Elisa Antuca   Massimo Bertolotti

TITOLO TITOLOZZO QUESTO TITOLO È PROVVISORIOZZO

E CI PIACE COSÌ

Manualozzo di Analisi Matematica 3

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\chi(S) = v - e + f$$

$$\pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z}$$

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Note per la lettura

"Un matematico è una macchina per trasformare caffè in teoremi."

Alfréd Rényi, *studioso del teorema di Van Moka-mpen.*

Senza troppe pretese di formalità, com'è intuibile dal termine dal termine tecnico *manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti a quattro mani basati sul corso di *Geometria 2* tenuto dai docenti Alberto Albano, Cinzia Casagrande ed Elena Martinengo nell'Anno Accademico 2020-2021 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.
Il corso è diviso in *cinque* parti, pertanto abbiamo ritenuto opportuno dividere in altrettante parti il testo, seguendo l'ordine delle lezioni: Topologia generale, Omotopia, Classificazione delle superfici topologiche, Approfondimenti di Algebra Lineare e infine Geometria proiettiva. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di *Geometria 1*, *Algebra 1* e *Analisi 1*.
In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate.
Per quanto ci piacerebbe esserlo, non siamo *esseri infallibili*: ci saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiediamo gentilmente di segnalarceli su `https://maxmaci.github.io` per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.
I disegni sono stati realizzati da Massimo Bertolotti, l'addetto alla grafica e ai capricci di LaTeX (ed è molto capriccioso, fidatevi). Chi volesse dilettarsi può cercare di distinguere chi fra i due autori ha scritto cosa, non dovrebbe essere troppo difficile.

Seconda edizione, compilato il 29 settembre 2021.

Indice

I

Introduzione ad Analisi Matematica 3

CAPITOLO 1

Alla ricerca della lunghezza dell'ellisse

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Una circonferenza e un'*ellisse* a primo acchito possono sembrare molto simili: in fondo, una circonferenza non è altro che un'ellisse i cui punti focali coincidono e dunque l'ellisse si può vedere come una circonferenza "allungata" rispetto ad un asse. Il valore dell'area delimitata da una circonferenza (πr^2) e la lunghezza di una circonferenza ($2\pi r$) sono ben noti già dall'antichità, i cui calcoli sono stati opportunamente formalizzati in epoca moderna; tuttavia, riguardo l'ellisse, ci accorgiamo di aver incontrato nel corso degli studi precedenti quasi esclusivamente il valore dell'area delimitata da essa (πab), ma *non la lunghezza dell'ellisse*. Come mai?

1.1 Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse

Partiamo col seguente *quiz*: quale delle seguenti tre espressioni è il valore, o una sua *approssimazione*, della lunghezza di un'ellisse di semiassi di lunghezza a e b?

a) $L(a,b) = \pi ab$

b) $L(a,b) \approx \pi(a+b) + 3\pi \frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}$

c) $L(a,b) \approx 2\pi a$.

Chiaramente, come abbiamo detto nell'introduzione del capitolo, la lunghezza dell'ellisse *non* è una formula nota dagli studi passati e possiamo (per ora) solamente escludere la *prima risposta*, in quanto essa è il valore dell'**area** delimitata dell'ellisse.

> Osservazione. Possiamo escludere la prima risposta anche per motivi puramente **dimensionali**: a e b sono, dimensionalmente parlando, due lunghezze, quindi πab deve essere una *lunghezza al quadrato*, cioè un'area e non può essere una lunghezza!

In realtà, la domanda del quiz è mal posta: le risposte *b)* e *c)* sono entrambe corrette.
Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan fornì come nota a margine non commentata in un suo articolo del 1914 (Ramanujan, «Modular equations and approximations to π») l'approssimazione *b)*:

$$L(a,b) \approx \pi\left((a+b)+3\frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}\right)$$

Vedremo fra poco che anche l'approssimazione data dalla *a)* è anch'essa lecita.
Il motivo per cui diamo approssimazioni ma non formule esatte per la lunghezza dell'ellisse è dovuto al fatto che *non esiste* una formula esplicita in termini di *funzioni elementari*, bensì possiamo esprimerla soltanto come **somma di una serie**.

