Elisa Antuca   Massimo Bertolotti

TITOLO TITOLOZZO QUESTO TITOLO È PROVVISORIOZZO

E CI PIACE COSÌ

Manualozzo di Analisi Matematica 3

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\chi(S) = v - e + f$$

$$\pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z}$$

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Note per la lettura

"Un matematico è una macchina per trasformare caffè in teoremi."

Alfréd Rényi, *studioso del teorema di Van Moka-mpen.*

Senza troppe pretese di formalità, com'è intuibile dal termine dal termine tecnico *manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti a quattro mani basati sul corso di *Geometria 2* tenuto dai docenti Alberto Albano, Cinzia Casagrande ed Elena Martinengo nell'Anno Accademico 2020-2021 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.
Il corso è diviso in *cinque* parti, pertanto abbiamo ritenuto opportuno dividere in altrettante parti il testo, seguendo l'ordine delle lezioni: Topologia generale, Omotopia, Classificazione delle superfici topologiche, Approfondimenti di Algebra Lineare e infine Geometria proiettiva. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di *Geometria 1*, *Algebra 1* e *Analisi 1*.
In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate.
Per quanto ci piacerebbe esserlo, non siamo *esseri infallibili*: ci saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiediamo gentilmente di segnalarceli su `https://maxmaci.github.io` per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.
I disegni sono stati realizzati da Massimo Bertolotti, l'addetto alla grafica e ai capricci di LaTeX (ed è molto capriccioso, fidatevi). Chi volesse dilettarsi può cercare di distinguere chi fra i due autori ha scritto cosa, non dovrebbe essere troppo difficile.

Seconda edizione, compilato il 3 ottobre 2021.

Indice

Indice ii

I Introduzione ad Analisi Matematica 3 1

1 Alla ricerca della lunghezza dell'ellisse 3
1.1 Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse 3
1.1.1 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor 4
1.1.2 La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale 6
1.2 Non banali conseguenze di una domanda banale 7

II Convergenza di funzioni 9

2 Convergenza di funzioni 11
2.1 Convergenza uniforme di funzioni 11
2.1.1 Eserciziamoci! Convergenza uniforme 14
2.1.2 Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme 15
2.1.3 Visualizzazione della convergenza uniforme 15
2.1.4 Generalizzazioni della convergenza uniforme 15
2.2 Convergenza puntuale 16
2.3 Convergenza uniforme e puntuale nei confronti di limitatezza, continuità, integrabilità e differenziabilità 18
2.3.1 Limitatezza 18
2.3.2 Continuità 20
2.3.3 Integrabilità e passaggio al limite sotto segno di integrale 20
2.3.4 Derivabilità 23

3 Serie di funzioni 29
3.1 Serie in uno spazio normato 29
3.2 Serie di funzioni 32
3.3 Serie di funzioni nei confronti di limitatezza, continuità, integrabilità e differenziabilità 33
3.3.1 Limitatezza 33
3.3.2 Continuità 33
3.3.3 Integrabilità e scambio tra integrale e serie 34

Bibliografia 35

Indice analitico 37

I

Introduzione ad Analisi Matematica 3

CAPITOLO 1

Alla ricerca della lunghezza dell'ellisse

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Una circonferenza e un'*ellisse* a primo acchito possono sembrare molto simili: in fondo, una circonferenza non è altro che un'ellisse i cui punti focali coincidono e dunque l'ellisse si può vedere come una circonferenza "allungata" rispetto ad un asse. Il valore dell'area delimitata da una circonferenza (πr^2) e la lunghezza di una circonferenza ($2\pi r$) sono ben noti già dall'antichità, i cui calcoli sono stati opportunamente formalizzati in epoca moderna; tuttavia, riguardo l'ellisse, ci accorgiamo di aver incontrato nel corso degli studi precedenti quasi esclusivamente il valore dell'area delimitata da essa (πab), ma *non la lunghezza dell'ellisse*. Come mai?

