

Elisa Antuca Massimo Bertolotti

TITOLO TITOLOZZO QUESTO TITOLO È PROVVISORIOZZO E CI PIACE COSÌ



Manualozzo di Analisi Matematica 3

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\left| \begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_4 & . \\ \mu_1 & \mu_4 & . \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_3 & . \\ \mu_1 & \mu_3 & . \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{array} \right|}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

$$\chi(S) = v - e + f$$

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

NOTE PER LA LETTURA

“Un matematico è una macchina per trasformare caffè in teoremi.”

ALFRED RÉNYI, studioso del teorema di Van Moka-mpen.

SENZA troppe pretese di formalità, com'è intuibile dal termine dal termine tecnico *manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti a quattro mani basati sul corso di *Geometria 2* tenuto dai docenti Alberto Albano, Cinzia Casagrande ed Elena Martinengo nell'Anno Accademico 2020-2021 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.

Il corso è diviso in *cinque* parti, pertanto abbiamo ritenuto opportuno dividere in altrettante parti il testo, seguendo l'ordine delle lezioni: Topologia generale, Omotopia, Classificazione delle superfici topologiche, Approfondimenti di Algebra Lineare e infine Geometria proiettiva. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di *Geometria 1*, *Algebra 1* e *Analisi 1*.

In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate.

Per quanto ci piacerebbe esserlo, non siamo *esseri infallibili*: ci saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiediamo gentilmente di segnalarceli su <https://maxmaci.github.io> per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.

I disegni sono stati realizzati da Massimo Bertolotti, l'addetto alla grafica e ai capricci di \LaTeX (ed è molto capriccioso, fidatevi). Chi volesse dilettersi può cercare di distinguere chi fra i due autori ha scritto cosa, non dovrebbe essere troppo difficile.

Seconda edizione, compilato il 1 ottobre 2021.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

INDICE

INDICE ii

I INTRODUZIONE AD ANALISI MATEMATICA 3 1

- 1 ALLA RICERCA DELLA LUNGHEZZA DELL'ELLISSE 3
 - 1.1 Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse 3
 - 1.1.1 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor 4
 - 1.1.2 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale 6
 - 1.2 Non banali conseguenze di una domanda banale 7

II CONVERGENZA DI FUNZIONI 9

- 2 CONVERGENZA DI FUNZIONI 11
 - 2.1 Convergenza uniforme di funzioni 11
 - 2.1.1 Eserciziamoci! Convergenza uniforme 14
 - 2.1.2 Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme 15
 - 2.1.3 Visualizzazione della convergenza uniforme 15
 - 2.1.4 Generalizzazioni della convergenza uniforme 15
 - 2.2 Convergenza puntuale 16
 - 2.3 Convergenza uniforme e puntuale nei confronti di limitatezza, continuità e integrabilità 18

I

INTRODUZIONE AD ANALISI MATEMATICA 3

ALLA RICERCA DELLA LUNGHEZZA DELL'ELLISSE

“BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE.”

MARINOBOT, dopo aver finito le citazioni stupide.

UNA CIRCONFERENZA e un'ellisse a primo acchito possono sembrare molto simili: in fondo, una circonferenza non è altro che un'ellisse i cui punti focali coincidono e dunque l'ellisse si può vedere come una circonferenza “allungata” rispetto ad un asse. Il valore dell'area delimitata da una circonferenza (πr^2) e la lunghezza di una circonferenza ($2\pi r$) sono ben noti già dall'antichità, i cui calcoli sono stati opportunamente formalizzati in epoca moderna; tuttavia, riguardo l'ellisse, ci accorgiamo di aver incontrato nel corso degli studi precedenti quasi esclusivamente il valore dell'area delimitata da essa (πab), ma non la lunghezza dell'ellisse. Come mai?

1.1 UNA DOMANDA BANALE: LA LUNGHEZZA DI UN'ELLISSE

Partiamo col seguente *quiz*: quale delle seguenti tre espressioni è il valore, o una sua approssimazione, della lunghezza di un'ellisse di semiassi di lunghezza a e b ?

- a) $L(a, b) = \pi ab$
- b) $L(a, b) \approx \pi(a + b) + 3\pi \frac{(a-b)^2}{10(a+b) + \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}}$
- c) $L(a, b) \approx 2\pi a$.

