

# Лекции по Методам Оптимизации

Авторы

2022 — 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция №1. Безусловная оптимизация</b>	<b>3</b>
1.1	Постановка задачи и определения . . . . .	3
1.2	Общий вид оптимизационной задачи . . . . .	3
1.3	Необходимые и достаточные условия экстремума . . . . .	3
1.4	Необходимые условия экстремума I порядка . . . . .	4
1.5	Необходимые и достаточные условия $\text{extr}$ II порядка . . . . .	4
1.6	Достаточные условия $\text{extr}$ . . . . .	5
1.7	Теорема Вейерштрасса . . . . .	6
1.8	Критерий Сильвестра . . . . .	6
1.9	Правило решения задачи безусловной оптимизации . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Лекция №2. Условная оптимизация</b>	<b>8</b>
2.1	Условная оптимизация с ограничениями-равенствами. Функция Лагранжа . . . . .	8
2.2	Условная оптимизация с ограничениями-равенствами и неравенствами. Математическое программирование . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Лекция №3. Выпуклый анализ</b>	<b>12</b>
3.1	Выпуклые множества точек . . . . .	12
3.2	Геометрический смысл решений СЛН и СЛУ . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Выпуклые множества в n-мерном пространстве. Свойства ЗЛП</b>	<b>14</b>
4.1	Выпуклые множества в n-мерном пространстве . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Лекция №4. Выпуклые и вогнутые функции</b>	<b>15</b>
5.1	Свойства выпуклых (вогнутых) функций . . . . .	15
5.2	Теорема (Крейна-Мильмана) . . . . .	16
5.3	Теорема . . . . .	16
5.4	Теорема . . . . .	18
5.5	Теорема (дифференциальный признак выпуклых функций) . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Лекция №5. Общая постановка выпуклого программирования(ЗВП). Теорема Куна-Таккера</b>	<b>20</b>
6.1	Общая постановка ЗВП . . . . .	20
6.2	Теорема Куна-Таккера. . . . .	21
6.3	Теорема Куна-Таккера (необходимые и достаточные условия решения (глобального минимума) ЗВП) . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Лекция №6. Теорема Куна-Таккера(продолжение)</b>	<b>24</b>
7.1	Доказательство теоремы Куна-Таккера . . . . .	24
7.2	2. Достаточность . . . . .	24
7.3	Теорема Куна-Таккера (в "седловом" варианте) . . . . .	24
7.4	Линейное программирование . . . . .	26

# 1 Лекция №1. Безусловная оптимизация

## I.

### Постановка задачи и определения

**def:** Методы оптимизации — это раздел математики, посвящённый решению (экстремальных) задач, то есть задач на нахождение минимумов и максимумов функций.

**Rem:** Задачу на нахождение максимума функции " $f(x)$ " можно свести к задаче на нахождение минимума функции " $f_1(x) = -f(x)$ " и наоборот.

## II.

### Общий вид оптимизационной задачи

Найти экстремум (минимум или максимум) функции  $f : X \rightarrow R$  определенной на некотором множестве  $X \in R^n$  при ограничении  $X \in D (D \subset X)$  то есть  $f(x) \rightarrow \text{extr}, X \in D$  (у функции есть экстремум на промежутке  $D$ ).

В большинстве задач область определения функции " $f(x)$ "  $X = R^n$ . Ограничение  $X \in D$  записывается, как правило, в виде уравнений или неравенств. Если множество  $D = X$ , то имеет место задача без ограничений или задача безусловной оптимизации.

При решении оптимизационной задачи находятся как локальные, так и глобальные экстремумы функции.

**def:** Точка " $x^*$ " является точкой локального минимума (максимума) функции " $f(x)$ " if  $\exists$  " $\varepsilon$ " - окрестность  $\mathcal{U}_\varepsilon = \{x : |x - x^*| \} < \varepsilon$ . Точка  $x^* : f(x^*) \leq f(x) (f(x^*) \geq f(x)) \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon$

**Rem:** то что пишется в скобках - для максимума, а то что без - для минимума

**def:** Точка " $x^*$ " является точкой глобального минимума (максимума) функции " $f(x)$ " if  $f(x^*) \leq f(x) (f(x^*) \geq f(x)) \forall x \in D$

## III.

### Необходимые и достаточные условия экстремума

**def:** Точка  $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  называется стационарной точкой дифференцируемой функции  $f(x) = f(x_1 \dots x_n)$ , если в ней все частные производные равны нулю, то есть  $f'(x^0) = 0$  или  $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = 0$

#### IV.

##### Необходимые условия экстремума I порядка

**Теорема:** if точка  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  - точка локального extr дифференцируемой в точке  $x^*$  функции  $f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$  then  $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} = 0$  (1) (то есть - точка  $x^*$  - точка локального экстремума  $\Rightarrow$  точка  $x^*$  - стационарная точка (обратное утверждение неверно))

**Доказательство:** Рассмотрим функцию одной переменной:

$\varphi(x_i) = f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, x_n^*)$  точка  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  - т. локального extr функции " $f$ "  $\Rightarrow x_i^*$  - т. локального extr функции " $\varphi$ "  $\Rightarrow$  по необходимому условию для функции одной переменной (по т. Ферма) 've:

$$\varphi(x_i^*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0 \text{ — что и требовалось доказать :)}$$

Для формулировки достаточных условий extr, позволяющих отобрать среди стационарных точек именно точки локального extr (среди стационарных точек могут быть также точки перегиба, седловые точки и т.д.), рассмотрим матрицу вторых производных функции - матрицу Гессе(гессиан):

$$A = f''(x^*) = \left( \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}} = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}} \text{ (от 1 до n)}$$

