内容

- 算法
- 实现
- 练习题

尽管欧几里得算法可以为我们求出两个数 a 和 b 的最大公约数，有时我们需要知道如何用 a 和 b 表示出它们的最大公约数，也就是说，找到 x 和 y 使得：

$$a \cdot x + b \cdot y = gcd(a, b)$$

算法

对原算法的修改非常简单，我们只需要跟踪算法的两个参数 (a, b) 在变化到 $(b \, mod \, a, a)$ 的过程中 x, y 是如何变化的即可。假设对于 $(b \, mod \, a, a)$ 我们找到了 (x_1, y_1) 使得：

$$(b \, mod \, a) \cdot x_1 + a \cdot \ y_1 = g$$

那么我们想对于 (a, b) 找到 (x, y) 使得：

$$a \cdot x + b \cdot y = g$$

我们把 $b \, mod \, a$ 表示为：

$$b \, mod \, a = b - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor \cdot a$$

代入第一个式子得到：

$$g = (b \, mod \, a) \cdot x_1 + a \cdot y_1 = (b - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor \cdot a) \cdot x_1 + a \cdot y_1$$

整理一下得到：

$$g = b \cdot x_1 + a \cdot (y_1 - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor \cdot x_1)$$

因此我们得到 x, y 的值：

$$\begin{cases} x = y_1 - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor \cdot x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

实现

```
int gcd(int a, int b, int & x, int & y) {
    if (a == 0) {
        x = 0;
        y = 1;
        return b;
    }
    int x1, y1;
    int d = gcd(b % a, a, x1, y1);
    x = y1 - (b / a) * x1;
    y = x1;
    return d;
}
```

上面的代码返回 a, b 的最大公约数和得到最大公约数的参数 x, y （作为引用传给函数）

该代码在负数情况下也正确

练习题

- ✅ 10104 - Euclid Problem
- GYM - (J) Once Upon A Time
- ✅ UVA - 12775 - Gift Dilemma