Теорема Теорема

1 Лекция №2

Условная оптимизация

Условная оптимизация с ограничениями-равенствами. Функция Лагранжа

def: Задачей условной оптимизации с ограничениями-равенствами называется следующая задача: $f_1 \to extr$; $f_i(x) = 0(i = \overline{1,m}), (m < n)$, где $f_i(x) : R^n \to R(i = \overline{0,m})$ и $\forall f_i(x)$ - дифференцируема.

Теорема 1. *необходимое условие экстремума I порядка.*

If т.$x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in locextr f_0 \Rightarrow$ then $\exists$ вектор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*) \in R^m$ (λ) $(\lambda^* \neq 0)$ такой, что для функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m) = f_0(x1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_1, ..., x_n) \tag{1}$$

выполняется условия стационарности:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}) \\ &\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = f_i(x^*) = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \end{aligned} \tag{2}$$

т.е. 've систему $n+m$ уравнений для нахождения $n+m$ неизвестных $\{x_1^*, ..., x_n^*; \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*\}$

Теорема 2. *необходимое условия экстремума II порядка.*

If т.$x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in locmin f_0$ (условие регулярности) и векторы $f_1'(x^*), ..., f_m'(x^*)$ - линейно независимы $\Rightarrow$ then $\exists$ вектор множителей Лагранжа
$\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*) \in R^m(\lambda^* \neq 0)$ такой, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

выполняются условия:

1. стационарности (2)
2. неотрицательной определенности матрицы вторых производных:
   (3) $(\mathcal{L}''(x^*, \lambda^*)h, h) \geq 0 \ \forall h \in \{(f_i'(x^*), h) = 0(i = \overline{1,m})\}$

Rem: Для т.$x^* \in locmax f_0$ need $\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$

Теорема 3. *достаточное условие экстремума II порядка.*

If в т. $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ векторы $f_1'(x^*), ..., f_m'(x^*)$ - линейно независимы и $\exists$ вектор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*) \in R^m (\lambda^* \neq 0)$ такой, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

в т.x^* выполняются условия:

1. стационарности (2)
2. положительной определенности матрицы вторых производных:
   $(\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)h, h) > 0 \; \forall h \in \{(f_i'(x^*), h) = 0 (i = \overline{1, m}), (h \neq 0)\} \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ then т. $x^* \in locminf_0$

Rem: Для т.$x^* \in locmaxf_0$ need $\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$

Частный случай
$z = f(x, y) \to$ extr; при $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow$ функция Лагранжа 've вид:
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

Условия стационарности(необх. усл. I порядка)(2):

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x'(x^*, y^*, \lambda^*) = f_x'(x^*, y^*) + \lambda\varphi_x'(x^*, y^*) = 0 \\ \mathcal{L}_y'(x^*, y^*, \lambda^*) = f_y'(x^*, y^*) + \lambda\varphi_y'(x^*, y^*) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda'(x^*, y^*, \lambda^*) = \varphi'(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ система трех уравнений с тремя неизвестными
$\Rightarrow$ находим стационарные точки (x^*, y^*, λ^*)

Вычисляется в каждой из get-x стационарных точек (x^*, y^*, λ^*) определитель:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & \mathcal{L}_{xx}'' & \mathcal{L}_{xy}'' \\ \varphi_y' & \mathcal{L}_{yx}'' & \mathcal{L}_{yy}'' \end{vmatrix}$$

if $\Delta > 0 \Rightarrow$ then т.$(x^*, y^*, \lambda^*) \in$ locmin z
if $\Delta < 0 \Rightarrow$ then т.$(x^*, y^*, \lambda^*) \in$ locmax z

Условная оптимизация с ограничениями-равенствами и неравенствами. Математическое программирование

def: Задачей условной оптимизации с ограничениями-равенствами и ограничениями-неравентсвами называется следующая задача:
$(4) f_0(x) \to min$; $(5) f_i(x) \leq 0$ $(i = \overline{1, p})$, $(6) f_i(x) = 0$ $(i = \overline{p+1, m})$,
где $f_i(x) : R^n \to R (i = \overline{0, m})$

def: Эта задача называется задачей математического программирования (ЗМП)
Rem:
1) Обычно в ЗМП присутствуют условия неотрицательности переменных $x_i \geq (i = \overline{1, n})$ эти условия записываются в системе неравенств (5) в виде: $-x_i \leq 0 (i = \overline{1, n})$
2) Каждое ограничение-равенство (6) можно заменить двумя неравенствами:

$$f_i(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(x) \leq 0 \\ -f_i(x) \leq 0 \end{cases} \quad (i = \overline{p+1, m})$$

В силу этих замечаний ЗМП можно записать в виде:
$f_0(x) \to min$
$f_i(x) \leq 0$ $(i = \overline{1, m})$ (8) где $x = (x_1, ..., x_n)$

Для ЗМП составляется функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m) = f_0(x1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_1, ..., x_n)$$

С помощью функции Лагранжа выписываются необходимые и достаточные условия экстремума тип (2)-(3). Однако, проверка выполнения этих условий становится еще более сложной. При этом требуется решать систему, вообще говоря, нелинейных уравнений и неравенств. Для этого применяются итерационные численные методы, формирующие последовательность точек, сходящуюся к точке экстремума. Однако, эта точка может оказаться точкой локального(а не глобального) экстремума. Это объясняется тем, что ЗМП в такой общей постановке, без каких-либо предположений относительной функций $f_i(x)$, является многоэкстремальной задачей. Не существует универсальных методов решения таких задач. Содержательная теория построена лишь для отдельных классов ЗМП, в частности, задач оптимизации выпуклых функций на выпуклом множестве решений систем ограничений-неравенств. Такие задачи, называемые задачами выпуклого программирования(ЗВП), являются, как будет показано ниже, одноэкстремальными задачами.