbb{A})$. Insbesondere gilt die Umkehrformel.*

Beweis. Es reicht wieder nur faktorisierbare f zu betrachten. Diese haben Form $f = \prod_{p\leq\infty} f_p$ mit $f_p \in S(\mathbb{Q}_p)$ und fast überall $f_p = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Mit unserem Wissen über die Integration auf den Adelen folgt

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{A}} f(x)e(-\xi x)dx = \int_{\mathbb{A}} \prod_{p\leq\infty} f_p(x_p)e_p(-\xi_p x_p)dx \\ &= \prod_{p\leq\infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(x_p)e_p(-\xi_p x_p)dx_p = \prod_{p\leq\infty} \hat{f}_p(\xi_p).\end{aligned}$$

Die Umkehrformel folgt damit direkt aus den lokalen Umkehrformeln. □

Korollar 7.6. *Sei $f \in S^1(\mathbb{A})$.*

(a) *Ist $g(x) = f(x)e(ax)$ mit $a \in \mathbb{A}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)$.*

(b) *Ist $g(x) = f(x - a)$ mit $a \in \mathbb{A}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)e(-ax)$.*

(c) *Ist $g(x) = f(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{I}$, dann gilt $\hat{g}(x) = \frac{1}{|\lambda|_{\mathbb{A}}}\hat{f}(\frac{x}{\lambda})$.*

7.2 Adelische Poisson-Summenformel und der Satz von Riemann-Roch

Lemma 7.7. *Jede faktorisierbare adelische Schwartz-Bruhat Funktion f hat die Form*

$$f = f_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p},$$

wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $k_p \in \mathbb{Z}$ für fast alle Stellen p verschwindet.

Beweis. Der Unterschied zur Definition der faktorisierbaren Schwartz-Bruhat Funktionen liegt in der Tatsache, dass der Faktor a jetzt unabhängig von der jeweiligen Stelle ist. Für fast alle p ist $a \in \mathbb{Z}_p$ und $k_p = 0$, also $\mathbb{1}_{a+p_p^k\mathbb{Z}_p} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ fast überall. Damit ist klar, dass Funktionen dieser Form in $S(\mathbb{A})$ liegen. Sei nun $f = \prod_{p\leq\infty} f_p \in S(\mathbb{A})$ und S die Menge der Stellen mit $k_p \neq 0$. Für alle $p \in S$ ist der Faktor f_p gleich $\mathbb{1}_{a_p+p_p^k\mathbb{Z}_p}$ für ein $a_p \in \mathbb{Q}$. Sind wir vorerst optimistisch und nehmen an, dass $k_p > 0$ und die a_p bereits ganze Zahlen sind. Ziel ist es jetzt eine ganze Zahl a zu finden, die $a \equiv a_p \pmod{p^{k_p}}$ für alle $p \in S$ erfüllt. Das liefert uns aber gerade der chinesische Restsatz. Damit wäre $a_p + p_p^k\mathbb{Z}_p = a + p_p^k\mathbb{Z}_p$ und wir wären fertig.

Bleiben wir optimistisch und versuchen die Funktionen geeignet umzuformen. Sei dazu N der Hauptnenner der nun wieder rationalen Zahlen a_p und sei $M = \prod_{p\in S} p^{|k_p|+1}$. Dann ist $NM(a_p + p_p^k\mathbb{Z}_p) = a_p' + p^{k_p'}\mathbb{Z}_p$ mit $a_p' \in \mathbb{Z}$ und $k' > 0$. Folglich finden wir ein $a' \in \mathbb{Z}$ mit $NM(a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p) = a' + p^{k_p'}\mathbb{Z}_p$. Jetzt setzen wir alles zusammen durch

$$\begin{aligned} a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p &= (NM)^{-1}NM(a_p + p^{k_p}\mathbb{Z}_p) \\ &= (NM)^{-1}(a' + p^{k_p'}\mathbb{Z}_p) = (NM)^{-1}a' + p^{k_p}\mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

für alle $p \in S$. Setzen wir also $a := (NM)^{-1}a'$ folgt die Behauptung. $\square$

Satz 7.8 (Poisson Summenformel)**.** *Sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann konvergieren folgende Summen absolut und wir haben die Gleichung*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) \tag{7}$$

Wir geben es zu. Der folgende Beweis kann nicht auf den allgemeineren Fall übertragen.

