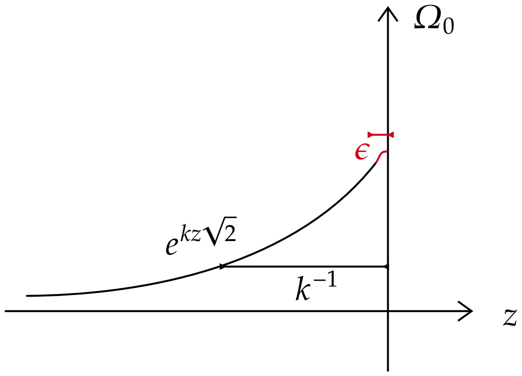
$\Omega_0 \,=\, e^{kz\sqrt{2}} \sin kx \sin ky\;,$



Начальная завихренность экспоненциально затухает в объёме и имеет подслой на границе, на котором производная обращается в ноль.

$$\left(\partial_t \;-\; \nu\partial_z^2 \;-\nu\partial_\perp^2\right)\Omega \;=\; 0$$

Продолжим по симметрии в завихренность в положительную область, в пределе $\epsilon \longrightarrow 0$ модифицированная $\Omega_0 \propto e^{-\sqrt{2}k\,|z|}$. Поверхностная струтура собственная для генератора эволюции, т.ч. $\partial_\perp^2 \;=\; -2k^2$, введем $\Omega \;= e^{-2k^2\nu t}\widetilde{\Omega}$

$$\left(\partial_t \;-\; \nu\partial_z^2\right)\widetilde{\Omega} = 0 \Longrightarrow \left(\partial_t + \nu k_z^2\right)\widetilde{\Omega} = 0 \Longrightarrow \widetilde{\Omega} \;=\; e^{-\nu k_z^2 t}\widetilde{\Omega}_0$$

$$\widetilde{\Omega}_0 \;\propto\; \int dz\, e^{-k|z|\sqrt{2}}e^{-ik_z z} = \frac{1}{k\sqrt{2}+ik_z} + \frac{1}{k\sqrt{2}-ik_z} = \frac{2k\sqrt{2}}{2k^2+k_z^2}$$

$$\widetilde{\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int dk_z\, e^{ik_z z}\, e^{-\nu k_z^2 t}\,\widetilde{\Omega}_0 \;\Longrightarrow\; \Omega \;=\; \frac{1}{2\pi}\int dk_z\, e^{ik_z z}\, e^{-\nu k_z^2 t\,-\,2k^2\nu t}\frac{2k\sqrt{2}}{2k^2+k_z^2}$$

$$\widetilde{\Omega} = \int e^{-\sqrt{2}k|z+y|}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}dy$$

$$\widetilde{\Omega}(z=0) = \int e^{-\sqrt{2}k|y|}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}dy$$

На малых временах $ky \sim k\sqrt{\nu t} \ll 1$ и экспоненту можно в ряд

$$\widetilde{\Omega}(z=0) = \int \left(1 - \sqrt{2}k|y| + O\left(k^2\nu t\right)\right) e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} dy =$$

$$= 1 - \sqrt{2}k\sqrt{4\nu t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_0^\infty e^{-u^2} du^2}_{=1} + O\left(k^2\nu t\right)$$

На больших временах $k_z \sim 1/\sqrt{\nu t}$ и можно предэкспоненту в ряд:

$$\Omega(z=0) = \frac{1}{2\pi}\int dk_z\ e^{-\nu k_z^2 t - 2k^2\nu t} \frac{\sqrt{2}}{k\left(1+\frac{k_z^2}{2k^2}\right)} = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_z\ e^{-\nu k_z^2 t - 2k^2\nu t} \frac{\sqrt{2}}{k}\left(1 + O\left(\frac{1}{k^2\nu t}\right)\right) = e^{-2k^2\nu t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu t k^2}} + O\left(\frac{1}{k^2\nu t}\right)\right)$$

Отдельно может быть инетресно как устроен профиль на малых временах вблизи поверхности $z \sim \sqrt{\nu t}$, сначал на масштабе больше ϵ была галочка

$$\widetilde{\Omega} = \int e^{-\sqrt{2}k|z+y|} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} dy = \int \left(1 - \sqrt{2}k\sqrt{4t\nu}|u+\tilde{z}| + O\left(k^2\nu t\right)\right) e^{-u^2} du \frac{1}{\sqrt{\pi}} =$$

$$1 - \sqrt{2}k\sqrt{4t\nu}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int |u+\tilde{z}| e^{-u^2} du}_{f(\tilde{z})} + O\left(k^2\nu t\right)$$

То есть на малых временах в той области, до которой дошла диффуция $z_t \sim \sqrt{\nu t}$ наблюдается универсальность

$$\Omega = 1 - z_t f\left(\frac{z}{z_t}\right)$$

Причем для функкции легко записать представление в виде ряда исходя из того, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n 2n(2n-1)x^{2n-2}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{2n}\right)'' = f'' = 2e^{-x^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} \frac{1}{n-1!}$$

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)}\ \frac{(-1)^{n-1}}{n!} & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

То есть асимптотика в нуле $f \approx 1 + x^2$, а на бесконечности $f \approx \sqrt{\pi x}$, то есть акккурат подшивается к затравочной галочке.