Teorema 1.1.1. - Lunghezza dell'ellisse di semiassi di lunghezza a e b
Siano $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi dell'ellisse e $e = e(a,b) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'**eccentricità**; allora si ha

$$L(a,b) = 2\pi a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2j}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}e^j\right)^2 \tag{1.1}$$

dove !! indica il **doppio fattoriale**:

- $(-1)!! = 0!! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 2 \text{ se } n>0 \text{ è pari} \\ n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \text{ se } n>0 \text{ è dipari} \end{cases}$

Il primo termine della serie fornisce l'approssimazione espressa nella risposta *a)*:

$$L(a,b) \approx 2\pi a$$

1.1.1 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor*

Dimostriamo finalmente la lunghezza dell'ellisse. Come è noto dal corso di Analisi 2, per una curva *regolare* come l'ellisse è possibile calcolarne la lunghezza usando un'opportuna parametrizzazione.
[INSERIRE DISEGNO ELLISSE]
Poniamo $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi ed $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'eccentricità. Una parametrizzazione è

$$\vec{r}(t) = (a\sin t,\ b\cos t) \quad t \in [0,2\pi]$$

Allora

$$L = \int_0^{2\pi} \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a\cos t,\ -b\sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-(a^2+b^2)\sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$$

C'è un problema: la funzione $f(t) = \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$ non è **elementarmente integrabile**, cioè non ammette primitive in termini di funzioni elementari.

Attenzione! Non essere elementarmente integrabile *non* significa che non sia integrabile! La funzione integranda $f(t)$ è continua su $[0,2\pi]$, dunque per il *teorema fondamentale* *del calcolo integrale* ammette primitive su $[0, 2\pi]$. Una di esse è

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 y} dy \quad \forall y \in [0, 2\pi]$$

Il problema è che *non* possiamo riscrivere F in modo esplicito usando *solo* funzioni elementari.

Questo tipo di integrale è detto **integrale ellittico**.

DIGRESSIONE. Gli *integrali ellittici* si incontrano in molti ambiti matematici. Ad esempio, appaiono nella risoluzione dell'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice:

$$th\ddot{e}ta = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

Sono il motivo per cui tale equazione si studia spesso per piccole oscillazioni, in modo da poter operare una linearizzazione $\sin\theta \sim \theta$ e calcolare il moto senza passare per tali integrali non calcolabili.
Un altro esempio della loro importanza è noto agli appassionati di GEOMETRIA: infatti, la branca della Geometria Algebrica nasce anche dagli studi su tali integrali.

Potremmo limitarci a considerare l'intero integrale ellittico come una nuova funzione, ma al più potremmo calcolarne il valore tramite metodi dell'ANALISI NUMERICA. Invece, proviamo a riscrivere l'integrale utilizzando uno **sviluppo in serie** della funzione integranda.
Poniamo $x = -e^2 \sin^2 t$ e osserviamo che

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = (1 + x)^\alpha \quad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}$$

Poichè $(1 + x)^\alpha$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ in un intorno di $x = 0$, si può approssimare localmente col **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in $x = 0$, $\forall n \geq 0$. Se il polinomio in questione è

$$P_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

con $\binom{\alpha}{j}$ il **coefficiente binomiale generalizzato**[1], allora l'approssimazione dell'integranda data dal polinomio di Taylor è proprio

$$(1 + x)^{1/2} \approx \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

Risostituendo $x = -e^2 \sin^2 t$ abbiamo un'approssimazione dell'integranda. Tuttavia, noi vorremmo un *risultato esatto*.
Sappiamo intuitivamente che più termini si hanno nello sviluppo di Taylor, più accurata è l'approssimazione; cosa succede per $n \to \infty$? Dobbiamo studiare la somma di serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j$$

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la definizione e le proprietà del binomiale generalizzato.