1.1 Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse

Partiamo col seguente *quiz*: quale delle seguenti tre espressioni è il valore, o una sua *approssimazione*, della lunghezza di un'ellisse di semiassi di lunghezza a e b?

a) $L(a,b) = \pi ab$

b) $L(a,b) \approx \pi(a+b) + 3\pi \frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}$

c) $L(a,b) \approx 2\pi a$.

Chiaramente, come abbiamo detto nell'introduzione del capitolo, la lunghezza dell'ellisse *non* è una formula nota dagli studi passati e possiamo (per ora) solamente escludere la *prima risposta*, in quanto essa è il valore dell'**area** delimitata dell'ellisse.

> **Osservazione.** Possiamo escludere la prima risposta anche per motivi puramente **dimensionali**: a e b sono, dimensionalmente parlando, due lunghezze, quindi πab deve essere una *lunghezza al quadrato*, cioè un'area e non può essere una lunghezza!

In realtà, la domanda del quiz è mal posta: le risposte *b)* e *c)* sono entrambe corrette.
Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan fornì come nota a margine non commentata in un suo articolo del 1914 (Ramanujan, «Modular equations and approximations to π») l'approssimazione *b)*:

$$L(a,b) \approx \pi\left((a+b) + 3\frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}\right)$$

Vedremo fra poco che anche l'approssimazione data dalla *a)* è anch'essa lecita.
Il motivo per cui diamo approssimazioni ma non formule esatte per la lunghezza dell'ellisse è dovuto al fatto che *non esiste* una formula esplicita in termini di *funzioni elementari*, bensì possiamo esprimerla soltanto come **somma di una serie**.

Teorema 1.1.1. - Lunghezza dell'ellisse di semiassi di lunghezza a e b
Siano $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi dell'ellisse e $e = e(a,b) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'**eccentricità**; allora si ha

$$L(a,b) = 2\pi a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2j}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}e^j\right)^2 \tag{1.1}$$

dove !! indica il **doppio fattoriale**:

- $(-1)!! = 0!! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 2 \text{ se } n>0 \text{ è pari} \\ n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \text{ se } n>0 \text{ è dipari} \end{cases}$

Il primo termine della serie fornisce l'approssimazione espressa nella risposta *a)*:

$$L(a,b) \approx 2\pi a$$

1.1.1 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor*

Dimostriamo finalmente la lunghezza dell'ellisse. Come è noto dal corso di Analisi 2, per una curva *regolare* come l'ellisse è possibile calcolarne la lunghezza usando un'opportuna parametrizzazione.
[INSERIRE DISEGNO ELLISSE]
Poniamo $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi ed $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'eccentricità. Una parametrizzazione è

$$\vec{r}(t) = (a\sin t,\ b\cos t) \quad t \in [0,2\pi]$$

Allora

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a\cos t,\ -b\sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-(a^2+b^2)\sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-e^2\sin^2 t} \end{aligned}$$

C'è un problema: la funzione $f(t) = \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$ non è **elementarmente integrabile**, cioè non ammette primitive in termini di funzioni elementari.

Attenzione! Non essere elementarmente integrabile *non* significa che non sia integrabile! La funzione integranda $f(t)$ è continua su $[0,2\pi]$, dunque per il *teorema fondamentale* *del calcolo integrale* ammette primitive su $[0, 2\pi]$. Una di esse è

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 y} dy \quad \forall y \in [0, 2\pi]$$

Il problema è che *non* possiamo riscrivere F in modo esplicito usando *solo* funzioni elementari.

Questo tipo di integrale è detto **integrale ellittico**.

DIGRESSIONE. Gli *integrali ellittici* si incontrano in molti ambiti matematici. Ad esempio, appaiono nella risoluzione dell'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

Sono il motivo per cui tale equazione si studia spesso per piccole oscillazioni, in modo da poter operare una linearizzazione $\sin\theta \sim \theta$ e calcolare il moto senza passare per tali integrali non calcolabili.
Un altro esempio della loro importanza è noto agli appassionati di GEOMETRIA: infatti, la branca della Geometria Algebrica nasce anche dagli studi su tali integrali.

