Zustandsbasierte Formulierung der Peridynamik

Schwache Lösungstheorie

Maximilian König

28. November 2016

Gliederung

Section 1

Eine Existenzaussage für Nichtmonotone Gleichungen

Die Peridynamische Bewegungsgleichung

Sei V ein Banachraum. Wir betrachten die Gleichung

$$\left\langle \mathbf{y}''(t), \mathbf{z} \right\rangle - k(\mathbf{y}(t), \mathbf{z}) = \langle \mathbf{b}(t), \mathbf{z} \rangle \,, \quad \mathbf{z} \in V, \quad \text{f. ü. in } (0, T) \tag{1}$$

mit einer Form $k : V \times V \to R$.

Im Ansatzraum $V = W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ konnten [EP15] unter Zuhilfenahme der folgenden Eigenschaften der Form k die Existenz von Lösungen zur Gleichung (7)

(E1) Die Form k ist stetig als Abbildung $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \times W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$ und linear im zweiten Argument.

(E2) Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Form k ebenso stetig ist als Abbildung $W^{\sigma-\varepsilon,p}(\Omega)^d \times W^{\sigma+\varepsilon(p-1),p} \to \mathbb{R}$.

(E3) Der zur Form k gehörende Operator K ist ein Potentialoperator, sein Potential $-\Phi$ erfüllt Koerzitivitätsbedingungen der Form

$$\Phi(\mathbf{y}) \geq \lambda |\mathbf{y}|_{\sigma,p} - c(1 + \|\mathbf{y}\|_{0,p}).$$

Existenzsatz

Satz ([EP15], Theorem 4.1)

Seien $p \in [2, \infty)$ *und* $\sigma \in (0,1)$. *Weiter seien eine rechte Seite* $\mathbf{b} \in L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)$ *sowie Anfangswerte* $\mathbf{y}_0 \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ *und* $\mathbf{v}_0 \in L^2(\Omega)^d$ *gegeben.*
Dann gibt es eine Funktion $\mathbf{y} \in L^\infty(0,T;W^{\sigma,p}(\Omega)^d)$ *mit*

$$\mathbf{y}' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d) \quad \textit{und} \quad \mathbf{y}'' \in L^1\big(0,T;(W^{\sigma,p}(\Omega)^d)^*\big),$$

das die Gleichung (7) *erfüllt, bzw.*

$$\mathbf{y}'' - K\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \textit{in } L^1\big(0,T;(W^{\sigma,p}(\Omega)^d)^*\big)$$

mit K *dem Operator aus (E3), sowie* $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ *in* $W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ *und* $\mathbf{y}'(0) = \mathbf{v}_0$ *in* $L^2(\Omega)^d$.

Es folgt eine Beweisskizze mit Bezug auf die Eigenschaften (E1) - (E3)

1. Galerkin-Approximation und diskrete Gleichung.

- Wir wissen $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d \overset{d}{\subset} W^{s,q}(\Omega)^d$ für beliebige $s \in (0,1)$ und $q \in [1,\infty)$.
- Wähle eine Galerkin-Basis $(\phi_n) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ für den Raum $W^{\sigma,p}(\Omega)^d$. $V_n := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$.
- Per Definition liegt auch $V_l \subset W^{\sigma+\varepsilon(p-1),p}(\Omega)^d \subsetneq W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.

1. Galerkin-Approximation und diskrete Gleichung.

- Wir wissen $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d \overset{d}{\subset} W^{s,q}(\Omega)^d$ für beliebige $s \in (0,1)$ und $q \in [1,\infty)$.
- Wähle eine Galerkin-Basis $(\phi_n) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ für den Raum $W^{\sigma,p}(\Omega)^d$. $V_n := \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$.
- Per Definition liegt auch $V_l \subset W^{\sigma+\varepsilon(p-1),p}(\Omega)^d \subsetneq W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.

$$V_l \subset W^{\sigma+\varepsilon(p-1),p} \overset{c,d}{\hookrightarrow} W^{\sigma,p} \overset{c,d}{\hookrightarrow} W^{\sigma-\varepsilon,p} \overset{c,d}{\hookrightarrow} L^2 \overset{c,d}{\hookrightarrow} (W^{\sigma,p})^*.$$

1. Galerkin-Approximation und diskrete Gleichung.

- Wir wissen $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d \overset{d}{\subset} W^{s,q}(\Omega)^d$ für beliebige $s \in (0,1)$ und $q \in [1,\infty)$.
- Wähle eine Galerkin-Basis $(\phi_n) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ für den Raum $W^{\sigma,p}(\Omega)^d$. $V_n := \mathrm{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$.
- Per Definition liegt auch $V_l \subset W^{\sigma+\varepsilon(p-1),p}(\Omega)^d \subsetneq W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.