Già ci dobbiamo porre nuove domande: la serie *converge* e per quali valori di x? Supponendo che la serie converga per opportuni valori di x, la serie converge proprio a $(1+x)^{1/2}$? *In generale*, per $f \in \mathscr{C}^\infty$ qualsiasi **NO**, la serie di Taylor non converge proprio e se converge non converge ad f! Tuttavia, in questo caso siamo particolarmente fortunati: $\forall x \in (-1,1)$ la serie converge[2] e vale

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

In questa prima parte della dimostrazione abbiamo capito che è importante determinare quando è possibile passare dalla semplice *approssimazione* di una funzione con il *polinomio di Taylor* a poter riscrivere una funzione come una **serie di Taylor** di funzioni opportune.

1.1.2 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale*

Torniamo al problema originale. Ricordando che $x = -e^2 \sin^2 t$, poiché $t \in [0, 2\pi]$ si ha che $x \in \left[-e^2, 0\right] \subseteq (-1,1)$ dato che $e^2 < 1$. Possiamo riscrivere l'integranda come il suo sviluppo in *serie di Taylor*:

$$\left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} \left(-e^2 \sin^2 t\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Sostituiamo nell'integrale; poiché la funzione è pari e simmetrica, possiamo ricondurci a studiare l'integrale su $[0, \pi/2]$:

$$L = a \int_0^{2\pi} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \, dt \boxed{=}$$

Incontriamo un nuovo problema: cos'è l'**integrale di una serie**? Se avessimo una somma di un numero *finito* di termini per la *linearità* dell'integrale potremmo scambiare la sommatoria con l'integrale, ma è possibile farlo nel caso di una serie?
Riscriviamo l'espressione precedente con la definizione di serie come *limite* per $n \to +\infty$ delle *ridotte*:

$$\boxed{=} \; 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \right) dt$$

Il problema precedente si può riformulare come "*È possibile scambiare integrale e limite?*".
Tale questione è come il problema del **passaggio al limite sotto segno di integrale**.
In generale, la risposta è **NO**: non è possibile scambiare limite e integrale. Ciò nonostante

[2] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di tale convergenza.

anche questa volta siamo particolarmente fortunati e il passaggio è *lecito*[3] e si ha

$$\begin{aligned} L &= 4a \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j} t dt \end{aligned}$$

Completando il calcolo dell'integrale[4] si ottiene la formula della lunghezza scritta precedentemente.

1.2 NON BANALI CONSEGUENZE DI UNA DOMANDA BANALE

Abbiamo finalmente raggiunto una *risposta*, seppur assolutamente non banale, alla domanda che ci eravamo posti originalmente: qual è la *lunghezza dell'ellisse*? Nel far ciò ci siamo imbattuti in tutta una serie di problemi: esplicitare integrali non *elementarmente* risolvibili, la *convergenza* di *serie di Taylor* di funzioni ad una funzione specifica, il *passaggio al limite* sotto segno di *integrale*. La teoria matematica che tratteremo a partire dai capitoli successivi *nasce* proprio da questi problemi apparsi nell'*insidiosa ricerca* di una formula della lunghezza dell'ellisse.
In particolare, per capire quando era possibile il passaggio al limite sotto segno di integrale domanda sono stati sviluppati diversi *teoremi*, più o meno vantaggiosi da utilizzare, le cui ipotesi variano sensibilmente fra di loro: alcuni si inseriscono nella già nota *teoria Riemanniana degli integrali*, mentre altri richiedono ipotesi completamente diverse. È da questi innumerevoli approcci al problema che, storicamente parlando, fu tale quesito a dare un *impeto* fondamentale allo sviluppo della **teoria degli integrali di Lebesgue**.

[3] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione che in questo caso il passaggio è lecito.

[4] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare tale calcolo.

II

Convergenza di funzioni

CAPITOLO 2

Convergenza di funzioni

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

MARINOBOT, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

LE **[COMPLETARE]**

2.1 CONVERGENZA UNIFORME DI FUNZIONI

Per poter trattare i problemi enunciati nel Chapter 1 a pagina 3 dobbiamo parlare di convergenza di funzioni. Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di distanza, spazio metrico e convergenza.

