Differentialgleichungen IIA

gelesen von Hans-Christian Kreusler
geTEXt von Maximilian König

Inhaltsverzeichnis

Disclaimer: Dieses Skript habe ich während live während der Vorlesung geschrieben und später beim Lernen für die Prüfung probegelesen. Sämtliche verbleibenden Fehler liegen höchst wahrscheinlich an meiner mangelnden Sorgfalt. Fehlerkorrekturen gerne per Mail an *maxkoe<at>math.tu-berlin.de*.

1 Verallgemeinerte Ableitung im Endlichdimensionalen

Motivation: Wir betrachten das Spielzeugbeispiel

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (a,b), \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases}$$

Idee:

(1) Multipliziere die Gleichung mit einer hinreichend glatten Funktion v

(2) Integriere dann über (a,b):

$$-\int_a^b u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) Partielle Intergration:

$$-u'(x)v(x)\Big|_a^b + \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies erlaubt uns, vorausgesetzt wir fordern für v ebenfalls $v(a) = 0 = v(b)$, die folgende äquivalente Problemformulierung:

$$\text{Suche ein } u \text{ mit } u(a) = 0 = u(b) : \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle hinreichend glatten v mit $v(a) = 0 = v(b)$.

Erinnerung: L^p-Räume

Es sei stets X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und H ein Hilbert-Raum mit Norm $|\cdot|$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Der **Dualraum** eines Banachraums ist

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ linear, beschränkt und stetig}\}.$$

Die **duale Paarung** für $f \in X^*$ und $x \in X$ ist:

$$\langle f, x\rangle := \langle f, x\rangle_{X^* \times X} := f(x).$$

Die **duale Norm** ist

$$\|f\|_{X^*} := \|f\|_* := \sup_{x \neq 0} \frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|}.$$

X heißt **separabel**, falls es eine abzählbare, dichte Teilmenge gibt.

Der **Bidualraum** von X ist $X^{**} := (X^*)^* := \{T : X^* \to \mathbb{R} | T \text{ linear und beschränkt}\}$. Die **kanonische Einbettung** $i : X \to X^{**}$ ist die Funktion für die gilt, dass für alle $x \in X$ und $f \in X^*$ gilt

$$\langle i(x), f\rangle_{X^{**} \times X^*} = \langle f, x\rangle_{X^* \times X}.$$

Dann ist i isometrisch und damit injektiv. Der Banachraum X heißt **reflexiv**, falls i surjektiv ist. Es ist insbesondere X isometrisch isomorph zu X^{**}. [1]

$L^p(a,b)$ ist die Menge von Äquivalenzklassen fast überall gleicher meßbarer Funktionen u mit $\|u\|_{0,p} < \infty$, wobei für $p \in [1,p)$

$$\|u\|_{0,p} := \left(\int_a^b |u(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

und für $p = \infty$

$$\|u\|_{0,\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in (a,b)} |u(x)| := \inf\{c \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq c \text{ für fast alle } x \in (a,b)\}.$$

Eigenschaften der L^p-Räume:

- Für $p \in [1,\infty]$ ist $(L^p(a,b), \|\cdot\|_{0,p})$ ein Banach-Raum.
- Für $p = 2$ ist $L^2(a,b)$ ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{0,2} := \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

- Für $p \in [1,\infty)$ ist $L^p(a,b)$ separabel; $L^\infty(a,b)$ ist nicht separabel.
- Für $p \in (1,\infty)$ ist $(L^p(a,b))^* \cong L^q(a,b)$ wobei q die Gleichung $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ erfüllt. Ein isometrischer Isomorphismus $T : L^q(a,b) \to (L^p(a,b))^*$ ist für jedes $u \in L^q(a,b)$ gegeben durch

$$\langle Tu, v\rangle := \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

[1] Es gibt Beispiele für Banachräume X, die isometrisch isomorph zu ihrem Bidualraum sind, wo i aber nicht surjektiv ist.

für alle $v \in L^p(a,b)$. Dann ist T wohldefiniert, linear und beschränkt, isometrisch und surjektiv. Für die Wohldefiniertheit und Beschränktheit betrachte

$$\|Tu\|_* = \sup_{\|v\|_{0,p}=1} \langle Tu, v\rangle = \sup_{\|v\|_{0,p}=1} \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Hölder}}{\leq} \sup_{\|v\|_{0,p}=1} \|u\|_{0,q}\|v\|_{0,p} = \|u\|_{0,q}.$$

- Es ist $\left(L^1(a,b)\right)^* = L^\infty(a,b)$, aber $(L^\infty(a,b))^* \supsetneq L^1(a,b)$. Also ist $L^p(a,b)$ reflexiv genau dann wenn $p \in (1,\infty)$; $L^1(a,b)$, $L^\infty(a,b)$ sind nicht reflexiv.
- Für $f \in L^1(a,b)$ gilt:
  (i) Stetigkeit im L^1-Mittel:
  $$\lim_{\substack{h\to 0\\ x+h\in(a,b)}} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$
  (ii)
  $$\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(\xi) - f(x)|\,\mathrm{d}\xi = 0, \text{ für fast alle } x \in (a,b),$$
  (iii)
  $$\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x), \text{ für fast alle } x \in (a,b)$$
- Satz von Lebesgue: Seine $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar, $f_n \to f$ fast überall und es gibt ein $g \in L^1(a,b)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in (a,b)$. Dann sind $f, f_n \in L^1(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$ und
  $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Umkehrung des Satzes von Lebesgue: Seien $f_n, f \in L^1(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \to f$ in $L^1(a,b)$, d. h. $\|f_n - f\|_{0,1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n'})$ und $g \in L^1(a,b)$ mit
  (i) $|f_{n'}| \leq g$ fast überall in (a,b) und
  (ii) $f_{n'} \longrightarrow f$ fast überall in (a,b).

Zuletzt definieren wir noch die Räume $L^1_{\text{loc}}(a,b)$ und $C_c^\infty(a,b)$.

$$L^1_{\text{loc}}(a,b) := \left\{f : (a,b) \to \mathbb{R} \middle| f\big|_K \in L^1(K) \text{ für alle kompakten Teilmengen } K \subset (a,b)\right\}.[2]$$

Wir haben $L^1(a,b) \subsetneq L^1_(a,b)$. Zum Beispiel ist f mit $f(x) = x^{-1}$ für alle $x \in (0,1)$ Element von $L^1_{\text{loc}}(0,1) \setminus L^1(0,1)$.

Weiterhin
$$C_c^\infty(a,b) := C_0^\infty(a,b) := \{u \in C^\infty(a,b) | \operatorname{supp} u \text{ ist kompakt}\},$$
wobei $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in (a,b) | u(x) \neq 0\}}$. Insbesondere ist also $u(x) = 0$ in kleinen Umgebungen von a und b.

(1.1) Definition. Seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$. Dann heißt v **schwache Ableitung** von u, falls

$$\int_a^b u(x)\varphi(x) = -\int_a^b v(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(a,b).$$

Wir schreiben dann (wie gewohnt) $v = u'$.

Bemerkung.
- Ist u differenzierbar auf (a,b), so stimmen klassiche und schwache Ableitung überein, im dem Sinne, dass die klassische Ableitung ein Repräsentant der L^1_{loc}-Äquivalenzklasse ist.

[2] Für $K \subset (a,b)$ kompakt gilt $\operatorname{dist}(\partial(a,b), K)) > 0$.

- Klassische Ableitungen erfüllen die obige Gleichung, welche dann mit der partiellen Integration übereinstimmt.
- Die schwache Ableitung ist eindeutig per Fundamentallemma der Variationsrechnung.

(1.2) Beispiel.
- $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist schwach differenzierbar mit $u'(x) = -1 + 2 \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}$.
- Die **Heaviside-Funktion** $H(x) = \mathbb{1}\{x \geq 0\}$ ist nicht schwach differenzierbar auf $(-1, 1)$. *Beweis:* Angenommen H' existiert. Dann gilt

$$\int_{1}^{1} H'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{1}^{1} H(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

für beliebige $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$. Betrachte $\varphi_\varepsilon(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|^2}\right) \cdot \mathbb{1}\{|x| < \varepsilon\}$. Es gilt $\varphi_\varepsilon(0) = e^{-1}$ für alle $\varepsilon > 0$. Damit gilt

$$\frac{1}{e} = \left|\int_{-1}^{1} H'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left|H'(x) \exp\left(-\frac{1}{1-\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|^2}\right)\right| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{e}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |H'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Wäre jedoch $H' \in L^1_{\mathrm{loc}}(-1, 1)$, so müsste für $\varepsilon \to 0$ auch $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |H'(x)|\,\mathrm{d}x \to 0$ gelten, was dem obigen widerspricht.

(1.3) Lemma. *Die schwache Ableitung ist linear.*

Beweis. Übung. □

(1.4) Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Sei $u \in L^1_{loc}(a, b)$ mit*

$$\int_a^b u(x)\varphi(x) = 0, \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(a, b),$$

dann ist $u(x) = 0$ fast überall.

(1.5) Bemerkung (Glättungskerne). Wir setzen

$$J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & \text{falls } |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad J_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{falls } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c_\varepsilon > 0$ so gewählt wird, dass $\int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$, d. h.

$$c_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1} = \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{1-\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|^2}\right)\mathrm{d}x\right)^{-1} = \left(\varepsilon\int_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{1}{1-|y|^2}\right)\mathrm{d}y\right)^{-1} = \frac{c_1}{\varepsilon}.$$

Für $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a, b)$ setzen wir

$$u_\varepsilon(x) := (J_\varepsilon * u)(x) := \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Damit das Integral wohldefiniert ist, setzen wir u außerhalb von (a, b) mit 0 fortgesetzt.

Es gilt

- $J_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,
- $\int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
- $J_\varepsilon(x) \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ for all $x \in \mathbb{R}$.

(1.6) Satz. *Sei $u \in L^p(a,b)$ mit $p \in [1,\infty)$. Dann ist u_ε für $\varepsilon > 0$ wohldefiniert und*

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$,

(ii) falls $\operatorname{supp}(u) \subset (a,b)$, *so ist* $u_\varepsilon \in C_c^\infty(a,b)$ *falls* ε *hinreichend klein ist, d. h.* $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial(a,b))$,

(iii) $\|u_\varepsilon\|_{0,p} \leq \|u\|_{0,p}$,

(iv) $\|u - u_\varepsilon\|_{0,p} \to 0$ *für* $\varepsilon \to 0$, *d. h.* $u_\varepsilon \xrightarrow{L^p} u$,

(v) $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ *f. ü. in* (a,b) *und*

(vi) ist u stetig auf (a,b), so gilt $u_\varepsilon \to u$ gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $K \subset (a,b)$.

Beweis. (i) & (ii): $x \mapsto J_\varepsilon(x-y)$ ist beliebig oft differenzierbar für alle $y \in \mathbb{R}$ und verschwindet für $|x-y| > \varepsilon$. Weiter gilt

$$\frac{1}{h}(u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{h} J_\varepsilon(x+h-y) - J_\varepsilon(x-y))}_{\overset{h\to 0}{\to} J'_\varepsilon(x-y)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Also gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(J_\varepsilon * u)(x) = \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} J_\varepsilon\right) * u\right)(x).$$

Damit kann man (i) folgern und (ii) folgt nun direkt aus der Faltungsdarstellung.

(iii): Zunächst betrachten wir

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} u(y)\,\mathrm{d}y \right| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{q}} \left(J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}y \right| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left(\int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Mit Fubini erhalten wir nun

$$\|u_\varepsilon\|_{0,p}^p = \int\limits_{\mathbb{R}} |u_\varepsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x}_{=1} |u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \|u\|_{0,p}^p.$$

(iv): Wir betrachten

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(y)u(x-y)\,\mathrm{d}y - \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y}_{=1}\, u(x) \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(y)(u(x-y) - u(x))\,\mathrm{d}y \right|.$$

Da $J_\varepsilon(y) \leq 1$ und $p \geq 1$ gilt $(J_\varepsilon(y))^p \leq J_\varepsilon(y)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_{0,p}^p &\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(y) \int\limits_{\mathbb{R}} |u(x-y) - u(x)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_\varepsilon(y) \int |u(x-y) - u(x)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \sup_{|y|\leq\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} |u(x-y) - u(x)|^p\,\mathrm{d}x = 1 \cdot \sup_{|y|\leq\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} |u(x-y) - u(x)|^p\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da u stetig im L^p-Mittel ist, gibt es zu $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $\int_{\mathbb{R}} |u(x-y) - u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \eta$ für $|y| < \delta$.

(v): Wir finden

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)| \,\mathrm{d}y = \frac{c}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{J\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)}_{\leq \frac{1}{e}} |u(x-y) - u(x)| \,\mathrm{d}y \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

für fast alle $x \in (a,b)$.

(vi): Sei nun $u \in C((a,b))$ und $K \subset (a,b)$ kompakt. Sei $\eta > 0$ und wähle $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(K, \partial(a,b))$. Wir definieren $\widetilde{K} = [\inf K - \varepsilon_0, \sup K + \varepsilon_0]$. Da u gleichmäßig stetig auf $\widetilde{K}$ ist, gibt es $\delta > 0$ so, dass $|u(y) - u(x)| < \eta$ für alle $x, y \in \widetilde{K}$ mit $|x-y| < \delta$. Dann folgt für $\varepsilon < \min\{\delta, \varepsilon_0\}$ und alle $x \in K$

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)| \,\mathrm{d}y < \eta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_\varepsilon(y) \,\mathrm{d}y = \eta. \qquad \square$$

Beweis von Satz 1.4. Sei also $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ mit

$$\int_a^b u(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b).$$

Sei $[c,d] \subset (a,b)$ beliebig gewählt. Unser Ziel ist es, u mit $w = \operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{[c,d]}$ zu testen, da dann

$$0 \overset{?}{=} \int_a^b u(x)w(x) \,\mathrm{d}x = \int_c^d |u(x)| \,\mathrm{d}x$$

gelten würde, also $u(x) = 0$ für fast alle $x \in [c,d]$. Es gilt jedoch offenbar $w \notin C_c^\infty(a,b)$.

