

MASSIMO BERTOLOTTI

fatto di sangue

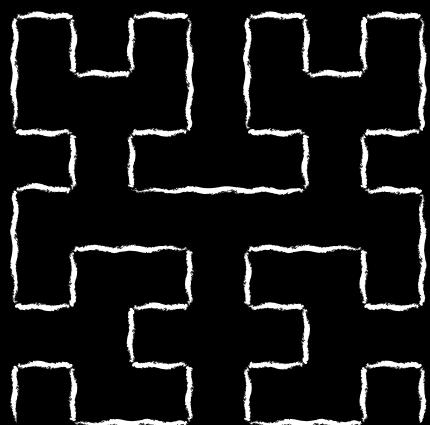
**FRA DUE ANALISTI  
PER CAUSA DI UN INTEGRALE**

si sospettano moventi misurabili

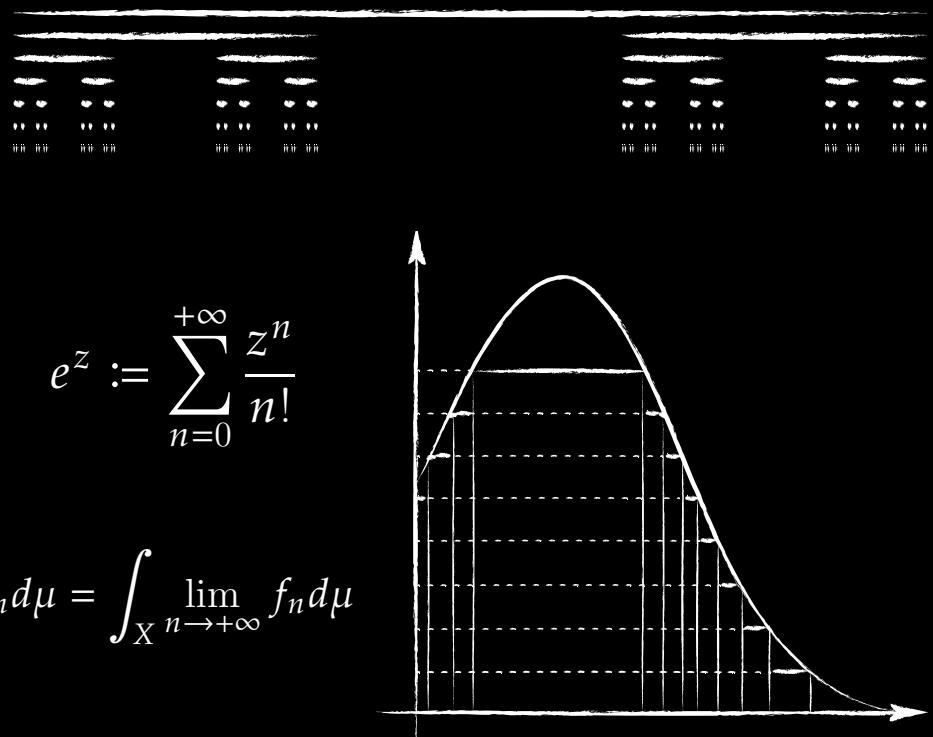


$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n|}$$

Manualozzo di Analisi Matematica 3



$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu (A_n)$$



# NOTE PER LA LETTURA

---

*“Un matematico è una macchina per trasformare caffè in teoremi.”*

*ALFRÉD RÉNYI, studioso del teorema di Van Moka-mpen.*

**S**ENZA troppe pretese di formalità, com’è intuibile dal termine dal termine tecnico *manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti a quattro mani basati sul corso di ANALISI MATEMATICA 3 tenuto dai docenti Walter Dambrosio e Davide Zucco nell’Anno Accademico 2021-2022 presso il Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Torino.

I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nel corso di ANALISI MATEMATICA UNO. In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate.

Per quanto ci piacerebbe esserlo, non siamo *esseri infallibili*: ci saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiediamo gentilmente di segnalarceli su <https://maxmaci.github.io> per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.

I disegni sono stati realizzati da Massimo Bertolotti, l’addetto alla grafica e ai capricci di L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (ed è molto capriccioso, fidatevi). Chi volesse dilettarsi può cercare di distinguere chi fra i due autori ha scritto cosa, non dovrebbe essere troppo difficile.

Prima edizione, compilato il 15 gennaio 2022.



This work is licensed under a Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International.

# INDICE

---

INDICE ii

## I INTRODUZIONE AD ANALISI MATEMATICA 3 1

1	ALLA RICERCA DELLA LUNGHEZZA DELL'ELLISSE	3
1.1	Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse	3
1.1.1	La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor	4
1.1.2	La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale	6
1.2	Non banali conseguenze di una domanda banale	7

## II SERIE DI FUNZIONI 9

2	CONVERGENZA DI FUNZIONI, PARTE PRIMA	11
2.1	Convergenza uniforme di funzioni	11
2.1.1	Eserciziamoci! Convergenza uniforme	15
2.1.2	Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme	16
2.1.3	Visualizzazione della convergenza uniforme	16
2.1.4	Generalizzazioni della convergenza uniforme	17
2.2	Convergenza puntuale di funzioni	18
2.2.1	Confronto tra convergenza uniforme e puntuale	19
2.2.2	Eserciziamoci! Confronto tra convergenza uniforme e puntuale	20
2.3	Proprietà di regolarità nel caso di convergenza uniforme e puntuale	22
2.3.1	Limitatezza	22
2.3.2	Continuità	23
2.3.3	Integrabilità e passaggio al limite sotto segno di integrale	24
2.3.4	Derivabilità	27

## 3 SERIE DI FUNZIONI 33

3.1	Serie in uno spazio normato	33
3.2	Serie di funzioni	37
3.2.1	Il criterio di Weierstrass	38
3.3	Proprietà di regolarità di una serie di funzioni	39
3.3.1	Limitatezza	39

3.3.2	Continuità	40
3.3.3	Integrabilità e scambio tra integrale e serie	40
3.3.4	Derivabilità	41
3.4	The Fulfilling World of the Space-Filling Curves	42
<b>4</b>	<b>SERIE DI POTENZE</b>	<b>45</b>
4.1	Serie di potenze	45
4.1.1	Il raggio di convergenza	47
4.2	Comportamento sul bordo	51
4.3	Serie di potenze e convergenza uniforme	54
4.4	Proprietà di regolarità della somma di una serie di potenze	56
4.4.1	Continuità	56
4.4.2	Derivabilità	58
4.5	Funzioni analitiche e serie di Taylor	60
4.5.1	Eserciziamoci! Funzioni analitiche e serie di Taylor	64
4.5.2	Esempi di funzioni analitiche	65
4.6	Il calcolo della lunghezza dell'ellisse	68
4.7	Funzioni esponenziale e logaritmo in campo complesso	71
4.7.1	Funzione esponenziale in campo complesso	71
4.7.2	Funzione logaritmo in campo complesso	74

### III TEORIA DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE 77

<b>5</b>	<b>TEORIA DELLA MISURA</b>	<b>79</b>
5.1	Il contesto storico: il problema delle discontinuità nell'integrale definito	80
5.2	Algebre e $\sigma$ -algebre	83
5.3	Funzioni misurabili	84
5.3.1	Caratterizzazione delle funzioni misurabili	85
5.3.2	Passaggio al limite per funzioni misurabili	86
5.4	Misura di Peano-Jordan	88
5.4.1	Definizione e osservazioni sulla misura di Peano-Jordan	90
5.5	Misura secondo Lebesgue	91
5.5.1	Insiemi misurabili secondo Lebesgue	94
5.5.2	Regolarità della misura di Lebesgue	97
5.5.3	Confronto tra la misura di Peano-Jordan e di Lebesgue	99
5.6	Definizione assiomatica di misura	100
5.7	Famiglie di insiemi nella teoria della misura e relazioni tra di loro	103
<b>6</b>	<b>INTEGRALE DI LEBESGUE</b>	<b>109</b>
6.1	I tre passi dell'integrale astratto di Lebesgue	109
6.2	Funzioni semplici	110
6.2.1	Approssimazione di funzioni misurabili non negative con funzioni semplici	111
6.3	Passo 1: funzioni semplici, misurabili, non negative	114
6.3.1	$\sigma$ -additività dell'integrale di funzioni semplici, misurabili, non negative rispetto al dominio	115
6.4	Passo 2: funzioni a valori reali misurabili, non negative	117
6.4.1	Teorema della convergenza monotona	118

6.4.2	Additività dell'intergrale, scambio di integrale e serie	121
6.4.3	Integrazione rispetto alla misura conteggio pesata	124
6.4.4	Lema di Fatou	125
6.4.5	$\sigma$ -additività dell'integrale di funzioni misurabili non negative rispetto al dominio	126
6.4.6	Misura indotta dall'integrale di Lebesgue	127
6.4.7	Misure assolutamente continue	130
6.5	Integrabilità	131
6.5.1	Decomposizione di una funzione a valori complessi in termini di funzioni a valori reali non negativi	132
6.6	Passo 3: funzioni complesse integrabili	133
6.6.1	Teorema della convergenza dominata	134
6.7	Tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue	137
6.8	Il ruolo degli insiemi di misura nulla	139

#### IV APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE 143

7	CONVERGENZA DI FUNZIONI, PARTE SECONDA	145
7.1	Dallo spazio delle funzioni integrabili allo 1-spazio di Lebesgue	145
7.1.1	Eserciziamoci! Dallo spazio delle funzioni integrabili allo 1-spazio di Lebesgue	147
7.2	Modi di convergenza	148
8	INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO	157
8.1	Integrali dipendenti da un parametro	157
8.2	La trasformata di Fourier	160
9	ANALISI E PROBABILITÀ	163
9.1	Spazio di probabilità e variabili aleatorie	163
9.2	Probabilità immagine	165
9.3	Funzione di ripartizione e classificazione delle variabili aleatorie	166
9.3.1	Variabili aleatorie assolutamente continue	167
9.3.2	Misure singolari	168
9.3.3	Variabili aleatorie singolari discrete	169
9.3.4	Variabili aleatorie singolari continue	170
9.3.5	Variabili aleatorie qualsiasi	171
9.4	Modi di convergenza nella teoria della probabilità	171

#### V INDAGINE DEL FATTO DI SANGUE 175

A	NOTE AGGIUNTIVE	177
A.1	Capitolo 1: alla ricerca della lunghezza dell'ellisse	177
A.1.1	Il coefficiente binomiale generalizzato	177
A.2	Capitolo 3: serie di funzioni	179
A.2.1	Tanti criteri di Cauchy	179
A.2.2	Criteri di convergenza delle serie	181
A.2.3	Serie a valori reali notevoli	183
A.3	Capitolo 4: serie di potenze	184
A.3.1	Massimo e minimo limite	184

A.3.2	Limite e limite del modulo	193
A.3.3	Riordinare gli elementi di una serie	193
A.3.4	Il prodotto di serie (secondo Cauchy)	194
A.4	Capitolo 5: teoria della misura	196
A.4.1	Leggi di De Morgan	196
A.4.2	Misurabilità della parte positiva e negativa	196
A.5	Capitolo 7: convergenza di funzioni, parte seconda	198
A.5.1	Misurabilità e convergenza quasi ovunque	198
B	BREVI CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI	199
B.1	Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel e Assioma di Scelta	200
B.2	Relazioni d'ordine parziale e buon ordine	201
B.3	Ordinali	203
B.3.1	Ordinali successori e ordinali limiti	205
B.3.2	Isomorfismo dell'ordinale con gli insiemi ben ordinati	207
B.3.3	Induzione transfinita	207
B.3.4	Sequenze e limite	208
B.3.5	Aritmetica degli ordinali	208
B.4	Cardinalità	211
B.4.1	Ordine delle cardinalità	211
B.4.2	Aritmetica dei cardinali	213
B.4.3	Cardinalità dell'insieme delle parti	214
B.4.4	Ordinali e cardinali	215
B.4.5	Cardinalità del continuo	216
C	PROPRIETÀ VARIE ED EVENTUALI	219
C.1	Immagine e controimmagine	219
C.2	Passaggio al limite sotto segno di integrale	222
D	ELENCHI DELLE DEFINIZIONI E DEI TEOREMI	223
E	RINGRAZIAMENTI	229
	BIBLIOGRAFIA	231
	INDICE ANALITICO	233



# I

## INTRODUZIONE AD ANALISI MATEMATICA 3



# CAPITOLO **1**

## ALLA RICERCA DELLA LUNGHEZZA DELL'ELLISSE

---

*“Per ogni problema c’è una soluzione che è semplice, chiara... e sbagliata.”*

*HENRY LOUIS MENCKEN ad un suo studente che trovò come perimetro dell’ellisse  $\pi ab$ .*

**U**NA CIRCONFERENZA e un’ellisse a primo acchito possono sembrare molto simili: in fondo, una circonferenza non è altro che un’ellisse i cui punti focali coincidono e dunque l’ellisse si può vedere come una circonferenza “allungata” rispetto ad un asse. Il valore dell’area delimitata da una circonferenza ( $\pi r^2$ ) e la lunghezza di una circonferenza ( $2\pi r$ ) sono ben noti già dall’antichità, i cui calcoli sono stati opportunamente formalizzati in epoca moderna; tuttavia, riguardo l’ellisse, ci accorgiamo di aver incontrato nel corso degli studi precedenti quasi esclusivamente il valore dell’area delimitata da essa ( $\pi ab$ ), ma *non la lunghezza dell’ellisse*. Come mai?

### 1.1 UNA DOMANDA BANALE: LA LUNGHEZZA DI UN’ELLISSE

Partiamo col seguente *quiz*: quale delle seguenti tre espressioni è il valore, o una sua approssimazione, della lunghezza di un’ellisse di semiassi di lunghezza  $a$  e  $b$ ?

- a)  $L(a, b) = \pi ab$
- b)  $L(a, b) \approx \pi(a + b) + 3\pi \frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}$
- c)  $L(a, b) \approx 2\pi a$ .

Chiaramente, come abbiamo detto nell’introduzione del capitolo, la lunghezza dell’ellisse *non è* una formula nota dagli studi passati e possiamo (per ora) solamente escludere la *prima risposta*, in quanto essa è il valore dell’**area** delimitata dell’ellisse.

**OSSERVAZIONE.** Possiamo escludere la prima risposta anche per motivi puramente **dimensionali**:  $a$  e  $b$  sono, dimensionalmente parlando, due lunghezze, quindi  $\pi ab$  deve essere una *lunghezza al quadrato*, cioè un’area e non può essere una lunghezza!

In realtà, la domanda del quiz è mal posta: le risposte *b*) e *c*) sono entrambe corrette. Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan fornì come nota a margine non commentata in un suo articolo del 1914 (Ramanujan, «Modular equations and approximations to  $\pi$ ») l'approssimazione *b*):

$$L(a, b) \approx \pi \left( (a + b) + 3 \frac{(a - b)^2}{10(a + b) + \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}} \right)$$

Vedremo fra poco che anche l'approssimazione data dalla *a*) è anch'essa lecita.

Il motivo per cui diamo approssimazioni ma non formule esatte per la lunghezza dell'ellisse è dovuto al fatto che *non esiste* una formula esplicita in termini di *funzioni elementari*, bensì possiamo esprimerla soltanto come **somma di una serie**.

**TEOREMA 1.1.1. - LUNGHEZZA DELL'ELLISSE DI SEMIASI DI LUNGHEZZA *a* E *b*.**

Siano  $a \geq b$  le lunghezze dei semiassi dell'ellisse ed  $e = e(a, b) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \in [0, 1)$  l'eccentricità; allora si ha

$$L(a, b) = 2\pi a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2j} \left( \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} e^j \right)^2 \quad (1.1)$$

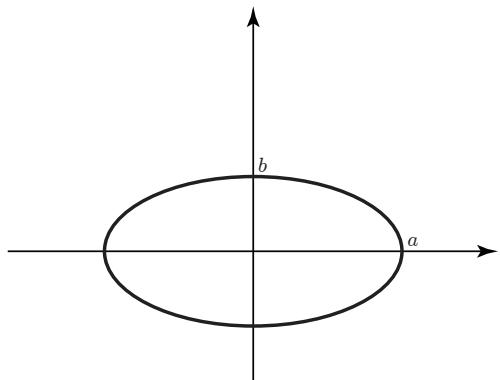
dove !! indica il **doppio fattoriale**:

- $(-1)!! = 0!! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{se } n > 0 \text{ è pari} \\ n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{se } n > 0 \text{ è dispari} \end{cases}$

Il primo termine della serie fornisce l'approssimazione espressa nella risposta *a*):

$$L(a, b) \approx 2\pi a$$

#### 1.1.1 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor



Dimostriamo finalmente la lunghezza dell'ellisse. Come è noto dal corso di ANALISI 2, per una curva *regolare* come l'ellisse è possibile calcolarne la lunghezza usando un'opportuna parametrizzazione.

Poniamo  $a \geq b$  le lunghezze dei semiassi ed  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \in [0, 1)$  l'eccentricità. Una parametrizzazione è

$$\vec{r}(t) = (a \sin t, b \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Allora

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a \cos t, -b \sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2) \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

C'è un problema: la funzione  $f(t) = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}$  non è **elementarmente integrabile**, cioè non ammette primitive in termini di funzioni elementari.

**ATTENZIONE!** Non essere elementarmente integrabile *non* significa che non sia integrabile! La funzione integranda  $f(t)$  è continua su  $[0, 2\pi]$ , dunque per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* ammette primitive su  $[0, 2\pi]$ . Una di esse è

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 y} dy, \quad \forall y \in [0, 2\pi]$$

Il problema è che *non* possiamo riscrivere  $F$  in modo esplicito usando *solo* funzioni elementari.

Questo tipo di integrale è detto **integrale ellittico**.

**DIGRESSIONE.** Gli *integrali ellittici* si incontrano in molti ambiti matematici. Ad esempio, appaiono nella risoluzione dell'equazione differenziale del moto di un **pendolo semplice**:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Sono il motivo per cui tale equazione si studia spesso per piccole oscillazioni, in modo da poter operare una linearizzazione  $\sin \theta \sim \theta$  e calcolare il moto senza passare per tali integrali non calcolabili.

Un altro esempio della loro importanza è noto agli appassionati di **GEOMETRIA**: infatti, la branca della *Geometria Algebrica* nasce anche dagli studi su tali integrali.

Potremmo limitarci a considerare l'intero integrale ellittico come una nuova funzione, ma al più potremmo calcolarne il valore tramite metodi dell'**ANALISI NUMERICA**. Invece, proviamo a riscrivere l'integrale utilizzando uno **sviluppo in serie** della funzione integranda.

Poniamo  $x = -e^2 \sin^2 t$  e osserviamo che

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = (1 + x)^\alpha, \quad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}$$

Poichè  $(1 + x)^\alpha$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^\infty$  in un intorno di  $x = 0$ , si può approssimare localmente col **polinomio di Taylor** di ordine  $n$  centrato in  $x = 0$ ,  $\forall n \geq 0$ . Se il polinomio in questione è

$$P_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{\alpha}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

con  $\binom{\alpha}{j}$  il **coefficiente binomiale generalizzato**<sup>1</sup>, allora l'approssimazione dell'integranda data dal polinomio di Taylor è proprio

$$(1 + x)^{1/2} \approx \sum_{j=0}^n \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

Risostituendo  $x = -e^2 \sin^2 t$  abbiamo un'approssimazione dell'integranda. Tuttavia, noi vorremmo un *risultato esatto*.

Sappiamo intuitivamente che più termini si hanno nello sviluppo di Taylor, più accurata è l'approssimazione; cosa succede per  $n \rightarrow \infty$ ? Dobbiamo studiare la somma di serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j$$

<sup>1</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 177 è possibile trovare la definizione e le proprietà del binomiale generalizzato.

Già ci dobbiamo porre nuove domande: la serie *converge* e per quali valori di  $x$ ? Supponendo che la serie converga per opportuni valori di  $x$ , la serie converge proprio a  $(1+x)^{1/2}$ ? *In generale*, per  $f \in \mathcal{C}^\infty$  qualsiasi **no**, la serie di Taylor non converge proprio e se converge non converge ad  $f$ !

Tuttavia, in questo caso siamo particolarmente fortunati:  $\forall x \in (-1, 1)$  la serie converge e vale<sup>2</sup>

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} x^j \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

In questa prima parte della dimostrazione abbiamo capito che è importante determinare quando è possibile passare dalla semplice *approssimazione* di una funzione con il *polinomio di Taylor* a poter riscrivere una funzione come una **serie di Taylor** di funzioni opportune.

### 1.1.2 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale

Torniamo al problema originale. Ricordando che  $x = -e^2 \sin^2 t$ , poiché  $t \in [0, 2\pi]$  si ha che  $x \in [-e^2, 0] \subseteq (-1, 1)$  dato che  $e^2 < 1$ . Possiamo riscrivere l'integrandi come il suo sviluppo in *serie di Taylor*:

$$(1 - e^2 \sin^2 t)^{1/2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-e^2 \sin^2 t)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Sostituiamo nell'integrale; poiché la funzione è pari e simmetrica, possiamo ricondurci a studiare l'integrale su  $[0, \pi/2]$ :

$$\begin{aligned} L = a \int_0^{2\pi} (1 - e^2 \sin^2 t)^{1/2} dt &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^2 \sin^2 t)^{1/2} dt = \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \equiv \end{aligned}$$

Incontriamo un nuovo problema: cos'è l'**integrale di una serie**? Se avessimo una somma di un numero *finito* di termini per la *linearità* dell'integrale potremmo scambiare la sommatoria con l'integrale, ma è possibile farlo nel caso di una serie?

Riscriviamo l'espressione precedente con la definizione di serie come *limite* per  $n \rightarrow +\infty$  delle *ridotte*:

$$\equiv 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{j=0}^n \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \right) dt$$

Il problema precedente si può riformulare come “È possibile scambiare integrale e limite?”. Tale questione è come il problema del **passaggio al limite sotto segno di integrale**.

*In generale*, la risposta è **no**: non è possibile scambiare limite e integrale. Ciò nonostante anche questa volta siamo particolarmente fortunati e il passaggio è *lecito* e si ha

$$L = 4a \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^n \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt$$

---

<sup>2</sup>Nel Capitolo 4, a pag. 65 è possibile trovare la dimostrazione di tale risultato nel caso generale di  $(1+x)^\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 &= 4a \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \\
 &= 4a \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j} t dt
 \end{aligned}$$

Completando il calcolo<sup>3</sup> si ottiene la formula della lunghezza scritta precedentemente.

## 1.2 NON BANALI CONSEGUENZE DI UNA DOMANDA BANALE

Abbiamo finalmente raggiunto una *risposta*, seppur assolutamente non banale, alla domanda che ci eravamo posti originalmente: qual è la *lunghezza dell'ellisse*? Nel far ciò ci siamo imbattuti in tutta una serie di problemi: esplicitare integrali non *elementarmente* risolvibili, la *convergenza* di *serie di Taylor* di funzioni ad una funzione specifica, il *passaggio al limite* sotto segno di *integrale*. La teoria matematica che tratteremo a partire dai capitoli successivi *nasce* proprio da questi problemi apparsi nell'*insidiosa ricerca* di una formula della lunghezza dell'ellisse.

In particolare, per capire quando era possibile il passaggio al limite sotto segno di integrale sono stati sviluppati diversi *teoremi*, più o meno vantaggiosi da utilizzare, le cui ipotesi variano sensibilmente fra di loro: alcuni si inseriscono nella già nota *teoria Riemanniana degli integrali*, mentre altri richiedono ipotesi completamente diverse. È da questi innumerevoli approcci al problema che, storicamente parlando, fu tale quesito a dare un *impeto* fondamentale allo sviluppo della **teoria degli integrali di Lebesgue**.

---

<sup>3</sup>Nel Capitolo 4, a pag. 68 è possibile trovare il procedimento completo.



# II

## SERIE DI FUNZIONI



# CAPITOLO 2

## CONVERGENZA DI FUNZIONI, PARTE PRIMA

---

“La situazione si complica. Ora, ce ne sono due di loro!”

Nute Gunray, scoprendo la convergenza puntuale dopo quella uniforme.

PER poter trattare i problemi enunciati nel Capitolo 1 dobbiamo partire dalla **convergenza di funzioni**. Come possiamo prendere una successione a valori in uno spazio metrico e vedere a cosa tendere al crescere di  $n$ , si può fare lo stesso per una **successione di funzioni**. La peculiarità, rispetto alla convergenza classica di una successione, è che non esiste un unico modo per far convergere una successione di funzione, ma ne esistono *molteplici*. In questo capitolo, partendo dal caso *reale*, definiremo le convergenze per funzioni da un insieme  $X$  generico ad uno *spazio metrico*, ossia la **convergenza uniforme** e la **convergenza puntuale**, per confrontarle e vedere in che maniera le proprietà di regolarità (*limitatezza, continuità, integrabilità e derivabilità*) si trasmettono dalla successione alla funzione limite. In questo capitolo parleremo del primo risultato teorico riguardante il **passaggio al limite sotto segno di integrale** - l'unico che vedremo nel caso ristretto della teoria dell'Integrale di Riemann.

### 2.1 CONVERGENZA UNIFORME DI FUNZIONI

Ricordiamo le definizioni di distanza, spazio metrico e convergenza.

#### DEFINIZIONE 2.1.1. - SPAZIO METRICO E DISTANZA .

Uno **spazio metrico** è una coppia  $(X, d)$ , dove  $X$  è un insieme e  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$  è una funzione detta **distanza**, cioè tale che  $\forall x, y, z \in X$  essa soddisfi le seguenti proprietà:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

**DEFINIZIONE 2.1.2. - CONVERGENZA DI SUCCESSIONI SECONDO UNA DISTANZA .**

Una successione  $v_n \in X$  converge in  $X$  a  $v \in X$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, d(v_n, v) < \varepsilon \quad (2.1)$$

Un caso particolare di spazio metrico è lo spazio  $X = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$  delle funzioni continue su un intervallo compatto con la **metrica lagrangiana**:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \quad (2.2)$$

**OSSERVAZIONE.** La distanza è ben definita perché la funzione  $|f(x) - g(x)|$ , essendo definita su  $[a, b]$  compatto, non si considera solo l'estremo superiore ma ammette massimo per il teorema di Weierstrass.

**DEFINIZIONE 2.1.3. - CONVERGENZA NELLA METRICA LAGRANGIANA .**

Siano  $f_n, f \in X$ . Si dice che  $f_n$  converge a  $f$  in  $X$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.3)$$

Siccome vale per il massimo allora vale per qualsiasi  $x$ , quindi la relazione si può riscrivere come

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$$

**OSSERVAZIONE.** La condizione, riscritta in questo modo, non solo *non necessita* più dell'esistenza del *massimo*, ma non è neanche necessario che l'intervallo sia *compatto* o che le funzioni  $f_n$  siano *continue*: questa è in realtà una relazione *più generale* rispetto alla semplice convergenza nella metrica lagrangiana!

Vedremo che nel caso di funzioni continue sui compatti la convergenza uniforme coincide con quella lagrangiana.

**DEFINIZIONE 2.1.4. - CONVERGENZA UNIFORME .**

Siano  $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}$  qualsiasi. Si dice che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A \quad (2.4)$$

**DEFINIZIONE 2.1.5. - FUNZIONE LIMITE .**

Se  $f_n$  converge a  $f$  su  $A$ ,  $f$  si dice **funzione limite**.

**OSSERVAZIONE.** Segue immediatamente dalla definizione che se  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$ , allora  $\forall B \subseteq A$  si ha che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $B$ .

**ATTENZIONE!** È estremamente importante dire **dove** converge  $f_n$ : infatti, una stessa successione può convergere uniformemente su  $A$ , ma allo stesso tempo *non convergere*

uniformemente in un altro insieme  $B$ . Vedremo un esempio fondamentale a riguardo successivamente.

Ora passiamo da questa definizione ad una formulazione equivalente *operativa*. Se essa vale per qualsiasi  $x$  in  $A$ , allora vale per il sup e viceversa, quindi è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Siccome il sup dipende da  $n$ , possiamo definire una successione

$$c_n := \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}^+$$

Allora la relazione sopra, per definizione di limite di una successione, è equivalente a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

In conclusione abbiamo mostrato che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \quad (2.5)$$

**ESEMPIO.** Proviamo che  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$  converge uniformemente a  $f(x) = |x|$  su  $\mathbb{R}$ . Operativamente, dobbiamo dimostrare che

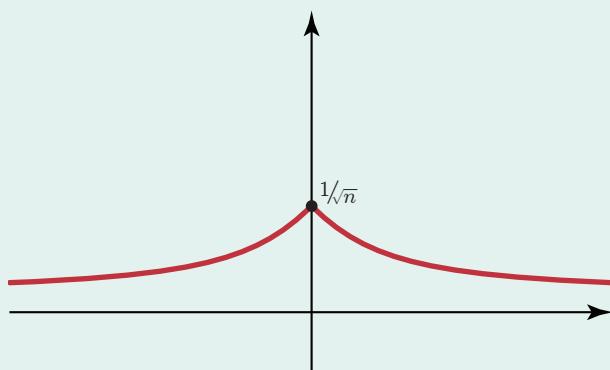
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

1. Calcoliamo il sup con  $n$  fissato:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \stackrel{*}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right)$$

dove (\*) si ha perché l'argomento del valore assoluto è sempre positivo.

Per trovare il sup tracciamo il grafico di  $\varphi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$  e cerchiamo il suo estremo superiore. Per parità della funzione ci basta fare le nostre considerazioni su  $(0, +\infty)$  per poi disegnare il resto del grafico grazie alla simmetria assiale rispetto all'asse  $y$ ; studiando opportunamente la derivata e il limite all'infinito si ottiene il seguente grafico.



Segue chiaramente che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi_n(x) = \varphi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} (= c_n)$$

2. Calcoliamo il limite per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Abbiamo così verificato la convergenza richiesta.

#### ESEMPIO - SUCCESSIONE GEOMETRICA .

Consideriamo  $f_n(x) = x^n$ ,  $\forall n \geq 0$ . Allora:

1.  $x^n$  converge uniformemente a 0 su ogni insieme  $[-a, a]$ ,  $\forall a : 0 < a < 1$ .
2.  $x^n$  non converge uniformemente a 0 su  $(-1, 1)$ .

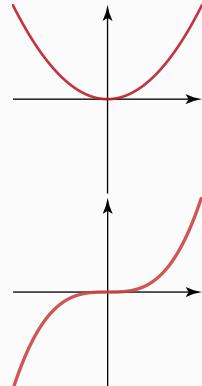
#### DIMOSTRAZIONE.

1. Sia  $a \in (0, 1)$  fissato e consideriamo

$$|x^n - 0| = |x^n| \implies \sup_{x \in [-a, a]} |x^n - 0| = \sup_{x \in [-a, a]} |x^n|$$

Qual è il grafico di  $x^n$ ?

- Se  $n$  pari, è visivamente simile a quello di  $x^2$ .



- Se  $n$  dispari, è visivamente simile a quello di  $x^3$ .

Siccome  $|x^n|$ ,  $\forall n \geq 2$  è una funzione pari, il grafico è visivamente simile a quello di  $x^2$ . Segue immediatamente che

$$\sup_{x \in [-a, a]} |x^n| = a^n, \quad \forall a : 0 < a < 1$$

Ora si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in [-a, a]} |x^n| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

perché  $a \in (0, 1)$  e quindi  $a^n$  è una successione geometrica convergente e pertanto il limite a  $+\infty$  è sempre necessariamente 0.

2. In questo caso, anche se non si ha il massimo, esiste l'estremo superiore

$$\sup_{x \in (-1, 1)} |x^n| = 1, \quad \forall n,$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in (-1,1)} |x^n| \right) = 1 \neq 0$$

pertanto *non c'è* convergenza uniforme su  $(-1, 1)$ .  $\square$

### 2.1.1 Eserciziamoci! Convergenza uniforme

**ESERCIZIO.**  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$  converge uniformemente a 0 su  $[0, 1]$ ?

**SOLUZIONE.** Dimostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} \right) = 0$$

Poiché

$$\sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} = \frac{x^n}{n} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

**ESERCIZIO.** Si consideri la successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f_n(x) = \frac{\sin(n!x^2)}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

Mostrare che la successione  $f_n$  converge uniformemente a zero su  $\mathbb{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si verifica immediatamente che vale la diseguaglianza

$$\textcircled{♦} \quad \left| \frac{\sin(n!x^2)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \geq 1$$

Da questa relazione, applicando il teorema del confronto per il calcolo dei limiti, si deduce che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n!x^2)}{n} = 0,$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Questo prova che la successione data converge *puntualmente*<sup>a</sup> a zero per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Dalla relazione  $\textcircled{♦}$  si deduce anche che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(n!x^2)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

e dunque, usando di nuovo il teorema del confronto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(n!x^2)}{n} \right| \right) = 0.$$

La successione data converge quindi uniformemente a zero su  $\mathbb{R}$ . □

---

<sup>a</sup>Daremo la definizione di questa convergenza successivamente, a pag. 18.

### 2.1.2 Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

Come nel caso delle successioni numeriche, esiste un **criterio di Cauchy** per la convergenza uniforme.

**TEOREMA 2.1.1. - CRITERIO DI CAUCHY PER LA CONVERGENZA UNIFORME.**

Siano  $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f_n$  converge uniformemente su  $A$  se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in A \quad (2.6)$$

□

**OSSERVAZIONE.** Il criterio di Cauchy è un *risultato teorico molto importante*, in quanto permette di mostrare la convergenza uniforme di una successione di funzioni *senza sapere* quale sia il limite come invece è necessario nella definizione di convergenza, in modo analogo a ciò che succede con il criterio di Cauchy per le *successioni numeriche*.

### 2.1.3 Visualizzazione della convergenza uniforme

Siamo abituati alle successioni numeriche  $v_n$  ed eventualmente a studiare il loro andamento in modo grafico, rappresentando sulle ascisse il numero  $n$  e sulle ordinate il valore  $v_n$ . Nel caso di successioni di funzioni l'argomento è una funzione, quindi per studiarle può essere utile proprio disegnare i grafici degli  $f_n$ , vedere come cambiano al variare di  $n$  e come convergono verso  $f$ .

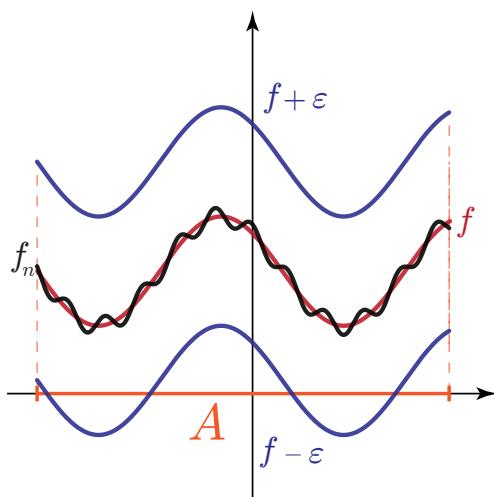
Come appare *visivamente* la convergenza uniforme? Possiamo riscrivere la condizione della convergenza uniforme

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

come

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \forall x \in A \text{ definitivamente} \quad (2.7)$$

In altre parole, scelto  $\varepsilon$ , trovo un  $N$  nella successione tale che definitivamente  $f_n$  deve essere compresa nell'**intorno tubolare** di  $f(x)$ , cioè le  $f_n$  devono stare in questo intorno per ogni  $n$  sufficientemente grande ( $\forall n \geq N$ ), quindi la striscia cattura globalmente tutte le  $f_n$  da un certo  $N$  in poi.



Visivamente, la successione geometrica **non** converge uniformemente su  $(-1, 1)$  a  $0$  perché non posso restringermi intorno alla funzione limite  $f(x) = 0$  per qualsiasi  $\varepsilon$  io scelga, infatti  $f_n(1) = 1, \forall n$ .

**DEFINIZIONE 2.1.6. - INTORNO TUBULARE .**

Un **intorno tubolare** di larghezza  $\varepsilon$  di una curva è l'unione di tutti i dischi di raggio  $\varepsilon$  con centro un punto di una curva.

**2.1.4 Generalizzazioni della convergenza uniforme**

Prima di tutto, ricordiamo le definizioni di norma e spazio normato.

**DEFINIZIONE 2.1.7. - SPAZIO NORMATATO E NORMA .**

Uno **spazio normato** è una coppia  $(X, \|\cdot\|)$  dove  $X$  è un spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  reale o complesso e  $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$  è una funzione detta **norma**, cioè tale che  $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$  essa soddisfi le seguenti proprietà:

1.  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**OSSERVAZIONE.** Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico se consideriamo la **metrica indotta dalla norma**, cioè la funzione data da  $d(x, y) := \|x - y\|$ .

Generalizziamo la definizione di convergenza uniforme considerando  $f_n, f : A \longrightarrow Y$ , con  $A$  insieme qualsiasi e  $Y$  uno spazio normato; se vogliamo che valga anche il criterio di Cauchy è necessario che  $Y$  sia anche uno spazio **completo**.

**DEFINIZIONE 2.1.8. - SUCCESSIONE DI CAUCHY .**

Una successione  $v_n \in X$  è **di Cauchy** in  $X$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N, d(v_n, v_m) < \varepsilon \quad (2.8)$$

**DEFINIZIONE 2.1.9. - SPAZIO COMPLETO .**

Uno spazio metrico è detto **completo** se tutte le successioni di Cauchy convergono.

**OSSERVAZIONE.** Una successione convergente è *sempre* di Cauchy, ma in generale *non tutte* le successioni di Cauchy convergono. L'implicazione opposta è vera solo se lo spazio è completo.

Possiamo ora, date queste nuove ipotesi, riformulare la convergenza uniforme.

**DEFINIZIONE 2.1.10. - CONVERGENZA UNIFORME, GENERALIZZATA .**

Siano  $f_n, f : A \longrightarrow Y$  con  $A$  insieme qualsiasi e  $Y$  spazio normato completo. Si dice che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon, \forall x \in A \quad (2.9)$$

**DIGRESSIONE.** Volendo, è possibile generalizzare ulteriormente parlando di convergenza uniforme per funzioni a valori in semplici **spazi metrici** (completi), sostituendo a  $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$  la condizione  $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ , infatti se non ci si trova in uno spazio vettoriale potrebbe non essere definita la differenza. Nei nostri studi non affronteremo ciò e ci limiteremo a considerare il caso di spazi normati (completi).

## 2.2 CONVERGENZA PUNTUALE DI FUNZIONI

Durante gli studi di CALCOLO DELLE PROBABILITÀ si è parlato di tre tipi di convergenze di successioni di variabili aleatorie: la **convergenza in probabilità**, la **convergenza quasi certa** e la **convergenza in legge** (o in distribuzione). Consideriamo ora quest'ultima, di cui riportiamo la definizione.

**DEFINIZIONE 2.2.1. - CONVERGENZA IN LEGGE .**

Dato  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$  spazio di probabilità e le variabili aleatorie  $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  con le corrispondenti *funzioni di distribuzione*

$$F_n : \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \\ x \longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F : \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \\ x \longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

allora si dice che  $X_n$  converge a  $X$  in legge  $\left( X_n \xrightarrow{d} X \right)$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ punto di continuità di } F. \quad (2.10)$$

Quello che abbiamo appena scritto non è altro che un'applicazione agli *studi probabilistici* della **convergenza puntuale** di una successione nel punto  $x$ .

**DEFINIZIONE 2.2.2. - CONVERGENZA PUNTUALE .**

Siano  $f_n, f : A \longrightarrow Y$  con  $A$  insieme qualsiasi e  $Y$  spazio normato (completo).  $f_n$  converge a  $f$  puntualmente in ogni punto di  $A$  se

$$\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad (2.11)$$

o, alternativamente,

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(x, \varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.12)$$

### 2.2.1 Confronto tra convergenza uniforme e puntuale

Prese  $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , confrontiamo le due convergenze viste fin'ora:

1. **(CU)**  $f_n$  converge a  $f$  **uniformemente** su  $A$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

2. **(CP)**  $f_n$  converge a  $f$  **puntualmente** in ogni punto di  $A$  se

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Il quantificatore esistenziale  $\exists$  implica che ciò che esiste dipende da tutto ciò che lo precede: nella convergenza puntuale  $N$  non dipende dal solo  $\varepsilon$  come così capita nella **convergenza uniforme**, ma anche da  $x$ . La convergenza uniforme è più restrittiva rispetto alla puntuale perché la soglia  $N$  è indipendente da  $x$ , quindi basta trovare un solo  $N$  che va bene per tutte le  $x \in A$  (ed è questo il motivo per cui  $\forall x \in A$  appare al fondo della formula), al contrario della convergenza puntuale in cui la soglia  $N$  dipende dalla  $x$  che consideriamo.

**OSSERVAZIONE.** Questa differenza è concettualmente analoga a quella che c'è fra continuità uniforme e continuità.

**OSSERVAZIONE.** Possiamo considerare  $\forall \varepsilon > 0$  due punti  $x'$  e  $x''$  su cui valutare la **soglia**  $N$  di un successione di funzioni: in questo caso abbiamo per il primo punto  $N(\varepsilon, x')$  e per il secondo  $N(\varepsilon, x'')$ . Vediamo subito che  $\max(N(\varepsilon, x'), N(\varepsilon, x''))$  è una soglia lecita sia per  $x'$  sia  $x''$ .

Finché si ha un numero finito di punti si può considerare il massimo, ma in generale se voglio passare dalla convergenza puntuale alla convergenza uniforme avendo un numero infinito di punti devo considerare

$$\sup_{x \in A} N(\varepsilon, x)$$

- Se  $\sup_{x \in A} N(\varepsilon)$  è finito, allora  $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = \max_{x \in A} N(\varepsilon) = N(\varepsilon)$  e c'è convergenza uniforme.
- Se  $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = +\infty$  allora non c'è convergenza uniforme.

Dalle definizioni segue immediatamente che

$$\begin{aligned} f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ su } A &\implies \\ &\implies f_n \text{ converge puntualmente a } f \text{ in ogni punto di } A \quad (2.13) \end{aligned}$$

ma in generale vale che la convergenza puntuale **non** implica la convergenza uniforme perché fissata la tolleranza  $\varepsilon$  la soglia  $N$  potrebbe cambiare al variare di  $x \in A$ .

**ESEMPIO - SUCCESSIONE GEOMETRICA E CONVERGENZA PUNTUALE.**

Consideriamo la successione geometrica  $f_n(x) = x^n$ ,  $\forall n \geq 0$ .

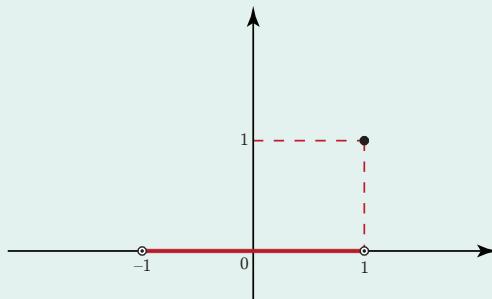
Dagli studi fatti nel corso di ANALISI 1 si ha  $\forall x \in \mathbb{R}$  fissato

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Allora  $x^n$  converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

in ogni punto di  $(-1, 1]$  e la funzione limite è discontinua.



Abbiamo provato precedentemente che  $f_n(x) = x^n$  converge uniformemente a  $f \equiv 0$  in ogni intervallo  $[-a, a] \subsetneq (-1, 1)$ ,  $\forall a \in (0, 1)$ , ma non converge uniformemente a  $f \equiv 0$  in  $(-1, 1)$ . Questo mostra che su  $(-1, 1)$  c'è convergenza puntuale ma non uniforme.

**OSSERVAZIONE.** Questo esempio mostra inoltre che la convergenza puntuale non è sufficiente in generale per trasferire la continuità alla funzione limite.

### 2.2.2 Eserciziamoci! Confronto tra convergenza uniforme e puntuale

**ESERCIZIO.** Si consideri la successione geometrica

$$f_n(x) = x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Utilizzando la definizione, dimostrare che essa non converge uniformemente su  $(-1, 1)$  e che converge uniformemente su ogni intervallo  $[a, b] \subsetneq (-1, 1)$ .

**SOLUZIONE.** La successione  $x^n$  converge puntualmente a zero per ogni  $x \in (-1, 1)$ , ossia

$$\text{◆} \quad \forall x \in (-1, 1), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N = N(\varepsilon, x), \quad |x^n| < \varepsilon.$$

Infatti, se  $x = 0$  per ogni  $\varepsilon > 0$  è sufficiente scegliere  $N(\varepsilon, 0) = 1$ ; se invece  $x \in (-1, 1)$ ,  $x \neq$

0, allora la relazione  $|x^n| < \varepsilon$  è soddisfatta se

$$n > \log_{|x|} \varepsilon = \frac{\log \varepsilon}{\log |x|}$$

supponendo, in modo non restrittivo, che  $\varepsilon < 1$ . La relazione  $\text{◆}$  è quindi verificata scegliendo

$$N(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log |x|} \right\rceil + 1,$$

dove le parentesi quadre indicano la parte intera.

Il grafico della funzione  $N(\varepsilon, \cdot)$  si ottiene facilmente a partire da quello della funzione  $\log |x|$ ; in particolare, si verifica che  $N(\varepsilon, \cdot)$  è decrescente su  $(-1, 0)$  e crescente su  $(0, 1)$  e che vale

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} N(\varepsilon, x) = +\infty.$$

Da queste considerazioni si deduce che

$$\sup_{x \in (-1, 1)} N(\varepsilon, x) = +\infty,$$

da cui segue che la successione non converge uniformemente su  $(-1, 1)$ .

Per ogni intervallo  $[a, b] \subsetneq (-1, 1)$  si ha invece

$$\sup_{x \in (-1, 1)} N(\varepsilon, x) = \max \{N(\varepsilon, a), N(\varepsilon, b)\}$$

posto allora

$$N(\varepsilon) = \max \{N(\varepsilon, a), N(\varepsilon, b)\},$$

per costruzione si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N(\varepsilon), |x^n| < \varepsilon, \forall x \in [a, b].$$

La successione converge quindi uniformemente su  $[a, b]$ .

**ESERCIZIO.** Dimostrare che nel caso di un insieme **finito** la convergenza puntuale è equivalente alla convergenza uniforme.

**SOLUZIONE.** Sia  $X$  un insieme finito,  $X = \{x_1, \dots, x_K\}$ , e siano  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ . La convergenza uniforme della successione  $f_n$  alla funzione  $f$  su  $X$  implica, come noto, la convergenza puntuale.

Viceversa, supponiamo che vi sia convergenza puntuale, ossia (tenuto conto del fatto che  $X = \{x_1, \dots, x_K\}$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_k) = f(x_k), \quad \forall k = 1, \dots, K.$$

Per definizione si ha quindi

$$\forall k = 1, \dots, K, \forall \varepsilon > 0, \exists N_k = N(\varepsilon, x_k) : \forall n \geq N_k, |f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Posto

$$N = \max\{N_k : k = 1, \dots, K\},$$

esso esiste sempre perché gli  $N_k$  sono finiti, dato che  $X$  è finito; si ha allora

$$\forall n \geq N : |f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon, \quad \forall k = 1, \dots, K,$$

ossia la convergenza uniforme su  $X$ .

### 2.3 PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ NEL CASO DI CONVERGENZA UNIFORME E PUNTUALE

Adesso studiamo il diverso comportamento delle due tipologie di convergenza viste rispetto alle proprietà di regolarità: se le funzioni  $f_n$  della successione sono limitate/continue/integrabili/differenziabili, la funzione limite  $f$  è limitata/continua/integrabile/differenziabile?

#### 2.3.1 Limitatezza

##### TEOREMA 2.3.1. - TEOREMA DI LIMITATEZZA PER SUCCESSIONI.

Siano  $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n$  limitata su  $[a, b]$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $[a, b]$ .

Allora  $f$  è limitata su  $[a, b]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo provare e  $f$  è limitata, ovvero che

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in A$$

Per l'ipotesi 2) sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A$$

Posto ad esempio<sup>a</sup>  $\varepsilon = 2$ , consideriamo la soglia  $N_2 = N(2)$  e  $n = N_2$ . Allora la relazione precedente risulta

$$|f_{N_2}(x) - f(x)| < 2, \quad \forall x \in A$$

Consideriamo  $f_{N_2}(x)$ : per l'ipotesi 1) è limitata, cioè

$$\exists M_2 > 0 : |f_{N_2}(x)| \leq M_2, \quad \forall x \in A$$

Per ogni  $x \in A$  si ha quindi

$$|f(x)| = |f(x) + f_{N_2}(x) - f_{N_2}(x)| \leq |f(x) - f_{N_2}(x)| + |f_{N_2}(x)| \leq 2 + M_2 = M, \quad \forall x \in A \quad \square$$

<sup>a</sup>La scelta di  $\varepsilon$  è arbitraria.

**DIGRESSIONE.** Il risultato si generalizza ponendo  $f_n, f : X \rightarrow Y$ , dove  $X$  è un qualunque insieme e  $Y$  è uno spazio normato.

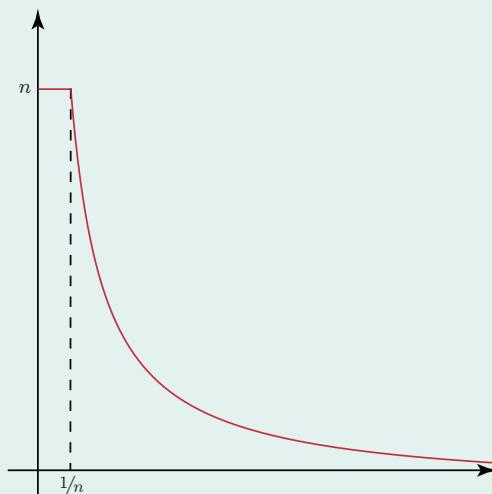
La convergenza puntuale **non** è sufficiente per trasferire la limitatezza alla funzione limite: infatti, possiamo costruire un controsenso di una successione  $f_n$  limitata che converge puntualmente ad una funzione non limitata.

**ESEMPIO.** Sia  $f_n : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\forall x \in (0, 1]$ .

Un grafico qualitativo di  $f_n$  è rappresentato in figura.



Per ogni  $n \geq 1$  la funzione  $f_n$  è limitata su  $(0, 1]$ . Inoltre,  $\forall x \in (0, 1]$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Infatti, fissato  $x \in (0, 1]$ , indicando con le parentesi quadre la *parte intera* e posto

$$n_x = \left[ \frac{1}{x} \right] + 1$$

allora se  $n \geq n_x$  si ha  $x > 1/n$  e dunque

$$f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Si ha dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

La successione di funzioni *limitate*  $f_n$  converge quindi puntualmente  $\forall x \in (0, 1]$  alla funzione  $\frac{1}{x}$  che **non** è limitata su  $(0, 1]$ .

**TEOREMA 2.3.2. - TEOREMA DI CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI .**

Siano  $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n$  continua su  $[a, b]$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $[a, b]$ .

Allora  $f$  è continua su  $[a, b]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x_0 \in [a, b]$  fissato. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Per l'ipotesi 2) sappiamo che  $f_n$  converge uniformemente; allora, fissato  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Questa relazione chiaramente vale anche per  $x_0$ :

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Per l'ipotesi 1) ogni  $f_n$  è continua in  $x_0$ , in particolare  $f_N$  lo è. Per definizione di continuità, considerato sempre lo stesso  $\varepsilon > 0$  di prima  $\exists \delta > 0$  tale che se  $|x - x_0| < \delta$  si ha

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Quindi, se  $|x - x_0| < \delta$  abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \square$$

**DIGRESSIONE.** Il risultato si generalizza ponendo  $f_n, f : X \longrightarrow Y$ , dove  $X$  è un qualunque insieme e  $Y$  è uno spazio normato.

La convergenza puntuale non è sufficiente per trasferire la continuità alla funzione limite: infatti, possiamo costruire un controsenso di una successione  $f_n$  continua che converge puntualmente ad una funzione non continua.

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione geometrica  $f_n(x) = x^n$ ,  $n \geq 1$ , sull'intervallo  $[0, 1]$ .

Sappiamo che essa converge puntualmente in ogni punto di  $[0, 1]$  alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

La successione di funzioni *continue*  $f_n$  converge quindi puntualmente per ogni  $x \in [0, 1]$  alla funzione  $f$  che **non** è continua su  $[0, 1]$ .

### 2.3.3 Integrabilità e passaggio al limite sotto segno di integrale

D'ora in avanti indicheremo con  $\mathcal{R}([a, b])$  l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$ .

**TEOREMA 2.3.1. - TEOREMA DI INTEGRABILITÀ PER SUCCESSIONI, PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE.**

Siano  $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $[a, b]$ .

Allora

1.  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .
2. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (2.14)$$

□

Vedremo la dimostrazione di una versione più generica del teorema quando parleremo degli integrali di Lebesgue.

**OSSERVAZIONE.** Nel caso di un intervallo *illimitato* la convergenza uniforme

- *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, e non è necessaria neanche nel caso limitato
- *non* è condizione sufficiente per trasferire alla funzione limite l'integrabilità

Inoltre la convergenza puntuale *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, nemmeno nel caso di un intervallo limitato.

**ESEMPI.** Per quanto questo teorema ha una notevole importanza, ha un campo d'azione particolarmente limitato. Infatti, anche cambiando leggermente le ipotesi non è più possibile affermare la tesi. Vediamo alcuni di questi controesempi.

1. La convergenza **uniforme** *non* è **sufficiente** per trasferire alla funzione limite l'integrabilità su un intervallo *illimitato*.
2. La convergenza **uniforme** *non* è condizione **necessaria** per il passaggio al limite sotto segno di integrale.
3. La convergenza **uniforme** *non* è condizione **sufficiente** per il passaggio al limite sotto il segno di integrale nel caso in un intervallo *illimitato*.
4. La convergenza **puntuale** *non* è condizione **sufficiente** per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, *nemmeno* nel caso di un intervallo *limitato*.

**DIMOSTRAZIONE.**

I Consideriamo la successione di funzioni  $f_n : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f_n(x) = \frac{n}{nx + x^2}, \quad \forall x \geq 1, n \geq 1$$

Per ogni  $x \geq 1$  osserviamo che  $f_n(x) \sim \frac{n}{nx}$  per  $n \rightarrow +\infty$ , quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{nx} = \frac{1}{x}$$

Si ha quindi convergenza puntuale in ogni punto di  $[1, +\infty)$  alla funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Inoltre, la convergenza è uniforme su  $[1, +\infty)$ : vale infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n}{nx + x^2} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{n+x}$$

per ogni  $x \geq 1, n \geq 1$ . Per *monotonía*, si ha quindi

$$\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 1} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 1$$

Deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

da cui segue la convergenza uniforme su  $[1, +\infty)$ . Osserviamo ora che per ogni  $n \geq 1$  si ha

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^2}, \quad x \rightarrow +\infty$$

e dunque  $f_n$  è integrabile in senso improprio su  $[1, +\infty)$ , per ogni  $n \geq 1$ ; la funzione limite  $f(x) = \frac{1}{x}$  non è invece integrabile in senso improprio su  $[1, +\infty)$ . La successione di funzioni  $f_n$  integrabili su  $[1, +\infty)$  converge quindi uniformemente su  $[1, +\infty)$  alla funzione  $f$  che non è integrabile su  $[1, +\infty)$ .

- II Consideriamo la successione di funzioni  $f_n(x) = x^n$  definite su  $[0, 1]$ . Osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Invece, sappiamo che  $x^n$  converge puntualmente in ogni punto di  $[0, 1]$  alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

dunque su  $[0, 1]$   $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  è una funzione identicamente nulla tranne un numero finito di punti (in questo caso, uno soltanto). Allora

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$x^n$  non converge uniformemente su  $[0, 1]$ , ma il passaggio al limite sotto segno di integrale si verifica comunque.

- III Sia  $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{se } x < n \vee x > 2n \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^n 0 dx + \int_n^{2n} \frac{1}{n} dx + \int_{2n}^{+\infty} 0 dx \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{n} dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{n} \right]_n^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n - n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

Invece, si vede immediatamente che

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$$

Vediamo che  $f_n$  converge uniformemente su  $[0, +\infty)$  a 0:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| &= \frac{1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in [0, +\infty)} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

Anche aggiungendo al teorema l'ipotesi che  $f(x)$  sia Riemann-integrabile (in questo caso ciò è verificato), il passaggio al limite sotto segno di integrale *non* si verifica *necessariamente* se l'intervallo è illimitato.

- IV Consideriamo la successione di funzioni  $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$  definite su  $[0, 1]$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n(-2x)(1-x^2)^n dx = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[ \frac{1}{n+1} (1-x^2)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Invece, osserviamo che, se abbiamo fissato  $x$  rispetto alla  $n$ , allora  $nx(1-x^2)^n = x \frac{(1-x^2)^n}{\frac{1}{n}}$  si può vedere come il rapporto di un esponenziale di ragione (in modulo) minore di 1 con il reciproco di un termine lineare, dunque per  $n \rightarrow +\infty$  l'esponenziale tende a 0 molto più velocemente di  $\frac{1}{n}$ : segue che

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} nx(1-x^2)^n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

Per lo stesso ragionamento si vede che  $f_n(x)$  converge puntualmente a 0 per ogni punto di  $[0, 1]$ , ma *non* si verifica il passaggio al limite sotto segno di integrale.  $\square$

#### 2.3.4 Derivabilità

Date  $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $f$  la funzione limite di  $f_n$  su  $A$ , possiamo porci due domande:

1.  $f_n$  derivabile su  $A \implies f$  derivabile su  $A$ ?
2. Vale lo scambio tra derivata e limite?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = D \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

O, in altre parole, il diagramma seguente è commutativo?

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{D} & f'_n \\ \lim \downarrow & & \downarrow \lim \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n & \xrightarrow{D} & \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n \end{array}$$

La risposta ad entrambe domande, a differenza di quanto ci si potrebbe aspettare dati i risultati su limitatezza, continuità e integrabilità, è **NO**, anche nel caso di *convergenza uniforme*.

**ESEMPIO - LA CONVERGENZA UNIFORME NON È CONDIZIONE SUFFICIENTE PER TRASFERIRE ALLA FUNZIONE LIMITE LA DERIVABILITÀ .**

Consideriamo la successione  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

- $f_n$  è derivabile.
- $f_n$  abbiamo visto<sup>a</sup> converge uniformemente su  $\mathbb{R}$  a  $f(x) = |x|$  che non è derivabile in  $x = 0$ .

<sup>a</sup>Si veda pag. 13.

**ESEMPIO - LA CONVERGENZA UNIFORME NON È CONDIZIONE SUFFICIENTE PER POTER SCAMBIARE LIMITE E DERIVATA, ANCHE SE SI AGGIUNGE L'IPOTESI CHE LA FUNZIONE LIMITE SIA DERIVABILE .**

Consideriamo la successione  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

- $f_n$  è derivabile su  $\mathbb{R}$ ,  $\forall n \geq 1$ , e vale

$$f'(x) = \sqrt{n} \cos(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1$$

- ◇  $f_n$  converge **puntualmente** a  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{limitato}}} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{limitato}} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- ◇  $f_n$  converge **uniformemente** a  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Osserviamo che in entrambi i casi  $f(x) = 0$  su  $\mathbb{R}$ : questa funzione è chiaramente derivabile e vale

$$D \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = D(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'altro canto, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cos(nx)$$

Ad esempio, per  $x = 0$  troveremmo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Quindi non si può per  $x = 0$  scambiare limite e derivata-

Esiste comunque un legame tra *successioni di funzioni*, *derivabilità* e convergenza uniforme; scopriamo che non è più la successione  $f_n$  a dover convergere uniformemente, bensì sono le derivate  $f'$  delle successioni a doverlo fare.

**TEOREMA 2.3.3. - TEOREMA DI DERIVABILITÀ PER SUCCESSIONI DI FUNZIONI .**

Siano dati  $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  tali che

1.  $f_n$  derivabili su  $(a, b)$ .
2.  $\exists c \in (a, b) : f_n(c)$  converge puntualmente.
3.  $f'_n$  converge uniformemente a  $g$  su  $(a, b)$ .

Allora

1.  $\exists f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $(a, b)$ .
2.  $f$  è derivabile.
3.  $f'(x) = g(x), \forall x \in (a, b)$ , ossia

$$D \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in (a, b) \quad (2.15)$$

Per dimostrare il teorema, faremo uso di tre strumenti: il *criterio di Cauchy per la convergenza uniforme*<sup>1</sup>, il *teorema di scambio di limiti* e una conseguenza *teorema di Lagrange*. Enunciamo questi ultimi due.