Chiaramente, come abbiamo detto nell'introduzione del capitolo, la lunghezza dell'ellisse non è una formula nota dagli studi passati e possiamo (per ora) solamente escludere la prima risposta, in quanto essa è il valore dell'area delimitata dell'ellisse.

OSSERVAZIONE. Possiamo escludere la prima risposta anche per motivi puramente **dimensionali**: a e b sono, dimensionalmente parlando, due lunghezze, quindi πab deve essere una *lunghezza al quadrato*, cioè un'area e non può essere una lunghezza!

In realtà, la domanda del quiz è mal posta: le risposte $b)$ e $c)$ sono entrambe corrette. Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan fornì come nota a margine non commentata in un suo articolo del 1914 (**ramanujan:1914piapprox**) l'approssimazione $b)$:

$$L(a, b) \approx \pi \left((a+b) + 3 \frac{(a-b)^2}{10(a+b) + \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}} \right)$$

Vedremo fra poco che anche l'approssimazione data dalla $a)$ è anch'essa lecita.

Il motivo per cui diamo approssimazioni ma non formule esatte per la lunghezza dell'ellisse è dovuto al fatto che *non esiste* una formula esplicita in termini di *funzioni elementari*, bensì possiamo esprimerla soltanto come **somma di una serie**.

TEOREMA 1.1.1. - LUNGHEZZA DELL'ELLISSE DI SEMIASSI DI LUNGHEZZA a E b

Siano $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi dell'ellisse e $e = e(a, b) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \in [0, 1)$ l'**eccentricità**; allora si ha

$$L(a, b) = 2\pi a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2j} \left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} e^j \right)^2 \quad (1.1)$$

dove $!!$ indica il **doppio fattoriale**:

- $(-1)!! = 0!! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{se } n > 0 \text{ è pari} \\ n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 & \text{se } n > 0 \text{ è dispari} \end{cases}$

Il primo termine della serie fornisce l'approssimazione espressa nella risposta $a)$:

$$L(a, b) \approx 2\pi a$$

1.1.1 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor

Dimostriamo finalmente la lunghezza dell'ellisse. Come è noto dal corso di ANALISI 2, per una curva *regolare* come l'ellisse è possibile calcolarne la lunghezza usando un'opportuna parametrizzazione.

[INSERIRE DISEGNO ELLISSE]

Poniamo $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi ed $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \in [0, 1)$ l'**eccentricità**. Una parametrizzazione è

$$\vec{r}(t) = (a \sin t, b \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Allora

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a \cos t, -b \sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

C'è un problema: la funzione $f(t) = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}$ non è **elementarmente integrabile**, cioè non ammette primitive in termini di funzioni elementari.

ATTENZIONE! Non essere elementarmente integrabile *non* significa che non sia integrabile! La funzione integranda $f(t)$ è continua su $[0, 2\pi]$, dunque per il *teorema fondamentale*

del calcolo integrale ammette primitive su $[0, 2\pi]$. Una di esse è

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 y} dy \quad \forall y \in [0, 2\pi]$$

Il problema è che *non* possiamo riscrivere F in modo esplicito usando *solo* funzioni elementari.

Questo tipo di integrale è detto **integrale ellittico**.

DIGRESSIONE. Gli *integrali ellittici* si incontrano in molti ambiti matematici. Ad esempio, appaiono nella risoluzione dell'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Sono il motivo per cui tale equazione si studia spesso per piccole oscillazioni, in modo da poter operare una linearizzazione $\sin \theta \sim \theta$ e calcolare il moto senza passare per tali integrali non calcolabili.

Un altro esempio della loro importanza è noto agli appassionati di GEOMETRIA: infatti, la branca della Geometria Algebrica nasce anche dagli studi su tali integrali.

Potremmo limitarci a considerare l'intero integrale ellittico come una nuova funzione, ma al più potremmo calcolarne il valore tramite metodi dell'ANALISI NUMERICA. Invece, proviamo a riscrivere l'integrale utilizzando uno **sviluppo in serie** della funzione integranda.

