

# Rectangle viscous flow.

Максим Шишкин.

30 июня 2022 г.

**Задача 0.1.** Найти периодическое движение вязкой несжимаемой жидкости в канале прямоугольной формы.

Пусть ось, вдоль которой течет жидкость - ось  $z$ , сечение описывается прямоугольником т.ч.  $x \in (0,b)$   $y \in (0,s)$ . Получим решение в предположении наличия только  $u_z$  компоненты скорости. Из уравнения несжимаемости ( $\partial_k u_k = 0$ ), получаем  $u_z = u_z(x,y)$ .

Тогда уравнение Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости принимает простой вид:

$$\partial_t \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

Проецируя это уравнение на оси  $x,y$  получаем  $p = p(z)$ .

Искать будем гармоническое решение, т.е.  $u_z = \Re f(x,y)e^{-i\omega t}$ .<sup>1</sup>

Подставляя такой анзац получаем уравнение на амплитуду:

$$-i\omega f = -\frac{\partial_z p}{\rho} + \nu \Delta f \implies \frac{\partial_z p}{\rho} = (i\omega + \nu \Delta) f \quad (2)$$

Проведем явное обезразмеривание полученного уравнения:  $x = b(\tilde{x} - \frac{1}{2})$ ,  $y = s(\tilde{y} - \frac{1}{2})$ ,  $f = \frac{b^2 \partial_z p}{\eta} \tilde{f}$ ,  $\omega = \frac{\nu}{b^2} \tilde{\omega}$ . Далее для удобства тильды не ставятся, кроме того, введем безразмерное отношение сторон канала  $\beta = \frac{b}{s}$ . В безразмерных переменных уравнение переписывается в виде:

$$(i\omega + \partial_x^2 + \beta^2 \partial_y^2) f = 1, \quad f \Big|_{x=\pm\frac{1}{2} \text{ or } y=\pm\frac{1}{2}} = 0 \quad (3)$$

Поскольку симметрия в плоскости нарушена, пробуем найти решение для её 'бесконечного' нарушения  $\beta = 0$ . В этом случае  $f = f_p(x)$ .  $(\partial_x^2 + i\omega) f_p = 1$ . Общее решение дается выражением типа  $f_p = \frac{1}{i\omega} + c_+ e^{\lambda x} + c_- e^{-\lambda x}$ , где  $\lambda = \sqrt{-i\omega} = \sqrt{\omega/2}(1-i)$ . Для удовлетворения граничным условиям при  $x = \pm\frac{1}{2}$  получаем

$$f_p = \frac{1}{i\omega} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda x}{\cosh \frac{\lambda}{2}} \right) \quad (4)$$

Решение же первоначальной задачи можно представить в виде суммы найденного и добавки  $f = f_p + f_o$ . Для  $f_o$  получаем однородное уравнение (3), но уже с граничными условиями в виде  $f_o \Big|_{x=\pm\frac{1}{2}} = 0$ , а  $f_o \Big|_{y=\pm\frac{1}{2}} = -f_p$ .<sup>2</sup> Однородное уравнение допускает разделение переменных  $f_n = X(x)Y(y)$ , после подстановки и деления на  $f_n$  получаем :

$$i\omega + \underbrace{\frac{\partial_x^2 X}{X}}_{-k_x^2} + \beta^2 \underbrace{\frac{\partial_y^2 Y}{Y}}_{\lambda_y^2} = 0 \quad (5)$$

Как легко видеть  $X_n = \sin(k_x(x - \frac{1}{2}))$  причем  $k_x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .<sup>3</sup> Тогда  $\lambda_y^2 = \beta^{-2}(k_x^2 - i\omega)$ .

<sup>1</sup>  $\Re$ -операция взятия действительной части. Давление также предполагается гармоническим  $p \rightarrow \Re p e^{-i\omega t}$

<sup>2</sup> То есть дополнительное решение поправляет ненулевую скорость на второй границе.