**TEOREMA 2.3.2. - TEOREMA DI SCAMBIO DI LIMITI .**

Dati  $g_n, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $c$  punto di accumulazione di  $I$ , se

1.  $g_n$  converge uniformemente a  $g$  su  $I$
2. Per ogni  $n \geq 1$  esiste  $L_n \in \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow c} g_n(x) = L_n$$

Allora:

1. Esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n \quad (2.16)$$

2. Vale la relazione

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n \quad (2.17)$$

ossia

$$\lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow c} g_n(x) \quad (2.18)$$

□

**COROLLARIO 2.3.1. - CONSEGUENZA AL TEOREMA DI LAGRANGE .**

Sia  $h : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $(\alpha, \beta)$ . Allora:

$$\forall u, v \in (\alpha, \beta), |h(u) - h(v)| \leq \left( \sup_{x \in (\alpha, \beta)} |h'(x)| \right) |u - v| \quad (2.19)$$

□

**DIMOSTRAZIONE (DEL TEOREMA DI DERIVABILITÀ PER SUCCESSIONI DI FUNZIONI).**

1. Dimostriamo la convergenza uniforme di  $f_n$  su  $(a, b)$ . Per il Criterio di Cauchy per

<sup>1</sup>Si veda il teorema 2.1.1, pag. 16.

la convergenza uniforme è sufficiente dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N, \sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Sia  $\varepsilon > 0$ . Per ogni  $x \in (a, b)$ , preso  $c$  come da ipotesi 2):

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_n(c) - f_m(c)|$$

Studiamo il *primo addendo*. Per il *corollario al teorema di Lagrange* si ha

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| \leq \left( \sup_{x \in (a,b)} |x - c| \right)$$

Inoltre, poiché per ipotesi 3)  $f'_n$  converge uniformemente su  $(a, b)$ , si ha per il criterio di Cauchy che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_1, \sup_{x \in (a,b)} |f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Segue dunque che

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| &\leq \left( \sup_{t \in (a,b)} |x - c| \right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - c| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in (a, b), \forall n, m \geq N_1 \end{aligned}$$

Per il *secondo addendo*, dato che per ipotesi 2)  $f_n$  converge puntualmente in  $c$ , possiamo applicare il criterio di Cauchy per le successioni:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_2, |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posto  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , per ogni  $n, m \geq N$  si ha

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_n(c) - f_m(c)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Da cui segue:

$$\sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

2. Denominiamo  $f$  il limite *puntuale* di  $f_n$ , che esiste e coincide con quello uniforme per la dimostrazione appena fatta al punto 1). Riscriviamo la tesi 2) e 3) nella seguente maniera:

- b. Per ogni  $d \in (a, b)$  vale  $\lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d}$
- c.  $\lim_{x \rightarrow d} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow d} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d}$ .

Verifichiamo le ipotesi del *teorema di scambio dei limiti*:

- $\lim_{x \rightarrow d} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d}$  esiste *finito* in quanto per ipotesi 1) gli  $f_n$  sono *derivabili* su  $(a, b)$ .
- $\frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d}$  converge *uniformemente* su  $(a, b) \setminus \{d\}$ .  
Infatti, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $x \in (a, b) \setminus \{d\}$  si ha, in virtù del *corollario al teorema di Lagrange*

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} - \frac{f_m(x) - f_m(d)}{x - d} \right| &\leq \left| \frac{f_n(x) - f_m(x) - (f_n(d) - f_m(d))}{x - d} \right| \leq \\ &\leq \sup_{t \in (a, b)} |f'_n(t) - f'_m(t)| \end{aligned}$$

Inoltre, si applica il *criterio di Cauchy* alle successione  $f'_n$ : per ogni  $\varepsilon > 0$   $\exists N = N_0$  tale che per ogni  $\forall n, m \geq N$  vale

$$\sup_{t \in (a, b)} |f'_n(t) - f'_m(t)| < \varepsilon$$

da cui segue

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} - \frac{f_m(x) - f_m(d)}{x - d} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{d\}$$

Per il *criterio di Cauchy* sulla convergenza uniforme, c'è convergenza uniforme su  $(a, b) \setminus \{d\}$ . Il teorema di scambio dei limiti garantisce che il limite

$$\lim_{x \rightarrow d} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} \iff \lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d}$$

esiste *finito* (tesi 2) e vale lo *scambio di limite e derivata* (tesi 3).  $\square$



# CAPITOLO 3

# SERIE DI FUNZIONI

“«Sai fare le Addizioni?» chiese la Regina Bianca. «Che cosa fa uno più uno?»  
«Non lo so» rispose Alice. «Ho perso il conto»”

## *ATTRaverso lo specchio e quel che Alice vi trovò.*

**L**'IDEA delle serie di funzioni sorge naturalmente quando lavoriamo con i polinomi di Taylor. Per funzioni "classiche" - diciamo quanto meno non patologiche - incrementare il grado del polinomio aumenta la qualità dell'approssimazione, quindi sembra che se potessimo creare un polinomio di Taylor *infinito*, otterremmo precisamente la funzione originale... ma un polinomio infinito non è altro che una serie di potenze! Come vedremo, questa idea può effettivamente funzionare, ma richiede un po' di accorgimenti, in particolare per vedere come si trasmettono le proprietà della successione alla somma della serie. In questo capitolo introduciamo la trattazione del tema per generiche funzioni, con lo scopo di studiare proprio le proprietà di regolarità delle serie di funzioni.

### 3.1 SERIE IN UNO SPAZIO NORMATIVO

Prima di far ciò, ricordiamo le definizioni di serie a valori reali e di convergenza (assoluta) di una serie a valore reale.

### **DEFINIZIONE 3.1.1. - SERIE A VALORI REALI E CONVERGENZA DI UNA SERIE .**

Data una successione  $x_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 0$ , la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \quad (3.1)$$

è la somma di tutti gli elementi della successione.

Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**,

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k, \quad \forall n \geq 0 \quad (3.2)$$

si dice che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

**converge** se converge la successione  $s_n$ ; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad (3.3)$$

#### DEFINIZIONE 3.1.2. - CONVERGENZA ASSOLUTA .

Sia  $x_n$  una successione a valori reali. La serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$$

**converge assolutamente** in  $\mathbb{R}$  se converge la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| \quad (3.4)$$

#### TEOREMA 3.1.1. - CONVERGENZA ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE .

Ogni serie di numeri reali assolutamente convergente è anche semplicemente convergente.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

converge, per il *Criterio di Cauchy* per le serie<sup>a</sup> è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

Per ipotesi la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$$

converge: per il Criterio di Cauchy, si ha

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \\ ||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}|| = |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon \end{aligned}$$

D'altra parte, dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$$

Dalle ultime due relazioni si deduce immediatamente la prima relazione e dunque la tesi.  $\square$

*"Nelle "Note aggiuntive", a pagina 179 è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di Cauchy.*

**OSSERVAZIONE.** Il teorema appena dimostrato è una conseguenza della **completezza** di  $\mathbb{R}$ . Infatti, abbiamo usato il *criterio di Cauchy*, che si basa sul fatto che le successioni di Cauchy convergono sempre in  $\mathbb{R}$  e quindi proprio per la completezza dei reali. Se lo spazio *non* è completo si ottiene solo che la successione delle ridotte è di Cauchy, e senza la completezza dello spazio non possiamo affermare che convergono.

Il viceversa del teorema appena dimostrato non è valido, come segue dal seguente controsenso.

#### ESEMPIO - CONVERGENZA SEMPLICE NON IMPLICA CONVERGENZA ASSOLUTA .

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Essa non converge assolutamente in quanto la serie dei moduli diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che, essendo la **serie armonica**<sup>a</sup>, non converge. Tuttavia, la serie semplice è una serie a segni *alterni* e poiché

- $\frac{1}{n}$  è decrescente  $\forall n \geq 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

per il *criterio di Leibniz* la serie semplice converge. Pertanto, la convergenza semplice *non* implica la convergenza assoluta.

*"Nelle "Note aggiuntive", a pagina 183 è possibile trovare maggiori dettagli sulle serie notevoli.*

Prendiamo ora  $x_n \in X$ , con  $X$  un insieme generico. Per generalizzare la definizione di serie convergente abbiamo bisogno che su  $X$  si possano compiere i seguenti passaggi:

- Poter definire  $s_n$ , cioè è necessario sommare elementi di  $X$ .
- Poter definire la *convergenza* in  $X$ .

Se dotiamo l'insieme  $X$  di una struttura di **spazio normato** possiamo generalizzare ad una serie generale le definizioni precedentemente enunciate per le serie a valori reali: infatti, se  $X$  è spazio normato gode sia dell'essere uno *spazio metrico* (e quindi è spazio topologico di Hausdorff, il che permette di definire univocamente la convergenza della successione) sia dell'essere *spazio vettoriale* (che permette la somma di elementi).

#### DEFINIZIONE 3.1.3. - SERIE E CONVERGENZA DI UNA SERIE .

Data una successione  $x_n \in X$  in uno spazio normato,  $n \geq 0$ , la **serie**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

è la somma di tutti gli elementi della successione.

Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**,

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k \quad \forall n \geq 0 \quad (3.5)$$

si dice che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

**converge** se converge la successione  $s_n$ ; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad (3.6)$$

#### DEFINIZIONE 3.1.4. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  spazio normato e  $x_n$  una successione in  $X$ . La serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

**converge totalmente o assolutamente** in  $X$  se converge la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$$

Dall'osservazione a pag. 35 il teorema 3.1.1 necessita della *completezza* dei reali. Per generalizzarlo ci basta lavorare in *spazi normati completi*.

#### TEOREMA 3.1.2. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE .

Ogni serie in  $X$  spazio normato completo totalmente convergente è anche semplicemente convergente.

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è analoga a quella affrontata nel teorema 3.1.1: è sufficiente sostituire al valore assoluto  $|\cdot|$  la norma  $\|\cdot\|$ .  $\square$

In generale, il problema della convergenza in spazi normati è *inesplorato*, ma se lo spazio è *completo* possiamo passare per la *convergenza totale* e studiare una serie a valori reali tramite i criteri di convergenza<sup>1</sup> noti dall'ANALISI MATEMATICA UNO.

---

<sup>1</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 181 è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di convergenza delle serie a valori reali.

### 3.2 SERIE DI FUNZIONI

Consideriamo lo spazio  $X = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}) = \mathcal{C}([a, b])$  delle funzioni continue su un intervallo compatto con la *metrica lagrangiana*:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

In questo spazio, una serie convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ent}$$

si può scrivere, per definizione, come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

dove  $S_n$  è una successione di funzioni. Allora la condizione di convergenza di serie in  $X$  si può formulare come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathcal{C}([a, b]) \iff S_n \text{ converge con metrica lagrangiana in } \mathcal{C}([a, b])$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathcal{C}([a, b]) \iff S_n \text{ converge uniformemente in } \mathcal{C}([a, b])$$

Per la stessa osservazione fatte a pag. 12, per parlare di convergenza uniforme non sono necessarie né la *compattezza* di  $[a, b]$ , né la *continuità* delle funzioni.

Possiamo estendere la definizione di convergenza di una serie di funzioni per

$$f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con  $A$  insieme contenuto nei reali o, ancora più in generale, per funzioni del tipo

$$f_n : X \longrightarrow Y$$

dove  $X$  è un *insieme qualunque* e  $Y$  è uno **spazio normato completo**. Studieremo quindi in questo capitolo le **serie di funzioni**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

per studiare la *convergenza* di tali serie applicheremo le convergenze viste in precedenza alla *successione delle ridotte*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

**DEFINIZIONE 3.2.1. - CONVERGENZA DI UNA SERIE DI FUNZIONI .**

In queste definizioni la convergenza delle ridotte si trasferisce sulla convergenza della serie:

- **(CP)** La serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  **converge puntualmente** in  $x \in A$  se  $S_n(x)$  converge puntualmente in  $x \in A$ .
- **(CU)** La serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  **converge uniformemente** in  $x \in A$  se  $S_n(x)$  converge uniformemente su  $A$ .

**3.2.1 Il criterio di Weierstrass**

Per motivi che saranno chiari nel Capitolo 4 dedicato alle *serie di potenze*, in questa sottosezione lavoreremo nel   $\mathbb{C}$ .

Abbiamo dato la definizione di convergenza uniforme di una serie di funzione, ma essa non è di facile applicazione operativa. Infatti, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente su  $A \subseteq \mathbb{C}$  se e solo se, definita  $S(z)$  la funzione limite delle ridotte

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$$

essa vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{z \in A} |S_n(z) - S(z)| \right) = 0$$

Tuttavia, questa funzione richiede la conoscenza della *somma*  $S(z)$ , cosa che in generale *non* avviene. Usare direttamente il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme è sicuramente più conveniente, ma non è sempre semplice da verificare. Esiste tuttavia una condizione *sufficiente* che consente di provare la convergenza uniforme senza la conoscenza della somma limite.

**PROPOSIZIONE 3.2.1. - CRITERIO DI WEIERSTRASS .**

*Siano  $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  tale che*

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n \in \mathbb{R}: |f_n(z)| \leq c_n, \forall z \in A$ .
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  converge (come serie numerica).

*Allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$$

*converge uniformemente in  $A$ .*

□

**OSSERVAZIONE.** La dimostrazione utilizza il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.

**OSSERVAZIONE - SIGNIFICATO DEL CRITERIO .**

Le ipotesi 1) e 2) implicano immediatamente la convergenza puntuale (assoluta) della serie di potenze in ogni  $z \in A$ . Infatti, fissato  $z$  ho la relazione  $|f_n(z)| \leq c_n$ ; da questo vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

e, poiché la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

converge, allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)|$$

converge per criterio del confronto e quindi la serie di funzioni converge puntualmente. Quello che osserviamo nello specifico è che l'ipotesi 1) funge da *maggiorazione uniforme* della serie di funzioni su  $A$ , da cui possiamo ricavare, anche a partire dalla convergenza puntuale della serie, la convergenza uniforme su  $A$ .  $\times$

### 3.3 PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DI UNA SERIE DI FUNZIONI

Ci poniamo ora il problema di studiare come si modificano i teoremi di *limitatezza*, *continuità*, *integrabilità*, *integrità* e *derivabilità* visti nel Capitolo 2 nel caso delle *serie di funzioni*.

#### 3.3.1 Limitatezza

**TEOREMA 3.3.1. - TEOREMA DI LIMITATEZZA PER SERIE .**

Siano  $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n$  limitata su  $A$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$ .

Allora, posto

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in A,$$

$S(x)$  è limitata su  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La strategia è passare per la successione delle ridotte. Posto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad \forall x \in A,$$

si ha:

- $S_n$  limitata su  $A$ , poiché le  $f_k$  lo sono.
- $S_n$  convergente uniformemente a  $S$  su  $A$ .

Per il teorema di limitatezza per le successioni,  $S$  è limitata su  $A$ .  $\square$

### 3.3.2 Continuità

Notiamo immediatamente che il *teorema di continuità per le serie* è del tutto analogo al *teorema di limitatezza* appena dimostrato.

#### **TEOREMA 3.3.2. - TEOREMA DI CONTINUITÀ PER SERIE .**

Siano  $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n$  continua su  $A$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$ .

Allora, posto

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in A,$$

$S(x)$  è continua su  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La strategia è passare per la successione delle ridotte. Posto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad \forall x \in A,$$

si ha:

- $S_n$  continua su  $A$ , poiché le  $f_k$  lo sono.
- $S_n$  convergente uniformemente a  $S$  su  $A$ .

Per il teorema di continuità per le successioni,  $S$  è continua su  $A$ .  $\square$

### 3.3.3 Integrabilità e scambio tra integrale e serie

#### **TEOREMA 3.3.3. - TEOREMA DI INTEGRABILITÀ PER SERIE, SCAMBIO TRA INTEGRALE E SERIE .**

Sia  $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $[a, b]$ .

Allora, posto

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

si ha:

1.  $S \in \mathcal{R}([a, b])$ .
2. Vale lo **scambio tra integrale e serie**:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx \tag{3.7}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Posto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

si ha:

- $S_n \in \mathcal{R}([a, b])$ , poiché le  $f_k$  lo sono.
- $S_n$  convergente uniformemente a  $S$  su  $[a, b]$ .

Per il teorema di integrabilità per le successioni:

- $S \in \mathcal{R}([a, b])$  perché somma di funzioni integrabili.
- Vale il *passaggio al limite sotto segno di integrale* per la successione delle ridotte, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$$

Poiché l'*integrale di una somma finita* è uguale ad una *somma finita di integrali*, il primo membro dell'equazione può essere riscritto come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

e poiché

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx$$

otteniamo la tesi:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

□

### 3.3.4 Derivabilità

**TEOREMA 3.3.4. - DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE.**

Sia  $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  tale che

1.  $f_n$  derivabile su  $(a, b)$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$  converge
3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  converge uniformemente su  $(a, b)$ .

Allora:

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente su  $(a, b)$

Inoltre, detta  $f$  la funzione somma:

2.  $f$  è derivabile su  $(a, b)$
3. Vale la **derivazione termine a termine**:

$$f'(x) = D \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in (a, b) \quad (3.8)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si applica il teorema di derivazione alla successione delle ridotte

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall n \geq 1$$

Verifichiamo le ipotesi:

1.  $S_n$  è derivabile su  $(a, b)$ ,  $\forall n \geq 1$ , perché lo sono le  $f_k$  su  $(a, b)$ ,  $\forall k \geq 1$ .
2.  $S_n(c)$  converge perché  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$  converge per ipotesi.
3.  $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$  converge uniformemente su  $(a, b)$  per ipotesi.

Allora per il teorema di derivazione per le successioni si ha che

$$S_n(x) \text{ converge uniformemente su } (a, b)$$

ossia, per definizione, che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(x) \text{ converge uniformemente su } (a, b)$$

Inoltre, definita la somma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x), \quad \forall x \in (a, b),$$

si ha che  $f$  è derivabile su  $(a, b)$  e per il teorema di derivazione

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(x), \quad \forall x \in (a, b)$$
□

**OSSERVAZIONE.** La derivazione termine a termine si può interpretare anche come “la derivata della serie è la serie delle derivate”, estendendo così la regola delle somma finita delle derivate.

### 3.4 THE FULFILLING WORLD OF THE SPACE-FILLING CURVES

in questa sezione, il cui nome è in inglese per il puro scopo di fare un pessimo gioco di parole, è un piccolo approfondimento sulle cosiddette curve **space-filling** (traducibile in italiano come *curve riempi-spazio*).

Intuitivamente, quando pensiamo ad un curva, ci immaginiamo la traiettoria di un punto in movimento, o comunque un qualcosa *unidimensionale* nello spazio che sia estremamente *sottile*, senza *spessore*. Dato che questo concetto è un po' troppo vago per poterci lavorare matematicamente, Camille **Jordan** (1838-1992) nel 1887 la definì nel seguente modo:

#### DEFINIZIONE 3.4.1. - CURVA .

Una **curva** è una funzione continua il cui dominio è l’intervallo unitario  $[0, 1]$ .

Questa definizione, per quanto innocua essa sia, comporta una conseguenze importante:

dato che non ci sono condizioni sul *codominio* di tale funzione, esso di fatto può essere uno spazio topologico *arbitrario*!

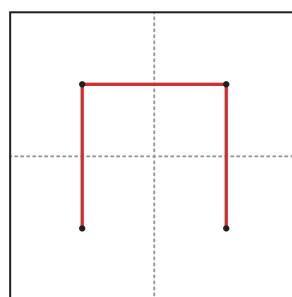
E infatti, nel 1890, il matematico torinese Giuseppe Peano (1858-1932) scoprì il primo caso di una curva continua che passa in *tutti* i punti del quadrato unitario  $[0, 1]^2$ . Questa curva, che ora viene chiamata in suo onore **curva di Peano**, è altamente contorta, essendo un'oggetto che non ha spessore ma che può comunque *riempire* il quadrato - da qui il nome **curva space-filling**.

#### DEFINIZIONE 3.4.2. - CURVA SPACE-FILLING .

Una **curva space-filling** è una curva il cui codominio contenga il quadrato unitario o, più genericamente, il plurintervallo  $n$ -dimensionale unitario  $[0, 1]^n$ .

L'anno successivo a Peano, David Hilbert (1862-1943) semplificò notevolmente l'idea di Peano e fornì la prima costruzione geometrica (e induuttiva) di una curva space-filling; noi descriveremo quest'ultima. Costruiamo una sequenza  $\gamma_n$  di curve piane, che fungeranno da iterazioni della curva di Hilbert.

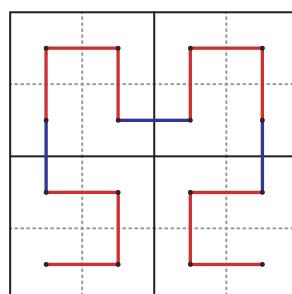
- **La curva  $\gamma_1$ :** consiste dei tre segmenti che connettono i vertici  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$  e  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$



- **La curva  $\gamma_2$ :** dividiamo il quadrato  $[0, 1]^2$  in quattro quadrati identici:

$$Q_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad Q_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad Q_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad Q_4 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

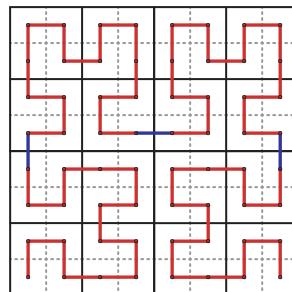
In ogni quadrato mettiamo la prima curva  $\gamma_1$  ridimensionata di un fattore  $1/2$  e la ruotiamo come in figura.



Nel primo quadrato è ruotata di  $90^\circ$  in senso orario, nel secondo e terzo quadrante rimane nella posizione originale, mentre nel quarto quadrato è ruotata  $90^\circ$  in senso antiorario. Per concludere, colleghiamo l'estremo finale della curva in  $Q_1$  con quello iniziale della curva  $Q_2$ ; ripetiamo il processo per le curve in  $Q_2$  e  $Q_3$  e per le curve in  $Q_3$  e  $Q_4$ .

I vertici della curva sono diventati  $16 = 4^2$  e si possono scrivere come  $\left(\frac{n}{2^3}, \frac{m}{2^3}\right)$ , dove  $n, m = 1, 3, 5, 7$ .

- **La curva  $\gamma_3$ :** si ripete la stessa costruzione vista al passo 2.



I vertici della curva sono diventati  $64 = 4^3$  e si possono scrivere come  $\left(\frac{n}{2^4}, \frac{m}{2^4}\right)$ , dove  $n$  e  $m$  sono i numeri dispari da 1 a  $2^4 - 1$ .

Questa successione di curve si può mostrare essere uniformemente convergente ad una curva limite  $\gamma$  - la vera e propria curva di Hilbert; per mostrare che  $\gamma$  è space-filling si può osservare che l'immagine della curva è un compatto chiuso in  $[0, 1]^2$  e che l'insieme dei punti  $\left(\frac{n}{2^k}, \frac{m}{2^k}\right)$  - dove  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n$  e  $m$  numeri dispari da 1 a  $2^k - 1$  - è denso in  $[0, 1]^2$ . Per costruzione della sequenza  $\gamma_n$  lo stesso si può dire dell'immagine di  $\gamma$ ; essa, essendo un sottoinsieme chiuso e denso nel quadrato, allora deve riempirlo.

Pur non avendo scritto esplicitamente l'espressione di  $\gamma_n$  e  $\gamma$ , preferendo mostrare l'approccio *geometrico* alla questione, è immediato capire che essere possono essere scritte come *somma* e *serie* di opportune funzioni: più in generale, un gran numero di curve space-filling sono esprimibili come serie di funzioni!

# CAPITOLO 4

## SERIE DI POTENZE

---

*“Se si trascurano i casi assolutamente più semplici, allora in tutta la matematica non c’è una singola serie infinita la cui somma è stata rigorosamente determinata. In altre parole, una delle parti più importanti della matematica sta in piedi senza alcun fondamento.”*

*NIELS HENRIK ABEL, deluso dal non poter trovare la somma delle sue serie preferite.*

**N**EL Capitolo 3 abbiamo iniziato definito cos’è una serie di funzioni; ora entriamo nel dettaglio studiando le **serie di potenze**. Come già accennato nel capitolo introduttivo e in quello precedente, lo scopo è quello di capire quando una funzione si può scrivere come la sua serie di Taylor.

Dopo averne dato la definizione di serie di potenze in campo complesso, affronteremo dei criteri per determinare il dominio di convergenza di esse, analizzeremo il comportamento al bordo del dominio e parleremo della continuità/derivabilità delle serie. La seconda parte del capitolo sarà invece dedicato alla trattazione delle **funzioni analitiche** - cioè proprio le funzioni che si possono scrivere come *serie di Taylor* - e di come dimostrare l’analiticità di una funzione; concluderemo con un approfondimento sull’**esponenziale** e il **logaritmo** complesso.

### 4.1 SERIE DI POTENZE

#### DEFINIZIONE 4.1.1. - SERIE DI POTENZE .

Una **serie di potenze** è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4.1)$$

con  $a_n$  numeri complessi (eventualmente dipendenti da  $n$ ),  $z_0 \in \mathbb{C}$  dato e  $z$  che varia in un insieme  $A$  detto **insieme di convergenza**, costituito da tutti i punti  $z$  in cui la serie converge.

Cambiando le variabili possiamo *centrare* la serie in  $z_0 = 0$  e dunque studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \dots \quad (4.2)$$

Chiaramente la serie così scritta converge in  $z = 0$  (o, se prendiamo la serie *non centrata* nell'origine, in  $z = z_0$ ), dato che la serie lì valutata ha termini *costantemente nulli* e quindi è banalmente convergente.

Ci interessa ora studiare qual è l'insieme in  $\mathbb{C}$  in cui tali serie convergono.

**TEOREMA 4.1.1. - INSIEME DI CONVERGENZA .**

Se una serie di potenze converge in  $z_0 \in \mathbb{C}$ , allora essa converge (assolutamente) in ogni punto  $z$  con  $|z| < |z_0|$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo dalle ipotesi che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$$

è convergente, quindi per la condizione necessaria di convergenza il termine  $a_n z_0^n$  tende a zero. Per definizione di limite significa che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, |a_n z_0^n| < \varepsilon$$

Scegliamo arbitrariamente  $\varepsilon = 1$ , cioè  $\exists N_1 = N(1) : \forall n \geq N$  vale  $|a_n z_0^n| < 1$ . Allora definitivamente vale

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

Poiché per ipotesi  $|z| < |z_0|$ , si ha  $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$  e quindi la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

converge. Per il criterio del confronto di serie segue che anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$$

è convergente e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

converge (assolutamente). □

Con questo non solo abbiamo dimostrato che se la serie di potenze converge in  $z_0$  allora la serie converge in tutti i punti  $z$  con  $|z| < |z_0|$ , ma implicitamente sappiamo anche che se la serie *non* converge in  $z_0$  allora *non* converge per  $|z| > |z_0|$ .

Infatti, se la serie non converge in  $z_0$  supponiamo *per assurdo* che esista  $z^*$ , con  $|z^*| > |z_0|$ , in cui la serie converge. Per il teorema appena dimostrato, in tutti i punti  $z$  con  $|z| < |z^*|$  la serie di potenze converge, ma fra questi è compreso anche  $z_0$  dove essa *non* converge.

### 4.1.1 Il raggio di convergenza

Per queste osservazioni l'insieme di convergenza della serie è un *cerchio* centrato nell'origine di un certo *raggio*  $R$ . Diamo una definizione formale di questo raggio.

#### DEFINIZIONE 4.1.2. - CERCHIO E RAGGIO DI CONVERGENZA .

Prendiamo l'insieme di convergenza della serie di potenze centrata in  $z_0 = 0$

$$A = \left\{ z \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \right. \right\} \subseteq \mathbb{C}$$

e consideriamo l'insieme

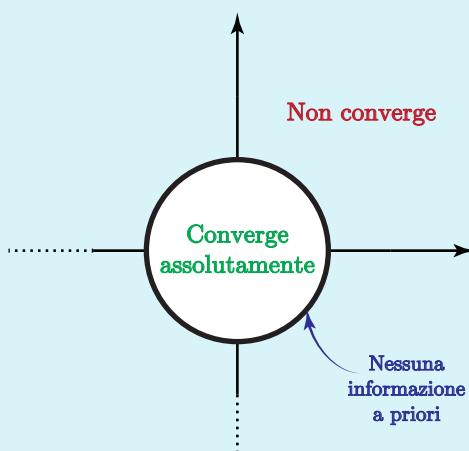
$$E = \{|z| \mid z \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

dato da tutti i moduli dei punti di convergenza della serie. Il **raggio di convergenza** è definito come

$$r := \sup E = \sup \left\{ |z| \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \right. \right\}$$

Esso può essere:

- $R = 0$ ; in tal caso la serie converge solo per  $z = 0$ .
- $R = +\infty$ ; in tal caso la serie converge per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .
- $0 < R < +\infty$ ; in base al teorema 4.1.1 la serie converge (assolutamente) per  $|z| < r$ , non converge per  $|z| > r$  e a priori non abbiamo *alcuna informazione* per i punti  $z$  sul *bordo*, cioè tali che  $|z| = r$ . L'*insieme di convergenza* risulta essere un **cerchio aperto** centrato nell'origine di raggio  $R$ , a cui si aggiungono eventualmente altri punti di convergenza sul *bordo* (tutti, nessuno o solo alcuni).



Poiché sappiamo che la serie converge assolutamente per  $|z| < r$ , lo studio del raggio di convergenza passa attraverso lo studio della serie assoluta associata

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$$

Per determinare il raggio di convergenza, possiamo ad esempio usare il **criterio di D'Alembert** o detto anche *criterio del rapporto*, che ci fornisce una condizione *sufficiente* su come determinare il raggio di convergenza.

**PROPOSIZIONE 4.1.1. - CRITERIO DI D'ALEMBERT O DEL RAPPORTO .**

Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

se  $a_n \neq 0$  definitivamente ed esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

allora

1.  $L = 0 \implies R = +\infty$
2.  $L = +\infty \implies R = 0$
3.  $0 < L < +\infty \implies R = 1/L$

□

Questa proposizione ha il vantaggio di essere operativamente utile, ma ovviamente solo se valgono le ipotesi: non è scontato che il limite del rapporto sia ben definito!

Un teorema più generale che vale per ogni serie è il criterio della radice o altresì noto come **teorema di Cauchy-Hadamard**.

**TEOREMA 4.1.2. - TEOREMA DI CAUCHY-HADAMARD .**

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

e sia

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (4.3)$$

Allora

1. Se  $\lambda = 0$ , la serie converge  $\forall z \in \mathbb{C}$ .
2. Se  $0 < \lambda < +\infty$ , la serie converge  $R = 1/\lambda$ .
3. Se  $\lambda = +\infty$ , la serie converge solo in  $z = 0$ .

**OSSERVAZIONE.** I tre casi scritti esauriscono tutti i casi possibili. Infatti, per la permanenza del segno del limsup<sup>a</sup> vale

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0, \forall n \geq 0 \implies \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$$

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina 191 è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato insieme ad altri relativi al limsup e liminf.

**DIMOSTRAZIONE (DEL TEOREMA DI CAUCHY-HADAMARD).**

II Partiamo dal dimostrare il punto 2): dobbiamo provare che  $R = \frac{1}{\lambda}$ , ossia

a. Se  $|z| < 1/\lambda$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  converge.

b. Se  $|z| > 1/\lambda$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  non converge.

Infatti, la condizione a. non basta per dimostrare che la convergenza è solo

all'interno del cerchio. Proviamo ora le due tesi.

- Sia  $z$  tale che  $|z| < 1/\lambda$ . Se  $z = 0$  la serie banalmente converge perché ogni serie converge nel suo centro.  
Se  $z \neq 0$ , vale  $\lambda < 1/|z|$ ; consideriamo allora  $\lambda'$  tale che  $\lambda < \lambda' < 1/|z|$ : poiché  $\lambda' > \lambda$ , per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$\text{◆} \quad \exists N : \forall n \geq N, \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda'$$

Proviamo che  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  converge assolutamente usando il criterio del confronto.

$$|a_n z^n| = |a_n| |z^n| = |a_n| |z|^n < (\lambda')^n |z|^n = (\lambda' |z|)^n, \quad \text{◆} \quad \forall n \geq N$$

Questo è il termine  $n$ -esimo della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda' |z|)^n$$

di ragione  $\lambda' |z|$ . Poiché  $0 < \lambda' |z| < 1$  per la scelta di  $\lambda'$ , la serie geometrica converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$$

e dunque converge anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

- Sia  $z$  tale che  $|z| > 1/\lambda$ . Per mostrare la non convergenza della serie proviamo che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z^n \neq 0, \quad \forall z : |z| > \frac{1}{\lambda}$$

Per questo è sufficiente mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| \neq 0, \quad \forall z : |z| > \frac{1}{\lambda}$$

Anche se  $\mathbb{C}$  è uno spazio metrico con la distanza indotta dal modulo, siamo passati da  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{R}$  col modulo in modo da utilizzare l'ipotesi del  $\limsup$ , la quale richiede uno spazio metrico ordinato (come è  $\mathbb{R}$ ).

Poiché  $z \neq 0$ , vale  $\lambda > 1/|z|$ . Consideriamo allora  $\lambda''$  tale che  $1/|z| < \lambda'' < \lambda$ : poiché  $\lambda'' < \lambda$ , per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$\text{◆} \quad \exists n_k \rightarrow +\infty : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \lambda''$$

Si ha, lungo la sottosuccessione:

$$\left| a_{n_k} z^{n_k} \right| = |a_n| z^{n_k} > (\lambda'')^{n_k} |z|^{n_k} \stackrel{\text{per la scelta di } \lambda''}{=} (\lambda'' |z| > 1)^{n_k} > 1, \forall n_k$$

Poiché esiste una sottosuccessione che è sempre maggiore di 1, deve esistere un valore limite della successione  $|a_n z^n|$  maggiore o uguale a 1. Ma allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| \neq 0$$

- I La dimostrazione del punto 1) è analoga alla prima parte della dimostrazione del punto 2). In questo caso, dobbiamo mostrare che la serie converge  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Se  $z = 0$ , la serie banalmente converge, mentre se  $z \neq 0$ , si ha chiaramente che  $0 = \lambda < 1/|z|, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Consideriamo allora  $\lambda'$  tale che  $0 < \lambda' < 1/|z|$ : poiché  $\lambda' > 0$ , per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$\exists N: \forall n \geq N \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda'$$

Proviamo che  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  converge assolutamente usando il criterio del confronto.

$$|a_n z^n| = |a_n| |z^n| = |a_n| |z|^n \stackrel{\text{◆}}{<} (\lambda')^n |z|^n = (\lambda' |z|)^n, \forall n \geq N$$

Questo è il termine  $n$ -esimo della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda' |z|)^n$$

di ragione  $\lambda' |z|$ . Poiché  $0 < \lambda' |z| < 1$  per la scelta di  $\lambda'$ , la serie geometrica converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$$

e dunque converge anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Poiché la scelta di  $z$  è stata *arbitraria*, vale la tesi.

- III La dimostrazione del punto 3) è analoga alla seconda parte della dimostrazione del punto 2). In questo caso, dobbiamo mostrare che la serie converge solo nel punto  $z = 0$ .

Se  $z = 0$ , la serie banalmente converge. Per mostrare la *non* convergenza della serie proviamo che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z^n \neq 0, \forall z \neq 0$$

Questo è equivalente<sup>a</sup> a mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| \neq 0, \forall z \neq 0$$

Dato  $z \neq 0$ , consideriamo allora  $\lambda''$  tale che  $1/|z| < \lambda'' < +\infty$ : poiché  $\lambda'' < +\infty$ , per la caratterizzazione del massimo limite si ha

(♣)  $\exists n_k \rightarrow +\infty: \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \lambda''$

Si ha, lungo la sottosuccessione:

(♣)  $|a_{n_k} z^{n_k}| = |a_n| z^{n_k} > (\lambda'')^{n_k} |z|^{n_k} \underset{\substack{\text{per la} \\ \text{scelta} \\ \text{di } \lambda''}}{=} (\lambda'' |z| > 1)^{n_k} > 1, \forall n_k$

Poiché esiste una sottosuccessione che è sempre maggiore di 1, deve esistere un valore limite della successione  $|a_n z^n|$  maggiore o uguale a 1. Ma allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| \neq 0$$

La scelta di  $z$  è arbitraria, purché  $z$  sia diverso da zero; per questo motivo vale la tesi.  $\square$

---

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina 193 è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato.

## 4.2 COMPORTAMENTO SUL BORDO

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_n, z \in \mathbb{C}$$

con raggio di convergenza finito e non nullo. I possibili comportamenti sul *bordo* del cerchio di convergenza sono i seguenti:

1. Convergenza in *tutti i punti* del bordo del cerchio di convergenza
  2. Non convergenza in *nessun punto* del bordo del cerchio di convergenza
  3. Convergenza solo in *alcuni punti* del bordo del cerchio di convergenza
- Mostriamo per ciascuno di essi un esempio.

### ESEMPIO - CASO 1.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

Con la formula di D'Alembert vediamo che il raggio di convergenza è  $R = 1$ . Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 = L \implies r = \frac{1}{L} = 1$$

Per ogni  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $|z| = 1$  la serie converge (assolutamente):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{n^\alpha} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^\alpha}$$

La serie in modulo è la *serie armonica generalizzata* che, per  $\alpha > 1$ , converge; la serie semplice converge su tutti i punti del bordo.

#### ESEMPIO - CASO 2 .

Consideriamo la *serie geometrica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$$

Poichè  $a_n \equiv 1$ ,  $\forall n$ , il criterio del rapporto ci fornisce come raggio di convergenza  $R = 1$ . Per ogni  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $|z| = 1$  la serie *non* converge: ricordiamo che, presa la successione  $c_n \in \mathbb{C}$ , vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n| \neq 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \neq 0$$

In questo caso:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} z^n \neq 0$$

È evidente che la *condizione necessaria* di convergenza *non* è soddisfatta: la serie *non* converge in nessun punto del bordo.

#### ESEMPIO - CASO 3 .

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

L'applicazione del criterio del confronto è esattamente analogo a quello visto nel caso 1 e il raggio di convergenza è pertanto  $R = 1$ .

Se  $z = 1$  la serie *non* converge, dato che essa diventa una serie armonica generalizzata con  $\alpha \leq 1$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Invece, per ogni  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $|z| = 1$  e  $z \neq 1$  la serie converge: infatti, possiamo applicare il *criterio di Abel-Dirichlet*.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \beta_n$$

con  $\alpha_n = z^n$  e  $\beta_n = 1/n^\alpha$ ,  $n \geq 1$ .

1.  $\beta_n = 1/n^\alpha$  è una successione di elementi strettamente positivi, decrescenti e infinitesima per  $n \rightarrow +\infty$ .

2. La successione delle somme parziali di  $\alpha_n = z^n$  è limitata. Consideriamo

$$\left| \sum_{n=1}^k z^n \right| = \left| \sum_{n=0}^k z^n - 1 \right| \square$$

Poiché

$$\sum_{n=0}^k z^n$$

è un serie geometrica parziale, sappiamo la sua somma parziale. Applicando poi una diseguaglianza triangolare, troviamo una maggiorazione della somma parziale di  $\alpha_n$ .

$$\square \left| \frac{1-z^{k+1}}{1-z} - 1 \right| = \left| \frac{z-z^{k+1}}{1-z} \right| \leq \frac{|z| + |-z^{k+1}|}{|1-z|} \leq \frac{1+1}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}, \forall k \geq 1$$

Osserviamo che, nonostante la serie converga, essa non converge assolutamente: la serie in modulo è la serie armonica generalizzata con  $\alpha \leq 1$ , nota per essere divergente.

Anche se in generale non possiamo affermare a priori come converge sul bordo si può osservare che, in alcuni casi particolari, dalla convergenza in un punto del bordo si ottiene la convergenza sull'intero bordo. Vediamo alcuni risultati.

**PROPOSIZIONE 4.2.1. - CONVERGENZA ASSOLUTA SUL BORDO SE LA SERIE DI POTENZE CONVERGE ASSOLUTAMENTE IN UN PUNTO .**

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

Se la serie converge assolutamente in un punto della frontiera del cerchio di convergenza, allora converge assolutamente su tutta questa frontiera.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che la serie converga assolutamente in  $z_0$ , dove  $|z_0| = R$  e prendiamo un qualunque  $z$  tale che  $|z| = R$ . Osserviamo che, presa la serie in modulo, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| R^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z_0|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n z_0^n|$$

che converge per ipotesi. Allora la serie di potenze converge assolutamente.  $\square$

**COROLLARIO 4.2.1. - CONVERGENZA SUL BORDO SE LA SERIE DI POTENZE A COEFFICIENTI REALI POSITIVI CONVERGE IN  $z = R$  .**

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

Se la serie ha coefficienti reali positivi e converge nel punto  $z = R$ , dove  $R \in (0, +\infty)$  è il raggio di convergenza, allora converge in ogni punto della frontiera del cerchio di convergenza.

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $a_n$  e  $R$  sono reali positivi,  $a_n = |a_n|$  e  $R = |R|$ . Allora si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n R^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n R^n|$$

Quindi in questo caso la convergenza semplice della serie implica la convergenza assoluta. Poiché la serie converge assolutamente in un punto del bordo, segue dalla proposizione precedente la convergenza (assoluta) in tutti i punti del bordo.  $\square$

### 4.3 SERIE DI POTENZE E CONVERGENZA UNIFORME

**TEOREMA 4.3.1. - CONVERGE UNIFORME DELLE SERIE DI POTENZE .**

Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

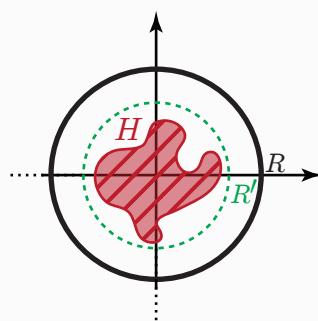
una serie di potenze con raggio di convergenza  $R \in (0, +\infty)$ . Allora

1. La serie converge uniformemente su ogni insieme  $H \subseteq \mathbb{C}$  tale che  $\overline{H} \subsetneq B_R(0)$ , con  $B_R(0)$  il disco aperto di convergenza, ovvero su qualsiasi insieme contenuto nel disco aperto tale che la sua chiusura non tocchi il bordo.
2. Se la serie converge assolutamente in ogni  $z \in \partial B_R(0)$  (il bordo del disco), allora converge uniformemente sul disco chiuso  $\overline{B_R}(0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per questa dimostrazione useremo il criterio di Weierstrass<sup>a</sup>.

1. Sia  $H$  tale che  $\overline{H} \subsetneq B_R(0)$ . Per il criterio di Weierstrass, per provare la convergenza uniforme su  $H$  è sufficiente provare che esiste una successione  $c_n$  tale che
  - a.  $|a_n z^n| \leq c_n, \forall z \in H$
  - b.  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  converge.

Poiché  $H$  è solo strettamente contenuto nel disco aperto di convergenza,  $\exists R' < R$  tale che si abbia  $\overline{H} \subseteq B_{R'}(0)$ , ossia  $|z| \leq R', \forall z \in H$ .



Allora si ha,  $\forall n \geq 0$  e  $\forall z \in H$

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq \underbrace{|a_n| (R')^n}_{\begin{array}{c} c_n \text{ non} \\ \text{dipende da } z \end{array}}$$

Inoltre, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (R')^n$$

converge in quanto è la convergenza della serie di potenze per il punto  $z = R'$ , che è *interno* al disco di convergenza  $B_R(0)$ . Applicando il criterio di Weierstrass otteniamo la tesi.

2. Si ripete la dimostrazione sull'insieme  $\overline{B_R(0)}$  con  $R' = R$ , considerando che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| R^n$$

converge per ipotesi sulla convergenza sul bordo. □

---

<sup>a</sup>Si veda Capitolo 3, sezione 3.2.1, pag. 38.

### ESEMPIO - SERIE GEOMETRICA .

Sulla serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

abbiamo già ricavato diverse informazioni: ha raggio di convergenza  $R = 1$  e *non c'è* convergenza (assoluta) sul bordo, inoltre ne conosciamo la somma. Studiamo ora la convergenza uniforme.

- Converge uniformemente su ogni insieme  $H$  tale che  $\overline{H} \subsetneq B_1(0)$  per il teorema precedente.
- Non avendo alcuna convergenza sul bordo, a priori *non* possiamo dare risultati generali sulla convergenza uniforme sulla base del teorema visto. Tuttavia, possiamo mostrare direttamente - grazie al fatto che la somma parziale è limite della serie geometrica è nota<sup>a</sup> - che la serie non converge uniformemente sul disco aperto  $B_1(0)$ . Infatti

$$\begin{aligned} \sup_{z \in B_1(0)} |S_n(z) - S(z)| &= \sup_{z \in B_1(0)} \left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z \in B_1(0)} \left| \frac{-z^{n+1}}{1-z} \right| = \\ &= \sup_{z \in B_1(0)} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = +\infty, \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{z \in B_1(0)} |S_n(z) - S(z)| \right) = +\infty \neq 0$$

---

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina 183 è possibile trovare maggiori dettagli sulla somma (parziale) della serie geometrica e come ricavarla.

#### 4.4 PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE

Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

una serie di potenze con  $R > 0$  il raggio di convergenza. Studiamo le proprietà di continuità e derivabilità della **funzione somma**

$$\begin{aligned} f : B_R(0) \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned} \tag{4.4}$$

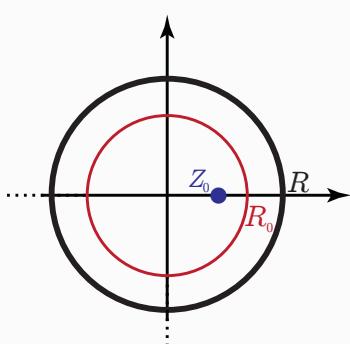
##### 4.4.1 Continuità

**PROPOSIZIONE 4.4.1.** - **PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ PER LA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE, CASO GENERALE.**

La funzione  $f$  è continua su  $B_R(0)$ .

**ATTENZIONE!** La convergenza della serie di potenze su  $B_R(0)$  non è in generale uniforme, ma sappiamo al più che converge uniformemente su  $H$  tale che  $\bar{H} \subsetneq B_R(0)$ , quindi dobbiamo tenere conto di questo fattore nelle dimostrazioni che faremo.

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo provare che  $f \in \mathcal{C}(B_R(0))$ , cioè  $f$  continua in  $z_0$ ,  $\forall z_0 \in B_R(0)$ . Sfrutto il fatto che la continuità è una proprietà locale, quindi fisso un punto e studio la continuità nel punto.



Sia  $z_0 \in B_R(0)$  fissato. Per proprietà della metrica, allora  $\exists R_0 < R$  tale che  $z_0 \in B_{R_0}(0)$ . Su  $B_{R_0}(0)$  si ha continuità uniforme e dunque, posto

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

si ha

1.  $S_n$  continua su  $B_{R_0}(0)$  perché è un polinomio.
2.  $S_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $B_R(0)$ .

Per il teorema di continuità della funzione limite,  $f$  è continua in  $B_{R_0}(0)$  e dunque in  $z_0$ .  $\square$

Questo risultato ci permette di parlare della convergenza sul disco aperto, ma se c'è qualche tipo di convergenza sul bordo, e quindi  $f$  è definita anche su di esso, si può estendere la continuità di  $f$  fino a tale frontiera? Studiamo due casi.

**COROLLARIO 4.4.1.** - **PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ PER LA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE, CASO SUL BORDO CON CONVERGENZA ASSOLUTA .**

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

con raggio di convergenza  $R > 0$ . Se la serie converge (assolutamente) su  $\partial B_R(0)$  allora la serie è continua su  $\overline{B_R}(0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Segue immediatamente ricordando che, dalle ipotesi di convergenza assoluta sul bordo, vale la convergenza uniforme su  $\overline{B_R}(0)$  sulla base del teorema 4.3.1.  $\square$

Se invece supponiamo che la serie converga in un punto<sup>1</sup>  $z_0$ , cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$$

converge, possiamo definire la **funzione somma** come

$$\begin{aligned} f : B_R(0) \cup \{z_0\} &\subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned} \tag{4.5}$$

La convergenza uniforme di  $f$  anche sui punti di convergenza  $z_0$  sul bordo ci viene garantita dal **teorema di Abel**.

**TEOREMA 4.4.1. - TEOREMA DI ABEL .**

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

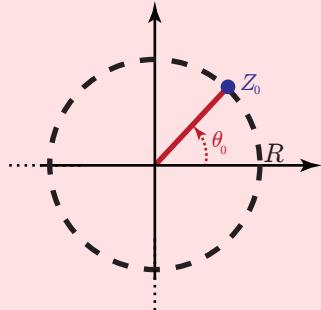
con raggio di convergenza  $R > 0$ . Se  $\exists z_0 = Re^{i\theta_0}$  (ovvero  $z_0$  sta nel bordo del raggio di convergenza) tale che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$$

converge, allora

---

<sup>1</sup>Nel caso di più punti di convergenza  $z_0, z_1, \dots$ , la funzione somma  $f$  sarà definita su  $B_R(0) \cup \{z_0\} \cup \{z_1\} \cup \dots$ . Qui riportiamo per semplicità il caso di un solo punto, ma i risultati successivi sono opportunamente generalizzabili con più punti di convergenza sul bordo.



1. la serie converge uniformemente sul segmento

$$\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\theta_0}, r \in [0, R]\} \quad (4.6)$$

2. La restrizione di  $f$  a  $\Sigma_0$  è continua su  $z_0$ , ossia

$$\lim_{r \rightarrow R} f(re^{i\theta_0}) = f(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n \quad (4.7) \quad \square$$

#### 4.4.2 Derivabilità

Abbiamo definito la funzione somma dal disco aperto  $B_R(0)$  in campo complesso a  $\mathbb{C}$ , ma al momento non conosciamo cosa vuol dire derivabilità di una funzione  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ . Per il momento, limitiamoci al caso reale, cioè consideriamo una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

con raggio di convergenza  $R > 0$ . In questo caso il cerchio di convergenza è un intervallo  $(-R, R)$ , con estremi eventualmente inclusi. La funzione somma risulta allora la funzione

$$\begin{aligned} f : (-R, R) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned} \quad (4.8)$$

#### TEOREMA 4.4.1. - DERIVABILITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE .

Sia data

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in (-R, R), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

con  $R > 0$  il raggio di convergenza. Allora

1.  $f$  è derivabile su  $(-R, R)$
2. La derivata di  $f$  è

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in (-R, R) \quad (4.9)$$

**OSSERVAZIONE.** Nell'equazione della derivata di  $f$  la sommatoria parte da  $n = 1$  in quanto il termine per  $n = 0$  è identicamente uguale a zero; inoltre, se così non fosse, il primo termine sarebbe  $a_0 \frac{1}{x}$ , che non è definito in  $x = 0$ , contraddicendo la prima delle due tesi.

Per dimostrare questo teorema useremo il *teorema di derivabilità* per serie di funzioni <sup>2</sup>: poiché le ipotesi di tale teorema 1) e 2) sono banalmente verificate, dobbiamo contrarci

<sup>2</sup>Si veda Capitolo 3, teorema 3.3.4, pag. 41.

sull'ipotesi 3), ovvero abbiamo bisogno di informazioni sulla convergenza uniforme della serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Poiché la serie delle derivate è ancora una serie di potenze, allora ci basta studiare il raggio di convergenza.

**LEMMA 4.4.1. - CONVERGENZA DELLA SERIE DI DERIVATE DELLA SERIE DI POTENZE .**

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

e sia  $R > 0$  il suo raggio di convergenza. Allora la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza  $R$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Riscriviamo la serie delle derivate, operando un cambio di indici ponendo  $n = k + 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(k+1) a_{k+1}}_{:= b_k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k a_k$$

Sia  $R'$  il suo raggio di convergenza. Per il teorema di Cauchy-Hadamard si ha

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |(n+1) a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(n+1)^{1/n}}_{:= \alpha_n} \underbrace{|a_{n+1}|^{1/n}}_{:= \beta_n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \beta_n \quad \square$$

Otteniamo così il prodotto di due successioni. Osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \log(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log(n+1)}{n}}.$$

Poichè  $\frac{\log(n+1)}{n} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  per confronto della crescita degli infiniti, si ha che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e^0 = 1$ , dunque  $\alpha_n$  ammette limite e coincide col suo  $\limsup$ . Allora, per proprietà del  $\limsup$  del prodotto<sup>a</sup>

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \limsup_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

Ora applichiamo Cauchy-Hadamard alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

con raggio di convergenza  $R > 0$ :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}.$$

Dato che  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$  per  $n \rightarrow +\infty$ , allora abbiamo mostrato che

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{R}$$

cioè  $R' = R$ . □

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina 191 è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato insieme ad altri relativi al limsup e liminf.

Grazie a questo lemma, possiamo finalmente dimostrare il teorema lasciato in sospeso all'inizio della sezione.

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo  $\bar{x} \in (-R, R)$  arbitrario e sia  $(a, b)$  tale che

- $\bar{x} \in (a, b)$ .
- $[a, b] \subsetneq (-R, R)$

Applichiamo ora il teorema di derivabilità termine a termine della serie di funzioni su  $(a, b)$  sulla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Vediamo che le ipotesi sono verificate:

- $f_n(x) = a_n x^n$  derivabile in  $(a, b)$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge  $\forall x \in (a, b)$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  converge uniformemente su  $(a, b)$  per la scelta di  $(a, b)$ , sulla base del lemma precedentemente dimostrato.

Per il teorema di derivabilità termine a termine  $f$  è derivabile in  $(a, b)$  e dunque anche in  $\bar{x}$ , con derivata in tal punto

$$f'(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \bar{x}^{n-1}$$

Per l'arbitrarietà di  $\bar{x}$ , questi risultati valgono  $\forall x \in (-R, R)$  e dunque segue la tesi. □

#### 4.5 FUNZIONI ANALITICHE E SERIE DI TAYLOR

La tesi 2) appena dimostrata ci dice che la derivata  $f'$  è una somma di serie di potenze con stesso raggio di convergenza  $R$  di  $f$ . Possiamo riapplicare il teorema alla funzione  $f'$ , notando però che la serie inizia da  $n = 2$ :

- $f'$  è derivabile in  $(-R, R)$ .
- $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ ,  $\forall x \in (-R, R)$ .

Ma anche  $f''$  è una serie di potenze con raggio  $R$ : possiamo riapplicare il teorema su  $f''$  e ammettere l'esistenza di  $f'''$  come serie di potenze. Iterando il ragionamento, si trova che esiste  $f^{(k)}(x)$ ,  $\forall x \in (-R, R)$ ,  $\forall k \geq 0$  e vale

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \quad \forall x \in (-R, R) \quad (4.10)$$

Esplicitiamo il primo termine di  $f^{(k)}(x)$ :

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= k(k-1)\dots(k-k+1)a_k x^0 + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \\ &= k!a_k + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \end{aligned}$$

Valutando in  $x = 0$  otteniamo

$$f^{(k)}(0) = k!a_k + 0 = k!a_k$$

Da cui otteniamo una espressione del termine  $a_k$  in funzione della derivata  $k$ -esima, supponendo che esiste tale derivata:

$$a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}, \quad \forall k \geq 0 \quad (4.11)$$

Riscriviamo questi risultati in un unico teorema.

**TEOREMA 4.5.1. - ANALITICITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE .**

Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

con raggio di convergenza  $R > 0$  e sia  $f$  la sua somma. Allora

1.  $f \in \mathcal{C}^\infty((-R, R))$ .
2. La derivata  $k$ -esima è nella forma

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \quad \forall x \in (-R, R) \quad (4.12)$$

3. Il coefficiente  $a_k$  si può scrivere come

$$a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}, \quad \forall k \geq 0 \quad (4.13)$$

4.  $f$  è analitica in 0, ossia si può scrivere come una serie di Taylor di  $f$  centrata in  $x = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k, \quad \forall x \in (-R, R) \quad (4.14)$$

Diamo una definizione formale del termine "funzione analitica" che abbiamo appena usato nel teorema, notando che l'analiticità è un concetto locale, cioè vale nell'intorno di un punto.

**DEFINIZIONE 4.5.1. - FUNZIONE ANALITICA .**

Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ .

1. Dato  $x_0 \in U$ ,  $f$  si dice **analitica** in  $x_0$  se  $\exists r_0 > 0$  tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0) \subseteq U$$

2.  $f$  si dice **analitica in  $U$**  se è analitica in ogni punto  $x_0 \in U$ . In questo caso si scrive  $f \in \mathcal{A}(U)$ .

Il problema della *ricostruzione* di una funzione come somma della sua serie di Taylor, introdotto nello studio della lunghezza dell'ellisse nel Capitolo 1, si può anche formulare come

“Ogni funzione  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  è anche analitica su  $U$ ?”

ossia

$$f \in \mathcal{C}^\infty(U) \stackrel{?}{\implies} f \in \mathcal{A}(U)$$

In generale la risposta è **no**, come possiamo vedere nell'esempio successivo.

**ESEMPIO - CONTROESEMPIO DI UNA FUNZIONE  $\mathcal{C}^\infty$  NON ANALITICA .**

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Innanzitutto, mostriamo che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ :

- $f$  è certamente di classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .
- Dimostriamo che esiste  $f^{(k)}(0)$ ,  $\forall k \geq 0$ , che essa sia uguale a 0 per ogni  $k$  e che  $f^{(k)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ,  $\forall k \geq 0$ .

Per far ciò, innanzitutto mostriamo per *induzione* su  $k$  che per ogni  $k \geq 0$  esiste un polinomio  $P_{3k}$  di grado  $3k$  tale per cui

$$f^{(k)}(x) = P_{3k}(x^{-1}) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \neq 0$$

La relazione è banalmente vera per  $k = 0$ . quindi proviamo ora il passo induttivo: supponiamo che sia vera la relazione per ogni intero minore o uguale a  $k$  e dimostriamo che è vera per  $k+1$ . A tal fine deriviamo la relazione corrispondente all'interno  $k$ , ottenendo

$$f^{(k+1)}(x) = -P'_{3k}(x^{-1})x^{-2}e^{-1/x^2} + 2x^{-3}P_{3k}(x^{-1})e^{-1/x^2}, \quad \forall x \neq 0$$

e dunque

$$f^{(k+1)}(x) = Q(x^{-1})e^{-1/x^2}, \quad \forall x \neq 0,$$

dove

$$Q(u) = -u^2 P'_{3k}(u) + 2u^3 P_{3k}(u), \quad \forall u \neq 0$$

Osserviamo che  $P'_{3k}$  è un polinomio di grado  $3k-1$ ; si ricava quindi che  $u^2 P'_{3k}(u)$  è un polinomio di grado  $3k+1$ , mentre  $2u^3 P_{3k}(u)$  è un polinomio di grado  $3k+3$ .

Concludiamo che  $Q$  è un polinomio di grado  $3k + 3 = 3(k + 1)$ , come richiesto. Utilizzando i *confronti di crescita*, dalla relazione appena mostrata si vede che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} P_{3k}(x^{-1}) e^{-1/x^2} = 0, \quad \forall k \geq 0$$

e dunque esiste  $f^{(k)}(0)$ , per ogni  $k \geq 0$ , e si ha  $f^{(k)}(0) = 0$ . Inoltre, la funzione  $f^{(k)}$  è continua in  $x = 0$ , per costruzione; concludiamo quindi che  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Tuttavia,  $f \notin \mathcal{A}(\mathbb{R})$ . Infatti, la serie di Taylor centrata in  $x_0 = 0$  è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0}{k!} x^k \equiv 0$$

che sì converge, ma *non* a  $f$ , ossia  $f(x) \neq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \forall x \neq 0$ .

Bisogna quindi capire sotto quali ipotesi ulteriori una funzione di classe  $\mathcal{C}^\infty$  è anche analitica, ovvero si può scrivere come somma della sua serie di Taylor: in particolare dobbiamo verificare che la serie innanzi tutto converga e che converga alla  $f$  voluta (il che non è successo nell'esempio precedente). Cerchiamo a tal scopo una condizione *sufficiente*. Riprendiamo il problema come era stato posto originalmente; approssimiamo  $f$  con il *polinomio* di Taylor, tenendo conto del *resto*  $R_n(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

Per passare da questa approssimazione alla riscrittura di  $f$  come *serie* di Taylor è necessario ridurre il resto dell'approssimazione a zero al crescere dei termini del polinomio, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

Ricordiamo l'espressione del resto in *forma di Lagrange*, che è di tipo quantitativo:

$$\exists \xi = \xi_{x,n} : R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

La condizione sufficiente che andremo ora a definire necessita di avere una informazione sulle derivate  $f^{(n)}$  per  $n$  *sufficientemente grande*.