Poniamo $x = -e^2 \sin^2 t$ e osserviamo che

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = (1 + x)^\alpha \quad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}$$

Poichè $(1 + x)^\alpha$ è una funzione di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno di $x = 0$, si può approssimare localmente col **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in $x = 0$, $\forall n \geq 0$. Se il polinomio in questione è

$$P_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{\alpha}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

con $\binom{\alpha}{j}$ il **coefficiente binomiale generalizzato**¹, allora l'approssimazione dell'integranda data dal polinomio di Taylor è proprio

$$(1 + x)^{1/2} \approx \sum_{j=0}^n \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

Risostituendo $x = -e^2 \sin^2 t$ abbiamo un'approssimazione dell'integranda. Tuttavia, noi vorremmo un *risultato esatto*.

Sappiamo intuitivamente che più termini si hanno nello sviluppo di Taylor, più accurata è l'approssimazione; cosa succede per $n \rightarrow \infty$? Dobbiamo studiare la somma di serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j$$

¹Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la definizione e le proprietà del binomiale generalizzato.

Già ci dobbiamo porre nuove domande: la serie *converge* e per quali valori di x ? Supponendo che la serie converga per opportuni valori di x , la serie converge proprio a $(1+x)^{1/2}$? In generale, per $f \in \mathcal{C}^\infty$ qualsiasi **NO**, la serie di Taylor non converge proprio e se converge non converge ad f ! Tuttavia, in questo caso siamo particolarmente fortunati: $\forall x \in (-1, 1)$ la serie converge² e vale

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

In questa prima parte della dimostrazione abbiamo capito che è importante determinare quando è possibile passare dalla semplice *approssimazione* di una funzione con il *polinomio di Taylor* a poter riscrivere una funzione come una **serie di Taylor** di funzioni opportune.

1.1.2 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale

Torniamo al problema originale. Ricordando che $x = -e^2 \sin^2 t$, poiché $t \in [0, 2\pi]$ si ha che $x \in [-e^2, 0] \subseteq (-1, 1)$ dato che $e^2 < 1$. Possiamo riscrivere l'integranda come il suo sviluppo in serie di Taylor:

$$(1 - e^2 \sin^2 t)^{1/2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-e^2 \sin^2 t)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Sostituiamo nell'integrale; poiché la funzione è pari e simmetrica, possiamo ricondurci a studiare l'integrale su $[0, \pi/2]$:

$$L = a \int_0^{2\pi} (1 - e^2 \sin^2 t)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin^2 t)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \quad \square$$

Incontriamo un nuovo problema: cos'è l'**integrale di una serie**? Se avessimo una somma di un numero *finito* di termini per la *linearità* dell'integrale potremmo scambiare la sommatoria con l'integrale, ma è possibile farlo nel caso di una serie?

Riscriviamo l'espressione precedente con la definizione di serie come *limite* per $n \rightarrow +\infty$ delle *ridotte*:

$$\square 4a \int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=0}^n \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \right) dt$$

Il problema precedente si può riformulare come “È possibile scambiare integrale e limite?”. Tale questione è come il problema del **passaggio al limite sotto segno di integrale**.

In generale, la risposta è **NO**: non è possibile scambiare limite e integrale. Ciò nonostante

²Nelle “Note aggiuntive”, a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di tale convergenza.

anche questa volta siamo particolarmente fortunati e il passaggio è *lecito*³ e si ha

$$\begin{aligned} L &= 4a \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^n \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j} t dt \end{aligned}$$

Completando il calcolo dell'integrale⁴ si ottiene la formula della lunghezza scritta precedentemente.

1.2 NON BANALI CONSEGUENZE DI UNA DOMANDA BANALE

Abbiamo finalmente raggiunto una *risposta*, seppur assolutamente non banale, alla domanda che ci eravamo posti originalmente: qual è la *lunghezza dell'ellisse*? Nel far ciò ci siamo imbattuti in tutta una serie di problemi: esplicitare integrali non *elementarmente* risolvibili, la *convergenza di serie di Taylor* di funzioni ad una funzione specifica, il *passaggio al limite* sotto segno di *integrale*. La teoria matematica che tratteremo a partire dai capitoli successivi *nasce* proprio da questi problemi apparsi nell'*insidiosa ricerca* di una formula della lunghezza dell'ellisse.

In particolare, per capire quando era possibile il passaggio al limite sotto segno di integrale sono stati sviluppati diversi *teoremi*, più o meno vantaggiosi da utilizzare, le cui ipotesi variano sensibilmente fra di loro: alcuni si inseriscono nella già nota *teoria Riemanniana degli integrali*, mentre altri richiedono ipotesi completamente diverse. È da questi innumerevoli approcci al problema che, storicamente parlando, fu tale quesito a dare un *impeto* fondamentale allo sviluppo della **teoria degli integrali di Lebesgue**.

³Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione che in questo caso il passaggio è lecito.

⁴Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare tale calcolo.

II

CONVERGENZA DI FUNZIONI

CONVERGENZA DI FUNZIONI

“BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE.”

MARINOBOT, dopo aver finito le citazioni stupide.

L_E [COMPLETARE]

2.1 CONVERGENZA UNIFORME DI FUNZIONI

Per poter trattare i problemi enunciati nel Chapter 1 a pagina 3 dobbiamo parlare di convergenza di funzioni. Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di distanza, spazio metrico e convergenza.

DEFINIZIONE 2.1.1. - SPAZIO METRICO E DISTANZA.

Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **distanza**, cioè tale che $\forall x, y, z \in X$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y.$
2. $d(x, y) = d(y, x).$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

DEFINIZIONE 2.1.2. - CONVERGENZA.

Una successione $v_n \in X$ **converge** in X a $v \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ d(v_n, v) < \varepsilon \quad (2.1)$$

Un caso particolare di spazio metrico è lo spazio $X = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la **metrica lagrangiana**:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \quad (2.2)$$

OSSERVAZIONE. La distanza è ben definita perché la funzione $|f(x) - g(x)|$, essendo definita su $[a, b]$ compatto, ammette massimo per il teorema di Weierstrass.

DEFINIZIONE 2.1.3. - CONVERGENZA NELLA METRICA LAGRANGIANA.

Siano $f_n, f \in X$. f_n converge a f in X se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.3)$$

Questa relazione si può riscrivere come

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$$

OSSERVAZIONE. La condizione, riscritta in questo modo, non solo *non necessita* più dell'esistenza del *massimo*, ma non è neanche necessario che l'intervallo sia *compatto* o che la funzione sia *continua*: questa è in realtà una relazione *più generale* rispetto alla semplice convergenza nella metrica lagrangiana!

DEFINIZIONE 2.1.4. - CONVERGENZA UNIFORME.

Siano $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ qualsiasi. Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A \quad (2.4)$$

DEFINIZIONE 2.1.5. - FUNZIONE LIMITE.

Se f_n converge uniformemente a f su A , f si dice **funzione limite**.

OSSERVAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione che se f_n converge uniformemente a f su A , allora $\forall B \subseteq A$ si ha che f_n converge uniformemente a f su B .

ATTENZIONE! È estremamente importante dire **dove** converge f_n : infatti, una stessa successione può convergere uniformemente su A , ma allo stesso tempo *non convergere* uniformemente in un altro insieme B . Vedremo un esempio fondamentale a riguardo successivamente.

Ora passiamo da questa definizione ad una formulazione equivalente *operativa*. Essa è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Possiamo definire una successione $c_n := \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}^+$. Allora la relazione sopra, per definizione di limite di una successione, è equivalente a $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

In conclusione abbiamo mostrato che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \quad (2.5)$$

ESEMPIO. Proviamo che $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformemente a $f(x) = |x|$ su \mathbb{R} . Dobbiamo provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

1. Calcoliamo il sup con n fissato:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right)$$

Per trovarlo tracciamo il grafico di $\varphi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$ e cerchiamo il suo estremo superiore. Per parità della funzione ci basta fare le nostre considerazioni su $(0, +\infty)$ per poi disegnare il resto del grafico grazie alla simmetria assiale rispetto all'asse y ; studiando opportunamente la derivata si ottiene il seguente grafico.

[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]

Segue chiaramente che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi_n(x) = \varphi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Calcoliamo il limite per $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Abbiamo così verificato la convergenza richiesta.

ESEMPIO.

Consideriamo $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$. Allora:

1. x^n converge uniformemente a 0 su ogni insieme $[-a, a]$, $\forall a: 0 < a < 1$.
2. x^n **non** converge uniformemente a 0 su $(-1, 1)$.

DIMOSTRAZIONE.

1. Sia $a \in (0, 1)$ fissato e consideriamo

$$|x^n - 0| = |x^n| \implies \sup_{x \in [-a, a]} |x^n - 0| = \sup_{x \in [-a, a]} |x^n|$$

Qual è il grafico di x^n ?