DEFINIZIONE 2.1.1. - SPAZIO METRICO E DISTANZA.
Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **distanza**, cioè tale che $\forall x, y, z \in X$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

DEFINIZIONE 2.1.2. - CONVERGENZA.
Una successione $v_n \in X$ **converge** in X a $v \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; d(v_n, v) < \varepsilon \tag{2.1}$$

Un *caso particolare* di spazio metrico è lo spazio $X = \mathscr{C}([a,b]; \mathbb{R})$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la **metrica lagrangiana**:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \tag{2.2}$$

Osservazione. La distanza è ben definita perché la funzione $|f(x) - g(x)|$, essendo definita su $[a,b]$ compatto, ammette massimo per il teorema di Weierstrass.

Definizione 2.1.3. - Convergenza nella metrica lagrangiana.
Siano $f_n,\ f \in X$. f_n converge a f in X se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Questa relazione si può riscrivere come

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a,b]$$

Osservazione. La condizione, riscritta in questo modo, non solo *non necessita* più dell'esistenza del *massimo*, ma non è neanche necessario che l'intervallo sia *compatto* o che la funzione sia *continua*: questa è in realtà una relazione *più generale* rispetto alla semplice convergenza nella metrica lagrangiana!

Definizione 2.1.4. - Convergenza uniforme.
Siano $f_n,\ f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq R$ qualsiasi. Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A \tag{2.4}$$

Definizione 2.1.5. - Funzione limite.
Se f_n converge uniformemente a f su A, f si dice **funzione limite**.

Osservazione. Segue immediatamente dalla definizione che se f_n converge uniformemente a f su A, allora $\forall B \subseteq A$ si ha che f_n converge uniformemente a f su B.

Attenzione! È estremamente importante dire **dove** converge f_n: infatti, una stessa successione può convergere uniformemente su A, ma allo stesso tempo *non convergere* uniformemente in un altro insieme B. Vedremo un esempio fondamentale a riguardo successivamente.

Ora passiamo da questa definizione ad una formulazione equivalente *operativa*. Essa è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Possiamo definire una successione $c_n := \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}^+$. Allora la relazione sopra, per definizione di limite di una successione, è equivalente a $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

In conclusione abbiamo mostrato che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \iff \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0 \tag{2.5}$$

Esempio. Proviamo che $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformemente a $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}$. Dobbiamo provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

1. Calcoliamo il sup con n *fissato*:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right)$$

   Per trovarlo tracciamo il grafico di $\varphi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$ e cerchiamo il suo estremo superiore. Per parità della funzione ci basta fare le nostre considerazioni su $(0, +\infty)$ per poi disegnare il resto del grafico grazie alla simmetria assiale rispetto all'asse y; studiando opportunamente la derivata si ottiene il seguente grafico.
   [INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]
   Segue chiaramente che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi_n(x) = \varphi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Calcoliamo il limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Abbiamo così verificato la convergenza richiesta.

Esempio.
Consideriamo $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$. Allora:

1. x^n converge uniformemente a 0 su *ogni* insieme $[-a, a]$, $\forall a\colon 0 < a < 1$.
2. x^n **non** converge uniformemente a 0 su $(-1, 1)$.

Dimostrazione.

1. Sia $a \in (0,1)$ fissato e consideriamo

$$|x^n - 0| = |x^n| \implies \sup_{x\in[-a,a]} |x^n - 0| = \sup_{x\in[-a,a]} |x^n|$$

Qual è il grafico di x^n?

   - Se n **pari**, è visivamente simile a quello di x^2:
     [INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]
   - Se n **dispari**, è visivamente simile a quello di x^3:
     [INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]

Tuttavia per $|x^n|$, $\forall n \geq 2$, che è una funzione pari, il grafico è visivamente simile a quello di x^2:
[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]
Segue immediatamente che

$$\sup_{x\in[-a,a]} |x^n| = a^n, \ \forall a\colon 0 < a < 1$$

Ora si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[-a,a]} |x^n|\right) = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

perché $a \in (0,1)$ e quindi a^n è una successione geometrica convergente e pertanto il limite a $+\infty$ è sempre necessariamente 0.

2. In questo caso

$$\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1, \ \forall n$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in(-1,1)} |x^n|\right) = 1 \neq 0$$

pertanto *non* c'è convergenza uniforme su $(-1,1)$.