#### TEOREMA 4.5.2. - CONDIZIONE SUFFICIENTE DI ANALITICITÀ .

Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  e sia  $x_0 \in U$ . Se  $\exists r_0 > 0$ ,  $\exists M > 0$ ,  $\exists n_0 > 0$  tale che

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r_0^n}, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0) \subseteq U, \quad \forall n \geq n_0 \quad (4.15)$$

allora  $f$  è analitica in  $x_0$  e vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0) \subseteq U$$

nello stesso intervallo della stima considerato sopra.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$  fissato. Dobbiamo provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0$$

dove  $\xi$  è ottenuto applicando la formula di Taylor con il resto in *formula di Lagrange*. Poiché  $\xi \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ , per l'ipotesi di partenza si può stimare  $f^{(n+1)}(\xi)$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \underset{\forall n \geq n_0}{\leq} \\ &\leq \frac{\frac{M(n+1)!}{r_0^{n+1}}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{r_0^{n+1}} = M \left( \frac{|x - x_0|}{r_0} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$0 \leq |R_n(x)| \leq M \left( \frac{|x - x_0|}{r_0} \right)^{n+1}, \quad \forall n \geq n_0$$

Poiché  $\left( \frac{|x - x_0|}{r_0} \right)^{n+1}$  è una successione geometrica di ragione  $\frac{|x - x_0|}{r_0} \in (0, 1)$ , essa tende a 0 per  $n \rightarrow +\infty$ : per il *teorema del confronto* abbiamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Questa condizione sufficiente si verifica anche se  $\exists M > 0, \exists r_0 > 0$  tale per cui

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0), \quad \forall n \geq 0 \tag{4.16}$$

Infatti,  $\forall r_0 > 0$ , per confronto di crescita si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{r_0^n} = +\infty$$

Dunque esiste sempre  $n_0$  tale che  $\forall n \geq n_0$  si ha  $\frac{n!}{r_0^n} > 1$ . Segue allora

$$|f^{(n)}(x)| \leq M < M \frac{n!}{r_0^n}, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0), \quad \forall n \geq n_0$$

#### 4.5.1 Eserciziamoci! Funzioni analitiche e serie di Taylor

**ESERCIZIO.** Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Sia  $R > 0$  il suo raggio di convergenza e sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in (-R, R)$$

Provare che  $f \in \mathcal{A}((-R, R))$ .

**SOLUZIONE.** La tesi da dimostrare è

$$\forall x_0 \in (-R, R) \quad \exists r_0 > 0 \quad \exists \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0).$$

Fissiamo  $x_0 \in (-R, R)$  e consideriamo  $r_0 := R - |x_0| > 0$ ;  $\forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ , applicando la formula del binomio di Newton si ricava

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0 + x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k.$$

Possiamo scambiare l'ordine delle sommatorie in quanto la serie doppia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x - x_0|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|x - x_0| + |x_0|)^n$$

converge, infatti  $|x - x_0| + |x_0| < r_0 + |x_0| = R$ .

Scambiamo allora l'ordine e cambiamo nome agli indici, ottenendo

$$f(x) = f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m} \binom{n+m}{n} x_0^n (x - x_0)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m (x - x_0)^m$$

con

$$b_m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m} \binom{n+m}{n} x_0^n.$$

## 4.5.2 Esempi di funzioni analitiche

**TEOREMA 4.5.3. - ANALITICITÀ DI  $e^x, \cos x, \sin x, (1+x)^\alpha$ .**

Le funzioni  $e^x, \cos x, \sin x, (1+x)^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  sono analitiche in  $x_0 = 0$  e vale

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.17}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.18}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.19}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \forall x \in (-1, 1), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.20)$$

**ATTENZIONE!** L'ultima formula vale solo per  $x \in (-1, 1)$ , indipendentemente dal dominio di  $(1+x)^\alpha$ . Ad esempio, se  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $(1+x)^\alpha = \sqrt[3]{1+x}$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ , però si può scrivere somma della sua serie di Taylor solo in  $(-1, 1)$ ; in altre parole, l'analiticità è una proprietà *locale*.

Le prime tre formule si dimostrano usando la condizione sufficiente precedentemente dimostrata. Per quanto riguarda la quarta formula, *non* si riesce a verificare la validità di tale condizione, ma con un altro ragionamento si trova comunque l'analiticità. Questo mostra che la condizione scritta sopra è *solo* sufficiente, ma *non* necessaria per l'analiticità.

#### DIMOSTRAZIONE.

- $e^x, \cos x, \sin x$ . È noto che

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

sono i polinomi di Taylor di  $e^x$ ,  $\sin x$  e  $\cos x$  centrati in  $x_0 = 0$ . Per  $n \rightarrow +\infty$  si ottengono le serie di Taylor

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Proviamo ora che valgono le uguaglianze scritte. Per dimostrare che valgono su tutto  $\mathbb{R}$  è sufficiente dimostrare che valgono su un intervallo del tipo  $(-r_0, r_0)$  con  $r_0 > 0$  arbitrario.

Sia allora  $r_0 > 0$  fissato arbitrariamente e sia  $x \in (-r_0, r_0)$ . Proviamo che è vera la condizione 4.16, dato che essa implica la condizione sufficiente 4.15. Vediamo i tre casi:

- ◊  $e^x$ . La derivata di  $f(x) = e^x$  è  $f^{(n)}(x) = e^x$ , quindi si ha

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^{r_0} = M, \quad \forall x \in (-r_0, r_0), \quad \forall n \geq 0$$

- ◊  $\cos x, \sin x$ . Poiché le derivate di seno e coseno sono ciclicamente seno e coseno con opportuni segni, la derivata  $n$ -esima di  $\cos x$  e  $\sin x$  in modulo è sempre limitata da 1.

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 = M, \quad \forall x \in (-r_0, r_0), \quad \forall n \geq 0$$

Poiché la condizione è verificata su  $(-r_0, r_0)$  e vale l'analiticità su tale intervallo, per l'arbitrarietà di  $r_0$  l'analiticità si verifica su tutto  $\mathbb{R}$ .

- $(1+x)^\alpha$ . Mostriamo innanzitutto che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

converge  $\forall x \in (-1, 1)$ , usando il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!} \underbrace{\frac{(n+1)!}{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-(n+1)+1)|}}_{=\alpha-n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|n+1|}{|\alpha-n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1 \end{aligned}$$

Adesso definiamo la funzione somma

$$g_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Dobbiamo dimostrare che  $g_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ . Per la derivazione termine a termine abbiamo

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} n x^{n-1} = \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-1(n-1)+1)}{(n+1)!} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} = \\ &\stackrel{n-1=m}{=} \alpha \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{m} x^m = \alpha g_{\alpha-1}(x), \quad \forall x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Quindi  $g'_\alpha(x) = \alpha g_{\alpha-1}(x)$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} (1+x) g_{\alpha-1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} = \\ &\stackrel{n+1=m}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{m=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{m-1} x^m = \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[ \binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1} \right] x^m = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{m} x^m \end{aligned}$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1} &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-1-m+1)}{m!} + \\ &+ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-1-(m-1)+1)}{(m-1)!} = \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-1-(m-1)+1)}{(m-1)!}. \\ &\cdot \frac{(\alpha-1-m+1+m)}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{m} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} = \binom{\alpha}{m} \end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che

$$(1+x) g_{\alpha-1}(x) = g_\alpha(x)$$

Si ha

$$\begin{cases} g'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{(1+x)} g_\alpha(x) \\ g_\alpha(0) = 1 \end{cases}$$

che è un *problema di Cauchy* o altresì noto come un'*equazione differenziale lineare omogenea* del I grado con dato iniziale, la cui soluzione è

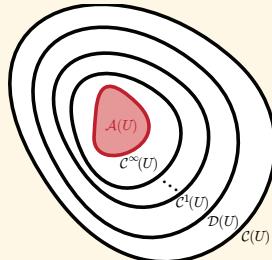
$$g_\alpha(x) = e^{\alpha \int_0^x \frac{1}{1+t} dt} = e^{\alpha \log(1+x)} = (1+x)^\alpha, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

□

#### DIGRESSIONE - UNO SGUARDO AL FUTURO: IL CASO COMPLESSO .

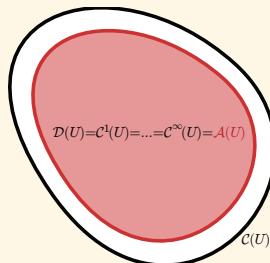
In ANALISI MATEMATICA 4 si riprenderà la questione della *derivabilità* in campo complesso, definendola e proseguendo con il problema di studiare l'*analiticità* delle funzioni in campo complesso.

In campo reale le funzioni *analitiche* sono solo un piccolo sottoinsieme delle funzioni  $\mathcal{C}^\infty(U)$ , che a loro volta un sottoinsieme stretto delle funzioni  $\mathcal{C}^1(U), \mathcal{C}^2(U), \dots$ , a loro volta contenute nelle funzioni *derivabili*  $D(U)$ , che sono sottoinsieme delle funzioni *continue*  $\mathcal{C}(U)$ .



In campo complesso abbiamo una sorpresa. Infatti, se la funzione è *derivabile* una volta, lo è *infinitamente* con continuità e sono anche *analitiche*!

$$D(U) = \mathcal{C}^1(U) = \dots = \mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{A}(U)$$



Si vedrà che questo è dovuto al fatto che  $\mathbb{C}$  ha la struttura di campo come  $\mathbb{R}$ , ma allo stesso tempo è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su  $\mathbb{R}$  stesso.

#### 4.6 IL CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DELL'ELLISSE

In questa sezione riprendiamo la dimostrazione abbozzata nel Capitolo 1 alla luce degli strumenti e teoremi dimostrati fino a questo punto. Consideriamo un'ellisse di semiassi

$a \geq b > 0$  di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Consideriamo la parametrizzazione

$$\vec{r}(t) = (a \sin t, b \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

e ne calcoliamo la lunghezza con la derivata:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a \cos t, -b \sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2) \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

dove  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \in [0, 1)$ ; l'ultimo passaggio segue dalla simmetria dell'ellisse.

Posto  $x = -e^2 \sin^2 t$ , da  $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}$  ci riconduciamo alla funzione  $(1+x)^{\frac{1}{2}}$  che abbiamo recentemente dimostrato<sup>3</sup> essere una funzione analitica per ogni  $x \in (-1, 1)$ . Poichè

$$|x| = |-e^2 \sin^2 t| \leq e^2 < 1, \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

allora si ha l'uguaglianza tra funzione e serie di Taylor corrispondente per ogni  $t$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$ :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} x^k \implies (1 - e^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} (-e^2 \sin^2 t)^k$$

Inoltre, per proprietà delle serie di potenze,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} x^k$$

converge uniformemente su tutti gli insiemi la cui chiusura è contenuta strettamente in  $(-1, 1)$ , in particolare converge uniformemente su  $[-A, A]$  per ogni  $A \in (0, 1)$ , dunque vale il teorema di scambio serie e integrale perché si ha convergenza uniforme su  $[-e^2, e^2] \subsetneq (-1, 1)$ .

Tornando al calcolo della lunghezza dell'ellisse:

$$\begin{aligned} L &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt = \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} (-e^2 \sin^2 t)^k dt = \\ &= 4a \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k e^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt = \\ &= 4a \left( \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k e^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt \right) \equiv \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Si veda pag. 66.

Dimostriamo ora le seguenti espressioni:

$$\textcircled{1} \quad \binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

#### DIMOSTRAZIONE.

I Per induzione. Il passo base  $k = 1$  è banalmente verificato:

$$\binom{1/2}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2} = (-1)^0 \frac{(-1)!!}{2!!}$$

Supponendo sia vero per  $k$ , mostriamo che valga per il passo  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{k+1} &= \binom{1/2}{k} \frac{\frac{1}{2}-k}{k+1} \stackrel{\substack{\text{hp.} \\ \text{ind.}}}{=} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \frac{\frac{1}{2}-k}{k+1} = \\ &= (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \left( -\frac{2k-1}{2k+2} \right) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} = \\ &= (-1)^{(k+1)-1} \frac{(2(k+1)-3)!!}{(2(k+1))!!} \end{aligned}$$

II Sia

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

Integriamo per parti: posto  $f = \sin^{n-1} t$  e  $dg = \sin t dt$ , allora  $df = (n-1) \sin^{n-2} t \cos t dt$ . e  $g = -\cos t$ ; calcoliamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f dg = fg \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g df,$$

ossia:

$$I_n = -\sin^{n-1} t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} t \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} t \cos^2 t dt$$

Poiché  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ , allora

$$I_n - n = (n-1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \right) = (n-2) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

Riordinando, otteniamo

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Allora, usando questa ricorsione

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

□

Allora, sostituendo, otteniamo la lunghezza dell'ellisse:

$$\begin{aligned} &\square 4a \left( \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{2k-1} e^{2k} \frac{(2k-3)!!(2k-1)!!}{((2k)!!)^2} \frac{\pi}{2} e^{2k} \right) \\ &= 2\pi a \left[ 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \left( \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} e^k \right)^2 \right] \end{aligned}$$

ossia

$$L = 2\pi a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2k} \left( \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} e^k \right)^2 \quad (4.21)$$

## 4.7 FUNZIONI ESPONENZIALE E LOGARITMO IN CAMPO COMPLESSO

### 4.7.1 Funzione esponenziale in campo complesso

#### DEFINIZIONE 4.7.1. - ESPONENZIALE IN CAMPO COMPLESSO .

L'esponenziale in campo complesso è la funzione definita  $\forall z \in \mathbb{C}$  come

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (4.22)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Questa funzione è ben definita. Applichiamo alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

il criterio di d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Segue che converge per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . □

**OSSERVAZIONE.** Ricordando che in campo reale vale la relazione

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si ricava che la funzione esponenziale definita in campo complesso coincide con la nota funzione esponenziale nel caso di  $z = x \in \mathbb{R}$ , ottenendo così una naturale estensione dell'esponenziale reale a quello complesso.

#### PROPOSIZIONE 4.7.1. - PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE COMPLESSO . .

1.  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2.  $e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
3.  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

4. Vale la **formula di Eulero**:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.23)$$

- 5.  $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 6.  $|e^z| = e^{\Re z}, \quad \arg(e^z) = \Im z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
- 7.  $e^{z+2k\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}$ .

#### DIMOSTRAZIONE.

I Siano  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Dobbiamo provare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

Ricordiamo<sup>a</sup> che, date due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$$

il loro prodotto è la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n, \quad \text{dove } \gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}, \quad \forall n \geq 0$$

Nel caso in questione  $\alpha_n = \frac{z_1^n}{n!}, \quad \beta_n = \frac{z_2^n}{n!}, \quad \forall n \geq 0$ , dunque

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{(n-k)}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{(n-k)}}{k!(n-k)!}, \quad \forall n \geq 0.$$

Osserviamo che vale

$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \binom{n}{k}, \quad \forall n \geq 0, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Dalla formula del binomio di Newton, ricaviamo allora

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{(n-k)}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{(n-k)} = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}, \quad \forall n \geq 0$$

Abbiamo quindi ottenuto la tesi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}$$

II-III Sia  $z \in \mathbb{C}$  fissato. Applichiamo la formula dimostrata al punto I con  $z_1 = z$  e  $z_2 = -z$ ; otteniamo

$$e^{z-z} = e^z e^{-z} \implies 1 = e^z e^{-z}$$

Da questo segue che  $e^{-z} = 1/e^z$ .

IV Fissato  $y \in \mathbb{R}$ , dalla definizione dell'esponenziale complesso segue che

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n y^n}{n!}$$

Riordiniamo i termini della serie separando i termini di posto pari e quelli di posto dispari<sup>b</sup>, ottenendo

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Calcoliamo ora  $i^{2k}$  e  $i^{2k+1}$ :

- $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ .
- $i^{2k+1} = i(i^2)^k = i(-1)^k$ .

Allora

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ricordando che

$$\cos y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} \quad \sin y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

segue la tesi.

- V Sia  $z = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dalla relazione provata in I segue che  $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ . Applicando la *formula di Eulero*, si ha la tesi.
- VI Sia  $z = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ , ossia  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ . La formula provata al punto V esprime il numero complesso  $e^z$  in forma trigonometrica; da essa si ricava quindi immediatamente il risultato.
- VII Siano  $z \in \mathbb{C}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ . Dalla relazione provata al punto I segue che

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i}$$

Applicando la **formula di Eulero** si ricava immediatamente che

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$$

e questo consente di concludere la tesi. □

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina 194 è possibile trovare alcune informazioni sulla proprietà di prodotto (secondo Cauchy).

<sup>b</sup>Per riordinare la serie come due "sottoserie" senza che la somma venga modificata è necessaria la convergenza assoluta. Poiché ogni serie di potenze converge assolutamente all'interno del suo cerchio di convergenza, in questo caso non abbiamo problemi di riorganizzazione della serie e . Nelle "Note aggiuntive", a pagina 193 è possibile trovare alcune informazioni sul problema di riorganizzazione della serie.

**OSSERVAZIONE.** Dalla relazione

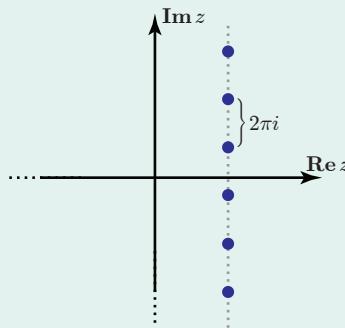
$$e^{z+2k\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

segue che in campo complesso la funzione esponenziale è **periodica** di periodo  $2\pi i$ . Di conseguenza, in campo complesso la funzione esponenziale *non* è invertibile. Tuttavia, l'*invertibilità* è garantita se si consente come inversa una *funzione multivoca*.

#### DEFINIZIONE 4.7.2. - FUNZIONE MULTIVOCÀ.

Una **funzione multivoca** è una *relazione binaria seriale* che associa ad ogni valore  $x$  nel dominio  $X$  uno o più valori  $y$  nel codominio  $Y$ .

**ESEMPIO.** Nella seguente figura sono rappresentati dei numeri complessi  $z$  aventi lo stesso *esponente*; si può vedere come essi abbiano la stessa parte *reale*, ma ciascun numero differisce da quelli vicini a lui di  $2\pi$  nella parte *immaginaria*.



#### 4.7.1.1 Eserciziamoci! Funzione esponenziale in campo complesso

**ESERCIZIO.** Scegli la risposta corretta. Il modulo del numero complesso  $e^{iz}$ , con  $z \in \mathbb{C}$ , è:

- a  $e^{\Re z}$
- b  $e^{-\Im z}$
- c  $e^{|z|}$
- d  $e^{\Re z}$

**SOLUZIONE.** Per la proprietà 6, dato  $w \in \mathbb{C}$   $|e^w| = e^{\Re w}$ . Posto

$$w = iz = i(\Re z + i\Im z) = -\Im z + i\Re z$$

segue immediatamente che  $\Re w = -\Im z$  e quindi  $|e^{iz}| = e^{-\Im z}$ . La risposta corretta è **b**.

#### 4.7.2 Funzione logaritmo in campo complesso

#### DEFINIZIONE 4.7.3. - LOGARITMO IN CAMPO COMPLESSO .

Dato un numero complesso  $z$ , si chiamano **logaritmi complessi** di  $z$ , se esistono, i numeri complessi  $w$  tali che

$$e^w = z \tag{4.24}$$

L'insieme di tali numeri si indica con

$$\log z \tag{4.25}$$

o, per distinguerlo dal logaritmo reale, con

$$\log_{\mathbb{C}} z \quad (4.26)$$

Proviamo ora che l'insieme dei logaritmi di  $z$  è *non vuoto* ed *infinito* se  $z \neq 0$ .

**TEOREMA 4.7.1. - CARATTERIZZAZIONE DEI LOGARITMI IN CAMPO COMPLESSO .**

L'insieme dei logaritmi di un numero complesso  $z$  è non vuoto se e solo se  $z \neq 0$ . In questo caso esso è infinito ed è costituito dai numeri complessi

$$\log_{\mathbb{C}} z = \log_{\mathbb{R}}|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.27)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che, per definizione, i logaritmi di un numero complesso  $z$  sono le soluzioni dell'equazione  $e^w = z$ . Dalle proprietà dell'esponenziale è noto che  $e^w \neq 0$ , per ogni numero complesso  $w$ ; di conseguenza, l'equazione non ha soluzioni se  $z = 0$ .

Sia ora  $z \neq 0$ ; posto  $w = u + iv$ , con  $u, v \in \mathbb{R}$ , ricordiamo che

$$e^w = e^u (\cos v + i \sin v)$$

affinché questo numero sia uguale a  $z$  si dovrà quindi avere

$$|e^w| = e^u = |z| \quad \text{e} \quad \arg(e^w) = v = \arg(z) + 2k\pi$$

per qualche  $k \in \mathbb{Z}$ . Otteniamo quindi

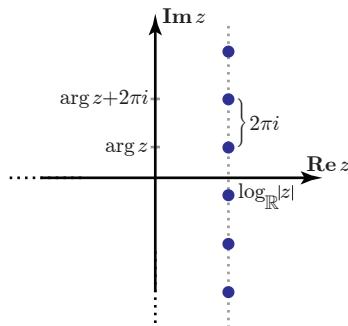
$$u = \log_{\mathbb{R}}|z| \in \mathbb{R}$$

e dunque

$$w = \log_{\mathbb{R}}|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad \square$$

**ATTENZIONE!** Si presti attenzione al diverso significato del simbolo  $\log$  nella formula caratterizzante il *logaritmo complesso*: a primo membro esso indica i *logaritmi complessi* del numero  $z$ ; a secondo membro, l'unico logaritmo reale del numero reale positivo  $|z|$ . Per evitare confusioni, qui è stato indicato in pedice a quale logaritmo ci riferiamo.

In figura sono rappresentati alcuni dei logaritmi complessi di un numero complesso *non nullo*  $z$ .



Come si osserva dalla formula essi hanno tutti la *stessa parte reale* e parti immaginarie che *differiscono* per multipli di  $2\pi$ .

**4.7.2.1 Eserciziamoci! Funzione logaritmo in campo complesso**

**ESERCIZIO.** Scegli la risposta corretta. I logaritmi del numero complesso  $-2i$  sono:

- a  $\log_{\mathbb{R}} 2 + i \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- b  $-\log_{\mathbb{R}} 2 + i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- c  $\log_{\mathbb{R}} 2 + i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- d  $-\log_{\mathbb{R}} 2 + i \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

**SOLUZIONE.** Applicando la formula caratterizzante il logaritmo complesso:

$$\log_{\mathbb{C}}(-2i) = \log_{\mathbb{R}}|-2i| + i(\arg(-2i) + 2k\pi) = \log_{\mathbb{R}} 2 + i \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$$

La risposta corretta è pertanto **a**.

# **III**

## **TEORIA DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE**



CAPITOLO 5

## TEORIA DELLA MISURA

---

*“Se la tua nuova teoria si può esprimere con grande semplicità, allora esisterà un’eccezione patologica ad esso!”*

*ADRIAN MATHESES, adirato per essere stato bocciato da Riemann.*

**N**EL corso di ANALISI MATEMATICA UNO abbiamo dato la definizione di integrale secondo Riemann per funzioni limitate come generalizzazione del concetto di “calcolo delle aree”. Per quanto utile e sufficientemente complesso, questo strumento matematico ha tutta una serie di *limiti* e di *stranezze*, tra cui:

- Cambiare il valore che una funzione Riemann-integrabile assume in un certo punto può far sì che, se il valore è infinito, la funzione non ammette più integrale - anche se intuitivamente l’area sottesa da un singolo punto è sempre nulla!.
- Ci sono funzioni che, pur essendo costanti tranne un numero numerabile di punti, *non* ammettono integrale, mentre le funzioni limitate e continue tranne un numero numerabile di punti sono Riemann integrabili.
- Ci sono sequenze di funzioni Riemann-integrabili che convergono a funzioni non integrabili.
- L’integrale di Riemann è propriamente integrabile solo in intervalli chiusi (o al più unioni di essi) e, se siamo abbastanza audaci, su intervalli illimitati; all’apparenza si escludono dal concetto di integrazione tutti gli insiemi non riconducibili agli intervalli.
- Dato che la definizione si basa sulle partizioni, che a loro necessitano della metrica di  $\mathbb{R}$ , non si può applicare l’integrale di Riemann a spazi astratti e funzioni definite su di essi. In particolare, non si possono calcolare alle successioni  $f(n) = f_n$ , per le quali sembra invece intuitivo supporre che

$$\int f = \sum f_n$$

In questo modo si potrebbero applicare i teoremi sugli integrali al mondo delle serie!

Vogliamo dunque definire un concetto di integrazione più generale dell'integrale di Riemann, ma che sia compatibile con esso e mantenga le sue proprietà "buone". Dato che una delle principali limitazioni dell'integrale di Riemann è essere basato sulla *lunghezza* delle partizioni del dominio su cui integriamo, abbiamo necessariamente bisogna prima di generalizzare questo concetto.

L'**integrale di Lebesgue**, così chiamato in onore del suo ideatore Henri **Lebesgue** (1875-1941), e la **teoria della misura** cercano di soddisfare proprio queste richieste.

In questo capitolo, dopo un excursus storico su come siamo arrivati a questi due concetti, ci dedicheremo completamente alla **misura**, prima su  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^n$  per poi generalizzarlo sugli spazi cosiddetti **misurabili**.

### 5.1 IL CONTESTO STORICO: IL PROBLEMA DELLE DISCONTINUITÀ NELL'INTEGRALE DEFINITO

Seppur tecniche per calcolare aree e volumi furono già introdotte dai matematici dell'antica Grecia, fu solo nel tardo XVII secolo che vennero sviluppati i principi dell'integrazione indipendentemente da Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), i quali immaginaron l'area sotto una curva come una *somma infinita* di rettangoli di *larghezza infinitesima*.

La formalizzazione di questo concetto arrivò nel corso dell'Ottocento grazie a Augustin-Louis **Cauchy** (1789-1857), che in *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823) definì l'integrale per funzioni continue su un dominio compatto con al più un numero finito di discontinuità.

Come ogni matematico che si rispetti, subito dopo aver letto questa definizione quello che fecero gli analisti dell'Ottocento fu chiedersi:

*Come allargare la classe delle funzioni che ammettono integrale? Come posso caratterizzare possono essere i punti di discontinuità di una funzione integrabile?*

Per la seconda domanda ci furono diversi approcci: alcuni ipotizzarono che la *cardinalità* dell'insieme delle discontinuità dovesse essere piccola, altri pensarono che bisognasse passare per proprietà topologiche<sup>1</sup> come densità, ecc...

Per la prima, invece, Bernhard **Riemann** (1826-1866) nella sua *Tesi di abilitazione all'insegnamento* (1851-1852) estese il concetto di integrale alle funzioni limitate e dare una caratterizzazione delle funzioni integrabili (ora dette **integrabili secondo Riemann**).

#### DEFINIZIONE 5.1.1. - CARATTERIZZAZIONE DEGLI INTEGRALI SECONDO RIEMANN .

La funzione  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  limitata è **integrabile** (secondo Riemann) se e solo se  $\forall \varepsilon > 0, \exists D$  suddivisione di  $[a, b]$  in un numero finito di intervalli  $I_1, \dots, I_n$  tale per cui

$$\sum_{i=1}^n \left( \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right) \mathcal{L}(I_i) < \varepsilon \quad (5.1)$$

Per quanto questo fu un passo avanti, l'integrale di Riemann non era sufficiente a risolvere tutti i problemi sorti: infatti, non tutte le funzioni limitate risultano essere integrabili!

<sup>1</sup>Anche se i primi concetti di Topologia si possono ricondurre al famoso "Problema dei ponti di Königsberg" affrontato da Eulero, furono proprio gli analisti ottocenteschi, bramosi di risolvere il problema delle discontinuità dell'integrale, a dare impulso a questa branca della matematica. Per alcuni cenni al mondo della Topologia rimandiamo il lettore curioso a Antuca e Bertolotti, *Tutto quello che avreste voluto sapere sulla Geometria 2\** (\*ma non avete mai osato chiedere).

Dalla caratterizzazione di Riemann è evidente che affinché una funzione sia integrabile è necessario rendere *piccola l'oscillazione* di  $f$ , ossia

$$\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f$$

Dal teorema di *Heine-Cantor* è noto che per le funzioni continue su  $[a, b]$  questa oscillazione è arbitrariamente piccola se l'ampiezza dell'intervallo  $I_i$  è sufficientemente piccola, mentre in generale *non lo è*.

#### ESEMPIO - LA FUNZIONE DI DIRICHLET .

Consideriamo la **funzione di Dirichlet**<sup>a</sup>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (5.2)$$

Osserviamo come essa *non* è integrabile su  $[0, 1]$ : poiché  $\forall D$  partizione di  $[0, 1]$  per densità dei razionali si ha

$$\sup_{I_i} f = 1 \quad \inf_{I_i} f = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

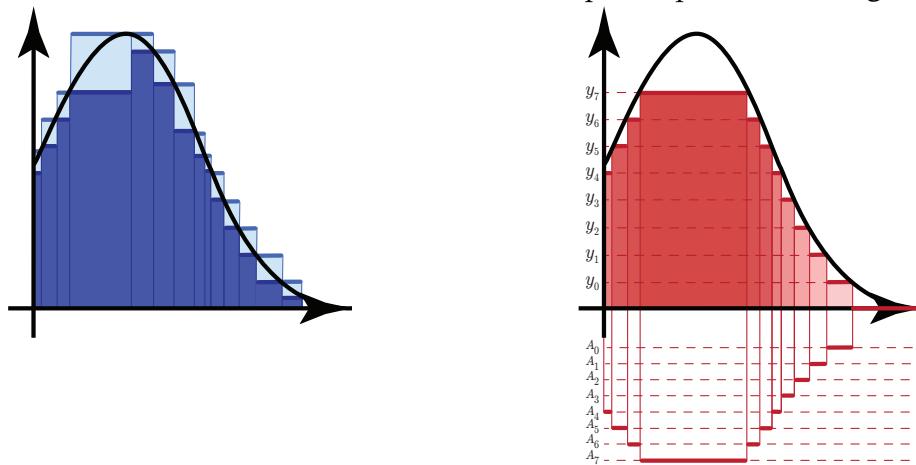
Allora

$$\sum_{i=1}^n \left( \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right) \mathcal{L}(I_i) = \sum_{i=1}^n (1 - 0) \mathcal{L}(I_i) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(I_i) = \mathcal{L}([0, 1]) = 1, \quad \forall D \text{ sudd.}$$

<sup>a</sup>Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) fu il primo a studiarne le proprietà.

Nonostante il profuso impegno, non si riuscì in alcun modo a collegare la cardinalità o delle proprietà topologiche all'insieme dei punti di discontinuità. Per quasi cinquant'anni l'integrale rimase più o meno nella stessa forma data da Riemann<sup>2</sup> fino al 1902, quando Henri Lebesgue (1875-1941) nella sua tesi di laurea *Intégrale, longueur, aire* (1902) introdusse i concetti di **misura  $n$ -dimensionale** e di **integrale secondo Lebesgue**.

L'idea di Lebesgue si basa su una semplice osservazione: per rendere piccola l'oscillazione di  $f$  il procedimento *naturale* non è, come fa Riemann, di partizionare in piccoli intervalli il suo *dominio*, bensì di suddividere in intervalli di ampiezza piccola l'**immagine** di  $f$ .



<sup>2</sup>Nel 1894 Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894) pubblicò una generalizzazione dell'integrale di Riemann che oggi prende il nome di **integrale di Riemann-Stieltjes**; qui non lo tratteremo, è doveroso segnarlo come un importante precursore di quello che sarà l'*integrale di Lebesgue*.

In *Sur le development de la notion d'intégrale* (1926) Lebesgue ripercorre il procedimento naturale alla base di questa idea fondamentale:

“I geometri del diciassettesimo secolo considerano l’integrale di  $f(x)$  - la parola *integrale* non era ancora stata inventata, ma non importa - come la somma di un’infinità di indivisibili, ognuno dei quali era l’ordinata, positiva o negativa, di  $f(x)$ .

Benissimo! Noi abbiamo semplicemente raggruppato insieme gli *indivisibili* di grandezza vicina. Abbiamo, come si dice in algebra, riunito termini simili. Si potrebbe dire che, secondo il procedimento di Riemann, si cerca di sommare gli indivisibili prendendoli *nell’ordine nel quale ci sono forniti dalla variazione di  $x$* , come un commerciante confusionario che conta monete e biglietti a caso, nell’ordine in cui gli vengono dati, mentre noi operiamo come un commerciante metodico che dice:

«ho  $m(G_1)$  monete da 100, che valgono  $100 m(G_1)$ »  
 «ho  $m(G_2)$  monete da 500, che valgono  $500 m(G_2)$ »  
 «ho  $m(G_3)$  biglietti da 1000, che valgono  $1000 m(G_3)$ »  
 ...

Tutto insieme ho

$$S = 100 m(G_1) + 500m(G_2) + 1000m(G_3) + \dots$$

I due procedimenti porteranno di certo il commerciante allo stesso risultato perché per quanti soldi abbia c’è solo un numero finito di monete e di biglietti da contare. Ma per noi che dobbiamo sommare un numero infinito di indivisibilità la differenza dei due metodi è *di capitale importanza*.”

In altre parole, per calcolare l’integrale (secondo Lebesgue) di una funzione:

- Suddividiamo l’immagine in intervalli e per ognuno di essi consideriamo un *peso* dato dall’*estremo inferiore* dei valori assunti dalla funzione nel dato intervallo.
- Consideriamo le controimmagini degli intervalli e associamo a ciascuna un valore detto **misura**.
- Calcoliamo un’approssimazione *per difetto* dell’integrale sommando le misure che abbiamo ottenuto - ciascuna moltiplicata per il corrispondente peso.
- Più fitta è la partizione iniziale, più accurato sarà il valore dell’integrale.

**INTUITIVAMENTE...** Poiché partizioniamo i *valori* che assume una funzione e non il dominio in sè e li riordiniamo, possiamo trasformare delle funzioni particolarmente patologiche in funzioni “carine” dal punto di vista dell’integrazione e ci consente di integrarle.

Osserviamo che l’idea di Lebesgue è decisamente geniale: non solo risolve i casi patologici che hanno afflitto i matematici del XIX secolo, ma ci permette di rivoluzionare completamente il concetto di integrale: dato che la partizione è effettuata sul *codominio*, le funzioni non necessariamente devono essere definite sui reali, ma possiamo integrare funzioni definite su altri tipi di insiemi, come i naturali!

Tuttavia, abbiamo prima bisogno di affrontare alcune questioni:

1. Dato che il dominio può essere un insieme qualsiasi, le controimmagini  $f^{-1}([y_i, y_{i+1}])$  degli intervalli  $[y_i, y_{i+1}]$  che otteniamo dalla partizione *non* sono in generale intervalli: che cos’è la loro **misura**?

2. Su quali insiemi è *definibile* una misura?
3. Per quali funzioni  $f$  è possibile definire l'*integrale*?

Possiamo immaginare, da quanto detto, che una misura sia una funzione che quantifica la dimensione - che sia una lunghezza, un'area o volendo anche una cardinalità - di insiemi. Sostanzialmente, ci sono tre elementi da definire:

- (I) Una famiglia di insiemi su cui è definita una misura, che chiameremo poco intuitivamente  **$\sigma$ -algebra**, e i suoi elementi, che saranno detti **insiemi misurabili**.
- (II) Una classe di funzioni su cui definire l'integrale, le **funzioni misurabili**.
- (III) Ultima, ma decisamente non per importanza, una **misura** per valutare l'ampiezza degli insiemi.

## 5.2 ALGEBRE E $\sigma$ -ALGEBRE

### DEFINIZIONE 5.2.1. - ALGEBRA .

Sia  $X$  un insieme qualsiasi. La famiglia  $\mathcal{M}$  di sottoinsiemi di  $X$  è una **algebra** se soddisfa i seguenti assiomi:

1. L'insieme stesso sta nell'algebra:

$$X \in \mathcal{M} \quad (5.3)$$

2. L'algebra è chiusa rispetto alla *complementarizzazione*:

$$A \in \mathcal{M} \implies A^C \in \mathcal{M} \quad (5.4)$$

3. L'algebra è chiusa rispetto alla *unione finita*:

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{M} \quad (5.5)$$

Di queste nuove strutture matematiche ci interessano in particolare quelle che soddisfano un ulteriore condizione: la chiusura rispetto all'*unione numerabile*.

### DEFINIZIONE 5.2.2. - $\sigma$ -ALGEBRA, SPAZI E INSIEMI MISURABILI .

Sia  $X$  un insieme qualsiasi. La famiglia  $\mathcal{M}$  di sottoinsiemi di  $X$  è una  **$\sigma$ -algebra** se soddisfa i seguenti assiomi:

1. L'insieme stesso sta nell'algebra:

$$X \in \mathcal{M} \quad (5.6)$$

2. L'algebra è chiusa rispetto alla *complementarizzazione*:

$$A \in \mathcal{M} \implies A^C \in \mathcal{M} \quad (5.7)$$

3. La  $\sigma$ -algebra è chiusa rispetto alla *unione numerabile*:

$$A_n \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M} \quad (5.8)$$

La coppia  $(X, \mathcal{M})$  si dice **spazio misurabile** e gli insiemi che appartengono a  $\mathcal{M}$  sono detti **insiemi misurabili**.

### OSSERVAZIONE.

- $\emptyset \in \mathcal{M}$  in quanto è il complementare dell'insieme  $X$ .

- La  $\sigma$ -algebra è chiusa rispetto all'*intersezione numerabile*:

$$A_n \in \mathcal{M} \implies \bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$$

Infatti, l'intersezione si può scrivere tramite unioni e complementari, operazioni interne alla  $\sigma$ -algebra, grazie alle *leggi di De Morgan*<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina 196 è possibile trovare alcune informazioni sulle leggi di De Morgan.

**ESEMPIO.** Ogni insieme si può dotare della struttura di spazio misurabile, in quanto ammette almeno la  $\sigma$ -algebra triviale data da  $\mathcal{P}(X)$ .

#### DEFINIZIONE 5.2.3. - $\sigma$ -ALGEBRA GENERATA DA UNA FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI .

Data una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $X$ , si dice  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{F}$  l'intersezione di *tutte* le  $\sigma$ -algebre che contengono  $\mathcal{F}$  ed è la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene  $\mathcal{F}$ .

**ESEMPIO.** Se  $X$  è spazio topologico e  $\mathcal{F}$  è la famiglia degli *aperti* di  $X$  (che coincide con la topologia  $\tau$  se definita con gli assiomi degli aperti), la  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{F}$  si chiama  **$\sigma$ -algebra dei Boreliani di  $X$**  e si indica con  $\mathcal{B}(x)$ .

Osserviamo che la famiglia  $\mathcal{F}$  di per sé non è una  $\sigma$ -algebra: se  $A$  è aperto,  $A^C$  è chiuso e quindi non appartiene a  $\mathcal{F}$ ; invece, in  $\mathcal{B}(x)$  ci stanno anche i chiusi della topologia e quindi la complementarizzazione è un'operazione interna.

### 5.3 FUNZIONI MISURABILI

#### DEFINIZIONE 5.3.1. - FUNZIONE MISURABILE .

Sia  $(X, \mathcal{M})$  spazio misurabile e  $Y$  spazio topologico. Una funzione  $f : X \longrightarrow Y$  si dice **misurabile** se

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}, \forall A \subseteq Y \text{ aperto.} \quad (5.9)$$

**OSSERVAZIONE.** Se  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ , allora ogni funzione è misurabile.

#### ESEMPI.

1. Sia  $(X, \mathcal{B}(x))$  spazio misurabile su  $X$  spazio topologico con la  $\sigma$ -algebra dei Boreliani di  $X$  e sia  $Y$  spazio topologico. Allora

$$f : X \longrightarrow Y \text{ continua} \implies f : X \longrightarrow Y \text{ misurabile.}$$

Infatti,  $\forall A \subseteq Y$  aperto,  $f^{-1}(A)$  è aperto per continuità di  $f$  e quindi  $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(x)$ .

2. Sia  $(X, \mathcal{M})$  spazio misurabile qualsiasi e sia  $E \subseteq X$ . Definiamo la **funzione**

**caratteristica di  $E$**  o **indicatrice di  $E$**  la funzione

$$\begin{aligned}\chi_E : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}\end{aligned}\tag{5.10}$$

Allora

$$\chi_E \text{ è misurabile} \iff E \in \mathcal{M}$$

Infatti, preso  $A \subseteq \mathbb{R}$ , si ha

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } 0 \notin A, 1 \notin A \\ E^C & \text{se } 0 \in A, 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A, 1 \in A \\ X & \text{se } 0 \in A, 1 \in A \end{cases}$$

$$\text{Allora } f^{-1}(A) \in \mathcal{M} \iff E \in \mathcal{M}.$$

**OSSERVAZIONE.** La funzione caratteristica  $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$  è la **funzione di Dirichlet**<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Si veda pag. 81.

#### PROPRIETÀ 5.3.1. - PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI MISURABILI .

1. Sia  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile e sia  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ , dove  $\mathbb{C}$  ha la topologia Euclidea. Possiamo “scomporre” la funzione a valori complessi come combinazione lineare di funzioni reali rispetto alla base  $(1, i)$ .

$$\forall x \in X f(x) \in \mathbb{C} \implies f(x) = \underbrace{u(x)}_{\text{parte reale}} + i \underbrace{v(x)}_{\text{parte imm.}}, \text{ con } u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Allora

- a.  $f$  è misurabile  $\implies u, v, |f|$  misurabili.
- b.  $u, v$  sono misurabili  $\implies f = u + iv$  è misurabile.
2. Siano  $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ . Se  $f, g$  sono misurabili, allora
  - $f + g$  è misurabile.
  - $f g$  è misurabile.

□

#### 5.3.1 Caratterizzazione delle funzioni misurabili

In CALCOLO DELLE PROBABILITÀ abbiamo dato una definizione di funzione misurabile  $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow Y$  se la controimmagine tramite  $f$  di un Boreliano è un insieme misurabile per  $\mathcal{M}$ . Vedremo ora come questa definizione è equivalente a quella data all'inizio della sezione.

#### TEOREMA 5.3.1. - CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI MISURABILI .

1. La funzione  $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow Y$ , con  $Y$  spazio topologico, è misurabile se e solo se

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \forall B \text{ Boreliano di } Y. \quad (5.11)$$

2. Posto  $Y = \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ ,  $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$  è misurabile se e solo se

$$f((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

□

Che differenza c'è tra la definizione e le caratterizzazioni? In sostanza possono essere considerate tre "test" differenti per mostrare o confutare che una funzione sia misurabile.

- (A)  $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}, \forall A$  aperto di  $Y$
- (B)  $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \forall B$  Boreliano di  $Y$
- (C)  $f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , con  $Y = \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$

Da un punto di vista *operativo* (B) non conviene come metodo per verificare che  $f$  sia misurabile: i Boreliani, pur avendo la stessa cardinalità degli aperti, li contengono *strettamente*<sup>3</sup> e quindi bisogna verificare ulteriori insiemi (come i chiusi) rispetto a quelli che si verificherebbero con la condizione (A).

Tuttavia, (B) fornisce delle informazioni che immediatamente non si avevano dalla definizione originale: sono misurabili non solo le controimmagini degli aperti, ma anche le controimmagini dei chiusi.

Col caso (C) ci limitiamo ad operare in  $\mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ , ma è sicuramente più vantaggioso da applicare rispetto ad (A).

### 5.3.2 Passaggio al limite per funzioni misurabili

Ci chiediamo se, date  $f_n$  successione di funzioni misurabili che convengono ad una funzione  $f$  in *una qualche* convergenza,  $f$  risulta essere ancora misurabile e se sì, con quale tipo di convergenza.

A differenza di quanto visto col passaggio al limite della continuità, la risposta è affermativa anche sotto la sola ipotesi di *convergenza puntuale*!

Per dimostrarlo (e lo faremo per funzioni a valori in  $\mathbb{C}$ ), abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari che riguardano sup, inf, lim sup, lim inf di una successione di funzione. Per poter parlare di lim sup e lim inf abbiamo bisogno di avere il codomini della funzione in uno spazio  $Y$  con ordinamento, pertanto ci porremo in  $\mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ , ossia le nostre funzioni saranno del tipo

$$f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$$

**DEFINIZIONE 5.3.2.** - sup, inf, lim sup e lim inf DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI .

<sup>3</sup>A pag. 103 è possibile trovare un approfondimento sulla relazione tra Boreliani, aperti e altre classi di insiemi.

Sia  $f_n : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$  misurabili. Allora definiamo:

$$\begin{aligned}\left(\sup_{n \geq 1} f_n\right)(x) &:= \sup_{n \geq 1} f_n(x), \quad \forall x \in X \\ \left(\inf_{n \geq 1} f_n\right)(x) &:= \inf_{n \geq 1} f_n(x), \quad \forall x \in X \\ \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n\right)(x) &:= \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \quad \forall x \in X \\ \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n\right)(x) &:= \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \quad \forall x \in X\end{aligned}$$

**PROPOSIZIONE 5.3.1.** - **MISURABILITÀ DI sup, inf, lim sup e lim inf DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI MISURABILI .**

Sia  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile e siano  $f_n : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$  misurabili.  
Allora

$$\sup_{n \geq 1} f_n \quad \inf_{n \geq 1} f_n \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

sono misurabili.

**DIMOSTRAZIONE.**

1. Sia  $g(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Dobbiamo provare che  $g$  sia misurabile, con

$g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ . Per il teorema 5.3.1 sulla caratterizzazione delle funzioni misurabili è sufficiente dimostrare che  $g^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Innanzitutto, mostriamo che

$$g^{-1}((\alpha, +\infty]) = \bigcup_{n \geq 1} f_n^{-1}((\alpha, +\infty]), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}x \in g^{-1}((\alpha, +\infty]) &\iff g(x) > \alpha \\ &\iff \exists j \geq 1: f_j(x) > \alpha \\ &\iff \exists j \geq 1: x \in f_j^{-1}((\alpha, +\infty]) \\ &\iff x \in \bigcup_{n \geq 1} f_n^{-1}((\alpha, +\infty]).\end{aligned}$$

Poiché  $f_n$  è misurabile si ha

$$f_n^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

ed essendo  $\mathcal{M}$  una  $\sigma$ -algebra è chiusa rispetto all'unione misurabile e dunque

$$g^{-1}((\alpha, +\infty]) = \bigcup_{n \geq 1} f_n^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

2,3,4. Si riconducono al caso 1) perché

$$\begin{aligned}\inf_{n \geq 1} f_n &= -\left(\sup_{n \geq 1} (-f_n)\right) \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n &= \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} f_n \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n &= \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} f_n\end{aligned}$$

□

**COROLLARIO 5.3.1. - PASSAGGIO AL LIMITE PER FUNZIONI MISURABILI IN  $\mathbb{C}$ .**

Sia  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile e siano  $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ .

Se  $f_n$  sono misurabili ed esiste  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

allora  $f$  è misurabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Riconduciamoci al caso reale per utilizzare la proposizione precedente.  
Posto

$$f_n = u_n + iv_n \quad f = u + iv$$

dove

$$\begin{aligned}u_n &= \Re(f_n) : X \longrightarrow \mathbb{R} & v_n &= \Im(f_n) : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &= \Re(f) : X \longrightarrow \mathbb{R} & v &= \Im(f) : X \longrightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

Come visto nella proposizione 5.3.1,  $f_n$  misurabile implica che sia  $u_n$  sia  $v_n$  siano misurabili e, dal risultato precedente sulle funzioni a valori in  $\mathbb{R}^*$  si ha

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n \text{ misurabili.}$$

D'altra parte si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \implies \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = u(x) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = v(x) \end{cases}$$

Poiché i limiti esistono si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = u(x) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n = v(x)\end{aligned}$$

Quindi  $u(x)$  e  $v(x)$  sono misurabili, pertanto anche  $f = u + iv$  è misurabile. □

#### 5.4 MISURA DI PEANO-JORDAN

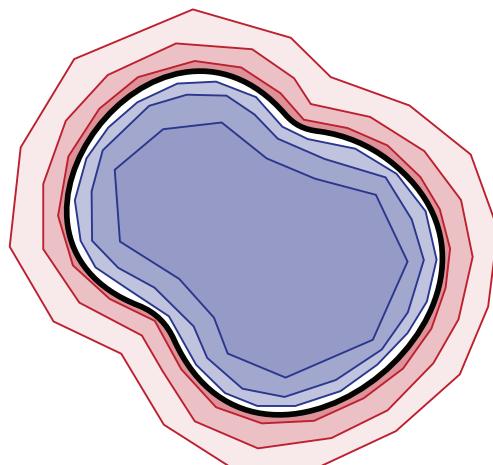
Negli stessi anni in cui si lavorò per espandere la classe di funzioni che ammettono integrale definito, diversi matematici lavorano su un'altra questione, quella della **misura**

di un insieme.

Chiaramente già dall'antichità erano note misure di figure "elementari", come ad esempio la lunghezza e l'area di un poligono o il volume di certi solidi, spesso sulla base di principi come quello di *esaustione*.

Solo nel XIX secolo si cercò di formalizzare questi ragionamenti ed espandere il concetto di misura non soltanto a figure generiche, ma anche a più dimensioni fino ad arrivare ad una astrazione di tale concetto ad insiemi, indipendentemente dall'essere in  $\mathbb{R}^n$ .

Il primo ad introdurre un concetto di misura di un sottoinsieme della retta, del piano o delle spazio fu Giuseppe Peano (1858-1932). Nel suo *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (1887), il matematico torinese ipotizza di "modernizzare" il metodo di esaustione già citato in precedenza. Ad esempio, prendo un insieme limitato in  $\mathbb{R}^2$ , ossia quello che all'epoca veniva denominato *campo piano*, potremmo considerare dei poligoni che contengono tale insieme - che chiameremo *poligoni esterni* - e dei poligoni che sono contenuti in tale insieme - i cosiddetti *poligoni interni*.



Se l'estremo inferiore dei poligoni esterni coincide con quello superiore di quelli interni, potremmo dire che l'insieme è misurabile e ha area pari a questo limite. Inoltre, Peano fornisce una condizione necessaria e sufficiente: la differenza tra i poligoni esterni ed interni deve essere piccola a piacere, ossia la frontiera dell'insieme (che chiaramente è contenuta nell'area di piano fra i poligoni esterni ed interni) dovrà avere misura nulla. Possono capitare anche insiemi che non ammettono area.

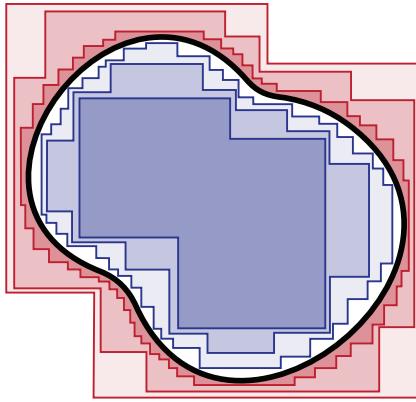
**ESEMPIO.** Supponiamo di prendere tutti i punti a distanza *razionale*  $r \leq 1$  dall'origine, cioè infinite circonferenze di raggio razionale interne al disco di raggio 1.

Chiaramente l'area interna è uguale a 0, mentre essendo l'insieme denso nel disco di raggio 1, ogni poligono che la contiene contiene il cerchio e quindi l'area esterna è maggiore o uguale 1: essendo l'area interna e l'area esterna diverse, il poligono non ammette aree.

La misura di Peano, per quanto innovativa, risente di alcuni problemi: parlare di poligoni o solidi poligonali è facile farlo in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , ma non è generalizzabile in dimensioni maggiori: ad esempio, qual è la misura di un ipersolido poligonale di dimensione 4? Inoltre, la misura di Peano non è numerabilmente additiva, ossia un'unione *infinita numerabile* di insiemi misurabili secondo Peano non è necessariamente ancora misurabile.

Qualche anno dopo i lavori di Peano, il matematico francese Marie Camille Jordan (1838-1922) estende il concetto di misura introdotta da Peano a una generica dimensione  $n$ ,

utilizzando invece che poligoni o solidi poligoni delle *unioni di intervalli, rettangoli* o, in generale, *parallelepipedi n-dimensionali*, poiché questi hanno una misura ben nota!



Anche se questa misura coincide con quella di Peano (dopotutto, le unioni di parallelepipedi sono un *caso particolare* di ipersolidi poligonali), in questo modo si risolve il *primo problema* dei due problemi enunciati precedentemente; ciò nonostante, questa definizione non è ancora una misura numerabilmente-additiva.

#### 5.4.1 Definizione e osservazioni sulla misura di Peano-Jordan

##### DEFINIZIONE 5.4.1. - PARALLELEPIPEDO $n$ -DIMENSIONALE.

Un **parallelepipedo**  $n$ -dimensionale è un *plurintervallo*, ossia un prodotto cartesiano di  $n$  intervalli:

$$P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad \text{con } -\infty < a_i < b_i < +\infty \quad (5.13)$$

Posta la **lunghezza** di un intervallo come

$$\mathcal{L}([a_i, b_i]) = b_i - a_i \quad (5.14)$$

la misura  $n$ -dimensionale del parallelepipedo è

$$V_n(P) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}([a_i, b_i]) \quad (5.15)$$

Introduciamo formalmente la misura esterna e la misura interna di un insieme limitato  $A$  come estremi inferiori e superiori di un **insieme elementare**, cioè un'unione finita di parallelepipedi:

- **MISURA ESTERNA:**

$$m_{PJ}^X(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n V_n(P_i) \mid P_i \text{ parallelepipedi, } \bigcup_{i=1}^n P_i \supseteq A \right\} \quad (5.16)$$

- **MISURA INTERNA:**

$$m_{PJ,X}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n V_n(P_i) \mid P_i \text{ parallelepipedi, } \bigcup_{i=1}^n P_i \subseteq A \right\} \quad (5.17)$$

In generale  $m_{PJ,X}(A) \leq m_{PJ}^X(A)$ .

**DEFINIZIONE 5.4.2. - MISURA DI PEANO-JORDAN .**

Un insieme limitato  $A$  è **misurabile secondo Peano-Jordan** se

$$m_{PJ}^X(A) = m_{PJ,X}(A) \quad (5.18)$$

e la **misura** (secondo P-J) dell'insieme è

$$m_{PJ}(A) = m_{PJ}^X(A) = m_{PJ,X}(A) \quad (5.19)$$

**PROPOSIZIONE 5.4.1. - CRITERIO DI MISURABILITÀ .**

L'insieme limitato  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è misurabile per Peano-Jordan se e solo se  $\forall \varepsilon > 0, \exists P \subseteq A, Q \supseteq A$  con  $P, Q$  insiemi elementari tali che

$$m_{PJ}(Q) - m_{PJ}(P) \leq \varepsilon \quad (5.20)$$

□

Definito

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ è P-J misurabile}\} \quad (5.21)$$

essa è un'*algebra*, ma non una  $\sigma$ -algebra, cioè non è chiusa rispetto all'unione *numerabile infinita*.

**ESEMPIO - CONTROESEMPIO DELL'ADDITIVITÀ NUMERABILE DELLA MISURA DI P-J .**

Consideriamo

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \bigcup_{n \geq 1} \{r_n\}$$

dove  $\{r_n\}$  è un'enumerazione di razionali in  $[0, 1]$ .

$\{r_n\}$  è un punto e dunque è misurabile con misura nulla, ma

$$\bigcup_{n \geq 1} \{r_n\} = E$$

non è misurabile, dato che

$$\begin{cases} m_{PJ}^X(E) = 1 \\ m_{PJ,X}(E) = 0 \end{cases}$$

In altre parole, la misura secondo Peano-Jordan è *additiva*, ma non  $\sigma$ -additiva.

**DIGRESSIONE.** Nella letteratura italiana si è soliti parlare "misura di Peano-Jordan", quando in realtà questa terminologia è impropria, non essendo una *misura* nel senso moderno del termine. Nell'anglosfera lo stesso concetto viene chiamato "Jordan content".

## 5.5 MISURA SECONDO LEBESGUE

Per quanto innovativa, la misura di Peano-Jordan presenta alcuni notevoli problemi:

- È definita solo per *insiemi limitati*.
- Non è *numerabilmente additività*: la misura di un'unione numerabilmente infinita di insiemi misurabili non è necessariamente misurabile.

Il concetto *moderno* di misura di un sottoinsieme dello spazio  $n$ -dimensionale viene per la prima volta presentato in *Intégrale, longueur, aire* (1902) dal matematico francese Henri Lebesgue (1875-1941) nell'ambito dell'annoso problema delle discontinuità nell'integrale

definito.

La costruzione della misura secondo Lebesgue inizia in modo analogo a quella di Peano-Jordan, definendo i *parallelepipedi*; per poter definire la misurabilità di insiemi illimitati si ammettono parallelepipedi *degeneri*.

**DEFINIZIONE 5.5.1. - PARALLELEPIPEDO  $n$ -DIMENSIONALE .**

Un **parallelepipedo**  $n$ -dimensionale è un *plurintervallo*, ossia un prodotto cartesiano di  $n$  intervalli eventualmente *degeneri*:

$$P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad \text{con } -\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty \quad (5.22)$$

Posta la **lunghezza** di un intervallo come

$$\mathcal{L}([a_i, b_i]) = \begin{cases} b_i - a_i & \text{se } -\infty < a_i \leq b_i < +\infty \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.23)$$

la misura  $n$ -dimensionale del parallelepipedo è

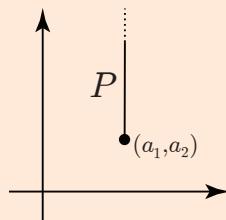
$$V_n(P) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}([a_i, b_i]) \quad (5.24)$$

con la convenzione che  $0 \cdot \infty = 0$ .

**OSSERVAZIONE.** Come mai  $0 \cdot \infty$  non è lasciato indeterminato, ma posto proprio uguale a 0? Per capirlo, facciamo prima un esempio in dimensione 2; consideriamo il rettangolo degenere

$$P = \{a_1\} \times (a_2, +\infty).$$

Esso è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , ma ha chiaramente una sola dimensione: seppur come semiretta ha una lunghezza ben definita (e in tal caso sarebbe infinita tale lunghezza), è ragionevole dire che come oggetto *bidimensionale* abbia *area* 0.



In altre parole, se almeno un intervallo che compone il parallelepipedo  $n$ -dimensionale ha lunghezza nulla,  $P$  è da intendersi come elemento di dimensione  $k$  in uno spazio  $n$ -dimensionale, con  $k < n$ . In questo caso, la sua misura  $n$ -dimensionale è nulla, anche se fosse *illimitato* in diverse direzioni, da qui spiegato il perché di  $0 \cdot \infty = 0$ .

A differenza di Peano-Jordan, Lebesgue definisce solamente la **misura esterna** dell'insieme:

$$m^X(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n V_n(P_i) \mid P_i \text{ parallelepipedo aperto, } \bigcup_{i=1}^n P_i \supseteq A \right\} \quad (5.25)$$

dove per parallelepipedo *aperti* si intende un plurintervallo definito da intervalli aperti. Essa si può vedere come una funzione

$$m^X : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty] \quad (5.26)$$

che gode delle seguenti proprietà:

- Se l'insieme è un parallelepipedo  $n$ -dimensionale, la misura esterna del parallelepipedo ovviamente coincide con la misura  $n$ -dimensionale di esso:

$$m^X(P) = V_n(P), \forall P \text{ parallelepipedo} \quad (5.27)$$

- È *monotona*:

$$m^X(A) \leq m^X(B), \forall A \subseteq B \quad (5.28)$$

- È  $\sigma$ -*subadditiva*:

$$m^X\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} m^X(A_n), \forall A_n \subseteq \mathbb{R}^n \quad (5.29)$$

- È *invariante per traslazioni*:

$$m^X(A + \{x\}) = m^X(A), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \quad (5.30)$$

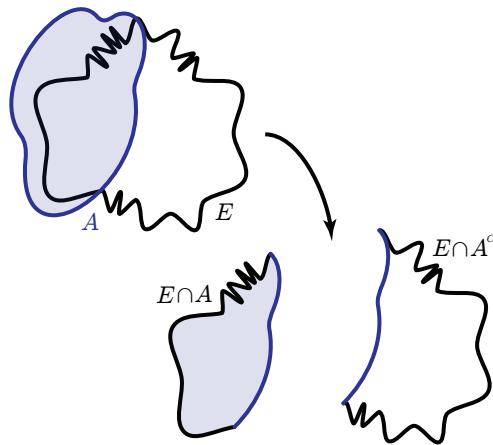
Osserviamo che per  $m^X$  vale solo la  $\sigma$ -*subadditività*, ma non la  $\sigma$ -*additività*.

