Zustandsbasierte Formulierung der Peridynamik

Maximilian König

06. Juni 2016

Gliederung

1. Kurzeinführung Peridynamik
2. Zustandsbasierte Peridynamik
3. Klassische Lösungstheorie
4. Ansätze für Schwache Lösungstheorie

Section 1

Kurzeinführung Peridynamik

Peridynamische Bewegungsgleichung

- Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit Lipschitz-Rand, $d \in \{1, 2, 3\}$ und $T > 0$.
- Wir suchen, zu gegebenen $\mathbf{b} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, ein solches $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, dass

$$\partial_t^2 \mathbf{u}(\mathsf{x}, t) = \int_\Omega \mathbf{f}_\mathbf{u}(\mathsf{x}, \widehat{\mathsf{x}}, t)\, \mathrm{d}\widehat{\mathsf{x}} + \mathbf{b}(\mathsf{x}, t), \quad (\mathsf{x}, t) \in \Omega \times [0, T].$$

- Modellannahmen:
  (i) *Horizont*: Es gibt ein $\delta > 0$ so, dass $|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| < \delta \Rightarrow \mathbf{f}_\mathbf{u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) = 0$.
  (ii) *Actio et Reactio*: Für alle $\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}} \in \Omega$ gilt $\mathbf{f}_\mathbf{u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) = -\mathbf{f}_\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$.
- Ad (ii): Wir definieren $\mathbf{t}_\mathbf{u}$ so, dass

$$\mathbf{f}_\mathbf{u}(\mathsf{x}, \widehat{\mathsf{x}}, t) = \mathbf{t}_\mathbf{u}(\mathsf{x}, \widehat{\mathsf{x}}, t) - \mathbf{t}_\mathbf{u}(\widehat{\mathsf{x}}, \mathsf{x}, t).$$

Bindungsbasierte Peridynamik

Sei $\widetilde{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Wähle zu $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) := \widetilde{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}} \in \Omega, t \in [0, T].$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ad (i):} & |\boldsymbol{\xi}| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = 0 \\ \text{Ad (ii):} & \widetilde{\mathbf{f}}(-\boldsymbol{\xi}, -\boldsymbol{\zeta}) = -\widetilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d.$$

Die resultierende peridynamische Bewegungsgleichung ist

$$\partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{B(\mathbf{x},\delta)\cap\Omega} \widetilde{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\, d\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T].$$

- Lösungstheorie für mikroelastische Modelle in [Puh16].
- **Problem**: In *linearisierten isotropischen, mikroelastischen Materialmodellen* ist die Poisson-Zahl stets $\nu = \frac{1}{4}$ [Sil00, ch. 11].

Section 2

Zustandsbasierte Peridynamik

Zustandsbasierte Peridynamik

- *Idee*: $\mathbf{f_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ / $\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ hänge von $\mathbf{u}$ mittels allen Werten $\mathbf{u}(\overline{\mathbf{x}}, t)$, $\overline{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega$, ab.
- Wir wollen also $\mathbf{t_u}$ als Operator auf abstrakten Funktionen $\mathbf{A} : \Omega \times [0, T] \to (\mathcal{H} \to \mathbb{R}^d)$ darstellen.
- Schreibweisen: $\mathcal{H} := B(0, \delta)$, $\mathcal{H}(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega = (\mathcal{H} + \mathbf{x}) \cap \Omega$.

- *Idee*: $\mathbf{f_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ / $\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ hänge von $\mathbf{u}$ mittels allen Werten $\mathbf{u}(\overline{\mathbf{x}}, t)$, $\overline{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega$, ab.
- Wir wollen also $\mathbf{t_u}$ als Operator auf abstrakten Funktionen $\mathbf{A} : \Omega \times [0, T] \to (\mathcal{H} \to \mathbb{R}^d)$ darstellen.
- Schreibweisen: $\mathcal{H} := B(0, \delta)$, $\mathcal{H}(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega = (\mathcal{H} + \mathbf{x}) \cap \Omega$.