$$V_l \subset W^{\sigma+\varepsilon(p-1),p} \overset{c,d}{\hookrightarrow} W^{\sigma,p} \overset{c,d}{\hookrightarrow} W^{\sigma-\varepsilon,p} \overset{c,d}{\hookrightarrow} L^2 \overset{c,d}{\hookrightarrow} (W^{\sigma,p})^*.$$

In klassischer Weise definieren wir das diskrete Ersatzproblem in V_n über die Galerkin-Basis. Die Stetigkeit von k aus (E1) garantiert die notwendige Carathéodory-Bedingung. Blow-Ups schließt man in Schritt 2 aus.

Annahme (E1)

Die Form k ist stetig als Abbildung $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \times W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$ und linear im zweiten Argument.

2. A-priori-Abschätzung für diskrete Lösungen

Wir testet die Diskrete Version von (7) mit $\mathbf{y}_n'(t)$

$$\left\langle \mathbf{y}_n''(t), \mathbf{y}_n'(t) \right\rangle - k(\mathbf{y}_n(t), \mathbf{y}_n'(t)) = \left\langle \mathbf{b}(t), \mathbf{y}_n'(t) \right\rangle$$

und nutzen $\langle \mathbf{y}_n''(t), \mathbf{y}_n'(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\mathbf{y}_n'(t)\|_{0,2}^2$ und mit (E3)

$$k(\mathbf{y}_n(t), \mathbf{y}_n'(t)) = -\left\langle \Phi'(\mathbf{y}_n(t)), \mathbf{y}_n'(t) \right\rangle = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(\mathbf{y}_n(t)).$$

Geschicktes Umstellen und Integrieren liefern:

$$\|\mathbf{y}_n'(t)\|_{0,2}^2 + \Phi(\mathbf{y}_n(t)) \leq c\left(1 + \|\mathbf{v}_{0,n}\|_{0,2}^2 + \Phi(\mathbf{y}_{0,n}) + \|\mathbf{b}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)}\right),$$

wobei $\mathbf{v}_{0,n}, \mathbf{y}_{0,n} \in V_n$, $n \in \mathbb{N}$, die Approximationen der Anfangswerte sind.

Annahme (E3)

Der zur Form k gehörende Operator K ist ein Potentialoperator, sein Potential $-\Phi$ erfüllt Koerzitivitätsbedingungen der Form

$$\Phi(\mathbf{y}) \geq \lambda |\mathbf{y}|_{\sigma,p} - c(1 + \|\mathbf{y}\|_{0,p}).$$

2. A-priori-Abschätzung für diskrete Lösungen

Geschicktes Umstellen und Integrieren liefern:

$$\|\mathbf{y}_n'(t)\|_{0,2}^2 + \Phi(\mathbf{y}_n(t)) \leq c\left(1 + \|\mathbf{v}_{0,n}\|_{0,2}^2 + \Phi(\mathbf{y}_{0,n}) + \|\mathbf{b}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)}\right),$$

wobei $\mathbf{v}_{0,n}, \mathbf{y}_{0,n} \in V_n$, $n \in \mathbb{N}$, die Approximationen der Anfangswerte sind.

Annahme (E3)

Der zur Form k gehörende Operator K ist ein Potentialoperator, sein Potential $-\Phi$ erfüllt Koerzitivitätsbedingungen der Form

$$\Phi(\mathbf{y}) \geq \lambda|\mathbf{y}|_{\sigma,p} - c(1 + \|\mathbf{y}\|_{0,p}).$$

Aus der Beschränktheit dieser Approximationsfolgen und den Koerizitivitätsbedingungen aus (E3) kann man nun die folgenden Beschränktheitsaussagen folgern: Die Folgen

$$(\mathbf{y}_n') \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d), (\mathbf{y}_n) \subset \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)^d) \cap L^\infty(0,T;W^{\sigma,p}(\Omega)^d)$$

sind in diesen Räumen jeweils beschränkt.

3. Grenzübergang

- Beschränktheit garantiert die Existenz von Grenzwerten geeigneter Teilfolgen

$$\mathbf{y}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{y} \text{ in } L^\infty(0,T;W^{\sigma,p}(\Omega)^d),\ \mathbf{y}_n' \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{w} \text{ in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d).$$

- Der wesentliche Schritt ist nun die Verifikation, dass $\mathbf{y} \in L^\infty(0,T;W^{\sigma,p}(\Omega)^d)$ die ursprüngliche Gleichung erfüllt.
- Dafür benötigen wir insbesondere starke Konvergenz um in k zum Grenzwert über zu gehen.
- Hierfür nutzen wir $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \overset{c}{\hookrightarrow} W^{\sigma-\varepsilon,p}(\Omega)^d$ und Lions-Aubin. Damit erhalten wir

$$\mathbf{y}_{n'} \to \mathbf{y} \quad \text{in } L^p(0,T;W^{\sigma-\varepsilon,p}(\Omega)^d.$$

- Mit der Stetigkeit aus (E2) können wir so zum Grenzwert übergehen.