<sup>3</sup> Разумеется, это представляет стоячую волну в направлении  $x$ .

$$\text{Соответственно } Y_n = \frac{\cosh \lambda_y y}{\cosh \frac{\lambda_y}{2}}$$

Тогда итоговая  $f_o = \sum_n c_n X_n Y_n$ , для удовлетворения второму граничному условию получаем

$$\sum_n c_n X_n = -f_p \quad (6)$$

Таким образом остался чисто технический момент - получить разложение  $f_p$ . В силу того, что  $\{X_n\}$  является решением спектральной задачи для эрмитового оператора, они ортогональны относительно скалярного произведения в  $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, dx)$ . Тогда  $c_n$  находятся простым проецированием на ортонормированный базис.

$$c_n = \frac{-2}{i\omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda x}{\cosh \frac{\lambda}{2}} \right) \sin\left(\pi n \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx \quad (7)$$

В силу симметрии ясно, что участвует только нечетные  $n = 2k + 1$ .

$$c_n = \frac{-4}{i\omega} \left( \frac{\pi n}{-i\omega + (\pi n)^2} - \frac{1}{\pi n} \right) = \frac{-4}{(\pi n)^3 - i\omega(\pi n)} \quad (8)$$

Итого ответ есть

$$f = \frac{1}{i\omega} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda x}{\cosh \frac{\lambda}{2}} \right) + \sum_{n=2k+1} c_n \sin\left(\pi n \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \frac{\cosh \lambda_y^n y}{\cosh \frac{\lambda_y^n}{2}}, \quad \lambda_y^n = \beta^{-1} \sqrt{(\pi n)^2 - i\omega}, \quad \lambda = \sqrt{-i\omega} \quad (9)$$

Рассмотрим отдельно стационарный случай, соответствующий  $\omega = 0$ .  $f_p = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{4})$ ,  $c_n = \frac{-4}{(\pi n)^3}$ .

При этом  $\lambda_y = \beta^{-1} k_x = \beta^{-1} \pi n$ . Если  $\beta \rightarrow 0$ , видно, что  $Y_n$  экспоненциально затухает от границы  $y = \pm \frac{1}{2}$  с характерным масштабом порядка  $\frac{\beta}{\pi n}$ , что порядка поперечного масштаба  $b$  при возвращении к размерным единицам.

Не составляет труда сосчитать и поток- среднюю скорость:

$$Q = \bar{f} = \int_{\square} dx dy f = \frac{1}{i\omega} \left( 1 - \frac{\tanh \lambda/2}{\lambda/2} \right) - \sum_{n=2k+1} c_n \left( \frac{2}{\pi n} \right) \frac{\tanh \lambda_y^n / 2}{\lambda_y^n / 2} \quad (10)$$

Теперь предлагается насладиться картинками.