Beweis. Es genügt wieder die Aussage für faktorisierbare Schwartz-Bruhat Funktionen $f \in S(\mathbb{A})$ zu zeigen. Nach vorherigem Lemma 7.7 haben diese gerade die Form

$$f = f_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p}. \tag{8}$$

für ein $a \in \mathbb{Q}$ und $k_p = 0$ für fast alle Stellen p. Mit $N := \prod_{p<\infty} p^{-k_p} \in \mathbb{Q}$ haben wir dann

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma - a) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(N(\gamma - a)) \\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \left[f_\infty(N(\gamma - a)) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{a+p^{k_p}\mathbb{Z}_p}(N(\gamma - a)) \right] \\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \left[f_\infty(N(\gamma - a)) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\gamma) \right] = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f_\infty(N(\gamma - a)) \end{aligned}$$

Die Summe am Ende konvergiert aber absolut, da $f_\infty \in S(\mathbb{R})$.

Mit der Konvergenz aus dem Weg beschäftigen wir uns nun mit der Summenformel. Dabei werden sich die obigen Umformungen als sehr hilfreich erweisen. Erinnern wir uns zunächst an die Operatoren aus dem Beweis der lokalen Umkehrformeln in Satz 4.12. Dort haben wir die Notation $L_a f(x) = f(x-a)$ und $M_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ eingeführt. Definieren wir nun wieder $N = \prod_{p<\infty} p^{-k_p}$, so können wir die Funktion 8 umschreiben als

$$f = L_a M_N \left(\left(M_{1/N} L_{-a} f_\infty \right) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} \right).$$

Damit eröffnet sich nun folgende Beweisidee. Wir zeigen zuerst, dass die obige Gleichung (falls sie denn tatsächlich gilt) stabil unter den Operatoren L_a und M_λ ist. Anschließend zeigen wir sie für den einfacheren Fall $f = f_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Beides kombiniert ergibt dann den Beweis.

Gelte also $\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)$ und sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann haben wir

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} L_a f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma - a) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma).$$

Da unser additiver Charakter e allerdings trivial auf $\mathbb{Q}$ wirkt, ist dies gleich

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma) &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} e(-a\gamma)\hat{f}(\gamma) \\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \Omega_{-a}\hat{f}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} (L_a f)\hat{\ }(\gamma).\end{aligned}$$

Nutzen wir aus, dass $|\lambda|_{\mathbb{A}} = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} M_\lambda f(\gamma) &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\lambda\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\lambda\gamma) \\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \frac{1}{|\lambda|_{\mathbb{A}}} \hat{f}(\lambda^{-1}\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} (M_\lambda f)\hat{\ }(\gamma).\end{aligned}$$

Damit haben wir auch schon den ersten Teil der Beweisidee verwirklicht.

Der zweite Teil ist weniger Arbeit. Für $f = f_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ haben wir zum einen, dass $\hat{f} = \hat{f}_\infty \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Zum anderen ist

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f_\infty(\gamma) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f_\infty(\gamma),$$

denn das Produkt über alle verschwindet genau dann nicht, wenn γ eine ganze Zahl ist. Wir müssen also nur $\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f_\infty(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \hat{f}_\infty(\gamma)$ zeigen. Aber das sagt uns gerade die klassische Poisson-Summenformel. □

Ausgerüstet mit der adelischen Summenformel kommen wir zu einem weiteren wichtigen Eckpunkt von Tates Beweis.

Satz 7.9 (Riemann-Roch)**.** *Sei $x \in \mathbb{I}$ ein Idel und $f \in S(\mathbb{A})$. Dann*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma x) = \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}} \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma x^{-1}).$$

Insbesondere konvergieren die Summen absolut.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{I}$ beliebig aber fest. Für beliebige $y \in \mathbb{A}$ definieren wir eine Funktion $h(y) := f(yx)$. Diese ist wieder in $S(\mathbb{A})$, erfüllt damit die Poisson-Summenformel