Wir betrachten also $w_\varepsilon := J_\varepsilon * w$ für ε klein genug. Dann ist nach Satz 1.6 (ii) $w_\varepsilon \in C_c^\infty(a,b)$ und damit $0 = \int_a^b u(x)w_\varepsilon(x) \,\mathrm{d}x$.

Nach (v) aus Satz 1.6 gilt $u(x) \cdot w_\varepsilon(x) \to u(x) \cdot w(x)$ fast überall in (a,b). Um den Satz von Lebesgue anwenden zu können, fehlt uns noch eine integrierbare Mojorante.

Sei $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}([c,d], \partial(a,b))$. Dann ist per Definition der Faltung $\operatorname{supp} w_\varepsilon \subset [c - \varepsilon_0, d + \varepsilon_0] \subsetneq (a,b)$ für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und somit

$$|u(x)w_\varepsilon(x)| \leq |u(x)| \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)|w(y)| \,\mathrm{d}y \leq |u(x)| \cdot 1.$$

Also ist $|u| \cdot \mathbb{1}_{[c-\varepsilon_0, d+\varepsilon_0]}$ eine integrierbare Majorante für $(u \cdot w_\varepsilon)$ und wir erhalten mit dem Satz von Lebesgue:

$$0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^b u(x)w_\varepsilon(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)w(x) \,\mathrm{d}x = \int_c^d |u(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Somit ist $u = 0$ fast überall auf beliebigen Intervallen $[c,d] \subset (a,b)$, also bereits auf ganz (a,b). $\square$

(1.7) Korollar. *Ist $u \in L^1_{loc}(a,b)$ mit*

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b),$$

dann ist u fast überall gleich einer konstanten Funktion.

(1.8) Korollar. *Die schwache Ableitung ist eindeutig.*

Beweis. Angenommen es gibt zu $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ zwei schwache Ableitungen $v, \widetilde{v} \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$, d.h

$$\int_a^b v(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \widetilde{v}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(a,b),$$

Also gilt

$$\int_a^b (v(x) - \widetilde{v}(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, \phi \in C_c^\infty(a,b).$$

Mit dem Fundamentallemma erhalten wir $v - \widetilde{v} = 0$ fast überall. □

(1.9) Satz ($W^{1,1}(a,b)$-Funktionen sind absolut stetig). *Sei $u \in L^1(a,b)$ schwach differenzierbar mit $u' \in L^1(a,b)$.*[3] *Dann ist u fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion auf $[a,b]$ und es gilt*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\max\{1, b-a\}}{b-a}\|u\|_{1,1} = \frac{\max\{1, b-a\}}{b-a}\int_a^b |u(x)| + |u'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Wir setzen $v(x) := \int_a^x u'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Da $u' \in L^1(a,b)$ ist, ist v absolut stetig und damit insbesondere fast überall klassisch differenzierbar mit $v' = u'$ fast überall. Weiter gilt

$$\int_a^b v(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b v'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$. Nach Korrolar 1.7 folgt $u = v + c$ fast überall für eine konstante Funktion c, somit ist u fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. (wieder mit u bezeichnet)

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = u(x_0)(b-a)$. Dann gilt

$$|u(x)| \leq |u(x_0)| + \left|\int_{x_0}^x u'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi + \int_a^b |u'(\xi)|\,\mathrm{d}\xi.$$ □

(1.10) Bemerkung. (i) $W^{1,1}(a,b)$ ist ein Banach-Raum.

(ii) u ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion, d.h. es gibt einen absolut stetigen Repräsentanten in der Äquivalenzklasse von u. Das ist eine stärkere Aussage, als dass u fast überall absolut stetig ist.

(iii) Die Aussage wird falsch in höheren Dimensionen (ab $d = 2$). Dieser Aussage liegen die Einbettungssätze zugrunde.

(1.11) Definition (höhere Ableitungen). Seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt v n-te schwache Ableitung von u, falls

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_a^b u(x)\varphi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(a,b).$$

Dann schreiben wir $v = u^{(n)}$.

(1.12) Satz. *Seien $u \in L^1(a,b)$ und $n \in \mathbb{N}$ und es existiere die n-te schwache Ableitung $u^{(n)} \in L^1(a,b)$. Dann existieren für alle $k \in [\![n-1]\!]$ die schwachen Ableitungen $u^{(k)} \in L^1(a,b)$ und sind jeweils fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.*

Bemerkung. Für höhere Dimensionen ($d \geq 2$) ist dies im Allgemeinen falsch.

[3] Wir schreiben dann $u \in W^{1,1}(a,b)$.

Beweis. Wir setzen $v_{n-1}(x) := \int_a^x u^{(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, dann ist v_{n-1} absolut stetig und es gilt $v'_{n-1} = u^{(n)}$ fast überall. Rekursiv definieren wir nun für $k \in [\![n-1]\!]$

$$v_{k-1}(x) := \int\limits_a^x v_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Dann ist stets v_{k-1} absolut stetig und es gilt $v'_{k-1} = v_k$ fast überall. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}(-1)^n \int\limits_a^b u(x)\varphi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b u^{(n)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b v'_{n-1}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ = \ldots = \int\limits_a^b v_0^{(n)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int\limits_a^b v_0(x)\varphi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Somit folgt analog zum Korollar 1.7 dass $u = v + p$ f. ü., wobei p ein Polynom vom Grad $n-1$ ist. Insbesondere ist u absolut stetig mit Ableitung $v_1 + p'$ u. s. w. □

2 Die Sobolev-Räume $H^1(a,b)$, $H_0^1(a,b)$ und $H^{-1}(a,b)$

(2.1) Definition ($W^{k,p}(a,b)$). Es sei $p \in [1,\infty]$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$W^{k,p}(a,b) := \left\{ u \in L^p(a,b) \middle| \text{die schwache Ableitung } u^{(k)} \text{ existiert und } u^{(l)} \in L^p(a,b) \text{ für } l \in [\![k]\!] \right\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{l=0}^{k} \|u^{(l)}\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $p < 0$ und $\|u\|_{k,\infty} := \max_{l \in [\![0,k]\!]} \|u^{(l)}\|_{0,\infty}$. Weiter definieren wir die Halbnorm $|u|_{k,p} = |u^{(k)}|_{0,p}$.

Wir schreiben $H^1(a,b) := W^{1,2}(a,b)$. Mit dem Skalarprodukt

$$((u,v))_{1,2} := (u,v)_{0,2} + (u',v')_{0,2}$$

ist $H^1(a,b)$ ein Hilbert-Raum.

(2.2) Satz. *Der Raum $(W^{k,p}(a,b), \|\cdot\|_{k,p})$ ist ein Banach-Raum. Für $p \in [1,\infty)$ ist er separabel und für $p \in (1,\infty)$ ist er reflexiv.*

Beweis für $H^1(a,b)$. Vollständigkeit und Separabilität für $H^1(a,b)$: Sei $(u_n) \subset H^1(a,b)$ eine Cauchy-Folge, insbesondere bilden (u_n) und (u'_n) Cauchy-Folgen in $L^2(a,b)$. Es gibt also $u, v \in L^2(a,b)$ mit $u_n \to u$ und $u'_n \to v$ in $L^2(a,b)$. Da $L^2(a,b)$ in $L^1(a,b)$ liegt, gelten die Grenzwerte auch in $L^1(a,b)$. In einer Übung haben wir gezeigt, dass dann auch $v = u'$ gilt.

Für die Separabilität setzen wir

$$T : H^1(a,b) \to L^2(a,b) \times L^2(a,b) =: X, u \mapsto (u,u').$$

Wir nutzen auf X die kanonsche Norm

$$\|(u,v)\|_X := \left(\|u\|_{0,2}^2 + \|v\|_{0,2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Also ist T isometrisch und insbeondere injektiv, also ist $H^1(a,b)$ isometrisch isomorph zum Unterraum $\operatorname{ran} T \subset X$. Wie eben gesehen, ist $\operatorname{ran} T$ ein algebraischer Unterraum von X. Da X als kartesisches Produkt separabler Räume separabel ist, ist dies auch $\operatorname{ran} T$ als algebraischer Unterraum von X. Damit ist auch $H^1(a,b)$ separabel.

$H^1(a,b)$ ist als Hilbert-Raum auch reflexiv. □

(2.3) Definition. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume.

(i) Eine lineare, injektive Abbildung $i : X \to Y$ heißt **Einbettung**; X heißt **eingebettet** in Y, falls es eine Einbettung von X in Y gibt. Dann kann (algebraisch) X mit dem Unterraum $i(X) \subset Y$ identifiziert werden.

(ii) Ist i stetig, so heißt X **stetig eingebettet** in Y, wir schreiben $X \hookrightarrow Y$, d. h. es gibt ein $c > 0$ so, dass $\|i(x)\|_Y \le c\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt.

(iii) Ist i sogar kompakt, so heißt X **kompakt eingebettet** in Y, wir schreiben $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, d.h. ist $(x_n) \subset X$ eine (bzgl. $\|\cdot\|_X$) beschränkte Folge, so gibt es eine Teilfolge (x_n') so, dass $(i(x_n'))$ (bzgl. $\|\cdot\|_Y$) konvergiert.

(iv) Ist $i(X)$ dicht in Y, so heißt X **dicht eingebettet** in Y, wir schreiben $X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$.

(2.4) Bemerkung.

- (Fast) immer wird $X \subset Y$ und $i = \mathrm{id}$ sein.
- Beispiele:
  - $L^2(a, b) \hookrightarrow L^1(a, b)$,
  - $W^{1,1}(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$. Diese Einbettung ist nicht kompakt.

(2.5) Satz ($H^1(a, b) \overset{c}{\hookrightarrow} C(a, b)$). *Jede Funktion $u \in H^1(a, b)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. Weiter gilt $H^1(a, b) \overset{c}{\hookrightarrow} C([a, b])$.*

Beweis. Da $L^2(a, b) \hookrightarrow L^1(a, b)$ gilt, folgt sofort $H^1(a, b) \hookrightarrow W^{1,1}(a, b)$. Der erste Teil folgt also aus dem eben bewiesen, es gilt sogar

$$H^1(a, b) \hookrightarrow W^{1,1}(a, b) \hookrightarrow C([a, b]).$$

Es bleibt die Kompaktheit zu zeigen: Sei also $(u_n) \subset H^1(a, b)$ beschränkt, i.e.

$$\|u_n\|_{1,2} \le \overline{u}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\|u_n\|_\infty \le c\|u_n\|_{1,2} \le c\overline{u}$ gilt, ist $(u_n) \subset C([a, b])$ beschränkt. Für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$, o. B. d. A. $x_1 \le x_2$, gilt

$$|u_n(x_2)-u_n(x_1)| \le \int_{x_1}^{x_2} 1\cdot|u_n'(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \le \sqrt{|x_2 - x_1|}\left(\int_{x_1}^{x_2} |u_n'(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{|x_2 - x_1|}\|u_n\|_{1,2} \le \overline{u}\sqrt{|x_2 - x_1|}.$$

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. $\square$

(2.6) Satz (Dichtheit). *$C^\infty([a, b])$ ist dicht in $H^1(a, b)$. Hierbei ist*

$$C^\infty([a, b]) := \left\{u : [a, b] \to \mathbb{R} : u\big|_{(a,b)} \in C^\infty(a, b) \textit{ und } u^{(k)} \textit{ ist gleichmäßig stetig} \forall\, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

(2.7) Satz (Hilfssatz: lokale Approximation). *Sei $u \in H^1(a, b)$, $0 < \varepsilon_0 < \frac{b-a}{2}$. Für $\varepsilon \to 0$ (und $\varepsilon < \varepsilon_0$) konvergiert*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(a+\varepsilon_0,b-\varepsilon_0)} \longrightarrow 0.$$

Beweis. Für $x \in (a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, betrachten wir $y \mapsto J_\varepsilon(x-y) \in C_c^\infty(a, b)$. Nach der Definition der schwachen Ableitung folgt

$$\begin{aligned}(u')_\varepsilon(x) &= \int_a^b J_\varepsilon(x - y)u'(y)\,\mathrm{d}y = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} J_\varepsilon(x - y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b J_\varepsilon'(x - y)u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b J_\varepsilon(x - y)u(y)\,\mathrm{d}y = (u_\varepsilon)'(x)\end{aligned}$$

Da $(u')_\varepsilon \to u'$ und $u_\varepsilon \to u$ in $L^2(a, b)$ und da für $x \in (a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0)$ gilt $(u')_\varepsilon(x) = (u_\varepsilon)'(x)$, folgt $u_\varepsilon \to u$ in $H^1(a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0)$. $\square$

Beweis von Satz 2.6. Es seien I_1, I_2, I_3 offene Intervalle so, dass $[a,b] \subset I_1 \cup I_2 \cup I_3$ mit $I_1 \cap I_3 = \emptyset$, $a \in I_1$, $b \in I_3$ und $\overline{I_2} \subset (a,b)$. Wir partitionieren die Eins mit Funktionen $\psi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $i \in [\![3]\!]$, mit $\operatorname{supp} \psi_i \subset I_i$, $i \in [\![3]\!]$, und $\sum_{i=1}^3 \psi(x) = 1$ für alle $x \in [a,b]$.

