

Квазифизика квазизвёзд

Максим Шишкин

29 ноября 2020 г.

Пытаемся удержать коэффициенты

Для квазиописания квазизвёзд на квазисеминаре была предложена следующая квазимодель¹:

Условие гидродинамического равновесия:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r) \quad (1)$$

Кроме того было предъявлено квазиравновесное квазисостояние квазигаса частиц:

$$P = K \rho^\gamma \quad (2)$$

Замкнём эти уравнения, представив массу как интеграл от плотности:

$$K \frac{d\rho^\gamma}{dr} = -4\pi \frac{G\rho}{r^2} \int_0^r \xi^2 \rho(\xi) d\xi \quad (3)$$

Решать нелинейное интегральное уравнение с учетом того, что я без понятия как *оно всё* там устроено и не могу поставить эксперимент(!), даже численно неблагодарно, поэтому избавимся от интеграла, взяв производную от него, после замен получаем следующее уравнение:

$$\eta = \rho^{\gamma-1}, \beta = \frac{1}{\gamma-1}, \alpha = 4\pi \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{G}{K} \implies \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \eta \right) = -\alpha r^2 \eta^\beta \quad (4)$$

Значит легко видеть, что здесь написано следующее, с перенормировкой $\eta \rightarrow a\eta, \alpha a^{\beta-1} := 1$

$$\boxed{\Delta_r \eta = -\eta^\beta} \quad (5)$$

Кроме того, из (3) ясно, что

1. $\eta(0) = \eta_0 > 0$
2. $\eta'(0) = 0$

Congratulation! Мы в соответствии с фейнмановской терминологией добрались до вершины - компактно записали задачу, время спускаться и уже гораздо менее приятными путями её решать.

Сразу укажем на одно параметрическую группу решений:

$$r_1 = \varepsilon r \implies \eta_1 = \varepsilon^{-\frac{2}{\beta-1}} \eta$$

Исследование этого уравнения показывает, что есть два пути упрощения полученного уравнения:

¹Такое количество квази призвано указать на игрушечность всего что изложено ниже.

- Анзацем $\Phi = \eta r$ сводится к уравнению Эмдена–Фаулера: $\Phi'' = -r^{1-\beta}\Phi^\beta$
- Видно, что уравнение изобарическое² и анзацем $\eta = z r^{\frac{2}{1-\beta}}, t = \ln r$ сводится к автономному $\ddot{z} + \dot{z} \left(\frac{5-\beta}{1-\beta} \right) + 2z \left(\frac{3-\beta}{(1-\beta)^2} \right) = -z^\beta$, которое в свою очередь естественным образом сводится к уравнению первого порядка $w(z) = \dot{z} \implies w'w - w \frac{5-\beta}{\beta-1} = -2z \frac{3-\beta}{(\beta-1)^2} - z^\beta$ – с точностью до перенормировки z является уравнением Абеля.

Численное интегрирование

Независимо от выбранного способа существенные аналитические продвижения не представляются возможными, а для наших целей будет уместно численное решение. Здесь не обсуждается метод, т.к. задача не жесткая и устойчивая, поэтому особых сложностей не возникает, стоит указать лишь на то, что производная η разрывна на границе «солнца» (см. решение), что на самом деле допустимо, и, как видно из графиков, оставляет плотность непрерывной.

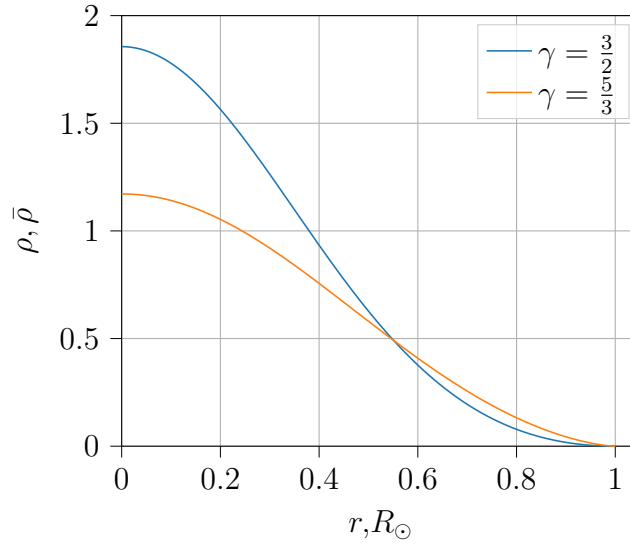


Рис. 1: Зависимость плотности от расстояния, нормирована на единичную массу.