□

2.1.1 *Eserciziamoci! Convergenza uniforme*

Esercizio. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente a 0 su $[0,1]$?

Soluzione. Dimostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x^n}{n} - 0\right|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}\right) = 0$$

Poiché

$$\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n} = \frac{x^n}{n}\Big|_{x=1} = \frac{1}{n}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

2.1.2 *Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme*

Come nel caso delle successioni numeriche, esiste un **criterio di Cauchy** per la convergenza uniforme.

TEOREMA 2.1.1. - CRITERIO DI CAUCHY PER LA CONVERGENZA UNIFORME.
Siano $f_n : A\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}&f_n \text{ converge uniformemente su } A \iff\\ &\iff \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n,m\geq N\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A\end{aligned} \tag{2.6}$$

OSSERVAZIONE. Il criterio di Cauchy è un *risultato teorico molto importante*, in quanto permette di mostrare la convergenza uniforme di una successione di funzioni *senza sapere* quale sia il limite come invece è necessario nella definizione di convergenza, in modo analogo a ciò che succede con il criterio di Cauchy per le successioni numeriche.

2.1.3 *Visualizzazione della convergenza uniforme*

Siamo abituati alle successioni numeriche v_n ed eventualmente a studiare il loro andamento in modo grafico, rappresentando sulle ascisse il numero n e sulle ordinate il valore v_n. Nel caso di successioni di funzioni l'argomento è una funzione, quindi per studiarle può essere utile proprio disegnare i grafici degli f_n e come convergono verso f.
Come appare *visivamente* la convergenza uniforme? Possiamo riscrivere la condizione della convergenza uniforme

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\ \forall n\geq N\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A$$

come

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon,\ \forall x\in A \text{ definitivamente} \tag{2.7}$$

In altre parole, f_n deve essere compresa nell'**intorno tubulare** di $f(x)$ definitivamente, nel senso che le f_n devono stare in questo intorno per ogni n sufficientemente grande (cioè $\forall n\geq N$).
[INSERIRE GRAFICO DELLA FUNZIONE IN INTORNO TUBOLARE.]

DEFINIZIONE 2.1.6. - INTORNO TUBULARE.
Un **intorno tubulare** di larghezza ε di una curva è l'unione di tutti i dischi di raggio ε con centro un punto di una curva.

2.1.4 *Generalizzazioni della convergenza uniforme*

Prima di tutto, ricordiamo le definizioni di norma e spazio normato.

Definizione 2.1.7. - Spazio normato e norma.
Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ dove X è un spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ reale o complesso e $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **norma**, cioè tale che $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$.

Osservazione. Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico se consideriamo la **metrica indotta dalla norma**, cioè la funzione data da $d(x, y) := \left\|x - y\right\|$.

Generalizziamo ora la definizione di convergenza uniforme considerando $f_n, f : A \longrightarrow Y$, con A *insieme qualsiasi* e Y uno spazio *normato*; se vogliamo che valga anche il criterio di Cauchy è necessario che Y sia *anche* uno spazio **completo**.

Definizione 2.1.8. - Successione di Cauchy.
Una successione $v_n \in X$ è **di Cauchy** in X se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \; d(v_n, v_m) < \varepsilon \tag{2.8}$$

Definizione 2.1.9. - Spazio completo.
Uno spazio metrico è detto **completo** se tutte le successioni di Cauchy convergono.

Osservazione. Una successione convergente è *sempre* di Cauchy, ma in generale *non tutte* le successioni di Cauchy convergono. L'implicazione opposta è vera solo se lo spazio è completo.

Possiamo ora, date queste nuove ipotesi, riformulare la convergenza uniforme.

Definizione 2.1.10. - Convergenza uniforme.
Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon, \; \forall x \in A \tag{2.9}$$

Digressione. Volendo è possibile generalizzare ulteriormente parlando di convergenza uniforme per funzioni a valori in semplici **spazi metrici** (completi), sostituendo a $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ la condizione $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Nei nostri studi non affronteremo ciò e ci limiteremo a considerare il caso di spazi normati (completi).