Für $u \in H^1(a,b)$ beliebig setzen wir $u_i := u \cdot \psi_i$, also $u = u_1 + u_2 + u_3$. Es gilt $u_i' = u' \cdot \psi_i + u \cdot \psi_i'$, also $u_i \in H^1(a,b)$.

Sei $\eta > 0$ beliebig. Da $\operatorname{supp} u_2 \subsetneq (a,b)$ folgt sofort aus dem Hilssatz 2.7, dass es ein $v_2 \in C^\infty([a,b])$ mit $\|u_2 - v_2\|_{1,2} < \eta$ gibt.

Für u_1 betrachten wir, mit hinreichend kleinem $\delta > 0$, die Funktion $w_1(x) := u_1(x-\delta)$. Da $\operatorname{supp} u_1 \subset I_1$, also insbesondere $b \notin \operatorname{supp}(u_1)$, können wir $w_1 \in H^1(a-\delta, b+\delta)$ annehmen. Aus der Stetigkeit von u_1 und u_1' im L^2-Mittel folgt $\|u_1 - w_1\|_{1,2} < \eta$ für δ klein genug. Wähle nun ε klein genug, sodass für $v_1 := (w_1)_\varepsilon$ mit dem Hilfssatz 2.7 (mit $w_1 \in H^1(a-\delta, b+\delta)$ und $\varepsilon_0 := \delta$) folgt, dass $\|w_1 - v_1\|_{1,2} < \eta$. Analog gehen wir für u_3 vor.

Insgesamt setzen wir $v := (v_1 + v_2 + v_3)\big|_{[a,b]} \in C^\infty([a,b])$. Damit folgt $\|u - v\|_{1,2} \le c \cdot \eta$ mit $c > 0$ geeignet. □

(2.8) Bemerkung. Es gilt nicht, dass $C_c^\infty(a,b)$ dicht liegt in $H^1(a,b)$

(2.9) Satz (Rellich). *Es ist* $H^1(a,b) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(a,b)$.

Beweis. Es ist $H^1(a,b) \overset{c}{\hookrightarrow} C([a,b])$ und $C([a,b]) \hookrightarrow L^2(a,b)$. Damit ist sofort $H^1(a,b) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(a,b)$. □

(2.10) Definition ($H_0^1(a,b)$). Wir definieren

$$H_0^1(a,b) := \overline{C_c^\infty(a,b)}^{\|\cdot\|_{1,2}}.$$

(2.11) Bemerkung. Es liegt zwar $C_c^\infty([a,b])$ dicht in $H^1(a,b)$, nicht aber $C_c^\infty(a,b) \subset C^\infty([a,b])$. Ein Gegenbeispiel zu finden ist Übung. Somit ist $H_0^1(a,b)$ ein echter, abgeschlossener Teilraum von $H^1(a,b)$. Also ist $(H_0^1(a,b), \|\cdot\|_{1,2})$ ein separabler Banachraum.

(2.12) Satz (Charakterisierung von $H_0^1(a,b)$). *Es gilt*

$$H_0^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) | u(a) = u(b) = 0\},$$

wobei wir $u \in H_0^1(a,b)$ hier mit seinem absolutstetigen Repräsentatent identifizieren.

Beweis. Sei zunächst $u \in H_0^1(a,b)$. Dann gibt es eine Folge $(u_n) \subset C_c^\infty(a,b)$ so, dass $\|u - u_n\|_{1,2} \to 0$. Wegen $H^1(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$ folgt ebenso $\|u - u_n\|_\infty \to 0$. Insbesondere gilt $0 = u_n(a) \to u(a)$ und $0 = u_n(b) \to u(b)$. Damit gelten $u(a) = u(b) = 0$.

Sei nun $u \in H^1(a,b)$ mit $u(a) = u(b) = 0$. Wir wollen zeigen, dass für beliebige $\delta > 0$ es ein $v \in C_c^\infty(a,b)$ gibt mit $\|u - v\|_{1,2}^2 < \delta$ gibt.

Wir betrachten zunächst das linke Intervallende a und nutzen hier eine Abschneidefunktion $\omega : \mathbb{R} \to [0,1]$ glatt, so dass $\omega(x) = 0$ auf $(-1,1)$ und $\omega(x) = 1$ auf $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$. Wir setzen $\omega_\varepsilon(x) = \omega\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$. Dann ist ω_ε glatt und es ist $\omega_\varepsilon((-a-\varepsilon, a+\varepsilon)) = \{0\}$ und $\omega(\mathbb{R} \setminus [-a-2\varepsilon, a+2\varepsilon]) = \{1\}$. Wir setzen $u_\varepsilon^{(a)} := u \cdot \omega_\varepsilon$; dann ist $u = u_\varepsilon^{(a)}$ auf $(a+2\varepsilon, b]$.

Sei $\eta > 0$. Wir zeigen $\left\|u - u_\varepsilon^{(a)}\right\|_{1,2} < \eta$ für ε klein genug:

$$\begin{aligned}
\left\|u - u_\varepsilon^{(a)}\right\|_{1,2}^2 &= \int_a^b \left|u(x) - u_\varepsilon^{(a)}(x)\right|^2 + \left|u'(x) - \left(u_\varepsilon^{(a)}\right)'(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_a^{a+2\varepsilon} |u(x)(1 - w_\varepsilon(x))|^2 + |u'(x) - u'(x)w_\varepsilon(x) - u(x)w_\varepsilon'(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \int_a^{a+2\varepsilon} |u(x)|^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^{a+2\varepsilon} |u'(x)| \mathrm{d}x + 2\int_a^{a+2\varepsilon} |u(x)w_\varepsilon'(x)|^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Es ist $\omega_\varepsilon'(x) = \frac{1}{\varepsilon}\omega'\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$ und damit $|\omega_\varepsilon'(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|w'\|_\infty =: \frac{c}{\varepsilon}$ und $|u(x)\omega_\varepsilon'(x)|^2 \leq \frac{c^2}{\varepsilon^2}|u(x)|^2$.

Wegen $u(a) = 0$ gilt $u(x) = \int_a^x u'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ und damit

$$\int_a^y |u(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_a^y \left|\int_a^x u'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|^2 \mathrm{d}x = \int_a^y |x-a| \int_a^x |u'(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x,$$

also per Fubini

$$\int_a^{a+2\varepsilon} |u(x)\omega_\varepsilon'(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{c^2}{\varepsilon^2}\int_a^{a+2\varepsilon} |x-a| \int_a^x |u'(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \leq \frac{c^2}{\varepsilon}\int_a^{a+2\varepsilon}\int_a^x |u'(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \leq C\int_a^{a+2\varepsilon} |u'(\xi)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Zusammen erhalten wir

$$\left\|u - u_\varepsilon^{(a)}\right\|_{1,2}^2 \leq C\int_a^{a+2\varepsilon} |u(x)|^2 + |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x < \eta$$

für ε klein genug, da $u, u' \in L^2(a,b)$ stetig im L^2-mittel sind.

Bei b gehen wir ganz analog vor. Es gibt also zu $\eta > 0$ ein $u_\varepsilon^{(b)} \in H^1(a,b)$ mit $\operatorname{supp}\left(u_\varepsilon^{(b)}\right) \subset (a,b)$ und $\left\|u - u_\varepsilon^{(b)}\right\|_{1,2}^2 < \eta$ für ε klein genug.

Wähle nun τ klein genug, so dass mit $u_{\varepsilon,\tau}^{(a)} := J_\tau * u_\varepsilon^{(a)}$ und $u_{\varepsilon,\tau}^{(b)} := J_\tau * u_\varepsilon^{(b)}$ in $C_c^\infty(a,b)$ liegen und

$$\max\left\{\left\|u_\varepsilon^{(a)} - u_{\varepsilon,\tau}^{(a)}\right\|_{1,2}^2, \left\|u_\varepsilon^{(b)} - u_{\varepsilon,\tau}^{(b)}\right\|_{1,2}^2\right\} < \eta.$$

Final setzen wir $v := \frac{1}{2}\left(u_{\varepsilon,\tau}^{(a)} + u_{\varepsilon,\tau}^{(b)}\right)$, so dass

$$\|u - v\|_{1,2}^2 = \left\|\frac{1}{2}\left(u - u_\varepsilon^{(a)} + u_\varepsilon^{(a)} - u_{\varepsilon,\tau}^{(a)}\right) + \frac{1}{2}\left(u - u_\varepsilon^{(b)} + u_\varepsilon^{(b)} - u_{\varepsilon,\tau}^{(b)}\right)\right\|_{1,2}^2 \leq \frac{1}{2}\cdot 4\eta < \delta,$$

wenn wir η geeignet wählen. □

(2.13) Bemerkung. Es ist $C_c^\infty(a,b)$ dicht in $L^2(a,b)$. Dies impliziert sofort, dass auch $H_0^1(a,b)$ dicht in $L^2(a,b)$ liegt.

(2.14) Satz (Poincaré-Friedrichsche Ungleichung). *Für alle $u \in H_0^1(a,b)$ gilt*

$$\|u\|_{0,2} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}}|u|_{1,2} = \frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u'\|_{0,2}.$$

Beweis. Wie im obigen Beweis gesehen folgt für $u \in H_0^1(a,b)$

$$\|u\|_{0,2}^2 = \int_a^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |x-a|\int_a^x |u'(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \leq \|u'\|_{0,2}^2\int_a^b |x-a|\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{2}\|u'\|_{0,2}^2.$$

□

(2.15) Bemerkung.
- Der Satz 2.14 gilt nicht für $u \in H^1(a,b) \setminus H_0^1(a,b)$.
- Die Konstante kann zu $\frac{b-a}{\pi}$ verbessert werden.

(2.16) Korollar. *Auf $H_0^1(a,b)$ definiert somit $|\cdot|_{1,2}$ eine Norm, die äquivalent zu $\|\cdot\|_{1,2}$ ist. Somit ist $(H_0^1(a,b), |\cdot|_{1,2})$ ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt*

$$(u,v)_{1,2} := \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2.17) Definition ($H^{-1}(a,b)$). Wir setzen $H^{-1}(a,b) = (H_0^1(a,b))^*$. Mit Norm

$$\|f\|_{-1} = \|f\|_{(H_0^1)^*} = \sup_{u \neq 0} \frac{\langle f, u\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}}{|u|_{1,2}}.$$

(2.18) Bemerkung. Es ist $H^{-1}(a,b) \neq (H^1(a,b))^*$.

(2.19) Satz (Eigenschaften von $H^{-1}(a,b)$). *$(H^{-1}(a,b), \|\cdot\|_{-1})$ ist ein separabler, reflexiver Banachraum. Schließlich gibt es zu jedem $f \in H^{-1}(a,b)$ eine (nicht eindeutig bestimmte) Funktion $u_f \in L^2(a,b)$ mit*

$$\langle f, v\rangle = \int_a^b u_f(x) v'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad v \in H_0^1(a,b).$$

(2.20) Bemerkung. Man könnte mit dem Rieszschen Darstellungssatz $\langle f, v\rangle$ über $(\widetilde{u}_f, v)_{1,2}$ darstellen. Hierbei ist $\widetilde{u}_f \in H_0^1(a,b)$ eindeutig zu f bestimmt.

Grund für diese Überlegungen sind ist die Kette $H_0^1(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b) \hookrightarrow H^{-1}(a,b)$ und Identifizierung über L^2.

3 Variationelle Formulierung und Operatorgleichung

(3.1) Bemerkung (Motivation). Wir betrachten

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x), x \in (a,b), \\ \qquad u(a) = 0 = u(b). \end{cases}$$

- Mit (geeigneter) Testfunktion multiplizieren,
- integrieren,
- in der höchsten Ableitung partiell integrieren.

Hier also

$$\int_a^b u'v' + cu'v + duv\,\mathrm{d}x = \int_a^b -u''v + cu'v + duv\,\mathrm{d}x = \int_a^b fv\,\mathrm{d}x,$$

wobei v glatt genug und z.B. $v(a) = 0 = v(b)$ gelten sollten.

Variationelle Formulierung des Randwertproblems:

Finde $u \in H_0^1(a,b)$ so, dass

$$\int_a^b u'v' + cu'v + duv\,\mathrm{d}x = \int_a^b fv\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in H_0^1(a,b).$$

Dabei nutzen wir $H_0^1(a,b)$ wegen homogenen der homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Voraussetzungen an c und d für Wohldefiniertheit können z.B. $c, d \in L^\infty(a,b)$ sein.

Für die rechte Seite können wir z. B. $f \in L^2(a,b)$ verlangen. Dann ist in der variationellen Formulierung die rechte Seite $\int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $v \in H_0^1(a,b)$. Dann definiert

$$\left\langle \widetilde{f}, v\right\rangle := \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Funktional $\widetilde{f} \in H^{-1}(a,b)$. Wir schreiben in aller Regel hier weiter $f \in H_0^1(a,b)$ (wir identifizieren f mit seinem dualen Element $\widetilde{f}$).