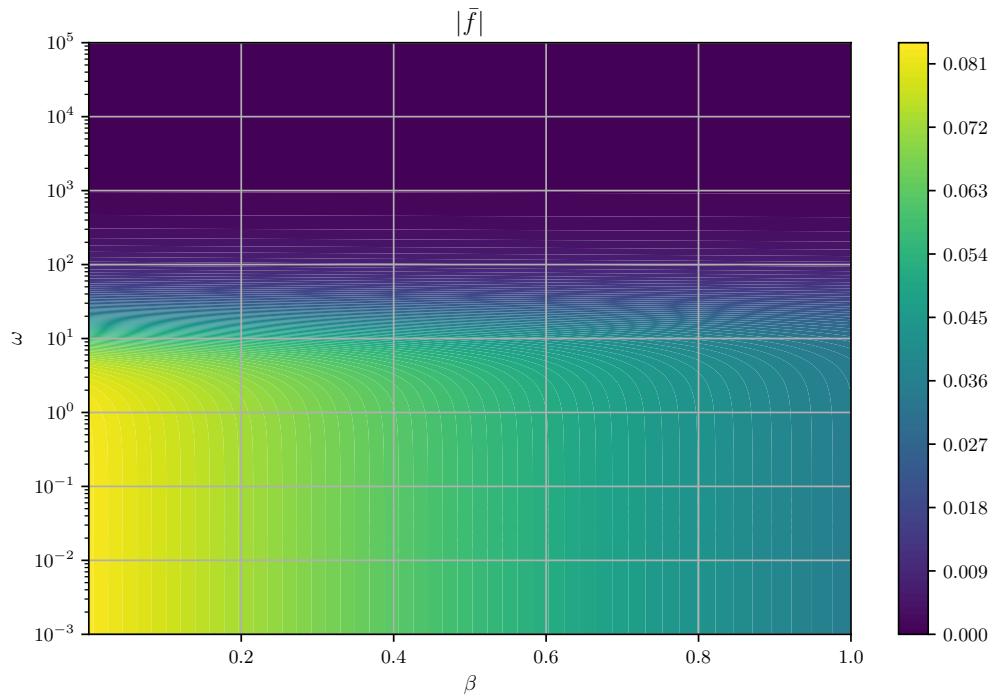


Рис. 1: Зависимость модуля средней по сечению безразмерной скорости от параметров(Что-то вроде гидропроводимости). Для стационарного случая  $\omega = 0$  и плоскости  $\beta = 0$  эта величина есть  $\frac{1}{12} \approx 0.083$