**def:** Матрица "A" называется неотрицательно определённой ( $A \geq 0$ ), если  $\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in R^n$  неотрицательной является квадратичная форма:

$$(A * h, h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j \geq 0$$

**def:** Матрица "A" называется положительно определённой ( $A > 0$ ), если  $(A * h, h) > 0, \forall h \in R^n (h \neq 0)$

#### V.

##### Необходимые и достаточные условия extr II порядка

**Теорема:** Пусть  $f(x)$  - дважды дифференцируема в точке  $x^*$ . Необходимые условия условия extr:

if точка  $x^*$  - точка локального минимума (максимума) функции  $f(x) \Rightarrow f'(x^*) = 0; (f''(x^*) * h, h) \geq 0 ((f''(x^*) * h, h) \leq 0) \forall h \in R^n$

## VI.

### Достаточные условия ext

$f'(x^*) = 0; (f''(x^*) * h, h) > 0 ((f''(x^*) * h, h) < 0) \forall h \in R^n (h \neq 0) \Rightarrow$  точка  $x^*$  - т. локального минимума (максимума) функции  $f(x)$

#### Доказательство:

Для случая минимума (для максимума аналогично)

По формуле Тейлора 've:

$$f(x^* + h) = f(x^*) + (f'(x^*), h) + \frac{1}{2}(f''(x^*) * h, h) + r(h),$$

где  $r(h) = o(|h|^2).$ (\*)

#### 1) Необходимость:

Пусть точка  $x^*$  - точка локального минимума  $\Rightarrow$  по необходимому условию I порядка  $f'(x^*) = 0$ , а также  $f(x^* + \lambda h) \geq f(x^*)$  (при достаточно малых " $\lambda$ ")  $\Rightarrow$  из (\*) get (g при малых " $\lambda$ " и фиксированном " $h$ "):

$$f(x^* + \lambda h) - f(x^*) = 0 + \frac{\lambda^2}{2}(f''(x^*) * h, h) + r(\lambda * h) \geq 0 \quad | : \lambda^2$$

(где  $r(\lambda * h) = o(|\lambda|^2).$   $\frac{1}{2}(f''(x^*) * h, h) + \frac{r(\lambda * h)}{\lambda^2} \geq 0$

При  $\lambda \rightarrow 0$  've :  $(f''(x^*) * h) \geq 0 (\forall h \in R^n) \Rightarrow$  необходимость доказана

#### 2) Достаточность:

Можно показать, что в  $R^n$  имеет место эквивалентность условий:

$$(A * h, h) > 0 \forall h \in R^n (h \neq 0) \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : (A * h, h) \geq \alpha * |R|^2 (\forall h \in R^n)$$

Учитывая, что  $f'(x^*) = 0$  и  $(f''(x^*) * h, h) \geq \alpha * |h|^2$

По формуле Тейлора 've:

$f(x^* + h) - f(x^*) = 0 + \frac{1}{2}(f''(x^*) * h, h) + r(h) \geq \frac{\alpha}{2}|h|^2 + r(h) \geq 0$ ), то есть  $f(x^* + h) \geq f(x^*) \Rightarrow$  точка  $x^*$  - точка локального ext функции  $f(x) \Rightarrow$  достаточность доказана.

что и требовалось доказать

**Rem:** Для квадратичной функции

$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  условие положительной(отрицательной) определённости матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n > 0$  - это достаточное условие абсолютного минимума(максимума)  $Q(x)$  в стационарной точке.

## VII.

### Теорема Вейерштрасса

#### Теорема:

Непрерывная функция  $f : R^n \rightarrow R$  на непустом ограниченном замкнутом подмножестве (компакте) множества  $R^n$  достигает своих абсолютных минимума и максимума [или 1) в стационарной точке внутри; 2) в граничной точке] - без доказательства

#### Следствие:

if функция " $f(x)$ " непрерывна на  $R^n$  и  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$   
 ( $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ )  $\Rightarrow$  then она достигается своего абсолютного минимума (максимума) на  $\forall$  замкнутом подмножестве и  $R^n$ . (без доказательства).

## VIII.

### Критерий Сильвестра

**Rem:** В необходимых и достаточных условиях extr-а II порядка use-ся знакоопределённость матрицы вторых производных (гессиана)  $A = f''(x)$ .

Знакоопределённость матрицы устанавливается с помощью критерия Сильвестра.

#### Теорема:

Пусть  $A$  - симметричная матрица

1) Матрица " $A$ " положительно определена ( $A > 0$ )  $\Leftrightarrow$  все её последовательные гл. миноры положительны, т.е.  $A_{1...k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{k1} & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$  ( $k = \overline{1, n}$ )

2) Матрица " $A$ " отрицательно определена ( $A < 0$ )  $\Leftrightarrow$  все её последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, т.е.  $(-1)^k * A_k > 0$  ( $k = \overline{1, n}$ )

3) Матрица " $A$ " неотрицательно определена ( $A \geq 0$ )  $\Leftrightarrow$  все её гл. миноры (не обязательно только последовательные) неотрицательны, т.е.  $A_{1...k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0$  ( $1 \geq i_1 \geq \dots \geq i_k \geq n$ ) ( $k = \overline{1, n}$ )

4) Матрица " $A$ " неположительно определена ( $A \leq 0$ )  $\Leftrightarrow$  все её последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с неположительного, т.е.  $(-1)^k * A_{i_1...i_k} \geq 0$  ( $k = \overline{1, n}$ )

(Теорема без доказательства)

#### Rem:

1) Можно показать, что  $A > 0$  ( $A \geq 0$ )  $\Leftrightarrow \forall \lambda_i > 0$  ( $\lambda \geq 0$ ), где  $\lambda_i$  - собственные значения матрицы.

