Лекция №6

Доказательство теоремы Куна-Таккера

2. Достаточность

Пусть в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ выполняются условия 1-3 теоремы Куна-Таккера.
Имеем выпуклые функции "$f, g_1, ..., g_n$" и выпуклую допустимую область $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Функция Лагранжа
$L = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_m g_m$ ($\lambda_1 \geqslant 0, ..., \lambda_m \geqslant 0$) также выпукла (см. св-во 2 выпуклых ф-ий)
Если в точке $x^0 == (x_1^0, ..., x_n^0)$ выполняется условие 1 теоремы Куна-Таккера $\frac{\partial L}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$, (т.е. $\nabla L(x^0) = 0$) то эта точка - точка min выпуклой функции Лагранжа "L"в допустимой области.
Обозначим $minL(x) = L(x^0) = L^0 \Rightarrow L^0 \leqslant L$
Но вследствие условия 2 теоремы Куна-Таккера
$\lambda_1 g_1^0 = ... = \lambda_m g_m^0 = 0 \Rightarrow L^0 = f^0, f^0 \leqslant L$
Кроме того, в допустимой области $g_1 \leqslant 0, ..., g_m \leqslant 0$ и по условию 3 теоремы Куна-Таккера, $\lambda_1 \geqslant 0, ..., \lambda_m \leqslant 0 \Rightarrow \lambda_1 g_1 = ... = \lambda_m g_m \leqslant 0 \Rightarrow$
в допустимой области
$L = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_m g_m \leqslant f \Rightarrow$ в допустимой области:
$f^0 \leqslant L \leqslant f$, т.е. $f^0 \leqslant f \Rightarrow minf = f^0 = f(x^0)$, т.е. точка $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ - точка минимума (глобального) целевой функции в допустимой области.
Т. О. достаточность теоремы Куна-Таккера доказана.
ч и т.д.

Теорема Куна-Таккера (в "седловом"варианте)

Точка $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ является решением ЗВП (т.е. точкой глобального min-а функции "f") $\Leftrightarrow \exists$ неотрицательный вектор множителей Лагранжа
$\lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)(\lambda_i^0 \geqslant 0; i = \overline{1, m})$ такой, что для функции Лагранжа
$L = (x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \Sigma_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n)$ точка $(x^0; \lambda^0)$ является седловой точкой, т.е.
$L(x^0, \lambda) \leqslant (x^0, \lambda^0) \leqslant L(x, \lambda^0)$ (*)
$\forall x \in$ допустимой области, $\lambda \geqslant 0$
(без доказательства)

Rem:

1. Из неравенства (*) следует, что точка - точка минимума функции, а точка - точка максимума функции по. Существование седловой точки означает равенство минимакса максимуму.
2. Можно показать, что необходимые и достаточные условия того, чтобы являлась седловой точкой функции Лагранжа, имеют вид:

Rem: 1. При доказательстве необходимости условий теоремы Куна-Таккера выпуклость функций и допустимой области не требовалась $\Rightarrow$ условия Куна-Таккера являются необходимыми для произвольной (необязательно выпуклой) ЗМП.
2. Множители Лагранжа "λ_k" представляют собой "цену"ограничения "$g_k \leqslant 0$", т.е. чувствительность оптимального значения целевой функции "f^0" к нарушению этого ограничения. В функции Лагранжа слагаемые "$\lambda_k g_k$" представляет собой как бы "штраф"за нарушение ограничения "$g_k \leqslant 0$". Чем больше значение множителя Лагранжа "λ_k" и чем больше нарушено /-щее ограничение (т.е. стало "$g_k > 0$"), тем больше величина этого "штрафа". На этой идее основан один из методов решения ЗМП - метод штрафных функций, который был рассмотрен ниже.

3. Условия теоремы Куна-Таккера представляют собой систему нелинейных (в общем случае) уравнений и неравенств, которая допускает лишь приближенное решение численными методами. Для решения ЗВП разработали специальные итерационные численные методы, которые заключаются в построении последовательных приближений к точке целевой функции в допустимой области. Критерием окончания итерационного процесса является достижение заданной точности вычислений. В результате определяются приближенные значения.

4. Точное решение ЗВП допускает в случае, когда и целевая функция и все ограничения являются линейными функциями переменных (линейные функции являются выпуклыми в /-ии со свойством 1 выпуклых функций). Такая ЗВП называется задачей линейного программирования (ЗЛП).

Линейное программирование