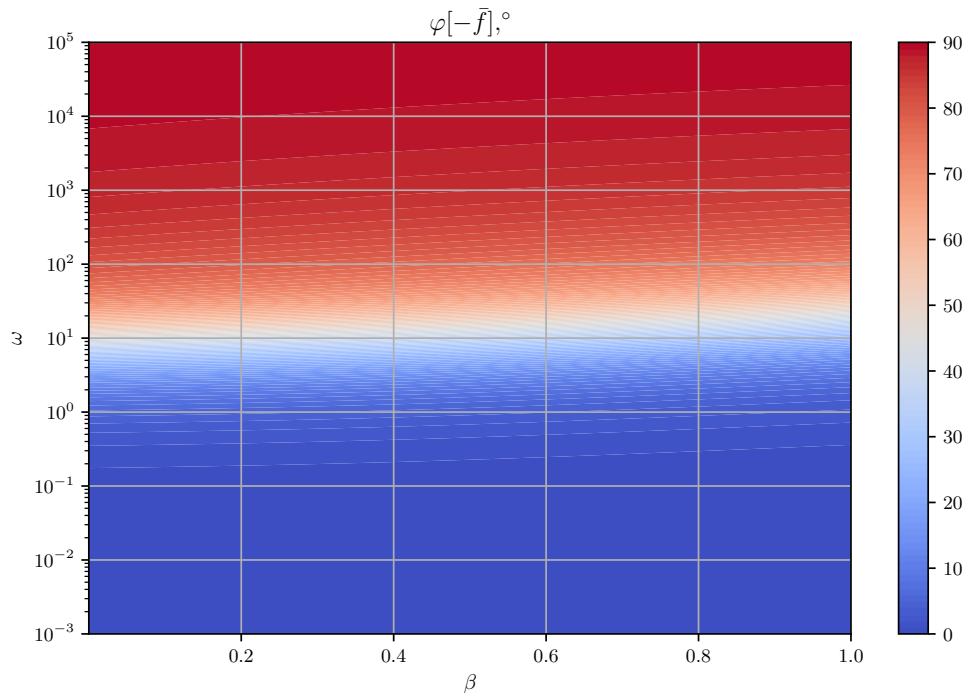


Рис. 2: Фаза между средней скоростью и градиентом давления

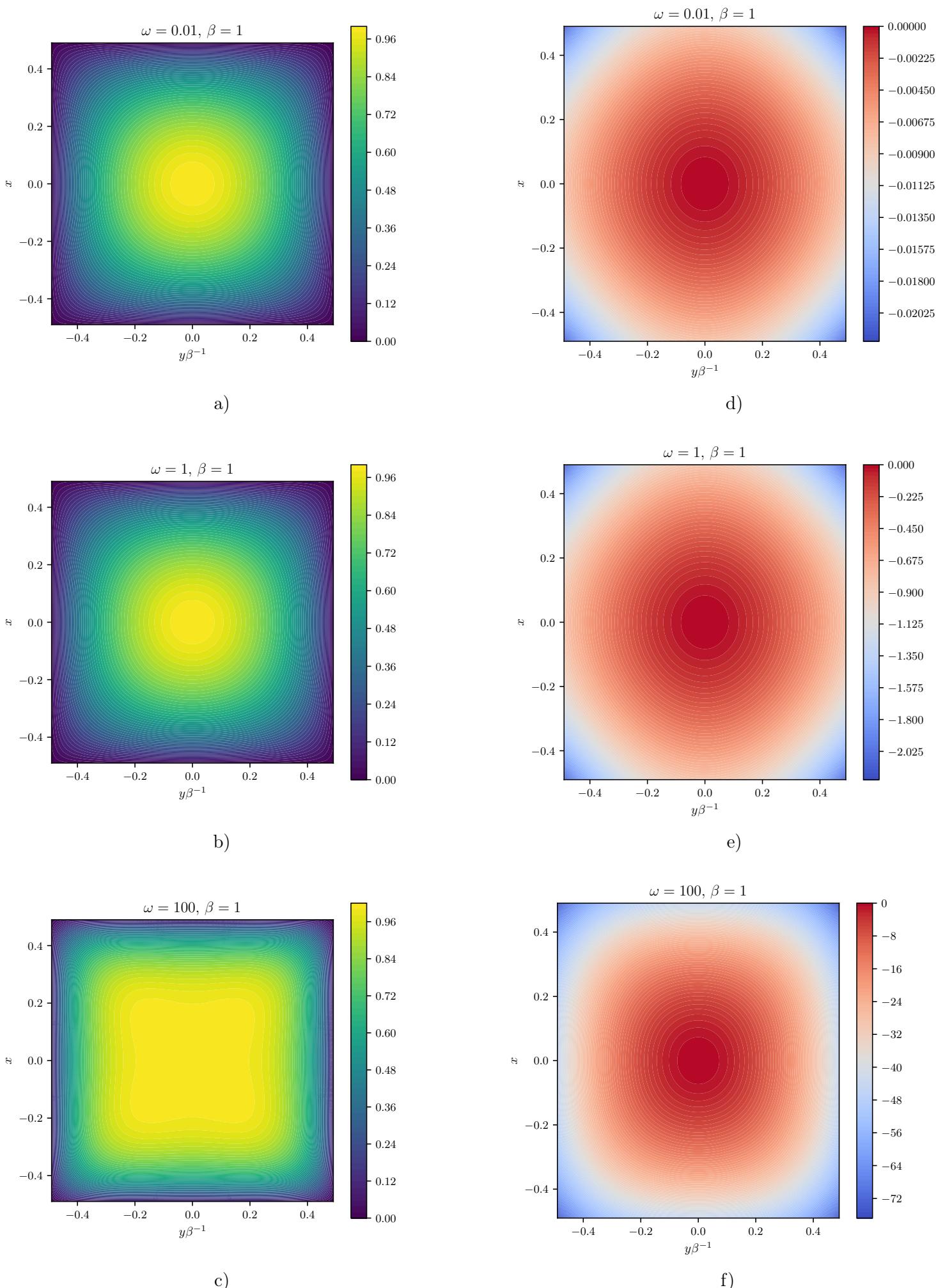


Рис. 3: Поля скоростей (а-с) и фазы в градусах (д-ф) для квадратного канала.

