Elisa Antuca   Massimo Bertolotti

TITOLO TITOLOZZO QUESTO TITOLO È PROVVISORIOZZO

E CI PIACE COSÌ

Manualozzo di Analisi Matematica 3

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\chi(S) = v - e + f$$

$$\pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z}$$

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Note per la lettura

"Un matematico è una macchina per trasformare caffè in teoremi."

Alfréd Rényi, *studioso del teorema di Van Moka-mpen.*

Senza troppe pretese di formalità, com'è intuibile dal termine dal termine tecnico *manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti a quattro mani basati sul corso di *Geometria 2* tenuto dai docenti Alberto Albano, Cinzia Casagrande ed Elena Martinengo nell'Anno Accademico 2020-2021 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.
Il corso è diviso in *cinque* parti, pertanto abbiamo ritenuto opportuno dividere in altrettante parti il testo, seguendo l'ordine delle lezioni: Topologia generale, Omotopia, Classificazione delle superfici topologiche, Approfondimenti di Algebra Lineare e infine Geometria proiettiva. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di *Geometria 1*, *Algebra 1* e *Analisi 1*.
In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate.
Per quanto ci piacerebbe esserlo, non siamo *esseri infallibili*: ci saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiediamo gentilmente di segnalarceli su `https://maxmaci.github.io` per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.
I disegni sono stati realizzati da Massimo Bertolotti, l'addetto alla grafica e ai capricci di LaTeX (ed è molto capriccioso, fidatevi). Chi volesse dilettarsi può cercare di distinguere chi fra i due autori ha scritto cosa, non dovrebbe essere troppo difficile.

Seconda edizione, compilato il 23 settembre 2021.

Indice

I

Passaggio al limite sotto segno di integrale

CAPITOLO 1

Introduzione ad Analisi 3: alla ricerca della lunghezza dell'ellisse

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Una circonferenza e un'*ellisse* a primo acchito possono sembrare molto simili: in fondo, una circonferenza non è altro che un'ellisse i cui punti focali coincidono e dunque si può vedere come una circonferenza "allungata" rispetto ad un asse. Il valore dell'area delimitata da una circonferenza (πr^2) e della lunghezza di una circonferenza ($2\pi r$) sono ben noti già dall'antichità, con opportune formalizzazioni in epoca moderna; tuttavia, riguardo l'ellisse, ci accorgiamo di aver incontrato nel corso degli studi precedenti quasi esclusivamente il valore dell'area delimitata da essa (πab), ma *non la lunghezza dell'ellisse*. Come mai?

1.1 Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse

Partiamo col seguente *quiz*: quale delle seguenti tre espressioni è il valore, o una sua *approssimazione*, della lunghezza di un'ellisse di semiassi di lunghezza a e b?

a) $L(a,b) = \pi ab$

b) $L(a,b) \approx \pi(a+b) + 3\pi \frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}$

c) $L(a,b) \approx 2\pi a$.

Chiaramente, come abbiamo detto nell'introduzione del capitolo la lunghezza dell'ellisse *non* è una formula nota dagli studi passati e possiamo (per ora) solamente escludere la *prima risposta*, in quanto essa è la formula dell'**area** delimitata dell'ellisse.

Osservazione. Possiamo escludere la prima risposta anche per motivi puramente **dimensionali**: a e b sono, dimensionalmente parlando, due lunghezze, quindi πab deve essere una *lunghezza al quadrato*, cioè un'area e non può essere una lunghezza!

In realtà, la domanda del quiz è mal posta: le risposte *b)* e *c)* sono entrambe corrette.
Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan fornì come nota a margine non commentata in un suo articolo del 1914 (Ramanujan, «Modular equations and approximations to π») l'approssimazione *b)*:

$$L(a,b) \approx \pi\left((a+b) + 3\frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}\right)$$

Vedremo fra poco che anche l'approssimazione data dalla *a)* è anch'essa lecita.
Il motivo per cui diamo approssimazioni ma non formule esatte per la lunghezza dell'ellisse è dovuto al fatto che *non esiste* una formula esplicita in termini di *funzioni elementari*, bensì possiamo esprimerla soltanto come **somma di una serie**.