- Se n **pari**, è visivamente simile a quello di x^2 :
[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]
- Se n **dispari**, è visivamente simile a quello di x^3 :
[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]

Tuttavia per $|x^n|$, $\forall n \geq 2$, che è una funzione pari, il grafico è visivamente simile a quello di x^2 :

[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]

Segue immediatamente che

$$\sup_{x \in [-a, a]} |x^n| = a^n, \quad \forall a: 0 < a < 1$$

Ora si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [-a, a]} |x^n| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

perché $a \in (0, 1)$ e quindi a^n è una successione geometrica convergente e pertanto il limite a $+\infty$ è sempre necessariamente 0.

2. In questo caso

$$\sup_{x \in (-1, 1)} |x^n| = 1, \quad \forall n$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in (-1, 1)} |x^n| \right) = 1 \neq 0$$

pertanto *non* c'è convergenza uniforme su $(-1, 1)$.

□

2.1.1 Eserciziamoci! Convergenza uniforme

ESERCIZIO. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente a 0 su $[0, 1]$?

SOLUZIONE. Dimostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} \frac{x^n}{n} \right) = 0$$

Poiché

$$\sup_{x \in [0, 1]} \frac{x^n}{n} = \frac{x^n}{n} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2.1.2 Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

Come nel caso delle successioni numeriche, esiste un **criterio di Cauchy** per la convergenza uniforme.

TEOREMA 2.1.1. - CRITERIO DI CAUCHY PER LA CONVERGENZA UNIFORME.

Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} f_n \text{ converge uniformemente su } A &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in A \quad (2.6) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Il criterio di Cauchy è un *risultato teorico molto importante*, in quanto permette di mostrare la convergenza uniforme di una successione di funzioni *senza sapere* quale sia il limite come invece è necessario nella definizione di convergenza, in modo analogo a ciò che succede con il criterio di Cauchy per le successioni numeriche.

2.1.3 Visualizzazione della convergenza uniforme

Siamo abituati alle successioni numeriche v_n ed eventualmente a studiare il loro andamento in modo grafico, rappresentando sulle ascisse il numero n e sulle ordinate il valore v_n . Nel caso di successioni di funzioni l'argomento è una funzione, quindi per studiarle può essere utile proprio disegnare i grafici degli f_n e come convergono verso f .

Come appare *visivamente* la convergenza uniforme? Possiamo riscrivere la condizione della convergenza uniforme

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

come

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \forall x \in A \text{ definitivamente} \quad (2.7)$$

In altre parole, f_n deve essere compresa nell'**intorno tubolare** di $f(x)$ definitivamente, nel senso che le f_n devono stare in questo intorno per ogni n sufficientemente grande (cioè $\forall n \geq N$).

[INSERIRE GRAFICO DELLA FUNZIONE IN INTORNO TUBOLARE.]

DEFINIZIONE 2.1.6. - INTORNO TUBOLARE.

Un **intorno tubolare** di larghezza ε di una curva è l'unione di tutti i dischi di raggio ε con centro un punto di una curva.

2.1.4 Generalizzazioni della convergenza uniforme

Prima di tutto, ricordiamo le definizioni di norma e spazio normato.

DEFINIZIONE 2.1.7. - SPAZIO NORMATO E NORMA.

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ dove X è un spazio vettoriale su \mathbb{K} reale o complesso e $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **norma**, cioè tale che $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

OSSERVAZIONE. Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico se consideriamo la **metrica indotta dalla norma**, cioè la funzione data da $d(x, y) := \|x - y\|$.

Generalizziamo ora la definizione di convergenza uniforme considerando $f_n, f : A \longrightarrow Y$, con A insieme qualsiasi e Y uno spazio normato; se vogliamo che valga anche il criterio di Cauchy è necessario che Y sia *anche* uno spazio **completo**.

DEFINIZIONE 2.1.8. - SUCCESSIONE DI CAUCHY.

Una successione $v_n \in X$ è **di Cauchy** in X se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \ d(v_n, v_m) < \varepsilon \quad (2.8)$$

DEFINIZIONE 2.1.9. - SPAZIO COMPLETO.

Uno spazio metrico è detto **completo** se tutte le successioni di Cauchy convergono.

OSSERVAZIONE. Una successione convergente è *sempre* di Cauchy, ma in generale *non tutte* le successioni di Cauchy convergono. L'implicazione opposta è vera solo se lo spazio è completo.