2)

$$2.1) A_{1...k} > 0 \Leftrightarrow A_{i_1...i_k} > 0$$

$$2.2) A_{1...k} \geq 0 \not\Leftrightarrow A_{i_1...i_k} \geq 0 \text{ (т.е. } \not\Leftrightarrow A \geq 0)$$

ex:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$  последовательные главные миноры  $A_1 = 0$ ;  $A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ , но  $A$  не является неотрицательно определённой, так как  $(Ah, h) = ((0; -h), (h, h)) = -h^2 < 0 (\forall h \neq 0)$

## IX.

### Правило решения задачи безусловной оптимизации

1) Найти стационарные точки, то есть точки, удовлетворяющие необх. усл.  $\text{extr I}$  порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

2) Во всех стационарных точках " $x^0$ " проверяем достаточное условие  $\text{extr II}$  порядка, то есть проверяем знаки последовательных главных миноров гессиана " $f''(x^0)$ ":

$$2.1) \text{ if } A_{1...k} > 0 \text{ (k от 1 до n)} \Rightarrow \text{then } x^0 \in \text{locminf};$$

$$2.2) \text{ if } (-1)^k * A_{1...k} > 0 \text{ (при k от 1 до n)} \Rightarrow \text{then } x^0 \in \text{locmaxf};$$

3) Если достаточное условие  $\text{extr II}$  порядка не выполняется  $\Rightarrow$ , то проверяем в стационарной точке необходимое условие  $\text{extr II}$  порядка, то есть проверяем знаки главных миноров гессиана " $f''(x^0)$ "

3.1) if гессиан  $f''(x^0) \not\geq 0$  не является неотрицательным отрезком, то есть не выполняется условие  $A_{i_1...i_k} \geq 0 \Rightarrow \text{then } x^0 \notin \text{locminf};$

3.2) if гессиан  $f''(x^0) \not\leq 0$  не является неположительным отрезком, то есть не выполняется условие что все  $(-1)^k A_{i_1...i_k} \geq 0 \Rightarrow \text{then } x^0 \notin \text{locmaxf};$

## 2 Лекция №2. Условная оптимизация

### I.

#### Условная оптимизация с ограничениями-равенствами. Функция Лагранжа

**def:** Задачей условной оптимизации с ограничениями-равенствами называется следующая задача:

$f_1 \rightarrow \text{extr}$ ;  $f_i(x) = 0 (i = \overline{1, m}), (m < n)$ , где  $f_i(x) : R^n \rightarrow R (i = \overline{0, m})$  и  $\forall f_i(x)$  - дифференцируема.

**Теорема 2.1.1.** *необходимое условие экстремума I порядка.*

If  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \text{locextr} f_0 \Rightarrow$  then  $\exists$  вектор множителей Лагранжа  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in R^m (\lambda) (\lambda^* \neq 0)$  такой, что для функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f_0(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

выполняются условия стационарности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} &= \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} &= f_i(x^*) = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \end{aligned} \quad (2)$$

т.е. 've систему  $n+m$  уравнений для нахождения  $n+m$  неизвестных  $\{x_1^*, \dots, x_n^*; \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*\}$

**Теорема 2.1.2.** *необходимое условия экстремума II порядка.*

If  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \text{locmin} f_0$  (условие регулярности) и векторы  $f'_1(x^*), \dots, f'_m(x^*)$  - линейно независимы  $\Rightarrow$  then  $\exists$  вектор множителей Лагранжа  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in R^m (\lambda^* \neq 0)$  такой, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

выполняются условия:

1. стационарности (2)

2. неотрицательной определенности матрицы вторых производных:

$$(3) (\mathcal{L}''(x^*, \lambda^*)h, h) \geq 0 \quad \forall h \in \{(f'_i(x^*), h) = 0 (i = \overline{1, m})\}$$



**Rem:** Для т.  $x^* \in \text{locmax} f_0$  need  $\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$

**Теорема 2.1.3.** достаточное условие экстремума II порядка.

If в т.  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  векторы  $f'_1(x^*), \dots, f'_m(x^*)$  - линейно независимы и  $\exists$  вектор множителей Лагранжа  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in R^m (\lambda^* \neq 0)$  такой, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

в т.  $x^*$  выполняются условия:

1. стационарности (2)
2. положительной определенности матрицы вторых производных:  
 $(\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)h, h) > 0 \forall h \in \{(f'_i(x^*), h) = 0 (i = \overline{1, m}), (h \neq 0)\} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  then т.  $x^* \in \text{locmin} f_0$

**Rem:** Для т.  $x^* \in \text{locmax} f_0$  need  $\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i$

Частный случай

$z = f(x, y) \rightarrow \text{extr}$ ; при  $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow$  функция Лагранжа 've вид:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

Условия стационарности(необх. усл. I порядка)(2):

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x^*, y^*, \lambda^*) = f'_x(x^*, y^*) + \lambda \varphi'_x(x^*, y^*) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x^*, y^*, \lambda^*) = f'_y(x^*, y^*) + \lambda \varphi'_y(x^*, y^*) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x^*, y^*, \lambda^*) = \varphi'(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  система трех уравнений с тремя неизвестными

