HW 1.

Максим Шишкин.

30 июня 2022 г.

Задача 0.1. Найти давление при изотермическом протекании по цилиндру вязкого газа.

Решение (Неправильное). Некоторые рассуждения, приводящие к анзацу:

- $p = \rho \frac{k_B T}{m}$ в силу уравнения Менделеева-Клайперона для газа.
- будем искать решение, при котором скорость направлена только по оси цилиндра $\mathbf{u} = u_z(z, r)\mathbf{e_z}$.[1]
- Поскольку нет никого масштаба по z, при наличии закрепеленных границ(скорость на поверхности цилиндра 0), естественным кажется сохранения профиля, только с плавным перемасштабированием скорости по мере продвижения по цилиндру: $v_z = Z(z)R(r)$. (самоподобие течения в разных течениях)
- из уравнения неразрывности $\partial_z(\rho v_z) \implies u_z = \frac{q(r)}{\rho}$, что указывает на разделение переменных для плотности и давления соответственно.

Таким образом, мы приходим к анзацу $p = \tilde{p}(z)\Psi(r)$, $u_z = \frac{q(r)}{\Psi(r)}\frac{1}{\tilde{p}(z)}\frac{k_B T}{m}$ Выпишем стационарное уравнение Навье-Стокса для вязкой сжимающейся жидкости:

$$\rho(u_z\partial_z)u_z\mathbf{e_z} = -\nabla p + \eta \triangle u_z \mathbf{e_z} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\partial_z u_z) \tag{1}$$

Внезапный ход - спроецируем на радиальную ось, подставив анзац выше:

$$\tilde{p}(z)\partial_r\Psi(r) = \partial_r\left(\frac{q(r)}{\Psi(r)}\right)\partial_z\left(\frac{1}{\tilde{p}(z)}\right)\frac{k_B T}{m}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \tag{2}$$

Переменные тогда разделяются:

$$\frac{1}{\tilde{p}(z)}\partial_z\left(\frac{1}{\tilde{p}(z)}\right) = \mathcal{C} = \frac{\partial_r\Psi(r)}{\partial_r(q/\Psi)}\frac{m}{k_B T}\frac{1}{\zeta + \frac{\eta}{3}} \tag{3}$$

Отсюда находим, интегрируя:

$$\tilde{p}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{C}z + c}},\ \mathcal{C}\frac{q}{\Psi} = \frac{m}{k_B T}\frac{1}{\zeta + \eta/3}(\Psi + c_0) \implies u_z = \frac{1}{\mathcal{C}}\frac{1}{\zeta + \eta/3}(\Psi(r) + c_0)\sqrt{2z\mathcal{C} + c} \tag{4}$$

Однако, теперь легко видеть, что в таком виде решение *не подойдёт* для проекции (1) на ось z - разные степени вхождения корня в слагаемых.

[1] Зная, что это не так, сложно приводить аргументы в пользу этого, но по-простому это можно мотивировать тем, что это сложно представить.

Решение (Более разумное). Схема не сработала, так как предположение о нулевой радиальной скорости при ненулевом градиенте давления в радиальном направлении оказалось несовместимым с основым уравнением - уравнением на ось цилиндра. Или же утверждение о разделении переменных неверно. Теперь будем действовать в рамках теории возмущения, считая что сжимаемость вносит лишь небольшие поправки:[2]

- $\mathbf{u} = u_z \mathbf{e_z} + u_r \mathbf{e_r}$
- u_r само по себе имеет некий порядок малости, причем её масштаб по $r \sim R$ так как в центре она ноль и на краях цилиндра, по z она меняется слабо, поэтому дифферинцирование по z вносит дополнительную малость.
- v_z величина не малая, но её масштаб по z - большой, так что её производные по z малы, по r масштаб тот же - R.
- градиет давления по z не мал, однако следующие производные вносят малость, градиент же по r мал.