Possiamo ora, date queste nuove ipotesi, riformulare la convergenza uniforme.

DEFINIZIONE 2.1.10. - CONVERGENZA UNIFORME.

Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon, \forall x \in A \quad (2.9)$$

DIGRESSIONE. Volendo è possibile generalizzare ulteriormente parlando di convergenza uniforme per funzioni a valori in semplici **spazi metrici** (completi), sostituendo a $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ la condizione $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Nei nostri studi non affronteremo ciò e ci limiteremo a considerare il caso di spazi normati (completi).

2.2 CONVERGENZA PUNTUALE

Durante gli studi di CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA si è parlato di tre tipi di convergenze di successioni di variabili aleatorie: la **convergenza in probabilità**, la **con-**

vergenza quasi certa e la **convergenza in legge** (o in distribuzione). Consideriamo ora quest'ultima, di cui riportiamo la definizione.

DEFINIZIONE 2.2.1. - CONVERGENZA IN LEGGE

Dato $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variabili aleatorie e le due corrispettive *funzioni di distribuzione*

$$\begin{aligned} F_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

allora si dice che X_n converge a X **in legge** $(X_n \xrightarrow{d} X)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ punto di continuit  di } F. \quad (2.10)$$

Quello che abbiamo appena scritto non   altro che il caso applicato agli *studi probabilistici* della **convergenza puntuale** di una successione ad una funzione limite nel punto x .

DEFINIZIONE 2.2.2. - CONVERGENZA PUNTUALE.

Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad (2.11)$$

Confrontiamo qui $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. (CU) f_n converge a f **uniformemente** su A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A$$

2. (CP) f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Il quantificatore esistenziale \exists implica che ci  che esiste dipende da tutto ci  che lo precede: nella convergenza puntuale N non dipende dal solo ε come cos  capita nella **convergenza uniforme**, ma anche da x . La convergenza uniforme   pi  restrittiva rispetto alla puntuale.

OSSERVAZIONE. Questa differenza   concettualmente analoga a quella che c'  fra continuit  uniforme e continuit -

OSSERVAZIONE. Possiamo considerare, $\forall \varepsilon > 0$, due punti x' e x'' su cui valutare la **soglia** N di un successione di funzioni: in questo caso abbiamo per il primo punto $N(\varepsilon, x')$ e per il secondo $N(\varepsilon, x'')$. Vediamo subito che $\max(N(\varepsilon, x'), N(\varepsilon, x''))$   una soglia lecita

sia per x' sia x'' .

In generale, se voglio passare dalla convergenza puntuale alla convergenza uniforme devo considerare

$$\sup_{x \in A} N(\varepsilon, x)$$

- Se A è finito, allora $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = \max_{x \in A} N(\varepsilon) = N(\varepsilon)$ e c'è convergenza uniforme.
- Se $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = +\infty$ allora *non* c'è convergenza uniforme.

Dalle definizioni segue immediatamente che

f_n converge uniformemente a f in $A \implies f_n$ converge puntualmente a f in ogni punto di A

ma in generale vale che la convergenza puntuale **NON** implica la convergenza uniforme.

ESEMPIO. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$.
 $\forall x \in \mathbb{R}$ fissato si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Allora x^n converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

in ogni punto di $(-1, 1]$. **[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]**

Abbiamo provato precedentemente che $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ in ogni intervallo $[-a, a] \subsetneq (-1, 1)$, $\forall a \in (0, 1)$, ma *non* converge uniformemente a $f = 0$ in $(-1, 1)$.

Questo mostra che su $(-1, 1)$ c'è convergenza puntuale ma non uniforme.

OSSERVAZIONE. Questo esempio mostra inoltre che la CP *non* è sufficiente in generale per trasferire la continuità alla funzione limite.

2.3 CONVERGENZA UNIFORME E PUNTUALE NEI CONFRONTI DI LIMITATEZZA, CONTINUITÀ E INTEGRABILITÀ

Adesso studiamo il diverso comportamento delle due tipologie di convergenza viste rispetto alle proprietà enunciate nel titolo di questa sezione: se le funzioni f_n della successione sono limitate/continue/integrabili, la funzione limite f è limitata/continua/integrabile?

PROPOSIZIONE 2.3.1. - Siano $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n limitato su $[a, b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a, b]$.

Allora F è limitata su $[a, b]$.