$\Rightarrow$  находим стационарные точки  $(x^*, y^*, \lambda^*)$

Вычисляется в каждой из get-х стационарных точек  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  определитель:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} \\ \varphi'_y & \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} \end{vmatrix}$$

if  $\Delta > 0 \Rightarrow \text{then } \tau.(x^*, y^*, \lambda^*) \in \text{locmin } z$

if  $\Delta < 0 \Rightarrow \text{then } \tau.(x^*, y^*, \lambda^*) \in \text{locmax } z$

## II.

### Условная оптимизация с ограничениями-равенствами и неравенствами. Математическое программирование

**def:** Задачей условной оптимизации с ограничениями-равенствами и ограничениями-неравенствами называется следующая задача:

$$(4) f_0(x) \rightarrow \min; (5) f_i(x) \leq 0 \ (i = \overline{1, p}), (6) f_i(x) = 0 \ (i = \overline{p+1, m}),$$

где  $f_i(x) : R^n \rightarrow R \ (i = \overline{0, m})$

**def:** Эта задача называется задачей математического программирования (ЗМП)

**Rem:**

- 1) Обычно в ЗМП присутствуют условия неотрицательности переменных  $x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n})$  эти условия записываются в системе неравенств (5) в виде:  $-x_i \leq 0 \ (i = \overline{1, n})$
- 2) Каждое ограничение-равенство (6) можно заменить двумя неравенствами:

$$f_i(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(x) \leq 0 \\ -f_i(x) \leq 0 \end{cases} \quad (i = \overline{p+1, m})$$

В силу этих замечаний ЗМП можно записать в виде:

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

$$f_i(x) \leq 0 \ (i = \overline{1, m}) \quad (8) \text{ где } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Для ЗМП составляется функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f_0(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n)$$

С помощью функции Лагранжа выписываются необходимые и достаточные условия экстремума тип (2)-(3). Однако, проверка выполнения этих условий становится еще более сложной. При этом требуется решать систему, вообще говоря, нелинейных уравнений и неравенств. Для этого применяются итерационные численные методы, формирующие последовательность точек, сходящуюся к точке экстремума. Однако, эта точка может оказаться точкой локального(а не глобального) экстремума. Это объясняется тем, что ЗМП в такой общей постановке, без каких-либо предположений относительно функций  $f_i(x)$ , является многоэкстремальной задачей. Не существует универсальных методов решения таких задач. Содержательная теория построена лишь для отдельных классов

ЗМП, в частности, задач оптимизации выпуклых функций на выпуклом множестве решений систем ограничений-неравенств. Такие задачи, называемые задачами выпуклого программирования (ЗВП), являются, как будет показано ниже, одноэкстремальными задачами.

### 3 Лекция №3. Выпуклый анализ

Ввиду важности задачи выпуклого программирования (ЗВП) рассматриваемые основные понятия раздела математики, называемого выпуклым анализом:

1) Выпуклое множество 2) Выпуклая(вогнутая) функция и ее дифференциальные свойства

#### I.

##### Выпуклые множества точек

**def:** Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с  $\forall$  двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки **ex:** — Тут нужно иллюстрацию **ex:** круг, сектор, отрезок, прямая, полуплоскость, куб, пирамида

**Теорема 3.1.1.** Пересечение  $\forall$  числа выпуклых множеств-выпуклое множеств, too

*Доказательство.* Для простоты - пересечение двух выпуклых множеств:

$\forall N, M \in (A \cap B)$ . Множество  $A$  - выпуклое  $\Rightarrow$  отрезок  $MN \in A$ . Аналогично

$MN \in B \Rightarrow MN \in (A \cap B) \Rightarrow (A \cap B)$  - выпуклое — тут нужно иллюстрацию ■

**def:** Внутренняя т. множества -  $\exists$  окрестность этой точки: в ней - только точек  $\in$  множеству.

**def:** Граничная точка множества -  $\forall$  окрестность этой точки содержит как точки  $\in$  множеству, так и точек  $\notin$  множеству

**def:** Угловая точка множества - она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком  $\in$ -го множеству.

**ex:** — Тут нужно иллюстрацию точка  $M$  - внутренняя, точка  $N$  граничная, точка  $A$  - угловая ( $AP \in$  множеству целиком, но точка  $A$  - не внутренняя точка для  $AP$ ; точка внутренняя точка для  $KL$ , но  $KL \notin$  множеству целиком)

**def:** Замкнутое множество точек - if оно включает все свои граничные точки.

**def:** Ограниченное множество точек - if  $\exists$  шар конечного радиуса с центром в  $\forall$  точке

множества, который полностью содержит в себе данное множество.

Можно показать, что если фигура ограничена only прямыми или их отрезками, то она 've конечное число угловых точек. При криволинейности границ - бесконечное множество угловых точек.

**def:** Выпуклое замкнутое множество точек пространства(плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклым многогранником(многоугольником), если оно ограниченное, и выпуклой многогранной(многоугольной) областью, если оно неограниченное.

**Rem:** Для выпуклого многогранника(многоугольника) угловые точки  $\equiv$  его вершинам.

Для невыпуклого - не обязательно

**ex:** — Тут нужна иллюстрация точка E - вершина, но не угловая точка, т.к.  $KL \in$  множеству целиком и точка E - внутренняя точка для KL.