Potremmo limitarci a considerare l'intero integrale ellittico come una nuova funzione, ma al più potremmo calcolarne il valore tramite metodi dell'ANALISI NUMERICA. Invece, proviamo a riscrivere l'integrale utilizzando uno **sviluppo in serie** della funzione integranda.
Poniamo $x = -e^2 \sin^2 t$ e osserviamo che

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = (1 + x)^{\alpha} \quad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}$$

Poichè $(1 + x)^{\alpha}$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^{\infty}$ in un intorno di $x = 0$, si può approssimare localmente col **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in $x = 0$, $\forall n \geq 0$. Se il polinomio in questione è

$$P_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

con $\binom{\alpha}{j}$ il **coefficiente binomiale generalizzato**[1], allora l'approssimazione dell'integranda data dal polinomio di Taylor è proprio

$$(1 + x)^{1/2} \approx \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

Risostituendo $x = -e^2 \sin^2 t$ abbiamo un'approssimazione dell'integranda. Tuttavia, noi vorremmo un *risultato esatto*.
Sappiamo intuitivamente che più termini si hanno nello sviluppo di Taylor, più accurata è l'approssimazione; cosa succede per $n \to \infty$? Dobbiamo studiare la somma di serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j$$

[1]Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la definizione e le proprietà del binomiale generalizzato.

Già ci dobbiamo porre nuove domande: la serie *converge* e per quali valori di x? Supponendo che la serie converga per opportuni valori di x, la serie converge proprio a $(1+x)^{1/2}$? *In generale*, per $f \in \mathscr{C}^\infty$ qualsiasi **NO**, la serie di Taylor non converge proprio e se converge non converge ad f! Tuttavia, in questo caso siamo particolarmente fortunati: $\forall x \in (-1,1)$ la serie converge[2] e vale

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

In questa prima parte della dimostrazione abbiamo capito che è importante determinare quando è possibile passare dalla semplice *approssimazione* di una funzione con il *polinomio di Taylor* a poter riscrivere una funzione come una **serie di Taylor** di funzioni opportune.

1.1.2 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale*

Torniamo al problema originale. Ricordando che $x = -e^2 \sin^2 t$, poiché $t \in [0, 2\pi]$ si ha che $x \in \left[-e^2, 0\right] \subseteq (-1,1)$ dato che $e^2 < 1$. Possiamo riscrivere l'integranda come il suo sviluppo in *serie di Taylor*:

$$\left(1-e^2\sin^2 t\right)^{1/2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} \left(-e^2 \sin^2 t\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Sostituiamo nell'integrale; poiché la funzione è pari e simmetrica, possiamo ricondurci a studiare l'integrale su $[0, \pi/2]$:

$$L = a\int_0^{2\pi} \left(1-e^2\sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-e^2\sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t\, dt \boxed{=}$$

Incontriamo un nuovo problema: cos'è l'**integrale di una serie**? Se avessimo una somma di un numero *finito* di termini per la *linearità* dell'integrale potremmo scambiare la sommatoria con l'integrale, ma è possibile farlo nel caso di una serie?
Riscriviamo l'espressione precedente con la definizione di serie come *limite* per $n \to +\infty$ delle *ridotte*:

$$\boxed{=}\ 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \right) dt$$

Il problema precedente si può riformulare come "*È possibile scambiare integrale e limite?*".
Tale questione è come il problema del **passaggio al limite sotto segno di integrale**.
In generale, la risposta è **NO**: non è possibile scambiare limite e integrale. Ciò nonostante

[2] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di tale convergenza.

anche questa volta siamo particolarmente fortunati e il passaggio è *lecito*[3] e si ha

$$
\begin{aligned}
L &= 4a \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j \, e^{2j} \sin^{2j} t dt \\
&= 4a \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{1/2}{j} (-1)^j \, e^{2j} \sin^{2j} t dt \\
&= 4a \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j \, e^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j} t dt
\end{aligned}
$$

Completando il calcolo dell'integrale[4] si ottiene la formula della lunghezza scritta precedentemente.