**DEFINIZIONE 5.5.2. - INSIEME MISURABILE SECONDO LEBESGUE (CRITERIO DI CARATHEODORY)**

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è **misurabile secondo Lebesgue** se  $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$  vale

$$m_n^X(E) = m_n^X(E \cap A) + m_n^X(E \cap A^C) \quad (5.31)$$

$E$  è un **insieme test** arbitrario (non necessariamente misurabile!):  $A$  è misurabile se decompone bene  $E$  in due sottoinsiemi misurabili  $E \cap A$  e  $E \cap A^C$ .



**PROPOSIZIONE 5.5.1. - GLI INSIEMI MISURABILI SECONDO LEBESGUE SONO UNA  $\sigma$ -ALGEBRA .**  
La collezione di insiemi

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ è Lebesgue-misurabile}\}$$

è una  $\sigma$ -algebra.

□

### DEFINIZIONE 5.5.3. - MISURA SECONDO LEBESGUE.

La **misura secondo Lebesgue** è la restrizione della misura esterna a  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ :

$$m_n = m_n^X|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \text{ ossia } m_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty] \quad (5.32)$$

#### 5.5.1 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

La definizione data di insieme misurabile secondo Lebesgue non è particolarmente *operativa*, in quanto richiede di controllare che un generico insieme test decomponga bene l'insieme di cui vogliamo verificare la misurabilità. Di seguito presentiamo alcune classi importanti di insiemi misurabili secondo Lebesgue.

- **INSIEMI ELEMENTARI:** (unioni di parallelepipedi, anche degeneri):

$$\begin{aligned} m_n(P) &= V_n(P) \\ m_n\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} P_i\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} V_n(P_i) \end{aligned}$$

In particolare:

- ◊ Preso  $P = \mathbb{R}^n$ , allora  $m_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ .
- ◊ Preso  $P = \{x\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , allora  $m_n(\{x\}) = 0$ .

- **BORELIANI:**  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

È importante sottolineare che ci sono insiemi misurabili *non* Boreliani.<sup>4</sup>

- **TUTTI GLI INSIEMI AVENTI MISURA ESTERNA NULLA:**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^n \quad m_n^X(A) = 0 \implies A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ e } m_n(A) = 0$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo provare che  $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$m_n^X(E) = m_n^X(E \cap A) + m_n^X(E \cap A^C)$$

Ricordiamo che  $m_n^X$  è  $\sigma$ -subadditiva e quindi finito-subadditiva, quindi

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^C) \implies m_n^X(E) \leq m_n^X(E \cap A) + m_n^X(E \cap A^C)$$

È sufficiente allora provare la diseguaglianza opposta. Osserviamo che  $E \cap A^C \subseteq E$ , dunque per monotonia di  $m_n^X$  si ha

$$m_n^X(E) \geq m_n^X(E \cap A^C) = m_n^X(E \cap A^C) + 0 = m_n^X(E \cap A^C) + m_n^X(E \cap A)$$

Infatti  $E \cap A \subseteq A$  implica, per monotonia di  $m_n^X$  che

$$0 \leq m_n^X(E \cap A) \leq m_n^X(A) = 0$$

e quindi  $m_n^X(E) \geq m_n^X(E \cap A^C) + m_n^X(E \cap A)$ . □

<sup>4</sup>Si veda pag. 106.

**ATTENZIONE!** Non tutti gli insiemi sono misurabili! Se supponiamo vero l'Assioma della Scelta, l'**insieme di Vitali** è un insieme non misurabile in  $\mathbb{R}$  rispetto alla misura di Lebesgue unidimensionale<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Si veda pag. 104 per la definizione dell'insieme di Vitali e la dimostrazione di ciò.

Nella teoria di Lebesgue hanno un ruolo importante gli insiemi di misura nulla: esplicitiamo il legame tra misura nulla e cardinalità. È noto che ogni singolo punto ha misura nulla; osserviamo che presa una famiglia di punti  $\{x_n\}$  si ha

$$0 \leq m_n \left( \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\} \right) \leq \sum_{n \geq 1} m_n (\{x_n\}) = 0$$

Ogni insieme **numerabile** è misurabile e ha misura nulla.

**ESEMPIO.** Posto  $n = 1$ , ossia consideriamo la misura in  $\mathbb{R}$ , si ha

$$m_1(\mathbb{Q}) = 0, \quad m_1(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$$

#### 5.5.1.1 L'insieme (ternario) di Cantor

Esistono anche insiemi di misura nulla con *cardinalità del continuo*. Uno di questi è l'**insieme ternario di Cantor**, il quale possiede diverse proprietà interessanti e non particolarmente immediate. Esso si costruisce partendo dall'intervallo  $[0, 1]$  con il seguente procedimento iterativo:

- **Passo 0.** È semplicemente l'intervallo  $[0, 1]$ .



- **Passo 1.** Suddividiamo  $[0, 1]$  in tre sottointervalli di ugual lunghezza

$$I_1 = [0, 1/3], \quad I_2 = \left(\frac{1}{3}, 2/3\right), \quad I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

e rimuoviamo l'intervallo aperto intermedio  $I_2$ , lasciando gli intervalli  $I_1$  e  $I_3$ .



- **Passo 2.** Prendiamo ciascun intervallo che avevamo al passo 1 e lo suddividiamo in modo analogo in tre parti uguali; per ciascun intervallo eliminiamo il sottointervallo aperto centrale, lasciando dunque 4 intervalli di lunghezza  $1/9$ .



- **Passo 3 e successivi.** Ripetiamo il procedimento del passo 2 con gli intervalli ottenuti nel passaggio precedente.



I punti che rimangono dopo infiniti passi è noto come **insieme di Cantor  $C$** .

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left( \frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right)$$

Ci si potrebbe chiedere se ci sono ancora dei punti in questo insieme: dopotutto, abbiamo rimosso e rimosso continuamente degli intervalli. Sorprendentemente, dopo infiniti di questi passi ci sono ancora punti che rimangono, ma la peculiarità è che sono addirittura **non numerabili!**

**TEOREMA 5.5.1. - INNUMERABILITÀ DELL'INSIEME DI CANTOR .**

*Si denoti con  $C$  l'insieme ternario di Cantor. Esiste una funzione suriettiva da  $C$  in  $[0, 1]$ ; conseguentemente,  $C$  ha la cardinalità del continuo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che per ogni numero  $x \in [0, 1]$  esiste una successione  $\{i_n\}_{n \geq 1}$  di interi, con  $i_n \in \{0, 1, 2\}$ , tale che

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i_n}{3^n}.$$

Tale successione è unica, tranne quando  $x$  è della forma  $q/3^n$ , con  $q \in \mathbb{N}$ , nel qual caso esistono esattamente due successioni. Descriviamo l'insieme di Cantor  $C$  usando questa rappresentazione in *base tre*.

- Osserviamo che  $1/3$  si scrive come  $0.1_3$  e  $2/3$  si scrive come  $0.2_3$ . Il *primo intervallo* rimosso nella costruzione dell'insieme di Cantor consiste quindi di tutti i numeri del tipo  $0.1abc\dots_3$ , dove  $abc\dots$  è una qualsiasi sequenza di numeri diversi dalle sequenze estreme  $0000\dots$  e  $222\dots$ . I numeri residui dopo il primo passo della costruzione di  $C$  sono esattamente quelli scrivibili come  $0.0abc\dots_3$  e  $0.2abc\dots_3$ .
- Al secondo passo si rimuovono tutti i numeri del tipo  $0.01abc\dots_3$  e  $0.21abc\dots_3$ . Segue che i numeri che non vengono mai rimossi e che quindi appartengono all'insieme  $C$  sono esattamente quelli che possono essere scritti come  $0.abc\dots_3$  usando solo le cifre 0 e 2.

Definiamo ora una funzione  $f : C \longrightarrow [0, 1]$  associando ad ogni elemento di  $C$  scritto come  $0.abc\dots_3$ , dove le cifre decimali sono solo 0 e 2, il numero di  $[0, 1]$  la cui rappresentazione in base due è quella ottenuta dalla sequenza  $0.abc\dots$  sostituendo ogni cifra 2 con la cifra 1.

La funzione  $f$  è chiaramente suriettiva: dato un numero  $x \in [0, 1]$ , la sua controimmagine mediante  $f$  è l'elemento dell'insieme di Cantor la cui rappresentazione decimale ternaria si ottiene dalla rappresentazione binaria di  $x$  sostituendo ogni cifra 1 con la cifra 2.

L'esistenza di una funzione suriettiva da  $C$  in  $[0, 1]$  implica<sup>a</sup> che la cardinalità di  $C$  è maggiore o uguale a quella di  $[0, 1]$ :

$$|C| \geq |X|$$

D'altra parte,  $C \subseteq [0, 1]$  e dunque<sup>b</sup> la sua cardinalità è minore o uguale a quella di  $[0, 1]$ .

$$|C| \leq |X|$$

Concludiamo quindi che  $C$  e  $[0, 1]$  hanno la stessa cardinalità e dunque  $C$  ha la cardinalità del continuo  $\mathfrak{c}$ .  $\square$

<sup>a</sup>In "Brevi cenni di teoria degli insiemi", a pag. 212 è possibile trovare maggiori dettagli su questa proprietà.

<sup>b</sup>In "Brevi cenni di teoria degli insiemi", a pag. 211 è possibile trovare maggiori dettagli su questa proprietà.

**DIGRESSIONE.** Si noti che l'insieme di Cantor è un **frattale**, dato che è sempre uguale a due copie di se stesso, se ogni copia è ristretta di un terzo e traslata.

Pur essendo non numerabile esso ha lunghezza nulla. Nello specifico, consideriamo la misura di Lebesgue  $m_1$  e ripercorriamo i passaggi della costruzione dell'insieme di Cantor:

- **Passo 0.**  $C_0$  coincide con l'intervallo  $[0, 1]$ :

$$m_1(C_0) = 1$$

- **Passo 1.** Togliamo un segmento di lunghezza  $1/3$  da un segmento di lunghezza 1:

$$m_1(C_1) = m_1(C_0) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- **Passo 2.** Togliamo dei segmenti di lunghezza complessiva  $2/9$  da un'unione di segmenti di lunghezza  $2/3$ :

$$m_1(C_2) = m_1(C_1) - \frac{2}{9} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Ad ogni passo l'insieme ha sempre lunghezza  $2/3$  quello del precedente. Al passo  $n$ -esimo si ha

$$m_1(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Poiché l'insieme di Cantor è prodotto dopo infiniti passi, allora

$$m_1(C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_1(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

### 5.5.2 Regolarità della misura di Lebesgue

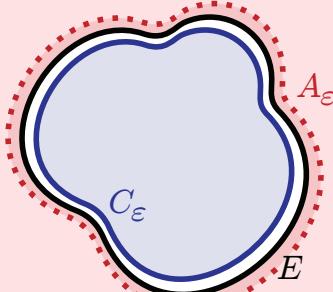
Ora enunciamo una proprietà della misura di Lebesgue, detta **regolarità**.

#### TEOREMA 5.5.2. - REGOLARITÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE .

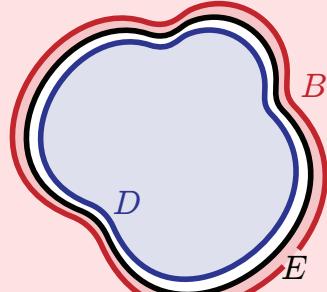
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists A_\varepsilon$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  tale che
  - $E \subseteq A_\varepsilon$ .
  - $m_n^X(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$ .
3.  $\exists B$  Borealiano di  $\mathbb{R}^n$  tale che
  - $E \subseteq B$ .
  - $m_n^X(B \setminus E) = 0$ .
4.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists C_\varepsilon$  chiuso di  $\mathbb{R}^n$  tale che
  - $E \supseteq C_\varepsilon$ .

- $m_n^X(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon.$
5.  $\exists D$  Boreliano di  $\mathbb{R}^n$  tale che
- $E \supseteq D.$
  - $m_n^X(E \setminus D) = 0.$



Caso 2. + 4.



Caso 3. + 5.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo le catene di implicazioni

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \quad (i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i)$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Consideriamo il caso  $m_n(E) < +\infty$ . Per definizione di  $m_n^X$  e di inf, fissato  $\varepsilon > 0$   $E$  è contenuto in un ricoprimento di parallelepipedi aperti tale che

$$\sum_{i=1}^{+\infty} V_n(P_i) < m_n(E) + \varepsilon$$

dunque, posto

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n,$$

l'aperto  $A$  verifica, per subadditività numerabile,

$$m_n(A) < m_n(E) + \varepsilon$$

e dal fatto che  $m_n(E) < +\infty$  segue allora

$$m_n(A \setminus E) = m_n(A) - m_n(E) < \varepsilon$$

Sia ora  $m_n(E) = +\infty$ . Possiamo vederlo come la seguente unione:

$$E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (E \cap Q_i),$$

dove  $Q_i$  è una famiglia di parallelepipedi privi di punti interni comuni (ossia che hanno in comune al più i bordi), la cui unione sia  $\mathbb{R}^n$ . Dato che  $m_n(E \cap Q_i) < m_n(E) < +\infty$ , per quanto già dimostrato esistono degli  $A_i \supseteq E \cap Q_i$  tali che

$$m_n(A_i \setminus (E \cap Q_i)) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Allora possiamo prendere come aperto

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Esso contiene  $E$ , e poiché

$$A \setminus E = \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} (E \cap Q_i) \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus (E \cap Q_i))$$

si conclude che

$$m_n(A \setminus E) < \sum_{i=1}^{+\infty} m_n(A_i \setminus (E \cap Q_i)) < \varepsilon$$

(ii)  $\implies$  (iii) Per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , sia  $A_i$  un aperto contenente  $E$ , tale che

$$m_n^X(A_i \setminus E) < \frac{1}{i+1}.$$

L'insieme

$$B = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$$

è un Boreliano contenente  $E$  e si ha, per monotonia,

$$m_n^X(B \setminus E) \leq m_n^X(A_i \setminus E) < \frac{1}{n+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

cioè  $m_n^X(B \setminus E) = 0$ .

(iii)  $\implies$  (i) Scrivendo  $E = B \setminus (B \setminus E)$ , la tesi segue dal fatto che l'insieme  $B$  è misurabile perché boreliano, mentre l'insieme  $B \setminus E$  è misurabile avendo, per ipotesi, misura esterna nulla. Dunque  $E$  è misurabile.

(i)  $\implies$  (iv)  $\implies$  (v)  $\implies$  (i) Queste implicazioni si dimostrano facilmente applicando ad  $E^C$  gli enunciati già dimostrati.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Dai punti 2 e 4 si può caratterizzare un insieme  $E$  misurabile secondo Lebesgue come un insieme che *differisce poco*, in termini della misura esterna, sia da aperti contenenti  $E$ , sia da chiusi contenuti in  $E$ .

Dai punti 3 e 5, invece, si può vedere ogni insieme misurabile secondo Lebesgue come un Boreliano a cui abbiamo tolto o aggiunto, rispettivamente, un insieme di misura nulla. Nello specifico, dal punto 5,

$$E = D \cup (E \setminus D)$$

### 5.5.3 Confronto tra la misura di Peano-Jordan e di Lebesgue

Come abbiamo visto, la misura di Peano-Jordan soddisfa solo alcune proprietà della misura in senso assiomatico, essendo  $\sigma$ -subadditiva, mentre la misura secondo Lebesgue è a tutti gli effetti una misura assiomatica moderna. Ci si può dunque chiedere se tali concetti sono incompatibili tra di loro oppure se c'è una qualche relazione tra di esse.

È già noto che non tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue lo sono secondo Peano-

Jordan.

**ESEMPIO.** Consideriamo  $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .

- $E$  numerabile implica che  $E$  è Lebesgue-misurabile e  $m_1(E) = 0$ .
- $E$  non è Peano-Jordan misurabile, in quanto

$$m_{PJ}^X(E) = 1 \neq 0 = m_{PJ,X}(E)$$

Invece, si vede banalmente che gli insiemi elementari, ossia le unioni di parallelepipedi  $n$ -dimensionali, sono misurabili sia secondo Lebesgue, sia secondo Peano-Jordan (a patto di fare un'unione finita di elementi); in particolare, le misure coincidono.

$$\begin{aligned} m_{PJ}(P) &= m_n(P) = V_n(P) \\ m_{PJ}\left(\bigcup_{i=1}^k P_i\right) &= m_n\left(\bigcup_{i=1}^k P_i\right) = \sum_{i=1}^k V_n(P_i) \end{aligned}$$

Il seguente teorema ci afferma un risultato importante: *tutti* gli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan sono misurabili secondo Lebesgue e le misure in tal caso coincidono.

**TEOREMA 5.5.3. - MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN IMPLICA MISURABILE SECONDO LEBESGUE.**

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  limitato. Allora

1. Se  $E$  è Peano-Jordan misurabile allora  $E$  è Lebesgue-misurabile.
2. Se vale ciò, allora  $m_{PJ}(E) = m_n(E)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il punto 1. Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e Peano-Jordan misurabile. Per provare che  $E$  è misurabile secondo Lebesgue useremo il teorema di *regolarità* precedentemente dimostrato.

In particolare, proviamo che  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$  aperto tale che

- $E \subseteq A_\varepsilon$ .
- $m_n^X(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$ .

Sappiamo che  $E$  è misurabile secondo Peano-Jordan, dunque per il criterio equivalente  $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$  unioni finite di parallelepipedi con  $B_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon$  tali che  $m_{PJ}(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$ . Allora l'insieme  $A_\varepsilon$  così definito è proprio quello che stavamo cercando. Noto innanzitutto che  $A_\varepsilon \setminus E \subseteq A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon$ , per monotonia della misura esterna otteniamo:

$$m_n^X(A_\varepsilon \setminus E) < m_n^X(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) = m_{PJ}^X(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) = m_{PJ}(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$$

□

## 5.6 DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI MISURA

La definizione di misura di Lebesgue che abbiamo analizzato nella scorsa sezione non è esattamente la stessa che il matematico francese diede nella sua tesi di laurea, bensì una rielaborazione successiva con alcune modifiche; nello specifico, la trattazione moderna viene inquadrata nella teoria **assiomatica** della misura, introdotta già prima di Lebesgue da **Emil Borel** (1871-1956) in *Léçons sur la théorie des fonctions* (1898).

I concetti di  $\sigma$ -algebra e insieme misurabile che abbiamo già affrontato si possono ricondurre proprio a Borel, così come la seguente *definizione assiomatica* di misura.

**DEFINIZIONE 5.6.1. - MISURA E SPAZIO DI MISURA .**

Dato  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile, una funzione  $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$  è detta **misura** se soddisfa le seguenti proprietà:

- **NON NEGATIVITÀ:**  $\forall A \in \mathcal{M}, \mu(A) \geq 0$ .
- **INSIEME VUOTO NULLO:**  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- **$\sigma$ -ADDITIVITÀ:**  $\forall A_n \in \mathcal{M}$  tali che  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ , allora

$$\mu \left( \bigsqcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \quad (5.33)$$

In tal caso la terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  è detta **spazio di misura**.

- $\mu$  si dice **completa** se  $\forall S \subseteq N, \forall N \in \mathcal{M}: \mu(N) = 0 \implies S \in \mathcal{M}$  e  $\mu(S) = 0$ .
- $\mu$  si dice **finita** se  $\mu(x) < +\infty$ .
- $\mu$  si dice  **$\sigma$ -finita** se
  - ◊  $\mu(x) = +\infty$ .
  - ◊  $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ , con  $X_n \in \mathcal{M}$  tale che  $\mu(X_n) \leq +\infty$ .
- $\mu$  si dice **di probabilità** se  $\mu(x) = 1$ .

**OSSERVAZIONE.** Ogni misura può essere opportunamente resa completa estendendo la  $\sigma$ -algebra di definizione.

**ESEMPI - SPAZI DI MISURA .**

1.  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  è spazio di misura con la **misura di Lebesgue**

$$m_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty] \quad (5.34)$$

Osserviamo che  $m_n$  è  $\sigma$ -finita perché  $m_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$  con

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \geq 0} B_n(0) \quad \text{con } m_n(B_n(0)) < +\infty$$

Inoltre, essa è **completa**.

2. Fissato  $x_0 \in X$  insieme qualunque,  $(X, \mathcal{P}(X))$  è uno spazio di misura con la funzione  $\delta$  di **Dirac concentrata in  $x_0$** :

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} \end{aligned} \quad (5.35)$$

3. Preso  $X$  insieme qualunque e scelti

- $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una famiglia di elementi di  $X$ .
- $p_n \geq 0, \forall n \geq 0$  dei **pesi**.

allora  $(X, \mathcal{P}(X))$  è spazio di misura con la **misura di conteggio pesata**:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \sum_{n: x_n \in E} p_n \end{aligned} \quad (5.36)$$

Se

$$\sum_{n: x_n \in E} p_n = 1,$$

$\mu_p$  è una **misura di probabilità discreta**, come la m.d.p. *binomiale*, di *Poisson*, ecc...

4. Preso  $X = \mathbb{N}$ , i punti  $x_n = n, \forall n \geq 1$  e  $p_n = 1, \forall n \geq 1$ , allora  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  è spazio di misura con la **misura di conteggio semplice**, un caso particolare dell'esempio precedente:

$$\forall E \subseteq \mathbb{N}, \mu(E) = \sum_{n: n \in E} 1 = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ infinito} \end{cases} \quad (5.37)$$

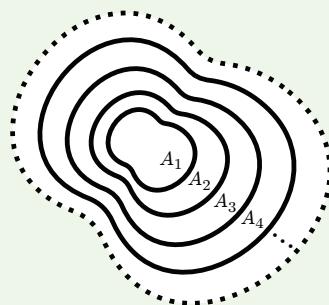
#### PROPRIETÀ 5.6.1. - CONTINUITÀ DELLA MISURA .

Sia  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile,  $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$  una misura. Allora  $\mu$  è una funzione **continua da sopra e da sotto** - dove la continuità è quella delle funzioni definite su una collezione di insiemi:

- Per ogni successione di insiemi  $A_n$  crescente, cioè tale che  $A_i \subseteq A_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \quad (5.38)$$

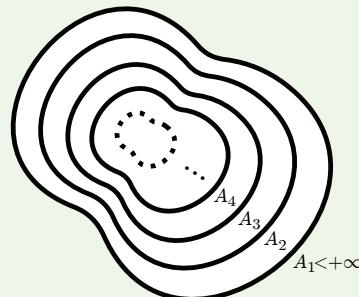
e  $\mu$  è detta **continua da sotto**.



- Per ogni successione di insiemi  $A_n$  decrescente, cioè tale che  $A_{i+1} \subseteq A_i, \forall i \in \mathbb{N}$ , con  $\mu(A_1) < +\infty$ , si ha

$$\mu \left( \bigcap_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \quad (5.39)$$

e  $\mu$  è detta **continua da sopra**.



**ATTENZIONE!** Per la continuità da sopra è fondamentale l'ipotesi che  $\mu(A_1)$  è finita.

**ESEMPIO - CONTROESEMPIO ALLA CONTINUITÀ DA SOPRA .**

Consideriamo la misura di Lebesgue unidimensionale  $m_1$  e prendiamo la successione  $A_n = [n, +\infty)$ . Essa è decrescente in quanto

$$A_{n+1} = [n+1, +\infty) \subsetneq [n, +\infty) = A_n.$$

Si ha  $m(A_n) = +\infty$ ,  $\forall n$ , e quindi in particolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = +\infty$$

D'altro canto si ha

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset \implies \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$$

**5.7 FAMIGLIE DI INSIEMI NELLA TEORIA DELLA MISURA E RELAZIONI TRA DI LORO**

Concludiamo questo capitolo alcune delle più comuni *famiglie di insiemi* che si incontrano nello studio della teoria della misura.

Nome	Notazione	Cardinalità
Insieme delle parti	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$
Insiemi misurabili (secondo Lebesgue)	$\mathcal{L}(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$
Boreiani	$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{c}$
Topologia (famiglia degli aperti)	$\mathcal{T}$	$\mathfrak{c}$

**PROPOSIZIONE 5.7.1. - RELAZIONI TRA CLASSI DI INSIEMI .**

Valgono le seguenti inclusioni:

$$\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad (5.40)$$

Mostreremo alcune di queste inclusioni in modo formale, mentre per altre daremo solo un'intuizione della dimostrazione.

**Cardinalità dell'insieme delle parti dei reali** Se  $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$  è la cardinalità del continuo, allora la cardinalità dell'*insieme delle parti dei reali*<sup>5</sup> è

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}} \quad (5.41)$$

**Cardinalità degli insiemi misurabili** Per trovare quanti sono gli insiemi misurabili, consideriamo l'*insieme di Cantor*  $C$ . Abbiamo visto<sup>6</sup> che esso gode delle seguenti proprietà:

1. Il numero di punti prima e dopo il processo iterativo per costruire  $C$  rimane invariato, dunque  $C$  è *non numerabile* e ha la stessa cardinalità di  $[0, 1]$ :

$$|C| = |[0, 1]| = \mathfrak{c}$$

2.  $C$  è misurabile e  $m_1(C) = 0$ .

Dal punto 1 segue che l'insieme delle parti dell'insieme di Cantor ha cardinalità  $\mathcal{P}(C) = 2^{\mathfrak{c}}$ , mentre dal punto 2 si può dedurre che ogni sottoinsieme di  $C$  ha misura nulla ed è pertanto misurabile. Insiematicamente parlando, le relazioni sono

$$\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Passando alle cardinalità:

$$2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{P}(C)| \leq |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}} \implies |\mathbb{R}| = 2^{\mathfrak{c}}$$

**Inclusione stretta di  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$**  Il fatto che la cardinalità degli insiemi Lebesgue-misurabili in  $\mathbb{R}$  coincida con quella dell'insieme delle parti di  $\mathbb{R}$  non è sufficiente<sup>7</sup> per affermare che i due insiemi coincidano; costruiamo ora un sottoinsieme particolare di  $\mathbb{R}$  che risulta *non misurabile*.

#### DEFINIZIONE 5.7.1. - INSIEME DI VITALI .

- . Considerata in  $\mathbb{R}$  la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} \quad (5.42)$$

possiamo definire delle classi di equivalenza in  $\mathbb{R}/\sim$ :

$$\begin{aligned} [0] &= \left\{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{123}{72}, \dots\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \\ [\sqrt{2}] &= \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \sqrt{2} - 1, \dots\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{2} + q, q \in \mathbb{Q}\} \\ [\pi] &= \left\{\pi, \pi - \frac{3}{4}, \pi + 23, \dots\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + q, q \in \mathbb{Q}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Scelto<sup>a</sup> un elemento che stia in  $[0, 1]$  da ogni classe di equivalenza, definisco l'**insieme di Vitali**  $V$  come unione di questi elementi.

<sup>a</sup>Per poter fare questa operazione è necessario supporre l'*Assioma di Scelta*.

<sup>5</sup>In "Brevi cenni di teoria degli insiemi", a pag. 214 è possibile trovare qualche dettaglio sulla cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme e a pag. 217 su quella dell'insieme delle parti dei reali.

<sup>6</sup>Si veda pag. 95.

<sup>7</sup>Si veda "Brevi cenni di teoria degli insiemi", pag. 211.

Per costruzione  $V \subseteq [0, 1]$ . Preso l'insieme numerabile  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , possiamo prendere una sua numerazione  $\{q_n\}$  e definire delle *traslazioni* dell'insieme di Vitali  $V$ :

$$V_n = V + q_n \subseteq [-1, 2]$$

**LEMMA 5.7.1. - LEMMA 1 DI VITALI - GLI INSIEMI DI VITALI TRASLATI SONO 2 A 2 DISGIUNTI .**  
Dato l'insieme di Vitali  $V$  e una enumerazione  $\{q_n\}$  di  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , allora  $V_n \cap V_m = \emptyset, \forall n \neq m$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo  $x \in V_n \cap V_m$ : questo implica che  $x \in V_n$  e  $x \in V_m$ , ossia

$$\begin{cases} x = y + q_n, \quad y \in V, \quad q_n \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ x = z + q_m, \quad z \in V, \quad q_m \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \end{cases}$$

Pertanto,

$$y + q_n = z + q_m \iff y - z = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$$

Poiché  $y$  e  $z$  differiscono di un razionale, essi appartengono alla stessa classe di equivalenza in  $\mathbb{R}/\sim$ , ma dato che nella costruzione dell'insieme di Vitali abbiamo preso<sup>a</sup> uno e un solo elemento da tale classe, allora segue che  $y = z$ . È immediato verificare che  $q_m = q_n$  e, essendo elementi numerazione, allora  $n = m$ . In altre parole, l'intersezione non è vuota solo se  $V_n = V_m$ .  $\square$

<sup>a</sup>In virtù dell'*Assioma di Scelta*.

**LEMMA 5.7.2. - LEMMA 2 DI VITALI - OGNI NUMERO REALE IN  $[0, 1]$  APPARTIENE AD UN  $V_n$  PER UN CERTO  $n$ :**

Dato l'insieme di Vitali  $V$  vale la seguente relazione:

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in [0, 1]$ . Poiché la relazione  $\sim$  forma una partizione di  $\mathbb{R}$ , deve esistere  $y$  tale che  $x - y = q \in \mathbb{Q}$ ; riscrivendo tale relazione si ha  $x = y + q$ , ossia  $x = y + q_n$  per un certo  $n$ .  $\square$

Possiamo osservare alcune proprietà sulla base dei due lemmi appena mostrati:

■ **Conseguenze del lemma 1:**

$$m \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } m(V) = 0 \\ +\infty & \text{se } m(V) > 0 \end{cases}$$

■ **Conseguenze del lemma 2:**

$$1 = m([0, 1]) \leq m \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) \leq m([-1, 2]) = 3$$

In altre parole, si deduce che

$$1 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V) \leq 3$$

ma poiché la somma di infinite copie di  $m(V)$  o è 0 o è  $+\infty$  per la conseguenza del lemma 1, in nessuno dei due casi la somma sta in  $[1, 3]$ . Pertanto,  $V$  non è misurabile, in quanto non possiamo associargli un valore  $m(V)$ .

**Cardinalità dei Boreliani e inclusione stretta di  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$**  Per *induzione transfinita* si dimostra che i Boreliani hanno la cardinalità del continuo.

$$|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \quad (5.43)$$

Pertanto, l'inclusione  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R})$  è stretta.

Dato che utilizziamo l'induzione transfinita su insiemi costruiti sui reali, è necessario usare l'Assioma della Scelta. Tuttavia, non è l'unico metodo per dimostrare l'inclusione stretta di  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ; infatti, si può costruire un insieme misurabile *non* Boreliano senza fare uso dell'Assioma della Scelta. Per far ciò, definiamo prima la *funzione di Cantor*.

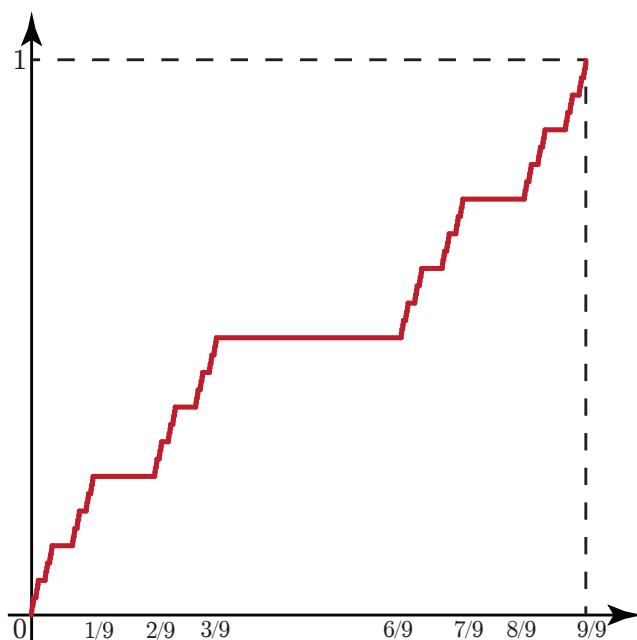
**DEFINIZIONE 5.7.2. - FUNZIONE DI CANTOR .**

Si consideri l'insieme ternario di Cantor  $C$ . La **funzione di Cantor**  $c : C \rightarrow C$  è definita come

$$c(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, & \text{se } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \in C \text{ dove } a_n \in \{0, 1\} \\ \sup_{y \leq x, y \in C} c(y), & \text{se } x \in [0, 1] \setminus C. \end{cases} \quad (5.44)$$

Equivalentemente, preso  $x \in [0, 1]$  si può ottenere  $c(x)$  con il seguente processo:

- Esprimi  $x$  in base 3.
- Se  $x$  contiene una cifra pari ad 1, sostituire ogni cifra che segue il primo 1 con 0.
- Sostituire tutti i rimanenti 2 con 1.
- Interpretare il risultato come un numero binario, che diventerà  $c(x)$ .



Questa funzione non è altro che l'estensione della funzione  $f$  incontrata nella dimostrazione dell'innumerabilità dell'insieme di Cantor ed è ben definita.

Si può dimostrare che  $c$  è continua su  $[0, 1]$  ed è derivabile su  $[0, 1] \setminus C$  con

$$c'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus C$$

Consideriamo ora la funzione  $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  data da

$$g(x) = \inf \{y \in [0, 1] \mid c(y) = x\} \quad (5.45)$$

Si ha che  $g$  è una funzione iniettiva e monotona, dunque è misurabile e la controimmagine di un Boreliano tramite  $g$  è ancora un Boreliano.

Consideriamo ora un insieme  $E \subsetneq [0, 1]$  non misurabile secondo Lebesgue, dunque non è tanto meno un Boreliano. Si osservi che  $F = g(E) \subseteq C$  è un insieme misurabile secondo Lebesgue perché la misura di Lebesgue è *completa* ed è sottoinsieme di  $C$ , che ha misura nulla; tuttavia,  $F$  non è un Boreliano, in quanto se lo fosse la controimmagine tramite  $g$  dovrebbe essere un Boreliano, ma  $g^{-1}(F) = E$ , che non è però Boreliano!



# CAPITOLO 6

## INTEGRALE DI LEBESGUE

---

“Si dovrebbe sempre generalizzare.”

CARL JACOBI, prima che Teoria delle Categorie gli facesse cambiare idea.

Dopo aver approfondito il tema della misura, in questo capitolo ci dedicheremo integralmente a parlare del punto focale del nostro studio, l'**integrale di Lebesgue**. La definizione che daremo *non* è la stessa enunciata da Lebesgue, limitata alle funzioni *da valori reali a valori reali*, bensì una generalizzazione avvenuta successivamente atta ad *astrarre* (da qui il termine “astratto”) il concetto di integrale a funzioni da uno spazio di misura a valori reali (estesi) o complessi; per far ciò, sarà necessario definire l'integrale in tre passi consequenziali, estendendo gradualmente (ma con certe condizioni!) la famiglia di funzioni che ammettono integrale.

### 6.1 I TRE PASSI DELL'INTEGRALE ASTRATTO DI LEBESGUE

Primo di passare ad enunciare questi passi, premettiamo un paio di osservazioni su come questa definizione si distinguerà da quella dell'*integrale di Riemann*:

1. La definizione si dà per funzioni definite su uno spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , mentre per Riemann le funzioni erano definite su  $\mathbb{R}$  o al più su  $\mathbb{R}^n$ .
2. La definizione *non* richiede alcuna ipotesi sulla misura di  $X$ , non distinguendo neanche casi tra misura finita e misura infinita.

Come abbiamo annunciato, la definizione viene data per *passaggi successivi*, utilizzando a partire dal passo 2 i passaggi precedenti. Supponiamo sempre di considerare funzioni con dominio un generico *spazio di misura*  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ .

- **Passo 1:** definiamo l'integrale per funzioni  $s : X \longrightarrow [0, +\infty)$  **semplici**, misurabili e non negative.
- **Passo 2:** definiamo l'integrale per funzioni  $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  **misurabili**, non negativi.
- **Passo 3:** definiamo l'integrale per funzioni  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  **misurabili e integrabili**.

Prima di passare ai passi qui sopra enunciati, dobbiamo definire cos'è una *funzione semplice* e capire come mai sono così importanti per l'integrale di Lebesgue.

## 6.2 FUNZIONI SEMPLICI

### DEFINIZIONE 6.2.1. - FUNZIONE SEMPLICE .

Una funzione  $s : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty)$ , con  $(X, \mathcal{M})$  spazio misurabile, è detta **semplice** se la sua immagine  $S(x)$  è *finita*.

Se  $s$  ha l'immagine finita di cardinalità  $n$ , allora esistono  $n$  valori distinti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  valori *distinti* tali che

$$s(x) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

Se consideriamo  $A_i = \{x \mid s(x) = \alpha_i\} = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ , allora possiamo decomporre  $s$  come "somma pesata" delle funzioni caratteristiche degli insiemi  $A_i$  nella cosiddetta **decomposizione standard di  $s$** :

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \quad (6.1)$$

### PROPOSIZIONE 6.2.1. - UNA FUNZIONE SEMPLICE È MISURABILE SE E SOLO SE LE CONTROIMMAGINI DEGLI $A_i$ SONO MISURABILI .

Una funzione semplice  $s$ , scritta in decomposizione standard come

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

è misurabile se e solo se gli insiemi  $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$  sono misurabili,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per definizione di funzione misurabile,

$$s : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty)$$

è misurabile se e solo se  $\forall A \subseteq [0, +\infty)$  aperto, la controimmagine

$$s^{-1}(A) = \bigcup_{\alpha_i \in A} s^{-1}(\{\alpha_i\}) = \bigcup_{i: \alpha_i \in A} A_i$$

è misurabile in  $X$ .

$\Leftarrow$ ) Poiché i valori  $\alpha_i$ , per definizione di  $s$ , sono finiti, per ogni  $i$  possiamo considerare un intorno aperto  $U \subseteq [0, +\infty)$  di  $\alpha_i$  sufficientemente piccolo da non contenere alcun  $a_j$ ,  $\forall j \neq i$ . Passando alla controimmagine

$$s^{-1}(U) = \bigcup_{k: \alpha_k \in U} A_k = A_i$$

per ipotesi sulla misurabilità di  $s$  si ha che  $A_i$  è misurabile,  $\forall i$ .

$\Rightarrow$ ) Preso  $A \subseteq [0, +\infty)$  aperto, abbiamo visto come la controimmagine è unione

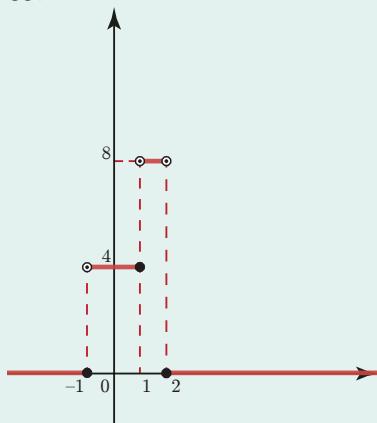
finita degli  $A_i$ :

$$s^{-1}(A) = \bigcup_{i: \alpha_i \in A} A_i$$

Poiché per ipotesi gli  $A_i$  sono misurabili, allora  $A$  è unione di insiemi misurabili e quindi è anch'esso misurabile.  $\square$

### ESEMPI.

- Sia  $(X, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$  e consideriamo la funzione  $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  come da grafico.



Osserviamo che  $s(x) = \{0, 4, 8\}$ , dunque è semplice; le controimmagini dei valori 0, 4 e 8 sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} A_1 &= s^{-1}(\{0\}) = (-\infty, -1] \cap [2, +\infty) \\ A_2 &= s^{-1}(\{4\}) = (-1, 1] \\ A_3 &= s^{-1}(\{8\}) = (1, 2) \end{aligned}$$

Pertanto la decomposizione standard di  $s$  risulta

$$\begin{aligned} s &= 0\chi_{(-\infty, -1] \cap [2, +\infty)} + 4\chi_{(-1, 1]} + 8\chi_{(1, 2)} = \\ &= 4\chi_{(-1, 1]} + 8\chi_{(1, 2)} \end{aligned}$$

- La funzione di Dirichlet

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

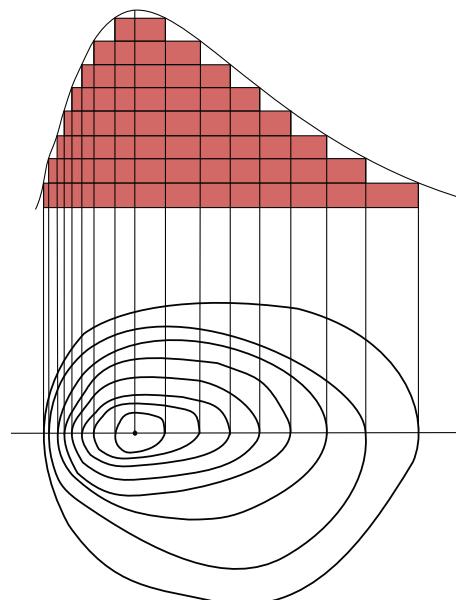
è semplice perché  $s([0, 1]) = \{0, 1\}$  e infatti  $s = \chi_{[0, 1] \cap \mathbb{Q}}$ .

#### 6.2.1 Approssimazione di funzioni misurabili non negative con funzioni semplici

Riprendendo l'idea di Lebesgue alla base del suo integrale, ci interessa studiare le funzioni passando attraverso la loro *immagine*.

Si può ipotizzare di *approssimare* tale funzione  $f$  con una *funzione semplice*: partizionando il codominio in opportuni intervalli individuati da quote fissate, se passiamo alle controimmagini possiamo sapere quali punti di  $f$  sono contenuti nell'intervallo posto ad una certa quota e pertanto definire una funzione caratteristica che, come nelle *carte topografiche a isoipse*, approssima la funzione  $f$  per difetto.

Il prossimo teorema formalizza proprio questo ragionamento.



**TEOREMA 6.2.1. - APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI MISURABILI NON NEGATIVE CON FUNZIONI SEMPLICI.**

Sia  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile e sia  $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  una funzione misurabile. Allora esiste una successione di funzioni semplici misurabili  $s_n : X \longrightarrow [0, +\infty)$  tale che

- $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x), \forall x \in X, n \geq 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = f(x), \forall x \in X$ .

**OSSERVAZIONE.** La successione  $s_n$  converge a  $f$  puntualmente in modo monotono.

**DIMOSTRAZIONE.**

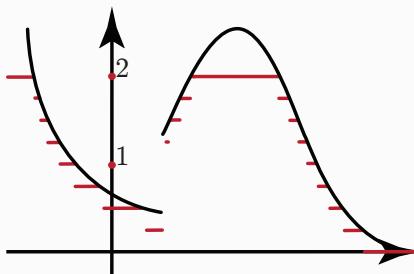
■ **Passo 1: costruzione della successione  $s_n$  e verifica della monotonia.**

Fissato  $n \geq 1$ , dividiamo  $[0, +\infty)$  in  $[0, n)$  e  $[n, +\infty]$ ; dividiamo ulteriormente l'intervallo  $[0, n)$  in  $n2^n$  parti uguali

$$\left[0, \frac{1}{2^n}\right) \quad \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right) \dots \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \dots \left[\frac{n2^n-1}{2^n}, n\right), \quad \forall i = 1, \dots, n2^n$$

Posto  $E_{n,i} = f^{-1}(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right))$  e  $F_n = f^{-1}([n, +\infty))$ ,  $\forall i = 1, \dots, n2^n$ , si definisce

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n} \quad (6.2)$$



Da questa costruzione segue che:

- ◊  $s_n$  è semplice per  $n$  fissato: è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche con pesi distinti.
- ◊ È monotonica al crescere di  $n$ :

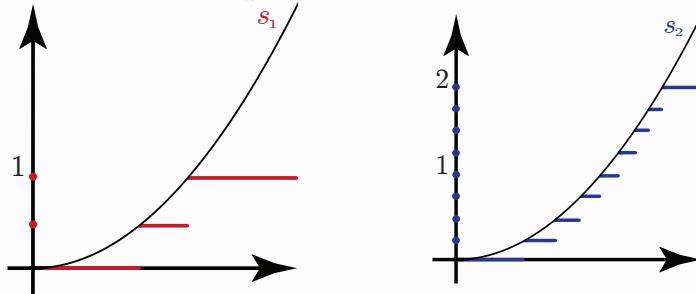
$$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x)$$

Intuitivamente, passando da  $s_n$  a  $s_{n+1}$ :

- \* i nodi individuati in  $s_n$  rimangono inalterati.
- \* vengono aggiunti dei nodi intermedi dimezzando ogni intervallino  $\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ .
- \* vengono aggiunti dei nuovi nodi tra  $n$  e  $n + 1$

Riducendo la dimensione di ciascun intervallino, l'approssimazione così definita risulta essere più raffinata del passo precedente; infatti, per ogni  $x$  l'intervallo in cui sta ora  $f(x)$  può avere lo stesso estremo inferiore che aveva con la partizione di  $s_n$ , oppure può avere un nuovo estremo inferiore dato da

uno dei nodi introdotti con  $s_{n+1}$ .



■ **Passo 2: misurabilità di  $s_n$ ,  $\forall n \geq 1$ .**

Ricordiamo che, dati  $s_i \geq 0$  e  $A_i \in \mathcal{M}$ ,  $i = 1, \dots, k$  si ha

$$s = \sum_{i=1}^k s_i \chi_{A_i} \text{ misurabile} \iff A_i \text{ misurabile, } \forall i$$

Gli intervalli di  $\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n2^n$  e  $[n, +\infty)$  sono Boreiani in  $[0, +\infty]$ ; pertanto, le controimmagini  $E_{n,i}$  e  $F_n$  tramite  $f$  funzione misurabile sono anch'esse misurabili in  $X$ .

■ **Passo 3: approssimazione nel senso della convergenza puntuale.**

Proviamo che vale la relazione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

Fissiamo  $x \in X$  e distinguiamo i casi.

◊ **Caso 1:**  $f(x) \in [0, +\infty)$ .

Poiché  $\lfloor f(x) \rfloor \leq f(x) < \lfloor f(x) \rfloor + 1$ , posto  $N_x := \lfloor f(x) \rfloor + 1$  si ha che

$$f(x) < N_x \leq n, \quad \forall n \geq N_x$$

Pertanto, esiste  $N_x \geq 1$  tale per cui  $f(x) < n$ ,  $\forall n \geq N_x$ .

Sulla base di ciò si ha che  $f(x) \in [0, n)$ ,  $\forall n \geq N_x$  e dunque esiste  $i \in \{0, \dots, n2^n\}$  tale per cui

$$f(x) \in \left[ \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) \implies x \in f^{-1} \left( \left[ \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right] \right) = E_{n,i}$$

Allora  $s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$  perché

$$\chi_{E_{n,j}}(x) = \delta_{i,j}$$

$$\chi_{F_n}(x) \equiv 0$$

dove  $\delta_{i,j}$  è il delta di Kronecker; segue che

$$0 \leq s_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \implies 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{i}{2^n}$$

Passando al limite

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - s_n(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{i}{2^n} = 0$$

Pertanto, per il *teorema del confronto*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - s_n(x) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = f(x).$$

◊ **Caso 2:**  $f(x) = +\infty$ .

Chiaramente

$$f(x) \in [n, +\infty], \forall n \geq 1 \implies x \in f^{-1}([n, +\infty]) = F_n$$

Allora  $s_n(x) = n$  perché

$$\begin{aligned}\chi_{E_{n,j}}(x) &\equiv 0 \\ \chi_{F_n}(x) &\equiv 1\end{aligned}$$

Segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty = f(x) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = f(x) \quad \square$$

### 6.3 PASSO 1: FUNZIONI SEMPLICI, MISURABILI, NON NEGATIVE

**DEFINIZIONE 6.3.1.** - **INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI SEMPLICI, MISURABILI, NON NEGATIVE.**

Sia  $s : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty)$  funzione semplice, misurabile e non negativa che si decompone, dato  $s(x) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , nella forma standard

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \quad A_i = s^{-1}(\{A_i\})$$

Dato  $E \in \mathcal{M}$ , si definisce *integrale esteso a A di s rispetto alla misura μ* il valore

$$\int_E s d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) \quad (6.3)$$

con la convenzione che se un termine di tale sommatoria è  $0 \cdot \infty$  allora tale termine sia uguale a 0.

**OSSERVAZIONE.**  $\mu(A_i \cap E)$  è ben definito in quanto  $A_i \cap E$  è misurabile:

- $A_i$  sono misurabili  $\forall i$  perché  $s$  è misurabile per ipotesi.
- $E$  è misurabile per ipotesi.
- L'intersezione è un'operazione chiusa nella  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}$

**OSSERVAZIONE.** Come mai poniamo convenzionalmente  $0 \cdot \infty = 0$ ? L'integrale generalizza e astrae il calcolo dell'area sottesa ad una curva; se ho un intervallo di lunghezza infinita ma a quota zero, chiaramente l'area sottesa è uguale a zero.

**ESEMPI.** Per il primo e secondo esempio riprendiamo le funzioni viste a pag. 111.

1. Consideriamo la funzione del primo esempio, che ha dominio in  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$  e calcoliamo l'integrale su  $E = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} s dm_1 &= 0m_1((-\infty, -1] \cup [2, +\infty)) + 4m_1([-1, 1]) + 8m_2((1, 2)) = \\ &= 0 \cdot (+\infty) + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 16\end{aligned}$$

2. Consideriamo la funzione di Dirichlet su  $[0, 1]$ , che ha dominio in  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$  l'integrale su  $E = [0, 1]$ :

$$\int_{[0,1]} s dm_1 = 1 \cdot m_1([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m_1([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$$

Poiché

- $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  è misurabile e si ha  $m_1([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ .
- $m_1([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = m_1([0, 1]) - m_1([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$

allora

$$\int_{[0,1]} s dm_1 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

3. Consideriamo  $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_p)$  con  $\mu_p$  la misura di conteggio di Poisson di parametro  $\lambda > 0$ :

$$\mu_p(\{n\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \forall n \geq 0 \quad (6.4)$$

$$\mu_p(E) = \sum -n : n \in E e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \forall E \subseteq \mathbb{N} \quad (6.5)$$

Definiamo  $s : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty)$  come

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 1 \\ 2 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

La funzione  $s$  è semplice, dato che  $s(\mathbb{N}) = \{1, 2\}$ , e

$$s = \chi_{\{0,1\}} + 2\chi_{\{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}}$$

Allora, posto  $E = \mathbb{N}$ , l'integrale sul dominio è

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} s d\mu_P &= 1 \cdot \mu_P(\{0, 1\}) + 2\mu_P(\{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}) = \\ &= e^{-\lambda} \cdot 1 + e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1} + 2 \sum_{n \geq 2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + 2 \sum_{n \geq 2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}\end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** La funzione di Dirichlet è una funzione *non* integrabile secondo Riemann, ma è integrabile secondo Lebesgue.

**PROPOSIZIONE 6.3.1. -  $\sigma$ -ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE DI FUNZIONI SEMPLICI, MISURABILI, NON NEGATIVE RISPETTO AL DOMINIO .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $s : X \longrightarrow [0, +\infty)$  semplice misurabile non negativa. Allora vale

$$\int_{\bigcup_{n \geq 1} E_n} s d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} s d\mu, \quad \forall E_n \in \mathcal{M}: E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad (6.6)$$

Per dimostrare tale proprietà ci servirà un risultato sulle serie con *doppi indici*.

**PROPOSIZIONE 6.3.1. - COMMUTATIVITÀ DEGLI INDICI NELLE SERIE DOPPIE .**

- Se  $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$ , allora

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}$$

- Più in generale, se  $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}| < +\infty$ , allora vale la relazione precedente. □

**DIMOSTRAZIONE (DELLA  $\sigma$ -ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO AL DOMINIO).**

Siano  $E_n \in \mathcal{M}$ ,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  e sia  $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ . Sia  $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$  la decomposizione standard di  $s$  funzione semplice, dove  $s(x) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  e  $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Si ha

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E) \quad \square$$

Per  $\sigma$ -additività della misura  $\mu$  vale

$$\mu(A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_i \cap E_j)$$

quindi

$$\begin{aligned} \square & \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{+\infty} \underbrace{\alpha_i \mu(A_i \cap E_j)}_{\geq 0} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{E_j} s d\mu \end{aligned}$$

□

Vediamo il risultato appena dimostrato da un punto di vista differente. Possiamo considerare l'integrale di Lebesgue non solo come un *funzionale* che, fissato un insieme misurabile  $E \in (X, \mathcal{M}, \mu)$ , agisce sulla funzione  $s$ , bensì come una *funzione d'insieme* in cui  $s$  è fissata, mentre la variabile è l'insieme misurabile  $E$ :

$$\begin{aligned} \mu_s : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \int_E s d\mu \end{aligned} \quad (6.7)$$

L'uguaglianza ricavata dalla proposizione precedente

$$\int_{\bigcup_{n \geq 1} E_n} s d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_E s d\mu, \quad \forall E_n \in \mathcal{M}: E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

si riscrive pertanto come

$$\mu_s \left( \bigcup_{n \geq 1} E_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu_s(E_n)$$

Pertanto,  $\mu_s$  è una misura su  $\mathcal{M}$ .

#### 6.4 PASSO 2: FUNZIONI A VALORI REALI MISURABILI, NON NEGATIVE

Sia  $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty]$  funzione misurabile e non negativa. Dato  $E \in \mathcal{M}$ , vogliamo definire l'integrale esteso ad  $E$  di  $f$  rispetto alla misura  $\mu$  utilizzando l'integrale delle funzioni semplici definito al passo 1.

**DEFINIZIONE 6.4.1. - INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI A VALORI REALI, MISURABILI, NON NEGATIVE .**

Sia  $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty]$  funzione misurabile e non negativa. Si definisce l'integrale esteso ad  $E$  di  $f$  rispetto alla misura  $\mu$  come

$$\int_E f d\mu := \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid s : X \longrightarrow [0, +\infty) \text{ semplice, misurabile: } 0 \leq s \leq f \right\} \quad (6.8)$$

**OSSERVAZIONE.**

- L'insieme

$$\left\{ \int_E s d\mu \mid s : X \longrightarrow [0, +\infty) \text{ semplice, misurabile: } 0 \leq s \leq f \right\} \subseteq [0, +\infty]$$

non è vuoto, in quanto contiene sempre  $0 = \int_E 0 d\mu$ .

- $\int_E f d\mu \in [0, +\infty]$
- Se  $f$  è semplice allora si ritrova l'integrale definito al passo 1.

**ATTENZIONE!**

**Ogni funzione misurabile non negativa ammette integrale secondo Lebesgue.**

Questa notevole differenza rispetto all'integrale di Riemann è situa nella definizione. Se l'integrale di Riemann richiede che la somma inferiore e la somma superiore coincidono, quello di Lebesgue richiede solo l'esistenza del sup: la prima condizione non si verifica sempre, mentre la seconda è sempre verificata in  $\mathbb{R}^*$ .

**PROPRIETÀ 6.4.1. - PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI MISURABILI NON NEGATIVE .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura.

1. **Monotonía rispetto alla funzione integranda:**

date  $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabili, non negative tali per cui  $f \leq g$ , allora

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu, \forall E \in \mathcal{M} \quad (6.9)$$

2. **Monotonía rispetto al dominio della funzione integranda:**

dati  $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile, non negativa e  $E, F \in \mathcal{M}$  tali per cui  $E \subseteq F$ , allora

$$\int_E f d\mu \leq \int_F g d\mu \quad (6.10)$$

3. **Linearità dell'integrale (prodotto per uno scalare):**

dati  $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile, non negativa e  $c \geq 0$

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{M} \quad (6.11)$$

4. **Influenza degli insiemi di misura nulla sull'integrale:**

sia  $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile, non negativa; se  $E \in \mathcal{M}$  con  $\mu(E) = 0$ , allora

$$\int_E f d\mu = 0 \quad (6.12)$$

5. **Integrazione sullo spazio intero:**

sia  $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile, non negativa; allora

$$\int_E f d\mu = c \int_X f \chi_E d\mu, \forall E \in \mathcal{M} \quad (6.13)$$

#### 6.4.1 Teorema della convergenza monotona

Il **teorema della convergenza monotona**, altresì noto come **Teorema di Beppo Levi** (principalmente in Italia) o di **Lebesgue**, si inserisce nel filone dei risultati sul problema del *passaggio al limite sotto segno di integrale* di cui abbiamo parlato per la prima volta nel Capitolo 1.

Abbiamo già visto<sup>1</sup> che se una successione di funzioni  $f_n$  Riemann-integrabili su un compatto converge uniformemente a  $f$ , allora  $f$  è Riemann-integrabile e vale il passaggio al limite dell'integrale. Il teorema che dimostreremo, pur essendo applicabile solo a funzioni misurabili e monotone *crescenti*, risulta avere diversi notevoli vantaggi rispetto al risultato basato sulla convergenza uniforme.

**TEOREMA 6.4.1. - TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA .**

Siano  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e  $f_n, f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  con  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n$  sono misurabili.
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$ .
3.  $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall n \geq 1, \forall x \in X$ .

allora

<sup>1</sup>Si veda Capitolo 3, teorema 2.3.1, pag. 25.

1.  $f$  è misurabile.
2. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \in [0, +\infty] \quad (6.14)$$

#### OSSERVAZIONI.

- L'uguaglianza della tesi è valida per ogni misura di  $X$ , anche infinita.
- Il risultato è in generale falso se  $f_n(x)$  decresce rispetto ad  $n$ ,  $\forall x \in X$ .

#### ESEMPIO - CONTROESEMPIO CON UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI DECRESCENTI .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$  e  $f_n(x) = \frac{1}{n}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Per ogni  $x$  vale

- $f_n(x)$  decrescente rispetto ad  $n$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm_1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (+\infty) = +\infty \\ \int_{\mathbb{R}} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) dm_1 &= \int_{\mathbb{R}} 0 dm_1 = 0 \end{aligned}$$

#### DIMOSTRAZIONE (DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA).

- I  $f$  è misurabile perché è limite puntuale di funzioni misurabili.
- II Osserviamo che  $f$  misurabile e non negativa implica che

$$\exists \int_X f d\mu \in [0, +\infty]$$

Dalla monotonia data per ipotesi 3) segue, per monotonia dell'integrale rispetto alla funzione integranda, che

$$0 \leq \underbrace{\int_X f_n d\mu}_{\textcircled{♦}} \leq \overbrace{\int_X f_{n+1} d\mu}^{\textcircled{♠}} \leq \int_X f d\mu$$

Da  $\textcircled{♦}$  si nota come la successione

$$\int_X f_n d\mu \in [0, +\infty]$$

è crescente e quindi per il *teorema sui limiti di successioni monotone* esiste il suo limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \in [0, +\infty]$$

Considerando , per il *teorema della permanenza del segno* si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

È sufficiente dimostrare che vale la disegualanza di verso opposto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$$

Ricordiamo che per definizione

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s : X \longrightarrow [0, +\infty) \text{ semplice, misurabile: } 0 \leq s \leq f \right\}$$

Pertanto ci sarà sufficiente provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X s d\mu, \forall s \text{ funzione definita come sopra.}$$

Osserviamo che questa è vera se mostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \int_X s d\mu, \forall s \text{ funzione definita come sopra, } \forall c \in (0, 1)$$

Basterà infatti passare poi al limite per  $c \rightarrow 1^-$  per ottenere la condizione cercata.