(3.2) Bemerkung (Variationelle Formulierung des Randwertproblems). Gegeben sei eine rechte seite $f \in H^{-1}(a,b)$ sowie Funktionen $c, d \in L^\infty(a,b)$. Finde $u \in H_0^1(a,b)$ mit

$$\int_a^b u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + d(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, v\rangle\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(a,b).$$

- Eine solches $u \in H_0^1(a,b)$, das die obige Integralgleichung löst heißt **schwache** oder **variationelle Lösung** des Randwertproblems (RWP).
- Die Motivation zeigt, dass jede klassiche Lösung auch eine Variationelle Lösung ist
- Der Raum, in dem wir die Lösung suchen, heißt **Ansatzraum** (hier $H_0^1(a,b)$ wegen der homogenen Dirichlet-Randbedingungen). Der Raum, aus dem die Testfunktionen v stammen, heißt **Testraum**. Im Normalfall wählt man den Testraum gleich dem Ansatzraum.
- Wir schreiben:

  $$a(u,v) := \int_a^b u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + d(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \qquad u, v \in H_0^1(a,b).$$

  Damit können wir das variationelle Problem schreiben als

  Zu $f \in H^{-1}(a,b)$ und $a : H_0^1(a,b) \times H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$ finde $u \in H_0^1(a,b)$ mit

  $$a(u,v) = \langle f, v\rangle\,, \qquad \forall\, v \in H_0^1(a,b).$$

- Hier ist a bilinear. Dabei stammt die Linearität im zweiten Argument ganz allgemein vom Vorgang des testens mit v und ist unabhängig von den konkreten Eigenschaften der Differentialgleichung. Die Linearität im ersten Argument kodiert gerade die Linearität der Differentialgleichung.

(3.3) Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{cases} -u''(x) = H(x), x \in (-1,1), \\ u(1) = 0 = u(-1). \end{cases}$$

mit H der Heaviside-Funktion. Die Variationelle Formulierung ist

$$a(u,v) := \int_{-1}^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 H(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x =: \langle H, v\rangle\,, \quad \forall\, v \in H_0^1(-1,1).$$

Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar (Übung).

(3.4) Beispiel.

$$\begin{cases} -u''(x) + \operatorname{sgn}(x-\pi)u(x) = -2\delta(x-\pi) + 2H(\pi - x)\sin(x), x \in (0, 2\pi), \\ u(0) = 0 = u(2\pi) \end{cases}$$

Dabei ist δ die Dirac'sche-δ-Distribution. Das macht formal erstmal keinen Sinn. Aber variationell:

$$a(u,v) = \int_0^{2\pi} u'(x)v'(x) - \operatorname{sgn}(x-\pi)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi u'v' + uv\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} u'v' - uv\,\mathrm{d}x,\ u, v \in H_0^1(0, 2\pi)$$

und die rechte Seite ist problematisch, da δ keine Funktion ist. Damit macht $\int_0^{2\pi} \delta(x-\pi)v(x)\,\mathrm{d}x$ keinen Sinn. Das Dirac-δ ist ein Funktional, das nicht von einem Integral einer Funktion induziert wird, sondern $\langle \delta, v\rangle := v(0)$, vorausgesetz v ist stetig. Somit ist die rechte Seite

$$\langle f, v\rangle = -2\,\langle \delta(\cdot - \pi), v\rangle + 2\int_0^{2\pi} H(\pi - x)\sin(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -2v(\pi) + 2\int_0^\pi \sin(x)v(x)\,\mathrm{d}x,\ v \in H_0^1(a,b).$$

Dabei ist tatsächlich $f \in H^{-1}(0, 2\pi)$ ist tatsächlich wohldefiniert, da f linear in v ist und die Punktauswertung auf $H_0^1(0, 2\pi) \hookrightarrow C([a, b])$ wohldefiniert ist. Außerdem ist f beschränkt da

$$|\langle f, v\rangle| = 2|v(\pi)| + 2\left|\int_0^\pi \sin(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq c\,(\|v\|_\infty + \|\sin\|_{0,2}\|v\|_{0,2}) \leq c|v|_{1,2}.$$

Durch "raten" erhalten wir die variationelle Lösung $u(x) = |\sin(x)|$. Probe: $u(0) = 0 = u(2\pi)$,

$$u'(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{falls } x < \pi \\ -\cos(x), & \text{falls } x > \pi \end{cases},$$

also ist $u \in H_0^1(0, 2\pi)$. Dann ist für beliebige $v \in H_0^1(0, 2\pi)$. Dann gilt für beliebige $v \in H_0^1(0, 2\pi)$, wobei ausreicht mit $v \in C_c^\infty(0, 2\pi)$ zu testen, wegen der Dichtheit,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^\pi \cos(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_\pi^{2\pi} \cos(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \sin(x)v(x) + \int_\pi^{2\pi} \sin(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(x)v(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin(x)v(x) - \cos(x)v(x)\Big|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} \sin(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \int_0^\pi \sin(x)v(x) + \int_\pi^{2\pi} \sin(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\pi \sin(x)v(x)\,\mathrm{d}x - 2v(\pi) = \langle f, v\rangle\,. \end{aligned}$$

Man kann sogar zeigen, dass das Problem eindeutig lösbar ist.

(3.5) Bemerkung (Andere Randbedingungen).

- *inhomogene Dirichlet-Randbedingungen*: (1) Ansatzraum: $V = \{u \in H^1(a, b) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$. Trotzdem muss man als Testraum $H_0^1(a, b)$ wählen, wegen des Randterms. Dann ist natürlich der Testraum ungleich dem Ansatzraum und der Ansatzraum ist kein Vektorraum mehr.

  (2) Transformation der Randbedingungen in die rechte Seite. Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ glatt, d. h. $g \in H^1(a, b)$, mit $g(a) = \alpha$ und $g(b) = \beta$. Setze $\widetilde{u} := u - g$. Dann erfüllt u die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen, wenn $\widetilde{u}$ die homogenen Dirichlet-Randbedingungen erfüllt. Weiter gilt für beliebige $v \in H_0^1(a, b)$

  $$a(u, v) = a(\widetilde{u} + g, v) = a(\widetilde{u}, v) + a(g, v),$$

  d. h. $a(u, v) = \langle f, v\rangle$ genau dann wenn $a(\widetilde{u}, v) = \left\langle \widetilde{f}, v\right\rangle := \langle f, v\rangle - a(g, v)$. Hierbei muss man prüfen, ob $a(g, \cdot) \in H^{-1}(a, b)$ gilt.

- *Neumann-Randbedingungen*: "$u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$". Wir nutzen den Raum $H^1(a, b)$ als Ansatz- und Testraum. Der Randterm bei der partiellen Integration ergibt

  $$\text{“}u'(b)v(b) - u'(a)v(a)\text{''} = \beta v(b) - \alpha v(a).$$

  Die rechte Seite wird dann

  $$\langle f, v\rangle + \alpha v(a) - \beta v(b), \quad v \in H^1(a, b),$$

  was ein wohldefiniertes lineares Funktional auf $H^1(a, b)$ ist.

(3.6) Bemerkung (Abstrakte Formulierung). Wir betrachten das allgemein formulierte Problem

$$\text{Zu } f \in V^* \text{ finde } u \in V : a(u, v) = \langle f, v\rangle \;\forall\, v \in V.$$

Hierbei

- ist V ein Banach-Raum,
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ ist im 2. Argument linear,

Bei uns ist konkret

- $V = H_0^1(a,b)$, $V^* = H^{-1}(a,b)$,

$$a(u,v) = \int_a^b u'v' + cu'v + duv \, \mathrm{d}x.$$

- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ auch im 1. Argument linear,
- für festes $u \in V$ ist $a(u,\cdot) : V \to \mathbb{R}$ beschränkt, da

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int u'v' + cu'v + duv \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \|u'\|_{0,2}\|v'\|_{0,2} + \|c\|_{0,\infty}\|u'\|_{0,2}\|v\|_{0,2} + \|d\|_{0,\infty}\|u\|_{0,2}\|v\|_{0,2} \\ &\leq (\|u'\|_{0,2} + C\|c\|_{0,\infty}\|u'\|_{0,2} + C\|d\|_{0,\infty}\|u\|_{0,2})\,\|v'\|_{0,2} \\ &=: C(u)|v|_{1,2}. \end{aligned}$$

  Somit folgt für festes $u \in V$, dass $a(u,\cdot) \in V^*$. Wir setzen $Au := a(u,\cdot) \in V^*$. Dadurch definieren wir $A : V \to V^*$.

Die abstrakte Formulierung mittels $a : V \times V \to \mathbb{R}$ ist somit äquivalent zu:

$$\text{Zu } f \in V^* \text{ finde } u \in V : Au = f \text{ in } V^*.$$

In unserem (linearen) Fall handelt es sich bei A um einen linearen Operator. Entsprechend der obigen Abschätzung gilt

$$|\langle Au, v\rangle| = |a(u,v)| \leq C(u)|v|_{1,2}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|Au\|_{V^*} \leq C(u) &= \|u'\|_{0,2} + C\|c\|_{0,\infty}\|u'\|_{0,2} + C\|d\|_{0,\infty}\|u\|_{0,2} \\ &= \left(1 + C\|c\|_{0,\infty} + C^2\|d\|_{0,\infty}\right)\|u'\|_{0,2} = \widetilde{C}|u|_{1,2} = \widetilde{C}\|u\|_V. \end{aligned}$$

Hier ist also $A : V \to V^*$ linear und beschränkt, und somit $A \in L(V, V^*)$.

4 Lineare Variationsprobleme mit stark positiver Bilinearform

(4.1) Definition. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein (reeller) Banach-Raum. Seien $a : V \times V \to \mathbb{R}$ und $A : V \to V^*$

(i) a heißt **bilinear**, falls a linear in beiden Argumenten ist.

(ii) a bzw. A heißen **symmetrisch**, falls $a(u,v) = a(v,u)$, bzw. $\langle Au, v\rangle = \langle Av, u\rangle$ für alle $u, v \in V$ gelten.

(iii) a bzw. A heißen **positiv**, falls $a(u,u) \geq 0$, bzw. $\langle Au, u\rangle \geq 0$ für alle $u \in V$.

(iv) a bzw. A heißen **stark positiv**, falls es $\mu > 0$ gibt mit $a(u,u) \geq \mu\|u\|^2$, bzw. $\langle Au, u\rangle \geq \mu\|u\|^2$ für alle $u \in V$.

(v) a heißt **beschränkt**, falls a bilinear ist und es $\beta \geq 0$ gibt mit

$$|a(u,v)| \leq \beta\|u\|\|v\|$$

für alle $u, v \in V$.

A heißt **beschränkt**, falls A beschränkte Mengen in beschränkte Mengen überführt. Ist A linear, so ist A genau dann beschränkt, wenn es ein $\beta \geq 0$ gibt mit

$$\|Au\|_{V^*} \leq \beta\|v\|_V.$$

(4.2) Bemerkungen. • Wird $A : V \to V^*$ durch $a : V \times V \to \mathbb{R}$ induziert, so stimmen gleichlautende Begriffe überein, d. h. dann ist z. B. a genau dann symmetrisch wenn A symmetrisch ist.

- Ist $A : V \to V^*$ gegeben, so wird durch $a(u, v) := \langle Au, v\rangle$ eine Form $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert.
- Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrisch und bilinear, $f \in V^*$. Wir betrachten ein Energiefunktional:

$$J : V \to \mathbb{R}, v \mapsto J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v\rangle .$$

Wir betrachten das zugehörige Minimierungsproblem:

$$\text{Finde } u \in V : J(u) = \inf_{v \in V} J(v).$$

Eine Notwendige Bedingung für eine Lösung ist, dass die (Gateaux-)Ableitung im Punkt u verschwindet, d. h.

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(J(u + tv) - J(u))\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2}a(u, u) - ta(u, v) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) - \langle f, u\rangle - t \langle f, v\rangle - \frac{1}{2}a(u, u) + \langle f, u\rangle\right)\\ &= a(u, v) - \langle f, v\rangle \overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

für alle $v \in V$.

(4.3) Satz (Lemma von Lax-Milgram, 1954). *Sei $(V, \|\cdot\|, ((\cdot, \cdot)))$ ein reeller Hilbert-Raum, $A \in L(V, V^*)$ stark positiv. Dann ist A bijektiv; insbesondere ist die Operatorgleichung $Au = f$ für jede rechte Seite $f \in V^*$ eindeutig lösbar.*

Beweis. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es einen isometrischen Isomorphismus $I : V^* \to V$ mit $\langle f, v\rangle = ((I(f), v))$ für alle $f \in V^*$ und $v \in V$. Insbesondere gilt $\|f\|_{V^*} = \|I(f)\|$ für alle $f \in V^*$.

Wir setzen für $\tau > 0$

$$\phi : V \to V, v \mapsto \phi(v) := v + \tau I(f - Av).$$

Es ist v genau dann ein Fixpunkt von ϕ, falls $Av = f$. Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Dafür zeigen wir, dass ϕ eine Kontraktion ist.

$$\begin{aligned}\|\phi(v) - \phi(w)\|^2 &= \|v - w + \tau I(Aw - Av)\|^2\\ &= \|v - w\|^2 + \tau^2\|IA(w - v)\|^2 + 2\tau((v - w, IA(w - v)))\\ &= \|v - w\|^2 + \tau^2\|A(w - v)\|^2_{V^*} - 2\tau \langle A(v - w), v - w\rangle\\ &\leq \|v - w\|^2 + \tau^2\beta^2\|v - w\|^2 - 2\tau\mu\|v - w\|^2 \leq (1 - 2\tau\mu + \beta\tau^2)\|v - w\|^2.\end{aligned}$$

Wähle $\tau > 0$ so, dass $1 - 2\tau\mu + \beta\tau^2 < 1$. Dann gibt es nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt u von ϕ, was einer Eindeutigen Lösung von $Au = f$ entspricht. □

(4.4) Bemerkung. (1) Unter den Voraussetzungen von Lax-Milgram 4.3 existiert $A^{-1} : V^* \to V$. A^{-1} ist stark positiv und beschränkt (Übung). Durch die Beschränktheit gibt es ein $c > 0$ so, dass $\|u\| = \|A^{-1}f\| \leq c\|f\|_{V^*}$. Das liefert sofort Stabilität bzw. stetige Abhängigkeit von der rechten Seite.