1.2 NON BANALI CONSEGUENZE DI UNA DOMANDA BANALE

Abbiamo finalmente raggiunto una *risposta*, seppur assolutamente non banale, alla domanda che ci eravamo posti originalmente: qual è la *lunghezza dell'ellisse*? Nel far ciò ci siamo imbattuti in tutta una serie di problemi: esplicitare integrali non *elementarmente* risolvibili, la *convergenza* di *serie di Taylor* di funzioni ad una funzione specifica, il *passaggio al limite* sotto segno di *integrale*. La teoria matematica che tratteremo a partire dai capitoli successivi *nasce* proprio da questi problemi apparsi nell'*insidiosa ricerca* di una formula della lunghezza dell'ellisse.
In particolare, per capire quando era possibile il passaggio al limite sotto segno di integrale sono stati sviluppati diversi *teoremi*, più o meno vantaggiosi da utilizzare, le cui ipotesi variano sensibilmente fra di loro: alcuni si inseriscono nella già nota *teoria Riemanniana degli integrali*, mentre altri richiedono ipotesi completamente diverse. È da questi innumerevoli approcci al problema che, storicamente parlando, fu tale quesito a dare un *impeto* fondamentale allo sviluppo della **teoria degli integrali di Lebesgue**.

[3]Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione che in questo caso il passaggio è lecito.

[4]Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare tale calcolo.

II

Convergenza di funzioni

CAPITOLO 2

Convergenza di funzioni

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Le **[COMPLETARE]**

2.1 Convergenza uniforme di funzioni

Per poter trattare i problemi enunciati nel Capitolo 1 a pagina 3 dobbiamo parlare di convergenza di funzioni. Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di distanza, spazio metrico e convergenza.

Definizione 2.1.1. - Spazio metrico e distanza.
Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **distanza**, cioè tale che $\forall x, y, z \in X$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definizione 2.1.2. - Convergenza.
Una successione $v_n \in X$ **converge** in X a $v \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; d(v_n, v) < \varepsilon \tag{2.1}$$

Un *caso particolare* di spazio metrico è lo spazio $X = \mathscr{C}([a,b]; \mathbb{R})$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la **metrica lagrangiana**:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \tag{2.2}$$

Osservazione. La distanza è ben definita perché la funzione $|f(x) - g(x)|$, essendo definita su $[a, b]$ compatto, ammette massimo per il teorema di Weierstrass.

Definizione 2.1.3. - Convergenza nella metrica lagrangiana.
Siano $f_n, f \in X$. f_n converge a f in X se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Questa relazione si può riscrivere come

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \; \forall x \in [a, b]$$

Osservazione. La condizione, riscritta in questo modo, non solo *non necessita* più dell'esistenza del *massimo*, ma non è neanche necessario che l'intervallo sia *compatto* o che la funzione sia *continua*: questa è in realtà una relazione *più generale* rispetto alla semplice convergenza nella metrica lagrangiana!

Definizione 2.1.4. - Convergenza uniforme.
Siano $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq R$ qualsiasi. Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \; \forall x \in A \tag{2.4}$$

Definizione 2.1.5. - Funzione limite.
Se f_n converge uniformemente a f su A, f si dice **funzione limite**.

Osservazione. Segue immediatamente dalla definizione che se f_n converge uniformemente a f su A, allora $\forall B \subseteq A$ si ha che f_n converge uniformemente a f su B.

Attenzione! È estremamente importante dire **dove** converge f_n: infatti, una stessa successione può convergere uniformemente su A, ma allo stesso tempo *non convergere* uniformemente in un altro insieme B. Vedremo un esempio fondamentale a riguardo successivamente.

Ora passiamo da questa definizione ad una formulazione equivalente *operativa*. Essa è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Possiamo definire una successione $c_n := \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}^+$. Allora la relazione sopra, per definizione di limite di una successione, è equivalente a $\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$, cioè

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

In conclusione abbiamo mostrato che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \iff \lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \tag{2.5}$$

Esempio. Proviamo che $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformemente a $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}$.
Dobbiamo provare che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

1. Calcoliamo il sup con n *fissato*:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right)$$

   Per trovarlo tracciamo il grafico di $\varphi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$ e cerchiamo il suo estremo superiore. Per parità della funzione ci basta fare le nostre considerazioni su $(0, +\infty)$ per poi disegnare il resto del grafico grazie alla simmetria assiale rispetto all'asse y; studiando opportunamente la derivata si ottiene il seguente grafico.
   [INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]
   Segue chiaramente che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi_n(x) = \varphi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Calcoliamo il limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Abbiamo così verificato la convergenza richiesta.