Siano quindi  $c \in (0, 1)$  e  $s : X \longrightarrow [0, +\infty]$  semplice, misurabile e tale che  $0 \leq s \leq f$  su  $X$ . Per ogni  $n \geq 1$  definiamo

$$E_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}$$

Osserviamo che se  $x \in E_n$ , allora

$$f_n(x) \geq cs(x) \implies f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq cs(x) \implies x \in E_{n+1}, \forall n \geq 1,$$

cioè  $E_n \subseteq E_{n+1}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Oraabbiamo

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs d\mu = c \int_E s d\mu = c \mu_s(E_n)$$

dove  $\mu_s$  è la misura definita come

$$\mu_s(E) = \int_E s d\mu$$

Abbiamo quindi ricavato che

$$\textcolor{red}{\circlearrowleft} \int_X f_n d\mu \geq c \mu_s(E_n), \forall n \geq 1$$

Se  $n \rightarrow +\infty$ , essendo  $\mu_s$  una misura  $E_n$  una successione insiemistica crescente, per continuità della misura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_s(E_n) = \mu_s \left( \bigcup_{n \geq 1} E_n \right)$$

Passando al limite nella disequazione  otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \mu_s \left( \bigcup_{n \geq 1} E_n \right) = c \int_{\bigcup_{n \geq 1} E_n} d\mu_s$$

Per concludere, proviamo che

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = X$$

Banalmente l'inclusione  $\subseteq$  è verificata; per trovare l'altra si usa la convergenza puntuale di  $f_n(x)$  e  $f(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Poiché  $f_n$  è una successione di funzioni crescenti e con limite puntuale a  $f$  su  $X$ , sappiamo che  $f_n \leq f$  e quindi

$$f(x) \geq f_n(x) \geq c s(x)$$

Prendiamo ora  $x \in X$ : se  $f(x) = 0$ , allora  $x \in E_1$  in quanto segue che  $s(x) = 0$ ; se  $f(x) > 0$ , allora  $x \in E_n$  per qualche  $n$ .  $\square$

#### 6.4.2 Additività dell'integrale, scambio di integrale e serie

##### PROPOSIZIONE 6.4.1. - ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e siano  $f_1, \dots, f_N : X \longrightarrow [0, +\infty]$  funzioni misurabili. Allora

$$\int_X \left( \sum_{i=1}^N f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^N \int_X f_i d\mu \quad (6.15)$$

**OSSERVAZIONE.** Tutti gli integrali nell'enunciato esistono (eventualmente infiniti) in quanto le  $f_i$  sono funzioni misurabili non negative.

**DIMOSTRAZIONE.** Si prova per induzione su  $N$ . Il passo induttivo è immediato, pertanto proviamo la base dell'induzione ( $N = 2$ ): dimostriamo dunque che

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

- **Passo 1:** proviamo il risultato nel caso di funzioni semplici  $s, t : X \longrightarrow [0, +\infty)$

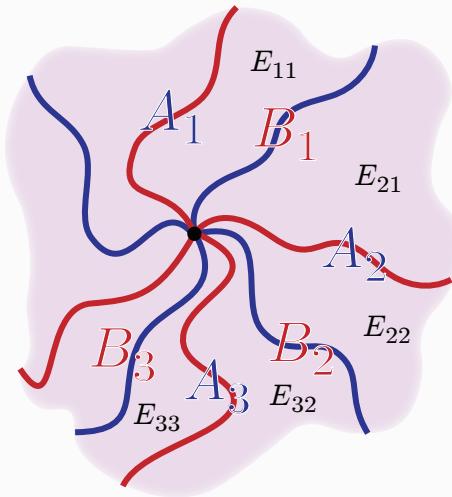
misurabili. Esse si possono scrivere come

$$s = \sum_{i=1}^k s_i \chi_{A_i} \quad t = \sum_{i=1}^n k t_j \chi_{B_j}$$

dove  $s(x) = \{s_1, \dots, s_k\}$   $t(x) = \{t_1, \dots, t_n\}$   
 $A_i = s^{-1}(\{s_i\}), i = 1, \dots, k$   $B_j = t^{-1}(\{t_j\}), j = 1, \dots, n$

Consideriamo  $E_{i,j} = A_i \cap B_j, \forall i, \dots, k$  e  $j = 1, \dots, n$ : essi formano una nuova partizione di  $X$  e, preso  $x \in E_{ij}$ , si ha

$$\begin{cases} s(x) = s_i \\ t(x) = t_j \end{cases}$$



Questo significa che  $s(x) + t(x) = s_i + t_j, \forall x \in E_{ij}$ , ossia

$$s + t = \sum_{i,j} (s_i + t_j) \chi_{E_{ij}}$$

Integriamo secondo Lebesgue:

$$\int_X (s + t) d\mu = \sum_{i,j} (s_i + t_j) \mu(E_{ij}) = \sum_{i,j} s_i \mu(E_{ij}) + \sum_{i,j} t_j \mu(E_{ij}) = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

- **Passo 2:** proviamo il risultato nel caso di funzioni  $f_1, f_2 : X \rightarrow [0, +\infty)$  misurabili.

È noto che:

- ◊ Esiste una successione di funzioni semplici misurabili  $s_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  tali che
  - \*  $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f_1(x), \forall x \in X$ .
  - \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = f_1(x), \forall x \in X$
- ◊ Esiste una successione di funzioni semplici misurabili  $t_n : X \rightarrow [0, +\infty]$  tali che

- \*  $0 \leq t_n(x) \leq t_{n+1}(x) \leq f_2(x), \forall x \in X.$
- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n(x) = f_2(x), \forall x \in X$

Di conseguenza si ha

$$0 \leq (s_n + t_n)(x) \leq (s_{n+1} + t_{n+1})(x) \leq (f_1 + f_2)(x), \forall x \in X$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n + t_n)(x) = (f_1 + f_2)(x), \forall x \in X$$

Integriamo secondo Lebesgue:

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 + f_2) d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu && \text{(thm. conv. monotona)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \right) && \text{(passo 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X s_n d\mu + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X t_n d\mu \\ &= \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu && \text{(thm. conv. monotona)} \quad \square \end{aligned}$$

Una conseguenza immediata di questa proprietà è che per le successioni di funzioni misurabili non negative vale lo *scambio tra integrale e serie*.

**COROLARIO 6.4.1. - SCAMBIO TRA INTEGRALE E SERIE PER FUNZIONI MISURABILI E NON NEGATIVE**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura siano  $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ ,  $n \geq 1$  funzioni misurabili. Allora vale lo scambio tra integrale e serie:

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu \quad (6.16)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo la successione delle ridotte

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x), \forall x \in X.$$

Ricordiamo che  $g_k(x)$  è una successione crescente su  $k$  per ogni  $x \in X$ , in quanto  $f_n(x) \geq 0$ ; poiché valgono le ipotesi del *teorema della convergenza monotona* sulla successione  $g_k$ , possiamo applicarlo.

Prima di farlo, osserviamo che per additività dell'integrale vale

$$\int_X \sum_{n=1}^k f_n = \sum_{n=1}^k \int_X f_n$$

Noto ciò, dimostriamo facilmente il risultato desiderato:

$$\int \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$$

$$\begin{aligned} &\implies \int \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k f_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X \sum_{n=1}^k f_n d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \int_X f_n \\ &\implies \int_X \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu \end{aligned}$$

□

### 6.4.3 Integrazione rispetto alla misura conteggio pesata

**TEOREMA 6.4.2. - INTEGRAZIONE RISPETTO ALLA MISURA CONTEGGIO PESATA .**

Sia  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_p)$  spazio di misura dove  $\mu_p$  è la misura conteggio pesata definita da

$$\begin{aligned} \mu_p(\{n\}) &= p_n, \quad \forall n \geq 1 \text{ con } p_n \geq 0 \\ \mu_p(E) &= \sum_{n \geq E} \mu_p(\{n\}), \quad \forall E \subseteq \mathbb{N} \end{aligned}$$

Sia  $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ . Allora si ha

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu_p = \sum_{n \geq 1} f_n p_n$$

In particolare, se  $p_n = 1, \forall n \geq 1$ , si ha, indicata con  $\mu^*$  la misura conteggio corrispondente,

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu^* = \sum_{n \geq 1} f_n$$

**OSSERVAZIONE.** Nell'enunciato non è richiesta esplicitamente la misurabilità di  $f$  in quanto ogni  $f : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \longrightarrow [0, +\infty]$  è *sempre misurabile*. Infatti,  $\forall A \subseteq [0, +\infty]$  aperto, la controimmagine  $f^{-1}(A)$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  e quindi  $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che  $f$  è una successione

$$\{f_n\}_{n \geq 1} = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$$

Per  $k \geq 1$  definiamo  $g^k : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$  mediante

$$g_n^k = g^k(n) = \begin{cases} f_n & \text{se } n \leq k \\ 0 & \text{se } n > k \end{cases}$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned} \{g_n^1\}_{n \geq 1} &= \{f_1, 0, 0, \dots\} \\ \{g_n^2\}_{n \geq 1} &= \{f_1, f_2, 0, \dots\} \\ &\vdots \\ \{g_n^k\}_{n \geq 1} &= \{f_1, f_2, \dots, f_k, 0, \dots\} \end{aligned}$$

Si ha  $\lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(n) = f_n = f(n)$ ,  $\forall n \geq 1$ , quindi  $g^k$  converge puntualmente a  $f$  in ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la successione  $g_n^k$  soddisfa

$$g_n^{k+1} \geq g_n^k, \quad \forall k \geq 1$$

Pertanto,  $g^k$  è una successione che converge *puntualmente* in modo *monotona crescente* a  $f$ . Per il *teorema della convergenza monotona*, si ha

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} g^k d\mu_p$$

Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  calcoliamo  $\int_{\mathbb{N}} g^k d\mu_p$ . Osserviamo che  $g^k(\mathbb{N}) = \{f_1, \dots, f_k, 0\}$ , quindi  $g^k$  è *semplice* avendo immagine finita. Allora

$$(g^k)^{-1}(\{f_n\}) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq k \quad (g^k)^{-1}(\{0\}) = \{k+1, k+2, \dots\} = A_0$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_{\mathbb{N}} d^k d\mu_p = \sum_{n=1}^k f_n \underbrace{\mu_p(\{n\})}_{=0 \text{ (anche nel caso } 0 \cdot \infty)} + 0 \cdot \underbrace{\mu_p(A_0)}_{=0} = \sum_{n=1}^k f_n p_n$$

Concludendo:

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} g^k d\mu_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k f_n p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n p_n \quad \square$$

Il seguente risultato, che abbiamo già incontrato<sup>2</sup> e che ci è servito per dimostrare la  $\sigma$ -additività dell'integrale di funzioni semplici rispetto al dominio, si può anche vedere come corollario dell'*integrazione della misura conteggio semplice*, oltre che in modo *elementare*.

#### COROLARIO 6.4.1. - COMMUTATIVITÀ DEGLI INDICI NELLE SERIE DOPPIE .

Se  $a_{ij} \geq 0 \forall i, j$ , allora

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij} \quad \square$$

#### 6.4.4 Lemma di Fatou

#### LEMMA 6.4.1. - LEMMA DI FATOU .

<sup>2</sup>Si veda pag. 116.

Se  $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$  sono misurabili,  $\forall n$ , allora

$$\int_X \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \quad (6.17)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Posto  $g_k(x) := \inf_{i \geq k} f_i(x)$  dove  $k \geq 1$ ,  $x \in X$ , allora  $g_k \leq f_k$  implica, per monotonia dell'integrale rispetto alle integrande,

$$\textcolor{red}{\diamondsuit} \quad \int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu \implies \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu$$

Osserviamo che:

- $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x)$ ,  $\forall x \in X$  perché

$$f_i(x)_{i \geq k} \supseteq f_i(x)_{i \geq k+1} \implies g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x) \leq \inf_{i \geq k+1} f_i(x) = g_{k+1}(x)$$

- $g_k$  è misurabile,  $\forall k \geq 1$  in quanto inf di funzioni misurabili.

Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_k(x) &= \sup_{k \geq i} \inf_{i \geq k} f_i(x) && \text{(teorema sul limite di successioni monotone)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) && \text{(caratterizzazione del lim inf)} \end{aligned}$$

Per il *teorema della convergenza monotona* si ha

$$\textcolor{blue}{\spadesuit} \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_k d\mu = \int_X \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k d\mu$$

Combinando  $\textcolor{red}{\diamondsuit}$  e  $\textcolor{blue}{\spadesuit}$  otteniamo la tesi. □

#### OSSERVAZIONE.

- Poiché  $f_n$  sono misurabili e non negative, anche  $\liminf_{n \rightarrow +\infty}$  è misurabile e non negativo e pertanto il suo integrale secondo Lebesgue esiste sempre.
- Ci sono casi in cui vale *soltanto* la disegualanza stretta.

#### ESEMPIO - LEMMA DI FATOU CON DISEGUALANZA STRETTA .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$  e  $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Si ha

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \implies \int_{\mathbb{R}} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) dm_1 = 0$$

Mentre invece

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm_1 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

#### 6.4.5 $\sigma$ -additività dell'integrale di funzioni misurabili non negative rispetto al dominio

**PROPOSIZIONE 6.4.2.** -  $\sigma$ -ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO AL DOMINIO .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  funzione misurabile. Allora

$$\int_{\bigcup_{n \geq 1} E_n} f d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} f d\mu, \quad \forall E_n \in \mathcal{M}: E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad (6.18)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Posto  $E := \bigcup_{n \geq 1} E_n$ , ricordiamo che

$$\int_E f d\mu = \int_X (f \chi_E) d\mu \text{ con } f \chi_E = \begin{cases} f & \text{su } E \\ 0 & \text{su } X \setminus E \end{cases}$$

Osserviamo che  $\chi_E = \sum_{n \geq 1} \chi_{E_n}$  perché  $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$  e  $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , pertanto

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_X (f \chi_E) d\mu \\ &= \int_X \left( f \sum_{n \geq 1} \chi_{E_n} d\mu \right) = \int_X \sum_{n \geq 1} \underbrace{(f \chi_{E_n})}_{\geq 0} d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_X f \chi_{E_n} d\mu && \text{(scambio tra serie e integrale)} \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} f d\mu && \square \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** Questo è il caso generale per *funzioni misurabili* di un risultato precedentemente dimostrato per *funzioni semplici*, misurabili, non negative. Notiamo che questo risultato richiede *implicitamente* tale caso: infatti, nella dimostrazione abbiamo fatto uso del *teorema della convergenza monotona*, che richiede la  $\sigma$ -additività rispetto al dominio delle funzioni semplici.

#### 6.4.6 Misura indotta dall'integrale di Lebesgue

Una conseguenza della  $\sigma$ -additività rispetto al dominio dell'integrale di Lebesgue è che, in modo analogo a come abbiamo visto per le funzioni semplici, possiamo costruire un *nuovo spazio di misura*  $(X, \mathcal{M}, \mu_f)$  a partire da uno spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  dato e una funzione  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile.

**COROLLARIO 6.4.2.** - **MISURA INDOTTA DALLA FUNZIONE MISURABILE NON NEGATIVA .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile. Allora la funzione

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \int_E f d\mu \end{aligned} \quad (6.19)$$

è una misura su  $\mathcal{M}$ . □

**ESEMPIO.** Consideriamo  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$  e prendiamo la **funzione gaussiana**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione è continua e dunque misurabile. La misura  $\mu_f$  indotta è di probabilità dato che  $\mu_f(\mathbb{R}) = 1$  e viene chiamata **misura di probabilità normale**:

$$\begin{aligned}\mu_f(E) &= \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dm_1, \quad \forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \\ \mu_f(\mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dm_1 = 1\end{aligned}$$

Se consideriamo lo spazio di misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu_f)$  e una funzione  $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile, possiamo definire

$$\int_E g d\mu_f, \quad \forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

Cos'è questo integrale? La risposta tale quesito è il seguente teorema.

**TEOREMA 6.4.3. - INTEGRALE RISPETTO ALLA MISURA INDOTTA .**

Dato  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e  $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile, consideriamo lo spazio di misura indotto  $(X, \mathcal{M}, \mu_f)$  con

$$\begin{aligned}\mu_f : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \int_E f d\mu\end{aligned}$$

Sia  $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile. Allora

$$\int_X g d\mu_f = \int_X g f d\mu \tag{6.20}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Innanzitutto, prima dimostriamo la proprietà per funzioni caratteristiche, poi per combinazioni lineari di esse (funzioni semplici), poi consideriamo il caso di una funzione  $f$  misurabile non negativa, approssimandola co una successione di funzioni semplici misurabili.

I Sia  $g = \chi_A$  con  $A \in \mathcal{M}$  (pertanto  $g$  è misurabile). Si ha

$$\int_X \chi_A d\mu_f = \int_A 1 d\mu_f = \mu_f(A) = \mu_f(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_A f d\mu = \int_X (\chi_A f d\mu)$$

II Sia  $g : X \longrightarrow [0, +\infty)$  misurabile semplice, scritta nella decomposizione stan-

dard come

$$g = \sum_{i=1}^k g_i \chi_{A_i} \quad \text{con } g(x) = \{g_1, \dots, g_k\} \text{ e } A_i = g^{-1}(\{g_i\}), i = 1, \dots, k$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_X g d\mu_f &= \int_X \left( \sum_{i=1}^k g_i \chi_A \right) d\mu_f \sum_{i=1}^k g_i \int_X \chi_{A_i} d\mu_f \stackrel{\text{passo 1}}{=} \sum_{i=1}^k g_i \int_X \chi_A f d\mu = \\ &= \underbrace{\int_X \sum_{i=1}^k g_i \chi_{A_i} f d\mu}_{=g} = \int_X g f d\mu \end{aligned}$$

III Consideriamo  $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile. È noto che esiste una successione

$g_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$  di funzioni semplici misurabili tali

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x), \forall x \in X.$
- $g_{n+1}(x) \leq g_n(x), \forall x \in X, \forall n \geq 1.$

Allora

$$\int_X g d\mu_f \stackrel{\substack{\text{thm. di} \\ \text{convergenza} \\ \text{monotona}}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu_f \stackrel{\text{passo 2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n f d\mu$$

Osservando che

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n f)(x) = (g f)(x), \forall x \in X.$
- $(g_{n+1} f)(x) \leq (g_n f)(x), \forall x \in X, \forall n \geq 1.$

possiamo concludere, per il *teorema di convergenza monotona*, che

$$\int_X g d\mu_f = \int_X (g f) d\mu$$

□

**ESEMPIO.** Riprendiamo l'esempio visto in precedenza<sup>a</sup> della funzione gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in X$$

In  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$  essa implica la misura di probabilità ( $\mu_f(x) = 1$ ) normale

$$\mu_f(E) = \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

la quale induce il nuovo spazio di misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu_f)$ . Se  $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$  misurabile, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dm_1$$

Osserviamo che per  $g(x) = x^k$  quello che otteniamo integrando rispetto alla misura  $\mu_f$  è il momento  $k$ -esimo di  $f$ .

<sup>a</sup>Si veda pag. 128.

#### 6.4.7 Misure assolutamente continue

Ricordiamo che se  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  è misurabile, allora

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu = 0, \quad \forall E \in \mathcal{M}: \mu(E) = 0$$

Riscriviamo questa relazione come

$$\forall E \in \mathcal{M}: \mu(E) = 0 \implies \mu_f(E) = 0$$

Questo si esprime dicendo che  $\mu_f$  è **assolutamente continua rispetto a  $\mu$**  e si indica  $\mu_f \ll \mu$ .

#### DEFINIZIONE 6.4.2. - CONTINUITÀ ASSOLUTA PER UNA MISURA .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $\lambda : X \rightarrow [0, +\infty]$ .  $\lambda$  si dice **assolutamente continua rispetto a  $\mu$**  se

$$\forall E \in \mathcal{M}: \mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0 \quad (6.21)$$

e si indica come  $\lambda \ll \mu$ .

#### ESEMPI.

##### ■ MISURA ASSOLUTAMENTE CONTINUA.

Se  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile,  $\mu_f$  definita precedentemente è assolutamente continua rispetto a  $\mu$

##### ■ MISURA NON ASSOLUTAMENTE CONTINUA.

Sia  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$  e consideriamo la *misura conteggio*

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda$  non è assolutamente continua rispetto a  $m_1$ : infatti, preso  $E = \{\bar{x}\}$ , con  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ , si ha

$$m_1(\{\bar{x}\}) = 0 \text{ ma } \lambda(\{\bar{x}\}) = 1$$

Diamo ora una caratterizzazione delle misure assolutamente continue finite.

#### TEOREMA 6.4.1. - CARATTERIZZAZIONE DELLE MISURE ASS. CONT. FINITE .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$  una misura finita, ossia tale per cui  $\lambda(x) < +\infty$ . Allora

$$\lambda \ll \mu \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall E \in \mathcal{M}: \mu(E) < \delta \implies \lambda(E) < \varepsilon \quad (6.22)$$

□

Tra le misure assolutamente rispetto ad una misura  $\mu$  ci sono le misure del tipo  $\mu_f$  introdotte prima. Ci si potrebbe chiedere se ce ne sono altre: se  $\mu$  è  $\sigma$ -finita, ossia se soddisfa

$$\mu(x) = +\infty \quad X = \bigcup_{n \geq 1} X_n, \quad \mu(X_n) < +\infty$$

La risposta è **no**, come si può vedere dal teorema seguente.

**TEOREMA 6.4.2. - TEOREMA DI RADON-NIKODYM .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura con  $\mu$  misura  $\sigma$ -finita e sia  $\lambda : X \longrightarrow [0, +\infty]$  una misura. Allora

$$\lambda \ll \mu \iff \exists f : X \longrightarrow [0, +\infty] : \lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M} \quad (6.23)$$

La funzione  $f$  viene detta **derivata di Radon-Nikodym o densità**.

□

## 6.5 INTEGRABILITÀ

Ci stiamo avvicinando al terzo e ultimo passo dell'integrale di Lebesgue: lo scopo è quello di estendere la definizione per funzione *a valori complessi*.

Tuttavia, a differenza del passo 2, dove l'integrale può essere assunere valori in  $[0, +\infty]$ , l'insieme dei complessi  $\mathbb{C}$  non contempla il valore  $+\infty$ ; inoltre, come vedremo, la costruzione dell'integrale scelta può presentare delle *forme di indecisione* che *non* possiamo risolvere. Per proseguire, dobbiamo necessariamente considerare una classe particolare di funzioni misurabili, le **funzioni integrabili**.

**DEFINIZIONE 6.5.1. - INTEGRABILITÀ .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ . La funzione  $f$  si dice **integrabile** se

1.  $f$  misurabile.
2.  $\int_X |f| d\mu < +\infty$  dove  $|f| : X \longrightarrow [0, +\infty]$

Indichiamo l'insieme delle funzioni integrabili come  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

**OSSERVAZIONE.** Per definizione  $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff |f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

**ATTENZIONE!** Nel caso particolare  $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ , se  $f$  è misurabile allora esiste

$$\int_X f d\mu$$

finito o  $+\infty$ , dunque  $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$  misurabile ammette *sempre* integrale secondo Lebesgue, ma è integrabile solo se

$$\int_X f d\mu < +\infty$$

**PROPOSIZIONE 6.5.1. - LE FUNZIONI INTEGRABILI FORMANO UNO SPAZIO VETTORIALE.**

$\mathcal{L}^1(\mu)$  è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma di funzioni e prodotto di una funzione per uno scalare.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Allora:

1.  $\alpha f + \beta g$  misurabile perché  $f$  e  $g$  sono misurabili.

2.

$$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_X |\alpha| |f| + |\beta| |g| d\mu = |\alpha| \underbrace{\int_X |f| d\mu}_{<+\infty \text{ perché } f \text{ int.}} + |\beta| \underbrace{\int_X |g| d\mu}_{<+\infty \text{ perché } g \text{ int.}} < +\infty$$

Pertanto  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . □

### 6.5.1 Decomposizione di una funzione a valori complessi in termini di funzioni a valori reali non negativi

Come fu utilizzato il passo 1 dell'integrale di Lebesgue per definire il passo 2, ci interessa utilizzare il secondo passo dell'integrale di Lebesgue per definire il terzo. Lo scopo quindi è di scomporre una generica funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  integrabile in una combinazione lineare di funzioni non negative ancora integrabili, in modo che il loro integrale sia definito. Per far ciò, consideriamo la *parte reale* e *immaginaria* di  $f$ :

■ **Parte reale:**  $u := \operatorname{Re} f : X \rightarrow \mathbb{R}$

■ **Parte immaginaria:**  $v := \operatorname{Im} f : X \rightarrow \mathbb{R}$

In questo modo, abbiamo scomposto  $f$  come una combinazione lineare di funzioni misurabili reali, ma possono assumere valori anche negativi. Decomponiamo ulteriormente  $u$  e  $v$  usando le *parti positive* e *parti negative*:

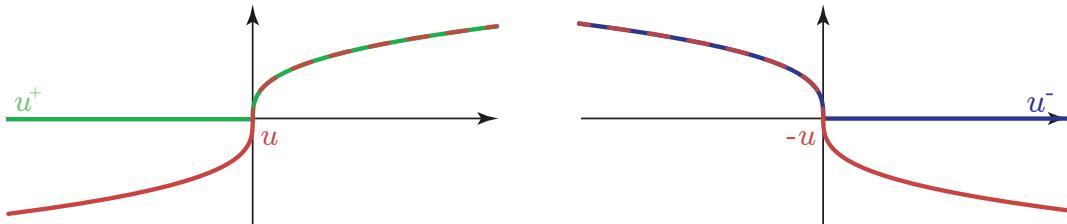
■ **Parte positiva di  $u$ :**  $u^+ := \max(u, 0) \geq 0$

■ **Parte negativa di  $u$ :**  $u^- := \max(-u, 0) \geq 0$

■ **Parte positiva di  $v$ :**  $v^+ := \max(v, 0) \geq 0$

■ **Parte negativa di  $v$ :**  $v^- := \max(-v, 0) \geq 0$

Ottenendo così  $u = u^+ - u^-$  e  $v = v^+ - v^-$ .



Tornando quindi a  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , possiamo ottenere  $f$  come combinazione lineare di quattro funzioni reali *non negative*.

$$f = (\operatorname{Re} f) + i(\operatorname{Im} f) = ((\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^-) + i((\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-) \quad (6.24)$$

Con la prossima proposizione dimostreremo che le funzioni qui definite sono tutte integrabili.

**PROPOSIZIONE 6.5.2.** - INTEGRABILITÀ DELLE PARTI POSITIVE E NEGATIVE DELLE PARTI REALI E IMMAGINARIE .

Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , allora  $(\Re f)^\pm, (\Im f)^\pm \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , allora  $\Re f$  e  $\Im f$  sono misurabili; ne consegue che  $(\Re f)^\pm, (\Im f)^\pm \in \mathcal{L}^1(\mu)$  sono misurabili<sup>a</sup>, reali e non negative, dunque coincidono con il loro modulo.

Poiché ogni funzione misurabile, reale, non negativa è integrabile, ciò implica che la seconda ipotesi per l'integrabilità è soddisfatta e quindi vale la tesi.  $\square$

<sup>a</sup>Si vedano le "Note aggiuntive", a pag. 196.

## 6.6 PASSO 3: FUNZIONI COMPLESSE INTEGRABILI

Avendo enunciato tutte le premesse del caso, siamo nelle condizioni di enunciare il terzo passo dell'integrale di Lebesgue.

**DEFINIZIONE 6.6.1.** - INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZ. A VALORI COMPLESSI, INTEGRABILI .

Sia  $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$  funzione *integrabile*. Posto

$$f = (\Re f)^+ - (\Re f)^- + i [(\Im f)^+ - (\Im f)^-]$$

si definisce l'*integrale esteso ad E di f rispetto alla misura μ* come

$$\int_E f d\mu := \int_E (\Re f)^+ d\mu - \int_E (\Re f)^- d\mu + i \left( \int_E (\Im f)^+ d\mu - \int_E (\Im f)^- d\mu \right) \quad (6.25)$$

**OSSERVAZIONE.** L'ipotesi  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  implica, come dice la proposizione 6.5.2, che  $(\Re f)^\pm, (\Im f)^\pm \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e quindi vale

$$\int_X (\Re f)^\pm d\mu < +\infty \quad \int_X (\Im f)^\pm d\mu < +\infty$$

Di conseguenza, tale integrale esiste finito in  $\mathbb{C}$ . Se infatti le quattro funzioni ottenute decomponendo  $f$  non fossero integrabili, allora potrebbero capitare delle situazioni in cui *due degli integrali* della scomposizione danno la *forma indeterminata*  $\infty - \infty$ .

**PROPRIETÀ 6.6.1.** - PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI A VALORI IN  $\mathbb{C}$  .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura.

1. *Linearità:*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (6.26)$$

2. *Monotonie rispetto al modulo:*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad (6.27)$$

3.  **$\sigma$ -additività rispetto al dominio:** se  $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ ,  $\forall E_n \in \mathcal{M}$ :  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ ,  
allora

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \int_E f d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} f d\mu \quad (6.28)$$

4. **Assoluta continuità:**

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall E \in \mathcal{M}: \mu(E) < \delta \implies \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon \quad (6.29)$$

in altre parole, l'integrale si può rendere arbitrariamente più piccolo in modulo a patto di integrare su un dominio di misura sufficientemente piccola.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l'assoluta continuità (punto 4).

Consideriamo  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  con  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; sappiamo che  $f$  è misurabile e pertanto anche  $|f| : X \longrightarrow [0, +\infty)$  la è.

Consideriamo la misura

$$\begin{aligned} \mu_{|f|} : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \int_E |f| d\mu \end{aligned}$$

Essa è assolutamente continua rispetto a  $\mu$ . Inoltre,  $\mu_{|f|}$  è finita perché  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e quindi

$$\mu_{|f|}(x) \int_X |f| d\mu < +\infty$$

Per la caratterizzazione delle misure finite assolutamente continue rispetto a  $\mu$  si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \delta \implies \mu_{|f|}(E) = \int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

Si ha quindi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \delta \implies \left| \int_E f d\mu \right| \stackrel{\text{prop. 2 dell'int.}}{\leq} \int_E |f| d\mu < \varepsilon \implies \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

□

### 6.6.1 Teorema della convergenza dominata

#### TEOREMA 6.6.1. - TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e  $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$  una successione di funzioni misurabili tale che esiste

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \quad \forall x \in X$$

Se esiste una funzione  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tale per cui

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in X$$

allora  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \quad (6.30)$$

e vale il passaggio al limite sotto segno di integrale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \quad (6.31)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $f_n$  è una successione di funzioni misurabili che converge puntualmente a  $f$ ,  $\forall x \in X$ ,  $f$  è una funzione misurabile. Inoltre, dato che tutti gli elementi della successione  $f_n$  sono maggiorati (in modulo) da  $g$ , si ha per monotonia del limite che

$$\text{◆} \quad |f| \leq g$$

Allora, applicando i moduli ai membri della disequazione vale  $|f| \leq |g|$ . Integrando rispetto a Lebesgue, per monotonia rispetto all'integrandi si ha

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X |g| d\mu < +\infty$$

in quanto  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; segue che  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

Osserviamo che

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| && \text{(disuguaglianza triangolare)} \\ &\leq 2g && \text{(per ◆)} \end{aligned}$$

da cui segue che  $2g - |f_n - f| \geq 0$  e quindi sono funzioni non negative. Poiché le  $2g - |f_n - f|$  sono misurabili in quanto somma di funzioni in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  (e quindi misurabili), possiamo applicare il *lemma di Fatou* a tali funzioni e ottenere

$$\begin{aligned} \int_X \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} 2g - |f_n - f| \right) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &\Updownarrow \\ \int_X 2gd\mu - \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| d\mu &\leq \int_X 2gd\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( - \int_X |f_n - f| d\mu \right) \end{aligned}$$

ma

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| d\mu = 0$$

in quanto per ipotesi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0$ ; segue che  $\liminf$  e  $\lim$  coincidono con valore 0 e pertanto anche l'integrale risulta nullo.

Inoltre, notiamo che

$$\int_X |f_n - f| d\mu$$

è una successione a valori non negativi, dunque per le proprietà del massimo e minimo limite<sup>a</sup> si ha

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( - \int_X |f_n - f| d\mu \right) = - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X |f_n - f| d\mu \right)$$

Allora otteniamo

$$\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X |f_n - f| d\mu \right)$$

Dato che  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  è non negativa, si ha

$$\int_X 2g d\mu = 2 \int_X |g| d\mu < +\infty$$

Possiamo dunque sottrarre

$$\int_X 2g d\mu$$

da entrambi i membri della disequazione e ottenere

(♣)  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$

Notiamo che se una successione di numeri reali non negativi non converge a 0, allora il massimo limite è positivo.<sup>b</sup> Per contronominale, se il massimo limite di numeri reali non negativi *non* è positivo, allora la serie converge a 0 necessariamente. Poiché vale ♣, allora ciò implica la prima tesi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

Infine, poiché l'integrale di Lebesgue è monotono rispetto al modulo, si ha

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \geq 0$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (f_n - f) d\mu = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

ottenendo la seconda e ultima tesi. □

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 190 è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato insieme ad altri relativi al limsup e liminf.

<sup>b</sup>Infatti, se  $a_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , allora anche il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  sarà non negativo. Tuttavia, poiché tale successione ammette limite, allora esso coincide con il suo massimo limite. Segue immediatamente che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0 \implies \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$$

## 6.7 TRA INTEGRALE DI RIEMANN E INTEGRALE DI LEBESGUE

Nell'excursus storico abbiamo visto come l'*integrale di Lebesgue* e le sue successive astrazioni di inizio '900 siano state la risposta a due domande che indirizzarono gli studi di Analisi del XIX secolo:

- Come si può allargare la classe delle funzioni integrabili?
- Come si può caratterizzare l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione integrabile secondo Riemann?

Con i tre passi precedentemente esposti abbiamo costruito l'integrale astratto di Lebesgue e risposto alla prima domanda, mentre rimane al momento aperta la seconda; in particolare, nel caso di funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , sorge la questione: *che relazione c'è tra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue?*

Nel caso di funzioni limitate su un intervallo chiuso e che sono Riemann-integrabili scopriamo che tali integrali coincidono.

### TEOREMA 6.7.1. - INTEGRALE PROPRIO DI RIEMANN IMPLICA INTEGRALE DI LEBESGUE .

Sia  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  limitata e misurabile. Allora

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, b], m_1) \quad (6.32)$$

e

$$\int_{[a,b]} |f| dm_1 = \int_a^b f(x) dx \quad (6.33)$$

□

#### OSSERVAZIONI.

- Il viceversa non è vero: come abbiamo già visto<sup>a</sup>, la funzione di Dirichlet è integrabile secondo Lebesgue ma non secondo Riemann.
- L'ipotesi di misurabilità è in realtà ridondante: come si potrà vedere con i risultati della sezione successiva, ogni funzione limitata e Riemann-integrabile è sempre misurabile rispetto alla misura di Lebesgue  $m_1$ .

<sup>a</sup>Si veda pag. 115.

Situazione differente si ha con l'integrale improprio di Riemann: infatti, può capitare che ci siano funzioni integrabili (almeno impropriamente) secondo Riemann ma *non* secondo Lebesgue!

### TEOREMA 6.7.2. - INTEGRALE IMPROPRIO DI RIEMANN E INTEGRALE DI LEBESGUE .

Sia  $f : [a, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$  misurabile tale che  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  per ogni  $b > a$ . Allora

1. Vale la relazione

$$\int_{[a,+\infty)} |f| dm_1 = \int_0^{+\infty} |f(x)| dx \in [0, +\infty] \quad (6.34)$$

2. Se l'integrale improprio di Riemann di  $f$  su  $[a, +\infty)$  converge assolutamente allora  $f$  è integrabile secondo Lebesgue su  $[a, +\infty)$  e

$$\int_{[a,+\infty)} f dm_1 = \int_a^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R} \quad (6.35)$$

□

**OSSERVAZIONE.** Se l'integrale improprio di Riemann di  $f$  su  $[a, +\infty)$  converge ma non assolutamente allora  $f$  non è integrabile secondo Lebesgue su  $[a, +\infty)$ .

**ESEMPIO.** Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

sull'intervallo  $[\pi, +\infty)$ . Mostriamo che:

1. L'integrale di  $f$  secondo Riemann converge semplicemente.
2. L'integrale di  $f$  secondo Riemann non converge assolutamente.
3. La funzione  $f$  non è integrabile secondo Lebesgue.

I Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^R \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\cos x}{x} \Big|_{\pi}^R - \int_{\pi}^R \frac{\cos x}{x^2} dx \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{\left[ -\frac{\cos R}{R} + \cos \pi - \int_{\pi}^R \frac{\cos x}{x^2} dx \right]}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ per} \\ R \rightarrow +\infty}} = -1 - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

dato che

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

e

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

converge, allora

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right|$$

converge e dunque

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

converge (assolutamente). Ne consegue che l'integrale di  $f(x)$  è semplicemente convergente.

II Osserviamo che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &> \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \quad (1/x \text{ decrescente}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

operando nell'ultimo passaggio un cambio di indice  $k - 1 \rightarrow k$ . Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ha

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - 1 \right]$$

Poiché l'integrale è minorato dalla *serie armonica*, che sappiamo essere *divergente*, allora l'integrale diverge e quindi l'integrale della funzione  $f(x)$  non converge assolutamente.

III Per il primo punto del teorema 6.7.2 vale

$$\int_{[\pi, +\infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm_1 = \int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

Poiché l'integrale improprio di Riemann non converge assolutamente, segue che  $f$  non è integrabile su  $[\pi, +\infty)$  e pertanto non ammette integrale secondo Lebesgue.

Sulla base di questi risultati siamo finalmente in grado di rispondere al secondo quesito: con una certa ironia, la caratterizzazione dell'insieme dei punti di discontinuità di una funzione integrabile secondo Riemann è basata sulla **misura di Lebesgue**.

**TEOREMA 6.7.3. - CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN .**

Sia  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  limitata e sia  $D_f$  l'insieme delle discontinuità di  $f$ . Se  $m_1$  è la misura di Lebesgue unidimensionale, allora

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff m_1(D_f) = 0 \quad (6.36)$$

□

ossia  $f$  limitata è Riemann-integrabile su  $[a, b]$  se e solo se  $f$  è continua q.o. su  $[a, b]$ .

**ESEMPIO.** Sia  $C \subseteq [0, 1]$  l'insieme di Cantor e sia  $f = \chi_C$  la funzione caratteristica su tale insieme. Si ha che  $D_f = \partial C$ , ma poiché  $C$  è un chiuso con interno vuoto, allora

$$D_f = \partial C = C$$

Essendo  $m_1(C) = 0$ ,  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $[0, 1]$ .

## 6.8 IL RUOLO DEGLI INSIEMI DI MISURA NULLA

Abbiamo appena visto come una funzione è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme delle sue discontinuità è un insieme di misura nulla. In altre parole, una funzione è integrabile secondo Riemann su un dato intervallo se e solo se essa è continua, tolto al più un insieme misurabilmente nullo di discontinuità.

Più in generale, ha senso parlare di proprietà valide su un particolare dominio tolto un insieme di misura nulla: poiché queste proprietà non valgono su insiemi la cui *rilevanza* è *minima*, quantomeno dal punto della *misura*, possiamo definire tale proprietà come *quasi ovunque valida*.

**DEFINIZIONE 6.8.1. - PROPRIETÀ QUASI OVUNQUE VALIDA .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura. Si dice che una proprietà  $P$  vale “**quasi ovunque**” (**q.o.**) o “ **$\mu$ -quasi ovunque**” se vale in tutto  $X$  tranne eventualmente su un insieme di misura  $\mu$  nulla. In altre parole, deve esistere un insieme  $N \in \mathcal{M}$  con  $\mu(N) = 0$  tale che  $\forall x \in X \setminus N$  vale tale proprietà  $P$ .

**OSSERVAZIONE.** Dalla definizione in sè *non* è richiesto che l’insieme  $E = \{x \in X \mid P(x)\text{ non vale}\}$  sia misurabile, ma solamente che sia contenuto in un insieme misurabile e di misura nulla.

Tuttavia, se la misura è *completa*, allora anche  $E$  risulta essere misurabile e di misura nulla.

**ESEMPIO - UGUAGLIANZA QUASI OVUNQUE .**

Siano  $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$  misurabili. Allora

$$f = g \text{ q.o.} \iff \text{Posto } E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}, \mu(E) = 0 \quad (6.37)$$

Poiché  $E = (f - g)^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ,  $f, g$  sono misurabili e  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  è aperto, allora  $E$  è misurabile e la definizione è ben posta.

Inoltre, si può notare che si può estendere la stessa definizione di uguaglianza **q.o.** a funzioni  $f, g$  non necessariamente misurabili con codominio uno spazio topologico, a patto di supporre che la misura  $\mu$  sia *completa*.

**ESEMPIO.** Consideriamo la funzione di Dirichlet  $f = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sappiamo che  $m_1([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ , quindi

$$\{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$$

ha misura nulla e pertanto la funzione di Dirichlet è *quasi ovunque* la funzione identicamente nulla.

**PROPRIETÀ 6.8.1. - RUOLO DEGLI INSIEMI DI MISURA NULLA NELL’INTEGRAZIONE .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura. Allora

1. Se  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  e  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , allora

$$\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0 \implies \int_E f d\mu = 0 \quad (6.38)$$

2. Se  $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$  e  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , allora

$$f = g \text{ q.o.} \implies \int_X f d\mu = \int_X g d\mu \quad (6.39)$$

3. Se  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$  misurabile, allora

$$\int_X f d\mu = 0 \implies f = 0 \text{ q.o. in } X \quad (6.40)$$

#### DIMOSTRAZIONE.

II Posto

$$E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

si ha  $\mu(E) = 0$ . Allora

$$\int_X f d\mu = \int_{X \setminus E} f d\mu + \int_E f d\mu = \int_{X \setminus E} g d\mu + 0 = \int_{X \setminus E} g d\mu + \int_E g d\mu = \int_X g d\mu$$

III Sia

$$E = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n \geq 1} E_n$$

Osserviamo che  $E_n = f^{-1}((\frac{1}{n}, +\infty)) \in \mathcal{M}$  in quanto è controimmagine di un aperto tramite una funzione misurabile; su ha allora

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X f d\mu \\ &\leq \int_{E_n} f d\mu && \text{(monotonia dell'integrale rispetto al dominio)} \\ &\leq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu && \text{(monotonia rispetto l'integranda)} \\ &= \frac{1}{n} \mu(E_n) \leq 0 \end{aligned}$$

Segue dunque che  $\mu(E_n) = 0, \forall n \geq 1$ ; utilizzando la  $\sigma$ -subadditività della misura vediamo che

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Vale dunque la tesi. □

Avendo definito il concetto di proprietà quasi ovunque valida, possiamo enunciare un'altra versione dello *scambio tra integrale e serie*, questo risultato che segue dal *teorema della convergenza dominata*.

#### TEOREMA 6.8.1. - SCAMBIO TRA INTEGRALE E SERIE PER FUNZIONI INTEGRABILI .

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura. Siano  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  integrabili. Supponiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$$

Allora

1.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  è definita q.o. in  $X$ .
2.  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$
3. Vale lo scambio tra integrale e serie:

$$\int_X f d\mu = \int_X \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu \in \mathbb{C} \quad (6.41)$$

# IV

## APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE



CAPITOLO **7**

## CONVERGENZA DI FUNZIONI, PARTE SECONDA

---

*“È una rottura pensare alle convergenze, ma a volte bisogna davvero farlo.”*

*SINAI ROBINS, ricordandosi delle innumerevoli convergenze di funzioni tre giorni prima dell'esame di Analisi Matematica 3.*

**C**on gli strumenti introdotti nella Parte precedente possiamo completare il discorso introdotto nel Capitolo 2.  
Dopo aver definito lo **spazio normato**  $L^1$  di funzioni integrabili secondo Lebesgue, aggiungeremo alla convergenza *uniforme* e *puntuale* diversi **modi di convergenza** che sono legati agli spazi di misura e vedremo le relazioni tra di esse.

### 7.1 DALLO SPAZIO DELLE FUNZIONI INTEGRABILI ALLO 1-SPAZIO DI LEBESGUE

Ricordiamo che, dato uno spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  si definisce lo spazio delle funzioni integrabili

$$\mathcal{L}^1 = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ misurabili} \mid \int_X |f| d\mu < +\infty \right\} \quad (7.1)$$

il quale è un spazio vettoriale con le operazioni di somma di funzioni e prodotto di una funzione per uno scalare complesso.

Vogliamo ora introdurre una struttura *metrica* in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; nello specifico, cerchiamo una *norma* - in questo modo potremo avvalerci di risultati che sono validi solo in *spazi normati*. Possiamo considerare come potenziale candidata la funzione

$$\begin{aligned} N : \mathcal{L}^1(\mu) &\longrightarrow [0, +\infty) \\ f &\longmapsto \int_X |f| d\mu \end{aligned} \quad (7.2)$$

Tuttavia, la suddetta è una **pseudonorma** in quanto soddisfa due delle tre proprietà della norma, ma non la *prima*: può valere zero per altre funzione oltre quella nulla. Infatti:

1.  $f = 0 \implies \int_X |f| d\mu = 0$  ma  $\int_X |f| d\mu = 0 \implies f \text{ q.o. in } X$ .

DIMOSTRAZIONE.

□

Come precedentemente detto, le proprietà 2 e 3 sono verificate:

2.  $N(\lambda f) = |\lambda|N(f), \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu), \forall \lambda \in \mathbb{C}$ .
3.  $N(f+g) \leq N(f) + N(g), \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

Per risolvere il problema, si introduce la relazione

$$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) : f \sim g \iff f = g \text{ q.o. in } X \quad (7.3)$$

che si dimostra essere di equivalenza in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

Si definisce allora lo **1-spazio di Lebesgue**

$$L^1(\mu) = \frac{\mathcal{L}^1(\mu)}{\sim} \quad (7.4)$$

**NOTAZIONE.** Invece che indicare gli elementi di  $L^1(\mu)$  come classi di equivalenza  $[f]$  (dove  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ), faremo un *abuso di notazione* e indicheremo solo  $f \in L^1$ .

In  $L^1(\mu)$  possiamo finalmente definire una vera e onesta norma:

$$\begin{aligned} |\cdot| : L^1(\mu) &\longrightarrow [0, +\infty) \\ [f] &\longmapsto |[f]|_1 = \int_X |f| d\mu \end{aligned} \quad (7.5)$$

Questa norma è ben posta come funzione in  $L^1(\mu)$  in quanto *non* dipende dal *rappresentante* scelto:

$$g \in [f] \iff f = g \text{ q.o. in } X \implies \int_X |g| d\mu = \int_X |f| d\mu$$

**ESEMPIO.** Consideriamo lo spazio di misura  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$  con  $\mu_c$  la misura conteggio:

$$\mu_c(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Ricordiamo che, data la successione  $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$  (dove  $f(n) := f_n$ ), allora come conseguenza del teorema di convergenza monotona si ha

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu_c = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

In questo caso si ha

$$\mathcal{L}^1(\mu_c) = \left\{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| = \int_{\mathbb{N}} |f| d\mu_c < +\infty \right\}$$

e quindi la norma in  $L^1$  è la serie dei moduli

$$\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$$

Come sappiamo, se uno spazio normato è completo valgono diversi risultati teorici e pratici di estrema importanza, come ad esempio il criterio di Cauchy. Si dimostrerà a ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA che anche  $L^1$  è uno spazio normato completo.

**TEOREMA 7.1.1. -  $L^1$  È COMPLETO .**

Lo spazio normato  $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$  è completo. □

**OSSERVAZIONE.** Se si considero lo spazio delle funzioni continue  $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ , allora in esso la funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ f &\longmapsto \|f\|_1 \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

è già una norma. Infatti

$$\|f\|_1 = 0 \iff f \equiv 0 \text{ q.o. in } [a, b] \iff f \equiv 0 \text{ su } [a, b] \text{ perché continua}$$

Pertanto,  $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$  è normato. Lo svantaggio, tuttavia, è che esso *non* è completo. Per questo motivo, nonostante ciò che comporta quozientare, conviene usare lo spazio  $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ .

### 7.1.1 Eserciziamoci! Dallo spazio delle funzioni integrabili allo 1-spazio di Lebesgue

**ESERCIZIO.** Dimostrare che la relazione

$$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) : f \sim g \iff f = g \text{ q.o. in } X \quad (7.6)$$

è di equivalenza in  $\mathcal{L}^1(\mu)$

**SOLUZIONE.** La riflessività e la simmetria sono banalmente verificate per definizione di uguaglianza q.o..

Per dimostrare la transitività, si considerino le funzioni  $f, g, h \in \mathcal{L}^1$  tali che  $f = g$  q.o. e  $g = h$  q.o.. Ciò significa che

$$\mu(N_1) := \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0 = \mu(\{x \in X \mid g(x) \neq h(x)\}) := \mu(N_2)$$

Posto  $N = N_1 \cup N_2$ , allora anche  $N$  è misurabile con misura nulla.

Per le leggi di De Morgan si ha che  $N^C = N_1^C \cap N_2^C$ , cioè per ogni  $x \in N^C$  si ha  $f(x) = g(x) = h(x)$ . Allora

$$N^C \subseteq \{x \in X \mid f(x) = h(x)\} \implies \{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\} \subseteq N$$

Poiché  $\{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\}$  è misurabile e contenuto in  $N$  che ha misura nulla, allora si ha la tesi cercata.

## 7.2 MODI DI CONVERGENZA

Abbiamo già visto nel Capitolo 2 la convergenza uniforme e la convergenza puntuale. Noti i concetti di misura e integrale di Lebesgue, approfondiamo il tema dei modi di convergenza e le relazioni tra questi.

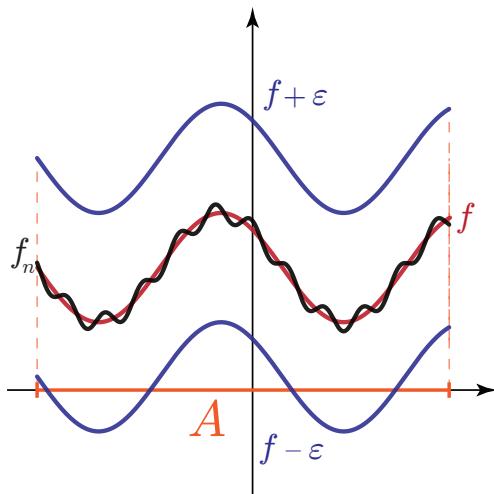
### Convergenza uniforme

#### DEFINIZIONE 7.2.1. - CONVERGENZA UNIFORME .

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  misurabili per ogni  $n$ . Si dice che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $X$  ( $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ ) se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X \quad (7.7)$$

Come già visto a pag. 16, se consideriamo  $X \subseteq \mathbb{R}$  si può visualizzare la convergenza uniforme della successione  $f_n$  a  $f$ : arbitrariamente scelto un raggio  $\varepsilon$  e per  $n$  sufficientemente grandi, il grafico di  $f_n$  è contenuto nell'*intorno tubolare* di raggio  $\varepsilon$  centrato sul grafico di  $f$ .



### Convergenza puntuale

#### DEFINIZIONE 7.2.2. - CONVERGENZA PUNTUALE .

Consideriamo l'insieme  $X$  e le funzioni  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ . Si dice che  $f_n$  converge puntualmente a  $f$  in  $X$  ( $f_n \xrightarrow{\text{punt.}} f$ ) se

$$\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad (7.8)$$

o, alternativamente,

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(x, \varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (7.9)$$

**ATTENZIONE!** Il limite della convergenza è in campo complesso!

**Convergenza uniforme e puntuale** Come visto in precedenza<sup>1</sup>, nella convergenza uniforme il differente ordine dei quantificatori relativi alla  $x$  fa sì che la soglia  $N$  trovata è indipendente

<sup>1</sup>Si veda Capitolo 2, sezione 2.2.1, pag. 19.

dal punto  $x$  e quindi vale per ogni punto dell'insieme di definizione  $X$ , implicando pertanto la *convergenza puntuale*.

$$\begin{aligned} f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ su } X &\implies \\ &\implies f_n \text{ converge puntualmente a } f \text{ in ogni punto di } X \end{aligned} \quad (7.10)$$

Il viceversa non è vero: abbiamo visto<sup>2</sup> nella stessa sezione il caso della successione geometrica, la quale converge uniformemente solo a  $f \equiv 0$  in ogni intervallo  $[-a, a] \subsetneq (-1, 1)$ ,  $\forall a \in (0, 1)$ , mentre puntualmente in tutti i  $(-1, 1]$ ; qui di seguito riportiamo un conto esempio alternativo.

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione

$$f_n(x) = \chi_{(n, n+1)}(x) = \begin{cases} 1 & n < x < n + 1 \\ 0 & x \leq n \vee x \geq n + 1 \end{cases}$$

Essa converge puntualmente a  $f \equiv 0$ :

- $\forall x \leq 0$  si ha che  $f_n(x) \equiv 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e dunque banalmente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .
- $\forall x > 0$ , preso  $N_x := \lfloor x \rfloor + 1$  si ha che  $\forall n > N_x$   $f_n(x) = 0$  e quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

Tuttavia, essa non converge uniformemente a 0 su  $\mathbb{R}$ , dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |1 - 0| \right) = 1 \neq 0$$

## Convergenza quasi ovunque

**DEFINIZIONE 7.2.3. - CONVERGENZA QUASI OVUNQUE .**

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  misurabili per ogni  $n$ . Si dice che  $f_n$  **converge quasi ovunque a  $f$  in  $X$**  ( $f_n \xrightarrow{\text{q.o.}} f$ ) se

$$\mu \left( \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \neq f(x) \right\} \right) = 0 \quad (7.11)$$

**Convergenza puntuale e quasi ovunque** Dalla definizione è evidente che la convergenza *quasi ovunque* nello spazio di misura  $X$  è una *convergenza puntuale* in  $X$  tolto un insieme di misura nulla. Se in  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  si ha convergenza puntuale, il sottoinsieme su cui *non* vale è l'insieme vuoto e quindi è banalmente soddisfatta la condizione di convergenza **q.o.**, ossia

$$\begin{aligned} f_n \text{ converge puntualmente a } f \text{ in ogni punto di } X &\implies \\ &\implies f_n \text{ converge quasi ovunque a } f \text{ in ogni punto di } X \end{aligned} \quad (7.12)$$

Il viceversa non è vero, come possiamo vedere nel seguente esempio.

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione

$$f_n(x) = n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x < 0 \vee x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Si veda nota precedente.

Osserviamo che la funzione non converge puntualmente a  $f(x) = 0$  su  $\mathbb{R}$ :

- $\forall x < 0$  si ha che  $f_n(x) \equiv 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e dunque banalmente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .
- $\forall x > 0$ , preso  $N_x := \frac{1}{x}$  si ha che  $\forall n > N_x$   $f_n(x) = 0$  e quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .
- Per  $x = 0$  si ha  $f_n(x) \equiv n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \neq 0$ .

Tuttavia, l'insieme dove  $f_n$  non converge a  $f \equiv 0$  è un singolo punto e quindi ha misura nulla, pertanto  $f_n$  converge q.o. a  $f \equiv 0$ .

**OSSERVAZIONE.** Possiamo indebolire le ipotesi del teorema della convergenza **monotona<sup>a</sup>** e **dominata<sup>b</sup>** per farli valere con delle ipotesi valide solo q.o..

- Per la **convergenza monotona** è sufficiente anche solamente supporre che la successione  $f_n$  sia non decrescente su  $X$  tolto al più un insieme  $N$  di misura nulla. In questo modo, la successione  $f_n$  converge q.o. a  $f$  su  $X$  e vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale** con la stessa dimostrazione di prima, in quanto

$$\int_X f_n d\mu = \int_{X \setminus N} f_n d\mu \quad \int_X f d\mu = \int_{X \setminus N} f d\mu$$

Se la misura  $\mu$  non è completa, allora è necessario supporre che anche  $f$  sia misurabile, a differenza del caso puntuale; se  $\mu$  è invece completa, allora ciò non sarà necessario in quanto si può vedere che in tal caso una successione di funzioni misurabili converge q.o. ad una funzione misurabile<sup>c</sup> e dunque non è necessario aggiungere ipotesi.

- Per la **convergenza monotona** la convergenza della successione  $f_n$  e la dominazione da parte di  $g$  possono essere considerate proprietà valide q.o. purché la misura sia completa o la funzione limite  $f$  è una funzione misurabile che coincide q.o. con il limite q.o. della successione, per lo stesso problema di misurabilità visto con la convergenza monotona

<sup>a</sup>Si veda Capitolo 6, teorema 6.4.1, pag. 118.

<sup>b</sup>Si veda Capitolo 6, teorema 6.6.1, pag. 134.

<sup>c</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 198 è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato.

**Convergenza uniforme e quasi ovunque** Dato che, come visto nel precedente controesempio, una successione di funzioni che converge q.o. su  $X$  in generale non converge puntualmente su  $X$ , oltremodo la convergenza q.o. non implica quella *uniforme* su  $X$ . Tuttavia, se restringiamo opportunamente il dominio, è possibile trovare che una successione convergente q.o. converga anche *uniformemente*, come afferma il seguente teorema.

#### TEOREMA 7.2.1. - TEOREMA DI EGOROFF.

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ . Supponiamo che esista  $A \subseteq X$  con  $\mu(A) < +\infty$ , tale che  $f_n$  converge q.o. a  $f$  su  $A$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un sottoinsieme misurabile  $B \subseteq A$  tale che  $\mu(B) < \varepsilon$  e  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A \setminus B$ . Equivalentemente, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un sottoinsieme misurabile  $C \subseteq A$  tale che  $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$  e  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $C$ .  $\square$

In altre parole, per qualunque successione  $f_n$  convergente a  $f$  q.o. in  $X$ , se è possibile trovare un sottoinsieme  $A \subseteq X$  misurabilmente finito allora  $f_n$  converge anche uniformemente a  $f$  in un qualunque sottoinsieme di  $A$  con misura arbitrariamente vicina a quella originale.

Una successione  $f_n$  che converge a  $f$  in questo modo è detta **convergenza quasi uniforme** - non utilizzeremo particolarmente questa nomenclatura. L'ipotesi di  $A$  con  $\mu(A) < +\infty$  è fondamentale: infatti, possiamo riutilizzare come controesempio quello visto a pagina 149 per la convergenza uniforme e puntuale.

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x) = \begin{cases} 1 & n < x < n + 1 \\ 0 & x \leq n \vee x \geq n + 1 \end{cases}$$

Per quanto visto, essa converge puntualmente a  $f \equiv 0$  su  $\mathbb{R}$  e quindi anche q.o.. Tuttavia, essa non converge uniformemente alla funzione nulla su qualunque sottoinsieme  $\mathbb{R} \setminus B$ , per qualunque insieme  $B$  di misura finita, dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus B} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus B} |1 - 0| \right) = 1 \neq 0$$

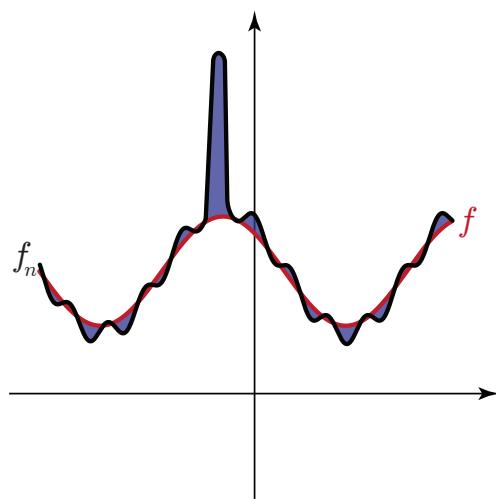
### Convergenza in $L^1$

**DEFINIZIONE 7.2.4. - CONVERGENZA IN  $L^1(\mu)$ .**

Siano  $f_n, f \in L^1(\mu)$ . Si dice che  $f_n$  **converge in  $L^1(\mu)$  a  $f$**  ( $f_n \xrightarrow{L^1} f$ ) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \quad (7.13)$$

Considerato  $X \subseteq \mathbb{R}$ , possiamo visualizzare graficamente la convergenza in  $L^1$ .



Si nota che il grafico di  $f_n$  può stare, in qualche zona, molto distante dal grafico di  $f$ , l'importante è che *complessivamente* l'**area** tra  $f_n$  e  $f$  diminuisce, al crescere di  $n$ , fino ad essere *nulla*.

Questa è la differenza principale tra la convergenza uniforme/puntuale/quasi ovunque e quella in  $L^1$ : se per le prime tre è fondamentale minimizzare la *distanza* tra la funzione  $f_n$  e  $f$ , l'ultima richiede di minimizzare l'*area* tra le due.

## Convergenza uniforme e in $L^1$

**TEOREMA 7.2.1. - LEGAME TRA CONVERGENZA UNIFORME E  $L^1$  NEL CASO DI MISURA FINITA .**

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Se

- (a)  $f_n \in L^1(\mu)$ .
- (b)  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $X$ .
- (c)  $\mu(X) < +\infty$ .

allora

1.  $f \in L^1(\mu)$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ .
3. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \quad (7.14)$$

### DIMOSTRAZIONE.

(I) Dobbiamo dimostrare che  $f \in L^1(\mu)$ , ovvero

- $f$  misurabile.
- $\int_X |f| d\mu < +\infty$

Per ipotesi si ha la convergenza uniforme di  $f_n$  a  $f$  in  $X$ :

$$\text{◆ } \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$$

Osserviamo che  $f$  è dunque misurabile, in quanto la misurabilità passa al limite puntuale (e quindi al limite uniforme). Da ◆ segue che

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \varepsilon + |f_N(x)| \underset{\forall x \in X}{\leq} \varepsilon + |f(x)|$$

Posto, ad esempio,  $\varepsilon = 1$  e  $n = N$  si ha

$$|f(x)| = 1 + |f_N(x)|, \forall x \in X$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\mu &\leq \int_X (1 + |f_N|) d\mu && \text{(monotonia integrale per l'integranda)} \\ &= \int_X 1 d\mu + \int_X |f_N| d\mu && \text{(additività dell'integranda)} \\ &= \mu(X) + \int_X |f_N| d\mu < +\infty \end{aligned}$$

perché  $\mu(X) < +\infty$  per ipotesi e  $f_n \in L^1(\mu)$ .