(2) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum, und $A \in L(V, V^*)$ stark positiv und symmetrisch, so ist A bijektiv, denn durch $((u, v))_a := a(u, v) := \langle Au, v\rangle_{V^*\times V}$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert, dessen induzierte Norm äquivalent zu $\|\cdot\|$ ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Lemma von Lax-Milgram 4.3

(3) Ist A wie in (2) nicht symmetrisch, so betrachte $((u, v))_a := a(u, v) := \frac{1}{2}(\langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle)$.

(4.5) Beispiele. (1) Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = \delta(x), & x \in (-1, 1),\\ u(-1) = 0 = u(1) \end{cases}$$

Die entsprechende schwache Formulierung ist

Finde $u \in V = H_0^1(-1,1)$:

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) := \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, v\rangle := \langle \delta, v\rangle = v(0), \qquad \forall\, v \in H_0^1(-1,1).$$

Dabei ist $A : V \to V^*$ linear und $f \in H^{-1}(-1,1)$. Wir zeigen, dass A beschränkt ist: Es gilt

$$|\,\langle Au, v\rangle\,| = \left|\int_{-1}^{1} u'v'\,\mathrm{d}x\right| \leq \|u'\|_{0,2}\|v'\|_{0,2} = |u|_{1,2}|v|_{1,2}.$$

Damit ist

$$\|Au\|_{1,2} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\,\langle Au, v\rangle\,|}{|v|_{1,2}} \leq \|u\|_{1,2},$$

was beschränktheit mit Konstante $\beta = 1$ zeigt. Starke positivität folgt direkt aus $|\langle Av, v\rangle| \geq |v|_{1,2}^2$, also mit $\mu = 1$. Also ist das obige RWP mit Lax-Milgram 4.3 eindeutig lösbar.

(2) Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) - u(x) = f(x), & x \in (0,\pi), \\ u(0) = 0 = u(\pi) \end{cases}$$

Die entsprechende schwache Formulierung ist

Finde $u \in V = H_0^1(0,\pi)$:

$$\langle Au, v\rangle := \int_{0}^{\pi} u'v' - uv\,\mathrm{d}x = f \in H^{-1}(0,\pi), \qquad \forall\, v \in H_0^1(0,\pi).$$

Wir prüfen die Beschränktheit von A:

$$\begin{aligned}|\langle Au, v\rangle| = \left|\int_{0}^{\pi} u'v' - uv\,\mathrm{d}x\right| &\leq \|u'\|_{0,2}\|v\|_{0,2} + \|u\|_{0,2}\|v\|_{0,2} \\ &\overset{\text{Poincaré}}{\leq} \left(1 + \frac{\pi - 0}{\pi}\right)|u|_{1,2}|v|_{1,2}.\end{aligned}$$

Damit ist A mit Konstante $\beta = 2$ beschränkt.

Zur starken Positivität berechnen wir

$$\langle Av, v\rangle = \int_{0}^{\pi} v'(x)^2 - v(x)^2\,\mathrm{d}x = |v|_{1,2}^2 - \|v\|_{0,2}^2$$

Die Pointcarré-Friedrich'sche Ungleichung 2.14 kann hier keine Abschätzung für die starke Positivität geben, da sie auf eine Konstante 0 führen würde. Tatsächlich ist A nur positiv, da zum Beispiel für $\sin \in H_0^1(0,\pi)$ gilt

$$\langle A\sin, \sin\rangle = \int_{0}^{\pi} \cos^2(x) - \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Damit ist Lax-Milgram 4.3 hier nicht anwendbar.

(4.6) Lemma. *Ist $V = H_0^1(a,b)$, $f \in V^*$, $c \in W^{1,\infty}(a,b)$ sowie $d \in L^\infty(a,b)$ und gibt es $\underline{d} \in \mathbb{R}$ mit*

$$d(x) - \frac{1}{2}c'(x) \geq \underline{d} > -\frac{\pi^2}{(b-a)^2} \quad \textit{f. ü. auf } (a,b),$$

dann ist das zugehörige lineare Randwertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen eindeutig lösbar.

Beweis. Übung. Siehe auch Satz 5.6 später. $\square$

(4.7) Satz. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.6 erfüllt. Weiterhin gebe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f \in H^{k-1}(a,b)$ und $c, d \in C^{k-1}([a,b])$. Dann liegt die nach dem Lemma eindeutig bestimmte Lösung in $H^{k+1}(a,b) \cap H_0^1(a,b)$.*

(4.8) Bemerkung. Wir wissen, dass $H^1(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$. Hieraus erhalten wir iterativ $H^k(a,b) \hookrightarrow C^{k-1}([a,b])$.

5 Nichtlineare Variationsprobleme mit stark monotonem Operator

(5.1) Definition. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum, $A : V \to V^*$ ein (möglicherweise nicht linearer) Operator.

(i) A heißt **Lipschitz-stetig**, falls es $\beta > 0$ gibt mit

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq \beta \|u - v\| \quad \forall\, u, v \in V.$$

(ii) A heißt **monoton**, falls

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall\, u, v \in V.$$

(iii) A heißt **stark monoton**, falls es ein $\mu > 0$ gibt mit

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \mu \|u - v\|^2 \quad \forall\, u, v \in V.$$

(5.2) Bemerkung. (1) Wenn A linear ist, so ist A geanu dann (stark) monoton, wenn A (stark) positiv ist, und genau dann Lipschitz-stetig, wenn A beschränkt ist.

(2) Ist $V = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist f monoton im Sinne der Definition, falls $(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $f(x) \geq f(y)$, falls $x \geq y$, also ist f monoton wachsend.

(5.3) Satz (Zarantonello, 1960). *Es Sei $(V, \|\cdot\|, ((\cdot)))$ ein Hilbert-Raum und $A : V \to V^*$ Lipschitz-stetig und stark monoton. Dann ist A bijektiv.*

(5.4) Bemerkung. Im ein-dimensionalen Fall haben wir also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und streng monoton. Aus der starken Monotonie folgt mit $y = 0$:

$$(f(x) - f(0))x \geq \mu |x|^2,$$

für $x > 0$ also $f(x) \geq \mu x + f(0)$, bzw. für $x < 0$ haben wir $f(x) \leq \mu x + f(0)$. Insbesondere folgt also

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Das ist die so genannte Koerzivität. Damit ist f bijektiv.

Beweis. Sei $f \in V^*$ beliebig und I der isometrische Isomorphismus entsprechend aus dem Riesz'schen Darstellungssatz. Wie im Beweis vom Lemma von Lax-Milgram 4.3 betrachten wir für $\tau > 0$ die Abbildung $\phi : V \to V$ mit

$$\phi(v) := v + \tau I(f - Av).$$

für $v \in V$ beliebig. Wir zeigen wieder, dass die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt sind, also insbesondere dass ϕ eine Kontraktion ist

$$\|\phi(v) - \phi(w)\|^2 = \|v - w\|^2 + \tau^2 \underbrace{\|Av - Aw\|^2}_{\leq \beta^2 \|v-w\|^2} - 2\tau \underbrace{\langle Av - Aw, v - w\rangle}_{\geq \mu \|v-w\|^2}$$
$$\leq (1 - 2\tau\mu + \beta^2\tau^2)\|v - w\|^2. \quad \square$$

(5.5) Beispiel. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -(\psi(|u'(x)|)u'(x))' + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x), & x \in (a,b) \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases}$$

Die entsprechende variationelle Formulierung ist

Zu gegebenen $f \in H^{-1}(a,b)$ finde $u \in H_0^1(a,b)$ so dass

$$\langle Au, v\rangle = \int_a^b \psi(|u'|)u'v' + cu'v + duv \,\mathrm{d}x = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v \in H_0^1(a,b).$$

Hierbei ist $\psi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stetig und es gebe $M, m > 0$ so dass

(i) $|\psi(t)| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$,

(ii) $|\psi(t)\cdot t - \psi(s)\cdot s| \leq M|t-s|$ für alle $s,t \in \mathbb{R}_0^+$ und

(iii) $\psi(t)\cdot t - \psi(s)\cdot s \geq m(t-s)$ für alle $t,s \in \mathbb{R}_0^+$ mit $t \geq s$.

(iii) impliziert sofort für $s = 0$, dass $\psi(t)t \geq m \cdot t$, also $\psi(t) \geq m$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$.

(5.6) Satz. *In der Notation von Beispiel 5.5 sei $f \in V^*$, $c \in W^{1,\infty}(a,b)$ und $d \in L^\infty(a,b)$ und es gebe $\underline{d} \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$d(x) - \frac{1}{2}c'(x) \geq \underline{d} > -\frac{m\pi^2}{(b-a)^2} \quad \textit{f. ü. in } (a,b).$$

Dann gibt es genau eine variationelle Lösung.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass A Lipschitz-stetig und stark monoton ist.

Seien $u, v, w \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}|\langle Au - Av, w\rangle| &= \left|\int_a^b \left(\psi(|u'|)u' - \psi(|v'|)v'\right)w' + c(u'-v')w + d(u-v)w \,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left(\int |\psi(|u'|)u' - \psi(|v'|)v'|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} |w|_{1,2} \\ &\qquad + \|c\|_{0,\infty}|u-v|_{1,2}\|w\|_{0,2} + \|d\|_{0,\infty}\|u-v\|_{0,2}\|w\|_{0,2}.\end{aligned}$$

Wir betrachten den integranden $\Theta := |\psi(|u'|)u' - \psi(|v'|)v'|$. Haben u' und v' das gleiche Vorzeichen, gilt sofort $\Theta \leq M|u'-v'|$. Seien nun $u' \geq 0$ und $v' \leq 0$. Dann gilt

$$\Theta \leq |\psi(|u'|)||u'| + |\psi(|v'|)||v'| \leq Mu' + M(-v') = M(u'-v') \leq M|u'-v'|.$$

Analog für den Fall $u' \leq 0$ und $v' \geq 0$. Zusammen erhalten wird

$$|\langle Au - Av, w\rangle| \leq \left(M + \|c\|_{0,\infty}\frac{b-a}{\pi} + \|d\|_{0,\infty}\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right)|u-v|_{1,2}|w|_{1,2}.$$

Das impliziert direkt $\|Au - Av\|_{V^*} \leq C|u-v|_{1,2}$ mit einer geeigneten Konstante $C > 0$. Also ist A Lipschitz-stetig.

Für die starke Monotonie, betrachte in

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_a^b \left(\psi(|u'|)u' - \psi(|v'|)v'\right)(u'-v') + c(u'-v')(u-w) + d(u-v)^2 \,\mathrm{d}x$$

zunächst den mittleren Term:

$$\int_a^b c(u'-v')(u-v)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\frac{1}{2}\left((u-v)^2\right)'\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{c'}{2}(u-v)^2\,\mathrm{d}x.$$

Ähnlich wie oben zeigt man, dass

$$\int_a^b \left(\psi(|u'|)u' - \psi(|v'|)v'\right)(u'-v')\,\mathrm{d}x \geq m\|u'-v'\|_{0,2}^2.$$

Insgesamt haben wir dann

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq m|u - v|_{1,2}^2 + \underbrace{\inf_{x\in(a,b)} \left(d(x) - \frac{1}{2}c'(x) \right)}_{\geq \underline{d}} \|u - v\|_{0,2}^2.$$

Ist $\underline{d} \geq 0$, so haben wir sofort $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq m|u - v|_{1,2}^2$. Ist $\underline{d} < 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v\rangle &\geq m|u - v|_{1,2}^2 + \underline{d}\frac{(b-a)^2}{\pi^2}|u - v|_{1,2}^2 \\ &= \left(m + \underline{d}\frac{(b-a)^2}{\pi^2} \right) |u - v|_{1,2}^2 > 0. \quad \square\end{aligned}$$

6 Galerkin-Schemata und Finite Elemente

(6.1) Definition. (i) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum. Eine Folge (V_n) von endlich-dimensionalen Unterräumen von V heißt **Galerkin-Schema**, falls für alle $v \in V$

$$\operatorname{dist}(v, V_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wir sagen, die (V_n) erfüllen **limitierte Vollständigkeit**.

(ii) Eine Folge $(\phi_n) \subset V$ heißt **Galerkin-Basis**, falls (V_m) mit

$$V_m := \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$$

ein Galerkin-Schema bildet und $\dim V_m = m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(6.2) Bemerkung. Es gilt $V = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m}$.

(6.3) Satz. *Jeder separable Banach-Raum hat eine Galerkin-Basis.*

Beweis. Sei $W = \{w_i | i \in \mathbb{N}\} \subset V$ eine abzählbare, dichte Teilmenge. Wir setzen $\phi_1 := w_1$ und $V_1 := \operatorname{span}\{\phi_1\}$. Wir setzen iterativ $\phi_{n+1} := w_k$ mit $k = \min\{l \in \mathbb{N} : w_l \notin V_n\}$ und $V_{n+1} := \operatorname{span}(V_n \cup \{\phi_{n+1}\})$. Für $v \in V$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gibt es $w_n \in W$ mit $\|v - w_n\| < \varepsilon$. Für m groß genug ist $w_n \in V_m$, also ist $\operatorname{dist}(v, V_m) < \varepsilon$. $\square$

(6.4) Bemerkung. (1) Oft betrachtet man statt (V_m) und $m \to \infty$ eine Folge (V_h) mit $h \to 0$.