**Rem:** В ЗЛП часто число параметров объекта  $n > 3 \Rightarrow$  имеем дело с гипермногогранниками в гиперпространстве с координатами  $x_i (i = \overline{1, n}, n > 3)$

## II.

### Геометрический смысл решений СЛН и СЛУ

**Теорема 3.2.1.** *Множество всех решений линейного неравенства*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

- это одно из полупространств, на которые n-мерные гиперпространство делится гиперплоскостью

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

включая и эту гиперплоскость

## 4 Выпуклые множества в n-мерном пространстве. Свойства ЗЛП

### I.

#### Выпуклые множества в n-мерном пространстве

Рассмотрим в n-мерном пространстве k точек (векторов):

$$x_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \dots, x_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

**def:** Точка(вектор)  $X = (x_1, \dots, x_n)$  называется линейной комбинацией точек(векторов)  $X_1, \dots, X_k$ , если справедливо соотношение:

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k \quad (3)$$

где  $\alpha_j - \text{const } j = (\overline{1, k})$

**def:** Точка(вектор)  $X$  называется выпуклой линейной комбинацией точек(векторов)  $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$ , если:

1.

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$$

2.

$$\alpha_j \geq 0, j = (\overline{1, k}) \quad (4)$$

3.

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1 \quad (5)$$

Очевидно, что в частном случае при  $k=2$  выпуклой линейной комбинацией двух точек  $X_1$  и  $X_2$  является соединяющий их отрезок, т.к.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 - 1 \end{array} \right\} \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$$

- уравнение точек  $X \in [X_1, X_2]$  (см. аналитич. геометр.) — добавить иллюстрацию

## 5 Лекция №4. Выпуклые и вогнутые функции

Пусть функция " $f(x)$ ", def-на на множестве  $M \subset R^n$  (т.е.  $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$ )

**def:** График функции " $f(x)$ " - это множество  $\Gamma(f) \subset R^{n+1}$  состоящее из точек  $(x, f(x)) = (x_1, \dots, x_n, f(x))$ , где  $x \in M$ .

**def:** Надграфик функции " $f(x)$ " - это множество  $\Gamma(f) \subset R^{n+1}$ , состоящее из точек  $(x, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ , где  $x \in M, x_{n+1} \leq f(x)$

**def:** Функция " $f(x)$ ", заданная на множестве  $m \subset R^n$  наз-ся выпуклой, если ее надграфик  $\Gamma(f)$  является выпуклым множеством в  $R^{n+1}$

**Rem:** Функция " $f(x)$ " вогнута  $\leftrightarrow$  функция " $-f(x)$ " выпукла.

Кроме данного геометрического def-я выпуклых (вогнутых) функций, часто use-ся следующее аналитическое def-e: def: Функция " $f(x)$ ", заданная на множестве  $M \subset R^n$  наз-ся выпуклой(вогнутой), если 1)  $M$  - выпуклое, 2)  $\forall x_1 \in M, x_2 \in M$  и числа  $t \in [0, 1]$  've:

$$f((1-t) * x_1 + t * x_2) \leq (1-t) * f(x_1) + t * f(x_2) \quad (1)$$

( $\geq$  - для вогнутой функции)

**Rem:** 1) Можно показать, что геометрические и аналитические def-я эквивалентны; (Rem:  $(1-t) * f(x_1) + t * f(x_2)$  - уравнение отрезка  $[x_1, x_2]$  ( $t \in [0, 1]$ ) при  $x_1 \neq x_2$  и  $t \in (0, 1)$ )

2) Если (1) 've строгое неравенство  $\Rightarrow$ , то функция " $f(x)$ " наз-ся строго выпуклой (строго вогнутой).

3)

### I.

#### Свойства выпуклых (вогнутых) функций

1.  $f(x) = const$  и  $f(x) = ax + b$  всюду выпуклы (вогнуты).
2. if функции  $f_i(x)$  ( $i = \overline{1, m}$ ), заданные на  $M \subset R^n$ , выпуклы  $\Rightarrow$

then функция  $f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x)$  выпукла (при  $\forall \alpha_i \geq 0$ )

**3.** if функция " $f(x)$ ", заданная на выпуклом множестве  $M \subset R^n$ , выпукла  $\rightarrow$

then  $\forall \alpha$  множество решений неравенства  $f(x) \leq \alpha$ , т.е. множество  $M_\alpha = \{x \in M : f(x) \leq \alpha\}$ , является выпуклым.

**3.1** if функции  $f_1(x), \dots, f_m(x)$ , заданные на выпуклом множестве  $M \subset R^n$ , выпуклы  $\Rightarrow$  then множество решений системы неравенств  $f_i(x) \leq \alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) является выпуклым.

**4.** Выпуклая (вогнутая) функция, заданная на выпуклом множестве  $M \subset R^n$ , непрерывна в  $\forall$  внутренней точке множества.

(вставка на страницу 25)

**def:** Выпуклая оболочка множества - это совокупность всех выпуклых линейных комбинаций его конечных подмножеств  $\{x_1, \dots, x_k$  (где  $x_i \in M$ ). (Конечное подмножество - это конечный набор точек  $x_1, \dots, x_k$ )

## II.

### Теорема (Крейна-Мильмана)

Выпуклый компакт в нормированном пространстве является выпуклой оболочкой своих угловых (крайних) точек.

## III.

### Теорема

Пусть выпуклая (вогнутая) функция " $f(x)$ " задана на выпуклом множестве  $M \subset R^n \Rightarrow$  Каждый локальный минимум (максимум) функции " $f(x)$ " является её глобальным минимумом (максимумом) на множестве  $M$ .

### Доказательство (для выпуклой функции)

Пусть точка  $x^* \in M$  - точка локального min-а. Пусть точка  $x \in M$  - произвольная точка множества  $M$ . Need доказать:  $f(x) \geq f(x^*)$ .