Teorema 1.1.1. - Lunghezza dell'ellisse di semiassi di lunghezza a e b
Siano $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi dell'ellisse e $e = e(a,b) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'**eccentricità**; allora si ha

$$L(a,b) = 2\pi a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2j}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}e^j\right)^2 \tag{1.1}$$

dove !! indica il **doppio fattoriale**:

- $(-1)!! = 0!! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 2 \text{ se } n>0 \text{ è pari} \\ n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \text{ se } n>0 \text{ è dipari} \end{cases}$

Il primo termine della serie fornisce l'approssimazione espressa nella risposta *a)*:

$$L(a,b) \approx 2\pi a$$

1.1.1 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor*

Dimostriamo finalmente la lunghezza dell'ellisse. Come è noto dal corso di Analisi 2, per una curva *regolare* come l'ellisse è possibile calcolarne la lunghezza usando un'opportuna parametrizzazione.
[INSERIRE DISEGNO ELLISSE]
Poniamo $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi ed $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'eccentricità. Una parametrizzazione è

$$\vec{r}(t) = (a\sin t,\ b\cos t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Allora

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a\cos t,\ -b\sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-(a^2+b^2)\sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-e^2\sin^2 t} \end{aligned}$$

C'è un problema: la funzione $f(t) = \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$ non è **elementarmente integrabile**, cioè non ammette primitive in termini di funzioni elementari.

Attenzione! Non essere elementarmente integrabile *non* significa che non sia integrabile! La funzione integranda $f(t)$ è continua su $[0, 2\pi]$, dunque per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* ammette primitive su $[0, 2\pi]$. Una di esse è

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 y dy} \quad \forall y \in [0, 2\pi]$$

Il problema è che *non* possiamo riscrivere F in modo esplicito usando *solo* funzioni elementari.

Questo tipo di integrale è detto **integrale ellittico**.

Digressione. Gli *integrali ellittici* si incontrano in molti ambiti matematici. Ad esempio, appaiono nella risoluzione dell'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice:

$$th\ddot{e}ta = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Sono il motivo per cui tale equazione si studia spesso per piccole oscillazioni, in modo da poter operare una linearizzazione $\sin \theta \sim \theta$ e calcolare il moto senza passare per tali integrali non calcolabili.
Un altro esempio della loro importanza è noto agli appassionati di Geometria: infatti, la branca della Geometria Algebrica nasce anche dagli studi su tali integrali.

Potremmo limitarci a considerare l'intero integrale ellittico come una nuova funzione, ma al più potremmo calcolarne il valore tramite metodi dell'Analisi Numerica. Invece, proviamo a riscrivere l'integrale utilizzando uno **sviluppo in serie** della funzione integranda.
Poniamo $x = -e^2 \sin^2 t$ e osserviamo che

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = (1 + x)^\alpha \quad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}$$

Poichè $(1 + x)^\alpha$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ in un intorno di $x = 0$, si può approssimare localmente col **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in $x = 0$, $\forall n \geq 0$. Se il polinomio in questione è

$$P_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

con $\binom{\alpha}{j}$ il **coefficiente binomiale generalizzato**[1], allora l'approssimazione dell'integranda data dal polinomio di Taylor è proprio

$$(1 + x)^{1/2} \approx \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

Risostituendo $x = -e^2 \sin^2 t$ abbiamo un'approssimazione dell'integranda. Tuttavia, noi vorremmo un *risultato esatto*.
Sappiamo intuitivamente che più termini si hanno nello sviluppo di Taylor, più accurata

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la definizione e le proprietà del binomiale generalizzato.