Annahme (E2)

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Form k ebenso stetig ist als Abbildung $W^{\sigma-\varepsilon,p}(\Omega)^d \times W^{\sigma+\varepsilon(p-1),p} \to \mathbb{R}$.

Section 2

Einführung: Zustandsbasierte Peridynamische Form

Zustände

- Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit Lipschitz-Rand, $d = 3$ und $T > 0$.
- $\delta > 0$ war der peridynamische Horizont, $\mathcal{H} := B(0, \delta)$.
- Wir setzen $\mathcal{H} := B(\mathbf{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^d$. Ein **Zustand** ist eine Abbildung $\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$.
- Für Funktionen $\mathbf{y} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ definieren wir Zustände über

$$\begin{aligned} \Delta : W^{\sigma,p}(\Omega)^d &\to L^p(\Omega; W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d), \\ \mathbf{y} &\mapsto \Big(\mathbf{x} \mapsto E\mathbf{y}(\mathbf{x} + \cdot) - \mathbf{y}(\mathbf{x})\Big). \end{aligned}$$

Erinnerung klassische Lösungstheorie:

Zu einer Modellfunktion $T : \Omega \times L^p(\mathcal{H})^d \to L^q(\mathcal{H})^d$ definieren wir den zustandsbasierten peridynamischen Operator K für $\mathbf{y} \in L^p(\Omega)^d$ und $\mathbf{x} \in \Omega$ über

$$K\mathbf{y}(\mathbf{x}) := \int_{(\mathcal{H}+\mathbf{x})\cap\Omega} T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})\, d\widehat{\mathbf{x}}.$$

Nichtlokale Partielle Integration

Satz

Seien T und K wie oben definiert. Dann gilt für beliebige $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in L^p(\Omega)^d$:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (K\mathbf{y})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\frac{1}{2} \iint_{\substack{\Omega \times \Omega \\ |\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| < \delta}} \Big[T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) \Big] \\
&\qquad \cdot \Big[\mathbf{z}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{z}(\mathbf{x}) \Big] \, \mathrm{d}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}) \\
&= -\int_\Omega \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))(\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Nichtlokale Partielle Integration

Satz

Seien T und K wie oben definiert. Dann gilt für beliebige $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in L^p(\Omega)^d$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (K\mathbf{y})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}& \\
&= -\frac{1}{2} \iint_{\substack{\Omega\times\Omega \\ |\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|<\delta}} \Big[T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))(\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}) - T(\widehat{\mathbf{x}}, \Delta\mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}}))(\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) \Big] \\
&\qquad \cdot \Big[\mathbf{z}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{z}(\mathbf{x}) \Big]\,\mathrm{d}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}) \\
&= - \int_\Omega \int_{\mathcal{H}} T(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))(\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Abkürzungen:

- $\mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} =: \mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})$ in $\mathcal{H}$
- $\mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\mathbf{x} =: \mathrm{d}\varpi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ in $\Omega \times \mathcal{H}$.

Die Funktion $\mathbf{t}$ und die peridynamische Form k

Sei $X \subset L^p(\mathcal{H})^d$ ein Banach-Raum und $T : \Omega \times X \to L^q(\mathcal{H})^d$.

Wir identifizieren T mit einer Funktion $\mathbf{t} : \Omega \times X \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$ via

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) := T(\mathbf{x}, \mathbf{A})(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{A} \in X, \text{ f. a. } \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}.$$

Mit dieser Funktion definieren wir eine **zustandsbasierte peridynamiche Form**

Definition

Zu einer Funktion $\mathbf{t} : \Omega \times X \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$ definieren wir die **zustandsbasierte peridynamische Form** $k : V \times V \to \mathbb{R}$ über

$$k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) := -\iint_{\Omega \times \mathcal{H}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\varpi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,$$

vorausgesetzt $\mathbf{t}$ ist so gegeben, dass für alle $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ die Abbildung $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})$ in $L^1(\Omega \times \mathcal{H}, \varpi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))$ liegt.

Beispiel: Bindungsbasierte Form

Mit der Modellfunktion $T : (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{1}{2}\mathbf{f}(\,\cdot\,, \mathbf{A}(\cdot))$ mit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ der paarweiser Kraftfunktion in einem bindungsbasierten Modell entspricht das zustandsbasierte dem bindungsbasierten Modell.