Отрезок  $[x^*, x] = (1 - t_0)x^* + tx$  ( $t \in [0, 1]$ ) принадлежит " $M$ ". При малом значении  $t_0 \in (0, 1)$  /-щая точка отрезка  $[x^*, x]$  находится в малой окрестности  $x^*$ , в котором имеем:

$$f((1 - t_0)x^* + t_0x) \geq f(x^*)$$

Из def-я выпуклой функции  $f(x)$  've:

$$f((1 - t_0)x^* + t_0x) \leq (1 - t_0)f(x^*) + t_0f(x)$$

Т.о. :



$(1 - t_0) * f(x^*) + t_0 * f(x) \geq f(x^*) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) \geq f(x^*)$  ч. и т.д. (для вогнутой " $f(x)$ " доказательство аналогичное.)

**Rem:**

- 1) Задачи выпуклой оптимизации называются одноэкстремальными. В многоэкстремальных задачах может  $\exists$ -ть локальные экстремумы, не совпадающие с глобальными.
- 2) Одноэкстремальность задач выпуклой оптимизации не означает, что каждая такая задача имеет решение и при том единственное. f.e.: 1) Выпуклая функция одной переменной  $f(x) = x$ , при  $x \in (0, 1)$  не достигает min-а (и max-а) на  $(0, 1)$ ; 2) Множество точек min-а выпуклой функции  $f(x) = C - \text{const}$ ,  $x \in M$ , совпадает со всем  $M$ .
- 3) Если функция " $f(x)$ " - строго выпуклая (строго вогнутая), то разрешимая задача выпуклой оптимизации (т.е. множество  $M \neq \emptyset$  и ограничено) имеет единственное решение.

**def:** Производной  $\frac{\partial f(x)}{\partial \ell}$  функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  по направлению ненулевого единичного вектора  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$  в т.  $x = (x_1, \dots, x_n)$  называется предел

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(x + \lambda \ell) - f(x)}{\lambda}$$

Если функция дифференцируема в т.  $x$ , то она в этой точке производную по  $\forall$  направлению  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ , которая выражается через частные производные по следующей формуле:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \ell_i$$

Производная по направлению равна скалярному произведению вектора " $\ell$ " и вектора градиента функции " $f(x)$ " в т.  $x$

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) : \frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = \nabla f(x) * \ell = \nabla f(x) * |\ell|$$

или

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} = |f(x)| * |\ell| * \cos \phi$$

Т.о.:

$\forall$  направления " $\ell$ " производная  $\frac{\partial f}{\partial \ell} \leq |\nabla f(x)|$ .

$\Rightarrow$  Вывод:

1) Производная по направлению  $\frac{\partial f}{\partial \ell}$  - это скорость изменения функции  $f(x)$  по направлению  $\ell$  (знак  $\frac{\partial f}{\partial \ell}$  - это характер изменения функции (возрастание или убывание)).

2) Направление градиента  $\nabla f(x)$  - это направление наибольшего возрастания функции  $f(x)$  в т.  $x$ ; длина градиента  $|\nabla f(x)|$  равна наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

#### IV.

##### Теорема

Пусть  $f$  - дифференцируемая выпуклую функцию  $f(x)$ , def-ую на выпуклом множестве  $M \subset R^n$ .

1)  $\forall x, y \in M$   $\forall \lambda \in [0, 1]$ :  $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$

2) т.  $x^* \in \text{absminf} \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$  (2)

#### V.

##### Теорема (дифференциальный признак выпуклых функций)

Дважды дифференцируемая функция  $f(x)$ , def-ная на выпуклом множестве  $M \subset R^n$  является выпуклой  $\Leftrightarrow \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in M$  и  $\forall \ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in R^n$

$\forall$ :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \ell_i \ell_j \geq 0, (3)$$

т.е. гессиан функции всюду неотрицательно определён:

$$A = f''(x) = \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \geq 0, (\forall x \in M)$$

##### Rem:

1) Функция является строго выпуклой  $\Leftrightarrow$  гессиан положительно определён, т.е.

$$\left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) > 0, (\forall x \in M)$$

2) Знакоопределённость гессиана устанавливается с помощью критерия Сильвестра.

##### ex 1:

Проверить выпуклость функции:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - 5x_2 - 2_{18}$$

$$f'_{x_1} = 8x_1 = 2x_2 + 6; f''_{x_1x_1} = 8; f''_{x_1x_2} = -2; f''_{x_2x_2} = 2; f'_{x_2} = 2x_2 - 2x_1 - 5$$

$$\text{Гессиан } A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \Delta_1 = 8 > 0; \Delta_2 = 12 > 0$$

$\Rightarrow$  функция является строго выпуклой.

**ex 2:**

Проверить выпуклость функции:  $f(x) = -\sqrt{x_1x_2}$  на множестве

$$M = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

$$f'_{x_1} = -\frac{1 \cdot x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}},$$

$$f'_{x_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}},$$

$$f''_{x_1x_1} = \left(-\frac{\sqrt{x_2}}{2} * x_1^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1^3}} = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}},$$

$$f''_{x_1x_2} = -\left(\frac{1}{2\sqrt{x_1}} * x_2^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}};$$

$$f''_{x_2x_2} = \left(-\frac{1 \cdot \sqrt{x_1}}{2} * x_2^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1\sqrt{x_1}}{4\sqrt{x_2^3}} = \frac{1}{4x_2} * \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

$$\text{Гессиан } H = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x_1} * \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{1}{4x_2} * \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > 0 (\forall x_1, x_2 > 0);$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{16x_1x_2}\sqrt{\frac{x_2x_1}{x_1x_2}} - \frac{1}{16x_1x_2} = 0 \Rightarrow$$

Гессиан  $H \geq 0 \Rightarrow$  функция является на множестве  $M = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\}$  выпуклой (но не является строго выпуклой).

