Лекция №4

Выпуклые и вогнутые функции

Пусть функция "$f(x)$", def-на на множестве $M \subset R^n$ (т.е. $x = (x_1, ..., x_n) \in M$

def: График функции "$f(x)$" - это множество $\Gamma(f) \subset R^{n+1}$ состоящее из точек $(x, f(x) = (x_1, ..., x_n, f(x))$, где $x \in M$.

def: Надграфик функции "$f(x)$" - это множество $\Gamma(f) \subset R^{n+1}$, состоящее из точек $(x, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n, x_{n+1})$, где $x \in M$, $x_{n+1} \leqslant f(x)$

def: Функция "$f(x)$", заданная на множестве $m \subset R^n$ наз-ся выпуклой, если ее надграфик $\Gamma(f)$ является выпуклым множеством в R^{n+1}

Rem: Функция "$f(x)$" вогнута $\leftrightarrow$ функция -"$f(x)$" выпукла.

Кроме данного геометрического def-я выпуклых (вогнутых) функций, часто use-ся следующее аналитическое def-e: def: Функция "$f(x)$", заданная на множестве $M \subset R^n$ наз-ся выпуклой(вогнутой), если 1) M - выпуклое, 2) $\forall x_1 \in M, x_2 \in M$ и числа $t \in [0, 1]$ 've:
$f((1-t) * x_1 + tx_2) \leqslant (1-t) * f(x_1) + t * f(x_2)$ (1)
($\geqslant$ - для вогнутой функции)

Rem: 1) Можно показать, что геометрические и аналитические def-я эквивалентны; (Rem: $(1-t) * f(x_1) + t * f(x_2)$ - уравнение отрезка $[x_1, x_2](t \in [0, 1])$ при $x_1 \neq x_2$ и $t \in (0, 1)$)
2) Если (1) 've строгое неравенство $\Rightarrow$, то функция "$f(x)$" наз-ся строго выпуклой (строго вогнутой).
3)

Свойства выпуклых (вогнутых) функций

1. $f(x) = const$ и $f(x) = ax + b$ всюду выпуклы (вогнуты).
2. *if* функции $f_i(x)(i = \overline{1, m})$, заданные на $M \subset R^n$, выпуклы $\Rightarrow$
then функция $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ выпукла (при $\forall \alpha_i \geqslant 0$)
3. *if* функция "$f(x)$", заданная на выпуклом множестве $M \subset R^n$, выпукла $\rightarrow$
then $\forall$"α" множество решений неравенства $f(x) \leqslant \alpha$, т.е. множество

$M_\alpha = \{x \in M : f(x) \leqslant \alpha\}$, является выпуклым.
3.1 *if* функции $f_1(x), ..., f_m(x)$, заданные на выпуклом множестве $M \subset R^n$, выпуклы $\Rightarrow$
then множество решений системы неравенств $f_i(x) \leqslant \alpha_i$ $(i = \overline{1, m})$ является выпуклым.
4. Выпуклая (вогнутая) функция, заданная на выпуклом множестве $M \subset R^n$, непрерывна в $\forall$ внутренней точке множества.
(вставка на страницу 25)
def: Выпуклая оболочка множества - это совокупность всех выпуклых линейных комбинаций его конечных подмножеств $\{x_1, ..., x_k$ (где $x_i \in M$). (Конечное подмножество - это конечный набор точек $x_1, ..., x_k$)

Теорема (Крейна-Мильмана)

Выпуклый компакт в нормированном пространстве является выпуклой оболочкой своих угловых (крайних) точек.

Теорема

Пусть выпуклая (вогнутая) функция "$f(x)$" задана на выпуклом множестве $M \subset R^n \Rightarrow$
Каждый локальный минимум (максимум) функции "$f(x)$" является её глобальным минимумом (максимумом) на множестве M.
Доказательство (для выпуклой функции)
Пусть точка $x^* \in M$ - точка локального min-a. Пусть точка точка $x \in M$ - произвольная точка множества M. Need доказать: $f(x) \geqslant f(x^*)$.
Отрезок $[x^*, x] = (1 - t_0)x^* + tx$ $(t \in [0, 1])$ принадлежит "M". При малом значении $t_0 \in (0, 1)$ /-щая точка отрезка $[x^*, x]$ находится в малой окресности т.x^*, в котором имеем:
$f((1 - t_0)x^* + t_0x) \geqslant f(x^*)$
Из def-я выпуклой функции $f(x)$ 've:
$f((1 - t_0)x^* + t_0x) \leqslant (1 - t_0)f(x^*) + t_0f(x)$
Т.о. :
$(1 - t_0) * f(x^*) + t_0 * f(x) \geqslant f(x^*) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \geqslant f(x^*)$ ч. и т.д. (для вогнутой "$f(x)$" доказательство аналогичное.)

Rem:
1) Задачи выпуклой оптимизации называются одноэкстремальными. В многоэкстремальных задачах может $\exists$-ть локальные экстремумы, не сов-

падающие в глобальными.