(II) Dobbiamo dimostrare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ , ossia

$$\text{◆ } \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon) : \forall n \geq \tilde{N}, \|f_n(x) - f(x)\|_1 < \varepsilon$$

Si ha

$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f| d\mu \underset{\forall n \geq N(\varepsilon)}{\leq} \int_X \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu(X) < +\infty$$

Vale la relazione  $\spadesuit$  ponendo  $\tilde{N} = N$ .

(III) Segue dal *teorema di convergenza dominata*. □

**ATTENZIONE!** Se  $\mu(x) = +\infty$ , in generale *non* vale nessuna delle tesi: come controesempi si possono prendere i tre esposti<sup>a</sup> nel discorso sui problemi di integrabilità nell'ambito della teoria di Riemann.

<sup>a</sup>Si veda Capitolo 2, pag. 25.

In generale non vale il viceversa: dalla convergenza in  $L^1$  non segue quella uniforme.

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione

$$f_n(x) = n \chi_{[0, \frac{1}{n^2}]}(x) = \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 & x < 0 \vee x > \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

La successione converge in  $L^1$  a  $f \equiv 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{n^2}} n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Tuttavia, essa non converge uniformemente a 0 su  $\mathbb{R}$ , dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |n - 0| \right) = +\infty \neq 0$$

**OSSERVAZIONE.** Questo teorema ci mostra che il passaggio al limite sotto segno di integrale visto nell'ambito della teoria di Riemann, che contemplava la convergenza uniforme su intervalli limitati, è valido anche nell'ambito della Teoria di Lebesgue.

Con questo teorema abbiamo finalmente risposto in toto ad uno dei quesiti inizialmente enunciati nel Capitolo 1: nell'ambito della teoria di Lebesgue, ci sono tre differenti teoremi per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, che sono quelli di

- Convergenza uniforme su spazi di misura finita.
- Convergenza monotona.
- Convergenza dominata.

**Convergenza quasi ovunque e  $L^1$**  Come abbiamo detto precedentemente<sup>3</sup> possiamo indebolire le ipotesi dei teoremi di convergenza monotona e dominata per applicarli anche alla convergenza q.o., e tutti e due implicano il passaggio al limite sotto segno di integrale. Questo ci permette di affermare il seguente corollario.

<sup>3</sup>Si veda pag. 150.

**COROLLARIO 7.2.1. - CONVERGENZA QUASI OVUNQUE E  $L^1$ .**

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  misurabili; inoltre, sia  $f_n$  convergente q.o. a  $f$  e tale per cui sia soddisfatta almeno una delle seguenti:

- Valgono le ipotesi del teorema di convergenza monotona - in particolare, la successione è crescente positiva.
- Valgono le ipotesi del teorema di convergenza dominata - in particolare, la successione ha una dominazione uniforme e integrabile.

Se valgono queste condizioni, allora  $f_n$  converge in  $L^1$  a  $f$ . □

Chiaramente, questo corollario è valido anche per successioni che convergono *puntualmente* ad una funzione limite e che soddisfano le ipotesi di uno dei due teoremi.

Purtroppo, dalla convergenza in  $L^1$  a quella q.o. in generale non si può dire nulla, come si può vedere da un controsenso dal nome peculiare.

**ESEMPIO - SUCCESSIONE DELLA MACCHINA DA SCRIVERE .**

Consideriamo la successione

$$f_n(x) = \chi_{\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]}(x) = \begin{cases} 1 & \frac{n-2^k}{2^k} \leq x \leq \frac{n-2^k+1}{2^k} \\ 0 & x < \frac{n-2^k}{2^k} \vee x > \frac{n-2^k+1}{2^k} \end{cases}$$

per ogni  $n \geq 0$  e con  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$ . Questa si può visualizzare come dei segmenti, ad altezza 1 e larghezza  $\frac{1}{2^k}$ , che "marciano" lungo l'intervallo  $[0, 1]$  ripetutamente. Ad ogni "ritorno a capo" la larghezza viene dimezzata.

Si vede che  $f_n$  converge alla funzione  $f \equiv 0$  in  $L^1$ : il segmento individuato da  $f_n$  tenderà a diventare un singolo punto al crescere di  $n$ , dunque l'area sottesa da  $f_n$  è un segmento verticale ed è quindi di misura nulla; infatti,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{n-2^k}{2^k}}^{\frac{n-2^k+1}{2^k}} dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n-2^k+1}{2^k} - \frac{n-2^k}{2^k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^k} = 0 \end{aligned}$$

Invece,  $f_n$  non converge q.o. a  $f \equiv 0$ . Infatti, per qualunque scelta di  $x \in [0, 1]$  e per qualunque  $N \in \mathbb{N}$  si può trovare un  $n > N$  con  $f_n(x) = 1$ , quindi la sequenza non può convergere mai a 0.

Tuttavia, se consideriamo delle sottosuccessioni, allora è sempre possibile trovare una sottosuccessione convergente q.o..

**TEOREMA 7.2.2. - TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA INVERSA .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura e  $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ , con  $f_n \in L^1(\mu)$ ,  $\forall n$ , una successione di funzioni tale che  $f_n$  converge ad una funzione  $f$  in  $L^1$ . Allora esiste una sottosuccessione  $f_{n_k}$  e una funzione  $g \in L^1(\mu)$  tale che

1.  $f_{n_k}$  converge a  $f$  q.o. - rispetto a  $k$ .
2.  $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq g(x)$  q.o. per ogni  $x \in X$ . □

**DEFINIZIONE 7.2.5. - CONVERGENZA IN MISURA .**

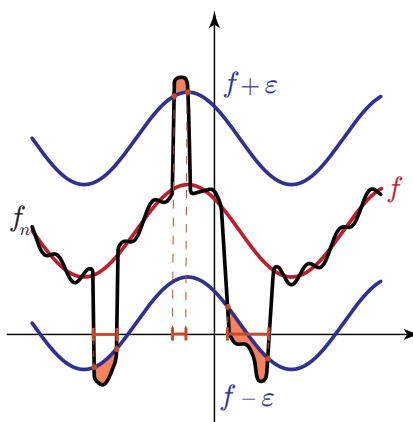
Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$  misurabili per ogni  $n$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  definiamo la funzione  $g_n := |f_n - f|$ . Allora, se prendiamo  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0$  l'insieme

$$E_{n,\varepsilon} := g_n^{-1}((\varepsilon, +\infty)) = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

si dice che  $f_n$  converge in misura a  $f$  ( $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (7.15)$$

Considerato  $X \subseteq \mathbb{R}$ , possiamo visualizzare graficamente la convergenza in misura.



Possiamo interpretare questa convergenza come un particolare tipo di convergenza in  $L^1$ , condividendo però alcune caratteristiche con la convergenza *uniforme* e alla convergenza *quasi ovunque*. Arbitrariamente scelto un raggio  $\varepsilon$ , il grafico di  $f_n$  è nella quasi sua totalità contenuto nell'intorno tubolare di raggio  $\varepsilon$  centrato sul grafico di  $f$ , ma è concesso che esso possa uscire da tale intorno purché la misura dell'insieme di tutti i punti di  $\mathbb{R}$  in cui ciò accade tenda ad essere nulla al crescere di  $n$ .

**Convergenza in  $L^1$  e in misura****TEOREMA 7.2.2. - LEGAME TRA CONVERGENZA  $L^1$  E CONVERGENZA IN MISURA .**

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $f_n, f \in L^1(\mu)$ . Allora

$$f_n \text{ converge in } L^1 \text{ a } f \implies f_n \text{ converge in misura a } f \quad (7.16)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo dimostrare che

$$\mu\left(\underbrace{\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}}_{:= E_{n,\varepsilon}}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Si ha, per monotonia dell'integrale rispetto al dominio,

$$\int_X |f_n - f| d\mu \geq \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n - f| d\mu \geq \varepsilon \int_{E_{n,\varepsilon}} d\mu = \varepsilon \mu(E_{n,\varepsilon}), \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1$$

Dunque si ottiene

$$0 \leq \mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| d\mu = \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\|f_n - f\|_1}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ per} \\ n \rightarrow +\infty}}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , applicando il *teorema del confronto* si ricava:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) = 0, \forall \varepsilon > 0$$

□

In generale non vale il viceversa: dalla convergenza in misura non segue la convergenza in  $L^1$ .

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione

$$f_n(x) = n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x < 0 \vee x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

La successione *non* converge in  $L^1$  a  $f \equiv 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0$$

Tuttavia, essa converge in misura a 0 su  $\mathbb{R}$ , dato che

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} &= \{x \in X \mid |f_n(x)| > \varepsilon\} = [0, n], \forall \varepsilon > 0 \\ \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu([0, \frac{1}{n}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

### Convergenza quasi ovunque e in misura

#### TEOREMA 7.2.3. - LEGAME TRA CONVERGENZA QUASI OVUNQUE E IN MISURA .

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ .

1. Se  $\mu(X) < +\infty$  e  $f_n$  converge q.o. a  $f$  su  $X$ , allora  $f_n$  converge in misura a  $f$  su  $X$ .
2. Se  $\mu$  è  $\sigma$ -finita e  $f_n$  converge in misura a  $f$  su  $X$ , allora c'è una sottosuccessione  $f_{n_k}$  convergenza q.o. a  $f$  su  $X$ . □

Chiaramente, il secondo punto del teorema è valido - nelle ipotesi del teorema - anche per successioni che convergono in  $L^1$ , dato che convergono sempre anche in misura.

# 8

CAPITOLO

## INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO

---

*“La matematica confronta i più disparati fenomeni e scopre le analogie segrete che li uniscono.”*

*JOSEPH FOURIER, cercando disperatamente di motivare ai suoi genitori la scelta di studiare matematica.*

**S**i sa, molti quesiti matematici sono particolarmente difficili da risolvere, anche solo per la loro complessità computazionale. Questo è un problema soprattutto nel mondo applicativo-ingegneristico, dove spesso è importante avere dei metodi risolutivi che siano anche pratici da implementare in *macchina*.

Per fare un esempio pratico, sappiamo che un *suono* si può descrivere come la somma di diverse *sinusoidi* a frequenze e ampiezze differenti: come possiamo trovare da un rumore qualunque le sinusoidi che lo generano?

Per “aggirare” questi inconvenienti si fa uso di quelle che sono chiamate *trasformate integrali*, operazioni che mappano funzioni dal loro dominio originale in un altro dominio, dove può essere molto più facile risolvere il problema che nel dominio originale; per fare questo cambio è necessario integrare una funzione a *due* variabili, di cui una è la vecchia variabile e fungerà da *variabile di integrazione*, mentre quella nuova - che rispetto all’integrale non è altre che un *parametro* - è detta di *trasformazione* e ci permetterà il passaggio al nuovo dominio; in altre parole, ci serve trattare gli **integrali dipendenti da un parametro**.

Già nel corso di ANALISI MATEMATICA 2 li abbiamo incontrato nella teoria dell’integrazione di Riemann; in questo capitolo espanderemo questo argomento agli *integrali di Lebesgue*, in modo da poter trattare anche funzioni complesse e studiare *continuità* e *derivabilità* con gli strumenti visti nei precedenti capitoli. Concluderemo introducendo una delle trasformazioni più importanti per la matematica teorica e applicata, le **trasformate di Fourier** - anche se non andremo nei dettagli delle loro vaste e innumerevoli applicazioni, preferendo lasciare alcune riferimenti a fine capitolo per approfondimento.

### 8.1 INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO

**DEFINIZIONE 8.1.1. - INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO .**

Consideriamo lo spazio di misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m_1)$ . Un **integrale dipendente da un parametro** è una funzione

$$F(t) = \int_I f(t, x) dm_1(x), \quad \forall t \in J \quad (8.1)$$

dove  $I, J$  sono intervalli in  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} f : I \times J &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

è tale per cui  $\forall t \in I f(t, \cdot) : J \longrightarrow \mathbb{C}$  integrabile.

Vogliamo studiare le proprietà di continuità e derivabilità dell'integrale dipendente da una parametro a partire da quelle della funzione  $f$  che lo definisce.

**TEOREMA 8.1.1. - TEOREMA DI CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DI INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO .**

Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli e sia  $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f(t, \cdot)$  sia integrabile,  $\forall t \in I$ . Consideriamo

$$F(t) = \int_I f(t, x) dm_1(x)$$

1. Se

- $f(\cdot, x)$  è continua su  $I$ ,  $\forall x \in J$ .
- $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$  integrabile tale che

$$|f(t, x)| \leq \varphi(x), \quad \forall (t, x) \in I \times J$$

allora  $F$  è continua su  $I$ .

2. Se

- $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$  su  $I \times J$ .
- $\exists \psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$  integrabile tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq \psi(x), \quad \forall (t, x) \in I \times J$$

allora  $F$  è continua su  $I$  e si ha la **derivazione sotto segno di integrale**:

$$F'(t) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dm_1(x), \quad \forall t \in I$$

Per dimostrare questo teorema ci serviranno i seguenti fatti:

- **Teorema di relazione:** data  $g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  e  $\bar{t} \in I$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} g(t) = L \in \mathbb{C} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} g(t_n) = L, \quad \forall t_n \rightarrow \bar{t} \quad (8.2)$$

- **Teorema di Lagrange:** data  $g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  derivabile su  $I$ , si ha

$$\forall t_1, t_2 \in I, |g(t_1) - g(t_2)| \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]} |g'(t)| |t_1 - t_2| \quad (8.3)$$

**DIMOSTRAZIONE (DELLA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DI  $F$ ).**

I Dobbiamo provare che

$$\forall \bar{t} \in I, \lim_{t \rightarrow \bar{t}} F(t) = F(\bar{t})$$

È sufficiente provare che, per il primo fatto enunciato precedentemente,

$$\forall \bar{t} \in I, \forall t_n \rightarrow \bar{t}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = F(\bar{t})$$

Siano quindi  $\bar{t} \in I$  e  $t_n \rightarrow \bar{t}$  fissati: dobbiamo provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f(t_n, x) dm_1(x) = \int_J f(\bar{t}, x) dm_1(x)$$

Ponendo

$$\begin{aligned} g_n(x) &:= f(t_n, x) \\ \bar{g}(x) &:= f(\bar{t}, x) \end{aligned}$$

allora la relazione da provare si scrive come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J g_n(x) dm_1(x) = \int_J \bar{g}(x) dm_1(x)$$

ossia ho ottenuto un problema di passaggio al limite sotto segno di integrale.  
Applichiamo il teorema di convergenza dominata, verificandone le ipotesi:

- **Convergenza puntuale:**

$$\forall x \in J, \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n, x) = f(\bar{t}, x) = \bar{g}(x)$$

perché  $f(\cdot, x)$  è continua rispetto alla  $t$ .

- **Maggiorazione (convergenza dominata):**

$$\left| g_n(x) \right| \underset{\substack{\forall n \geq 1 \\ \forall x \in J}}{=} |f(t_n, x)| \leq \varphi(x) \quad (\text{indipendentemente da } n)$$

Si può allora passare al limite sotto segno di integrale e concludere.

II Dobbiamo provare che

$$F'(t) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) dm_1(x), \quad \forall \bar{t} \in I$$

ossia

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{F(t) - F(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) dm_1(x), \quad \forall \bar{t} \in I$$

Per il primo dei fatti è sufficiente provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(t_n) - F(\bar{t})}{t_n - \bar{t}} = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) dm_1(x), \quad \forall \bar{t} \in I, \quad \forall t_n \rightarrow \bar{t}$$

Siano allora  $\bar{t} \in I$  e  $t_n \rightarrow \bar{t}$  fissati: dobbiamo provare che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(t_n) - F(\bar{t})}{t_n - \bar{t}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n - \bar{t}} \left( \int_J f(+t_n, x) dm_1(x) - \int_J f(\bar{t}, x_n) dm_1(x) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J \underbrace{\frac{f(t_n, x) - f(\bar{t}, x)}{t_n - \bar{t}}}_{:= h_n(x)} dm_1(x) = \int_J \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x)}_{:= \bar{h}(x)} dm_1(x) \end{aligned}$$

ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J h_n(x) dm_1(x) = \int_J \bar{h}(x) dm_1(x)$$

ossia ho di nuovo un problema di passaggio al limite sotto segno di integrale. Come prima, applichiamo il teorema di convergenza dominata, verificandone le ipotesi:

■ **Convergenza puntuale:**

$$\forall x \in J, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \bar{h}(x)$$

per definizione di derivata parziale.

■ **Maggiorazione (convergenza dominata):**

$$|h_n(x)| \underset{\substack{\forall n \geq 1 \\ \forall x \in J}}{=} \left| \frac{f(t_n, x) - f(\bar{t}, x)}{t_n - \bar{t}} \right| \underset{\text{fatto 2}}{\leq} \frac{\sup_{t \in [t_n, \bar{t}]} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |t_n - \bar{t}|}{|t_n - \bar{t}|} \leq \psi(x)$$

Si può allora passare al limite sotto segno di integrale e concludere. □

## 8.2 LA TRASFORMATA DI FOURIER

### DEFINIZIONE 8.2.1. - TRASFORMATA DI FOURIER .

Sia  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Data la funzione

$$f(t, x) = g(x)e^{-itx}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

dove

$$e^{-itx} = \cos tx - i \sin tx, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

definiamo la **trasformata di Fourier** di  $g$  l'integrale dipendente dal parametro di  $t$  dato

da  $f$ :

$$\begin{aligned}\hat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx} dm_1(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \cos tx dm_1(x) - i \int_{\mathbb{R}} g(x) \sin tx dm_1(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{8.4}$$

Ci chiediamo sotto quali ipotesi su  $g$  la funzione  $F$  è continua e sotto quali invece è derivabile.

**TEOREMA 8.2.1. - CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER .**

Sia data  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

1. Se  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\hat{g}$  è continua su  $\mathbb{R}$ .
2. Se
  - $g \in L^1(\mathbb{R})$ .
  - $xg(x) \in L^1(\mathbb{R})$ .
 allora  $\hat{g}$  è derivabile su  $\mathbb{R}$  e

$$\hat{g}'(t) = (\widehat{-ixg(x)}) = -i \int_{\mathbb{R}} xg(x)e^{-itx} dm_1(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}\tag{8.5}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

- I Applichiamo il teorema di continuità degli integrali dipendenti da un parametro.  
In questo caso si ha

$$f(t, x) = g(x)e^{-itx}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Verifichiamo le ipotesi.

- $f(\cdot, x)$  è continua su  $\mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- Si ha

$$|f(t, x)| = |g(x)e^{-itx}| = |g(x)| |e^{-itx}| = {}^a |g(x)|$$

ed essendo  $g \in L^1$  per ipotesi,  $|g(x)|$  è integrabile per ipotesi e abbiamo dunque una *maggiorazione uniforme* integrabile di  $f$ .

Ne segue che  $\hat{g}$  è continua.

- II Applichiamo il teorema di derivabilità degli integrali dipendenti da un parametro.  
In questo caso si ha

$$f(t, x) = g(x)e^{-itx}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Verifichiamo le ipotesi.

- $f(t, \cdot)$  è integrabile su  $\mathbb{R}$ :
  - ◊  $f(t, \cdot)$  misurabile perché  $f$  è il prodotto di  $g$  e  $e^{-itx}$ , due funzioni misurabili - la prima per ipotesi, la seconda in quanto è continua.
  - ◊  $\int_{\mathbb{R}} |f(t, x)| < +\infty$  in quanto

$$|f(t, x)| = -ixg(x)e^{-itx}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

- Esiste

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -ixg(x)e^{itx}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

- Si può maggiorare uniformemente  $\frac{\partial f}{\partial t}$  in  $t$  con una funzione integrabile:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| = \left| -ixg(x)e^{-itx} \right| = |xg(x)| \underbrace{\left| e^{-itx} \right|}_{=1} = |xg(x)| := \psi(x), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

con  $\psi(x)$  integrabile per ipotesi sull'integrabilità di  $xg(x)$ .

Ne segue che  $\hat{g}$  è derivabile e

$$\hat{g}'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dm_1(x) = -i \int_{\mathbb{R}} xg(x)e^{-itx} dm_1(x) \quad \square$$

<sup>a</sup>Si ha che  $|e^{-itx}| = e^{\Re(-itx)} = e^0 = 1$ .

**Un'applicazione delle trasformate di Fourier: l'analisi sonora** Come abbiamo accennato nell'introduzione, il problema fondamentale nella *Teoria dei segnali* è quella della decomposizione di un *suono* in sinusoidi semplici. Come abbiamo preannunciato, per risolvere ciò ci si avvale di trasformate integrali e in particolare, da come si può intuire dal titolo del paragrafo, delle trasformate di Fourier. Ma allora cosa va a rappresentare la trasformata di Fourier, esattamente?

Consideriamo una funzione  $g(t)$  periodica e prendiamo un intervallo  $I$  su cui è definita. La sua trasformata di Fourier su  $I$  è

$$\hat{g}(\xi) = \int_I g(t) e^{-2\pi i \xi t} dm_1(t)$$

Sul piano complesso  $e^{-2\pi i \xi t}$  descrive sempre un punto sulla *circonferenza unitaria*. In particolare possiamo immaginare tale punto muoversi sulla circonferenza al variare di  $t$ : se  $t$  indica il **tempo**, allora il parametro  $\xi$  indicherà invece una **frequenza**; a seconda della frequenza scelta, percorrerà la circonferenza più o meno velocemente.

Moltiplicare ciò per  $g(t)$  significa che al tempo  $t$  il punto  $e^{-2\pi i \xi t}$  disterà dall'origine  $g(t)$ ; visivamente, stiamo "avvolgendo" in senso antiorario il grafico di  $g(t)$  attorno alla circonferenza unitaria. In questo caso  $\xi$  diventa una "frequenza di avvolgimento" e rappresenta una misura di *quanto rapidamente* stiamo avvolgendo la curva attorno alla circonferenza.

Osserviamo che la trasformata di Fourier non descrive altro che le coordinate - modulo un opportuno coefficiente dato dall'intervallo  $I$  - del **baricentro** di tale curva avvolta *in funzione* della frequenza di avvolgimento.

Normalmente il *centro di massa* sta nei pressi dell'*origine* per gran parte delle frequenze di avvolgimento; tuttavia, se la frequenza di avvolgimento si avvicina alla *frequenza del segnale* di  $g$ , allora curiosamente tale baricentro si sposterà a distanza *significativa* dall'origine, per poi tornare indietro in una posizione più standard al variare di  $\xi$ .

Possiamo rappresentare graficamente le coordinate  $x$  e  $y$  rispetto alla frequenza di avvolgimento  $\xi$ : tolto la frequenza nulla, i massimi di questi due grafici si troveranno proprio quando la frequenze di avvolgimento coincide con la frequenza del segnale!

Se studiamo i massimi della trasformata di Fourier di  $g$  possiamo ricavare tutte le frequenze che la costituiscono, proprio come desiderato!

Questa che abbiamo dato è solo un'infarinatura molto generale del tema; per un approfondimento visivo particolarmente curato rimandiamo al video di **3Blue1Brown**, "But what is the Fourier Transform? A visual introduction." (<https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>).

CAPITOLO **9**

## ANALISI E PROBABILITÀ

---

*“Se il tuo esperimento richiede di usare la statistica, dovevi fare un esperimento migliore.”*

*ERNEST RUTHERFORD, stanco di studiare Calcolo delle Probabilità e Statistica.*

**C**OME abbiamo potuto notare nel corso di CALCOLO DI PROBABILITÀ, la teoria della probabilità si è notevolmente espansa dal mero studio di eventi discreti con metodi combinatoriali. Infatti, Andrey Nikolaevich **Kolmogorov** (1903 – 1987) nel 1933 combinò la nozione di spazio campione, già introdotta da Richard **von Mises** (1883 – 1953), e la teoria della misura di Lebesgue per definire un sistema assiomatico compatibile sia con la teoria *classica*, sia con l’Analisi Moderna: in questo modo, gli eventi potevano essere anche qualcosa di *continuo*.

In questo ultimo capitolo di teoria approfondiremo alcuni concetti visti a CALCOLO DI PROBABILITÀ con il formalismo e il rigore dato dalla teoria della Misura e dell’integrazione. Partiremo con l’enunciare gli *assiomi di probabilità* di Kolmogorov per poi dedicarci a come studiare le *variabili aleatorie* tramite la sola *probabilità immagine*, e in base ad essa dare una classificazione *esaustiva* delle variabili aleatorie. Concludiamo la trattazione rivedendo i *modi di convergenza* delle funzioni misurabili in ambito probabilistico.

### 9.1 SPAZIO DI PROBABILITÀ E VARIABILI ALEATORIE

#### DEFINIZIONE 9.1.1. - SPAZIO DI PROBABILITÀ .

Uno **spazio di probabilità**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  è una struttura matematica che fornisce un modello formale per un esperimento non deterministico. Essa costituita dai seguenti elementi:

1. Uno **spazio! campionario**  $\Omega$ , l’insieme di tutti i possibili **risultati**  $\omega$  dell’esperimento.
2. Uno **spazio!degli eventi**  $\mathcal{F}$ , la famiglia di tutti gli eventi dell’esperimento, dove un **evento**  $E$  è un insieme di risultati dello spazio campionario - ossia un sottoinsieme di  $\Omega$ .
3. Una **funzione di probabilità**  $\mathbb{P}$ , che assegna ad ogni evento una probabilità, la

quale è un numero tra 0 e 1.

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1] \quad (9.1)$$

Questo spazio di probabilità deve soddisfare gli assiomi di probabilità introdotti da Andrey Kolmogorov nel 1933.

**ASSIOMA 9.1.1. - PRIMO ASSIOMA DI PROBABILITÀ .**

La probabilità di un evento è un numero reale non negativo.

$$\mathbb{P}(E) \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{F} \quad (9.2)$$

**ASSIOMA 9.1.2. - SECONDO ASSIOMA DI PROBABILITÀ .**

La probabilità dello spazio campionario è 1.

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad (9.3)$$

**ASSIOMA 9.1.3. - TERZO ASSIOMA DELLA PROBABILITÀ .**

La probabilità è  $\sigma$ -additiva:  $\forall A_n \in \mathcal{F}$  tali che  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ , allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) \quad (9.4)$$

**PROPOSIZIONE 9.1.1. - L'INSIEME VUOTO HA PROBABILITÀ NULLA .**

Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità. Allora l'insieme vuoto ha probabilità nulla.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo la successione di eventi seguente:

$$A_n = \begin{cases} \Omega & n = 1 \\ \emptyset & n \geq 2 \end{cases}$$

Osserviamo che  $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$  e  $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ ; poiché

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n,$$

applichiamo l'assioma 3, la  $\sigma$ -additività all'unione degli  $A_n$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(A_n) \\ &= \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(\emptyset) \quad (\text{Assioma 1}) \\ &= 1 - \sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(\emptyset) \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Poiché per il primo assioma la probabilità di un evento è sempre non-negativa, ne consegue che ogni elemento di questa sommatoria debba essere uguale a zero, ossia  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ .  $\square$

Si può subito osservare che lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  altro non è che uno **spazio di misura**  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , con l'ipotesi aggiunta che la misura  $\mu$  sia di **probabilità**, cioè  $\mu(x) = 1$ .

#### DEFINIZIONE 9.1.2. - FUNZIONE MISURABILE .

Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità. Una funzione  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$  si dice **variabile aleatoria** se

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \subseteq \mathbb{C} \text{ aperto.} \quad (9.5)$$

In altre parole, una variabile aleatoria è una funzione misurabile da uno spazio di probabilità a  $\mathbb{C}$ .

## 9.2 PROBABILITÀ IMMAGINE

Nel corso di CALCOLO DI PROBABILITÀ abbiamo incontrato la variabile aleatoria **normale standard**  $Z$ , definita come tale se

$$\mathbb{P}(Z \in B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dm_1, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (9.6)$$

Le variabili aleatorie, per definizione, sono funzioni da uno spazio di probabilità  $\Omega$  a valori - in questo caso - reali. La definizione della normale standard, tuttavia, non fa alcun riferimento allo spazio di probabilità. Cos'è dunque  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ?

In realtà *non si sa*, ma non ci interessa individuarlo. Motiviamo questa affermazione audace introducendo il concetto di *misura immagine*, visto nell'ambito di Teoria della probabilità come *probabilità immagine*.

#### DEFINIZIONE 9.2.1. - MISURA IMMAGINE .

Siano  $(X, \mathcal{F})$  e  $(Y, \mathcal{M})$  due spazi misurabili e una funzione  $f : X \longrightarrow Y$  misurabile.

Se su  $(X, \mathcal{F})$  consideriamo una misura  $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ , la **misura immagine** o **pushforward** è la misura  $f_*(\mu) : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$  definita da

$$[f_*(\mu)](B) = \mu(f^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{M} \quad (9.7)$$

#### TEOREMA 9.2.1. - INTEGRAZIONE CON CAMBIO DI VARIABILI TRAMITE PUSHFORWARD .

Data una funzione  $g$  su  $Y$  misurabile, allora

$$g \in L^1(f_*(\mu)) \iff g \circ f \in L^1(\mu), \quad (9.8)$$

ossia

$$\int_X g \circ f d\mu = \int_Y g d(f_*(\mu)) \quad (9.9) \quad \square$$

Interpretiamo questo nuovo concetto nell'ambito degli spazi di probabilità.

**DEFINIZIONE 9.2.2. - PROBABILITÀ IMMAGINE .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità e  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  variabile aleatoria. La **probabilità immagine** è la misura di probabilità  $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, 1]$  definita da

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (9.10)$$

e definisce un nuovo spazio di probabilità  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ .

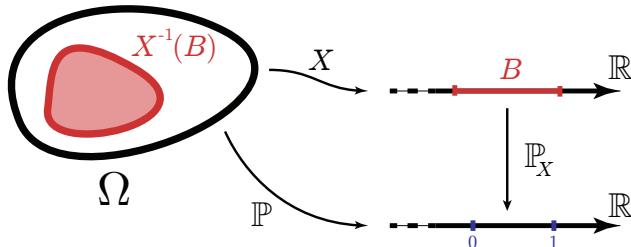
**TEOREMA 9.2.2. - INTEGRAZIONE CON CAMBIO DI VARIABILI TRAMITE PROBABILITÀ IMMAGINE .**

Data una funzione  $g$  su  $\mathbb{R}$  misurabile, allora

$$\text{♣ } g \in L^1(\mathbb{P}_X) \iff g \circ X \in L^1(\mathbb{P}), \quad (9.11)$$

ossia

$$\int_{\Omega} g(x)d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_X \quad (9.12) \quad \square$$



Pertanto, non mi interessa nello specifico sapere cos'è  $\Omega$  o com'è definita  $\mathbb{P}$ : se definisco la variabile aleatoria direttamente con la probabilità immagine "dimentico" quale fosse lo spazio originale e lavoro direttamente su  $\mathbb{R}$ .

**DEFINIZIONE 9.2.3. - MOMENTO DI ORDINE  $k$ -ESIMO .**

Se consideriamo la funzione  $g(x) = x^k$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $\forall k \in \mathbb{N}$ , si definisce il **momento** il valore

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{\Omega} X^k d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_X$$

### 9.3 FUNZIONE DI RIPARTIZIONE E CLASSIFICAZIONE DELLE VARIABILI ALEATORIE

**DEFINIZIONE 9.3.1. - FUNZIONE DI RIPARTIZIONE .**

Siano  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità,  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  una variabile aleatoria e  $\mathbb{P}_X$  la corrispondente probabilità immagine. Si chiama **funzione di ripartizione** (abbreviata in **cdf**, dall'inglese *cumulative distributive function*) la funzione  $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$  definita da

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (9.13)$$

Una funzione di ripartizione  $F_X$  soddisfa le seguenti proprietà:

1. È monotona non decrescente.

2. È continua a destra.
3. È tale per cui

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \quad (9.14)$$

ossia ha immagine  $[0, 1]$ .

Vale anche il viceversa: una funzione che soddisfa queste caratteristiche è una funzione di ripartizione per qualche variabile aleatoria.

Le variabili aleatorie si classificano in base alla probabilità immagine  $\mathbb{P}_X$  e, di conseguenza, alla funzione di ripartizione  $F_X$ , in una delle quattro classi seguenti:

- V.a. *assolutamente continue*.
- V.a. *singolari discrete*.
- V.a. *singolari continue*.
- V.a. *miste*.

### 9.3.1 Variabili aleatorie assolutamente continue

#### DEFINIZIONE 9.3.2. - V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA E DENSITÀ .

$X$  si dice variabile aleatoria **assolutamente continua** se  $\mathbb{P}_X$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue  $m_1$ :

$$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_1(E) = 0 \implies \mathbb{P}_X(E) = 0 \quad (9.15)$$

Per il *teorema di Radon-Nikodym* esiste quindi una funzione detta **densità**  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $f \geq 0$  tale che

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f dm_1, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (9.16)$$

Abbiamo già visto<sup>1</sup> come integrare delle funzioni rispetto ad una misura indotta da un'altra misura, come qui è il caso.

#### TEOREMA 9.3.1. - INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RISPETTO A V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE .

Data una funzione  $g$  su  $\mathbb{R}$ , allora

$$g \in L^1(\mathbb{P}_X) \iff fg \in L^1(m_1), \quad (9.17)$$

ossia

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} fg dm_1 \quad (9.18)$$

□

#### DEFINIZIONE 9.3.3. - MOMENTO DI UNA ORDINE $k$ -ESIMO DI V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE .

Sia  $X$  una v.a. assolutamente continua di densità  $f$ . Se consideriamo la funzione  $g(x) = x^k$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $\forall k \in \mathbb{N}$ , si definisce il **momento** il valore

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{\Omega} X^k d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} x^k f dm_1$$

#### ESEMPIO - VARIABILE ALEATORIA NORMALE .

Approfondendo ciò ad inizio della sezione 9.2. La variabile aleatoria **normale standard**

<sup>1</sup>Si veda Capitolo 6, pag. 127.

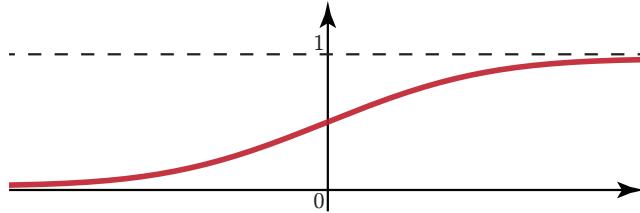
è una variabile aleatoria  $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  di cui è ignoto lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ ; tuttavia, essa è definita attraverso la probabilità immagine  $\mathbb{P}_X$  assolutamente continua rispetto alla misura  $m_1$  associata alla densità Gaussiana:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dm_1, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (9.19)$$

I momenti della v.a. normale standard sono

$$\mathbb{E}X^k = \int_{\Omega} X^k d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dm_1$$

**Cdf di v.a. assolutamente continua** La funzione di ripartizione  $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$  di una variabile aleatoria assolutamente continua è una funzione **assolutamente continua**.



#### DEFINIZIONE 9.3.4. - ASSOLUTA CONTINUITÀ .

Una funzione  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  è assolutamente continua se

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n), (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, \forall i \neq j, \\ \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta \implies \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** Scegliendo un unico intervallo  $(a_1, b_1)$  si ritrova la definizione di *uniforme continuità*. Pertanto, l'assoluta continuità è una condizione più forte dell'uniforme continuità e in quanto tale implica anche la continuità della funzione originale.

Ricordiamo che

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \int_{(-\infty, x]} f dm_1$$

Si dimostra che  $F_X$  è derivabile q.o. e che vale

$$F'_X(x) = f(x), \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{R} \quad (9.20)$$

Questa relazione non è altro che l'estensione del **teorema fondamentale del calcolo integrale alla teoria di Lebesgue**.

#### 9.3.2 Misure singolari

Consideriamo una misura  $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$  non assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue  $m_1$ . Negare

$$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : m_1(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0$$

significa che esiste un insieme  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tale che

$$m_1(S) = 0 \text{ ma } \lambda(S) \neq 0$$

In particolare, se vale

$$\lambda(S) = \lambda(\mathbb{R})$$

la misura viene chiamata *singolare* e si definisce *concentrata* in  $S$

**DEFINIZIONE 9.3.5. - MISURA SINGOLARE.**

Dato un spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , una misura  $\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$  non assolutamente continua rispetto a  $\mu$  si dice **singolare** rispetto a  $\mu$  se

$$\exists S \in \mathcal{M} : \mu(S) = 0, \lambda(S) \neq 0 \text{ ma } \lambda(x) = \lambda(S) \quad (9.21)$$

La misura  $\lambda$  è detta **concentrata** in  $S$  e si indica con  $\mu \perp \lambda$ .

- Se  $\lambda$  è concentrata in  $S$  insieme numerabile, allora  $\lambda$  è detta **singolare discreta** o **atomica**.
- Se  $\lambda$  è concentrata in  $S$  insieme *non* numerabile,  $\lambda$  è detta **singolare continua**.

**OSSERVAZIONE.** Si può vedere che se prendo  $A \subseteq S^C = X \setminus S$ , allora  $\lambda(A) = 0$ , in quanto se così non fosse si avrebbe  $\lambda(S) \neq \lambda(x)$ . Si osserva chiaramente che vale anche il viceversa per  $\mu$ : se prendo  $B \subseteq S$ , allora  $\mu(B) = 0$ .

Da ciò, si vede una definizione alternativa per le misure singolari: una misura  $\lambda$  singolare rispetto a  $\mu$  se esiste un insieme  $S \in \mathcal{M}$  tale che  $\mu(A) = 0$ ,  $\forall A \subseteq S$  misurabili e  $\lambda(B) = 0$ ,  $\forall B \subseteq S^C$  misurabili.

### 9.3.3 Variabili aleatorie singolari discrete

**DEFINIZIONE 9.3.6. - VARIABILI ALEATORIE SINGOLARI DISCRETE.**

$X$  si dice variabile aleatoria **singolare discreta** o **atomica** se  $\mathbb{P}_X$  è **singolare discreta** rispetto alla misura di Lebesgue  $m_1$ .

Per definizione di misura singolare discreta, esiste  $S = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$  tale che, posto

$$p_n = \mathbb{P}_X(\{\omega_n\}), \quad \forall n \geq 1, \quad (9.22)$$

si ha

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n: \omega_n \in B} p_n, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (9.23)$$

**TEOREMA 9.3.2. - INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RISPETTO A V.A. SINGOLARI DISCRETE.**

Data una funzione  $g$  su  $\mathbb{R}$ , allora

$$g \in L^1(\mathbb{P}_X) \iff \sum_{n=1}^{+\infty} |g(\omega_n)| p_n < +\infty \quad (9.24)$$

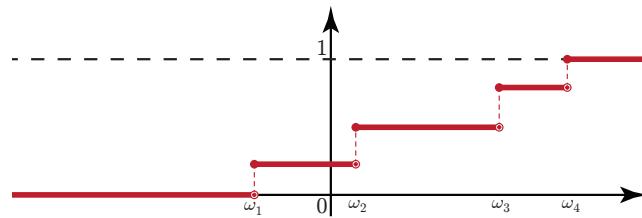
e

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\omega_n) p_n \quad (9.25)$$

□

Abbiamo già dimostrato questo teorema parlando dell'integrazione rispetto ad una misura conteggio pesata<sup>2</sup>.

**Cdf di v.a. singolari discrete** La funzione di ripartizione  $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$  di una variabile aleatoria singolare discreta è una funzione **costante a tratti**.



In particolare,  $S$  è l'insieme delle discontinuità di  $F_X$  e vale

$$p_n = \lim_{x \rightarrow \omega_n^+} F_X(x) - \lim_{x \rightarrow \omega_n^-} F_X(x), \quad \forall n \geq 1 \quad (9.26)$$

#### 9.3.4 Variabili aleatorie singolari continue

##### DEFINIZIONE 9.3.7. - VARIABILI ALEATORIE SINGOLARI CONTINUE.

$X$  si dice variabile aleatoria **singolare continua** se  $\mathbb{P}_X$  è **singolare continua** rispetto alla misura di Lebesgue  $m_1$ .

Per definizione di misura singolare continua, esiste  $S$  non numerabile con misura di Lebesgue nulla tale che,

$$\mathbb{P}_X(S) = 1 \quad (9.27)$$

**Cdf di v.a. singolari continue** La funzione di ripartizione  $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$  di una variabile aleatoria singolare continua è una funzione **continua** ma non *assolutamente continua*.

In particolare, si dimostra che  $F_X$  è derivabile su  $\mathbb{R} \setminus S$  (ossia q.o.) e

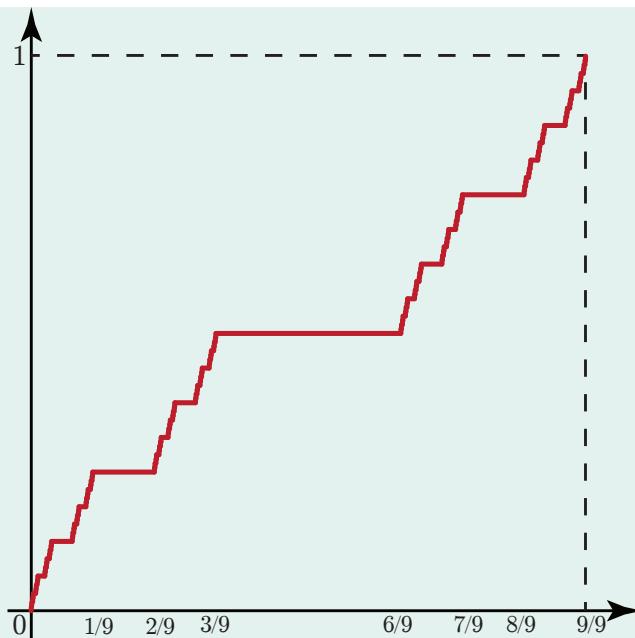
$$F'_X(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus S \quad (9.28)$$

**OSSERVAZIONE.** Questa condizione è compatibile con il fatto che  $F_X$  sia crescente ed abbia come immagine  $[0, 1]$ .

##### ESEMPIO - DISTRIBUZIONE DI CANTOR.

Una funzione ha la **distribuzione di Cantor** se la sua funzione di ripartizione è la *funzione di Cantor*<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Si veda Capitolo 6, teorema 6.4.2, pag. 124.



Per quanto detto su tale funzione, essa soddisfa tutte le condizioni di essere la cdf di una variabile aleatoria singolarmente continua. In quanto tale, questa variabile aleatoria non ammette una funzione di densità, ma si può vedere, per simmetria.

<sup>a</sup>Si veda Capitolo 5, teorema 5.7.2, pag. 106.

### 9.3.5 Variabili aleatorie qualsiasi

Abbiamo elencato tre diverse classi di misure di probabilità e variabili aleatorie ad esse associate. Il seguente teorema ci permette di affermare che esiste solo un'ulteriore classe di misure e variabili, le quali tuttavia non sono altro che combinazioni dei tre tipi precedentemente enunciati.

#### TEOREMA 9.3.3. - TEOREMA DI RADON-NIKODYM-LEBESGUE .

Sia  $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, 1]$  una misura di probabilità. Allora esistono  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$  e tre misure di probabilità  $\mathbb{P}^{ac}$ ,  $\mathbb{P}^{sd}$ ,  $\mathbb{P}^{sc}$  assolutamente continua, singolare discreta e singolare continua, rispettivamente, tali che

$$\mathbb{P} = \alpha_1 \mathbb{P}^{ac} + \alpha_2 \mathbb{P}^{sd} + \alpha_3 \mathbb{P}^{sc} \quad (9.29)$$

□

Come conseguenza, ogni variabile aleatoria si decomponе nella somma di tre variabili aleatorie, una assolutamente continua, una discreta e una singolare continua.

## 9.4 MODI DI CONVERGENZA NELLA TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Come abbiamo potuto notare, la teoria assiomatica della probabilità è profondamente legata alla teoria della misura. Nella sezione 7.2 abbiamo visto diversi modi in cui una successione di funzioni misurabili  $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$  poteva convergere ad una funzione limite misurabile  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ . Studiamo ora i modi di convergenza di una successione di variabili aleatorie  $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$  ad una variabile aleatoria limite  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ .

### Convergenza puntuale o convergenza certa

**DEFINIZIONE 9.4.1. - CONVERGENZA PUNTUALE O CONVERGENZA CERTA .**

Consideriamo lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e le variabili aleatorie  $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

Si dice che  $X_n$  converge certamente a  $X$  su  $\Omega$  ( $X_n \xrightarrow{c} X$ ) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \forall \omega \in \Omega \quad (9.30)$$

La convergenza certa implica tutti i modi di convergenza successivi, ma non c'è alcun vantaggio ad usare questa convergenza rispetto alla convergenza quasi certa.

### Convergenza quasi certa

**DEFINIZIONE 9.4.2. - CONVERGENZA QUASI CERTA .**

Consideriamo lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e le variabili aleatorie  $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

Si dice che  $X_n$  converge quasi certamente a  $X$  su  $\Omega$  ( $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ ) se

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1 \quad (9.31)$$

Osserviamo che in uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  questa convergenza è equivalente alla convergenza quasi ovunque. Infatti:

$$\begin{aligned} \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\} &= \Omega \setminus \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} \\ \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}\right) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) \\ \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) \end{aligned}$$

Allora affermare che

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

significa affermare che

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}\right) = 0$$

**ATTENZIONE!** In uno spazio di misura che non sia di probabilità questa corrispondenza non si può fare, dato che  $\mu(x)$  può non essere pari ad 1, tanto meno finito. Vale sempre la convergenza q.o., ma mai quella q.c..

### Convergenza in probabilità

**DEFINIZIONE 9.4.3. - CONVERGENZA IN PROBABILITÀ .**

Consideriamo lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e le variabili aleatorie  $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

Si dice che  $X_n$  converge in probabilità a  $X$  ( $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1, \forall \varepsilon > 0 \quad (9.32)$$

In modo analogo alla convergenza quasi certa, in uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  questa convergenza è equivalente alla convergenza in misura.

**ATTENZIONE!** In uno spazio di misura che *non* sia di probabilità questa corrispondenza non si può fare, dato che  $\mu(x)$  può non essere pari ad 1, tanto meno finito. Vale sempre la convergenza in misura, ma mai quella in probabilità.

### Convergenza in media

**DEFINIZIONE 9.4.4. - CONVERGENZA IN MEDIA .**

Consideriamo lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e le variabili aleatorie  $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ .

Si dice che  $X_n$  **converge in media** a  $f$  ( $X_n \xrightarrow{L^1} X$ ) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X \quad (9.33)$$

o, equivalentemente, se passiamo alla probabilità immagine,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} X_n d\mathbb{P}_Y = \int_{\mathbb{R}} X d\mathbb{P}_Y \quad (9.34)$$

### Convergenza in legge

**DEFINIZIONE 9.4.5. - CONVERGENZA IN LEGGE .**

Dato  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$  spazio di probabilità e le variabili aleatorie  $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  con le corrispettive *funzioni di distribuzione*

$$F_n : \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \\ x \longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F : \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \\ x \longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

allora si dice che  $X_n$  converge a  $X$  **in legge**  $\left( X_n \xrightarrow{d} X \right)$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ punto di continuità di } F. \quad (9.35)$$



# V

INDAGINE DEL FATTO DI SANGUE



# APPENDICE A

## NOTE AGGIUNTIVE

---

“... and they don’t stop coming.”

*SMASH MOUTH, sorpresi che ci siano delle note aggiuntive dopo cento e passa pagine di appunti.*

Riportiamo alcune note, precisazioni e dimostrazioni complementari agli argomenti dei capitoli principali che possono risultare utili al lettore.

### A.1 CAPITOLO 1: ALLA RICERCA DELLA LUNGHEZZA DELL’ELLISSE

#### A.1.1 Il coefficiente binomiale generalizzato

##### DEFINIZIONE A.1.1. - COEFFICIENTE BINOMIALE .

Dati  $n, j \in \mathbb{N}$  con  $n \geq j$ , si definisce il **coefficiente binomiale** il numero

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (\text{A.1})$$

dove ! indica il **fattoriale**:

- $(0)! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Se  $n < j$ , allora poniamo  $\binom{n}{j} = 0$

Possiamo estendere la definizione del coefficiente binomiale sostituendo a  $n$  e  $j$  dei qualunque numeri complessi  $\alpha$  e  $\beta$  (purché *non sia* un intero negativo) utilizzando la generalizzazione del fattoriale, la *funzione Gamma di Eulero*. Vediamone la definizione con  $\alpha$  tale che  $\Re(\alpha) > 0$ .

##### DEFINIZIONE A.1.2. - FUNZIONE GAMMA DI EULERO .

Dato  $\alpha$  tale che  $\Re(\alpha) > 0$ , definiamo la **funzione Gamma di Eulero** in campo complesso

come il prolungamento analitico dell'integrale improprio convergente

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\text{A.2})$$

Essa gode di alcune proprietà:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \forall \alpha > 0$
- $\Gamma(n) = (n - 1)!, \forall n \in \mathbb{N}$

Definita la funzione Gamma, diamo ora una definizione generalizzata di coefficiente binomiale.

**DEFINIZIONE A.1.3. - COEFFICIENTE BINOMIALE GENERALIZZATO CON GAMMA DI EULERO .**

Dati  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid \Re(z) \in \mathbb{Z} \wedge \Re(z) \leq 0\}$ , si definisce il **coefficiente binomiale generalizzato** il numero

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \quad (\text{A.3})$$

Questa definizione è corretta, ma presenta alcuni inconvenienti:

- *Non è definita sui complessi con parte reale un numero intero negativo o zero.*
- *Non è operativa*, dato che richiede di conoscere i valori della funzione Gamma che, in generale, non sono noti.

Consideriamo ora il caso del binomiale  $\binom{\alpha}{j}$  dove  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $j \in \mathbb{N}$ . Se  $\alpha \in \mathbb{N}$ , osserviamo come la forma operativa del binomiale è la seguente:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{j} &= \frac{\alpha!}{j!(\alpha - j)!} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - j + 1)(\alpha - j) \cdots 1}{j!(\alpha - j)!} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - j + 1)}{j!(\cancel{\alpha - j})!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - j + 1)}{j!} \end{aligned}$$

In realtà questa relazione si ottiene anche col coefficiente che abbiamo definito in precedenza se  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $j \in \mathbb{N}$ . Innanzitutto, diamo qualche notazione.

**DEFINIZIONE A.1.4. - SIMBOLO DI POCHHAMMER O FATTORIALE CRESCENTE .**

Dati  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , il **simbolo di Pochhammer** o altresì detto **fattoriale crescente** è il numero

$$\alpha^{\bar{j}} = (\alpha)_j := \frac{\Gamma(\alpha + j)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{A.4})$$

Questa equivale a

$$\alpha^{\bar{j}} = (\alpha)_j = \prod_{k=0}^{j-1} (\alpha + k) = \prod_{k=1}^j (\alpha + k - 1) = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + j - 1) \quad (\text{A.5})$$

**DEFINIZIONE A.1.5. - FATTORIALE DECRESCENTE .**

Dati  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , il **fattoriale decrescente** è il numero

$$\alpha^j := \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \quad (\text{A.6})$$

Questa equivale a

$$\alpha^j = \prod_{k=0}^{j-1} (\alpha - k) = \prod_{k=1}^j (\alpha - k + 1) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - j + 1) \quad (\text{A.7})$$

**ATTENZIONE!** La notazione  $(\alpha)_j$ , introdotta da Leo August Pochhammer, è talvolta usata anche per indicare il fattoriale *decrescente* oltre che quello *crescente*. Anche se useremo il simbolo di Pochhammer solo per il fattoriale crescente, prediligeremo la notazione introdotta da Knuth et al.

Osserviamo che

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{j! \Gamma(\alpha - j + 1)} = \frac{\alpha^j}{j!} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - j + 1)}{j!} = \frac{(\alpha - j + 1)^{\bar{j}}}{j!} = \frac{(\alpha - j + 1)_j}{j!}$$

Allora possiamo considerare questa definizione operativa come la generalizzazione nel caso  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $j \in \mathbb{N}$  del binomiale.

**DEFINIZIONE A.1.6. - COEFFICIENTE BINOMIALE GENERALIZZATO, DEFINIZIONE OPERATIVA .**  
Dati  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , si definisce il **coefficiente binomiale generalizzato** il numero

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha^j}{j!} = \frac{(\alpha - j + 1)^{\bar{j}}}{j!} = \frac{(\alpha - j + 1)_j}{j!} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - j + 1)}{j!} \quad (\text{A.8})$$

**OSSERVAZIONE.** Se  $\alpha < j$ , con  $\alpha \in \mathbb{Z}$  e  $j \in \mathbb{N}$ , si ha al numeratore il fattore  $(\alpha - \alpha)$  e quindi

$$\binom{\alpha}{j} = 0$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ :

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha - k}{k + 1} \quad (\text{A.10})$$

$$\binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha + 1}{k} \quad (\text{A.11})$$

## A.2 CAPITOLO 3: SERIE DI FUNZIONI

### A.2.1 Tanti criteri di Cauchy

Il **criterio di Cauchy** è un importante teorema che fornisce condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di una successione.

**TEOREMA A.2.1. - CRITERIO DI CAUCHY PER LE SUCCESSIONI .**

Sia  $v_n$  successione in  $X$  spazio metrico completo. Allora

$$\begin{aligned} v_n \text{ converge in } X &\iff v_n \text{ è di Cauchy} \iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N d(v_n, v_m) < \varepsilon \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Supponiamo che  $v_n$  converge a  $v \in X$ , ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N d(v_n, v) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendiamo  $n, m \geq N$ . Per la disuguaglianza triangolare della metrica  $d$  si ha

$$d(v_n, v_m) < d(v_n, v) + d(v, v_m) = d(v_n, v) + d(v_m, v) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\iff$ ) Vale per la completezza dello spazio  $X$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** L'implicazione  $\implies$ ) vale in generale su qualunque spazio metrico, mentre l'altra vale solo se lo spazio è completo. Per dimostrare che  $X$  sia completo può essere utile utilizzare alcune delle seguenti proprietà<sup>a</sup>:

- Una successione di Cauchy è *convergente* se e solo se ha punti di accumulazione.
- Una successione di Cauchy è *convergente* se ha una *sottosuccessione convergente*.
- Se  $X$  è spazio metrico *compatto*, allora  $X$  è spazio metrico *completo*; non è vero il viceversa.

<sup>a</sup>Per approfondimenti si veda il Capitolo 6 di Antuca e Bertolotti, *Tutto quello che avreste voluto sapere sulla Geometria 2\** (\*ma non avete mai osato chiedere).

**INTUITIVAMENTE...** Possiamo vedere una successione di Cauchy come una successione che *oscilla* sempre di meno, fino a posizionarsi su un valore relativamente costante, dove le oscillazioni fra due valori distinti della successione sono davvero piccole.

In termini matematici, possiamo formalizzare questa intuizione così: una oscillazione dopo l' $N$ -esimo elemento è la più grande differenza fra due elementi della successione scelti arbitrariamente dopo l' $N$ -esimo:

$$\text{osc}(N) := \sup \{d(v_n, v_m) \mid n, m \geq N\}$$

Allora una serie è di Cauchy se

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{osc}(N) = 0$$

Questo ci permette di *estendere* il criterio di Cauchy a situazione *molto variegate* tra di loro dove bisogna studiare una convergenza, tutte *acomunate* dall'idea che "portare l'oscillazione a zero è equivalente alla convergenza".

Abbiamo visto<sup>1</sup> il criterio di Cauchy per la *convergenza uniforme*; qui di seguito riportiamo quello per le *serie*.

<sup>1</sup>Si veda Capitolo 2, pag. 16.

**COROLARIO A.2.1. - CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE .**

Una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  in uno spazio normato completo è convergente se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p} \right\| < \varepsilon \quad (\text{A.13})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Considerate le ridotte

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

converge se e solo se la successione delle ridotte converge. Poiché  $X$  è uno spazio completo, questo equivale a dire che la successione delle ridotte  $s_n$  è di Cauchy, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \|s_m - s_n\| < \varepsilon$$

Senza perdita di generalità poniamo  $m = n + p$ : la relazione qui sopra coincide con

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p} \right\| < \varepsilon$$

e quindi segue la tesi.  $\square$

**A.2.2 Criteri di convergenza delle serie**

Di seguito enunceremo diversi criteri utili per studiare la convergenza di una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

**Limite del termine della successione** (*Criterio necessario,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$* )

Se la serie converge, allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . Per contronominale vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ non converge} \quad (\text{A.14})$$

**Convergenza assoluta** (*Criterio sufficiente,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$* )

Se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

converge, allora si dice che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge *assolutamente* e inoltre essa converge anche semplicemente.

**Criterio del rapporto o di d'Alembert** (*Criterio sufficiente,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$* ) Se esiste  $R$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R \quad (\text{A.15})$$

se  $R < 1$ , la serie è *assolutamente convergente*. Se  $R > 1$ , la serie diverge. Se  $R = 1$ , non abbiamo informazioni sulla convergenza.

**Criterio della radice o di Cauchy** (*Criterio sufficiente,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$* )

Sia

$$R = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{A.16})$$

Se  $R < 1$ , la serie è *assolutamente convergente*, mentre se  $R > 1$ , la serie diverge. Se  $R = 1$ , non abbiamo informazioni sulla convergenza.

Se una serie infinita converge o diverge col criterio della radice, lo stesso risultato si ottiene con il *criterio del rapporto* ma *non vale il viceversa*.

**Criterio dell'integrale** (*Criterio necessario e sufficiente,  $\mathbb{R}$* )

Sia  $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$  una funzione non-negativa e monotona decrescente tale per cui  $f(n) = a_n$ . Allora, posto

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x)dx$$

la serie  $a_n$  converge se e solo se l'integrale converge.

**Criterio di confronto diretto** (*Criterio sufficiente,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$* )

Se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

è una serie *assolutamente convergente* e  $|a_n| < |b_n|$  per  $n$  sufficientemente grande, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge *assolutamente*.

**Criterio del confronto asintotico** (*Criterio necessario e sufficiente,  $\mathbb{R}$* )

Se  $a_n, b_n > 0, \forall n$ , e il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

esiste, è finito e diverso da zero, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge.} \quad (\text{A.17})$$

**Criterio di condensazione di Cauchy** (*Criterio necessario e sufficiente,  $\mathbb{R}$* )

Sia  $a_n$  una successione non negativa e non crescente. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.} \quad (\text{A.18})$$

Inoltre, nel caso di convergenza, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} < 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

**Criterio di Abel-Dirichlet** (*Criterio sufficiente,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$* )

Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad b_n \in \mathbb{R} \quad (\text{A.19})$$

Se

- $b_n > 0$  è decrescente e infinitesima per  $n \rightarrow +\infty$ .
- la successione delle somme parziali di  $a_n$  è limitata, ossia

$$\exists M > 0: \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq M, \quad \forall k \leq 0$$

allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

converge (semplicemente).

**Criterio di Leibniz** (*Criterio sufficiente,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$* )

Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n \in \mathbb{R} \quad (\text{A.20})$$

Se  $a_n > 0$  è decrescente ed infinitesima per  $n \rightarrow +\infty$ , allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

converge (semplicemente).

**A.2.3 Serie a valori reali notevoli**

Di seguito enunceremo alcune serie a valori reali di particolare rilevanza.

**Serie geometrica**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

La ridotta è uguale a

$$s_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

La serie dunque converge se e solo se  $|z| < 1$  e in tal caso converge a  $\frac{1}{1-z}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo subito che per  $z = 1$  la serie geometrica è la somma di infiniti termini pari ad 1 e *non converge*.

Calcoliamo la ridotta per  $z \neq 1$ , utilizzando il seguente espediente:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n \\ zs_n &= \sum_{k=1}^{n+1} z^k = z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^{n+1} \\ s_n - zs_n &= \begin{matrix} 1 & +z & +z^2 & +z^3 & +\dots & +z^n \\ -z & -z^2 & -z^3 & -z^4 & -\dots & -z^n \end{matrix} - z^{n+1} \\ &= 1 - z^{n+1} \\ s_n(1-z) &= 1 - z^{n+1} \\ s_n &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \end{aligned}$$

Per definizione di serie, se  $|z| < 1$  si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

dato che  $z^{n+1}$  tende a zero per  $n \rightarrow +\infty$ .