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} h(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{h}(\gamma)$$

und beide Summen konvergieren absolut. Berechnen wir allerdings die Fouriertransformation von h erhalten wir mit einer Translation um x^{-1}

$$\begin{aligned}\hat{h}(\gamma) &= \int_{\mathbb{A}} h(y)\Psi(\gamma y)dy \\ &= \int_{\mathbb{A}} f(yx)\Psi(\gamma y)dy \\ &= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}}\int_{\mathbb{A}} f(y)\Psi(\gamma y x^{-1})dy \\ &= \frac{1}{|x|_{\mathbb{A}}}\hat{f}(\gamma x^{-1}).\end{aligned}$$

Damit sind wir auch schon fertig. □

7.3 Die globale Funktionalgleichung

In Satz 6.6 haben wir gesehen, dass $\mathbb{I}$ sich schreiben lässt als direktes Produkt $\mathbb{I}^1 \times \mathbb{R}_+^\times$. Um nun auf $\mathbb{I}^1$ ein (multiplikatives) Haar-Maß $d^\times b$ zu fixieren, nehmen wir auf $\mathbb{R}_+^\times$ das Maß $\frac{dt}{t}$ und verlangen $d^\times x = d^\times b \times \frac{dt}{t}$. Für die Berechnungen haben wir dann ganz im Sinne von Fubini

$$\int_{\mathbb{I}} f(x)d^\times x = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{I}^1} f(tb)d^\times b\right]\frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{I}^1}\left[\int_0^\infty f(tb)\frac{dt}{t}\right]d^\times b.$$

Die Notation tb ist dabei als Multiplikation $\iota_\infty(t)\cdot b$ zu verstehen. Es folgt sofort, dass $|tb|_{\mathbb{A}} = |t|_\infty$ gilt. Weiter haben wir in Satz 6.6 auch den Fundamentalbereich $F = \{1\} \times \prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p^\times$ der Wirkung von $\mathbb{Q}^\times$ auf $\mathbb{I}^1$ kennengelernt. Das Volumen von F bezüglich $d^\times b$ wird für unsere Berechnung eine Rolle spielen. Berechnen wir es schnell. Mit der Normierung des Maßes $d^\times x$ haben wir

$$1 = \mathrm{Vol}\left((0,e)\times\prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p^\times, d^\times x\right) = \mathrm{Vol}\left(F, d^\times b\right)\cdot\mathrm{Vol}\left((0,e),\frac{dt}{t}\right) = \mathrm{Vol}(F, d^\times b)$$

Bevor wir jetzt die die globalen Zeta-Funktionen einführen benötigen wir noch geeignete multiplikative Charaktere. Es wird sich als sinnvoll erweisen die sogenannten *Idelklassencharaktere** zu betrachten. Dies sind, wie der Name trügerisch verschweigt, Quasi-Charaktere auf $\mathbb{I}$, die trivial auf die Untergruppe $\mathbb{Q}^\times$ wirken. Im Gegensatz zu unseren lokalen multiplikativen Charakteren fangen wir zuerst mit der Form an.

Satz 7.10. *Jeder Idelklassencharakter χ hat die Form*

$$\chi(x) = \mu(\tilde{x})|x|_{\mathbb{A}}^s$$

wobei μ ein unitärer Charakter auf $\mathbb{I}^1$ und $\tilde{\cdot} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}^1$ der stetige Homomorphismus nach Satz 6.6 (d) ist.

Beweis. Wir schreiben wie oben $x \in \mathbb{I}$ als eindeutiges Produkt tb mit $t = |x|_{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}_+^\times$ und $b \in \mathbb{I}^1$. Dies ergibt die Zerlegung $\chi(x) = \chi_\infty(t)\cdot\chi(b)$. Da χ trivial auf $\mathbb{Q}^\times$ wirkt induziert er einen Charakter auf der kompakten Gruppe ansehen $\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times$ den wir wieder mit χ bezeichnen. Wir haben das Argument, dass $\chi(\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times)$ als kompakte Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ in S^1 liegt. Folglich ist mit etwas Missbrauch der Notation $\mu := \chi|_{\mathbb{I}^1} = \chi|_{\mathbb{I}^1/\mathbb{Q}^\times}$ ein Charakter auf $\mathbb{I}^1$. Weiter ist nach Lemma 4.14 $\chi_\infty(t) = |t|_\infty^s$ und mit $|t|_\infty = |t|_{\mathbb{A}}$ folgt die Behauptung. □