Sei zunächst $X \subset \{\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d\}$ ein (Banach-) Raum von Funktionen.
Wir definieren eine **Modellfunktion** $T : \Omega \times X \to X^{(*)}$
und setzen für $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) := T(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x} + \cdot, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}).$$

Zustandsbasierte Peridynamik

- *Idee*: $\mathbf{f_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ / $\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ hänge von $\mathbf{u}$ mittels allen Werten $\mathbf{u}(\overline{\mathbf{x}}, t)$, $\overline{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega$, ab.
- Wir wollen also $\mathbf{t_u}$ als Operator auf abstrakten Funktionen $\mathbf{A} : \Omega \times [0, T] \to (\mathcal{H} \to \mathbb{R}^d)$ darstellen.
- Schreibweisen: $\mathcal{H} := B(0, \delta)$, $\mathcal{H}(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega = (\mathcal{H} + \mathbf{x}) \cap \Omega$.

Sei zunächst $X \subset \{\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d\}$ ein (Banach-) Raum von Funktionen.
Wir definieren eine **Modellfunktion** $T : \Omega \times X \to X^{(*)}$
und setzen für $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) := T(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x} + \cdot, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}).$$

Wir definieren einen Operator

$$\Delta : (\Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d) \to (\Omega \times [0, T] \to X)$$

so, dass (mindestens für $\mathbf{x} \in \Omega$ mit $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \Omega$)

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Zustandsbasierte Peridynamik

- *Idee*: $\mathbf{f_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ / $\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t)$ hänge von $\mathbf{u}$ mittels allen Werten $\mathbf{u}(\overline{\mathbf{x}}, t)$, $\overline{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega$, ab.
- Wir wollen also $\mathbf{t_u}$ als Operator auf abstrakten Funktionen $\mathbf{A} : \Omega \times [0, T] \to (\mathcal{H} \to \mathbb{R}^d)$ darstellen.
- Schreibweisen: $\mathcal{H} := B(0, \delta)$, $\mathcal{H}(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega = (\mathcal{H} + \mathbf{x}) \cap \Omega$.

Sei zunächst $X \subset \{\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d\}$ ein (Banach-) Raum von Funktionen.
Wir definieren eine **Modellfunktion** $T : \Omega \times X \to X^{(*)}$
und setzen für $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) := T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}).$$

Wir definieren einen Operator

$$\Delta : (\Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d) \to (\Omega \times [0, T] \to X)$$

so, dass (mindestens für $\mathbf{x} \in \Omega$ mit $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \Omega$)

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Zustandsbasierte Peridynamik (Forts.)

- $X \subset \{A : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d\}$,
- $T : \Omega \times X \to X^{(*)}$; $\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) := T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$.
- $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Zustandsbasierte Peridynamik (Forts.)

- $X \subset \{A : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d\}$,
- $T : \Omega \times X \to X^{(*)}$; $\mathbf{t_u}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}, t) := T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$.
- $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Wir definiern den **zustandsbasierten Peridynamik-Operator** K_T per

$$K_T\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}, t))(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})\, d\widehat{\mathbf{x}}$$

für $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} \in \Omega$ und $t \in [0, T]$, vorausgesetzt $T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}, t)) \in X^{(*)}$ ist integrierbar für alle $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}(\mathbf{x})$.