Dementsprechend sei

$$\mathbf{t} : (\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \frac{1}{2}\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})).$$

Dann ist die resultierende peridynamische Form

$$\begin{aligned} k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= -\int_\Omega \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= -\int_\Omega \int_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \frac{1}{2}\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})) \cdot \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{\Omega\times\Omega} \mathbb{1}_{[0,\delta)}(|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|) \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x})(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})) \cdot \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{x}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{\substack{\Omega\times\Omega \\ |\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| < \delta}} \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{y}(\mathbf{x})) \cdot \big(\mathbf{z}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{z}(\mathbf{x})\big) \,\mathrm{d}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Beispiel: Form via L^p-Norm I

Sei $p \in [1, \infty)$. Wir definieren

$$\phi_p : \Omega \times L^p(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \int_{\mathcal{H}} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^p \, \mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi}).$$

Offensichtlich gilt $\phi_p(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|_{0,p}^p$ für alle $\mathbf{A} \in L^p(\mathcal{H})^d$ und $\mathbf{x} \in \Omega$.

Sei weiter $r \in (0, \infty)$ eine Konstante und

$$\mathbf{t} : \Omega \times L^p(\mathcal{H})^d \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d, (\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \phi_p(\mathbf{x}, \mathbf{A})^r \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{p-2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}).$$

Wir untersuchen für $\mathbf{x} \in \Omega$ und $\mathbf{A} \in L^p(\mathcal{H})^d$ die Abbildung $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi})$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \cdot)\|_{0,q}^q &= \int_{\mathcal{H}} |\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi})|^q \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathcal{H}} |\phi_p(\mathbf{x}, \mathbf{A})|^{qr} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{q(p-1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\ &= |\phi_p(\mathbf{x}, \mathbf{A})|^{qr+1} \leq \|\mathbf{A}\|_{0,p}^{p(qr+1)} < \infty. \end{aligned}$$

Beispiel: Form via L^p-Norm II

Für die Wohldefiniertheit von k haben wir von $\mathbf{t}$ gefordert, dass der folgende Ausdruck endlich sei:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times\mathcal{H}} &\mathbf{t}(\mathbf{x},\Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\xi})\cdot\Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\varpi(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\\ &\le\left(\iint_{\Omega\times\mathcal{H}}|\mathbf{t}(\mathbf{x},\Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\xi})|^q\,\mathrm{d}\varpi(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\qquad\cdot\left(\iint_{\Omega\times\mathcal{H}}|\Delta\mathbf{z}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})|^p\,\mathrm{d}\varpi(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le\left(\int_\Omega\|\mathbf{t}(\mathbf{x},\Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}),\,\cdot\,)\|_{0,q}^q\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^q\|\Delta\mathbf{z}\|_{L^p(\Omega;L^p(\mathcal{H})^d)}\end{aligned}$$

Aufgrund der eben gezeigten Abschätzung sieht man, dass dies nur der Fall ist, falls

$$\|\Delta\mathbf{y}\|_{L^{p(qr+1)}(\Omega;L^p(\mathcal{H})^d)}<\infty\qquad\text{gilt.}$$

Beispiel: Form via L^p-Norm III

Mit den Abbildungseigenschaften von Δ

$$\begin{aligned} \Delta : L^q(\Omega)^d &\to L^q(\Omega; L^q(\mathcal{H})^d), \\ \Delta : W^{\sigma,q}(\Omega)^d &\to L^q(\Omega; W^{\sigma,q}(\mathcal{H})^d) \end{aligned}$$

für $q \in [1, \infty)$ beliebig ist klar, dass für $V = L^s(\Omega)^d$ mit $s := p\big(\frac{rp}{p-1} + 1\big)$, $p \in [1, \infty)$ und $r \in (0, \infty)$, und somit $X = L^s(\mathcal{H})^d \hookrightarrow L^p(\mathcal{H})^d$ die zustandsbasierte peridynamische Form $k : V \times V \to \mathbb{R}$ zu $\mathbf{t}$ wie oben wohldefiniert ist.

Section 3

Formen auf $V = W^{\sigma,p}(\Omega)^d$

Das Funktional $\theta_{\sigma,p}$

Es seien $p \in [1, \infty)$ und $\sigma \in (0, 1)$ fest gewählt. Wir schreiben

$$\theta_{\sigma,p}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) := \int_{\mathcal{H}} |\boldsymbol{\xi}|^{-(d+\sigma p)} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^p \, \mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{2}$$

Lemma

Neben p und σ seien $\tau \in (0, \sigma)$ und $\alpha \in [1, p)$ sowie $\mathbf{y} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ gegeben. Dann gelten für θ aus (2) die Abschätzungen

$$\int_{\Omega} \theta_{\sigma,p}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq |\mathbf{y}|^p_{\sigma,p} \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \theta_{\tau,\alpha}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))^{\frac{p}{\alpha}} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq c |\mathbf{y}|^p_{\sigma,p}$$

mit $c > 0$ einer geeigneten Konstanten.