Esempio.
Consideriamo $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$. Allora:

1. x^n converge uniformemente a 0 su *ogni* insieme $[-a, a]$, $\forall a \colon 0 < a < 1$.
2. x^n **non** converge uniformemente a 0 su $(-1, 1)$.

Dimostrazione.

1. Sia $a \in (0,1)$ fissato e consideriamo

$$|x^n - 0| = |x^n| \implies \sup_{x \in [-a,a]} |x^n - 0| = \sup_{x \in [-a,a]} |x^n|$$

Qual è il grafico di x^n?

- Se n **pari**, è visivamente simile a quello di x^2:
[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]

- Se n **dispari**, è visivamente simile a quello di x^3:
[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]

Tuttavia per $|x^n|$, $\forall n \geq 2$, che è una funzione pari, il grafico è visivamente simile a quello di x^2:
[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]
Segue immediatamente che

$$\sup_{x \in [-a,a]} |x^n| = a^n, \ \forall a \colon 0 < a < 1$$

Ora si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in [-a,a]} |x^n| \right) = \lim_{n \to +\infty} a^n = 0$$

perché $a \in (0,1)$ e quindi a^n è una successione geometrica convergente e pertanto il limite a $+\infty$ è sempre necessariamente 0.

2. In questo caso

$$\sup_{x \in (-1,1)} |x^n| = 1, \ \forall n$$

da cui

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in (-1,1)} |x^n| \right) = 1 \neq 0$$

pertanto *non* c'è convergenza uniforme su $(-1,1)$.

□

2.1.1 *Eserciziamoci! Convergenza uniforme*

Esercizio. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente a 0 su $[0,1]$?

Soluzione. Dimostriamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} \right) = 0$$

Poiché

$$\sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} = \frac{x^n}{n} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n}$$

allora
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

2.1.2 *Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme*

Come nel caso delle successioni numeriche, esiste un **criterio di Cauchy** per la convergenza uniforme.

Teorema 2.1.1. - Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$f_n \text{ converge uniformemente su } A \iff \iff \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n,m\geq N\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A \tag{2.6}$$

Osservazione. Il criterio di Cauchy è un *risultato teorico molto importante*, in quanto permette di mostrare la convergenza uniforme di una successione di funzioni *senza sapere* quale sia il limite come invece è necessario nella definizione di convergenza, in modo analogo a ciò che succede con il criterio di Cauchy per le successioni numeriche.

2.1.3 *Visualizzazione della convergenza uniforme*

Siamo abituati alle successioni numeriche v_n ed eventualmente a studiare il loro andamento in modo grafico, rappresentando sulle ascisse il numero n e sulle ordinate il valore v_n. Nel caso di successioni di funzioni l'argomento è una funzione, quindi per studiarle può essere utile proprio disegnare i grafici degli f_n e come convergono verso f.
Come appare *visivamente* la convergenza uniforme? Possiamo riscrivere la condizione della convergenza uniforme

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\ \forall n\geq N\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A$$

come
$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon,\ \forall x\in A \text{ definitivamente} \tag{2.7}$$

In altre parole, f_n deve essere compresa nell'**intorno tubulare** di $f(x)$ definitivamente, nel senso che le f_n devono stare in questo intorno per ogni n sufficientemente grande (cioè $\forall n\geq N$).
[INSERIRE GRAFICO DELLA FUNZIONE IN INTORNO TUBOLARE.]

Definizione 2.1.6. - Intorno tubulare.
Un **intorno tubulare** di larghezza ε di una curva è l'unione di tutti i dischi di raggio ε con centro un punto di una curva.

2.1.4 *Generalizzazioni della convergenza uniforme*

Prima di tutto, ricordiamo le definizioni di norma e spazio normato.