▸ Beispiele

▸ Definition von Δ

Beispiel 0: Bindungsbasierte Modelle

Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{f}(-\boldsymbol{\xi}, -\boldsymbol{\zeta}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})$ für alle $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d$.
Wir betrachten

$$T : \Omega \times X \to X, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \Big(\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{1}{2}\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, A(\boldsymbol{\xi}))\Big).$$

Dann ist für $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} K_T\mathbf{u}(\mathbf{x}) &:= \int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}))\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}))\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Beispiel 1: Modell der Mittleren Ausdehnung

Sei $\alpha > 0$ eine Konstante. Wir betrachten

$$T : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to L^2(\mathcal{H})^d,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \left(\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{\alpha \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(\mathbf{x}))} \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\vartheta}) \Big[|\mathbf{A}(\boldsymbol{\vartheta})| - |\boldsymbol{\vartheta}| \Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} \frac{\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|} \right).$$

Beispiel 1: Modell der Mittleren Ausdehnung

Sei $\alpha > 0$ eine Konstante. Wir betrachten

$$T : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to L^2(\mathcal{H})^d,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \left(\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{\alpha \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})}{\operatorname{Vol}(\mathcal{H}(\mathbf{x}))} \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}+\boldsymbol{\vartheta}) \Big[|\mathbf{A}(\boldsymbol{\vartheta})| - |\boldsymbol{\vartheta}| \Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} \frac{\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|} \right).$$

Für $\Delta\mathbf{u}$ zu einem $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d$ haben wir für den Integralterm

$$\begin{aligned} \overline{e}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})) &:= \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\vartheta}) \Big[|\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\vartheta})| - |\boldsymbol{\vartheta}| \Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} \\ &= \int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} |\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})| - |\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| \, \mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} |\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})| - |\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| \, \mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Beispiel 1: Modell der Mittleren Ausdehnung

Sei $\alpha > 0$ eine Konstante. Wir betrachten

$$T : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to L^2(\mathcal{H})^d,$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \left(\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{\alpha \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(\mathbf{x}))} \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}+\boldsymbol{\vartheta}) \Big[|\mathbf{A}(\boldsymbol{\vartheta})| - |\boldsymbol{\vartheta}| \Big] \, d\boldsymbol{\vartheta} \frac{\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|} \right).$$

Für $\Delta\mathbf{u}$ zu einem $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d$ haben wir für den Integralterm

$$\begin{aligned}
\overline{e}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})) &:= \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\vartheta}) \Big[|\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\vartheta})| - |\boldsymbol{\vartheta}| \Big] \, d\boldsymbol{\vartheta} \\
&= \int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} |\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})| - |\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| \, d\widehat{\mathbf{x}} \\
&= \int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} |\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})| - |\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| \, d\widehat{\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

$$W : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{\alpha}{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(\mathbf{x}))} (\overline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{A}))^2.$$

Beispiel 2a: Peridynamischer Fluid

Sei $\omega : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ eine Gewichtsfunktion und $\kappa > 0$ konstant. Wir definieren

$$m : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})\omega(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^2 \, d\boldsymbol{\xi},$$

$$\theta : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R},$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{3}{m(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, \omega(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}| \Big[|A(\boldsymbol{\xi})| - |\boldsymbol{\xi}| \Big] \, d\boldsymbol{\xi},$$

$$T : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to L^2(\mathcal{H})^d,$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{3\kappa\theta(\mathbf{x}, \mathbf{A})}{m(\mathbf{x})} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \cdot) \, \omega(\cdot)| \cdot | \frac{\mathbf{A}(\cdot)}{|\mathbf{A}(\cdot)|}.$$

Beispiel 2a: Peridynamischer Fluid

Sei $\omega : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ eine Gewichtsfunktion und $\kappa > 0$ konstant. Wir definieren

$$m : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})\omega(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

$$\theta : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R},$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{3}{m(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, \omega(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\xi}| \Big[|A(\boldsymbol{\xi})| - |\boldsymbol{\xi}| \Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

$$T : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to L^2(\mathcal{H})^d,$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{3\kappa\theta(\mathbf{x}, \mathbf{A})}{m(\mathbf{x})} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \cdot) \, \omega(\cdot)| \cdot | \frac{\mathbf{A}(\cdot)}{|\mathbf{A}(\cdot)|}.$$

$$W : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{\kappa}{2} \left(\theta(\mathbf{x}, \mathbf{A})\right)^2.$$