Per  $z = -1$ , la ridotta risulta

$$s_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

che non ammette limite per  $n \rightarrow +\infty$ .

Per  $|z| > 1$   $z^{n+1}$  diverge, dunque diverge anche la ridotta e la serie geometrica.  $\square$

### Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \tag{A.21}$$

converge se  $p > 1$  e diverge per  $p \leq 1$ ; per  $p = 1$  abbiamo la **serie armonica**.

Se  $p > 1$ , la somma della serie armonica generalizzata, vista in funzione di  $p$ , è  $\zeta(p)$ , ossia la *funzione zeta di Riemann* valutata in  $p$ .

### Serie logaritmica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \tag{A.22}$$

per ogni numero reale positivo  $p$ . Diverge per  $p \leq 1$ , ma converge per ogni  $p > 1$ .

## A.3 CAPITOLO 4: SERIE DI POTENZE

### A.3.1 Massimo e minimo limite

#### Definizione di massimo e minimo limite

**RICORDIAMO...** In  $\mathbb{R}^*$  è definito il concetto di **convergenza**, che coincide con l'usuale concetto di convergenza quando il risultato del limite è *finito*, mentre coincide con il concetto di divergenza, a più o a meno *infinito*, quando il risultato del limite è più o meno infinito, rispettivamente.

#### DEFINIZIONE A.3.1. - VALORE LIMITE E CLASSE LIMITE.

Sia  $a_n$  una successione di numeri reali e sia  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} = [-\infty, +\infty]$ . Un valore  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  si dice **valore limite** della successione  $a_n$  se esiste una sottosuccessione  $a_{n_k}$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lambda. \quad (\text{A.23})$$

L'insieme dei valori limite della successione si chiama **classe limite** della successione.

#### ESERCIZI.

1. Provare che la classe limite di ogni successione è non vuota.
2. Scrivere un esempio esplicito di successione con classe limite  $\{0, +\infty\}$ .
3. Scrivere un esempio esplicito di successione con classe limite costituita da tre valori.
4. Scrivere un esempio di successione con classe limite  $\mathbb{R}$ .

**SOLUZIONE.** I Se la successione è *limitata*, allora si ha sempre una sottosuccessione convergente in  $\mathbb{R}$  per il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Supponendo che la successione non sia limitata superiormente (il caso inferiore è analogo), costruiamo una sottosuccessione convergente a  $+\infty$ . Dalla non limitatezza di  $a_n$  si ha che, per ogni  $M \in \mathbb{R}$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n > M$ .

Preso  $M_1 = 1$ , si scelga  $n_1$  per cui  $a_{n_1} > M_1 = 1$ .

Consideriamo ora  $M_2 = 2 + \max \{a_j \mid j \leq n_1\}$ : si ha che  $M_2 \geq 2$  e si può sempre scegliere in quanto  $a_n$  non limitata, un  $n_2 \geq n_1$  tale per cui  $a_{n_2} > M_2$ .

Per induzione si può mostrare che al  $k$ -esimo passo, scegliendo  $M_k = k + \max \{a_j \mid j \leq n_k\}$  in modo che  $M_k \geq k$ , esiste  $n_{k+1} > n_k$  con  $a_{n_k} > M_k$ .

In questo modo si ottiene una sottosequenza indicizzata da  $n_k$  tale che  $a_{n_k} \geq k$ . Questo implica che la sottosequenza converge a  $+\infty$ .

- II Si consideri

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Le sottosuccessioni indicizzate dai pari e dai dispari convergono a  $+\infty$  e 0, rispettivamente.

- III Si consideri

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

L'immagine di  $a_n$  è costituita da soli tre valori: 0, 1 e  $-1$ .

È sufficiente considerare le sottosuccessioni

$$\{b_n\} = \{a_0, a_2, a_4, \dots\}$$

$$\{c_n\} = \{a_1, a_5, a_9, \dots\}$$

$$\{d_n\} = \{a_3, a_7, a_{11}, \dots\}$$

- per verificare che ogni elemento dell'immagine di  $a_n$  è valore limite e la classe limite ha solo tre valori.
- IV Si consideri la biezione  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$  e si ponga  $a_n = f(n)$ : questa è una successione contenente tutti i razionali e i suoi punti di accumulazioni sono, per densità di  $\mathbb{Q}$ , tutti i reali. Allora la classe limite di  $a_n$  è  $\mathbb{R}$ .

**PROPOSIZIONE A.3.1. - CHIUSURA DELLA CLASSE LIMITE .**

*La classe limite di ogni successione è un insieme chiuso in  $\mathbb{R}^*$ .*

**DIMOストRAZIONE.** Sia  $a_n$  una successione di numeri reali e sia  $\Lambda$  la sua classe limite. Per provare che  $\Lambda$  è chiuso è sufficiente provare che ogni punto di accumulazione di  $\Lambda$  appartiene a  $\Lambda$ .

Sia quindi  $\lambda^* \in \mathbb{R}^*$  un punto di accumulazione di  $\Lambda$ ; proviamo che esiste una sottosuccessione di  $a_n$  convergente a  $\lambda^*$ . A tale fine, osserviamo che, per definizione di punto di accumulazione, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\lambda_0 \in \Lambda$ ,  $\lambda_0 \neq \lambda^*$ , tale che

$$\lambda^* - \varepsilon < \lambda_0 < \lambda^* + \varepsilon.$$

Sia  $\varepsilon_0 > 0$  tale che

$$\textcolor{red}{\diamondsuit} \quad \lambda^* - \varepsilon < \lambda_0 - \varepsilon_0 < \lambda_0 < \lambda_0 + \varepsilon_0 < \lambda^* + \varepsilon.$$

Dal fatto che  $\lambda_0 \in \Lambda$  deduciamo che esiste una sottosuccessione  $a_{n_k}$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lambda_0$$

e dunque, dato  $\varepsilon_0$  come in  $\textcolor{red}{\diamondsuit}$ , esiste  $K \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k \geq K$  si ha

$$\textcolor{blue}{\spadesuit} \quad \lambda_0 - \varepsilon_0 < a_{n_k} < \lambda_0 + \varepsilon_0.$$

Dalle relazioni (1) e (2) deduciamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $K \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k \geq K$  si ha

$$\lambda^* - \varepsilon < a_{n_k} < \lambda^* + \varepsilon$$

e questo prova che la sottosuccessione  $a_{n_k}$  converge a  $\lambda^*$ . □

Dalla proposizione e dal primo punto dell'esercizio precedente, segue che la classe limite di una qualsiasi successione è un insieme chiuso non vuoto; esistono quindi in  $\mathbb{R}^*$  il suo massimo ed il suo minimo.

**DEFINIZIONE A.3.2. - MASSIMO E MINIMO LIMITE .**

Si dice **massimo limite** della successione  $a_n$  il massimo della sua classe limite e lo si indica con

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n. \tag{A.24}$$

Si dice **minimo limite** della successione  $a_n$  il minimo della sua classe limite e lo si indica con

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

**OSSERVAZIONI.**

- Si noti che, a differenza del limite, il massimo ed il minimo limite di una successione di numeri reali esistono *sempre*.
- Dalla definizione segue immediatamente che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

e che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \text{ esiste} \iff \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

- Dalla definizione segue anche che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = - \limsup_{n \rightarrow +\infty} (-a_n)$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = - \liminf_{n \rightarrow +\infty} (-a_n).$$

**Eserciamoci! Definizione di massimo e minimo limite**

**ESEMPIO.** Una successione può avere massimo limite uguale a  $-\infty$ ?

**SOLUZIONE.** La risposta è sì. Osserviamo che dal fatto che il minimo limite è minore o uguale al massimo limite, in questo caso si deduce che anche il minimo limite è uguale a  $-\infty$  e dunque esiste il limite ed è uguale a  $-\infty$ . La successione diverge quindi a  $-\infty$ .

**Caratterizzazione del massimo e del minimo limite finiti** Il massimo ed il minimo limite di una successione di numeri reali possono essere facilmente caratterizzati nel caso in cui siano finiti.

**PROPOSIZIONE A.3.2. - CARATTERIZZAZIONE DEL MASSIMO LIMITE FINITO .**

Sia  $a_n$  una successione di numeri reali e sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$$

se e solo se

1.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < \lambda + \varepsilon$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \text{esistono infiniti indici } n_k \in \mathbb{N} : \quad a_{n_k} > \lambda - \varepsilon$ .

**OSSERVAZIONE.** Le condizioni 1. e 2. esprimono il fatto che il massimo limite di una successione è un elemento della classe limite ed è il più grande tra gli elementi della classe limite.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Sia

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda;$$

allora,  $\lambda$  è un valore limite di  $a_n$ , in quanto la classe limite è chiusa, e dunque esiste una

sottosuccessione  $a_{n_k}$  convergente a  $\lambda$ .

Quindi, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $K \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k \geq K$  si ha

$$\lambda - \varepsilon < a_{n_k} < \lambda + \varepsilon,$$

da cui segue la relazione 2.

D'altra parte,  $\lambda$  è il massimo della classe limite; di conseguenza, per ogni  $\varepsilon > 0$  il numero  $\lambda + 2\varepsilon$  non è un valore limite e dunque nell'intorno  $(\lambda + \varepsilon, \lambda + 3\varepsilon)$  di  $\lambda + 2\varepsilon$  cadono i numeri  $a_n$  per al più un numero finito di indici  $n$ .

Esiste quindi  $N \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq N$  si ha

$$a_n < \lambda + \varepsilon,$$

ossia la relazione 1.

$\Leftarrow$ ) Supponiamo ora che valgano le relazioni 1. e 2. Da esse si deduce immediatamente che la sottosuccessione  $a_{n_k}$  converge a  $\lambda$  e dunque  $\lambda$  è un valore limite della successione  $a_n$ .

D'altra parte, dalla relazione 1. segue che ogni numero  $\lambda' > \lambda$  non appartiene alla classe limite: infatti, dato  $\lambda' > \lambda$ , posto  $\varepsilon' = (\lambda' - \lambda)/2$ , esiste  $N' \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_n < \lambda + \varepsilon' = \lambda' - \varepsilon',$$

per ogni  $n \geq N'$ . Di conseguenza, si ha definitivamente

$$a_n \notin (\lambda' - \varepsilon', \lambda' + \varepsilon')$$

e dunque non esistono sottosuccessioni convergenti a  $\lambda'$ .

Concludiamo quindi che  $\lambda$  è il massimo della classe limite, ossia che  $\lambda$  è il massimo limite della successione.  $\square$

In modo analogo si prova il seguente risultato.

#### PROPOSIZIONE A.3.1. - CARATTERIZZAZIONE DEL MINIMO LIMITE FINITO .

Sia  $a_n$  una successione di numeri reali e sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$$

se e solo se

1.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > \lambda - \varepsilon.$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \text{esistono infiniti indici } n_k \in \mathbb{N} : \quad a_{n_k} < \lambda + \varepsilon.$

$\square$

#### Formulazione equivalente del massimo e del minimo limite

#### PROPOSIZIONE A.3.3. - FORMULAZIONE EQUIVALENTE DEL MASSIMO E DEL MINIMO LIMITE .

Sia  $a_n$  una successione di numeri reali. Allora si ha

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \geq 1} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right) \quad (\text{A.25})$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \geq 1} \left( \inf_{k \geq n} a_k \right). \quad (\text{A.26})$$

**OSSERVAZIONE.** Si verifica facilmente che la successione

$$b_n = \sup_{k \geq n} a_k, \quad n \geq 1,$$

è decrescente: infatti, per ogni  $n \geq 1$  si ha

$$b_{n+1} = \sup_{k \geq n+1} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k = b_n.$$

Di conseguenza, per il teorema di ANALISI MATEMATICA UNO sui *limiti di successioni monotone*, essa ammette limite ed il suo limite coincide con l'estremo inferiore dei suoi valori; si ha quindi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \geq 1} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right). \quad (\text{A.27})$$

In modo analogo si prova che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \geq 1} \left( \inf_{k \geq n} a_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \inf_{k \geq n} a_k \right). \quad (\text{A.28})$$

**DIMOストRAZIONE (DELLA FORMULAZIONE EQUIVALENTE DEL  $\limsup$  E DEL  $\liminf$ ).**

Proviamo il risultato sul massimo limite nel caso in cui questo sia *finito*. Lasciamo per esercizio i casi in cui questo sia più o meno infinito e le analoghe dimostrazioni per il minimo limite.

Sia quindi

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

e supponiamo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alla luce dell'osservazione precedente, dobbiamo verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right) = \lambda,$$

ossia che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \lambda - \varepsilon < \sup_{k \geq n} a_k < \lambda + \varepsilon.$$

Sia quindi  $\varepsilon > 0$ ; dalla caratterizzazione del massimo limite finito è noto che esiste  $N^* \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq N^*$  si ha

$$a_n < \lambda + \varepsilon/2.$$

Per ogni  $n \geq N^*$  e per ogni  $k \geq n$  si ha quindi

$$a_k < \lambda + \varepsilon/2$$

e dunque

$$\sup_{k \geq n} a_k \leq \lambda + \varepsilon/2 < \lambda + \varepsilon.$$

D'altra parte, sempre la caratterizzazione del massimo limite finito, esistono infiniti indici  $n_j \in \mathbb{N}$  tali che

$$a_{n_j} > \lambda - \varepsilon.$$

Ora, per ogni  $n \geq N^*$ , sia  $n_j^* > n$ ; si ha quindi

$$a_{n_j^*} > \lambda - \varepsilon$$

e dunque

$$\sup_{k \geq n} a_k \geq a_{n_j^*} > \lambda - \varepsilon.$$

La tesi è quindi dimostrata scegliendo  $N = N^*$ .  $\square$

### Eserciziamoci! Formulazione equivalente del massimo e del minimo limite

#### ESERCIZIO - LEGAME TRA MASSIMO E MINIMO LIMITE .

Utilizzando la proposizione precedente, provare che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \quad (\text{A.29})$$

**OSSERVAZIONE.** Questa proprietà si può anche dimostrare direttamente dalle definizioni originali di  $\limsup$  e  $\liminf$ .

**SOLUZIONE.** Mostriamo innanzitutto che, preso  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto, allora

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

Chiaramente,  $A$  non è limitato superiormente se e solo se  $-A$  non è limitato inferiormente e quindi vale

$$\inf(-A) = -\infty = -(+\infty) = -\sup(A)$$

Supponiamo allora che  $A$  sia limitato superiormente e consideriamo  $a \in A$ . Si ha

$$m \leq -a \iff a \leq -m$$

ossia  $-m$  è un minorante per  $-A$  se e solo se  $m$  è maggiorante per  $a$ . Allora:

- $\inf(-A)$  è minorante di  $-A$ , dunque  $-\inf(-A)$  è maggiorante per  $A$  e pertanto

$$\sup(A) \leq -\inf(-A) \iff \inf(-A) \leq -\sup(A).$$

- $\sup(A)$  è maggiorante di  $A$ , dunque  $-\sup(A)$  è minorante per  $-A$  e pertanto

$$-\sup(A) \leq \inf(-A).$$

Segue allora l'uguaglianza cercata.

Ponendo  $A_n := \{a_k \mid k \geq n\}$ , si ha allora

$$\begin{aligned} \inf(-A_n) &= -\sup(A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies \inf_{k \geq n} (-a_k) = -\sup_{k \geq n} (a_k) \end{aligned}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , per la formulazione equivalente del massimo e minimo limite otteniamo la tesi:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} (-a_k) = - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} (a_k) = - \limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$$

#### ESERCIZIO - GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO .

Utilizzando la proposizione precedente, provare che

$$a_n \geq 0, \quad \forall n \geq 1 \implies \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0$$

e

$$a_n \geq 0, \quad \forall n \geq 1 \implies \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0.$$

**SOLUZIONE.** Poiché vale sempre

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n,$$

ci basta verificare la seconda affermazione.

Consideriamo la successione

$$b_n = \inf_{k \geq n} a_k, \quad n \geq 1.$$

Poiché  $a_k \geq 0, \forall n \geq 1$ , si ha  $b_n \geq 0$ . Per il teorema della permanenza del segno per i limiti, si ha

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k \geq 0.$$

**ESERCIZIO.** I concetti di massimo e minimo limite si possono definire anche per le successioni di numeri complessi?

**SOLUZIONE.** La risposta è **no**. I concetti di massimo e minimo limite si basano sulla nozione di ordinamento in  $\mathbb{R}^*$  e dunque non si possono estendere al campo complesso, che non è un campo ordinato.

#### Massimo limite del prodotto

##### PROPOSIZIONE A.3.4. - MASSIMO LIMITE DEL PRODOTTO DI DUE SUCCESSIONI POSITIVE .

Si considerino due successioni  $a_n, b_n$  di numeri reali positivi. Allora vale la diseguaglianza

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n, \tag{A.30}$$

mentre in generale non vale l'uguaglianza

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n \tag{A.31}$$

. Se si suppone che esista finito e non nullo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , allora vale l'uguaglianza

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che per ogni successione di numeri reali  $c_n$  si ha

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} c_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} c_k$$

1. Osserviamo che per ogni  $n \geq 1$  e per ogni  $k \geq n$  si ha

$$a_k b_k \leq \left( \sup_{j \geq n} a_j \right) b_k$$

e dunque

$$\sup_{k \geq n} a_k b_k \leq \left( \sup_{j \geq n} a_j \right) \left( \sup_{k \geq n} b_k \right).$$

Tenendo presente che, per ogni coppia di successioni  $f_n$  e  $g_n$  si ha

$$f_n \leq g_n, \quad \forall n \geq 1 \implies \inf_{n \geq 1} f_n \leq \inf_{n \geq 1} g_n,$$

concludiamo che

$$\inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} a_k b_k \leq \inf_{n \geq 1} \left( \sup_{j \geq n} a_j \sup_{k \geq n} b_k \right) \leq \inf_{n \geq 1} \sup_{j \geq n} a_j \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} b_k,$$

da cui segue la diseguaglianza richiesta.

2. Un controesempio all'uguaglianza è dato dalle successioni

$$\{a_n\} = \{1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\}, \quad \{b_n\} = \{2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots\},$$

per cui si ha

$$a_n b_n = 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Si ha quindi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 2$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2 \cdot 2 = 4.$$

3. Sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in (0, +\infty).$$

Per ogni  $\varepsilon \in (0, L)$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Per ogni  $n \geq N$  e per ogni  $k \geq n$ , ricordando che  $b_k \geq 0$ , si ha quindi

$$(L - \varepsilon)b_k < a_k b_k < (L + \varepsilon)b_k$$

e dunque

$$(L - \varepsilon) \sup_{k \geq n} b_k < \sup_{k \geq n} a_k b_k < (L + \varepsilon) \sup_{k \geq n} b_k.$$

Deduciamo quindi che

$$(L - \varepsilon) \inf_{n \geq N} \sup_{k \geq n} b_k < \inf_{n \geq N} \sup_{k \geq n} a_k b_k < (L + \varepsilon) \inf_{n \geq N} \sup_{k \geq n} b_k,$$

ossia

$$(L - \varepsilon) \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n < \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n < (L + \varepsilon) \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Tenendo presente che questa relazione vale per ogni  $\varepsilon > 0$ , si deduce la tesi.  $\square$

### A.3.2 Limite e limite del modulo

#### PROPOSIZIONE A.3.5. - LIMITE DI UNA SUCCESSIONE E LIMITE DEL MODULO .

Sia  $a_n$  una successione in  $\mathbb{C}$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0 \quad (\text{A.32})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Da  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  si ha, per definizione, che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N, |a_n| < \varepsilon.$$

Poiché  $|a_n| = ||a_n||$  si ha che l'espressione precedente è equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N, ||a_n|| < \varepsilon,$$

ossia verifica la definizione di  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ ; si ha dunque la tesi.  $\square$

### A.3.3 Riordinare gli elementi di una serie

#### TEOREMA A.3.1. - TEOREMA DEL RIORDINAMENTO DI RIEMANN .

Se una serie a valori reali converge semplicemente ma non assolutamente, allora i suoi termini possono essere riordinati tramite una permutazione in modo che la nuova serie converge ad un qualunque numero reale arbitrariamente scelto oppure diverge.  $\square$

**ESEMPIO.** La serie armonica alternante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (\text{A.33})$$

converge semplicemente per il criterio di Leibniz, ma la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è la serie armonica, che non converge; pertanto, la serie armonica alternante non converge assolutamente.

La serie, nell'ordinamento classico

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge a  $\log 2$ . Possiamo riordinare i termini nella seguente maniera:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Questo è a tutti gli effetti una permutazione degli elementi della serie e si può, raggruppando dei termini, scrivere come la seguente somma infinita:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{2} \log 2$$

Notiamo come aver riordinato gli elementi in questo modo ci ha portato a due valori finali differenti!

### A.3.4 Il prodotto di serie (secondo Cauchy)

In questa sezione ricordiamo la definizione ed alcune proprietà del prodotto di serie (secondo Cauchy), basandoci sul Capitolo 3 di Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. Date le due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$$

vogliamo definire il loro prodotto. L'idea alla base della definizione è quella di *generalizzare* il prodotto di due *polinomi*: è noto che, dati i polinomi

$$\sum_{n=0}^J \alpha_n z^n, \quad \sum_{n=0}^J \beta_n z^n$$

il loro prodotto si scrive come

$$\sum_{n=0}^{2J} \gamma_n z^n \quad \text{con} \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}, \quad \forall n \geq 0$$

Possiamo estendere formalmente questa scrittura al caso di serie di potenze, ponendo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

dove  $\gamma_n$  è definito come precedentemente. Il risultato per  $z = 1$  suggerisce quindi come definire il prodotto delle serie iniziali.

#### DEFINIZIONE A.3.3. - PRODOTTO DI SERIE (SECONDO CAUCHY).

Date le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$$

si definisce **prodotto secondo Cauchy** la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \quad \text{con} \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}, \quad \forall n \geq 0$$

Il problema principale sul prodotto di serie è quello della sua convergenza, a partire dalla convergenza delle serie iniziali: più precisamente, ci si chiede:

se le serie iniziali convergono rispettivamente a  $\alpha$  e  $\beta$ , la serie prodotto converge a  $\alpha\beta$ ?

In generale la risposta è **no**, come mostra il prossimo esempio.

**ESEMPIO - SERIE CONVERGENTI, AVENTI PRODOTTO NON CONVERGENTE .**

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Applicando il criterio di Leibniz, si verifica facilmente che la serie converge. La serie prodotto della serie data per se stessa ha termine generale

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Ora, si ha

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2, \quad \forall n \geq 0, \quad 0 \leq k \leq n$$

Otteniamo quindi

$$|\gamma_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}, \quad \forall n \geq 0.$$

Questo prova che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |\gamma_n| \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma_n| \neq 0.$$

Perciò si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \neq 0$$

e quindi la serie prodotto non può convergere.

Osserviamo che nell'esempio riportato la serie iniziale *converge semplicemente*, ma non *assolutamente*; questo è il motivo per cui la serie prodotto *non converge*. Infatti, in presenza della convergenza assoluta la serie prodotto *converge*.

**TEOREMA A.3.2. - PRODOTTO DI SERIE (SECONDO CAUCHY) CONVERGENTE SE UNA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE .**

Siano date le due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C},$$

e si supponga che esse convergano a  $\alpha$  e  $\beta$ , rispettivamente. Inoltre, si supponga che almeno una di esse converga assolutamente. Allora, la loro serie prodotto converge a  $\alpha\beta$ .  $\square$

#### A.4 CAPITOLO 5: TEORIA DELLA MISURA

##### A.4.1 Leggi di De Morgan

###### TEOREMA A.4.1. - LEGGI DI DE MORGAN .

Sia  $A_i$  una famiglia di insiemi indicizzata da  $I$  non necessariamente numerabile. Allora

$$\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C \quad (\text{A.34})$$

e

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C \quad (\text{A.35})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Entrambe si dimostrano per doppia inclusione; la prima legge segue da

$$\begin{aligned} x \in \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^C &\iff x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \\ &\iff \neg(\forall i \in I, x \in A_i) \\ &\iff \exists i \in I: x \notin A_i \\ &\iff \exists i \in I: x \in A_i^C \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} A_i^C \end{aligned}$$

mentre la seconda da

$$\begin{aligned} x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^C &\iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\iff \neg(\exists i \in I: x \in A_i) \\ &\iff \forall i \in I, x \notin A_i \\ &\iff \forall i \in I, x \in A_i^C \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i^C \end{aligned}$$

$\square$

##### A.4.2 Misurabilità della parte positiva e negativa

###### PROPOSIZIONE A.4.1. - MISURABILITÀ DI $\max$ E $\min$ .

Sia  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile e siano  $f, g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$  misurabili.

Allora

$$\max\{f, g\} \quad \min\{f, g\}$$

sono misurabili.

**DIMOSTRAZIONE.**

1. Sia  $h(x) = \max\{f, g\}(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Dobbiamo provare che  $h$  sia misurabile, con  $h : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ . Per una proprietà equivalente alla terza caratterizzazione del teorema 5.3.1 delle funzioni misurabili è sufficiente dimostrare che  $h^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Si osserva che

$$\max\{f(x), g(x)\} \leq \alpha \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R} \iff f(x) \leq \alpha \wedge g(x) \leq \alpha$$

Allora, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\begin{aligned} h^{-1}([-\infty, \alpha]) &= \{x \in X \mid \max\{f(x), g(x)\} \leq \alpha\} = \\ &= \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\} = \\ &= f^{-1}([-\infty, \alpha]) \cap g^{-1}([-\infty, \alpha]) \end{aligned}$$

Poiché  $f$  e  $g$  sono misurabili si ha

$$f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M} \quad g^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$$

ed essendo  $\mathcal{M}$  una  $\sigma$ -algebra è chiusa rispetto all'intersezione finita e dunque

$$h^{-1}([-\infty, \alpha]) = f^{-1}([-\infty, \alpha]) \cap g^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$$

2. Sia  $k(x) = \min\{f, g\}(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Dobbiamo provare che  $k$  sia misurabile, con  $k : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ . Per la terza caratterizzazione del teorema 5.3.1 delle funzioni misurabili è sufficiente dimostrare che  $k^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Si osserva che

$$\min\{f(x), g(x)\} > \alpha \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R} \iff f(x) > \alpha \wedge g(x) > \alpha$$

Allora, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\begin{aligned} k^{-1}((\alpha, +\infty]) &= \{x \in X \mid \min\{f(x), g(x)\} > \alpha\} = \\ &= \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \cap \{x \in X \mid g(x) > \alpha\} = \\ &= f^{-1}((\alpha, +\infty]) \cap g^{-1}((\alpha, +\infty]) \end{aligned}$$

Poiché  $f$  e  $g$  sono misurabili si ha

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M} \quad g^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

ed essendo  $\mathcal{M}$  una  $\sigma$ -algebra è chiusa rispetto all'intersezione finita e dunque

$$k^{-1}((\alpha, +\infty]) = f^{-1}((\alpha, +\infty]) \cap g^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

□

**COROLARIO A.4.1. - MISURABILITÀ DELLA PARTE POSITIVA E NEGATIVA DI UNA FUNZIONE .**

Sia  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile e sia  $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$  misurabile. Allora

$$f^+ := \max\{f, 0\} \quad f^- := -\min\{f, 0\}$$

sono misurabili.

**A.5 CAPITOLO 7: CONVERGENZA DI FUNZIONI, PARTE SECONDA****A.5.1 Misurabilità e convergenza quasi ovunque****PROPOSIZIONE A.5.1. - TEOREMA DI MISURABILITÀ PER SUCCESSIONI Q.O. .**

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio di misura con  $\mu$  completa e  $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  tali che

1.  $f_n$  misurabile su  $X$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $f_n$  converge q.o. a  $f$  su  $[a, b]$ .

Allora  $f$  è misurabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $g := \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$ : sappiamo che  $g$  è misurabile perché le  $f_n$  lo sono; inoltre, poiché  $f_n$  converge q.o. a  $f$ , allora esso coincide a  $f$  q.o.. Ci rimane da mostrare che se  $f = g$  q.o. e  $g$  è misurabile, allora lo è anche  $f$ .

Per definizione di proprietà q.o., esiste un insieme  $N$  di misura nulla in cui  $f \neq g$ . Osserviamo che, per un qualunque aperto  $A \subseteq \mathbb{C}$ , si ha

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= [f^{-1}(A) \cap N^C] \cup [f^{-1}(A) \cap N] = \\ &= [g^{-1}(A) \cap N^C] \cup [f^{-1}(A) \cap N] \end{aligned}$$

in quanto  $f = g$  su  $N^C$ . Poiché  $N$ ,  $N^C$  e  $g^{-1}(I)$  sono misurabili, allora  $g^{-1}(A) \cap N^C$  è misurabile; infine, poiché la misura è completa, allora essendo  $N$  misurabilmente nullo si ha  $f^{-1}(A) \cap N$  misurabile (e di misura nulla). Pertanto,  $f^{-1}(A)$  è misurabile e si ha la tesi.  $\square$

L'ipotesi della completezza della misura  $\mu$  è fondamentale, come vedremo nel breve conto esempio che segue.

**ESEMPIO.** Si consideri lo spazio di misura  $(X, \{\emptyset, X, \mu\})$ , dove  $\mu(\emptyset) = 0 = \mu(X)$ ; la misura  $\mu$  è banalmente non completa. In questo spazio si ha che ogni successione  $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$  converge q.o. ad una qualunque  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ , ma soltanto le applicazioni costanti sono misurabili.

# B

APPENDICE

## BREVI CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

---

“La Logica è l’arte di sbagliare con confidenza.”

MORRIS KLINE, commentando questo capitolo.

**Q**UANDO nella vita di tutti i giorni utilizziamo i numeri naturali, lo facciamo con due scopi ben precisi:

- **Contare** quanti oggetti ci sono in un insieme, associando una *dimensione* ad esso: “Ci sono *tre* mele nel cestino”.
- **Ordinare** un insieme di oggetti, ossia formare una sequenza assegnando un *indice* ad ogni elemento dell’insieme: “Torino è la *quarta* città italiana per numero di abitanti”.

Per insiemi *finiti*, non c’è apparente differenza tra i due concetti. Osserviamo che il numero di naturali (compreso lo zero) prima della  $n$ -esima posizione sono  $n$ , dunque in una sequenza di elementi indicizzata da 0 con ultimo indice  $n$  si hanno  $n + 1$  elementi. In altre parole, ordinando gli elementi è possibile sapere quanti sono e viceversa.

Queste due nozioni, come vedremo, divergono non appena generalizziamo i due concetti di “contare” e “ordinare” agli insiemi infiniti: ci sono molteplici ordinali infiniti che corrispondono allo stesso cardinale; inoltre, sotto certe ipotesi, potrebbero esserci insiemi che ammettono cardinalità ma che *non* ammettono ordinali!

Lo scopo di questo capitolo aggiuntivo è cercare di dare alcune basi di **teoria degli insiemi** e **teoria degli ordini**, con il preciso scopo di spiegare come si “conta” e si “ordina” su insiemi infiniti.

Dopo una premessa sugli *assiomi* sui quali baseremo i nostri ragionamenti, partiremo dal definire *insiemi (ben) ordinati*, necessari per introdurre gli *ordinali* (finiti e infiniti); arriveremo a parlare dell’*induzione transfinita* e dell’aritmetica degli ordinali.

Successivamente, passeremo ai concetti di *cardinalità* e *numeri cardinali*, mostrando diverse proprietà (compreso lo stretto legame che li lega agli ordinali), concludendo con alcuni importanti teoremi e congettture.

Per maggiori approfondimenti rimandiamo a Jech, *Set Theory: The Third Millennium Edition* e Andretta, *Elements of Mathematical Logic*.

### B.1 TEORIA DEGLI INSIEMI DI ZERMELO-FRAENKEL E ASSIOMA DI SCELTA

Intuitivamente, un *insieme* è una collezione di tutti gli elementi che soddisfano una certa proprietà. Potremmo dunque definire il seguente assioma...

#### **"ASSIOMA" - ASSIOMA DELLA COMPRENSIONE .**

Se  $P$  è una proprietà, allora esiste un insieme degli elementi che soddisfano tale proprietà:

$$Y = \{x | P(x)\}$$

... che è però **falso** per il famoso **Paradosso di Russell**.

#### **ESEMPIO - PARADOSSO DI RUSSELL .**

Si consideri l'insieme  $S$  i cui elementi sono tutti e soli gli insiemi che non sono elementi di loro stessi:

$$S = \{X | X \notin X\}$$

L'insieme  $S$  appartiene a  $S$ ? Se  $S$  appartiene a  $S$ , allora  $S$  non è un elemento di se stesso e quindi si ha  $S \notin S$ ; d'altro canto, se  $S \notin S$ , allora per definizione di  $S$  necessariamente  $S$  appartiene a  $S$ . In ogni caso abbiamo un assurdo.

Poiché  $S$  non è un insieme, dobbiamo sostituire questo assioma intuitivo ma errato. Per questo si introduce una versione debole di esso, lo *Schema assiomatico<sup>1</sup> di Separazione*.

Se  $P$  è una proprietà, allora per ogni insieme  $X$  esiste un insieme degli elementi di  $X$  che soddisfano tale proprietà:

Osserviamo che questi assiomi *non* permette di costruire insiemi, ma solo *sottoinsiemi* di altri insiemi già noti. In realtà, lo Schema assiomatico di Separazione è troppo debole per poterci costruire una teoria solo su di essi (non si può neanche definire propriamente l'unione di insiemi!), dunque abbiamo bisogno di integrare opportunamente con ulteriori assiomi.

Di seguito enunciamo, senza analizzarli nel dettaglio, gli assiomi di Zermelo-Fraenkel. La teoria degli insiemi basata su questi assiomi è detta, per ovvi motivi, **teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF)**; denotiamo con ZFC la teoria ZF con l'Assioma della Scelta.

#### **ASSIOMA B.1.1. - ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ .**

Se  $X$  e  $Y$  hanno gli stessi elementi, allora  $X = Y$ .

#### **ASSIOMA B.1.2. - ASSIOMA DELLA COPPIA .**

Per ogni  $a$  e  $b$  esiste un insieme  $\{a, b\}$  che contiene esattamente  $a$  e  $b$ .

#### **ASSIOMA B.1.3. - SCHEMA ASSIOMATICO DI SEPARAZIONE .**

Se  $P$  è un proprietà di parametro  $p$ , allora per ogni insieme  $X$  e per ogni parametro  $p$

<sup>1</sup>Per **schema assiomatico** si intende che c'è un assioma per ogni proprietà  $P$ .

esiste un insieme che contiene tutti gli elementi  $u \in X$  che hanno la proprietà  $P$ :

$$Y = \{u \in X \mid P(u, p)\}$$

#### **ASSIOMA B.1.4. - ASSIOMA DELL'UNIONE .**

Per ogni insieme  $X$  esiste l'insieme dato dall'unione di tutti gli elementi di  $X$

$$Y = \bigcup X$$

#### **ASSIOMA B.1.5. - ASSIOMA DELL'INSIEME DELLE PARTI .**

Per ogni insieme  $X$  esiste un insieme di tutti i sottoinsiemi di  $X$ , detto **insieme delle parti**:

$$Y = \mathcal{P}(X)$$

#### **ASSIOMA B.1.6. - ASSIOMA DELL'INFINITO .**

Esiste un insieme infinito.

#### **ASSIOMA B.1.7. - SCHEMA ASSIOMATICO DI RIMPIAZZAMENTO .**

Se una classe  $F$  è una funzione, allora per ogni  $X$  esiste un insieme **immagine**:

$$Y = F(X) = \{F(x) \mid x \in X\}$$

#### **ASSIOMA B.1.8. - ASSIOMA DI REGOLARITÀ .**

Ogni insieme non vuoto ha un minimo rispetto all'ordine dato da  $\in$ .

#### **ASSIOMA B.1.9. - ASSIOMA DI SCELTA .**

Ogni famiglia di insiemi non vuoti ha una funzione di scelta.

## B.2 RELAZIONI D'ORDINE PARZIALE E BUON ORDINE

#### **DEFINIZIONE B.2.1. - RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE (DEBOLE) E TOTALE .**

Una relazione binaria  $\leq$  su un insieme  $P$  è un **ordine parziale (debole)** di  $P$  se è

1. **Riflessiva:**  $p \leq p, \forall p \in P$ .
2. **Transitiva:** se  $p \leq q$  e  $q \leq r$ , allora  $p \leq r$ .

La coppia  $(P, \leq)$  viene detta **insieme parzialmente ordinato**.

Un ordine parziale è **totale** se vale anche

4. **Confrontabilità:**  $p \leq q \text{ o } q \leq p, \forall p, q \in P$ .

#### **DEFINIZIONE B.2.2. - RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE (FORTE) E TOTALE .**

Una relazione binaria  $<$  su un insieme  $P$  è un **ordine parziale forte** di  $P$  se è

1. **Irriflessiva:**  $p \neq p, \forall p \in P$ .
2. **Transitiva:** se  $p < q$  e  $q < r$ , allora  $p < r$ .

La coppia  $(P, <)$  viene detta **insieme parzialmente ordinato**.

Un ordine parziale forte è **totale** se vale anche

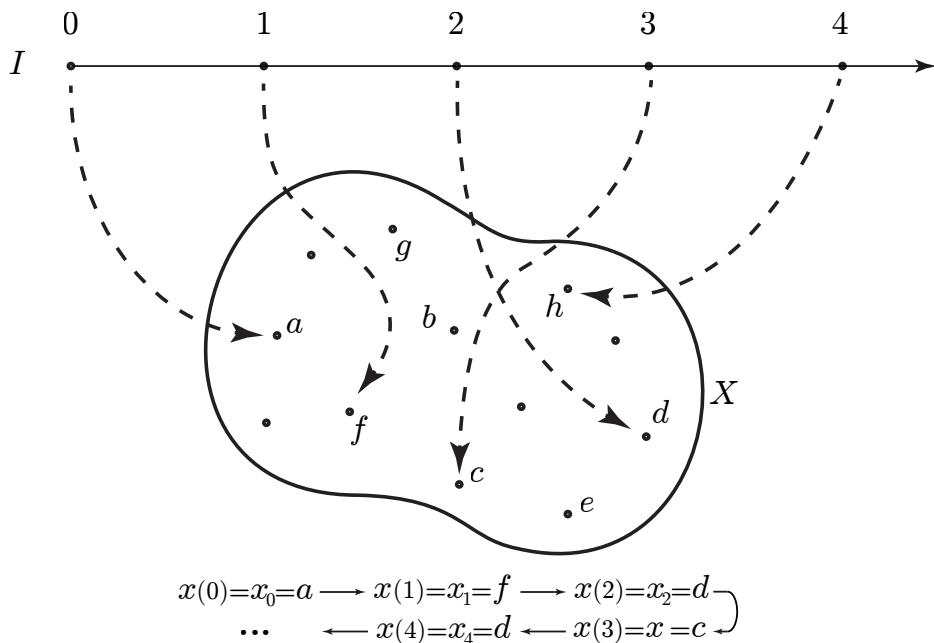
4. **Confrontabilità:**  $p < q \text{ o } p = q \text{ o } q < p, \forall p, q \in P$ .

Abbiamo detto che i naturali, come *ordinali*, servono per ordinare un insieme in una sequenza; dobbiamo capire, almeno intuitivamente, cosa intendiamo per *sequenza*.

Una **sequenza** può essere immaginata come una lista di elementi in cui l'ordine di tali elementi è importante e la posizione di un certo elemento nella lista è determinato dalle posizioni degli elementi precedenti.

Pertanto, preso un generico insieme  $X$ , una **sequenza** deve essere una funzione da un insieme totalmente ordinato  $I$ , detto *insieme degli indici*, che ad ogni indice  $i \in I$  associa un elemento di  $X$ .

$$\begin{aligned} x : (I, <) &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto x(i) = x_i \end{aligned}$$



È fondamentale che ci sia un **ordine** su  $I$ , dato che si vuole confrontare la *posizione* di due elementi della sequenza: un elemento  $x_i$  precede un altro  $x_j$  nella sequenza se gli indici sono tali per cui  $i < j$ .

Per soddisfare la seconda richiesta, ossia che la posizione di un certo elemento nella lista è determinato dalle posizioni degli elementi precedenti, si può pensare di definire la sequenza in modo *ricorsiva*. Tuttavia, per far ciò, non è sufficiente che gli indici siano ordinati. Nello specifico, se  $I$  contiene una *sequenza infinita strettamente decrescente*, non siamo sicuri di poter definire ricorsivamente una successione a valori in  $X$  indicizzata da  $I$ . Invece, si può vedere che se  $I$  non ammette le sequenze infinite strettamente decrescenti, allora le definizioni ricorsive su  $I$  sono lecite e permettono di definire univocamente una successione per ogni sequenza di indici! Dobbiamo quindi limitare quali relazioni d'ordine possiamo usare.

#### DEFINIZIONE B.2.3. - MINIMO .

Se  $(P, \leq)$  è un insieme parzialmente ordinato,  $X \neq \emptyset$  un sottoinsieme di  $P$  e  $a \in X$ , allora  $a$  è **minimo** di  $X$  se  $a \in X$  e  $\forall x \in X \ a \leq x$ . Si indica  $a = \min X$ .

**DEFINIZIONE B.2.4. - BUON ORDINE .**

Un ordine parziale totale  $\leq$  di  $P$  è un **buon ordine** se ogni sottoinsieme  $X \neq \emptyset$  di  $P$  ha un minimo.

**ESEMPI.**

- $(\mathbb{N}, \leq)$  è ben ordinato.
- $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  non sono ben ordinati rispetto all'ordine canonico  $\leq$ : tutti ammettono il sottoinsieme  $\mathbb{Z}_{<0}$  degli interi negativi, che non ha minimo.

**OSSERVAZIONE.** Ogni insieme ben ordinato *non* ammette sequenze infinite strettamente decrescente, in quanto gli elementi della sequenza formano un sottoinsieme e pertanto esso ammette minimo.

**INTUITIVAMENTE...** Possiamo ora capire perché non ha particolarmente senso definire successioni indicizzate, ad esempio, rispetto a  $(\mathbb{Z}, <)$  o rispetto a  $(\mathbb{R}, <)$ : non ammettendo minimo, non possiamo avere il *passo base* della nostra successione definita ricorsivamente!

**DIGRESSIONE.** Il **teorema del buon ordine**, o anche noto come **teorema di Zermelo**, afferma che *ogni* insieme non vuoto può essere ben ordinato (rispetto ad un opportuno ordine).

Questo teorema risulta essere vero se si considera valido l'**Assioma della Scelta**; in realtà, si può ulteriormente mostrare come il teorema del buon ordine risulta essere equivalente, sotto gli Assiomi di Zermelo–Fraenkel, proprio all'**Assioma della Scelta**!

Diamo un'ultima definizione, che sarà fondamentale per collegare gli insiemi ben ordinati con gli ordinali.

**DEFINIZIONE B.2.5. - FUNZIONI MONOTONE E ISOMORFISMI D'ORDINE .**

Siano  $(P, \leq_P)$  e  $(Q, \leq_Q)$  due insiemi parzialmente ordinati. Una funzione  $f : P \longrightarrow Q$  è **monotona** se

$$x \leq_P y \implies f(x) \leq_Q f(y) \quad (\text{B.1})$$

Se una funzione monotona è biettiva e l'*inversa* è monotona, allora  $f$  è una **isotonia** o **isomorfismo d'ordine**.

## B.3 ORDINALI

Supponiamo di aver preso un insieme degli indici  $I$  e, dopo aver posto un buon ordine su di esso, di aver definito una successione nel modo che abbiamo detto nella sezione precedente. Allora, sulla base della definizione intuitiva data nell'introduzione, gli indici scelti fungono proprio da ordinali.

Supponiamo ora di prendere un altro insieme di indici  $J$  ben ordinati e determinare una successione sulla base di essi. Per questa nuova successione gli elementi di  $J$  fanno da ordinale, ma hanno qualcosa in comune con gli indici  $I$ ? Sono gli stessi ordinali o sono ordinali differenti? Potremmo mostrare che ci sia un isomorfismo d'ordine tra  $I$  e  $J$ : in questo modo avremmo gli stessi ordinali *a meno di isomorfismo*.

Si mostra facilmente che, come ci si aspetterebbe da una funzione chiamata "isomorfismo", essere isotonicci è una **relazione di equivalenza** e gli insiemi parzialmente ordinati sono partizionati da essi. Da qui in poi queste classi di equivalenza le chiameremo **tipi d'ordine**.

Georg Cantor (1845 - 1918) definì un numero ordinale proprio come il tipo d'ordine di insiemi *ben ordinati*. Tuttavia, l'indiscutibile appeal intuitivo che questa definizione emana ha due svantaggi:

1. I tipi di ordine sono particolarmente ampi: il solo tipo associato all'ordinale 1, di cui vedremo tra poco la definizione precisa in senso insiemistico, contiene **tutti** i singoletti, tra cui anche il singoletto  $\{1\}$ -
2. In tutte le dimostrazioni che si basano sulle classi di equivalenza è necessario scegliere un rappresentante e controllare che i risultati non dipendono dalla scelta fatta.

Fu John von Neumann (1903-1957) a proporre un approccio che risolva questi problemi, ma che risulti in tutto e per tutto equivalente alla costruzione originale di Cantor: invece di vedere gli ordinali come classi di equivalenza, definire degli *insiemi canonici* ben ordinati, che chiameremo per ovvi *ordinali*, e mostrare che ogni insieme ben ordinato è isomorfo ad uno e un solo insieme ordinale. Uno degli aspetti geniali di questa definizione è di definire gli ordinali sulla base degli ordinali che lo precedono, generalizzando ciò che succede per i numeri naturali quando usati per ordinare: un elemento è il *quarto* perché segue il *terzo*, che a sua volta segue il *secondo*, che a sua volta segue il *primo*.

Innanzitutto, diamo una definizione formale dei naturali come una famiglia di particolari insiemi costruiti *ricorsivamente dall'insieme vuoto*.

#### DEFINIZIONE B.3.1. - NUMERI NATURALI .

I **numeri naturali**  $0, 1, 2, \dots$  sono costruiti ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ n + 1 &:= n \cup \{n\} = \{0, \dots, n\} \end{aligned} \tag{B.2}$$

In altre parole:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\emptyset\} \\ 1 &= \{0\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\dots \end{aligned}$$

I naturali sono tutti degli insiemi *ben ordinati* e, in particolare, sono anche *transitivi*.

#### DEFINIZIONE B.3.2. - TRANSITIVITÀ .

Un insieme  $T$  è **transitivo** se ogni elemento di  $T$  è un sottoinsieme di  $T$ ; in altre parole,

$$T \subseteq \mathcal{P}(T) \tag{B.3}$$

o, equivalentemente, se  $x \in T$  e  $y \in x$ , allora  $y \in T$ .

Possiamo generalizzare la costruzione astratta dei naturali per definire più genericamente i *numeri ordinali*.

#### DEFINIZIONE B.3.3. - ORDINALE .

Un insieme è un **ordinale** se è transitivo e ben ordinato dalla relazione d'appartenenza  $\in$ .

Definiamo inoltre una relazione sulla classe di tutti gli ordinali Ord:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \tag{B.4}$$

**ESEMPIO.** Per la definizione astratta di naturale, i **numeri naturali** sono tutti ordinali per definizione.

Dalla sola definizione seguono quasi immediatamente le seguenti proprietà.

**LEMMA B.3.1. - RELAZIONI TRA ORDINALI .**

Valgono le seguenti:

1. Se  $\alpha$  è un ordinale e  $\beta \in \alpha$ , allora  $\beta$  è un ordinale.
2. Se  $\alpha \neq \beta$  sono ordinali e  $\alpha \subsetneq \beta$ , allora  $\alpha \in \beta$ .
3. Se  $\alpha, \beta$  sono ordinali, allora si ha o  $\alpha \subseteq \beta$  oppure  $\beta \subseteq \alpha$ . □

Da questo lemma possiamo ricavare una serie di proprietà importanti:

- $<$  è una relazione d'ordine totale nella classe Ord:
- Per ogni ordinale  $\alpha$  si ha

$$\alpha = \{\beta \in \text{Ord} \mid \beta < \alpha\}$$

ossia un ordinale contiene **tutti** gli ordinali che lo precedono.

- Se  $C$  è una classe non vuota di ordinali, allora

$$\bigcap C = \inf C \in C$$

è un ordinale

- Se  $X$  è una insieme non vuoto di ordinali, allora

$$\bigcup X = \sup X$$

è un ordinale.

- Per ogni  $\alpha$  ordinale,  $\alpha \cup \{\alpha\}$  è un ordinale ed è l'estremo inferiore di tutti gli ordinali che lo seguono.

$$\alpha \cup \{\alpha\} = \inf \{\beta \in \text{Ord} \mid \beta > \alpha\}$$

**INTUITIVAMENTE...** La relazione  $<$  indotta da  $\in$  sugli ordinali si può vedere come una generalizzazione della relazione d'ordine che conosciamo bene sui naturali. Dopotutto, per essi le due relazioni coincidono!

### B.3.1 Ordinali successori e ordinali limiti

Data la relazione d'ordine che caratterizzano gli ordinali e sulla base di questi fatti, ha senso definire

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

il **successore** di  $\alpha$ .

Consideriamo ora un ordinale  $\alpha$ . Se esiste un ordinale  $\beta$  tale per cui  $\alpha = \beta + 1$ , si può dire che  $\alpha$  è un **ordinale successore**. Non è sempre detto che però tale  $\beta$  esisti! Un ordinale di questo tipo, per quanto osservato, deve essere successivo a degli ordinali, ma non deve essere il diretto successore di alcun altro ordinale. Utilizzando la terminologia dell'analisi, questo tipo di ordinale è detto **ordinale limite** e

$$\alpha = \sup \{\beta \in \text{Ord} \mid \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha. \quad (\text{B.5})$$

Si considera anche lo *zero* un ordinale limite: si pone  $0 = \sup \emptyset$ .

Consideriamo dunque i numeri naturali: ogni numero ha per definizione un successivo e ogni numero è successore di un altro. Segue dunque una domanda esistenziale: c'è qualcosa dopo *tutti* i naturali? La risposta, in teoria degli insiemi, è sì: dopo 0, 1, 2, eccetera, eccetera, si raggiunge un nuovo ordinale, che non è successore di alcun naturale ma che è successivo a tutti:  $\omega$ .

**DEFINIZIONE B.3.4. - ORDINALI FINITI E TRANSFINITI .**

Si denuncia con  $\omega$  il più piccolo ordinale limite non zero: esso è il tipo di ordine dei naturali  $\mathbb{N}$  e si può identificare con esso.

Gli ordinali prima di  $\omega$ , ossia i numeri naturali, sono detti ordinali **finiti**, mentre  $\omega$  e gli ordinali che seguono sono detti ordinali **transfiniti** o *infiniti*.

**INTUITIVAMENTE...** Come possiamo immaginare gli ordinali transfiniti successivi a  $\omega$ ? Proviamo prima a guardare agli ordinali da nuovi punti di vista: invece che vederli "semplicemente" come insiemi, li possiamo vedere visivamente come sequenze rispetto a  $<$ , in due modi: la prima è più corretta e fedele alla definizione, mentre la seconda è impropria e - secondo la definizione - errata, ma ci permette di fare alcune intuizioni utili.

- La sequenza di tutti gli ordinali che lo precedono:

$$5: 0 < 1 < 2 < 3 < 4$$

- La sequenza di tutti gli ordinali che lo precedono e l'ordinale stesso:

$$5: 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \color{red}{5}$$

Se  $\omega$  è identificato con  $\mathbb{N}$ , allora le due visualizzazioni sono

$$\omega: 0 < 1 < 2 < 3 < \dots$$

$$\omega: 0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \color{red}{\omega}$$

La prima visualizzazione coincide la classica rappresentazione dei naturali naturali, mentre la seconda suggerisce qualcos'altro: dopo tutti i naturali ho un elemento nuovo che tuttavia si comporta in modo estremamente simile allo *zero* - dopotutto, non è successore di alcun altro numero, ma ammette un successore.

L'idea è quindi di **rietichettare**  $\omega$  con  $0'$ ,  $\omega + 1$  con  $1'$  e così via. In questo modo, un ordinale come  $\omega + 3$  diventa

$$\omega + 3: 0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 0' + 1' + 2'$$

$$\omega + 3: 0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 0' + 1' + 2' + \color{red}{3'}$$

Questo ragionamento permette di immaginare numeri più complessi: l'ordinale  $\omega + \omega$  coincide con due copie dei naturali, la cui seconda copia segue completamente alla destra della prima:

$$\omega + \omega: 0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 0' < 1' < 2' < 3' < \dots$$

$$\omega + \omega: 0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 0' < 1' < 2' < 3' < \dots < \color{red}{0''}$$

Gli ordinali  $\omega$ ,  $\omega + 1$ ,  $\dots$ ,  $\omega \cdot 2$ ,  $\dots$ ,  $\omega^\omega$  sono tutti ordinali numerabili e riguardando l'ordinamento di insiemi infiniti detti *numerabili*. L'ordinale limite che segue dopo tutti gli ordinali numerabili è indicato come  $\omega_1$  ed è il primo ordinale non numerabile.

Concludiamo la sezione con una definizione che successivamente riprenderemo quando parleremo di cardinalità.

**DEFINIZIONE B.3.5. - INSIEMI FINITI E INFINITI .**

Un insieme  $X$  è detto **finito** se c'è una biezione tra  $X$  e un naturale  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n$  inteso

come insieme.

Se  $X$  non è finito è detto **infinito**.

### B.3.2 Isomorfismo dell'ordinale con gli insiemi ben ordinati

Concludiamo senza dare dimostrazione il teorema che permette di concludere la definizione di ordinale secondo von Neumann.

**TEOREMA B.3.1. - ISOTONIA TRA ORDINALI E INSIEMI BEN ORDINATI .**

Ogni insieme ben ordinato è isomorfo ad un unico ordinale.  $\square$

Questo è il motivo per cui si può identificare  $\omega$  con  $\mathbb{N}$ : l'insieme dei naturali è un insieme ben ordinato e si può mostrare l'isomorfismo d'ordine con il più piccolo ordinale limite non nullo.

### B.3.3 Induzione transfinita

Ricordiamo uno dei modi per enunciare l'*induzione sui naturali*.

**TEOREMA B.3.2. - INDUZIONE .**

Sia  $C$  un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  e si supponga che

1.  $0 \in C$ .
2. Se  $n \in C$ , allora  $n + 1 \in C$ .

Allora  $C = \mathbb{N}$ .  $\square$

Con ciò che abbiamo introdotto possiamo generalizzare facilmente questa proprietà agli ordinali anche non finiti.

**TEOREMA B.3.1. - INDUZIONE TRANSFINITA .**

Sia  $C$  una classe di ordinali e si supponga che

1.  $0 \in C$ .
2. Se  $\alpha \in C$ , allora  $\alpha + 1 \in C$ .
3. Se  $\alpha$  è un ordinale limite non zero e si ha  $\beta \in C$ ,  $\forall \beta < \alpha$ , allora  $\alpha$  in  $C$ .

Allora  $C = \text{Ord}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $C = \text{Ord}$  abbiamo finito. Altrimenti, sia  $\alpha$  il più piccolo ordinale<sup>a</sup> che non appartiene in  $C$ .

- Se  $\alpha = 0$  si ha subito l'assurdo per l'ipotesi 1.
- Se  $\alpha$  è un ordinale successore, allora sia  $\beta$  l'ordinale tale per cui  $\alpha = \beta + 1$ : per contronominale sulla ipotesi 2. si ha

$$\alpha = \beta + 1 \notin C \implies \beta \notin C,$$

ma allora essendo  $\beta < \alpha$  si ha una contraddizione perché  $\alpha$  non è più il più piccolo ordinale non in  $C$ .

- Se  $\alpha$  è un ordinale limite non nullo, allora per contronominale sull'ipotesi 3. si ha che

$$\exists \beta < \alpha : \beta \notin C$$

e come prima essendo  $\beta < \alpha$  si ha una contraddizione perché  $\alpha$  non è più il più piccolo ordinale non in  $C$ .  $\square$

<sup>a</sup>Possiamo farlo in quanto un ordinale sono sempre ben ordinati

### B.3.4 Sequenze e limite

Diamo ora una definizione di *successione*, che abbiamo finora visto solo intuitivamente.

#### DEFINIZIONE B.3.6. - SUCCESSIONE .

Una successione è una funzione il cui dominio è un ordinale  $\alpha$ . La notazione canonica per una sequenza è

$$\langle a_\xi | \xi < \alpha \rangle$$

#### ESEMPI.

- Una successione finita è una funzione sul dominio finito  $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ . Viene anche detta anche **sequenza di lunghezza  $n$** .
- Una successione nel senso classico del termine è una funzione su  $\mathbb{N}$  o, equivalentemente, sull'ordinale  $\omega$ . Si può indicare come

$$\langle a_n | n < \omega \rangle$$

#### DEFINIZIONE B.3.7. - LIMITE DI UNA SUCCESSIONE .

Sia  $\alpha > 0$  un ordinale limite e sia  $\langle \gamma_\xi | \xi < \alpha \rangle$  una successione **non decrescente** di ordinali, cioè

$$\xi < \eta \implies \gamma_\xi \leq \gamma_\eta.$$

Si definisce il **limite** di una successione

$$\lim_{\eta \rightarrow \alpha} \gamma_\xi = \sup \{ \gamma_\xi \mid \xi < \alpha \} \quad (\text{B.6})$$

### B.3.5 Aritmetica degli ordinali

#### Addizione

#### DEFINIZIONE B.3.8. - ADDIZIONE DI ORDINALI .

Per ogni ordinale  $\alpha$  si ha

1. **Zero come identità:**  $\alpha + 0 = \alpha$
2. **Associatività:**

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1, \forall \beta$$

Più in generale, si ha

$$\alpha + (+\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \forall \beta, \gamma$$

3. **Somma come limite:**

$$\alpha + \beta = \lim_{\eta \rightarrow \beta} (\alpha + \eta), \text{ per ogni ordinale limite } \beta > 0$$

**ATTENZIONE!** L'addizione di ordinali **non** è commutativa. Ad esempio,  $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$ .

**INTUITIVAMENTE...** Prima di dimostrarlo formalmente, cerchiamo di capire intuitivamente perché questo non accade. Riprendendo la prima delle due visualizzazioni

introdotta a pag. 206, scriviamo  $1 + \omega$  e  $\omega + 1$ , dove etichettiamo  $\omega$  con  $0'$ .

$$\begin{aligned} 1 + \omega : 0 < 0' < 1' < 2' < 3' < \dots \\ \omega + 1 : 0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 0' \end{aligned}$$

Notiamo che nel primo caso  $0'$  (cioè  $\omega$ ) ha un predecessore,  $0$ , cosa che normalmente *non* ha; rinominando  $n'$  con  $n + 1$  otteniamo che la sequenza assomiglia in realtà a  $\omega$  stesso, cioè possiamo dire che  $1 + \omega = \omega$ . D'altro canto,  $\omega + 1$  ha un elemento massimo, che è  $0'$ , mentre  $\omega$  non lo ha!

#### ESEMPIO - NON COMMUTATIVITÀ DELL'ADDITIONE DI ORDINALI .

Mostriamo che

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$

Infatti, il termine di sinistra diventa

$$\begin{aligned} 1 + \omega &= \lim_{\eta \rightarrow \omega} (1 + \xi) = \sup \{1 + \xi \mid \xi < \omega\} = \bigcup_{\xi < \omega} \{1 + \xi\} = \\ &= 1 \cup 2 \cup 3 \cup \dots = \{0\} \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} \cup \dots \mathbb{N} = \omega \end{aligned}$$

e per definizione  $\omega < \omega + 1$  e dunque sono due ordinali distinti.

In realtà è molto raro che  $\alpha + \beta$  sia uguale a  $\beta + \alpha$ : ciò succede se e solo se  $\alpha = \gamma \cdot m$  e  $\beta = \gamma \cdot n$  con  $\gamma$  ordinale e  $m, n$  naturali e · la moltiplicazione tra ordinali che vedremo tra poco.