(2) Unsere Problemstellung war

$$\text{Zu } f \in V^* \text{ finde } u \in V : Au = f \text{ in } V^*, \text{ bzw. } a(u, v) = \langle f, v\rangle \ \forall\, v \in V.$$

Betrachte das diskrete Ersatzproblem

$$\text{Zu } f \in V_h^* \text{ finde } u_h \in V_h : a(u_h, v) = \langle f, v\rangle \ \forall\, v_h \in V_h.$$

Es ist $V_h \subset V$ und damit $V^* \subset V_h^*$. Genauer gibt es eine Einbettung, den Prolongationsoperator, $p_h : V_h \to V$ mit $p_h v_h := v_h$. Damit bekommen wir den Restriktionsopertor $p_h^* : V^* \to V_h^*$ mit

$$\langle p_h^* f, v_h\rangle := \langle f, p_h v_h\rangle \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

Damit können wir das diskrete Ersatzproblem als Operatorgleichung schreiben

$$p_h^* A p_h u_h = p_h^* f \text{ in } V_h^*.$$

(6.5) Lemma (Céa, 1964). *Sei V ein reeller Hilbert-Raum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ sei bilinear, stark positiv, beschränkt. $V_h \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum von V, so ist die Einschränkung von a auf $V_h \times V_h$ bilinear, stark positiv und beschränkt.*

Seien $u \in V$ und $u_h \in V$ die eindeutigen Lösungen von

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in V, \qquad \textit{bzw.}$$

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

Dann gilt

$$\|u - u_h\| \le \frac{\beta}{\mu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| = \frac{\beta}{\mu} \operatorname{dist}(u, V_h).$$

(6.6) Bemerkung. Ist (V_h) ein Galerkin-Schema, so folgt $\|u - u_h\| \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also $u_h \to u$ in V.

Beweis. Seien $u \in V$, $u_h \in V_h$ we beschrieben. Damit ist für alle $v_h \in V_h$

$$a(u - u_h, v_h) = a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle - \langle f, v_h \rangle = 0.$$[4]

Es gilt

$$\begin{aligned}\mu\|u - u_h\|^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) - \underbrace{a(u - u_h, u_h)}_{=\,0\,=\,a(u-u_h, v_h)} \\ = a(u - u_h, u - v_h) \le \beta\|u - u_h\|\|u - v_h\|.\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $v_h \in V_h$

$$\|u - u_h\| \le \frac{\beta}{\mu}\|u - v_h\|.$$

□

(6.7) Bemerkung. Ist a symmetrisch, kann die Konstante zu $\sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$ verbessert werden.

(6.8) Beispiel. Wir betrachten das RWP

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases}$$

bzw. die schwache Formulierung in $V = H_0^1(0,1)$ mit $a(u,v) = (u,v)_{1,2}$.

Als Galerkin-Schema nutzen wir lineare Hutfunktionen. Seien $x_i = \frac{i}{m+1}$ äquidistante Stützstellen. Wir definieren

$$\varphi_i^{(m)}(x) = \begin{cases} (m+1)(x - x_{i-1}), & \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i], \\ (m+1)(x_{i+1} - x), & \text{falls } x \in ([x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $i \in [\![m]\!]$. Wir setzen $V_m = \operatorname{span}\{\varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_m^{(m)}\}$. Dann bilden die (V_m) ein Galerkin-Schema (siehe unten).

Wir betrachten das diskrete Ersatzproblem

$$\text{Suche } u_m \in V_m : a(u_m, v_m) = \langle f, v_m \rangle\,, \qquad v_m \in V_m.$$

Es genügt mit den Basiselementen $\varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_m^{(m)}$ zu testen. Da $u_m \in V_m$ gilt, gibt es $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m) \in \mathbb{R}^m$ so, dass $u_h = \sum_{j=1}^m \overline{u}_j \varphi_j^{(m)}$. Suche also $\overline{u} \in \mathbb{R}^m$ so dass

$$a\left(\sum_{j=1}^m \overline{u}_j \varphi_j^{(m)}, \varphi_i^{(m)}\right) = \sum_{j=1}^m \overline{u}_j a\left(\varphi_i^{(m)}, \varphi_j^{(m)}\right) = \left\langle f, \varphi_i^{(m)} \right\rangle, \quad \forall\, i \in [\![m]\!].$$

Setzen wir also $A := \left(a\left(\varphi_i^{(m)}, \varphi_j^{(m)}\right)\right)_{i,j\in[\![m]\!]} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $\mathbf{f} = \left(\left\langle f, \varphi_j^{(m)} \right\rangle\right)_{j\in[\![m]\!]}$, so müssen wir $A\overline{u} = \mathbf{f}$ in $\mathbb{R}^m$ lösen.

Hier ist

$$A_{ij} = a\left(\varphi_i^{(m)}, \varphi_j^{(m)}\right) = \int_0^1 \left(\varphi_i^{(m)}\right)' \left(\varphi_j^{(m)}\right)' \mathrm{d}x$$

[4] Diese Beziehung nennt man Galerkin-Orthogonalität. Anders ausgedrückt gilt $u - u_h \perp_a V_h$.

Ist $j \notin \{i-1, i, i+1\}$ so ist $A_{ij} = 0$. Ist $j = i$, so ist

$$A_{ij} = \int_0^1 \left(\left(\varphi_i^{(m)}\right)'\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (m+1)^2 \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (m+1)^2 = 2(m+1).$$

Für $j = i-1$ haben wir

$$A_{ij} = \int_0^1 \left(\varphi_i^{(m)}\right)' \left(\varphi_{i-1}^{(m)}\right)' \mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (m+1)(-m-1) \mathrm{d}x = -(m+1).$$

Analog für $j = i+1$. Also ist

$$A = (m+1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offenbar hat A eine Bandstruktur und ist diagonaldominant. So können wir $u_m \in V_m$ bestimmen und haben mit dem Lemma von Céa 6.5 $u_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \in V$.

Es bleiben zwei Fragen offen

(1) Bilden die (V_m) wirklich ein Galerkin-Schema?

(2) Wie schnell konvergieren die (v_m)?

Zu (1): Die $(\varphi_i^{(m)})_{i\in[\![m]\!]}$ bilden zwar eine Basis von V_m, insgesamt jedoch keine Galerkin-Basis. (Man kann stattdessen (V_{2^m}) betrachten $\to$ *hierarchische Basen, Multiskalenmethoden*)

Wir betrachten stattdessen

$$\underbrace{\|u - u_m\|_V}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \overset{\text{Céa}}{\leq} \frac{\beta}{\mu} \underbrace{\operatorname{dist}(u, V_m)}_{\text{Approximationsfehler}} \leq \frac{\beta}{\mu} \underbrace{\|u - I_m u\|}_{\text{Interpolationsfehler}}.$$

Hierbei ist $I_m : V \to V_m$ die lineare Interpolation, d.h. wir wählen

$$I_m v = \sum_{i=1}^m v(x_i) \varphi_i^{(m)}.$$

Da $H_0^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ ist I_m wohldefiniert.

(6.9) Satz. *Es seien* $(\varphi_i^{(m)})_{i\in[\![m]\!], m\in\mathbb{N}}$ *und* $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *wie in Beispiel 6.8, dann gilt für alle* $v \in V$

$$\operatorname{dist}(u, V_m) \leq |u - I_m u|_{1,2} \to 0.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass I_m linear und beschränkt ist. Die Linearität ist klar. Sei $u \in V = H_0^1(0,1)$ beliebig:

$$\begin{aligned}
|I_m u|_{1,2}^2 = \int_0^1 ((I_m u)')^2 \mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^m (m+1)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(x_{i+1}) - u(x_i))^2 \mathrm{d}x \\
&= (m+1)^2 \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 \cdot u'(\xi) \mathrm{d}\xi \right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{(m+1)^2}{m+1} \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'(\xi))^2 \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'(\xi))^2 \mathrm{d}\xi = |u|_{1,2}^2.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $\overline{u} \in C_c^\infty(0,1)$ mit $|u - \overline{u}|_{1,2} < \varepsilon$. Dann gilt

$$|u - I_m u|_{1,2} \leq \underbrace{|u - \overline{u}|_{1,2}}_{<\varepsilon} + |\overline{u} - I_m \overline{u}|_{1,2} + \underbrace{|I_m \overline{u} - I_m u|_{1,2}}_{\leq |\overline{u} - u|_{1,2} < \varepsilon}.$$

Für den mittleren Term finden wir

$$\begin{aligned}
|\overline{u} - I_m \overline{u}|_{1,2}^2 &= \int_0^1 (\overline{u}' - (I_m \overline{u})')^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\overline{u}' - (m+1)(\overline{u}(x_{i+1}) - \overline{u}(x_i)))^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((m+1) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \overline{u}'(x) \, \mathrm{d}\xi - (m+1) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \overline{u}'(\xi) \, \mathrm{d}\xi \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= (m+1)^2 \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\overline{u}'(x) - \overline{u}'(\xi)) \, \mathrm{d}\xi \right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq (m+1) \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\overline{u}'(x) - \overline{u}'(\xi))^2 \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x \\
&\leq (m+1) \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_\xi^x \overline{u}''(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right)^2 \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x \\
&\leq 1 \cdot \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\overline{u}''(\tau))^2 \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x \\
&= (m+1)^{-2} \int_0^1 |\overline{u}''(\tau)|^2 \, \mathrm{d}\tau = (m+1)^{-2} \|\overline{u}''\|_{0,2}^2.
\end{aligned}$$

Ist nun $m + 1 > \frac{\|u''\|_{0,2}}{\varepsilon}$, so folgt $|\overline{u} - I_m \overline{u}|_{1,2} < \varepsilon$. □

(6.10) Bemerkung. (1) (V_h) bildet also ein Galerkin-Schema.

(2) Der Beweis zeigt: ist z. B. $u \in H^2(0,1)$, so folgt sogar $|u - I_m u|_{1,2} \leq (m+1)^{-1} \|u''\|_{0,2}$, also lineare Konvergenz.

7 Differentialgleichungen in mehreren Raumdimensionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, d. h. eine offene, zusammenhängend und beschränkte Menge. Wir definieren die Räume

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) | \operatorname{supp}(u) \subset \Omega\}^5$$

und

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \big| u\big|_K \in L^1(K) \text{ für jedes kompakte } K \subset \Omega \right\}.$$

Wir nutzen im folgenden Multiindizes, also Elemente $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Für solche Elemente schreiben wir $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $\alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$ und $\partial^\alpha := \prod_{i=1}^d \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$.

(7.1) Definition (Schwache Ableitung). Seien $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist v die **α-te schwache Ableitung** von u, falls

$$\int_\Omega u \cdot (\partial^\alpha \varphi) \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, \mathrm{d}x, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

[5] Da $\operatorname{supp}(u)$ abgeschlossen ist und Ω offen, impliziert $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$ stets $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \operatorname{supp}(u)) > 0$.

Wir schreiben $v = \partial^\alpha u$.

(7.2) Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Ist $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann ist $u = 0$ fast überall auf Ω.*

(7.3) Definition (Sobolev-Räume). Seien $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$. Wir definieren

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) | \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq k \text{ existiert } \partial^\alpha u \text{ und } \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

bzw. mit den entsprechenden Anpassungen für $p = \infty$. Wir definieren die Halbnorm

$$|u|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| = k} \|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Wir schreiben $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ mit Skalarprodukt

$$((u, v))_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha u \cdot \partial^\alpha v \,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere haben wir

$$\|u\|_{1,2} = \left(\|u\|_{0,2}^2 + \|\partial_{x_1} u\|_{0,2}^2 + \ldots + \|\partial_{x_d} u\|_{0,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Man liest häufig auch $\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_{0,2}^2 + \|\nabla u\|_{0,2}^2$.

(7.4) Bemerkung.

- Für $p \in [1, \infty]$ sind alle $W^{k,p}(\Omega)$ Banach-Räume und $H^k(\Omega)$ Hilbert-Räume.
- Für $p \in [1, \infty)$ sind alle $W^{k,p}(\Omega)$ separabel.
- Für $p \in (1, \infty)$ sind alle $W^{k,p}(\Omega)$ reflexiv.
- Da Ω beschränkt ist, gilt stets $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $q \leq p$. Damit ist stets auch $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ für $q \leq p$ und $k \in \mathbb{N}$.

(7.5) Definition. Wir definieren

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}} \subsetneq W^{k,p}(\Omega)$$

sowie

$$H^{-1}(\Omega) := \left(H_0^1(\Omega) \right)^* .$$

(7.6) Satz (Meyers/Serrin). *$W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.*

(7.7) Definition. Ein Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^d$ heißt **Lipschitz-Gebiet**, wir schreiben $\partial\Omega \in C^{0,1}$, falls es zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $g : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ so gibt, dass

$$B(x_0, r) \cap \Omega = \{(x_1, \ldots, x_d) \in B(x_0, r) | x_d > g(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$$

(evtl. nach Drehung des Koordinatensystems).

(7.8) Bemerkung.

- Damit gilt auch $B(x_0, r) \cap \partial\Omega = \{x \in B(x_0, r) | x_d = g(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$.
- Da Ω beschränkt ist, ist $\partial\Omega$ kompakt, d. h. es gibt endlich viele Lipschitz-stetige Funktionen, mit denen $\partial\Omega$ entsprechend beschrieben werden kann.