Beispiel 2b: Peridynamischer Festkörper

Sei $\omega : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ eine Gewichtsfunktion und seien $\kappa, \mu > 0$ konstant. Wir definieren

$$m : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \omega(\boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

$$\begin{aligned}
\theta &: \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R}, \\
&\qquad (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{3}{m(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, \omega(\boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}| \Big[|A(\boldsymbol{\xi})| - |\boldsymbol{\xi}| \Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \\
\phi &: \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R}, \\
&\qquad (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, \omega(\boldsymbol{\xi}) \Big[|\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})| - \left(1 + \frac{\theta(\mathbf{x}, A)}{3} \right) |\boldsymbol{\xi}| \Big]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},
\end{aligned}$$

$$W : \Omega \times L^2(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{\kappa}{2} \left(\theta(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \right)^2 + \mu \phi(\mathbf{x}, \mathbf{A}).$$

Beispiel 3: Peridynamisches Analogon zu Klassischem Modell

Sei ein klassissches Modell gegeben durch:

$$\sigma = \widehat{\sigma}(\mathbf{F}), \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Wir definieren

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_{\Omega}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})\, \omega(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

$$\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) := \left(\int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_{\Omega}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \boldsymbol{\xi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \right) \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1}$$

und die Peridynamische Modellfunktion

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{A})(\boldsymbol{\xi}) := \omega(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\sigma}(\overline{\mathbf{F}}) \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \boldsymbol{\xi}.$$

▸ Definition von Δ

Definition von Δ: Fortsetzungssatz

Es seien $\sigma \in [0,1]$ und $p \in [1,\infty]$.

Satz ([McL00], Theorem A.1)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit Lipschitz-*Rand. Dann gibt es einen linearen, stetigen Operator $E : W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)^d$ mit $Eu\big|_\Omega = u$ für alle $u \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.*

Bemerkung

- Im Fall $\sigma = 0$ (also L^p) kann E so gewählt werden, dass $Eu = \mathbb{1}_\Omega u$.
- Da $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d \overset{d}{\subset} \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$ und $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d \overset{d}{\hookrightarrow} W^{1,p}(\Omega)^d \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$, können wir einen Fortsetzungoperator E von $W^{1,p}(\Omega)^d$ stetig auf $\mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$ fortsetzen.

Definition von Δ

Wir definieren

$$\Delta : \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d \to \mathcal{C}\Big(\overline{\Omega}; \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d\Big) \text{ bzw. } \Delta : W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to L^p\Big(\Omega; W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d\Big),$$

$\sigma \in [0,1]$, $p \in [1,\infty)$, für $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$ bzw. $\mathbf{u} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ und $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ durch

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\xi} \mapsto E\mathbf{u}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}) - E\mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Für $\mathcal{C}$ ist das offensichtlich wohldefiniert. Für $W^{\sigma,p}$:

$$\begin{aligned}
\|\Delta\mathbf{u}\|^p_{L^p(\Omega;W^{\sigma,p}(\Omega)^d)} &= \int_\Omega \|E\mathbf{u}(\mathbf{x}+\cdot) - E\mathbf{u}(\mathbf{x})\|^p_{W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\le 2^{p-1}\left(\int_\Omega \|E\mathbf{u}\|^p_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega |E\mathbf{u}(\mathbf{x})|^p \operatorname{Vol}(\mathcal{H})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \\
&\le 2^{p-1}\Big(\operatorname{Vol}(\Omega)\|E\|^p\|u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)^d} + \operatorname{Vol}(\mathcal{H})\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big).
\end{aligned}$$

Beispiele

Section 3

Klassische Lösungstheorie

Picard-Lindelöff für DGL zweiter Ordnung

Satz ([Puh16], Satz 3.1.2)