Теперь мы можем посчитать потенциальную энергию:

$$-U = \int_0^{R_\odot} \frac{M(r)}{r} dm(r), M(r) := \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (6)$$

²Терминология урматов, к термодинамики не имеет отношения

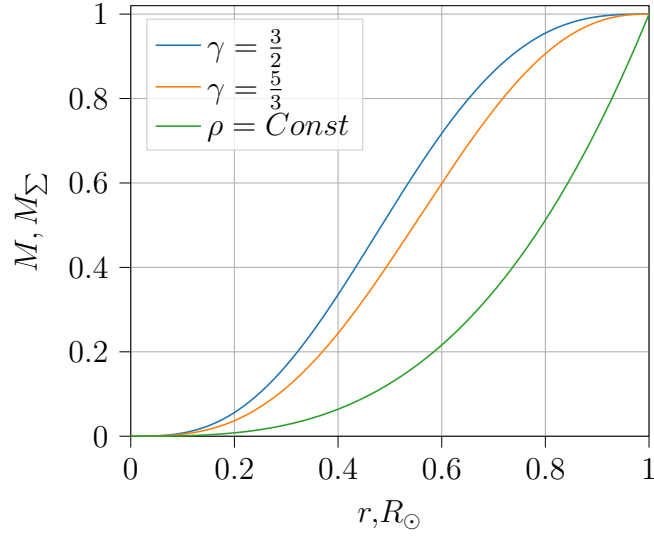


Рис. 2: Зависимость интегральной массы от радиуса, кривая для постоянной плотности приведена для сравнения.

В результате имеем следующие безразмерные префакторы, ситуация постоянной плотности была так же проинтегрирована для контроля.³

type	prefactor
$\rho = const$	0.599
$\gamma = 5/3$	0.822
$\gamma = 3/2$	0.916

Квазивыводы

- В рамках согласования предложенной модели функционал от решения в виде гравитационной энергии оказывается существенно отличным от ситуации постоянной плотности.
- Таким образом без решения задачи, которое было предоставлено тут, получить ответ существенно точнее того, что вышло бы просто из размерности не видится возможным.
- Автор при этом не имеет ни малейшей надежды на то, что полученные результаты хоть сколько-нибудь лучше описывают «солнце»; во первых, существенное влияние на распределение вещества оказывает вращение и прочие эффекты, – во вторых, никакого убедительного эксперимента поставить нельзя, поэтому стоит воспринимать как сказку на ночь.

³Энергия однородного шара $\sim 3/5$

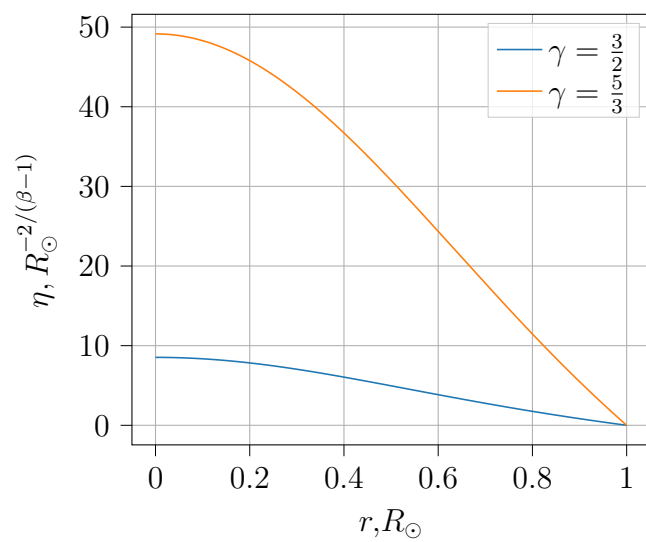


Рис. 3: Решение нелинейной задачи на η .