Form via $\theta_{\sigma,p}$

Satz

Es sei $\mathbf{t} : \Omega \times W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$ *gegeben mit*

(A*) $\mathbf{t}$ *sei messbar im 1. und 3. Argument und stetig im 2.*

(A4) *Seien* $\alpha \in [1, p)$, $\tau \in (0, \sigma)$ *sowie* $r \in \left(0, \frac{p}{\alpha} - 1\right)$. *Es gebe Konstanten* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, $\eta \in [0, d + \sigma)$ *und* $\gamma \in [0, d + \tau\alpha]$ *so, dass für alle* $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{A} \in W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d$ *und* $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}$ *gilt:*

$$|\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi})| \leq \left(\theta_{\tau,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{A})\right)^r \left(c_1 |\boldsymbol{\xi}|^{-\eta} + c_2 |\boldsymbol{\xi}|^{-\gamma} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{\alpha-1}\right). \tag{3}$$

Unter diesen Annahmen $k : W^{\sigma,p}(\Omega)^d \times W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$ *wohldefiniert, linear im zweiten Argument, stetig in beiden Argumenten und es gilt die Abschätzung*

$$|k(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \leq c |\mathbf{y}|_{\sigma,p}^{r\alpha} \left(1 + |\mathbf{y}|_{\sigma,p}^{\alpha-1}\right) |\mathbf{z}|_{\sigma,p}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d. \tag{4}$$

Bemerkungen

Der Satz entspricht gerade der Eigenschaft (E1).

Im Beweis zeigt man eigentlich für k die Abschätzung

$$|k(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \leq c \left(|\mathbf{y}|^{r\alpha}_{\tau', r\alpha p^*} + |\mathbf{y}|^{r\alpha+\alpha-1}_{\tau', (r\alpha+\alpha-1)p^*} \right) |\mathbf{z}|_{\sigma, p}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$$

mit $\tau' \in (\tau, \sigma)$ beliebig.

Ist das zugrunde liegende $\mathbf{t}$ sogar als Abbildung $\Omega \times W^{\tau',s}(\mathcal{H})^d \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$, $s \in \left[(r\alpha + \alpha - 1)p^*, p\right]$, gegeben, und erfüllt $\mathbf{t}$ die Messbarkeits- und Stetigkeitsbedingungen aus (A*) auf diesen Mengen, so kann man völlig analog zeigen, dass $k : W^{\tau',s} \times W^{\sigma,p} \to \mathbb{R}$ stetig abbildet.

Zusammen mit der stetigen Einbettung $W^{\tau'',p}(\Omega)^d \hookrightarrow W^{\tau',s}(\Omega)^d$ für ein $\tau'' \in (\tau', \sigma)$ erhalten wir so auch die Eigenschaft (E2).

Alternative Form via $\theta_{\sigma,p}$

Satz

Es sei $\mathbf{t} : \Omega \times W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$ *gegeben mit (A*) und*

(A4') *Es sei* $r \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$, *und es gebe Konstanten* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, $\eta \in [0, d+1)$ *und* $\gamma \in [0, d + \sigma p]$ *so, dass für alle* $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{A} \in W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d$ *und* $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}$ *gilt:*

$$|\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi})| \leq \big(\theta_{\sigma,p}(\mathbf{x}, \mathbf{A})\big)^r \Big(c_1 |\boldsymbol{\xi}|^{-\eta} + c_2 |\boldsymbol{\xi}|^{-\gamma} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{p-1}\Big). \tag{5}$$

Seien $s \in (p, \infty)$ *mit* $s \geq \left(\frac{1}{p} - r\right)^{-1}$ *und* $\tau' \in [\sigma, 1)$ *so, dass* $\eta < d + \tau'$ *gilt. Dann ist* k *wohldefiniert als Abbildung* $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \times W^{\tau',s}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$, *linear im zweiten und stetig in beiden Argumenten. Weiterhin gilt die Abschätzung*

$$|k(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \leq c \left(|\mathbf{y}|_{\sigma,p}^{rp} + |\mathbf{y}|_{\sigma,p}^{rp-1} \right) |\mathbf{z}|_{\tau',s}, \quad \mathbf{y} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d, \mathbf{z} \in W^{\tau',s}(\Omega)^d.$$

Potentialoperatoren

Es sei $V := W^{\sigma,p}(\Omega)^d$. Wir erhalten einen Operator $K : V \to V^*$ über

$$\langle K\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle := k(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V.$$

Offensichtlich ist K demistetig.