*Der Name rührt aus der Tatsache, dass diese die Charaktere auf der *Idelklassengruppe* $\mathbb{I}/\mathbb{Q}^\times$ sind (vgl. [5] S.375)

Wie auch im Lokalen, können wir wieder von dem *Exponenten* $\sigma = \Re s$ von $\chi = \mu|\cdot|_{\mathbb{A}}^s$ reden. Ein Idelklassencharakter soll nun *unverzweigt* heißen, wenn er trivial auf $\mathbb{I}^1$ wirkt. Nach obigen Satz hängt die Verzweigtheit also nur von dem Charakter μ ab.

Korollar 7.11. *Jeder Idelklassencharakter χ ist genau dann unverzweigt, wenn er trivial auf F ist.*

Beweis. Das folgt sofort aus $\mathbb{I}/\mathbb{Q}^\times \cong F$. □

Damit kommen wir zur

Definition 7.12. Für jede globale Schwartz-Bruhat Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ und Idelklassencharakter χ mit Exponenten $\sigma > 0$ sei

$$Z_p(f, \chi) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\chi(x) d^\times x_p$$

eine *globale Zeta-Funktion* auf $\mathbb{A}$.

Nun haben wir alles zusammen für den großen Beweis:

- Integration auf den Adelen und Idelen
- Fouriertransformation
- Riemann-Roch als Ersatz für die Theta-Transformationsformel
- Zeta-Funktionen als Analogon zur Mellin-Transformation

Zusammen mit dem was wir aus unseren ersten Trockenübungen mit den lokalen Funktiongleichungen gelernt haben, werden wir jetzt eine globale Funktionalgleichung etablieren indem wir die Beweisideen aus Riemanns Beweis übertragen.

Satz 7.13 (Globale Funktionalgleichung)**.** *Sei $\chi = \mu|\cdot|_{\mathbb{A}}^s$ ein Idelklassencharakter. Sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann konvergiert die globale Zeta-Funktion $Z(f, \mu, s)$ für $Re(s) > 1$ absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen und definiert dort eine holomorphe Funktion, die zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann, welche die* globale Funktionalgleichung

$$Z(f, \mu, s) = Z(\hat{f}, \frac{1}{\mu}, 1 - s)$$

erfüllt. Diese Funktion ist überall holomorph, außer wenn $\mu = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{-i\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Dann besitzt sie einen einfachen Pol bei $s = i\tau$ mit Residuum $-f(0)$ und einen einfachen Pol bei $s = 1 + i\tau$ mit Residuum $\hat{f}(0)$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Konvergenz. Dazu genügt es faktorisierbare Schwartz-Bruhat Funktionen f zu betrachten. Wir müssen also zeigen, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{I}} |f(x)\chi(x)| d^\times x = \int_{\mathbb{I}} |f(x)| \cdot |x|_{\mathbb{A}}^\sigma d^\times x = \prod_{p \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| \cdot |x_p|_p^\sigma d^\times x_p \tag{9}$$

endlich ist. Dazu teilen wir das Produkt auf. Es gibht eine Primzahl p_0, so dass f_p für alle $p_0 \leq p < \infty$ die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ ist. Wir können Gleichung 9 also schreiben als

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty^\times} |f_\infty(x_\infty)| \cdot |x_\infty|_\infty^\sigma d^\times x_\infty \cdot \prod_{p < p_0} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| \cdot |x_p|_p^\sigma d^\times x_p \cdot \prod_{p_0 \leq p < \infty} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x_p|_p^\sigma d^\times x_p.$$

Der erste Faktor und das Produkt in der Mitte sind endlich nach dem Satz über die lokalen Funktionalgleichungen. In der Tat haben wir hier ein endliches Produkt lokaler Zeta-Funktionen $Z(|f_p|, |x|_p^\sigma)$. Diese konvergieren für $\sigma > 0$, also sicherlich auch für $\sigma > 1$. Konvergenz hängt also nur von der Konvergenz des unendlichen Produkts

$$\prod_{p_0 \leq p < \infty} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x_p|_p^\sigma d^\times x_p$$

ab. Der aufmerksame Leser wird sich hier vielleicht an die genauen Berechnungen der lokalen Funktionalgleichungen erinnern und einen Bezug zur Riemannschen Zeta-Funktion erkennen. Um die spätere Überraschung aber nicht zu verderben werden wir nur anmerken, dass dies ein Teilprodukt eines bekannten unendlichen Produkts, welches gleichmäßig auf jedem Kompaktum der gegeben Halbebene konvergiert.