## 6 Лекция №5. Общая постановка выпуклого программирования(ЗВП). Теорема Куна-Таккера

### I.

#### Общая постановка ЗВП

ЗВП называется следующей задачей математического программирования(ЗМП)

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \end{cases},$$

где  $f, g_1, \dots, g_m$  - выпуклые функции, def-ные на некотором выпуклом множестве  $M \subset R^n$ .

При этом множество  $M$  содержит допустимую область значений, то есть множество, удовлетворяющее системе ограничений. Заметим, что свойству 3.1 выпуклых функций допустимая область ЗВП также выпукла

#### Rem:

1) Аналогично формулируется задача максимизации вогнутой функции "f" при вогнутых функциях " $g_1, \dots, g_m$ ", def-х на некотором выпуклом множестве  $M \subset R^n$ . При этом знак неравенств — " $\geq$ ".

Аналогично допустимая область ЗВП будет также выпуклым множеством(свойство для вогнутых функций)

2) В ??? с теор. на с.??? в ЗВП каждый локальный минимум является глобальным минимумом функции "f" в допустимой области. Причём, если функция "f" строго выпуклая и ограниченная снизу на ограниченном непустом множестве  $M$ , то ЗВП 've единственное решение, то есть минимумом функции "f" достигается в одной точке

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

(см с.???)

## II.

### Теорема Куна-Таккера.

**Теорема:** Пусть на ЗВП налагаются следующие требования:

1. Множество, удовлетворяющее системе строгих неравенств:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) < 0 \\ g_m(x_1, \dots, x_n) < 0 \end{cases}$$

и называемое внутренней частью допустимой области, не пусто (т.н. условие Слейтера)

2. Часть допустимой области, в которой некоторые ограничения обращаются в равенства, называется границей допустимой области, а эти ограничения - активными. Пусть градиенты активных ограничений в отвечающих им точках границы линейно независимы (т.н. условие регулярности (см с.???)

## III.

### Теорема Куна-Таккера (необходимые и достаточные условия решения (глобального минимума) ЗВП)

Точка  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  является решением ЗВП (то есть точкой глобального минимума функции "f")  $\Leftrightarrow$  (Н. и Д.) в ней выполнены следующие условия (Условия Куна-Таккера):

1) Условие стационарности функции Лагранжа (см.с.???)

$$\lambda(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i * g_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \text{ (то есть } \nabla(x^0) = 0);$$

2) Условия "дополняющей нежёсткости":

$$\lambda_i * g_i(x_1^0, \dots, x_m^0) = 0 \text{ (} i = \overline{1, m});$$

3) Условия неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0 \text{ (} i = \overline{1, m})$$

### Доказательство:

Заметим, что в условиях К.-Т. множители Лагранжа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  являются "выключателями" делящих ограничений. Если, например,  $\lambda_k = 0$ , то ограничение  $g_k \leq 0$  исключается из условий К.-Т., так как : 1) это ограничение не входит в функцию Лагранжа (слагаемое  $\lambda_k * g_k = 0$ ) и,??? не входит в условие 1; 2) условия 2 и 3 для этого ограничения

выполняются автоматически

## 1. Необходимость

Пусть точка  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  - решение ЗВП, то есть  $\min f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Целевая функция "f" может достигать минимума внутри допустимой области или на её границе.

Пусть минимум достигается внутри области  $\Rightarrow$  в точке  $x^0$  выполняются необходимые условия локального (безусловного экстремума функции "f"):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Это частный случай условия 1 К.-Т. (условия стационарности функции Лагранжа) при  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$  все ограничения выключены, так как 'е безусловную оптимизацию) Условия 2 и 3 при этом (при  $\lambda_i = 0 (i = \overline{1, m})$ ) выполняются автоматически.

Пусть минимум достигается на границе допустимой области, то есть является условным extr функции "f" с активными ограничениями задачи для точки минимума точки  $x^0$ . Необходимые условия условного extr (см. с. ???) ( $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0; (\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 (j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}))$ ) влекут за собой выполнение условий 1 и 2 К.-Т., если положительно равными нулю множит. Лагранжа для неактивных ограничений (так как реально они не входят в функцию Лагранжа). Остаётся доказать, что выполняется 3 условие К.-Т. :  $\lambda_i \geq 0 (i = \overline{1, m})$

Для наглядности ограничимся случаем двух переменных (n=2).

Уравнение  $g(x_1, x_2)$  означает плоскую кривую, а неравенство  $g(x_1, x_2) \leq 0$  - одну из частей плоскости, ограниченную этой кривой

Система ограничений

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2) \leq 0 \end{cases}$$

задает криволинейный многоугольник, в каждой вершине которого пересекаются две кривые.

Минимум на границе допустимой области достигается либо на строке этого многоугольника, либо в его вершине.

Пусть минимум - на стороне многоугольника  $\Rightarrow$  активным является только одно ограничение и только отвечающий ему множитель Лагранжа  $\lambda_k \neq 0$ . Функция Лагранжа 'е вид:

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_k * g_k(x_1, \dots, x_n),$$

где  $g_k = 0$  - активное ограничение.

