Квазифизика квазизвёзд

Максим Шишкин

28 ноября 2020 г.

Пытаемся удержать коэффициенты

Для квазиописания квазизвёзд на квазисеминаре была предложена следующая квазимодель[1]:

Условие гидродинамического равновесия:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r) \tag{1}$$

Кроме того было предъявлено квазиравновесное квазисостояние квазигаза частиц:

$$P = K\rho^{\gamma} \tag{2}$$

Замкнём эти уравнения, представив массу как интеграл от плотности:

$$K\frac{\mathrm{d}\rho^{\gamma}}{\mathrm{d}r} = -4\pi\frac{G\rho}{r^2}\int_0^r \xi^2\rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

Решать нелинейное интегральное уравнение с учетом того, что я без понятия как *оно всё* там устроено и не могу поставить эксперимент(!), даже численно неблагодарно, поэтому избавимся от интеграла, взяв производную от него, после замен получаем следующее уравнение:

$$\eta = \rho^{\gamma-1}, \beta = \frac{1}{\gamma-1}, \alpha = 4\pi\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{G}{K} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\eta\right) = -\alpha\, r^2\eta^{\beta} \tag{4}$$

Значит легко видеть, что здесь написано следующее, с перенормировкой $\eta \to a\eta, \alpha a^{\beta-1} := 1$

$$\boxed{\triangle_r\eta = -\eta^{\beta}} \tag{5}$$

Кроме того, из (3) ясно, что

1. $\eta(0) = \eta_0 > 0$
2. $\eta'(0) = 0$

   Congratulation! Мы в соответствии с фейнмановской терминологией добрались до вершины - компактно записали задачу, время спускаться и уже гораздо менее приятными путями её решать.

Сразу укажем на одно параметрическую группу решений:

$$r_1 = \varepsilon r \implies \eta_1 = \varepsilon^{-\frac{2}{\beta-1}}\eta$$

Исследование этого уравнения показывает, что есть два пути упрощения полученного уравнения:

[1] Такое количество квази призвано указать на игрушечность всего что изложено ниже.

- Анзацем $\Phi = \eta r$ сводится к уравнению Эмдена–Фаулера: $\underline{\Phi'' = -r^{1-\beta}\Phi^{\beta}}$

- Видно, что уравнение изобарическое[2] и анзацем $\eta = z\, r^{\frac{2}{1-\beta}}, t = \ln r$ сводится к автономному $\ddot{z} + \dot{z}\left(\dfrac{5-\beta}{1-\beta}\right) + 2z\left(\dfrac{3-\beta}{(1-\beta)^2}\right) = -z^{\beta}$, которое в свою очередь естественным образом сводится к уравнению первого порядка $w(z) = \dot{z} \implies \underline{w'w - w\dfrac{5-\beta}{\beta-1} = -2z\dfrac{3-\beta}{(\beta-1)^2} - z^{\beta}}$ – с точностью до перенормировки z является уравнением Абеля.

Численное интегрирование

Независимо от выбранного способа существенные аналитические продвижения не представляются возможными, а для наших целей будет уместно численное решение. Здесь не обсуждается метод, т.к. задача не жесткая и устойчивая, поэтому особых сложностей не возникает, стоит указать лишь на то, что производная η разрывна на границе «солнца» (см. решение), что на самом деле допустимо, и, как видно из графиков, оставляет плотность непрерывной.

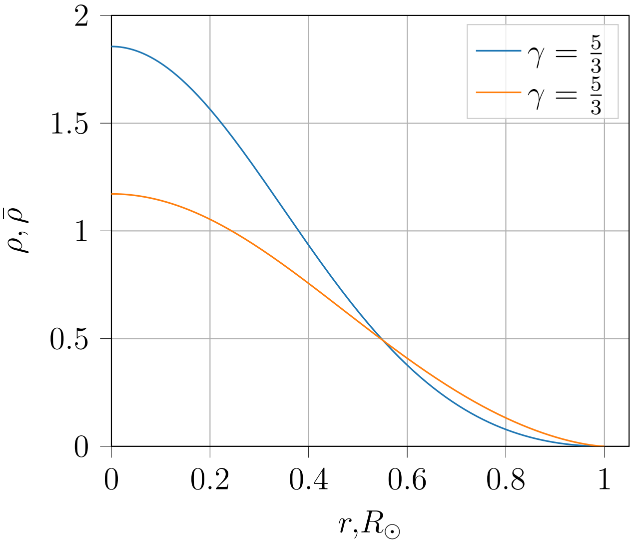

Рис. 1: Зависимость плотности от расстояния, нормирована на единичную массу.