Definizione 2.1.7. - Spazio normato e norma.
Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ dove X è un spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ reale o complesso e $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **norma**, cioè tale che $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Osservazione. Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico se consideriamo la **metrica indotta dalla norma**, cioè la funzione data da $d(x, y) := \|x - y\|$.

Generalizziamo ora la definizione di convergenza uniforme considerando $f_n, f : A \longrightarrow Y$, con A *insieme qualsiasi* e Y uno spazio *normato*; se vogliamo che valga anche il criterio di Cauchy è necessario che Y sia *anche* uno spazio **completo**.

Definizione 2.1.8. - Successione di Cauchy.
Una successione $v_n \in X$ è **di Cauchy** in X se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \; d(v_n, v_m) < \varepsilon \tag{2.8}$$

Definizione 2.1.9. - Spazio completo.
Uno spazio metrico è detto **completo** se tutte le successioni di Cauchy convergono.

Osservazione. Una successione convergente è *sempre* di Cauchy, ma in generale *non tutte* le successioni di Cauchy convergono. L'implicazione opposta è vera solo se lo spazio è completo.

Possiamo ora, date queste nuove ipotesi, riformulare la convergenza uniforme.

Definizione 2.1.10. - Convergenza uniforme.
Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \; \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon, \; \forall x \in A \tag{2.9}$$

Digressione. Volendo è possibile generalizzare ulteriormente parlando di convergenza uniforme per funzioni a valori in semplici **spazi metrici** (completi), sostituendo a $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ la condizione $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Nei nostri studi non affronteremo ciò e ci limiteremo a considerare il caso di spazi normati (completi).

2.2 Convergenza puntuale

Durante gli studi di Calcolo delle probabilità e statistica si è parlato di tre tipi di convergenze di successioni di variabili aleatorie: la **convergenza in probabilità**, la **con-**

vergenza quasi certa e la **convergenza in legge** (o in distribuzione). Consideriamo ora quest'ultima, di cui riportiamo la definizione.

DEFINIZIONE 2.2.1. - CONVERGENZA IN LEGGE
Dato $(\Omega, \mathscr{M}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variabili aleatorie e le due corrispettive *funzioni di distribuzione*

$$\begin{aligned} F_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

allora si dice che X_n converge a X **in legge** $\left(X_n \xrightarrow{d} X\right)$ se

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ punto di continuità di } F. \tag{2.10}$$

Quello che abbiamo appena scritta non è altro che il caso applicato agli *studi probabilistici* della **convergenza puntuale** di una successione ad una funzione limite nel punto x.

DEFINIZIONE 2.2.2. - CONVERGENZA PUNTUALE.
Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{2.11}$$

Confrontiamo qui $f_n, f : A \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. **(CU)** f_n converge a f **uniformemente** su A se
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A$$
2. **(CP)** f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se
$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Il quantificatore esistenziale $\exists$ implica che ciò che esiste dipende da tutto ciò che lo precede: nella convergenza puntuale N non dipende dal solo ε come così capita nella **convergenza uniforme**, ma anche da x. La convergenza uniforme è più restrittiva rispetto alla puntuale.

OSSERVAZIONE. Questa differenza è concettualmente analoga a quella che c'è fra continuità uniforme e continuità-

OSSERVAZIONE. Possiamo considerare $\forall \varepsilon > 0$ due punti x' e x'' su cui valutare la **soglia** N di un successione di funzioni: in questo caso abbiamo per il primo punto $N(\varepsilon, x')$ e per il secondo $N(\varepsilon, x'')$. Vediamo subito che $\max(N(\varepsilon, x'), N(\varepsilon, x''))$ è una soglia lecita

sia per x' sia x''.
In generale, se voglio passare dalla convergenza puntuale alla convergenza uniforme devo considerare

$$\sup_{x\in A} N(\varepsilon, x)$$

- Se A è finito, allora $\sup_{x\in A} N(\varepsilon) = \max_{x\in A} N(\varepsilon) = N(\varepsilon)$ e c'è convergenza uniforme.
- Se $\sup_{x\in A} N(\varepsilon) = +\infty$ allora *non* c'è convergenza uniforme.