Nun zur Funktionalgleichung. Aufgrund absoluter Konvergenz auf der Halbebene $\Re(s) > 1$ haben wir

$$\begin{aligned} Z(f,\chi) &= \int_{\mathbb{I}} f(x)\chi(x) d^\times x \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{I}^1} f(t\cdot b)\chi(t\cdot b)(d^\times t \times d^\times b) \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{I}^1} (f(t\cdot b)\chi(t\cdot b) d^\times b \right] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Um uns etwas Schreibarbeit zu sparen definieren wir

$$Z_t(f,\chi) \coloneqq \int_{\mathbb{I}^1} f(t\cdot b)\chi(t\cdot b) d^\times b.$$

Wie in Riemanns Beweis teilen wir das Integral auf durch

$$Z(f,\chi) = \int_0^1 Z_t(f,\chi)\frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(f,\chi)\frac{dt}{t}.$$

Das Integral $\int_1^\infty$ macht uns keine Probleme. Wir haben festgestellt, dass

$$\int_1^\infty |Z_t(f,\chi)|\frac{dt}{t} = \int_{\{x\in\mathbb{I}: |x|_{\mathbb{A}} \geq 1\}} |f(x)||x|_{\mathbb{A}}^\sigma d^\times x,$$

für $\sigma > 1$ konvergiert. Da $|x|_{\mathbb{A}} \geq 1$ verbessert sich das Konvergenzverhalten des Integranden umso kleiner σ ist und es folgt die Konvergenz auf ganz $\mathbb{C}$. Als nächstes erinnern wir uns daran, dass wir $\mathbb{I}^1$ als disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{a\in\mathbb{Q}^\times} aF$ darstellen konnten, wobei $F = \{1\} \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$. Kombiniert mit der Translationsinvarianz von $d^\times b$ und der Tatsache, dass χ trivial auf $\mathbb{Q}^\times$ wirkt, ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_t(f,\chi) &= \int_{\mathbb{I}} (f(t\cdot b)\chi(t\cdot b) d^\times b = \sum_{a\in\mathbb{Q}^\times} \int_{aF} (f(t\cdot b)\chi(t\cdot b) d^\times b \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Q}^\times} \int_F (f(at\cdot b)\chi(t\cdot b) d^\times b = \int_F \left(\sum_{a\in\mathbb{Q}^\times} (f(at\cdot b) \right) \chi(t\cdot b) d^\times b \end{aligned}$$

Die Summe über a verleitet uns dazu Riemann-Roch anzuwenden, allerdings benötigen wir hierfür eine Summe über $\mathbb{Q}$. Das Problem lässt sich jedoch leicht beheben.

Lemma 7.14.

$$Z_t(f,\chi) = \zeta_{t^{-1}}(f,\check{\chi}) + \hat{f}(0)\int_F \check{\chi}(x/t) db - f(0)\int_F \chi(tx) db.$$

Beweis. Die Idee ist klar. Wir fügen $f(0)\int_F \chi(tx)db$ zu $Z_t(f,\chi)$ hinzu, erhalten

$$Z_t(f,\chi) + f(0)\int_F \chi(tb)db = \int_F \left(\sum_{a\in\mathbb{Q}} (f(at\cdot b)\right)\chi(t\cdot b)d^\times b$$

und können jetzt unsere Version von Riemann-Roch anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_F \left(\sum_{a\in\mathbb{Q}} f(at\cdot b)\right)\chi(t\cdot b)d^\times b &= \int_F \left(\sum_{a\in\mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b^{-1})\right)\frac{\chi(t\cdot b)}{|tx|_{\mathbb{A}}}d^\times b \\
&= \int_F \left(\sum_{a\in\mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b)\right)\left|t^{-1}b\right|_{\mathbb{A}}\chi(t\cdot b)d^\times b \\
&= \int_F \left(\sum_{a\in\mathbb{Q}} \hat{f}(at^{-1}b)\right)\check{\chi}(b/t)db + \hat{f}(0)\hat{f}(0)\int_F \check{\chi}(x/t)db \\
&= Z_{t^{-1}}(f,\check{\chi}) + \hat{f}(0)\int_F \check{\chi}(x/t)db
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt den Variablenwechsel $b\mapsto b^{-1}$ und im dritten Schritt $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1}$ ausgenutzt haben. □