Von jetzt an sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ stets ein Lipschitz-Gebiet.

(7.9) Satz. *$C^\infty(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.*

(7.10) Satz (Sobolev'scher Einbettungssatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet.*

(1) Ist $kp < d$, so ist $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, falls $\frac{1}{q} - \frac{m}{d} \geq \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$, also insbesondere $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$ und $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$.

(2) Ist $kp = d$, so ist $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \leq q < \infty$.

(3) Ist $kp > d$, so ist $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, bzw. genauer $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\lfloor \frac{d}{p} \rfloor -1,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $\alpha \in (0,1)$ falls $\frac{d}{p} \in \mathbb{N}$, bzw. $\alpha \in \left(0, \left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor - \frac{d}{p} + 1\right)$ sonst.

(7.11) Beispiele.

- $d = 1$, $H^1(a,b)$: $k = 1$, $p = 2$, $d = 1$, i.e. $kp = 2 > 1 = d$ und somit $H^1(a,b) \hookrightarrow L^\infty(a,b)$.
- $d = 2$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ for $q < \infty$.
- $d = 3$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$.
- $d = 4$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$.

(7.12) Satz (Rellich). *$W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$, falls $\frac{1}{q} - \frac{m}{d} > \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.*

(7.13) Satz (Poincaré-Friedrich'sche Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes (Lipschitz-) Gebiet. Für alle $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt*

$$\|\partial^\alpha u\|_{0,p} \leq C|u|_{k,p}.$$

Dabei hängt C nur von Ω ab.

Auf $W_0^{k,p}(\Omega)$ bildet $|\cdot|_{k,p}$ eine zu $\|\cdot\|_{k,p}$ äquivalente Norm.

(7.14) Bemerkung (Exkurs: Singularitäten). Sei $u : B(0,1) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) = |x|^{-\gamma}$ für alle $x \in B(0,1)$. Wir wollen klären, ob $u \in L^p(B(0,1))$ liegt.

$$\|u\|_{0,p}^p = \int\limits_{B(0,1)} |x|^{-\gamma p} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{?}^{?} \dots \int\limits_{?}^{?} \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{r^{\gamma p}} r^{d-1} (\sin \dots \sin) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}v_1 \dots \mathrm{d}v_{d-1} = C \int\limits_0^1 v^{d-1-\gamma p} \,\mathrm{d}v.$$

Damit genügt $d - 1 - \gamma p > -1$, d.h. $p < \frac{d}{\gamma}$.

Die gleiche Singularität ist in höheren Dimensionen weniger "schlimm"; $\frac{1}{|x|}$ is in einer Dimension nicht integrierbar auf $(0,1)$, in höheren dimensionen schon.

(7.15) Bemerkung (Randbedingungen). Für $kp > d$ ist $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, und damit ist $u\big|_{\partial\Omega}$ sinnvoll und wohldefiniert.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, was passiert, wenn $kp \leq d$ gilt, z. B. für $H_0^1(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die Lösung liegt im

(7.16) Satz (Spursatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Dann gibt es genau einen stetigen, linearen Operator $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit $\gamma(u) = u\big|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

(7.17) Definition (Spuroperator). Der eindeutig bestimmte Operator aus Satz 7.16 heißt **Spuroperator**. Man schreibt oft auch tr oder trace für γ.

(7.18) Bemerkung. (1) Ein Ausdruck für $\gamma(u)$ für $u \notin C^\infty(\overline{\Omega})$ kann nicht konstruktiv bestimmt werden.

(2) Hier ist $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit und somit wird auf $\partial\Omega$ ein $(d-1)$-dimensionales (Oberflächen-) Maß induziert, bezüglich dem $L^p(\partial\Omega)$ erklärt ist.

Zum Beweis dieser Tatsache betrachtet man $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und stellt fest

$$\|\gamma(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left\| u\big|_{\partial\Omega} \right\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(7.19) Satz (Eigenschaften des Spuroperators). *(i) Es gilt die Charakterisierung*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) | \gamma(u) = 0\}.$$

(ii) Es ist $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ nicht surjektiv. Mit der Schreibweise $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) := \gamma\left(W^{1,p}(\Omega)\right)$ ist $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ ein echter Teilraum von $L^p(\partial\Omega)$.

(7.20) Bemerkung. In der Notation von Satz 7.19 (ii) bildet γ den Raum $H^1(\Omega)$ auf $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ab.

(7.21) Bemerkung (Mehrdimensionales lineares Randwertproblem). Wir betrachten nun das lineare RWP im Mehrdimensionalen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Dann ist

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\mathbf{A}(x)\operatorname{grad}(u(x))\right) + c(x)\cdot\operatorname{grad}(u(x)) + d(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Für $\mathbf{A} \equiv I$ entspricht dies

$$\begin{cases} -\Delta(u(x)) + c(x)\cdot\nabla(u(x)) + d(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0.^6 \end{cases}$$

Dabei sind $u, d, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $c : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{A} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$.

In der Variationellen Formulierung haben wir $V = H_0^1(\Omega)$ und $\langle f, v\rangle := \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ für $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Für die linke Seite betrachten nun zunächst den Term $-\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u)$. Dort gilt

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{A}\operatorname{grad}u)v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{A}\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{A}\nabla u\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x.$$

Im Allgemeinen, d.h. in $H^1(\Omega)$, nutzen wir hier den Satz von Gauß: sei $\vec{n}$ der äußere Normalenvector und $\mathrm{d}\vec{v}$ das induzierte Maß auf $\partial\Omega$, dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} Vu\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\vec{v} = \int_\Omega \operatorname{div}(Vu) = \int_\Omega (u\operatorname{div}V + \operatorname{grad}u\cdot V)\,\mathrm{d}x.$$

In unserem Fall im Raum $H_0^1(\Omega)$ verschwindet der Randterm:

$$\int_{\partial\Omega} v\mathbf{A}\operatorname{grad}u\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\vec{v} = 0.$$

Damit ist

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) := \int_\Omega \mathbf{A}(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + (c(x)\cdot\nabla u(x))v(x) + d(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist z. B. $d \in L^\infty(\Omega)$, $c \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^d$, $\mathbf{A} \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^{d\times d}$, dann ist $A : V \to V^*$ wohldefiniert und linear. Damit erhalten wir das (abstrakte) Problem:

$$\text{Zu } f \in V^* \text{ suche } u \in V \text{ mit } Au = f \text{ in } V^*.$$

(7.22) Bemerkung (Andere Randbedingungen).

- *inhomogene Dirichlet-Randbedingungen*: $u\big|_{\partial\Omega} = g$, wobei g eine Funktion auf $\partial\Omega$ ist, bzw. formal ausgedrückt $\gamma(u) = g$.

  Ist also $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, so kann es $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma(\widetilde{u}) = g$ geben. Nur in diesem Fall ist die Randbedingung wohldefiniert.

  Ist dies der Fall wenden wir wieder eine Transformation der rechten Seite zur Auflösung an: Ist $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma(\widetilde{u}) = g$, so ist $\widehat{u} = u - \widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ genau dann, wenn $\gamma(u) = g$. Weiterhin gilt $Au = g$ genau dann wenn $A(\widehat{u} + \widetilde{u}) = A\widehat{u} + A\widetilde{u} = f$. Wir versuchen also das Problem $A\widehat{u} = f - A\widetilde{u}$ nach $\widetilde{u}$ zu lösen.

- *Neumann-Randbedingungen*: $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}} = \nabla u\cdot\vec{n} = g$ auf $\partial\Omega$, wobei $\vec{n}$ die äußere Normale bezeichnet.

[6] Wir verwenden austauschbar die Schreibweisen $\operatorname{grad}u = \nabla u = (\partial_{x_1}u, \ldots, \partial_{x_d}u)^T$ für den Gradienten von u, $\operatorname{div}u = \nabla\cdot u = \partial_{x_1}u + \ldots + \partial_{x_d}u$ für die Divergenz von u und $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) = \Delta u = \partial_{x_1}^2 u + \ldots + \partial_{x_d}^2 u$ für den Laplace-Operator.

- *Gemischte Randbedingungen*: Sei eine Zerlegung von $\partial\Omega$ gegeben durch $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Gemischte Randbedingungen sind dann z. B. gegeben durch $u\big|_{\Gamma_1} = 0$ und $\nabla u \cdot \vec{n} = 0$ auf Γ_2. Wir betrachten dann den abgeschlossenen Unterraum $V = \{u \in H^1(\Omega) | \gamma(u) = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$ von $H^1(\Omega)$.

(7.23) Bemerkung (Ein quasilineares Problem).

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(u)\nabla u) = f \text{ auf } \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dabei ist $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $0 < m \leq a(y) \leq M$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\widetilde{u}(x) = \int_0^{u(x)} a(s) \,\mathrm{d}s$. Dann ist $\nabla \widetilde{u}(x) = \nabla u(x) a(u(x))$. Löst u das Randwertproblem, so löst also

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{u} = f \text{ auf } \Omega, \\ \widetilde{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

da auf $\partial\Omega$ $u(x) = 0$ gilt. Dieses Problem hat nach Lax-Milgram 4.3 genau eine Lösung.

Setzen wir $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(z) := \int_0^z a(s) \,\mathrm{d}s$, so ist A streng monoton wachsend. Wegen $0 < m \leq a(z) \leq M$ ist A sogar invertierbar. Somit existiert A^{-1} und wir können $u(x) = A^{-1}(\widetilde{u}(x))$ aus $\widetilde{u}$ konstruieren.

8 Weiterführende Themen

8.1 Regularität im Inneren

(8.1) Bemerkung. Wir betrachten auf einem Lipschitz-Gebiet Ω die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Es gibt im Allgemeinen zwei Arten von Resultaten:

(1) lokale Resultate auf $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, i.e. mit $\overline{\Omega}_0 \subsetneq \Omega$. Dann sind keine zusätzlichen Anforderungen an $\partial\Omega$ nötig.

(2) Regularität auf ganz Ω. Hierbei sind zusätzliche Anforderungen an $\partial\Omega$ nötig.

(8.2) Satz. *Nach Lax-Milgram hat das RWP*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \textit{auf}\ \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

für jedes $f \in H^{-1}(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Ist f sogar aus $H^k(\Omega)$, so folgt $u \in H_{loc}^{k+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Genauer gibt es für jedes $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ ein $c > 0$ so, dass

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega_0)} \leq c \left(\|f\|_{H^k(\Omega)} + |u|_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

(8.3) Lemma. *Für $h \in \mathbb{R}^d$ setzen wir $(\tau_h u)(x) := u(x+h)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $p \in (1, \infty)$.*

(1) Ist $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, so gilt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq |u|_{1,p} |h|$$

für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$.

(2) Gibt es eine Konstante $c > 0$ so, dass für alle $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ und h klein genug gilt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq c|h|,$$

so ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $|u|_{1,p} \leq d^{\frac{1}{p}} c$.

Beweis. (1): Sei zunächst $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Nach dem Satz von Taylor / Mittelwertsatz gilt für $x \in \Omega_0$:

$$|(\tau_h u)(x) - u(x)| = |u(x+h) - u(x)| = \left| \int_0^1 \nabla u(x+th) \cdot h \, \mathrm{d}t \right| \leq |h| \int_0^1 |\nabla u(x+th)| \, \mathrm{d}t.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0} |(\tau_h u)(x) - u(x)|^p \, \mathrm{d}x \leq |h|^p \int_{\Omega_0} \left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)| \, \mathrm{d}t \right)^p \mathrm{d}x \\
&\leq |h|^p \int_{\Omega_0} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = |h|^p \int_0^1 \int_{\Omega_0} |\nabla u(x+th)|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\leq |h|^p \int_0^1 \int_\Omega |\nabla u(y)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t = |h|^p |u|^p_{1,p}.
\end{aligned}$$

Da $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ dicht liegt in $W^{1,p}(\Omega)$, folgt die allgemeine Behauptung.