Выпишем полное уравнение Навье-Стокса, указав, содержит каждый член малость порядка больше старшего в уравнении или нет.

$$z-\text{axis: } \rho(u_z\partial_z + u_r\partial_r)u_z = -\partial_z p + \eta(\triangle_z + \triangle_r)u_z + (\zeta+\eta/3)\partial_z(\partial_z u_z + u_r/r + \partial_r u_r) \tag{5}$$

$$r-\text{axis: } \rho(u_z\partial_z + u_r\partial_r)u_r = -\partial_r p + \eta(\triangle_z + \triangle_r - \frac{1}{r^2})u_r + (\zeta+\eta/3)\partial_r(\underline{\partial_z u_z} + u_r/r + \partial_r u_r) \tag{6}$$

Видно теперь, что, для оси z получается в главном (не малом вовсе) уравнение как для несжимаемой жидкости:

$$\partial_z p^{(-1)[3]} = \eta \triangle_r u_z^{(0)} \implies u_z^0 = \frac{R^2-r^2}{4\eta}(-\partial_z p^{(-1)}) \tag{7}$$

Кроме этого, мы имеет точный интеграл движения - поток через трубу постоянен во всех порядках теории возмущения, технически удобней весь поток удовлетворить в нулевом порядке, а в каждом следующей требовать равенства нулю потока в каждом следующем порядке теории возмущения.

$$\int_S u_z^{(0)}\rho^{(0)}\,\mathrm{d}S = q\pi R^2 \implies \rho^{(0)}(-\partial_z p^{(-1)})R^2 = 8q\eta \implies \boxed{p^{(-1)} = \sqrt{\frac{16q\eta}{R^2}\frac{k_BT}{m}}\sqrt{z_0-z}} \tag{8}$$

$$\boxed{v_z^{(0)} = \frac{R^2-r^2}{4\eta}\sqrt{\frac{16q\eta}{R^2}\frac{k_BT}{m}}\frac{1}{2\sqrt{z_0-z}}} \tag{9}$$

Теперь самое время понять, что является малым параметром, для этохо необходимо сранить оставленные и отброшенные части:

$$\eta\frac{1}{R^2}u_z^{(0)} \text{ V.S. } \rho\partial_z(u_z^{(0)})^2 \text{ V.S. } \eta\partial_z^2 u_z^{(0)} \tag{10}$$

$$\frac{\eta u_z}{R^2} \text{ V.S. } \frac{u_z\eta}{R^2}\frac{mu_z^2}{k_BT} \text{ V.S. } \frac{\eta u_z}{R^2}\left(\frac{\eta}{R\rho u_z}\right)^2\left(\frac{mu_z^2}{k_BT}\right)^2 \tag{11}$$

$$1 \text{ V.S. } \frac{mu_z^2}{k_BT} \text{ V.S. } \left(\frac{\eta}{R\rho u_z}\right)^2\left(\frac{mu_z^2}{k_BT}\right)^2 \tag{12}$$

Таким образом, направленное движение должно быть малым возмущением над тепловым:

$$\frac{k_BT}{mu^2} \gg \max\left(1, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \tag{13}$$

[2]Идеалогически схема будет похожа на адиабатическое приближение, когда «эволюция» по z малая, так что эволюция по r подстраивается при данной окрестности z.

[3]Индекс минус единица у давления подчеркивает, что само давленеи большое, а его производная порядка нулевого

Альтернативная запись второго условия: $k_B T \gg f_\eta \bar{l}$, т.е. энергия, связанная с тепловым движением молекулы должна быть больше работы сил вязкого трения на величине расстояния между молекулами. Теперь, осозновая, что является малым параметром, мы можем сторить теорию возмущения дальше. В частности, из уравнения неразрывности, оказывается, что $v_r^{(1)} = 0$. Отсюда $\partial_r p^{(0)} = 0$. Считая число рейнольдса не экстремальным, в первом порядке получаем уравнение:

$$\partial_z p^{(0)} + \rho^{(0)} u_z^{(0)} \partial_z u_z^{(0)} = \eta \triangle_r u_z^{(1)} \tag{14}$$

Содержательное задание - найти отклик именно на $u_z^{(0)}$

$$\eta \triangle_r u_z^{(1)} = -\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{1}{4(z_0 - z)^{3/2}} \left(\frac{816 q \eta}{R^2}\right)^{3/2} \left(\frac{R^2 - r^2}{4\eta}\right)^2 \tag{15}$$

Ясно, что зависимость от z останется той-же,что и у правой части, интегрирование же по r производится явно. К этому нужно добавить решение, находящееся аналогично нулевому порядку $\sim \partial_z p^{(0)}$. После посчитать потоки от каждого, помня, что плотность $\rho = \rho^0 + \rho^1 (= \frac{m}{k_B T} p^{(0)})$. Равенство суммы потоков нулю зафиксирует $p^{(0)}$. В общем, это уже чисто техническая задача.. Отметим лишь, что уже в следующем порядке у давления появится зависимость от радиуса, как и радиальная сокрость, что видно из наличия подчеркнутого члена в (6).