Dalle definizioni segue immediatamente che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \implies$$
$$\implies f_n \text{ converge puntualmente a } f \text{ in ogni punto di } A \quad (2.12)$$

ma in generale vale che la convergenza puntuale **NON** implica la convergenza uniforme.

Esempio. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}$ fissato si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Allora x^n converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

in ogni punto di $(-1, 1]$.
[INSERIRE GRAFICO FUNZIONE]

Abbiamo provato precedentemente che $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ in ogni intervallo $[-a, a] \subsetneqq (-1, 1)$, $\forall a \in (0, 1)$, ma *non* converge uniformemente a $f = 0$ in $(-1, 1)$.
Questo mostra che su $(-1, 1)$ c'è convergenza puntuale ma non uniforme.

Osservazione. Questo esempio mostra inoltre che la CP *non* è sufficiente in generale per trasferire la continuità alla funzione limite.

2.3 Convergenza uniforme e puntuale nei confronti di limitatezza, continuità, integrabilità e differenziabilità

Adesso studiamo il diverso comportamento delle due tipologie di convergenza viste rispetto alle proprietà enunciate nel titolo di questa sezione: se le funzioni f_n della successione sono limitate/continue/integrabili/differenziabile, la funzione limite f è limitata/continua/integrabile/differenziabile?

2.3.1 *Limitatezza*

TEOREMA 2.3.1. - TEOREMA DI LIMITATEZZA PER SUCCESSIONI.
Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n limitata su $[a,b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora f è limitata su $[a,b]$.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo provare che

$$\exists n > 0 \colon |f(x)| \leq n, \ \forall x \in A$$

Per l'ipotesi 2) sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A$$

Posto ad esempio[a] $\varepsilon = 2$, consideriamo la soglia $N_2 = N(2)$ e $n = N_2$. Allora la relazione precedente risulta

$$\left|f_{N_2}(x) - f(x)\right| < 2, \ \forall x \in A$$

Consideriamo $f_{N_2}(x)$: per l'ipotesi 1) è limitata, cioè

$$\exists n_2 > 0 \colon \left|f_{N_2}(x)\right| \leq n, \ \forall x \in A$$

Per ogni $x \in A$ si ha quindi

$$|f(x)| = \left|f(x) + f_{N_2}(x) - f_{N_2}(x)\right| \leq \left|f(x) - f_{N_2}(x)\right| + \left|f_{N_2}(x)\right| \leq 2 + n_2 = n, \ \forall x \in A$$

□

[a] La scelta di ε è assolutamente arbitraria.

DIGRESSIONE. Il risultato si generalizza ponendo $f_n, f : X \longrightarrow Y$, dove X è un qualunque insieme e Y è uno spazio normato.

La convergenza puntuale non è sufficiente per trasferire la limitatezza alla funzione limite: infatti, possiamo costruire un controesempio di una successione f_n limitata che converge puntualmente ad una funzione non limitata.

ESEMPIO. Sia $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\forall x \in (0,1]$.
Un grafico qualitativo di f_n è rappresentato in figura.
INSERIRE GRAFICO QUI
Per ogni $n \geq 1$ la funzione f_n è limitata su $(0,1]$. Inoltre, $\forall x \in (0,1]$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Infatti, fissato $x \in (0,1]$, indicando con le parentesi quadre la *parte intera* e posto

$$n_x = \left[\frac{1}{x}\right] + 1$$

allora se $n \geq n_x$ si ha $x > 1/n$ e dunque

$$f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Si ha dunque

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

La successione di funzioni *limitate* f_n converge quindi puntualmente $\forall x \in (0,1]$ alla funzione $\frac{1}{x}$ che **non** è limitata su $(0,1]$.

2.3.2 *Continuità*

Teorema 2.3.2. - Teorema di continuità per successioni.
Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n continua su $[a,b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora f è continua su $[a,b]$.