è l'approssimazione; cosa succede per $n \to \infty$? Dobbiamo studiare la somma di serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j$$

Già ci dobbiamo porre nuove domande: la serie *converge* e per quali valori di x? Supponendo che la serie converga per opportuni valori di x, la serie converge proprio a $(1+x)^{1/2}$? *In generale*, per $f \in \mathscr{C}^\infty$ qualsiasi **NO**, la serie di Taylor non converge proprio e se converge non converge ad f! Tuttavia, in questo caso siamo particolarmente fortunati: $\forall x \in (-1,1)$ la serie converge[2] e vale

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

In questa prima parte della dimostrazione abbiamo capito che è importante determinare quando è possibile passare dalla semplice *approssimazione* di una funzione con il *polinomio di Taylor* a poter riscrivere una funzione come una **serie di Taylor** di funzioni opportune.

1.1.2 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale*

Torniamo al problema originale. Ricordando che $x = -e^2 \sin^2 t$, poiché $t \in [0, 2\pi]$ si ha che $x \in \left[-e^2, 0\right] \subseteq (-1,1)$ dato che $e^2 < 1$. Possiamo riscrivere l'integranda come il suo sviluppo in *serie di Taylor*:

$$\left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} \left(-e^2 \sin^2 t\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Sostituiamo nell'integrale; poiché la funzione è pari e simmetrica, possiamo ricondurci a studiare l'integrale su $[0, \pi/2]$:

$$L = a \int_0^{2\pi} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \, dt \boxed{=}$$

Incontriamo un nuovo problema: cos'è l'**integrale di una serie**? Se avessimo una somma di un numero *finito* di termini per la *linearità* dell'integrale potremmo scambiare la sommatoria con l'integrale, ma è possibile farlo nel caso di una serie?
Riscriviamo l'espressione precedente con la definizione di serie come *limite* per $n \to +\infty$ delle *ridotte*:

$$\boxed{=} \; 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \right) dt$$

Il problema precedente si può riformulare come "*È possibile scambiare integrale e limite?*".
Tale questione è come il problema del **passaggio al limite sotto segno di integrale**.
In generale, la risposta è **NO**: non è possibile scambiare limite e integrale. Ciò nonostante

[2] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di tale convergenza.

anche questa volta siamo particolarmente fortunati e il passaggio è *lecito*[3] e si ha

$$\begin{aligned} L &= 4a \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j \, e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{1/2}{j} (-1)^j \, e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j \, e^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j} t dt \end{aligned}$$

Completando il calcolo dell'integrale[4] si ottiene la formula della lunghezza scritta precedentemente.

1.2 NON BANALI CONSEGUENZE DI UNA DOMANDA BANALE

Abbiamo finalmente raggiunto una *risposta*, seppur assolutamente non banale, alla domanda che ci eravamo posti originalmente: qual è la *lunghezza dell'ellisse*? Nel far ciò ci siamo imbattuti in tutta una serie di problemi: esplicitare integrali non *elementarmente* risolvibili, la *convergenza* di *serie di Taylor* di funzioni ad una funzione specifica, il *passaggio al limite* sotto segno di *integrale*. La teoria matematica che tratteremo a partire dai capitoli successivi *nasce* proprio da questi problemi apparsi nell'*insidiosa ricerca* di una formula della lunghezza dell'ellisse.
In particolare, per capire quando era possibile il passaggio al limite sotto segno di integrale domanda sono stati sviluppati diversi *teoremi*, più o meno vantaggiosi da utilizzare, le cui ipotesi variano sensibilmente fra di loro: alcuni si inseriscono nella già nota *teoria Riemanniana degli integrali*, mentre altri richiedono ipotesi completamente diverse. È da questi innumerevoli approcci al problema che, storicamente parlando, fu tale quesito a dare un *impeto* fondamentale allo sviluppo della **teoria degli integrali di Lebesgue**.

[3] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione che in questo caso il passaggio è lecito.

[4] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare tale calcolo.

Bibliografia

[Ram14] S. A. Ramanujan. «Modular equations and approximations to π». In: *Quarterly Journal of Mathematics* XLV (1914), pp. 350–372.

Indice analitico