Wir widmen uns nun dem Integral $\int_0^1$. Dank Riemann-Roch können wir es umformen zu

$$\int_0^1 Z_t(f,\chi)\frac{dt}{t} = \int_0^1 \left(Z_{t^{-1}}(\hat{f},\check{\chi}) + \hat{f}(0)\check{\chi}(t^{-1})\int_F \check{\chi}(x)db - f(0)\chi(t)\int_F \chi(x)db\right)\frac{dt}{t}$$

Mit einem Variablenwechsel $t\mapsto t^{-1}$ im ersten Summanden ergibt sich

$$\int_0^1 Z_{t^{-1}}(\hat{f},\check{\chi})\frac{dt}{t} = \int_1^\infty Z_t(\hat{f},\check{\chi})\frac{dt}{t}$$

was nach dem gleichen Argument wie oben auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Damit haben wir ganz nach Riemann beide Integrale von 1 bis ∞. Es verbleibt noch der „Fehler“-Term

$$E(f,\chi) := \int_0^1 \hat{f}(0)\check{\chi}(t^{-1})\left(\int_F \check{\chi}(x)db\right)\frac{dt}{t} - \int_0^1 f(0)\chi(t)\left(\int_F \chi(x)db\right)\frac{dt}{t}.$$

Dieser entspricht wiederum den beiden Termen $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{1-s}$ aus Riemanns Beweis. Ist χ nicht trivial auf $\mathbb{I}^1$, so wirkt χ auch nicht trivial auf dem Kompaktum F. Folglich verschwinden beide Integrale und $E(f,\chi) = 0$ Ist $\chi = \mu|\cdot|^s$ dagegen trivial auf $\mathbb{I}^1$, dann wissen wir, dass $\chi = |\cdot|^{s'}$, wobei $s' = s - i\tau$ für ein $\tau\in\mathbb{R}$. Also,

$$\begin{aligned}
E(f,\chi) &= \int_0^1 \hat{f}(0)t^{s'-1}\mathrm{Vol}(F,db) - f(0)t^{s'}\mathrm{Vol}(F,db)\frac{dt}{t} \\
&= \frac{\hat{f}(0)}{s'-1} - \frac{f(0)}{s'}
\end{aligned}$$

und wir sehen, dass E in diesem Fall eine rationale Funktion ist. Damit ist

$$Z(f,\chi) = \int_1^\infty Z_t(\hat{f},\check{\chi})\frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(f,\chi)\frac{dt}{t} + E(f,\chi)$$

Eine meromorphe Erweiterung der Funktion auf ganz $\mathbb{C}$. Zudem haben wir gezeigt, dass für $\mu \neq |\cdot|^{-i\tau}$ die Funktion ζ sogar ganz ist und im Fall $\mu = |\cdot|^{-i\tau}$ ihre einzigen Pole bei

$s = i\tau$ und $s = 1 + i\tau$ liegen mit den Residuen $-f(0)$ bzw. $\hat{f}(0)$.
Zum Schluss kommen wir noch zur Funktionalgleichung. Aus

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \text{ und } \check{\check{\chi}} = \chi$$

folgt

$$\begin{aligned}
Z(\hat{f}, \check{\chi}) &= \int_1^\infty Z_t(\hat{\hat{f}}, \check{\check{\chi}}) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty Z_t(\hat{f}, \check{\chi}) \frac{dt}{t} + E(\hat{f}, \check{\chi}) \\
&= \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(-tb)\chi(tb) db \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(tb)\check{\chi}(tb) db \frac{dt}{t} + E(f, \chi) \\
&= \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} f(tb)\chi(tb) db \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{I}^1} \hat{f}(tb)\check{\chi}(tb) db \frac{dt}{t} + E(f, \chi) = Z(f, \chi)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt im ersten Integral die Translationsinvarianz der Haar-Maßes db und die Eigenschaft des Idele-Klassencharakters $\chi(-tx) = \chi(tx)$ ausgenutzt haben. $\square$