Es ist $-K : V \to V^*$ ein Potentialoperator, falls es eine Abbildung $\Phi : V \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\langle -K\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = -k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \delta\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\Phi(\mathbf{y} + h\mathbf{z}) - \Phi(\mathbf{y})\big)$$

Potential zur Form k: Bindungsbasierte Theorie

In der Bindungsbasierten Theorie ergab sich das Potential zu der Form k mit

$$k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\frac{1}{2} \iint\limits_{\substack{\Omega\times\Omega \\ |\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|<\delta}} a(|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|, |\mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}})-\mathbf{y}(\mathbf{x})|)\big(\mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}})-\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)\big(\mathbf{z}(\widehat{\mathbf{x}})-\mathbf{z}(\mathbf{x})\big)\, \mathrm{d}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}).$$

direkt über die Struktur aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega\times\Omega} \left[\int_0^{|\mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}})-\mathbf{y}(\mathbf{x})|} a(|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|, s) s \, \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}) \tag{6}$$

ergeben. Dabei ergibt sich die Struktur von k mit einer Funktion $a : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ aus der Annahme der Elastizität.

Potential zur Form k: Zustandsbasierte Theorie

Definition

Sei $X \subset \{\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d\}$ ein Banach-Raum. Eine einfache Modellfunktion $T : \Omega \times X \to X^*$ heißt **elastisch**, falls es eine Funktion $W : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ so gibt, dass

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \nabla_{\mathbf{A}} W(\mathbf{x}, \mathbf{A}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{A} \in X.$$

Potential zur Form k: Zustandsbasierte Theorie

Definition

Sei $X \subset \{\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d\}$ ein Banach-Raum. Eine einfache Modellfunktion $T : \Omega \times X \to X^*$ heißt **elastisch**, falls es eine Funktion $W : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ so gibt, dass

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \nabla_{\mathbf{A}} W(\mathbf{x}, \mathbf{A}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{A} \in X.$$

Annahme (A5)

Zu p, σ und $\mathbf{t}$ wie in Satz 3.2 gebe es eine Funktion $w : \Omega \times W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d$ gilt

$$\int_{\mathcal{H}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})$$

$$= \delta w(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(w(\mathbf{x}, \mathbf{A} + h\mathbf{B}) - w(\mathbf{x}, \mathbf{A})\big).$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Gâteaux-Ableitungen

Satz

Es sei V ein Banach-*Raum und $\Phi : V \to R$ so, dass für alle $u, v \in V$ die* Gâteaux-*Ableitung*

$$\delta\Phi(u, v) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big[\Phi(u + hv) - \Phi(u)\big]$$

existiert. Weiter sei die Abbildung $[0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \delta\Phi(u + tv, v)$ für alle $u, v \in V$ stetig. Dann gilt für alle $u, v \in V$

$$\Phi(u) - \Phi(v) = \int_0^1 \delta\Phi(v + t(u - v), u - v)\,\mathrm{d}t$$

und insbesondere $\Phi(u) = \Phi(0) + \int_0^1 \delta\Phi(tu, u)\,\mathrm{d}t$.

Potential zur Form k: Zustandsbasierte Theorie (Forts.)

Seien $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.

$$\begin{aligned} -\int_0^1 k(t\mathbf{y}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \int_\Omega \int_{\mathcal{H}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t\Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \delta w(\mathbf{x}, t\Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}), \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega w(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x})) - w(\mathbf{x}, \mathbf{0})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$-\int_0^1 k(\mathbf{z} + t(\mathbf{y} - \mathbf{z}), \mathbf{y} - \mathbf{z})\,\mathrm{d}t = \int_\Omega w(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x})) - w(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{z}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Dementsprechend ist ein Potential von $-K$ die Funktion

$$\Phi : W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R},\ \mathbf{y} \mapsto \int_\Omega w(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Seien $\alpha, p \in [2, \infty)$ mit $\alpha < p$ und $\tau, \sigma \in (0,1)$ mit $\tau < \sigma$. Sei weiter $r \in \left(0, \frac{p}{\alpha} - 1\right)$. Wir definieren

$$w : \Omega \times W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \mapsto \frac{1}{(r+1)\alpha} \theta_{\tau,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{A})^{r+1}.$$

Dann ist für $\mathbf{x} \in \Omega$ und $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ beliebig

$$\delta w(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \theta_{\sigma,p}(\mathbf{x}, \mathbf{A})^r \int_{\mathcal{H}} |\boldsymbol{\xi}|^{-(d+\tau\alpha)} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{\alpha-2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})$$