Seien $y_0, v_0 \in X$ *gegeben und sei* $g : [0, T] \times \overline{B_X(y_0, r)} \to X$, $r > 0$, *stetig und genüge einer* Lipschitz-*Bedingung derart, dass es ein* $L > 0$ *so gibt, dass für alle* $t \in [0, T]$ *und alle* $v, w \in \overline{B_X(y_0, r)}$

$$\|g(t, v) - g(t, w)\| \leq L\|v - w\|$$

gilt. Dann ist das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) = g(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

lokal um $t_0 \in [0, T]$ *eindeutig lösbar.*

Ein analoger Satz gilt auch, wenn g auf ganz $[0, T] \times X$ definiert ist und dort die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Dann erhält man eine eindeutige globale Lösung auf $[0, T]$.

Der Fall $\mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$: globales Ergebnis

Satz

Sei eine Modellfunktion $T : \overline{\Omega} \times \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d \to \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d$ *so gegeben, dass*

(i) T *stetig in beiden Argumenten ist,*

(ii) *es ein* $L \geq 0$ *so gibt, dass für alle* $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ *und alle* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d$

$$\| T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{B}) \|_{0,\infty} \leq L \| \mathbf{A} - \mathbf{B} \|_{0,\infty},$$

(iii) *und es ein* $m \in L^\infty(\Omega)$ *so gibt, dass für die konstante Nullfunktion* $\mathbf{0} \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d$ *und fast alle* $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$

$$\| T(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \|_{0,\infty} \leq m(\mathbf{x}) \quad \textit{gilt.}$$

Dann ist $K_T : \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$ *wie oben wohldefiniert und* Lipschitz-*stetig.*

Der Fall $\mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$: globales Ergebnis

(1) Eine Bedingung der Art

(ii') Es gebe ein $\lambda \in L^\infty(\overline{\Omega})$ so, dass für fast alle $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ und alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d$ gilt $\| T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{B})\|_{0,\infty} \leq \lambda(\mathbf{x})\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{0,\infty}$.

genügt hier nicht, da man ansonsten die Lipschitz-Stetigkeit von K_T nur in einer $\operatorname{ess\,sup}$-Norm, nicht aber in $\mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$ zeigen kann.

(2) Da $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist, folgt mit (i), dass $T(\cdot, \mathbf{0}) : \overline{\Omega} \to \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d$ nach dem Satz von Heine gleichmäßig stetig ist. Das impliziert bereits (iii).

Der Fall $\mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$: lokales Ergebnis

Satz

Seien $r > 0$ *und* $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$, $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$ *beliebig gegeben. Setze* $\mathbf{A}_0 := \Delta \mathbf{y}_0(\mathbf{x}_0)$ *und* $\rho := \|\Delta\|\big(r + 2\|\mathbf{y}_0\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})^d}\big)$.
Ist eine Modellfunktion $T : \overline{\Omega} \times \overline{B_{\mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d}(\mathbf{A}_0, \rho)} \to \mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d$ *gegeben, die*

(i) *stetig in beiden Argumenten ist,*

(ii) *eine* Lipschitz-*Bedingung auf* $\overline{B_{\mathcal{C}(\overline{\mathcal{H}})^d}(\mathbf{A}_0, \rho)}$ *erfüllt,*

(iii) *und es ein* $m \in L^\infty(\Omega)$ *so gibt, dass für fast alle* $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$

$$\|T(\mathbf{x}, \mathbf{A}_0)\|_{0,\infty} \leq m(\mathbf{x}) \quad \textit{gilt.}$$

Dann ist $K_T : \overline{B_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})^d}(\mathbf{y}_0, r)} \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d$, *definiert wie oben, wohldefiniert und* Lipschitz-*stetig.*