Теперь мы можем посчитать потенциальную энергию:

$$-U = \int_0^{R_{\odot}} \frac{M(r)}{r}\, \mathrm{d}m(r)\,, M(r) := \int_0^{r} \rho(r')\, 4\pi r'^2\, \mathrm{d}r' \tag{6}$$

[2]Терминология урматов, к термодинамики не имеет отношения

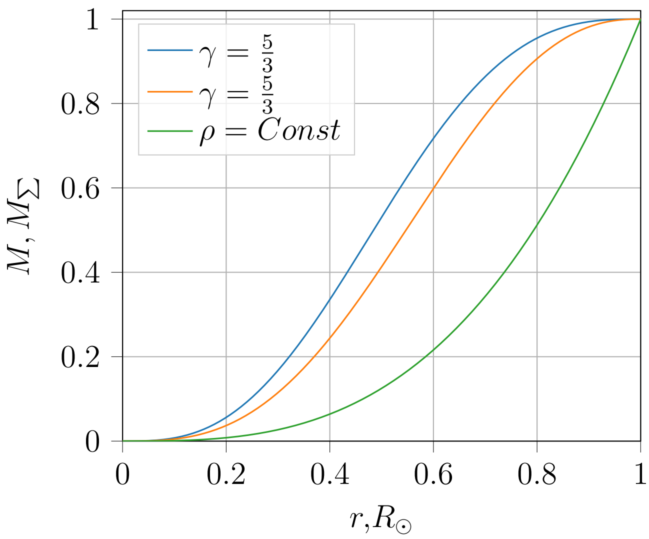

Рис. 2: Зависимость интегральной массы от радиуса, кривая для постоянной плотности приведена для сравнения.

В результате имеем следующие безразмерные префакторы, ситуация постоянной плотности была так же проинтегрирована для контроля.[3]

type	**prefactor**
$\rho = const$	0.599
$\gamma = 5/3$	0.822
$\gamma = 3/2$	0.916

Квазивыводы

- В рамках согласования предложенной модели функционал от решения в виде гравитационной энергии оказывается существенно отличным от ситуации постоянной плотности.
- Таким образом без решения задачи, которое было предоставлено тут, получить ответ существенно точнее того, что вышло бы просто из размерности не видится возможным.
- Автор при этом не имеет ни малейшей надежды на то, что полученные результаты хоть сколько-нибудь лучше описывают «солнце»; во первых, существенное влияние на распределение вещества оказывает вращение и прочие эффекты, – во вторых, никакого убедительного эксперимента поставить нельзя, поэтому стоит воспринимать как сказку на ночь.

[3] Энергия однородного шара $\sim 3/5$

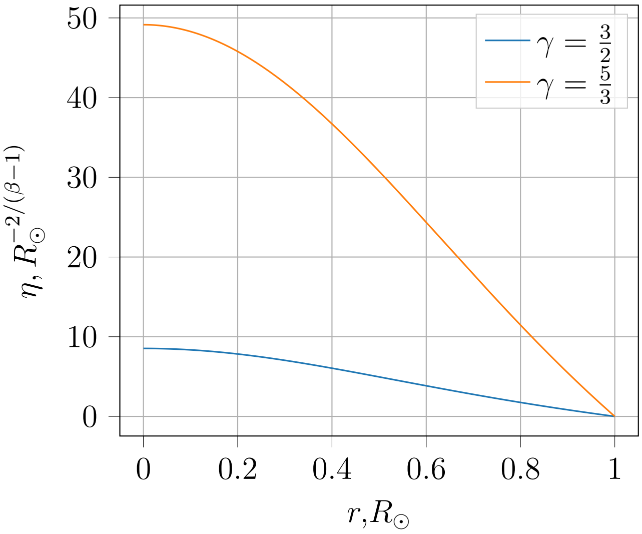

Рис. 3: Решение нелинейной задачи на η.