В точке минимума выполняются необходимые условия. Условия условного  $\text{extr}$  (см. с. ???):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_k}$$

или

$$\begin{cases} \nabla L = \nabla f + \lambda_k * \nabla g_k = 0 \\ g_k = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla f = -\lambda_k * \nabla g_k, (*)$$

то есть векторы  $\nabla f$  и  $\nabla g_k$  — коллинеарны

Функция  $g_k < 0$  внутри допустимой области и  $g_k > 0$  вне её  $\Rightarrow$  вектор  $\nabla g_k$  направлен из допустимой области (в сторону возрастания функции "  $g_k$  ")

Значение функции "  $f$  " внутри допустимой области больше, чем в точке минимума  $\Rightarrow \nabla f$  направлен внутрь допустимой области.

Таким образом, векторы  $\nabla f$  и  $\nabla g_k$  противоположны и в равенстве (\*) коэффициенты коллинеарности  $\lambda_k \leq 0 \Rightarrow \lambda_k \geq 0$ , то есть условие 3 К.-Т. доказано для случая, когда минимум достигается на стороне допустимого многоугольника.

Можно показать, что условие 3 К.-Т. ( $\lambda_i \geq 0 (i = \overline{1, m})$ ) выполняется и для случая, когда минимум достигается в вершине допустимого многоугольника.

Таким образом, необходимость К.-Т. доказана.

## 7 Лекция №6. Теорема Куна-Таккера(продолжение)

### I.

#### Доказательство теоремы Куна-Таккера

### II.

#### 2. Достаточность

Пусть в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  выполняются условия 1-3 теоремы Куна-Таккера.

Имеем выпуклые функции " $f, g_1, \dots, g_m$ " и выпуклую допустимую область  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Функция Лагранжа

$L = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$  ( $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ ) также выпукла (см. св-во 2 выпуклых ф-ий)

Если в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  выполняется условие 1 теоремы Куна-Таккера  $\frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$ , (т.е.  $\nabla L(x^0) = 0$ ) то эта точка - точка  $\min$  выпуклой функции Лагранжа " $L$ " в допустимой области.

Обозначим  $\min L(x) = L(x^0) = L^0 \Rightarrow L^0 \leq L$

Но вследствие условия 2 теоремы Куна-Таккера

$$\lambda_1 g_1^0 = \dots = \lambda_m g_m^0 = 0 \Rightarrow L^0 = f^0, f^0 \leq L$$

Кроме того, в допустимой области  $g_1 \leq 0, \dots, g_m \leq 0$  и по условию 3 теоремы Куна-Таккера,  $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \leq 0 \Rightarrow \lambda_1 g_1 = \dots = \lambda_m g_m \leq 0 \Rightarrow$

в допустимой области

$L = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m \leq f \Rightarrow$  в допустимой области:

$f^0 \leq L \leq f$ , т.е.  $f^0 \leq f \Rightarrow \min f = f^0 = f(x^0)$ , т.е. точка  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  - точка минимума (глобального) целевой функции в допустимой области. Т. О. достаточность теоремы Куна-Таккера доказана.

ч и т.д.

### III.

#### Теорема Куна-Таккера (в "седловом" варианте)

Точка  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  является решением ЗВП (т.е. точкой глобального  $\min$ -а функции " $f$ ")  $\Leftrightarrow \exists$  неотрицательный вектор множителей Лагранжа

$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$  ( $\lambda_i^0 \geq 0; i = \overline{1, m}$ ) такой, что для функции Лагранжа

$L = (x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$  точка  $(x^0; \lambda^0)$  является седловой точкой, т.е.

$$L(x^0, \lambda) \leq (x^0, \lambda^0) \leq L(x, \lambda^0) \quad (*)$$



$\forall x \in \text{допустимой области}, \lambda \geq 0$

(без доказательства)

**Rem:**

1. Из неравенства (\*) следует, что точка - точка минимума функции, а точка - точка максимума функции по. Существование седловой точки означает равенство минимакса максимуму.
2. Можно показать, что необходимые и достаточные условия того, чтобы являлась седловой точкой функции Лагранжа, имеют вид:

**Rem:** 1. При доказательстве необходимости условий теоремы Куна-Таккера выпуклость функций и допустимой области не требовалась  $\Rightarrow$  условия Куна-Таккера являются необходимыми для произвольной (необязательно выпуклой) ЗМП.

2. Множители Лагранжа " $\lambda_k$ " представляют собой "цену" ограничения " $g_k \leq 0$ ", т.е. чувствительность оптимального значения целевой функции " $f^0$ " к нарушению этого ограничения. В функции Лагранжа слагаемые " $\lambda_k g_k$ " представляет собой как бы "штраф" за нарушение ограничения " $g_k \leq 0$ ". Чем больше значение множителя Лагранжа " $\lambda_k$ " и чем больше нарушено /-щее ограничение (т.е. стало " $g_k > 0$ "), тем больше величина этого "штрафа". На этой идее основан один из методов решения ЗМП - метод штрафных функций, который был рассмотрен ниже.

3. Условия теоремы Куна-Таккера представляют собой систему нелинейных (в общем случае) уравнений и неравенств, которая допускает лишь приближенное решение численными методами. Для решения ЗВП разработали специальные итерационные численные методы, которые заключаются в построении последовательных приближений к точке целевой функции в допустимой области. Критерием окончания итерационного процесса является достижение заданной точности вычислений. В результате определяются приближенные значения.

4. Точное решение ЗВП допускает в случае, когда и целевая функция и все ограничения являются линейными функциями переменных (линейные функции являются выпуклыми в /-ии со свойством 1 выпуклых функций). Такая ЗВП называется задачей линейного программирования (ЗЛП).

#### IV.

#### Линейное программирование