#### Moltiplicazione

##### DEFINIZIONE B.3.9. - MOLTIPLICAZIONE DI ORDINALI .

Per ogni ordinale  $\alpha$  si ha

1. **Zero come elemento nullo:**  $\alpha \cdot 0 = 0$
2. **Distributiva da sinistra:**

$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha, \forall \beta$$

3. **Associativa:**

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma, \forall \beta, \gamma$$

4. **Prodotto come limite:**

$$\alpha \cdot \beta = \lim_{\eta \rightarrow \beta} (\alpha \cdot \eta), \text{ per ogni ordinale limite } \beta > 0$$

**ATTENZIONE!** La moltiplicazione di ordinali **non** è commutativa e neanche distributiva da destra. Ad esempio,  $(1 + 1) \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot (1 + 1) = \omega + \omega$ .

#### ESEMPIO - NON COMMUTATIVITÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE DI ORDINALI .

Mostriamo che

$$(1 + 1) \cdot \omega = 2\omega = \omega \neq \omega \cdot (1 + 1) = \omega \cdot 2 = \omega + \omega$$

Infatti, il termine di sinistra diventa

$$\begin{aligned}(1+1) \cdot \omega &= 2 \cdot \omega = \lim_{\eta \rightarrow \omega} (2 \cdot \xi) = \sup \{2 \cdot \xi | \xi < \omega\} = \bigcup_{\xi < \omega} \{2 \cdot \xi\} = \\ &= 2 \cdot 0 \cup 2 \cdot 1 \cup 2 \cdot 2 \cup 2 \cdot 3 \cup \dots = 0 \cup 2 \cup 6 \cup \dots = \\ &= \emptyset \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \dots = \mathbb{N} = \omega\end{aligned}$$

e per definizione  $\omega < \omega + \omega$  e dunque sono due ordinali distinti.

## Esponenziazione

### DEFINIZIONE B.3.10. - ESPOENENZIAZIONE DI ORDINALI .

Per ogni ordinale  $\alpha$  si ha

1. **Esponenziazione per zero:**  $\alpha^0 = 1$
2. **Distributiva dell'esponenziale rispetto all'esponente:**

$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha, \forall \beta$$

3. **Prodotto come limite:**

$$\alpha^\beta = \lim_{\eta \rightarrow \beta} (\alpha^\eta), \text{ per ogni ordinale limite } \beta > 0$$

**Aritmetica degli ordinali e aritmetica degli interi** Abbiamo visto che le operazioni con i numeri ordinali hanno notevoli differenze da queste

### PROPRIETÀ B.3.1. - ARITMETICA DEGLI ORDINALI E ARITMETICA DEGLI INTERI .

Valgono le seguenti proprietà:

1. Se  $\beta < \gamma$ , allora

$$\alpha + \beta < \alpha + \gamma, \forall \alpha.$$

2. Se  $\alpha < \beta$ , allora esiste un unico  $\delta$  tale che

$$\alpha + \delta = \beta.$$

3. Se  $\beta < \gamma$ , allora

$$\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma, \forall \alpha > 0.$$

4. Se  $\alpha > 0$  e  $\gamma$  è un ordinale arbitrario, allora esiste un unico  $\beta$  e un unico  $\rho < \alpha$  tale che

$$\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho.$$

5. Se  $\beta < \gamma$  e  $\alpha > 1$ , allora

$$\alpha^\beta < \alpha^\gamma.$$

### TEOREMA B.3.3. - TEOREMA DELLA FORMA NORMALE DI CANTOR .

Ogni ordinale  $\alpha > 0$  può essere rappresentante unicamente nella forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \omega^{\beta_i} \cdot k_i = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n \quad (\text{B.7})$$

dove  $n \geq 1$ ,  $\alpha \geq \beta_1 > \dots > \beta_n$  e  $k_1, \dots, k_n$  sono naturali non nulli. □

Dal teorema della forma normale è possibile che ci siano degli ordinali  $\alpha$  tale che

$$\alpha = \omega^\alpha$$

Il più piccolo di questi ordinali è indicato con  $\varepsilon_0$ .

#### B.4 CARDINALITÀ

##### **DEFINIZIONE B.4.1. - CARDINALITÀ.**

Due insiemi  $X$  e  $Y$  sono **equipotenti** o **equinumerosi**, in simboli

$$X \asymp Y \tag{B.8}$$

se esiste una corrispondenza *biunivoca* tra i due insiemi.

L'equipotenza è una *relazione di equivalenza* sulle classi di tutti gli insiemi; diciamo che due insiemi  $X$  e  $Y$  equipotenti hanno la stessa **cardinalità** e lo indichiamo con

$$|X| = |Y| \tag{B.9}$$

##### B.4.1 Ordine delle cardinalità

##### **DEFINIZIONE B.4.2. - INIEZIONE.**

Un insieme  $X$  si **inietta** in  $Y$ , in simboli

$$X \lesssim Y \tag{B.10}$$

se esiste una funzione iniettiva  $f : X \longrightarrow Y$ ; in tal caso scriveremo

$$|X| \leq |Y| \tag{B.11}$$

##### **COROLLARIO B.4.1. - INCLUSIONE E CARDINALITÀ.**

Se  $X \subseteq Y$ , allora  $X \lesssim Y$  (o in termini di cardinalità,  $|X| \leq |Y|$ ).

**DIMOSTRAZIONE.** Dire che  $X \subseteq Y$  implica l'esistenza dell'inclusione  $\iota : X \hookrightarrow Y$ , la quale è per definizione una funzione iniettiva. □

**ATTENZIONE!** Anche se un sottoinsieme ha la stessa cardinalità dell'insieme a cui appartiene, non è detto che siano uguali; come controsempio basta considerare i numeri naturali  $\mathbb{N}$  e numeri pari  $2\mathbb{N}$ : fra i due c'è una biezione  $\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$  data da  $f(n) = 2n$ , ma i naturali contengono anche i dispari.

Si può invece affermare che un sottoinsieme **finito** equipotente all'insieme a cui appartiene deve coincidere con esso.

La relazione  $\lesssim$  (o  $\leq$  se ci riferiamo alle cardinalità) è una relazione d'*ordine totale*: la relazione riflessiva e transitiva sono immediate, mentre l'antisimmetria è garantita dal seguente teorema.

**TEOREMA B.4.1. - TEOREMA DI CANTOR-BERNSTEIN-SCHRÖDER .**

Se  $|X| \leq |Y|$  e  $|Y| \leq |X|$ , allora  $|X| = |Y|$ .

Equivalentemente, se esistono due funzioni iniettive

$$f : X \longrightarrow Y \text{ e } g : Y \longrightarrow X$$

allora esiste una funzione biettiva  $h : X \longrightarrow Y$ . □

Un'altra conseguenza importante di questo teorema è quella di poter determinare la cardinalità sulla base di sole funzioni *iniettive*.

**ESEMPIO - UN'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI CANTOR-BERNSTEIN-SCHRÖDER .**

L'intervallo  $[0, 1]$  ha la cardinalità del continuo; infatti, possiamo considerare le seguenti funzioni iniettive:

- $\iota : [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$  inclusione.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$   
 $x \longmapsto \frac{2(\arctan(x) + \frac{\pi}{2})}{\pi}$

La seguente proposizione permette invece stabilire una relazione di cardinalità tra dominio e codominio di una funzione *suriettiva*.

**PROPOSIZIONE B.4.1. - LA CARDINALITÀ DEL DOMINIO DI UNA FUNZIONE SURIETTIVA È MAGGIORE O UGUALE DELLA CARDINALITÀ DEL DOMINIO .**

Sia  $g : Y \twoheadrightarrow X$  suriettiva, con  $(Y, \trianglelefteq)$  un insieme ben ordinato. Allora esiste una funzione iniettiva  $f : X \longrightarrow Y$  tale che  $g \circ f = id_X$ . In altre parole,

$$g : (Y, \trianglelefteq) \twoheadrightarrow X \implies X \lesssim Y \iff |X| \leq |Y|. \quad (\text{B.12})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si definisce  $f$  in modo che  $f(x)$  è il minimo  $y \in Y$ , rispetto a  $\trianglelefteq$ , per cui  $g(y) = x$ . □

**ATTENZIONE!** È fondamentale l'ipotesi del buon ordine su  $Y$ : per insiemi non ben ordinati, la proprietà non si verifica. Tuttavia, se si assume l'Assioma della Scelta come vero allora questa proprietà è verificata per ogni insieme.

**ESEMPIO.** Come visto<sup>a</sup>, dato l'insieme di Cantor  $C$  si può definire una funzione  $f : C \twoheadrightarrow [0, 1]$  suriettiva; in questo modo,  $|C| \geq [0, 1]$  ma, in quanto  $C \subseteq [0, 1]$  si ha

$$|C| = |[0, 1]|$$

Questa è anche una conseguenza del teorema di Cantor–Bernstein–Schröder, dato che abbiamo definito (implicitamente o esplicitamente) due funzioni iniettive  $X \longrightarrow Y$  e  $Y \longrightarrow X$ .

<sup>a</sup>Si veda Capitolo 5, pag. 95.

Ci interessa anche definire una relazione d'*ordine parziale forte* sulla base dell'iniezione

precedentemente definita.

**DEFINIZIONE B.4.3. - INIEZIONE STRETTA .**

Un insieme  $X$  si **inietta strettamente** in  $Y$ , in simboli

$$X \preccurlyeq Y \quad (\text{B.13})$$

se esiste una funzione iniettiva  $f : X \longrightarrow Y$  ma non esistono funzioni suriettive  $f : X \longrightarrow Y$ ; in tal caso scriveremo

$$|X| < |Y| \quad (\text{B.14})$$

**OSSERVAZIONE.** Si può vedere che

$$X \preccurlyeq Y \iff X \preccurlyeq Y \wedge X \asymp Y \quad (\text{B.15})$$

o, in termini di cardinalità,

$$|X| < |Y| \iff |X| \leq |Y| \wedge |X| \neq |Y| \quad (\text{B.16})$$

#### B.4.2 Aritmetica dei cardinali

Possiamo definire delle *operazioni aritmetiche* con i cardinali; dati  $|X| = \kappa$  e  $|Y| = \lambda$ , si ha

$$\kappa + \lambda = |X \cup Y| \text{ se } X \text{ e } Y \text{ disgiunti} \quad (\text{B.17})$$

$$\kappa \cdot \lambda = |X \times Y| \quad (\text{B.18})$$

$$\kappa^\lambda = |X^Y| \quad (\text{B.19})$$

dove con  $X^Y$  indichiamo l'*insieme delle funzioni* da  $Y$  in  $X$ .

Queste operazioni sono ben definite se sono indipendenti dalla scelta di  $X$  e  $Y$ .

**PROPRIETÀ B.4.1. - PROPRIETÀ DELL'ARITMETICA DEI CARDINALI .**

Valgono le seguenti proprietà:

1. L'addizione  $+$  e la moltiplicazione  $\cdot$  sono associative, commutative e distributive.
2. Distributività dell'esponenziale rispetto alla base:

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu \quad (\text{B.20})$$

3. Distributività dell'esponenziale rispetto all'esponente:

$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu \quad (\text{B.21})$$

4. Esponenziale di un esponenziale:

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu} \quad (\text{B.22})$$

5. Se  $\lambda \leq \mu$ , allora

$$\kappa^\mu \leq \lambda^\mu \quad (\text{B.23})$$

6. Se  $0 < \lambda \leq \mu$ , allora

$$\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu \quad (\text{B.24})$$

7. Se  $\kappa > 0$ , allora

$$\kappa^0 = 1 \quad 1^\kappa = 1 \quad 0^\kappa = 0 \quad (\text{B.25})$$

### B.4.3 Cardinalità dell'insieme delle parti

Finché operiamo con insiemi finiti, è chiara la differenza tra la dimensioni di due insiemi; la questione è differente se si parla di insiemi infiniti: non sempre è immediata la cardinalità. Ad esempio, i numeri pari e i naturali hanno la stessa cardinalità (basta considerare  $f(n) = 2n$ ) come biezione, ma i naturali sembrano molto più grandi.

Si potrebbe pensare che tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità. Il seguente teorema ci mostra come questo *non* sia il caso, e la cardinalità è un aspetto fondamentale dello studio degli insiemi infiniti.

#### TEOREMA B.4.1. - TEOREMA DI CANTOR .

Per ogni insieme  $X$  si ha

$$X \precsim \mathcal{P}(X) \quad (\text{B.26})$$

$$|X| < |\mathcal{P}(X)| \quad (\text{B.27})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia per assurdo  $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$  una funzione suriettiva e sia

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

Per la suriettività di  $f$   $\exists z \in X$  tale che  $f(z) = Y$ ; tuttavia, si ha  $z \in Y \iff z \notin f(z) = Y$ , il che è assurdo. Segue che  $X \not\sim \mathcal{P}(X)$ .

Invece, la funzione

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ x &\longmapsto \{x\} \end{aligned}$$

è iniettiva e quindi  $X \precsim \mathcal{P}(X)$ . Concludendo,  $X \precsim \mathcal{P}(X)$ . □

#### TEOREMA B.4.2. - BIEZIONE TRA $\mathcal{P}(X)$ E INSIEME DELLE FUNZIONI DA $X$ IN $\{0, 1\}$ .

Dato un qualunque insieme  $X$ , sia  $\mathcal{P}(X)$  l'insieme delle parti di  $X$  e sia  $2^X := \{0, 1\}^X$  l'insieme di tutte le funzioni  $X \longrightarrow \{0, 1\}$ . Allora esiste una biezione tra  $\mathcal{P}(X)$  e  $2^X$ , data da

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow 2^X \\ X &\longmapsto \chi_X \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

con  $\chi_X$  la funzione indicatrice su  $X$ ; l'inversa di tale funzione è la seguente:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : 2^X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ f &\longmapsto \{x \in X \mid f(x) = 1\} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema precedente, si ha una biezione tra  $\mathcal{P}(X)$  e  $2^{|X|} := \{0, 1\}^X$ ,

dunque hanno la stessa cardinalità. Per esponenziazione dei cardinali, si ha

$$|\mathcal{P}(X)| = \left| \{0, 1\}^X \right| = |\{0, 1\}|^{|X|} = 2^{|X|}$$

□

**COROLARIO B.4.2. - CARDINALITÀ DELL'INSIEME DELLE PARTI .**

Se un insieme  $X$  ha cardinalità  $|X|$ , l'insieme delle parti ha cardinalità

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|} \quad (\text{B.30})$$

□

IL teorema di Cantor si può quindi riformulare come segue

**TEOREMA B.4.3. - TEOREMA DI CANTOR, RIFORMULATO .**

Per ogni cardinale  $\kappa$  si ha  $\kappa < 2^\kappa$ .

#### B.4.4 Ordinali e cardinali

Sappiamo che gli ordinali, per definizione di von Neumann, sono degli insiemi. Possiamo dare una definizione di *numero cardinale* partendo proprio dal concetto di ordinale.

**DEFINIZIONE B.4.4. - CARDINALE .**

Un ordinale  $\alpha$  è detto un **cardinale** se

$$|\alpha| \neq |\beta|, \forall \beta < \alpha \quad (\text{B.31})$$

Se  $W$  è un insieme ben ordinato, sappiamo che esso ha un tipo d'ordine e dunque almeno un ordinale ad esso associato. Allora consideriamo, dato  $W$ , il suo numero cardinale come

$$|W| = \min\{\alpha \in \text{Ord} \mid |W| = |\alpha|\}$$

Ricordiamo che  $X$  è *finito* se è in corrispondenza biunivoca con un *ordinale finito*  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|X| = |n|$$

Poichè  $|n| = |m| \iff n = m$ , gli *ordinali finiti* corrispondono ai *cardinali finiti* e quindi  $|n| = n$ , ossia

$$|X| = n$$

L'ordinale  $\omega$  è il più piccolo numero cardinale infinito.

**OSSERVAZIONE.** Tutti i cardinali infiniti sono ordinali limiti.

Gli ordinali infiniti che sono anche cardinali sono chiamati **aleph**

**LEMMA B.4.1. - SUCCESSORI DEI CARDINALI .**

Si può mostrare che per ogni cardinale  $\alpha$  c'è un cardinale più grande di esso. Il più piccolo tra quelli più grandi di  $\alpha$  viene indicato con  $\alpha^+$  ed è detto il **cardinale successore**.

In particolare, consegue anche che se  $X$  è un insieme di cardinali sup  $X$  è un cardinale. Definiamo allora l'enumerazione degli aleph. Indichiamo normalmente  $\aleph_\alpha$  per i numeri cardinali e  $\omega_\alpha$  per il tipo di ordine.

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \omega_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} &= \alpha_\alpha^+ = \omega_{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup \{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\} \quad \text{se } \alpha \text{ è un ordinale limite}$$

In questo modo, affermiamo che

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \tag{B.32}$$

Inoltre, poiché si può mostrare che  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  sono in biezione con i naturali, anche loro hanno cardinalità  $\aleph_0$ .

**OSSERVAZIONE.** Dalla definizione si nota un fatto fondamentale: ci possono essere più ordinali per uno stesso cardinale. Come mai?

Gli ordinali descrivono in che maniera (a meno di rietichettare i miei elementi) posso ordinare un insieme, mentre i cardinali sono una misura della dimensione di tale insieme.

Finché ci limitiamo ai naturali, come ben sappiamo, non c'è differenza tra ordinale e cardinale. Anzi! Ad ogni numero naturale associamo un solo ordinale e un solo cardinale - ad esempio, se devo ordinare l'insieme  $\{1, 2, 3, 4\}$  - che ha cardinalità 4 - non importa se metto prima il 2 dell'1 o il 3 dopo il 4, dato che rinominando gli elementi ottengo sempre l'ordine canonico  $0 < 1 < 2 < 3$ .

Caso differente è per gli insiemi infiniti. Ad esempio, sui naturali posso avere l'ordinamento canonico  $\omega$ , ma posso anche riordinarli mettendo prima tutti i naturali dispari seguiti da tutti i naturali pari:

$$1 < 3 < 5 < 7 < 9 < \dots < 2 < 4 < 6 < 8 < 10 < \dots$$

Questo ordinamento quale ha tipo d'ordine  $\omega \cdot 2 \neq \omega$ . Tuttavia, entrambi sono ordinamenti dei naturali e quindi hanno cardinalità  $\aleph_0$ .

La somma e il prodotto di aleph è abbastanza triviale, dato che si può mostrare che:

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$$

#### B.4.5 Cardinalità del continuo

Abbiamo definito i cardinali per insiemi *ben ordinati*, basandoci sugli ordinali. In realtà, se supponiamo l'*Assioma di Scelta*, allora *ogni insieme* è ben ordinato e quindi possiamo parlare di cardinali in generale in ZFC, anche per insiemi come i *reali*.

**TEOREMA B.4.4. - CANTOR.**

*L'insieme dei numeri reali non è numerabile, ossia è un insieme infinito che non è in corrispondenza biunivoca con i naturali.*  $\square$

Indichiamo con  $\mathfrak{c}$  la **cardinalità dei reali** o **cardinalità del continuo**:

$$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \tag{B.33}$$

Che valore ha questa cardinalità?

Per concludere, riprendiamo Poiché siamo in grado di calcolare la cardinalità dell'insieme delle parti di insiemi per il corollario B.4.2, si ha che  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$ .

Dato che ogni reale è l'estremo superiore di un'opportuna sequenza di razionali minori di essa, cioè

$$r = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\},$$

si ha che la cardinalità dei reali deve essere minore dell'insieme delle sequenze in  $\mathbb{Q}$ , che ha cardinalità pari all'insieme delle parti di  $\mathbb{Q}$ , ovvero

$$\mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$$

D'altro canto, l'insieme di Cantor<sup>2</sup> si vede che è in corrispondenza diretta con tutte le sequenze di 0 e 2 e la cardinalità coincide con quella di  $2^{\aleph_0}$ . Poiché Cantor è un sottoinsieme dei reali, si ha

$$c \geq |C| = 2^{\aleph_0}$$

e quindi si può concludere per Cantor-Bernstein-Schröder che

$$c = 2^{\aleph_0}$$

Una peculiarità di questo cardinale è che nella teoria ZFC *non* è chiaro dove si posizioni nella gerarchia degli  $\aleph$ , ma Cantor formulò una congettura a riguardo: non ci sono insiemi la cui cardinalità è compresa tra quella degli interi e quella dei reali; in altre parole,

$$(CH) \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{B.34}$$

L'**ipotesi del continuo** (CH) non può essere provata o confutata nel sistema di ZFC. Cos'è, invece, la cardinalità dell'insieme delle parti dei reali?

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^c$$

Sappiamo che è un numero *ancora più grande* della cardinalità del continuo, ma non è per nulla facile capire cos'è.

Dato che ciò esenta gli scopi che ci siamo prefissi per questa appendice - già di per sé un esteso (e non necessario) approfondimento di teoria degli insiemi scritto per spiegare qualche termine usato nel capitolo di Teoria della Misura - lasciamo ad un eventuale lettore curioso qualche spunto a riguardo:

- **Beth number**  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Beth\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Beth_number)
- **What is known about the power set of the real number line?**  
<https://math.stackexchange.com/a/94000/875294>

---

<sup>2</sup>Si veda Capitolo 5, pag. 95.



# C

APPENDICE

## PROPRIETÀ VARIE ED EVENTUALI

---

*“La Matematica consiste di fatti veri riguardanti oggetti immaginari.”*

*PHILIP DAVIS e REUBEN HERSH, matematici immaginari con opinioni vere.*

Riportiamo alcune proprietà utili per il lettore.

### C.1 IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Data una funzione  $f : X \longrightarrow Y$ , per ogni sottoinsieme  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$  valgono le seguenti proprietà:

Immagine	Controimmagine
$f(X) \subseteq Y$	$f^{-1}(Y) = X$
$f(f^{-1}(Y)) = f(X)$	$f^{-1}(f(X)) = X$
$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ <sup>1</sup>	$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ <sup>2</sup>
$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$	$(f _A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$
$f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$	$f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$
$f(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$	$f^{-1}(B) = \emptyset \iff B \subseteq Y \setminus f(X)$
$f(A) \supseteq B \iff \exists C \subseteq A : f(C) = B$	$f^{-1}(B) \supseteq A \iff f(A) \subseteq B$
$f(A) \supseteq f(X \setminus A) \iff f(A) = f(X)$	$f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(Y \setminus B) \iff f^{-1}(B) = X$
$f(X \setminus A) \supseteq f(X) \setminus f(A)$	$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
$f(A \cup f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cup B$	$f^{-1}(f(A) \cup B) \supseteq A \cup f^{-1}(B)$
$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$	$f^{-1}(f(A) \cap B) \supseteq A \cap f^{-1}(B)$
$f(A) \cap B = \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$	

Date le funzioni  $f : X \longrightarrow Y$  e  $g : Y \longrightarrow Z$ , valgono le seguenti proprietà:

- $(g \circ f)(A) = g(f(A))$
- $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$

<sup>1</sup>Uguale se  $B \subseteq f(X)$ , cioè se  $f$  suriettiva.

<sup>2</sup>Uguale se  $f$  iniettiva.

Data una funzione  $f : X \longrightarrow Y$  e dati i sottoinsiemi  $A_1, A_2 \subseteq X$  e  $B_1, B_2 \subseteq Y$  valgono le seguenti proprietà:

<b>Immagine</b>	<b>Controimmagine</b>
$A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$	$B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$	$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ <sup>3</sup>	$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
$f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ <sup>4</sup>	$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Data una funzione  $f : X \longrightarrow Y$  e date le famiglie di sottoinsiemi  $\{A_i\} \subseteq \mathcal{P}(X)$  e  $\{B_i\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$  (con  $I$  un insieme di indici anche *infinito o non numerabile*) valgono le seguenti proprietà:

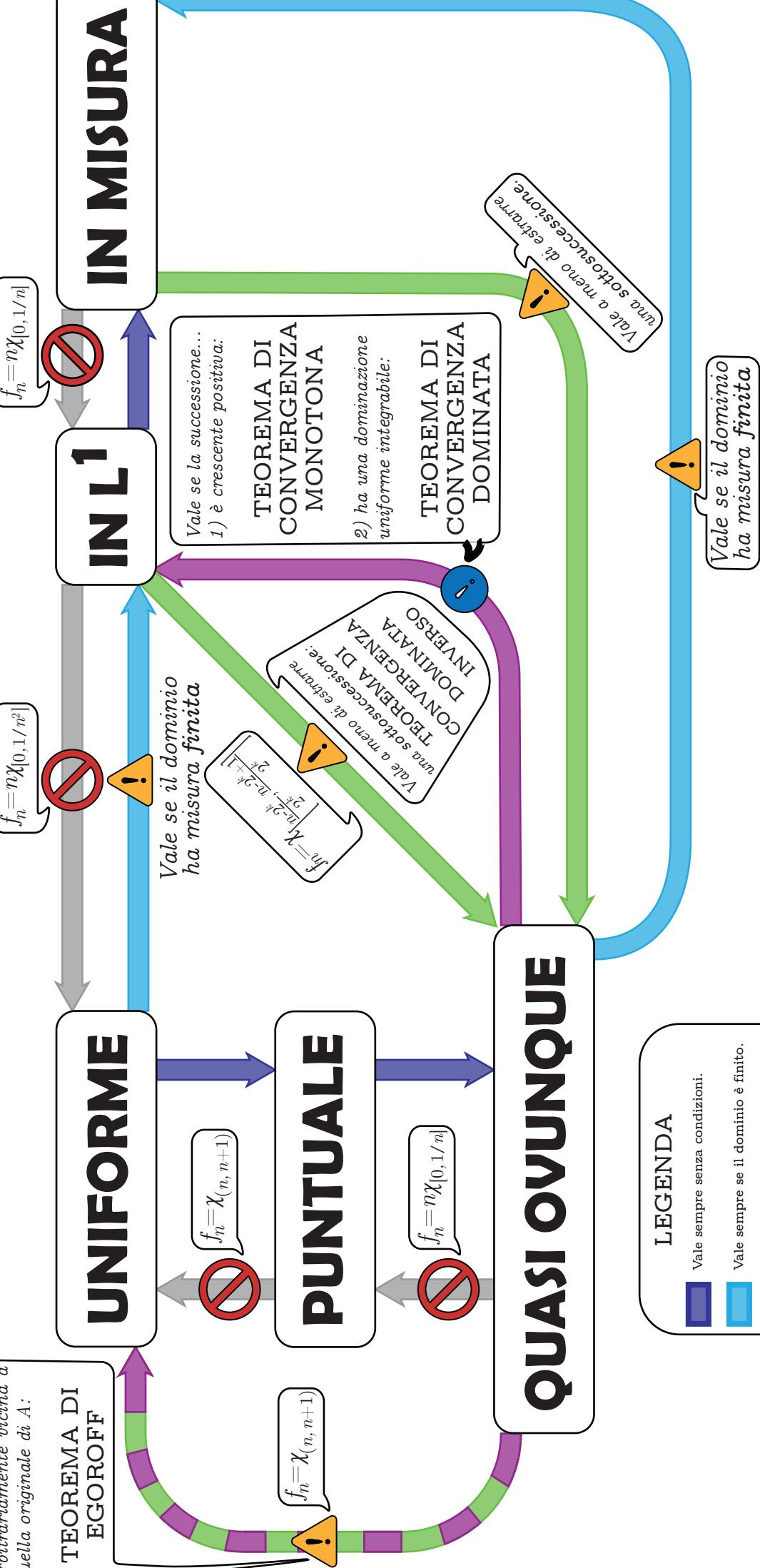
<b>Immagine</b>	<b>Controimmagine</b>
$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$	$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ <sup>5</sup>	$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

<sup>3</sup>Uguale se  $f$  iniettiva.

<sup>4</sup>Si veda 3.

<sup>5</sup>Si veda 3.

# MODI DI CONVERGENZA



## C.2 PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

## TEOREMA

Convergenza uniforme  
(teoria di Riemann)

Siano  $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

1.  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall n \geq 1$ .
2.  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $[a, b]$ .

Allora

1.  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .
2. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Convergenza uniforme  
(teoria di Lebesgue)

Consideriamo lo spazio di misura  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e le funzioni  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Se

- (a)  $f_n \in L^1(\mu)$ .
- (b)  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $X$ .
- (c)  $\mu(X) < +\infty$ .

allora

1.  $f \in L^1(\mu)$ .
  2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ .
  3. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

## VANTAGGI

- È l'unico teorema di questo tipo valido nella teoria di Riemann.
- Vale su spazi di misura finita invece che solamente degli intervalli finiti.

## SVANTAGGI

- Richiede la convergenza uniforme.
- Vale solo per funzioni limitate.
- Vale solo su intervalli limitati.
- Richiede la convergenza uniforme.
- Richiede l'integrabilità della successione.
- Vale solo su spazi di misura finita.

# D

## APPENDICE

# ELENCHI DELLE DEFINIZIONI E DEI TEOREMI

---

ELENCO DELLE DEFINIZIONI E DEGLI ASSIOMI	
<b>CAPITOLO 2:</b> CONVERGENZA DI FUNZIONI, PARTE PRIMA	
D2.1.1. SPAZIO METRICO E DISTANZA	11
D2.1.2. CONVERGENZA DI SUCCESSIONI SECONDO UNA DISTANZA	12
D2.1.3. CONVERGENZA NELLA METRICA LAGRANGIANA	12
D2.1.4. CONVERGENZA UNIFORME	12
D2.1.5. FUNZIONE LIMITE	12
D2.1.6. INTORNO TUBULARE	17
D2.1.7. SPAZIO NORMATIVO E NORMA	17
D2.1.8. SUCCESSIONE DI CAUCHY	17
D2.1.9. SPAZIO COMPLETO	17
D2.1.10. CONVERGENZA UNIFORME, GENERALIZZATA	18
D2.2.1. CONVERGENZA IN LEGGE	18
D2.2.2. CONVERGENZA PUNTUALE	18
<b>CAPITOLO 3:</b> SERIE DI FUNZIONI	
D3.1.1. SERIE A VALORI REALI E CONVERGENZA DI UNA SERIE	33
D3.1.2. CONVERGENZA ASSOLUTA	34
D3.1.3. SERIE E CONVERGENZA DI UNA SERIE	35
D3.1.4. CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA	36
D3.2.1. CONVERGENZA DI UNA SERIE DI FUNZIONI	38
D3.4.1. CURVA	42
D3.4.2. CURVA SPACE-FILLING	43
<b>CAPITOLO 4:</b> SERIE DI POTENZE	
D4.1.1. SERIE DI POTENZE	45
D4.1.2. CERCHIO E RAGGIO DI CONVERGENZA	47
D4.5.1. FUNZIONE ANALITICA	62
D4.7.1. ESPONENZIALE IN CAMPO COMPLESSO	71
D4.7.2. FUNZIONE MULTIVOCA	74
D4.7.3. LOGARITMO IN CAMPO COMPLESSO	74
<b>CAPITOLO 5:</b> TEORIA DELLA MISURA	
D5.1.1. CARATTERIZZAZIONE DEGLI INTEGRALI SECONDO RIEMANN	80
D5.2.1. ALGEBRA	83
D5.2.2. $\sigma$ -ALGEBRA, SPAZI E INSIEMI MISURABILI	83
D5.2.3. $\sigma$ -ALGEBRA GENERATA DA UNA FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI	84

<b>D5.3.1.</b> FUNZIONE MISURABILE	84	<b>D8.2.1.</b> TRASFORMATA DI FOURIER	
<b>D5.3.2.</b> sup, inf, lim sup e lim inf di UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI	86	160	
<b>D5.4.1.</b> PARALLELEPIPEDO <i>n</i> - DIMENSIONALE	90	<b>CAPITOLO 9:</b> ANALISI E PROBABILITÀ	
<b>D5.4.2.</b> MISURA DI PEANO-JORDAN	91	<b>D9.1.1.</b> SPAZIO DI PROBABILITÀ	163
<b>D5.5.1.</b> PARALLELEPIPEDO <i>n</i> - DIMENSIONALE	92	<b>A9.1.1.</b> PRIMO ASSIOMA DI PROBABILITÀ	164
<b>D5.5.2.</b> INSIEME MISURABILE SECON- DO LEBESGUE (CRITERIO DI CARATHEODORY)	93	<b>A9.1.2.</b> SECONDO ASSIOMA DI PROBABILI- TÀ	164
<b>D5.5.3.</b> MISURA SECONDO LEBESGUE	94	<b>A9.1.3.</b> TERZO ASSIOMA DELLA PROBABI- LITÀ	164
<b>D5.6.1.</b> MISURA E SPAZIO DI MISURA	101	<b>D9.1.2.</b> FUNZIONE MISURABILE	165
<b>D5.7.1.</b> INSIEME DI VITALI	104	<b>D9.2.1.</b> MISURA IMMAGINE	165
<b>D5.7.2.</b> FUNZIONE DI CANTOR	106	<b>D9.2.2.</b> PROBABILITÀ IMMAGINE	166
<b>CAPITOLO 6:</b> INTEGRALE DI LEBESGUE		<b>D9.2.3.</b> MOMENTO DI ORDINE <i>k</i> -ESIMO	166
<b>D6.2.1.</b> FUNZIONE SEMPLICE	110	<b>D9.3.1.</b> FUNZIONE DI RIPARTIZIONE	166
<b>D6.3.1.</b> INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUN- ZIONI SEMPLICI, MISURABILI, NON NEGATIVE	114	<b>D9.3.2.</b> V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA E DENSITÀ	167
<b>D6.4.1.</b> INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUN- ZIONI A VALORI REALI, MISURABILI, NON NEGATIVE	117	<b>D9.3.3.</b> MOMENTO DI UNA ORDINE <i>k</i> - ESIMO DI V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE	167
<b>D6.4.2.</b> CONTINUITÀ ASSOLUTA PER UNA MISURA	130	<b>D9.3.4.</b> ASSOLUTA CONTINUITÀ	168
<b>D6.5.1.</b> INTEGRABILITÀ	131	<b>D9.3.5.</b> MISURA SINGOLARE	169
<b>D6.6.1.</b> INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZ. A VALORI COMPLESSI, INTEGRABILI	133	<b>D9.3.6.</b> VARIABILI ALEATORIE SINGOLARI DISCRETE	169
<b>D6.8.1.</b> PROPRIETÀ QUASI OVUNQUE VALIDA	140	<b>D9.3.7.</b> VARIABILI ALEATORIE SINGOLARI CONTINUE	170
<b>CAPITOLO 7:</b> CONVERGENZA DI FUNZIO- NI, PARTE SECONDA		<b>D9.4.1.</b> CONVERGENZA PUNTUALE O CONVERGENZA CERTA	172
<b>D7.2.1.</b> CONVERGENZA UNIFORME	148	<b>D9.4.2.</b> CONVERGENZA QUASI CERTA	172
<b>D7.2.2.</b> CONVERGENZA PUNTUALE	148	<b>D9.4.3.</b> CONVERGENZA IN PROBABILITÀ	172
<b>D7.2.3.</b> CONVERGENZA QUASI OVUNQUE	149	<b>D9.4.4.</b> CONVERGENZA IN MEDIA	173
<b>D7.2.4.</b> CONVERGENZA IN $L^1(\mu)$	151	<b>D9.4.5.</b> CONVERGENZA IN LEGGE	173
<b>D7.2.5.</b> CONVERGENZA IN MISURA	155	<b>APPENDICE A:</b> NOTE AGGIUNTIVE	
<b>CAPITOLO 8:</b> INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO		<b>DA.1.1.</b> COEFFICIENTE BINOMIALE	177
<b>D8.1.1.</b> INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO	158	<b>DA.1.2.</b> FUNZIONE GAMMA DI EULERO	177
		<b>DA.1.3.</b> COEFFICIENTE BINOMIALE GE- NERALIZZATO CON GAMMA DI EULERO	178
		<b>DA.1.4.</b> SIMBOLI DIPOCHHAMMER O FATTORIALE CRESCENTE	178
		<b>DA.1.5.</b> FATTORIALE DECRESCENTE	178

<b>DA.1.6.</b> COEFFICIENTE BINOMIALE GENERALIZZATO, DEFINIZIONE OPERATIVA	<b>179</b>	<b>DB.2.2.</b> RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE (FORTE) E TOTALE	<b>201</b>
<b>DA.3.1.</b> VALORE LIMITE E CLASSE LIMITE	<b>185</b>	<b>DB.2.3.</b> MINIMO	<b>202</b>
<b>DA.3.2.</b> MASSIMO E MINIMO LIMITE	<b>186</b>	<b>DB.2.4.</b> BUON ORDINE	<b>203</b>
<b>DA.3.3.</b> PRODOTTO DI SERIE (SECONDO CAUCHY)	<b>194</b>	<b>DB.2.5.</b> FUNZIONI MONOTONE E ISOMORFISMI D'ORDINE	<b>203</b>
<b>APPENDICE B:</b> BREVI CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI		<b>DB.3.1.</b> NUMERI NATURALI	<b>204</b>
<b>AB.1.1.</b> ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ	<b>200</b>	<b>DB.3.2.</b> TRANSITIVITÀ	<b>204</b>
<b>AB.1.2.</b> ASSIOMA DELLA COPPIA	<b>200</b>	<b>DB.3.3.</b> ORDINALE	<b>204</b>
<b>AB.1.3.</b> SCHEMA ASSIOMATICO DI SEPARAZIONE	<b>200</b>	<b>DB.3.4.</b> ORDINALI FINITI E TRANSFINITI	<b>206</b>
<b>AB.1.4.</b> ASSIOMA DELL'UNIONE	<b>201</b>	<b>DB.3.5.</b> INSIEMI FINITI E INFINTI.	<b>206</b>
<b>AB.1.5.</b> ASSIOMA DELL'INSIEME DELLE PARTI	<b>201</b>	<b>DB.3.6.</b> SUCCESSIONE	<b>208</b>
<b>AB.1.6.</b> ASSIOMA DELL'INFINITO	<b>201</b>	<b>DB.3.7.</b> LIMITE DI UNA SUCCESSIONE	<b>208</b>
<b>AB.1.7.</b> SCHEMA ASSIOMATICO DI RIMPIAZZAMENTO	<b>201</b>	<b>DB.3.8.</b> ADDIZIONE DI ORDINALI	<b>208</b>
<b>AB.1.8.</b> ASSIOMA DI REGOLARITÀ	<b>201</b>	<b>DB.3.9.</b> MOLTIPLICAZIONE DI ORDINALI	<b>209</b>
<b>AB.1.9.</b> ASSIOMA DI SCELTA	<b>201</b>	<b>DB.3.10.</b> ESPONENZIAZIONE DI ORDINALI	<b>210</b>
<b>DB.2.1.</b> RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE (DEBOLE) E TOTALE	<b>201</b>	<b>DB.4.1.</b> CARDINALITÀ	<b>211</b>
<b>ELENCO DEI TEOREMI</b>		<b>DB.4.2.</b> INIEZIONE	<b>211</b>
<b>CAPITOLO 1:</b> ALLA RICERCA DELLA LUNGHEZZA DELL'ELLISSE		<b>DB.4.3.</b> INIEZIONE STRETTA	<b>213</b>
<b>T1.1.1.</b> LUNGHEZZA DELL'ELLISSE DI SEMIASI DI LUNGHEZZA $a$ E $b$		<b>DB.4.4.</b> CARDINALE	<b>215</b>
4			
<b>T2.1.1.</b> CRITERIO DI CAUCHY PER LA CONVERGENZA UNIFORME	<b>16</b>	<b>C2.3.1.</b> CONSEGUENZA AL TEOREMA DI LAGRANGE	<b>29</b>
<b>CAPITOLO 2:</b> CONVERGENZA DI FUNZIONI, PARTE PRIMA		<b>CAPITOLO 3:</b> SERIE DI FUNZIONI	
<b>T2.3.1.</b> TEOREMA DI LIMITATEZZA PER SUCCESSIONI	<b>22</b>	<b>T3.1.1.</b> CONVERGENZA ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE	
<b>T2.3.2.</b> TEOREMA DI CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI	<b>24</b>	<b>T3.1.2.</b> CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE	
<b>T2.3.1.</b> TEOREMA DI INTEGRABILITÀ PER SUCCESSIONI, PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE		<b>PR3.2.1.</b> CRITERIO DI WEIERSTRASS	
25		<b>T3.3.1.</b> TEOREMA DI LIMITATEZZA PER SERIE	
<b>T2.3.3.</b> TEOREMA DI DERIVABILITÀ PER SUCCESSIONI DI FUNZIONI	<b>29</b>	<b>T3.3.2.</b> TEOREMA DI CONTINUITÀ PER SERIE	
<b>T2.3.2.</b> TEOREMA DI SCAMBIO DI LIMITI		<b>T3.3.3.</b> TEOREMA DI INTEGRABILITÀ PER SERIE, SCAMBIO TRA INTEGRALE E SERIE	
29		<b>T3.3.4.</b> DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE	
		41	
		<b>CAPITOLO 4:</b> SERIE DI POTENZE	
		<b>T4.1.1.</b> INSIEME DI CONVERGENZA	<b>46</b>

<b>PR4.1.1.</b> CRITERIO DI D'ALEMBERT O DEL RAPPORTO	48	<b>PR5.4.1.</b> CRITERIO DI MISURABILITÀ	91
<b>T4.1.2.</b> TEOREMA DI CAUCHY-HADAMARD	48	<b>PR5.5.1.</b> GLI INSIEMI MISURABILI SECONDO LEBESGUE SONO UNA $\sigma$ -ALGEBRA	93
<b>PR4.2.1.</b> CONVERGENZA ASSOLUTA SUL BORDO SE LA SERIE DI POTENZE CONVERGE ASSOLUTAMENTE IN UN PUNTO	53	<b>T5.5.1.</b> INNUMERABILITÀ DELL'INSIEME DI CANTOR	96
<b>C4.2.1.</b> CONVERGENZA SUL BORDO SE LA SERIE DI POTENZE A COEFFICIENTI REALI POSITIVI CONVERGE IN $z = R$	53	<b>T5.5.2.</b> REGOLARITÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE	97
<b>T4.3.1.</b> CONVERGE UNIFORME DELLE SERIE DI POTENZE	54	<b>T5.5.3.</b> MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN IMPLICA MISURABILE SECONDO LEBESGUE	100
<b>PR4.4.1.</b> PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ PER LA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE, CASO GENERALE	56	<b>PT5.6.1.</b> CONTINUITÀ DELLA MISURA	102
<b>C4.4.1.</b> PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ PER LA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE, CASO SUL BORDO CON CONVERGENZA ASSOLUTA	56	<b>PR5.7.1.</b> RELAZIONI TRA CLASSI DI INSIEMI	103
<b>T4.4.1.</b> TEOREMA DI ABEL	57	<b>L5.7.1.</b> LEMMA 1 DI VITALI - GLI INSIEMI DI VITALI TRASLATI SONO 2 A 2 DISGIUNTI	105
<b>T4.4.1.</b> DERIVABILITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE	58	<b>L5.7.2.</b> LEMMA 2 DI VITALI - OGNI NUMERO REALE IN $[0, 1]$ APPARTIENE AD UN $V_n$ PER UN CERTO $n$ :	105
<b>L4.4.1.</b> CONVERGENZA DELLA SERIE DI DERIVATE DELLA SERIE DI POTENZE	59	<b>CAPITOLO 6:</b> INTEGRALE DI LEBESGUE	
<b>T4.5.1.</b> ANALITICITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE	61	<b>PR6.2.1.</b> UNA FUNZIONE SEMPLICE È MISURABILE SE E SOLO SE LE CONTROIMMAGINI DEGLI $A_i$ SONO MISURABILI	110
<b>T4.5.2.</b> CONDIZIONE SUFFICIENTE DI ANALITICITÀ	63	<b>T6.2.1.</b> APPROXIMAZIONE DI FUNZIONI MISURABILI NON NEGATIVE CON FUNZIONI SEMPLICI	112
<b>T4.5.3.</b> ANALITICITÀ DI $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ , $(1+x)^\alpha$	65	<b>PR6.3.1.</b> $\sigma$ -ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE DI FUNZIONI SEMPLICI, MISURABILI, NON NEGATIVE RISPETTO AL DOMINIO	116
<b>PR4.7.1.</b> PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE COMPLESSO.	71	<b>PR6.3.1.</b> COMMUTATIVITÀ DEGLI INDICI NELLE SERIE DOPPIE	116
<b>T4.7.1.</b> CARATTERIZZAZIONE DEI LOGARITMI IN CAMPO COMPLESSO	75	<b>PT6.4.1.</b> PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI MISURABILI NON NEGATIVE	117
<b>PT5.3.1.</b> PROPRIETÀ DELLA FUNZIONI MISURABILI	85	<b>T6.4.1.</b> TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA	118
<b>T5.3.1.</b> CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI MISURABILI	85	<b>PR6.4.1.</b> ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE	121
<b>CAPITOLO 5:</b> TEORIA DELLA MISURA		<b>C6.4.1.</b> SCAMBIO TRA INTEGRALE E SERIE PER FUNZIONI MISURABILI E NON NEGATIVE	123
<b>PR5.3.1.</b> MISURABILITÀ DI sup, inf, lim sup e lim inf DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI MISURABILI	87	<b>T6.4.2.</b> INTEGRAZIONE RISPETTO ALLA MISURA CONTEGGIO PESATA	
<b>C5.3.1.</b> PASSAGGIO AL LIMITE PER FUNZIONI MISURABILI IN $\mathbb{C}$	88	<b>124</b>	

<b>C6.4.1.</b> COMMUTATIVITÀ DEGLI INDICI NELLE SERIE DOPPIE	<b>125</b>	<b>T7.2.2.</b> TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA INVERSA	<b>154</b>	
<b>L6.4.1.</b> LEMMA DI FATOU	<b>125</b>	<b>T7.2.2.</b> LEGAME TRA CONVERGENZA $L^1$ E CONVERGENZA IN MISURA	<b>155</b>	
<b>PR6.4.2.</b> $\sigma$ -ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO AL DOMINIO	<b>127</b>	<b>T7.2.3.</b> LEGAME TRA CONVERGENZA QUASI OVUNQUE E IN MISURA	<b>156</b>	
<b>C6.4.2.</b> MISURA INDOTTA DALLA FUN- ZIONE MISURABILE NON NEGATIVA	<b>127</b>	<b>CAPITOLO 8:</b> INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO		
<b>T6.4.3.</b> INTEGRALE RISPETTO ALLA MISURA INDOTTA	<b>128</b>	<b>T8.1.1.</b> TEOREMA DI CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DI INTEGRALI DI- PENDENTI DA UN PARAMETRO	<b>158</b>	
<b>T6.4.1.</b> CARATTERIZZAZIONE DELLE MI- SURE ASS. CONT. FINITE	<b>130</b>	<b>T8.2.1.</b> CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DEL- LA TRASFORMATA DI FOURIER	<b>161</b>	
<b>T6.4.2.</b> TEOREMA DI RADON-NIKODYM	<b>131</b>	<b>CAPITOLO 9:</b> ANALISI E PROBABILITÀ		
<b>PR6.5.1.</b> LE FUNZIONI INTEGRABILI FOR- MANO UNO SPAZIO VETTORIALE	<b>132</b>	<b>PR9.1.1.</b> L'INSIEME VUOTO HA PROBABI- LITÀ NULLA	<b>164</b>	
<b>PR6.5.2.</b> INTEGRABILITÀ DELLE PARTI PO- SITIVE E NEGATIVE DELLE PARTI REALI E IMMAGINARIE	<b>133</b>	<b>T9.2.1.</b> INTEGRAZIONE CON CAMBIO DI VARIABILI TRAMITE PUSHFORWARD	<b>165</b>	
<b>PT6.6.1.</b> PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{C}$	<b>133</b>	<b>T9.2.2.</b> INTEGRAZIONE CON CAMBIO DI VARIABILI TRAMITE PROBABILITÀ IMMAGINE	<b>166</b>	
<b>T6.6.1.</b> TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA	<b>134</b>	<b>T9.3.1.</b> INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RI- SPETTO A V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE	<b>167</b>	
<b>T6.7.1.</b> INTEGRALE PROPRIO DI RIEMANN IMPLICA INTEGRALE DI LEBESGUE	<b>137</b>	<b>T9.3.2.</b> INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RISPETTO A V.A. SINGOLARI DISCRETE	<b>169</b>	
<b>T6.7.2.</b> INTEGRALE IMPROPRI DI RIE- MANN E INTEGRALE DI LEBESGUE	<b>137</b>	<b>T9.3.3.</b> TEOREMA DI RADON-NIKODYM- LEBESGUE	<b>171</b>	
<b>T6.7.3.</b> CARATTERIZZAZIONE DELLE FUN- ZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN	<b>139</b>	<b>APPENDICE A:</b> NOTE AGGIUNTIVE		
<b>PT6.8.1.</b> RUOLO DEGLI INSIEMI DI MI- SURA NULLA NELL'INTEGRAZIONE	<b>140</b>	<b>TA.2.1.</b> CRITERIO DI CAUCHY PER LE SUCCESSIONI	<b>180</b>	
<b>T6.8.1.</b> SCAMBIO TRA INTEGRALE E SE- RIE PER FUNZIONI INTEGRABILI	<b>141</b>	<b>CA.2.1.</b> CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE	<b>181</b>	
<b>T7.1.1.</b> $L^1$ È COMPLETO	<b>147</b>	<b>PRA.3.1.</b> CHIUSURA DELLA CLASSE LIMITE	<b>186</b>	
<b>T7.2.1.</b> TEOREMA DI EGOROFF	<b>150</b>	<b>PRA.3.2.</b> CARATTERIZZAZIONE DEL MAS- SIMO LIMITE FINITO	<b>187</b>	
<b>CAPITOLO 7:</b> CONVERGENZA DI FUNZIO- NI, PARTE SECONDA		<b>PRA.3.1.</b> CARATTERIZZAZIONE DEL MINI- MO LIMITE FINITO	<b>188</b>	
<b>T7.2.1.</b> LEGAME TRA CONVERGENZA UNI- FORME E $L^1$ NEL CASO DI MISURA FINITA	<b>152</b>	<b>PRA.3.3.</b> FORMULAZIONE EQUIVALEN- TE DEL MASSIMO E DEL MINIMO LIMITE	<b>188</b>	
<b>C7.2.1.</b> CONVERGENZA QUASI OVUNQUE E $L^1$	<b>154</b>	<b>PRA.3.4.</b> MASSIMO LIMITE DEL PRODOT- TO DI DUE SUCCESSIONI POSITIVE		
		<b>191</b>		

<b>PRA.3.5.</b> LIMITE DI UNA SUCCESSIONE E LIMITE DEL MODULO	<b>193</b>	<b>TB.3.3.</b> TEOREMA DELLA FORMA NORMA- LE DI CANTOR	<b>210</b>
<b>TA.3.1.</b> TEOREMA DEL RIORDINAMENTO DI RIEMANN	<b>193</b>	<b>CB.4.1.</b> INCLUSIONE E CARDINALITÀ	<b>211</b>
<b>TA.3.2.</b> PRODOTTO DI SERIE (SECONDO CAUCHY) CONVERGENTE SE UNA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE	<b>195</b>	<b>TB.4.1.</b> TEOREMA DI CANTOR- BERNSTEIN-SCHRÖDER	<b>212</b>
<b>TA.4.1.</b> LEGGI DI DE MORGAN	<b>196</b>	<b>PRB.4.1.</b> LA CARDINALITÀ DEL DOMI- NIO DI UNA FUNZIONE SURRIETTI- VA È MAGGIORE O UGUALE DEL- LA CARDINALITÀ DEL DOMINIO	<b>212</b>
<b>PRA.4.1.</b> MISURABILITÀ DI max e min	<b>196</b>	<b>PTB.4.1.</b> PROPRIETÀ DELL'ARITMETICA DEI CARDINALI	<b>213</b>
<b>CA.4.1.</b> MISURABILITÀ DELLA PARTE POSITIVA E NEGATIVA DI UNA FUNZIONE	<b>198</b>	<b>TB.4.1.</b> TEOREMA DI CANTOR	<b>214</b>
<b>PRA.5.1.</b> TEOREMA DI MISURABILITÀ PER SUCCESSIONI Q.O.	<b>198</b>	<b>TB.4.2.</b> BIEZIONE TRA $\mathcal{P}(X)$ E INSIEME DELLE FUNZIONI DA $X$ IN $\{0, 1\}$	<b>214</b>
<b>APPENDICE B:</b> BREVI CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI		<b>CB.4.2.</b> CARDINALITÀ DELL'INSIEME DELLE PARTI	<b>215</b>
<b>LB.3.1.</b> RELAZIONI TRA ORDINALI	<b>205</b>	<b>TB.4.3.</b> TEOREMA DI CANTOR, RIFORMU- LATO	<b>215</b>
<b>TB.3.1.</b> ISOTONIA TRA ORDINALI E INSIEMI BEN ORDINATI	<b>207</b>	<b>LB.4.1.</b> SUCCESSORI DEI CARDINALI	<b>215</b>
<b>TB.3.2.</b> INDUZIONE	<b>207</b>	<b>TB.4.4.</b> CANTOR	<b>216</b>
<b>TB.3.1.</b> INDUZIONE TRANSFINITA	<b>207</b>		
<b>PTB.3.1.</b> ARITMETICA DEGLI ORDINALI E ARITMETICA DEGLI INTERI	<b>210</b>		

# APPENDICE E

## RINGRAZIAMENTI

---

*“Lafayette: Ehi, Napoleone! Direi che questa è la fine.*

*Napoleone: Un momento, il capo sono io! Lo dico io quando è la fine!*

*[La parola **FINE** lo colpisce alla testa.]*

*È la fine.”*

*GLI ARISTOGATTI.*

TITOLARI DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 3 - UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

*Prof.* Walter Dambrosio.

*Prof.* Davide Zucco.

ADATTAMENTO LATEX INTEGRAZIONI DISCUTIBILI

Massimo Bertolotti, perché chi ringrazia il ringraziatore se non se stesso?

REDATTRICE UFFICIALE DEL MANUALOZZO

Elisa Antuca, a cui va il mio più sentito ringraziamento per le correzioni che mi ha segnalato: senza di lei ogni farse del Manaluzzo sarebbe scritta così.

### RINGRAZIAMENTI

A con cui condividiamo questo pazzo mondo universitario:

- Alessandro Amatelli.
- Elisa Antuca.
- Massimo Bertolotti.
- Guido Buffa.
- Francesca Colombo.
- Samuele Corsato.
- Julian Kerpaci.



# BIBLIOGRAFIA

---

- [Ram14] S. A. Ramanujan. «Modular equations and approximations to  $\pi$ ». In: *Quarterly Journal of Mathematics* XLV (1914), pp. 350–372.
- [AB21] E. Antuca e M. Bertolotti. *Tutto quello che avreste voluto sapere sulla Geometria 2\** (\*ma non avete mai osato chiedere). 2021. URL: <https://maxmaci.github.io/manualozzi/ManualozzoGeometria2.pdf>.
- [Rud76] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1976. ISBN: 9780070542358. URL: <https://www.mheducation.com/highered/product/principles-mathematical-analysis-rudin/M9780070542358.html>.
- [Jec03] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9783540440857. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/3-540-44761-X>.
- [And21] A. Andretta. *Elements of Mathematical Logic*. 2021.
- [PS15a] C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi matematica 1*. Zanichelli, 2015. ISBN: 9788808151339. URL: <https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-pagani-salsa-001?hl=analisi%201>.
- [PS15b] C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi matematica 2*. Zanichelli, 2015. ISBN: 9788808637086. URL: <https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-pagani-salsa-001?hl=analisi%201>.
- [Rud87] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1987. ISBN: 9780071002769. URL: <https://www.mheducation.com/highered/product/real-complex-analysis-rudin/M9780070542341.html>.
- [Fol13] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013. ISBN: 9781118626399. URL: <https://www.wiley.com/en-us/Real+Analysis%3A+Modern+Techniques+and+Their+Applications%2C+2nd+Edition-p-9781118626399>.
- [HSH] user21820 HATES SMOKING-HATS. *Definition of Ordinals in Set Theory in Layman Terms*. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/1861272>.



# INDICE ANALITICO

---

- σ-algebra, 83
  - dei Borelliani, 84
  - generata da una famiglia di sottoinsiemi, 84
- aleph, 211
- algebra, 83
- analitica, 62
- cardinale, 211
  - successore, 211
- cardinalità, 207
  - del continuo, 212
- cerchio di convergenza, 47
- classe limite, 181
- coefficiente binomiale, 173
  - generalizzato, 5, 174, 175
- continuità
  - da sopra, 102
  - da sotto, 102
- continuità assoluta, 128
- convergenza
  - certa, 168
  - di una serie, 34, 36
  - di una successione, 12
  - in  $L^1(\mu)$ , 149
  - in legge, 18, 170
  - in media, 169
  - in misura, 152
  - in probabilità, 169
  - puntuale, 18, 146
  - quasi certa, 168
  - quasi ovunque, 147
  - totale, 36
  - uniforme, 12, 18, 146
- criterio
  - del rapporto, 47
  - della radice, 48
- di Caratheodory, 93
- di Cauchy, 175
  - per la convergenza uniforme, 16
  - per le serie, 177
  - per le successioni, 176
- curva, 42
  - space-filling, 43
- decomposizione standard di una funzione semplice, 108
- Delta di Dirac, 101
- densità, 129
- derivazione sotto segno di integrale, 156
- derivazione termine a termine, 41
- distanza, 11
- eccentricità, 4
- equinumerosità (*vedi* equipotenza)
- equipotenza, 207
- esponenziale
  - in campo complesso, 71
- evento, 161
- fattoriale, 173
  - crescente, 174
- fattoriale crescente (*vedi* simbolo di Pochhammer)
- decrescente, 175
- doppio, 4
- formula
  - di Eulero, 72
- frattale, 97
- funzione
  - caratteristica di un sottoinsieme, 85
- funzione caratteristica di un sottoinsieme (*vedi* indicatrice di un sottoinsieme)

- di Dirichlet, 81
- di ripartizione, 164
- Gamma di Eulero, 174
- gaussiana, 126
- integrabile, 129
- limite, 12
- misurabile, 84
- monotona, 199
- multivoca, 74
- semplice, 108
- somma, 56, 57
- insieme
  - di Cantor, 96
  - di convergenza, 45
  - di Vitali, 104
  - elementare, 90
  - finito, 202
  - infinito, 203
  - misurabile, 83
  - test, 93
- integrale
  - dipendente da un parametro, 155
  - ellittico, 5
- intorno
  - tubolare, 17
- isotonia, 199
- lemma
  - di Fatou, 123
- limite, 204
- lunghezza
  - di un intervallo, 90, 92
- massimo limite, 182
- metrica
  - indotta dalla norma, 17
  - lagrangiana, 12
- minimo, 198
- minimo limite, 182
- misura, 100
  - $\sigma$ -finita, 101
  - completa, 101
  - di conteggio
    - di Poisson, 113
  - pesata, 101
  - semplice, 102
- di probabilità, 101
  - discreta, 102
  - normale, 126
- esterna, 90
- finita, 101
- immagine, 163
- interna, 90
- secondo Lebesgue, 94
- secondo Peano-Jordan, 91
- singolare, 166
  - continua, 166
  - discreta, 166
- momento di ordine  $k$ -esimo, 164
- norma, 17
- ordinale, 200
  - finito, 202
  - limite, 201
  - transfinito, 202
- ordine
  - parziale, 197
  - forte, 197
  - totale, 197
- parallelepipedo, 90, 92
- passaggio al limite sotto segno di integrale, 25, 117, 133, 148, 150
- peso, 101
- polinomio di Taylor, 5
- probabilità
  - immagine, 163
- prodotto
  - secondo Cauchy, 191
- proprietà quasi ovunque valida, 138
- raggio di convergenza, 47
- regolarità
  - della misura di Lebesgue, 97
- ridotta, 34, 36
- scambio tra integrale e serie, 40, 121, 140
- serie, 33, 36
  - di funzioni, 37
  - di potenze, 45
  - di Taylor, 61
- spazio
  - campionario, 161
  - di Lebesgue, 144
  - di misura, 101
  - di probabilità, 161
  - metrico, 11
    - completo, 17
  - misurabile, 83
  - normato, 17

- successione
  - di Cauchy, 17
- successore, 201
- teorema
  - della convergenza dominata, 132
  - della convergenza monotona, 116
  - di Abel, 57
  - di Egoroff, 148
  - di Radon-Nikodym, 129
  - di Radon-Nikodym-Lebesgue, 168
  - fondamentale del calcolo integrale
    - nella teoria di Lebesgue, 166
- teoria
  - di Zermelo-Fraenkel, 196
- tipo d'ordine, 199
- transitività, 200
- trasformata di Fourier, 158
- valore limite, 181
- variabile aleatoria, 162
  - assolutamente continua, 164
  - normale standard, 165
  - singolare
    - continua, 167
    - discreta, 166