7.4 Globale Berechnung: Die Riemannsche Zeta-Funktion

Wir wollen jetzt zeigen, dass unsere Berechnungen im letzten Abschnitt nicht ohne Inhalt sind. Immerhin besteht immer noch die Gefahr, dass wir gerade $0 = 0$ gezeigt haben. Betrachten wir also die adelische Schwartz-Bruhat Funktion

$$f(x) = \exp(-2\pi i x_\infty) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p).$$

Dank unserer Berechnung der lokalen Faktoren wissen wir, dass

$$\hat{f}(x) = \exp(-2\pi i x_\infty) \prod_{p<\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p),$$

also f ihre eigene Fouriertransformierte ist.

Auf zu den Zeta-funktionen! Für jede Stelle $p \leq \infty$ ist der Faktor f_p die Funktion, die wir bei den Berechnungen der lokalen Zeta-Funktionen $Z_p(f_p, 1, |\cdot|_p^s)$ im unverzweigten Fall verwendet haben. Bleiben wir also auch hier im unverzweigten und betrachten den Charakter $|\cdot|_{\mathbb{A}}^s$. Damit vereinfacht sich die berechnung der globalen Zeta-Funktion zu

$$Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = \int_{\mathbb{I}} f(x)|x|_{\mathbb{A}}^s d^\times x = \prod_{p\leq\infty} Z(f_p, 1, |\cdot|_p^s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \prod_{p<\infty} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Das Produkt am Ende sollte uns bekannt vorkommen. Es ist genau die Darstellung der Riemannschen Zeta-Funktion als Euler-Produkt. Damit ist also

$$Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \xi(s)$$

die vervollständigte Riemannsche Zeta-Funktion. Analog ist

$$Z(\hat{f}, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^{1-s}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) = \xi(1-s)$$

und die globale Funktionalgleichung liefert uns gerade

$$\xi(s) = Z(f, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^s) = Z(\hat{f}, 1, |\cdot|_{\mathbb{A}}^{1-s}) = \xi(1-s),$$

die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion. Nun wird aber auch klar woher der Faktor $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ rührt. Es ist gerade der Beitrag, den die Stelle $p = \infty$ bei den Berechnungen liefert.

Böse Zungen mögen jetzt behaupten, dass wir durch die Wahl unserer Funktion f, vor allem durch die Wahl des Faktors $f_\infty(x_\infty) = exp(-2\pi i x_\infty)$, die Form dieser Gleichung letztendlich beeinflusst haben um gerade auf das klassische Ergebnis zu kommen. Sie haben recht, denn immerhin hätte ein anderer Faktor g_∞ eine andere Funktionalgleichung ergeben. Diese beiden Funktionalgleichungen unterscheiden sich dann aber nur um einen meromorphen Faktor, den wir dank

$$Z_\infty(g_\infty, |\cdot|_\infty^s) Z_\infty(\hat{f}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1}) = Z_\infty(f_\infty, |\cdot|_\infty^s) Z_\infty(\hat{g}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1}),$$

mit

$$\frac{Z_\infty(g_\infty, |\cdot|_\infty^s)}{Z_\infty(f_\infty, |\cdot|_\infty^s)} = \frac{Z_\infty(\hat{g}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1})}{Z_\infty(\hat{f}_\infty, |\cdot|_\infty^{s-1})}$$

angeben können. Unsere Wahl war also nur durch die besonders einfache Form der Faktoren und den damit verbundenen Berechnungen beeinflusst.

A Appendix: Tates Beweis der Poisson-Summenformel

Satz A.1 (Poisson Summenformel)**.** *Sei $f \in S(\mathbb{A})$. Dann gilt:*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma + x) \tag{10}$$

für alle $x \in \mathbb{A}$.