2) Одноэкстремальность задач выпуклой оптимизации не означает, что каждая такая задача имеет решение и при том единственное. f.e.: 1) Выпуклая функция одной переменной $f(x) = x$, при $x \in (0, 1)$ не достигает min-a (и max-a) на $(0, 1)$; 2) Множество точек min-a выпуклой фукнции $f(x) = C$ - const, $x \in M$, совпадает со всем M.

3) Если функция "$f(x)$" - строго выпуклая (строго вогнутая), то разрешимая задача выпуклой оптимизации (т.е. множество $M \neq \varnothing$ и ограничено) имеет единственное решение.

def: Производной $\frac{\partial f(x)}{\partial \ell}$ функции $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ по направлению ненулевого единичного вектора $\ell = (\ell_1, ..., \ell_n)$ в т. $x = (x_1, ..., x_n)$ называется предел

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(x + \lambda \ell) - f(x)}{\lambda}$$

Если функция дифференциируема в т. x, то она в этой точке производную по $\forall$ направлению $\ell = (\ell_1, ..., \ell_n)$, которая выражается через частные производные по следующей формуле:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \ell_i$$

Производная по направлению равна скалярному произведению вектора "ℓ" и вектора градиента функции "$f(x)$" в т. x

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f x)}{\partial f(x_n)}\right) : \frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = \nabla f(x) * \ell = \nabla f(x) * |\ell|$$

или

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = |f(x)| * |\ell| * \cos\phi$$

Т.о.:
$\forall$ направления "ℓ" производная $\frac{\partial f}{\partial \ell} \leqslant |\nabla f(x)|$.
$\Rightarrow$ Вывод:
1) Производная по направлению "$\frac{\partial f}{\partial \ell}$" - это скорость изменения функции "$f(x)$" по направлению "ℓ"(знак "$\frac{\partial f}{\partial \ell}$" - это характер изменения функции(возрастание или убывание)).
2) Направление градиента $\nabla f(x)$ - это направление наибольшего возрастания функции "$f(x)$" в т. x; длина градиента $\nabla f(x)|$" равна наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

Теорема

Пусть 've дифференциируемую выпуклую функцию "$f(x)$", def-ую на выпуклом множестве $M \subset R^n$.
1) $\forall x, y \in M$ 've: $\lambda f(x) * (y - x) \leqslant f(y) - f(x)$
2) т. $x^* \in absminf \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$ (2)

Теорема (дифференциальный признак выпуклых функций)

Дважды дифференциируемая функция "$f(x)$", def-ная на выпуклом множестве $M \subset R^n$ является выпуклой $\Leftrightarrow \forall x = (x_1, ..., x_n) \in M$ и $\forall \ell = (ell_1, ..., \ell_n) \in R^n$
've:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\ell_i \ell_j \geqslant 0, (3)$$

т.е. гессиан функции всюду неотрицательно определён:

$$A = f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) \geqslant 0, (\forall x \in M)$$

Rem:

1) Функция является строго выпуклой $\Leftrightarrow$ гессиан положительно определён, т.е.

$$\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) > 0, (\forall x \in M)$$

2) Знакоопределённость гессиана устанавливается с помощью критерия Сильвестра.

ex 1:

Проверить выпуклость функции:

$f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - 5x_2 - 2$

$f'_{x1} = 8x_1 = 2x_2 + 6$; $f''x_1x_1 = 8$; $f''_{x_1x_2} = -2$; $f''x_2x_2 = 2$; $f'_{x2} = 2x_2 - 2x_1 - 5$

Гессиан A $= \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = 8 > 0; \Delta_2 = 12 > 0$

$\Rightarrow$ функция является строго выпуклой.

ex 2:

Проверить выпуклость функции: $f(x) = -\sqrt{x_1x_2}$ на множестве $M = \{(x_1, x_2)|x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

$f'_{x1} = -\frac{1*x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$;

$f'_{x2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$;

$f''x_1x_1 = (-\frac{\sqrt{x_2}}{2} * x_1^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1^3}} = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$;

$f''_{x_1x_2} = -(\frac{1}{2\sqrt{x_1}} * x_2^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}}$;

$f''x_2x_2 = (-\frac{1*\sqrt{x_1}}{2} * x_2^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1\sqrt{x_1}}{4\sqrt{x_2^3}} = \frac{1}{4x_2} * \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$

Гессиан H $= \begin{pmatrix} \frac{1}{4x_1} * \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{1}{4x_1} * \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > 0 (\forall x_1, x_2 > 0)$;

$\Delta_2 = \frac{1}{16x_1x_2}\sqrt{\frac{x_2x_1}{x_1x_2}} - \frac{1}{16x_1x_2} = 0 \Rightarrow$

Гессиан H $\geqslant 0 \Rightarrow$ функция является на множестве $M = \{(x_1, x_2)|x_1 > 0, x_2 > 0\}$ выпуклой (но не является строго выпуклой).