Der Fall $L^p(\Omega)^d$

Satz

Sei $T : \Omega \times L^p(\mathcal{H})^d \to L^p(\mathcal{H})^d$ *gegeben mit:*

(i) *Es gibt ein* $\lambda \in L^\infty(\mathcal{H})$ *so, dass für fast alle* $\mathbf{x} \in \Omega$*, und alle* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L^p(\mathcal{H})^d$ *gilt*

$$\| T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{B}) \|_{0,p} \leq \lambda(\mathbf{x}) \| \mathbf{A} - \mathbf{B} \|_{0,p}.$$

(ii) *Es gibt ein* $m \in L^p(\mathcal{H})$ *so, dass für die konstante Nullfunktion* $\mathbf{0} \in L^p(\mathcal{H})^d$ *und fast alle* $\mathbf{x} \in \Omega$ *gilt*

$$\| T(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \|_{0,p} \leq m(\mathbf{x}).$$

Dann ist $K_T : L^p(\Omega)^d \to L^p(\Omega)^d$*, für* $\mathbf{u} \in L^p(\Omega)^d$ *und* $\mathbf{x} \in \Omega$*, wohldefiniert und* Lipschitz-*stetig.*

Section 4

Ansätze für Schwache Lösungstheorie

Sei zunächst $X = L^p(\mathcal{H})^d$ und $T : \Omega \times X \to X^*$. Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^p(\Omega)^d$ und betrachte

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega K_T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \\
&\int_\Omega \left[\int_{\mathcal{H}(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}} \right] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \mathbb{1}_{[0,\delta)}(|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|) \Big[-\mathbf{v}(\mathbf{x}) \Big] \cdot \\
&\qquad \Big[T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) - T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \Big]\,\mathrm{d}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \\
&= -\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \mathbb{1}_{[0,\delta)}(|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|) \Big[v(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Big] \cdot \\
&\qquad \Big[T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) - T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \Big]\,\mathrm{d}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

Peridynamische Form (Forts.)

Wir betrachten die zwei Summanden in T getrennt:

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \mathbb{1}_{[0,\delta)}(|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|)\Big[v(\widehat{\mathbf{x}})-\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big]\cdot T(\mathbf{x},\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))(\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x})\,\mathrm{d}(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{x}) =$$

$$\int_\Omega\int_{\mathcal{H}} \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})\cdot T(\mathbf{x},\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_\Omega \langle T(\mathbf{x},\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})),\Delta\mathbf{v}(\mathbf{x})\rangle\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \mathbb{1}_{[0,\delta)}(|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|)\Big[v(\widehat{\mathbf{x}})-\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big]\cdot T(\widehat{\mathbf{x}},\Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}}))(\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{x}) =$$

$$= -\int_\Omega \langle T(\widehat{\mathbf{x}},\Delta\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{x}})),\Delta\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{x}})\rangle\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}},$$

$$\Rightarrow k_T(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega K_T\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega \langle T(\mathbf{x},\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})),\Delta\mathbf{v}(\mathbf{x})\rangle\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Für eine Modellfunktion $T : \Omega \times L^p(\mathcal{H})^d \to L^q(\mathcal{H})^d$ ist unser Kandidat für eine Form also für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^p(\Omega)^d$

$$k_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := -\int_\Omega \langle T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})), \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Natürliche Voraussetzung für die Wohldefiniertheit:

- Für alle $\mathbf{u} \in L^p(\Omega)^d$ sei die Abbildung $T_\mathbf{u} : \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ in $L^q(\Omega; L^q(\mathcal{H})^d) = \big(L^p(\Omega; L^p(\mathcal{H})^d)\big)^*$, also

  $$T_\cdot : L^p(\Omega)^d \to \Big(L^p(\Omega; L^p(\mathcal{H})^d)\Big)^*$$

  und somit $k_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\langle T_\mathbf{u}, \Delta\mathbf{v} \rangle_{L^q(\Omega; L^q(\mathcal{H})^d) \times L^p(\Omega; L^p(\mathcal{H})^d)}$.