Definieren wir also $\mathbf{t} : \Omega \times W^{\sigma,p}(\mathcal{H})^d \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$ via

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) := \theta_{\tau,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{A})^r \mathbb{1}_{\Omega}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^{-(d+\tau\alpha)} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{\alpha-2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}),$$

Beispiel: Zustandsbasierte Form und deren Potential II

So wissen wir, dass die zugehörige peridynamische Form k einen Potentialoperator mit Potential $\Phi : W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_\Omega w(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{(r+1)\alpha} \int_\Omega \theta_{\tau,\alpha}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}))^{r+1}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

für beliebige $\mathbf{y} \in W^{\sigma,p}(\Omega)^d$ induziert.

Problem: Mangelnde Koerzitivität I

Im Beispiel eben hat das Potential die Form

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(r+1)\alpha}\int_\Omega \left(\int_{\mathcal{H}} |\boldsymbol{\xi}|^{-(d+\tau\alpha)}|\Delta\mathbf{y}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi})|^\alpha \,\mathrm{d}\varpi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})\right)^{r+1} \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\geq \frac{1}{(r+1)\alpha}\int_\Omega (r+1)\left(\int_{\mathcal{H}} \frac{|\mathbf{y}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi})-\mathbf{y}(\mathbf{x})|^\alpha}{|\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|^{d+\tau\alpha}} \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right) - r\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\geq \mu \iint_{\substack{\Omega\times\Omega \\ |\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|<\delta}} \frac{|\mathbf{y}(\widehat{\mathbf{x}})-\mathbf{y}(\mathbf{x})|^\alpha}{|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|^{d+\tau\alpha}}\,\mathrm{d}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{x}}) - \kappa_0,
\end{aligned}
$$

Aus dieser Abschätzung kann man das folgende herleiten (vgl. [EP15, Proposition 4.4])

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\mathbf{y}) \geq -\kappa, \\
&\Phi(\mathbf{y}) \geq \lambda\|\mathbf{y}\|_{0,\alpha}^\alpha - \kappa\left(1+\|\mathbf{y}\|_{0,1}^\alpha\right), \\
&\Phi(\mathbf{y}) \geq \lambda|\mathbf{y}|_{\tau,\alpha}^\alpha - \kappa\left(1+\|\mathbf{y}\|_{0,\alpha}^\alpha\right).
\end{aligned}
$$

Problem: Mangelnde Koerzitivität II

Ist $\tau\alpha \geq d$ oder $\frac{d\alpha}{d-\tau\alpha} \geq p$, so erhält man mithilfe der klassischen Einbettungen $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \hookrightarrow L^q(\Omega)^d$:

$$\Phi(\mathbf{y}) \geq c\lambda\|\mathbf{y}\|_{0,p}^{\alpha} - \kappa\left(1 + \|\mathbf{y}\|_{0,\alpha}^{\alpha}\right).$$

Problem: Mangelnde Koerzitivität II

Ist $\tau\alpha \geq d$ oder $\frac{d\alpha}{d-\tau\alpha} \geq p$, so erhält man mithilfe der klassischen Einbettungen $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \hookrightarrow L^q(\Omega)^d$:

$$\Phi(\mathbf{y}) \geq c\lambda \|\mathbf{y}\|_{0,p}^{\alpha} - \kappa \left(1 + \|\mathbf{y}\|_{0,\alpha}^{\alpha}\right).$$

Aber: Φ ist nicht schwach koerzitiv in $W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.

- Sei $\mathbf{y} \in W^{\tau,\alpha}(\Omega)^d \setminus W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.
- Dann gibt es eine Folge $(\mathbf{y}_l) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ mit $\mathbf{y}_l \to \mathbf{y}$ in $W^{\tau,\alpha}(\Omega)^d$.
- Es ist $(|\mathbf{y}_l|_{\tau,\alpha})$ beschränkt und somit auch $(\theta_{\tau,\alpha}(\mathbf{y}_l))$.
- Aber $(\mathbf{y}_l)$ ist unbeschränkt in $W^{\sigma,p}(\Omega)^d$.