2.2 Convergenza puntuale

Durante gli studi di Calcolo delle probabilità e statistica si è parlato di tre tipi di convergenze di successioni di variabili aleatorie: la **convergenza in probabilità**, la **con-**

vergenza quasi certa e la **convergenza in legge** (o in distribuzione). Consideriamo ora quest'ultima, di cui riportiamo la definizione.

Definizione 2.2.1. - Convergenza in legge
Dato $(\Omega, \mathscr{M}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $X_n,\ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variabili aleatorie e le due corrispettive *funzioni di distribuzione*

$$
\begin{aligned}
F_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \le x)\ \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X \le x)\ \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

allora si dice che X_n converge a X **in legge** $\left(X_n \xrightarrow{d} X\right)$ se

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ punto di continuità di } F. \tag{2.10}$$

Quello che abbiamo appena scritta non è altro che il caso applicato agli *studi probabilistici* della **convergenza puntuale** di una successione ad una funzione limite nel punto x.

Definizione 2.2.2. - Convergenza puntuale.
Siano $f_n,\ f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \ge N\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{2.11}$$

Confrontiamo qui $f_n,\ f : A \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. **(CU)** f_n converge a f **uniformemente** su A se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \ge N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A$$
2. **(CP)** f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se
$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \ge N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Il quantificatore esistenziale $\exists$ implica che ciò che esiste dipende da tutto ciò che lo precede: nella convergenza puntuale N non dipende dal solo ε come così capita nella **convergenza uniforme**, ma anche da x. La convergenza uniforme è più restrittiva rispetto alla puntuale.

Osservazione. Questa differenza è concettualmente analoga a quella che c'è fra continuità uniforme e continuità-

Osservazione. Possiamo considerare, $\forall \varepsilon > 0$, due punti x' e x'' su cui valutare la **soglia** N di un successione di funzioni: in questo caso abbiamo per il primo punto $N(\varepsilon,\ x')$ e per il secondo $N(\varepsilon,\ x'')$. Vediamo subito che $\max(N(\varepsilon,\ x'), N(\varepsilon,\ x''))$ è una soglia lecita

sia per x' sia x''.
In generale, se voglio passare dalla convergenza puntuale alla convergenza uniforme devo considerare

$$\sup_{x \in A} N(\varepsilon, x)$$

- Se A è finito, allora $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = \max_{x \in A} N(\varepsilon) = N(\varepsilon)$ e c'è convergenza uniforme.
- Se $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = +\infty$ allora *non* c'è convergenza uniforme.

Dalle definizioni segue immediatamente che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \implies f_n \text{ converge puntualmente a } f \text{ in ogni punto di } A$$

ma in generale vale che la convergenza puntuale **NON** implica la convergenza uniforme.

Esempio. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}$ fissato si ha

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 11 \quad \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se} x \leq 1 \end{cases}$$

Allora x^n converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{se } x = 1 \\ 0 \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

in ogni punto di $(-1, 1]$. **[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]**

Abbiamo provato precedentemente che $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ in ogni intervallo $[-a, a] \subsetneqq (-1, 1)$, $\forall a \in (0, 1)$, ma *non* converge uniformemente a $f = 0$ in $(-1, 1)$.
Questo mostra che su $(-1, 1)$ c'è convergenza puntuale ma non uniforme.

Osservazione. Questo esempio mostra inotlre che la CP *non* è sufficiente in generale per trasferire la continuità alla funzione limite.

2.3 Convergenza uniforme e puntuale nei confronti di limitatezza, continuità e integrabilità

Adesso studiamo il diverso comportamento delle due tipologie di convergenza viste rispetto alle proprietà enunciate nel titolo di questa sezione: se le funzioni f_n della successione sono limitate/continue/integrabili, la funzione limite f è limitata/continua/integrabile?

Proposizione 2.3.1. - Siano $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n limitato su $[a, b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a, b]$.

Allora F è limitate su $[a, b]$.

Bibliografia

[Ram14] S. A. Ramanujan. «Modular equations and approximations to π». In: *Quarterly Journal of Mathematics* XLV (1914), pp. 350–372.

Indice analitico