Теорема

1 Лекция №3

Выпуклый анализ

Ввиду важности задачи выпуклого программирования (ЗВП) рассматриваемые основные понятия раздела математики, называемого выпуклым анализом:
1) Выпуклое множество 2) Выпуклая(вогнутая) функция и ее дифференциальные свойства

Выпуклые множества точек

def: Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с $\forall$ двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки **ex:** — Тут нужно иллюстрацию
ex: круг, сектор, отрезок, прямая, полуплоскость, куб, пирамида

Теорема 1. *Пересечение $\forall$ числа выпуклых множеств-выпуклое множеств, too*

Доказательство. Для простоты - пересечение двух выпуклых множеств:
$\forall N, M \in (A \cap B)$. Множество A - выпуклое $\Rightarrow$ отрезок $MN \in A$. Аналогично
$MN \in B \Rightarrow MN \in (A \cap B) \Rightarrow (A \cap B)$ - выпуклое — тут нужно иллюстрацию ■

def: Внутренняя т. множества - $\exists$ окрестность этой точки: в ней - только точек $\in$ множеству.

def: Граничная точка множества - $\forall$ окрестность этой точки содержит как точки $\in$ множеству, так и точек $\notin$ множеству

def: Угловая точка множества - она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком $\in$-го множеству.

ex: — Тут нужно иллюстрацию точка M - внутренняя, точка N граничная, точка A - угловая ($AP \in$ множеству целиком, но точка A - не внутренняя точка для AP; точка внутренняя точка для KL, но KL $\notin$ множеству целиком

def: Замкнутое множество точек - if оно включает все свои граничные точки.

def: Ограниченное множество точек - if $\exists$ шар конечного радиуса с центром в $\forall$ точке множества, который полностью содержит в себе данное множество.

Можно показать, что если фигура ограничена only прямыми или их отрезками, то она 've конечное число угловых точек. При криволинейности границ - бесконечное множество угловых точек.
def: Выпуклое замкнутое множество точек пространства(плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклым многогранником(многоугольником), если оно ограниченное, и выпуклой многогранной(многоугольной) областью, если оно неограниченное.

Rem: Для выпуклого многогранника(многоугольника) угловые точки $\equiv$ его вершинам.
Для невыпуклого - не обязательно

ex: — Тут нужна иллюстрация точка E - вершина, но не угловая точка, т.к. KL $\in$ множеству целиком и точка E - внутренняя точка для KL.

Rem: В ЗЛП часто число параметров объекта $n > 3 \Rightarrow$ имеем дело с гипермногогранниками в гиперпространстве с координатами $x_i(i = (\overline{1, n}, n > 3)$

Геометрический смысл решений СЛН и СЛУ

Теорема 2. *Множество всех решений линейного неравенства*

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

- это одно из полупространств, на которые n-мерные гиперпространство делится гиплоскостью

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

включая и эту гиперплоскость

Выпуклые множества в n-мерном пространстве. Свойства ЗЛП

Выпуклые множества в n-мерном пространстве

Рассмотрим в n-мерном пространстве k точек (векторов):
$x_1 = (x_1^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$, ..., $x_k = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$

def: Точка(вектор) $X = (x_1, ..., x_n)$ называется линейной комбинацией точек(векторов) $X_1, ..., X_k$, если справедливо соотношение:

$$X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k \tag{1}$$

где α_j - const $j = (\overline{1, k})$

def: Точка(вектор) X называется выпуклой линейной комбинацией точек(векторов) $X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k$, если:

1) $$X = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k$$

2) $$\alpha_j \geq 0 j = (\overline{1, k}) \tag{2}$$

3) $$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1 \tag{3}$$

Очевидно, что в частном случае при k=2 выпуклой линейной комбинацией двух точек X_1 и X_2 является соединяющий их отрезок, т.к.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 - 1 \end{array} \right\} \alpha X_1 + (1 - \alpha_1) X_2$$

- уравнение точек $X \in [X_1, X_2]$ (см. аналитич. геометр.) — добавить иллюстрацию