(2): Sei $u \in L^p(\Omega)$ und $c > 0$ so, dass $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq c|h|$ für beliebige $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ und h klein genug. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ beliebig. Sei $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega_0$. Dann gilt mit Hölder

$$\left| \int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{\Omega_0} |\tau_h u(x) - u(x)||\varphi(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega_0)}$$

Gleichzeitig gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| &= \left| \int_\Omega u(x+h)\varphi(x) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_\Omega u(y)\varphi(y-h) \, \mathrm{d}y - \int_\Omega u(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_\Omega u(x) \left(\varphi(x-h) - \varphi(x)\right) \mathrm{d}x \right|.
\end{aligned}$$

Setzen wir $h = te_i$, so folgt

$$\left| \int_\Omega u(x) \frac{\varphi(x - te_i) - \varphi(x)}{t} \, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{|t|} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq c \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.$$

Mit Lebesgue folgt

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega u(x) \frac{\varphi(x - te_i) - \varphi(x)}{t} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x) \partial_i \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Setzen wir für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\langle g, \varphi \rangle := \int_\Omega u(x) \partial_i \varphi(x) \, \mathrm{d}x,$$

so folgt $|\langle g, \varphi \rangle| \leq c\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^q(\Omega)$ liegt, können wir g eindeutig auf ganz L^q fortsetzen: $g : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$, $|\langle g, v \rangle| \leq c\|v\|_{L^q(\Omega)}$, dann folgt $g \in (L^q(\Omega))^*$ mit $\|g\|_{(L^q(\Omega))^*} \leq c$. Da $(L^q(\Omega))^* \cong L^p(\Omega)$, gibt es $w \in L^p(\Omega)$ so dass

$$\langle g, v \rangle = \int_\Omega w(x) v(x) \, \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in L^q(\Omega).$$

Insbesondere gilt für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle g, \varphi\rangle = \int_\Omega w(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also existiert $\partial_i u = w \in L^p(\Omega)$. Da i beliebig gewählt war, folgt somit dass $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Da $\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} = \|w\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{(L^q(\Omega))^*} \le c$, so folgt

$$|u|_{1,p} = \left(\sum_{i=1}^d \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \le d^{\frac{1}{p}} c. \qquad \square$$

Beweis von Satz 8.2. Wir nutzen nun das obige Lemma. Sei zunächst $k = 0$. Sei also $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung. Sei $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und $\varphi \equiv 1$ auf Ω_0. Wir setzen $v := u\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Wir stellen fest, dass mit $g := f\varphi - 2\nabla u\cdot\nabla\varphi - u\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$, v die schwache Lösung von $-\Delta v = g$ ist. Für beliebige $w \in H_0^1(\Omega)$ gilt wegen $\nabla v = \nabla(u\varphi) = \varphi\nabla u + u\nabla\varphi$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \varphi\nabla u\cdot\nabla w + u\nabla\varphi\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x\\
&\overset{7}{=} \int_\Omega \nabla u\cdot(\nabla(w\varphi) - w\nabla\varphi) - (\nabla u\cdot\nabla\varphi + u\Delta\varphi)w\,\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(w\varphi) - (2\nabla u\cdot\nabla\varphi + u\Delta\varphi)w\,\mathrm{d}x\\
&\overset{8}{=} \int_\Omega (f\varphi - 2\nabla u\cdot\nabla\varphi - u\Delta\varphi)w\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gw\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Für $h \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ klein genug setzen wir $D_h u := \frac{1}{|h|}(\tau_h u - u)$.

Wir stellen folgendes im Allgemeinen fest:

- Es gilt stets $\nabla D_h\widetilde{w} = D_h\nabla\widetilde{w}$, da ∇ linear ist.
- Man findet

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{v}(x)\left(D_{-h}\widetilde{w}(x)\right)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{v}(x)\frac{\widetilde{w}(x-h) - \widetilde{w}(x)}{|h|}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{v}(x)\widetilde{w}(x-h)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d}\widetilde{v}(x)\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x\\
&\overset{y:=x-h}{=} \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{v}(y+h)\widetilde{w}(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d}\widetilde{v}(x)\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\widetilde{v}(x+h) - \widetilde{v}(x)}{|h|}\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\left(D_h\widetilde{v}(x)\right)\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Variationsgleichung $a(v,w) = (v,w)_{1,2} = \langle g, w\rangle$ with $w = D_{-h}D_h v \in H_0^1(\Omega)$, wobei wir v außerhalb von Ω mit 0 fortsetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla(D_{-h}D_h v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla v\cdot D_{-h}\nabla D_h v\,\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega D_h\nabla v\cdot D_h\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |D_h\nabla v|^2\,\mathrm{d}x = \|D_h\nabla v\|_{0,2}^2
\end{aligned}$$

[7] Hier nutzen wir $\varphi\nabla w = \nabla(w\varphi) - w\nabla\varphi$ und $u\nabla\varphi\cdot\nabla w = \nabla\cdot(u\nabla\varphi)w = \nabla u\cdot\nabla\varphi w + u\Delta\varphi w$.

[8] Da $w\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt und u die Differentialgleichung löst, haben wir $\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(w\varphi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fw\varphi\,\mathrm{d}x$.

Gleichzeitig finden wir für die rechte Seite

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (D_{-h} D_h v) g \, \mathrm{d}x \leq \|g\|_{0,2} \|D_{-h} D_h v\|_{0,2}.$$

Es ist $\operatorname{supp} v = \operatorname{supp}(u\varphi) \subset\subset \Omega$ und damit ist auch $\operatorname{supp}(D_h u) \subset\subset \Omega$ für h hinreichend klein. Mit Hilfe von Lemma 8.3 (i) findet man dem entsprechend

$$\|D_{-h} D_h v\|_{0,2} = \frac{1}{|h|} \|\tau_{-h}(D_h v) - D_h v\|_{0,2} \leq |D_h v|_{1,2} = \|D_h \nabla v\|_{0,2}.$$

Zusammen haben wir $\|D_h \nabla v\|_{0,2} \leq \|g\|_{0,2}$ und $\|\tau_h \nabla v - \nabla v\|_{0,2} = |h| \|D_h \nabla v\|_{0,2} \leq \|g\|_{0,2}|h|$. Somit ist $\nabla v \in H^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} |\nabla v|_{1,2} = |v|_{2,2} &\leq d^{\frac{1}{2}} \|g\|_{0,2} \leq d^{\frac{1}{2}} \left(\|f\|_{0,2} \|\varphi\|_{0,2} + 2|u|_{1,2} |\varphi|_{1,2} + \|u\|_{0,2} |\varphi|_{2,2} \right) \\ &\leq C(\|f\|_{0,2} + \|u\|_{1,2}). \end{aligned}$$

Damit ist $v \in H^2(\Omega)$, und da $u = v$ auf Ω_0, folgt $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $|u|_{H^2(\Omega_0)} \leq c(\|f\|_{0,2} + |u|_{1,2})$.

Die Aussage für $k \geq 1$ folgt analog per Induktion. □

8.2 Existenz für ein nichtlineares Problem

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha(x, u(x)) \nabla u(x)) = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge einer Caratheodory-Bedingung mit $0 < m \leq \alpha(x, u) \leq M$ für fast alle $x \in \Omega$ und alle $u \in \mathbb{R}$.

Die entsprechende Variationelle Formulierung ist: Suche $u \in H^1_0(\Omega)$ so dass

$$a(u, v) = \int_\Omega \alpha(x, u(x)) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x = \langle f, v \rangle$$

für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ gilt.

(8.4) Satz. *Für $f \in H^{-1}(\Omega)$ gibt es eine Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$.*

Beweis. (i) V ist separabel. Sei also (V_h) ein Galerkin-Schema für V. Insbesondere sind die V_h endlich dimensionale Unterräume von V.

Wir betrachten das diskrete Ersatzproblem

$$\left\{ \text{Zu } f \in H^{-1}(\Omega) \text{ finde } u_h \in V_h \text{ mit } a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \text{ für alle } v_h \in V_h. \right. \tag{P_h}$$

(ii) Sei $w \in V_h$ beliebig, wir setzen $a_w : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$,

$$a_w(u_h, v_h) = \int_\Omega \alpha(x, w(x)) \nabla u_h(x) \nabla v_h(x).$$

Dann ist a_w bilinear, beschränkt:

$$|a_w(u_h, v_h)| \leq \int_\Omega |\alpha(x, w(x))| |\nabla u_h(x)| |\nabla v_h(x)| \, \mathrm{d}x \leq M |u_h|_{1,2} |v_h|_{1,2}$$

und stark positiv:

$$a_w(u_h, u_h) = \int_\Omega a(x, w(x)) |\nabla u_h(x)|^2 \, \mathrm{d}x \geq m |u_h|^2_{1,2}.$$

Es gibt also (genau) ein $u_w \in V_h$ mit $a_w(u_w, v_h) = \langle f, v_h \rangle$ für alle $v_h \in V_h$.

(iii) Wir setzen $Tw := u_w$. Wir formulieren zunächst *a-priori-Abschätzungen*: Teste mit $v_h = u_w$.

$$m|u_w|_{1,2}^2 \le a_w(u_w, u_w) = \langle f, u_w \rangle \le \|f\|_{-1,2}|u_w|_{1,2}.$$

Damit haben wir $|Tw|_{1,2} = |u_w|_{1,2} \le \frac{1}{m}\|f\|_{-1,2}$. Dann ist $T : B_{V_h}\left(0, \frac{1}{m}\|f\|_{-1,2}\right) \to B_{V_h}\left(0, \frac{1}{m}\|f\|_{-1,2}\right)$ wohldefiniert.

Wir zeigen jetzt, dass T stetig ist: Sei $w_n, w \in B\left(0, \frac{1}{m}\|f\|_{-1,2}\right)$ mit $w_n \to w$ bzgl. $|\cdot|_{1,2}$. Wir wollen also zeigen, dass $|T_{w_n} - T_w|_{1,2} \to 0$ gilt. Da wegen der a-priori-Abschätzung (T_{w_n}) beschränkt ist und V_h endlich dimensional, gibt es eine Teilfolge $(w_{n'})$ und ein $u_h \in V_h$ so, dass $T_{w_{n'}} \to u_h$. Zeige also, dass $u_h = Tw$.

Da $w_{n'} \to w$ bzgl. $|\cdot|_{1,2}$, also auch bzgl. $\|\cdot\|_{1,2}$, gibt es eine Teilfolge $(w_{n''})$ mit $w_{n''}(x) \to w(x)$ fast überall in Ω. Damit gilt für beliebige $v_h \in V_h$

$$\alpha(x, w_{n''}(x))\nabla v_h(x) \xrightarrow{n''\to\infty} \alpha(x, w(x))\nabla v_h(x)$$

fast überall. Da $|\alpha(x, w_{n''}(x))| \le M$ und $\nabla v_h \in L^2(\Omega)$, so folgt mit Lebesgue

$$\int_\Omega |\alpha(x, w_{n''}(x))\nabla v_h(x) - \alpha(x, w(x))\nabla v_h(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0.$$

Da $u_{w_{n''}} = Tw_{n''} \to u_h$ bzgl. $|\cdot|_{1,2}$, d. h. $\nabla u_{w_{n''}} \to \nabla u_h$ bzgl. $\|\cdot\|_{0,2}$. Damit gilt

$$\int_\Omega \alpha(x, w_{n''}(x))\nabla u_{w_{n''}}(x) \cdot \nabla v_h(x) \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \alpha(x, w(x))\nabla u_h(x) \cdot \nabla v_h(x) \,\mathrm{d}x.$$

Also gilt für alle n'':

$$\int_\Omega a(x, w)\nabla u_h \cdot \nabla v_h \longleftarrow \int_\Omega a(x, w_{n''})\nabla u_{w_{n''}} \cdot \nabla v_h = \langle f, v_h \rangle .$$

Damit folgt $u_h = Tw$. Damit folgt $T_{w_{n''}} \to Tw$. Mit dem Teilfolgenprinzip konvergiert nun auch die ganze Folge, also ist T stetig.

(iv) Mit dem Brouwer'schen Fixpunktsatz gibt es (mindestens) ein $u_h \in V_h$ mit $Tu_h = u_h$, d. h. ein Element $u_h \in V$ mit $\int_\Omega \alpha(x, u_h)\nabla u_h \nabla v_h \,\mathrm{d}x = \langle f, v_h \rangle$ für alle $v_h \in V_h$, also löst u_h das diskrete Ersatzproblem.

(v) Es ist $(u_h) \subset V = H_0^1(\Omega)$. Mit der a-priori-Abschätzung $|u_h|_{1,2} \le \frac{1}{m}\|f\|_{-1,2}$ (welche für alle h gilt), folgern wir, dass (u_h) bzgl. $|\cdot|_{1,2}$ beschränkt.

Da $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ gibt es eine Teilfolge $(u_{h'})$, die gegen ein $u \in L^2(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{0,2}$ konvergiert. Wir wollen zeigen, dass u tatsächlich eine Lösung ist.

Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Dann gibt es eine Folge von Elementen $v_h \in V_h$ mit $|v_h - v|_{1,2} \xrightarrow{h\to 0} 0$, also $\nabla v_h \to \nabla v$ in $\|\cdot\|_{0,2}$ und $\langle f, v_h \rangle \to \langle f, v \rangle$. Sei weiter $u_{h''}$ eine Teilfolge, so dass $u_{h''}(x) \to u(x)$ fast überall auf Ω, sowie $v_{h''} \to v(x)$ fast überall auf Ω. Dann gilt (s. o.) $\alpha(x, u_{h''}(x))\nabla v_{h''}(x) \to \alpha(x, u(x))\nabla v(x)$. Mit Lebesgue und einer Majorante

$$\int_\Omega |\alpha(x, u_{h''}(x))\nabla v_h(x) - \alpha(x, u(x))\nabla v(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0.$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \alpha(x, u_{h''}(x))\nabla u_h(x) \cdot \nabla v_h(x) - \alpha(x, u(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x\right| \\
&\qquad \le \underbrace{\left|\int_\Omega (\alpha(x, u_{h''})\nabla v_h - \alpha(x, u)\nabla v) \cdot \nabla u_{h''} \,\mathrm{d}x\right|}_{\le \|\alpha(\cdot, u_{h''})\nabla v_h - \alpha(\cdot, u)\nabla v\|_{0,2}\|\nabla u_{h''}\|_{0,2}} + \left|\int_\Omega \alpha(x, u)\nabla v \cdot (\nabla u_{h''} - \nabla u) \,\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\int \alpha(x,u)\nabla v \cdot (\nabla u_{h''} - \nabla u)\,\mathrm{d}x \to 0$.

Die einzige Rettung ist (DGLIIB) ist die Theorie der schwachen Konvergenz. Eine Folge (u_n) in einem Bananch-Raum V konvergiert schwach gegen $v \in V$, falls $\langle g, u_n - v\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $g \in V^*$. Offensichtlich definiert

$$\langle g, w\rangle := \int\limits_\Omega \alpha(x,u)\nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x$$

ein Funktional aus $H^{-1}(\Omega)$. Damit genügt uns schwache Konvergenz (getestet mit ebendiesem g). Da $(u_{h''})$ beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ ist, gibt es eine schwache Teilfolge.

$\square$