Offene Fragen (I)

- Der Beweis in [Puh16] basiert stark auf der Eingrenzung auf Kraftdichtefunktionen der Form $\widetilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta}$ mit einer skalaren Funktion a, die gewisse Singularitätsbedingungen erfüllt.
- Wie sollte eine solche Form für T gewählt werden?
  - T sollte ein Potentialoperator sein.
    [physikalisch & Beweis-technisch motiviert]
  - Beispiel 1, 2a, 2b bestehen aus:
    - einem Integraloperator

$$\Theta : \Omega \times X \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto c(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{H}} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |A(\boldsymbol{\xi})| \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

dem Potential $W = \frac{\kappa}{2}\Theta^2$ und der Modellfunktion

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) : \kappa c(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{A}) k(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\mathbf{A}(\cdot)}{|\mathbf{A}(\cdot)|}.$$

Offene Fragen (I)

- Der Beweis in [Puh16] basiert stark auf der Eingrenzung auf Kraftdichtefunktionen der Form $\widetilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta}$ mit einer skalaren Funktion a, die gewisse Singularitätsbedingungen erfüllt.
- Wie sollte eine solche Form für T gewählt werden?
  - T sollte ein Potentialoperator sein.
    [physikalisch & Beweis-technisch motiviert]
  - Beispiel 1, 2a, 2b bestehen aus:
    - einem Integraloperator

$$\Theta : \Omega \times X \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto c(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{H}} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(A(\boldsymbol{\xi}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

dem Potential $W = \frac{\kappa}{2}\Theta^2$ und der Modellfunktion

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) : \kappa c(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{A}) k(\mathbf{x}, \cdot) f'(\mathbf{A}(\cdot)).$$

Offene Fragen (I)

- Der Beweis in [Puh16] basiert stark auf der Eingrenzung auf Kraftdichtefunktionen der Form $\widetilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta}$ mit einer skalaren Funktion a, die gewisse Singularitätsbedingungen erfüllt.
- Wie sollte eine solche Form für T gewählt werden?
  - T sollte ein Potentialoperator sein.
    [physikalisch & Beweis-technisch motiviert]
  - Beispiel 1, 2a, 2b bestehen aus:
    - einem Integraloperator

$$\Theta : \Omega \times X \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto c(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{H}} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(A(\boldsymbol{\xi}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

dem Potential $W = \frac{\kappa}{2}\Theta^2$ und der Modellfunktion

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) : \kappa c(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{A}) k(\mathbf{x}, \cdot) f'(\mathbf{A}(\cdot)).$$

  - Beispiel 3 hat die Form $T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) : \boldsymbol{\xi} \mapsto \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{A})[\omega(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}]$ mit $\Sigma : \Omega \times X \mapsto \mathbb{R}^{d \times d}$.

Offene Fragen (II)

- Wie wählt man die peridynamische Form in $W^{\sigma,p}$, bzw. unter welchen Voraussetzungen ist ein gewähltes T und das zugehörige k_T auch auf $W^{\sigma,p} \times W^{\sigma,p}$ und $W^{\sigma-\eta,p} \times W^{\sigma+\eta(p-1),p}$ wohldefiniert.
- Wie genau sieht ein Potential Φ_T zu $\langle K_T \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := k_T(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ aus und findet man obene und untere Schranken für Φ?

William Charles Hector McLean.
Strongly elliptic systems and boundary integral equations.
Cambridge university press, 2000.

Dimitri Puhst.
Zur Existenztheorie nichtlokaler nichtlinearer Evolutionsgleichungen mit Anwendung in der Peridynamik.
PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2016.

Stewart A. Silling, M. Epton, Olaf Weckner, J. Xu, and E. Askari.
Peridynamic states and constitutive modeling, volume 88.
2007.

Stewart A. Silling.
Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48(1):175–209, 2000.

Stewart A. Silling and Richard B. Lehoucq.
Peridynamic theory of solid mechanics.
Advances in Applied Mechanics, 44:73—-168, 2010.