Zusammenfassung zur Form k I

Ist $\mathbf{t} : \Omega \times W^{\tau,\alpha}(\Omega)^d \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$ mit

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) := \theta_{\tau,\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{A})^r \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^{-(d+\tau\alpha)} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{\alpha-2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}),$$

so ist das dazugehörige k bzw. dessen Operator K:

- k ist stetig als Abbildung $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \times W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$. (E1)
- k ist stetig als Abbildung $W^{\tau',p}(\Omega)^d \times W^{\sigma,p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$, $\tau' \in (\tau, \sigma)$. (E2')
- $-K$ hat ein Potential Φ, dieses ist **nicht** schwach koerzitiv in $W^{\sigma,p}(\Omega)^d$. (E3 gilt nicht)

Zusammenfassung zur Form k II

Ist $\mathbf{t} : \Omega \times W^{\sigma,p}(\Omega)^d \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d$ mit

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) := \theta_{\sigma,p}(\mathbf{x}, \mathbf{A})^r \mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) |\boldsymbol{\xi}|^{-(d+\tau\alpha)} |\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})|^{p-2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}),$$

so ist das dazugehörige k bzw. dessen Operator K:

- k ist stetig als Abbildung $W^{\sigma,p}(\Omega)^d \times W^{\tau',s}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$. (E1')
- Die Abbildung $\mathbf{y} \mapsto k(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $W^{\tau',p}(\Omega)^d \to \mathbb{R}$ ist **nicht** stetig für nichttriviale $\mathbf{z}$ und irgendein $\tau \in (0, \sigma)$. (E2 gilt nicht)
- $-K$ hat ein Potential Φ, dieses erfüllt die richtigen Abschätzungen nach unten. (E3)

Auflösung I

Um eine lösbare Gleichung im zustandsbasierten Rahmen zu erhalten, rekombinieren wir die bindungsbasierte und die Zustandsbasierte Gleichung:

$$\left\langle \mathbf{y}''(t), \mathbf{z} \right\rangle - c_0 k_0(\mathbf{y}(t), \mathbf{z}) - c_1 k_1(\mathbf{y}(t), \mathbf{z}) = \langle \mathbf{b}(t), \mathbf{z} \rangle\,, \tag{7}$$

für alle $\mathbf{z} \in V$ und f. ü. in $(0, T)$. Dabei sei

- k_0 eine bindungsbasierte Form, bzw. wie die Beispiele zuvor mit $\theta_{\sigma,p}$ aber $r = 0$.
- k_1 eine zustandsbasierte Form auf Basis von $\theta_{\tau,\alpha}$.

Dann erfüllen $k := c_0 k_0 + c_1 k_1$ bzw. $K := c_0 K_0 + c_1 K_1$ die Eigenschaften (E1) - (E3).

Auflösung II

Man erhält im Beweis

$$\|\mathbf{y}_n'(t)\|_{0,2}^2 + \Phi(\mathbf{y}_n(t)) \le c\big(1 + \|\mathbf{v}_{0,n}\|_{0,2}^2 + \Phi(\mathbf{y}_{0,n}) + \|\mathbf{b}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)}\big).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_n'(t)\|_{0,2}^2 &\le M = M(\mathbf{v}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{b}), \\ \|\mathbf{y}_n(t)\|_{0,2} &\le \|\mathbf{y}_0\|_{0,2} + \int_0^t \|\mathbf{y}_n'(\tau)\|_{0,2}\,\mathrm{d}\tau \le \|\mathbf{y}_0\|_{0,2} + t\sqrt{M} =: \widetilde{M}, \\ \lambda\|\mathbf{y}_n(t)\|_{0,p}^p &\le \kappa(1 + \|\mathbf{y}_n(t)\|_{0,1}^p) + M \le \kappa(1 + \widetilde{M}^p) + M. \end{aligned}$$

κ und λ können unabhängig von c_0 und c_1 gewählt werden.

Damit kann man für $n \to \infty$ eine Art „Energieungleichung“ für die Lösung $\mathbf{y}$ in $L^p(\Omega)$ herleiten.

Eine Folge von Lösungen (y_ε) zu den Formen $k := \varepsilon k_0 + c_1 k_1$ ist also beschränkt in $L^p(\Omega)^d$ (und in $W^{\tau,\alpha}$, aber im Allgemeinen nicht in $W^{\sigma,p}$).

Section 4

Quellen

Quellen I

- E. Emmrich und D. Puhst. “Measure-valued and weak solutions to the nonlinear peridynamic model in nonlocal elastodynamics.” English. In: *Nonlinearity* 28.1 (2015), S. 285–307. issn: 0951-7715; 1361-6544/e. doi: `10.1088/0951-7715/28/1/285`.
- S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu und E. Askari. “Peridynamic states and constitutive modeling.” English. In: *J. Elasticity* 88.2 (2007), S. 151–184. issn: 0374-3535; 1573-2681/e. doi: `10.1007/s10659-007-9125-1`.
- S. A. Silling und R. B. Lehoucq. “Peridynamic theory of solid mechanics”. In: *Advances in Applied Mechanics* 44 (2010), S. 73–168.