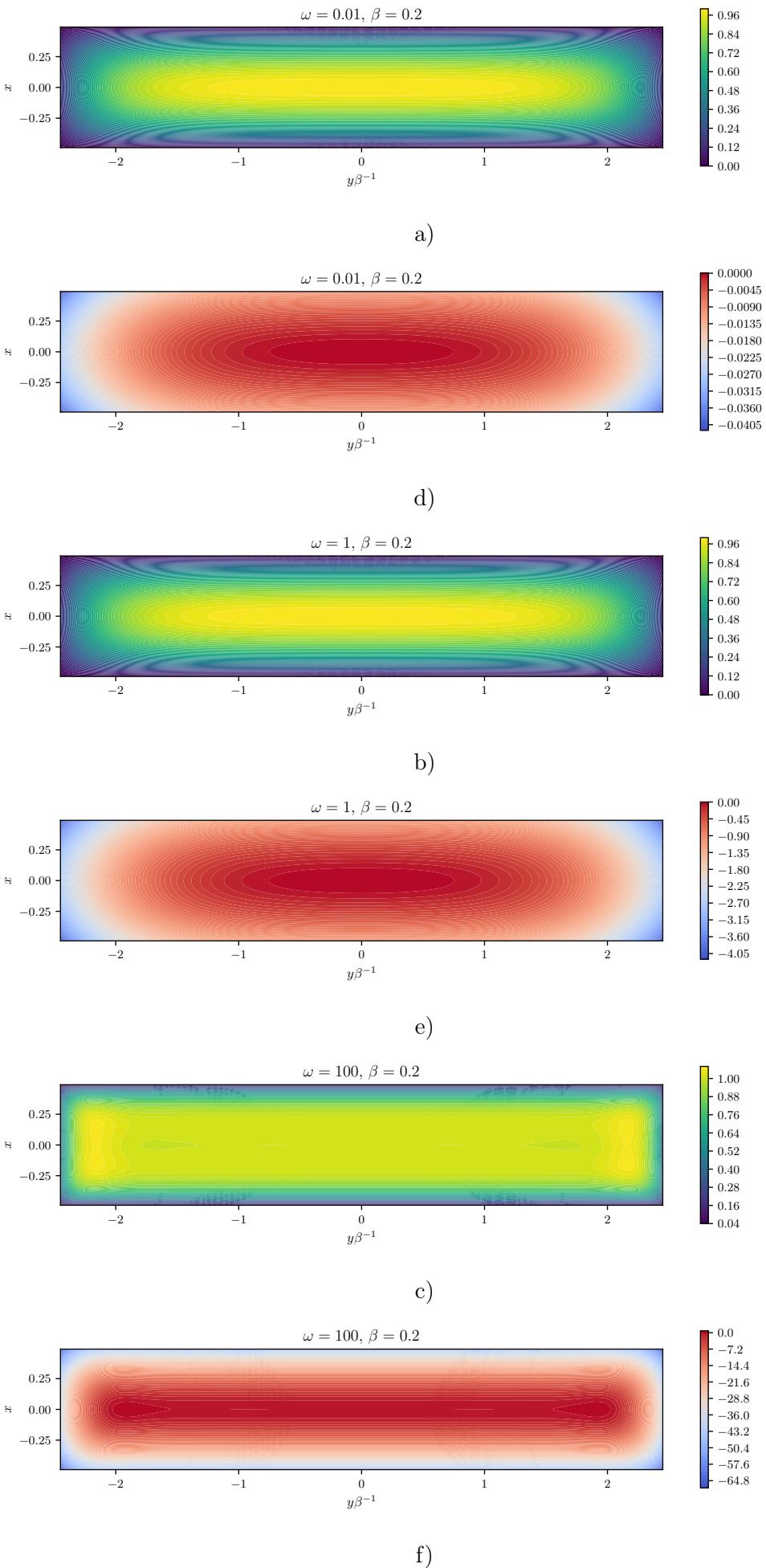


Рис. 4: Поля скоростей (а-с) и фазы в градусах (д-ф) для прямоугольного канала.

Перейдём к более подробному исследованию случая бесконечного по оси  $y$  канал ( $\beta = 0$ ).

