Лекция №5. Общая постановка выпуклого программирования(ЗВП).Теор
Куна-Таккера

Общая постановка ЗВП

ЗВП называется следующей задачей математического программирования(ЗМП)

$f(x_1, ..., x_n) \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) \le 0 \\ g_m(x_1, ..., x_n) \le 0 \end{cases},$$

где $f, g_1, ..., g_m$ - выпуклые функции, def-ные на некотором выпуклом множестве $M \subset R^n$.

При этом множество M содержит допустимую область значений, то есть множество, удовлетворяющее системе ограничений. Заметим, что свойству 3.1 выпуклых функций допустимая область ЗВП также выпукла

Rem:

1) Аналогично формулируется задача максимизации вогнутой функции "f" при вогнутых функциях "$g_1, ..., g_m$", def-х на некотором выпуклом множестве $M \subset R^n$. При этом знак неравенств — " $\ge$ ".

Аналогично допустимая область ЗВП будет также выпуклым множеством(свойство для вогнутых функций)

2) В ??? с теор. на с.??? в ЗВП каждый локальный минимум является глобальным минимумом функции "f" в допустимой области. Причём, если функция "f" строго выпуклая и ограниченная снизу на ограниченном непустом множестве M, то ЗВП 've единственное решение, то есть минимумом функции "f" достигается в одной точке

$$x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$$

(см с.???)

Теорема Куна-Таккера.

Теорема: Пусть на ЗВП налагаются следующие требования:

1. Множество, удовлетворяющее системе строгих неравенств:

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) < 0 \\ g_m(x_1, ..., x_n) < 0 \end{cases}$$

и называемое внутренней частью допустимой области, не пусто (т.н. условие Слейтера)

2. Часть допустимой области, в которой некоторые ограничения обращаются в равенства, называется границей допустимой области, а эти ограничения - активными. Пусть градиенты активных ограничений в отвечающих им точках границы линейно независимы(т.н. условие регулярности (см с.???))

Теорема Куна-Таккера (необходимые и достаточные условия решения (глобального минимума) ЗВП)

Точка $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ является решением ЗВП (то есть точкой глобального минимума функции $"f")$ $\Leftrightarrow$(Н. и Д.) в ней выполнены следующие условия(Условия Куна-Таккера):

1)Условие стационарности функции Лагранжа (см.с.???)

$$\lambda(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ...x_n)\Sigma_{i=1}^m) * \lambda_i * g_i * (x_1, ..., x_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \text{ (то есть } \nabla(x^0) = 0);$$

2)Условия "дополняющей нежёсткости":

$$\lambda_i * g_i * (x_1^0, ..., x_m^0) = 0 \ (i = \overline{1, m});$$

3)Условия неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$$

Доказательство:

Заметим, что в условиях К.-Т. множители Лагранжа $\lambda_1, ..., \lambda_m$ являются "выключателями"делящих ограничений. Если, например, $\lambda_k = 0$, то ограничение $g_k \leq 0$ исключается из условий К.-Т., так как : 1) это ограничение не входит в функцию Лагранжа (слагаемое $\lambda_k * g_k = 0$) и,??? не входит в условие 1; 2) условия 2 и 3 для этого ограничения выполняются автоматически

1. Необходимость

Пусть точка $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ - решение ЗВП, то есть $minf(x_1, ..., x_n) = f(x_1^0, ...x_n^0)$. Целевая функция $"f"$ может достигать минимума внутри допустимой области или на её границе.

Пусть минимум достигается внутри области $\Rightarrow$ в точке x^0 выполняются необходимые условия локального(безусловного экстремума функции $"f")$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Это частный случай условия 1 К.-Т.(условия стационарности функции Лагранжа) при $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$ все ограничения выключены, так как 've безусловную оптимизацию)

Условия 2 и 3 при этом (при $\lambda_i = 0 (i = \overline{1,m})$ выполняются автоматически.

Пусть минимум достигается на границе допустимой области, то есть является условным extr функции "f" с активными ограничениями задачи для точки минимума точки x^0. Необходимые условия условного extr (см. с. ???) ($\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0; (\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 (j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m})$) влекут за собой выполнение условий 1 и 2 К.-Т., если положительно равынми нулю множит. Лагранжа для неактивных ограничений (так как реально они не входят в функцию Лагранжа). Остаётся доказать, что выполняется 3 условие К.-Т. : $\lambda_i \geq 0 (i = \overline{1,m})$

Для наглядности ограничимся случаем двух переменных (n=2).

Уравнение $g(x_1, x_2)$ означает плоскую кривую, а неравенство $g(x_1, x_2) \leq 0$ - одну из частей плоскости, ограниченную этой кривой

Система ограничений

$$\begin{cases} g_1(x_1, x2) \leq 0 \\ ... \\ g_m(x_1, x_2) \leq 0 \end{cases}$$

задает криволинейный многоугольник, в каждой вершине которого пересекаются две кривые.

Минимум на границе допустимой области достигается либо на строке этого многоугольника, либо в его вершине.

Пусть минимум - на стороне многоугольника $\Rightarrow \lambda_k \neq 0$. Функция Лагранжа 've вид:

$$L = f(x_1, ...x_n) + \lambda_k * g_k(x_1, ..., x_n),$$

где $g_k = 0$ - активное ограничение.

В точке минимума выполняются необходимые условия. Условия условного extr(см. с. ???):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = ... \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_k}$$

или

$$\begin{cases} \nabla L = \nabla f + \lambda_k * \nabla g_k = 0 \\ g_k = 0 \end{cases},$$

$\Rightarrow \nabla f = -\lambda_k * \nabla g_k, (*)$,

то есть векторы ∇f и ∇g_k — коллинеарны

Функция $g_k < 0$ внутри допустимой области и $g_k > 0$ вне её $\Rightarrow$ вектор ∇g_k направлен из допустимой области (в сторону возрастания функции "g_k")

Значение функции "f" внутри допустимой области больше, чем в точке минимума $\Rightarrow \nabla f$ направлен внутрь допустимой области.

Таким образом, векторы ∇f и ∇g_k противонаправлены и в равенстве (*) коэффиценты коллинеарности $\lambda_k \leq 0 \Rightarrow \lambda_k \geq 0$, то есть условие 3 К.-Т. доказано для случая, когда минимум достигается на стороне допустимого многоугольника.

Можно показать, что условие 3 К.-Т. ($\lambda_i \geq 0 (i = \overline{1, m})$) выполняется и для случая, когда минимум достигается в вершине допустимого многоугольинка.

Таким образом, необходимость К.-Т. доказана.