Beweis. Jede $\mathbb{Q}$-invariante Funktion ϕ auf $\mathbb{A}$ induziert eine Funktion auf $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, welche wir wieder ϕ nennen. Wir können dann die Fouriertransformation von $\phi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ als Funktion auf $\mathbb{Q}$ betrachten, da $\mathbb{Q}$ gerade die duale Gruppe von $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist. Dazu setzen wir

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \phi(t)\Psi(tx)\overline{dt}$$

wobei $\overline{dt}$ das Quotientenmaßauf $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist, welches von dem Maßdt auf $\mathbb{A}$ induziert wird. Dieses Haarmaßist charakterisiert durch

$$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum \gamma \in \mathbb{Q} f(\gamma + t)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}} f(t)dt$$

für alle stetigen Funktionen f auf $\mathbb{A}$ mit geeigneten Konvergenzeigenschaften (z.b. $f \in S(\mathbb{A})$). Für den eigentlichen Beweis benötigen wir zwei

Lemma A.2. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ gilt:*

$$\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\tilde{f}}|_{\mathbb{Q}}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}$ beliebig aber fest. Wir beobachten zunächst, dass wir wegen $\Psi|_{\mathbb{Q}} = 1$

$$\Psi(tx) = \Psi(tx)\Psi(\gamma x) = \Psi((\gamma + t)x)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{Q}$ und $t \in \mathbb{A}$ haben. Per Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{f}}(x) &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \tilde{f}(t)\Psi(tx)\overline{dt} = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + t) \right) \Psi(tx)\overline{dt} = \\ &= \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} f(\gamma + t)\Psi((\gamma + t)x) \right) \overline{dt} = \int_{\mathbb{A}} f(t)\Psi(tx)dt = \hat{f}(x)\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die oben besprochene Charakterisierung des Quotientenmaßes $\overline{dt}$ ausgenutzt haben. □

Lemma A.3. *Für jede Funktion $f \in S(\mathbb{A})$ und jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

Beweis. Wie wir eben bewiesen haben gilt $\hat{f}|_{\mathbb{Q}} = \hat{\tilde{f}}|_{\mathbb{Q}}$ und daher

$$\left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x) \right| = \left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{f}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x) \right| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} |\hat{f}(\gamma)|$$

unter Ausnutzen der Tatsache, dass Ψ unitär ist. Die rechte Seite der Gleichung ist also normal konvergent, da $f \in S(\mathbb{A})$. Analog folgt, dass auch $\sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} \hat{\tilde{f}}(\gamma)$ normal konvergiert.

Wir erinnern uns, dass das Pontryagin Duale $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$ als topologische Gruppe isomorph zu $\mathbb{Q}^*$ ist. Also $\hat{\hat{f}} \in L^1(\mathbb{Q})$ und

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

ist die Fouriertransformierte[†] von $\hat{\hat{f}}$ ausgewertet am Punkt $-x$. Nach Fourierinversionsformel erhalten wir also

$$\tilde{f}(x) = \hat{\hat{\hat{f}}}(-x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\overline{\Psi}(\gamma x)$$

und damit das Lemma. □

Zurück zum Beweis der Summenformel. Wir erhalten aufgrund des zweiten Lemmas mit $x = 0$ und anschließenden Anwenden des Ersten

$$\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma)\bar{\Psi}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{\hat{f}}(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}$$

Aber per Definition gilt gerade $\tilde{f}(0) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma)$, also

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}} \hat{f}$$

und wir sind fertig. □

[*] Achtung: Hier ist Q versehen mit der diskreten Topologie gemeint

[†] Wir erinnern uns, dass in diesem Fall das Zählmaßein Haar-Maßist

Literatur

[1] Deitmar, Anton: *Automorphe Formen.* Springer-Lehrbuch Masterclass 0. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 2010.

[2] Dinakar Ramakrishnan, Robert J. Valenza: *Fourier Analysis on Number Fields*, Band 186 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, 1. Auflage, 1998.

[3] Folland, Gerald B.: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley-Interscience, 2. Auflage, 1999.

[4] Gouvea, Fernando Quadros: *p-adic numbers: An introduction.* Universitext. Springer, 2. Auflage, 1997.

[5] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer, 1. Aufl. 1992. Nachdruck Auflage, 2006.

[6] Tao, Terence: *Tate's proof of the functional equation.* `https://terrytao.wordpress.com/2008/07/27/tates-proof-of-the-functional-equation/`, 2008.

[7] Tate, John: *Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions.* Doktorarbeit, Princeton, 1950.