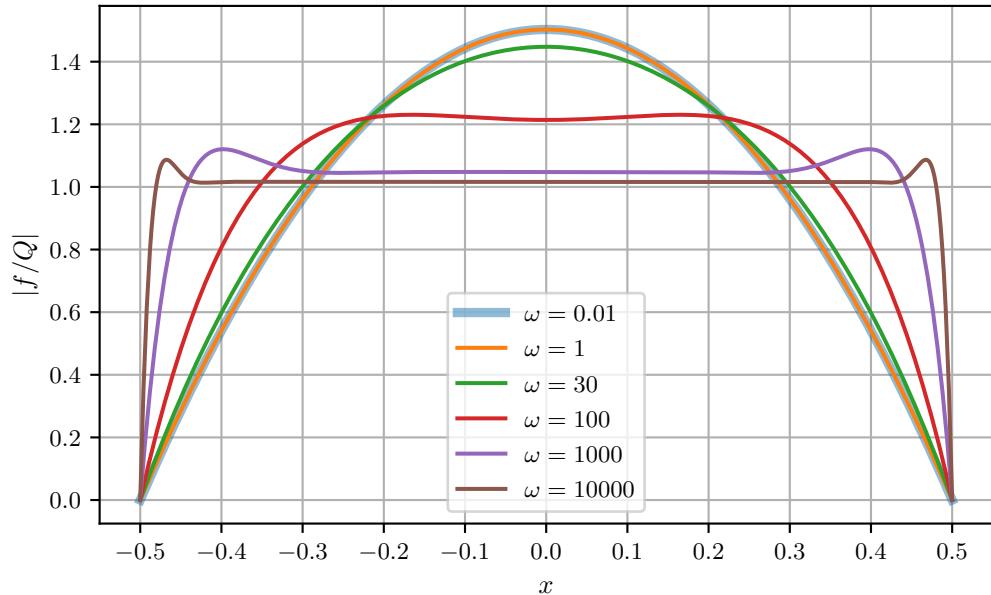


Рис. 5: Распределение модуля скорости(отнормированно на среднюю) в случае плоского канала

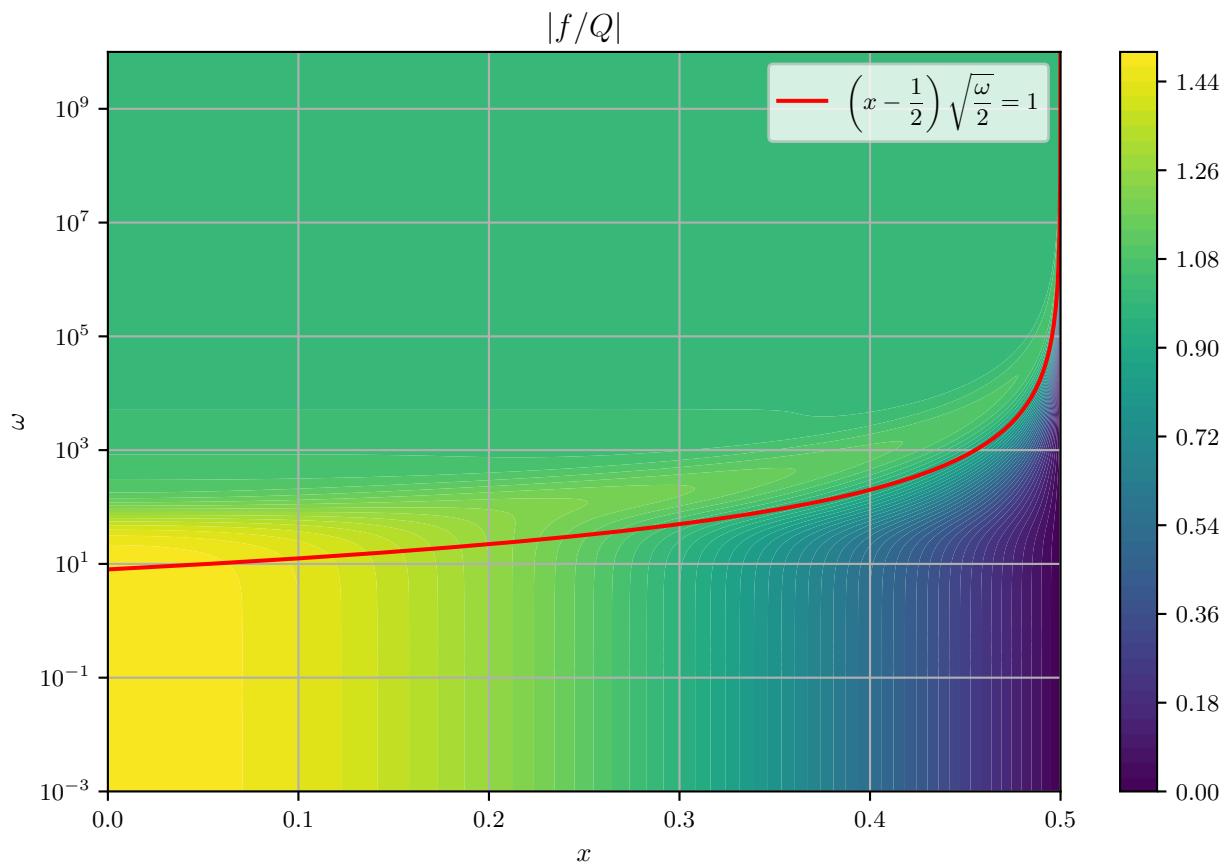


Рис. 6: Распределение модуля скорости(отнормированно на среднюю) в случае плоского канала в зависимости от частоты. Кривой показана огибающая область неоднородного течения для высокочастотной области.

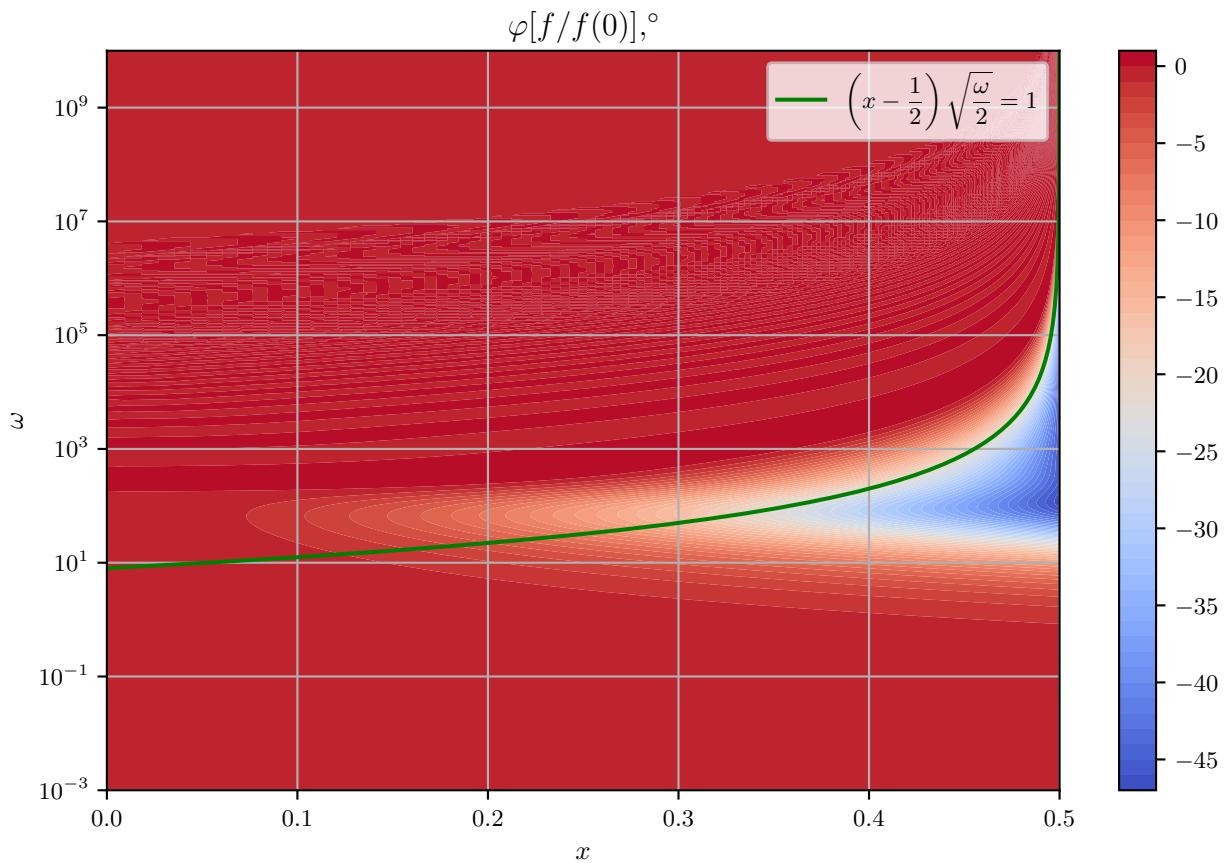


Рис. 7: Распределение фазы скорости(отнормированно фазу в центре) в случае плоского канала в зависимости от частоты. Кривой показана огибающая области неоднородного течения для высокочастотной области.

Dixi