Dimostrazione. ULTIMA PARTE DIMOSTRAZIONE CHE LO SPAZIO LAGRANGIANO E COMPLETO □

Digressione. Il risultato si generalizza ponendo $f_n, f : X \longrightarrow Y$, dove X è un qualunque insieme e Y è uno spazio normato.

La convergenza puntuale non è sufficiente per trasferire la continuità alla funzione limite: infatti, possiamo costruire un controesempio di una successione f_n continua che converge puntualmente ad una funzione non continua.

Esempio. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$, sull'intervallo $[0,1]$. Sappiamo che essa converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq x < 1 \\ 1 < & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

La successione di funzioni *continue* f_n converge quindi puntualmente per ogni $x \in [0,1]$ alla funzione f che **non** è continua su $[0,1]$.

2.3.3 *Integrabilità e passaggio al limite sotto segno di integrale*

Teorema 2.3.3. - Teorema di integrabilità per successioni, passaggio al limite sotto segno di integrale.
Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. $f_n \in \mathscr{R}[a,b]$, $\forall n \geq 1$.

2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora

1. $f \in \mathcal{R}[a,b]$.
2. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x) = \int_a^b lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.13}$$

Vedremo la dimostrazione di una versione più generica del teorema quando parleremo degli integrali di Lebesgue.
Per quanto questo teorema ha una notevole importanza, ha un campo d'azione particolarmente limitato. Infatti, anche cambiando leggermente le ipotesi non è più possibile affermare la tesi. Vediamo alcuni di questi controesempi.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è sufficiente per trasferire alla funzione limite l'integrabilità su un intervallo *illimitato*.
Consideriamo la successione di funzioni $f_n : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+x^2},\ \forall x \geq 1, n \geq 1$$

Per ogni $x \geq 1$ osserviamo che $f_n(x) \sim \frac{n}{nx}$ per $n \to +\infty$, quindi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{nx} = \frac{1}{x}$$

Si ha quindi convergenza puntuale in ogni punto di $[1,+\infty)$ alla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Inoltre, la convergenza è uniforme su $[1,+\infty)$: vale infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{nx+x^2} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{n+x}$$

per ogni $x \geq 1$, $n \geq 1$. Per *monotonia*, si ha quindi

$$\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 1}\frac{1}{n+x} = \frac{1}{n+1},\ \forall n \geq 1$$

Deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

da cui segue la convergenza uniforme su $[1,+\infty)$. Osserviamo ora che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^2},\ x \to +\infty$$

e dunque f_n è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$, per ogni $n \geq 1$; la funzione limite $f(x) = \frac{1}{x}$ *non* è invece integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$.
La successione di funzioni f_n *integrabili* su $[1,+\infty)$ converge quindi uniformemente su $[1,+\infty)$ alla funzione f che **non** è integrabile su $[1,+\infty)$.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione necessaria per il passaggio al limite sotto segno di integrale.
Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Invece, sappiamo che x^n converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq x < 1 \\ 1 < & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

dunque su $[0,1]$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è una funzione *identicamente nulla* tranne un *numero finito* di punti (in questo caso, uno soltanto). Allora

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x^n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

x^n non converge uniformemente su $[[0,1]$, ma il passaggio al limite sotto segno di integrale si verifica comunque.

Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Invece, sappiamo che x^n converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq x < 1 \\ 1 < & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

dunque su $[0,1]$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è una funzione *identicamente nulla* tranne un *numero finito* di punti (in questo caso, uno soltanto). Allora

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x^n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

x^n non converge uniformemente su $[[0,1]$, ma il passaggio al limite sotto segno di integrale si verifica comunque.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale nel caso in un intervallo *illimitato*. Sia $f_n : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \geq x \geq 2n \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < n \vee x > 2n \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^n 0dx + \int_n^{2n}\frac{1}{n}dx + \int_{2n}^{+\infty}0dx\right] = \lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n}\frac{1}{n}dx =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x}{n}\right]_n^{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n--n}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Invece, si vede immediatamente che

$$\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$$

Vediamo che f_n converge uniformemente su $[0,+\infty)$ a 0:

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,+\infty)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Anche aggiungendo al teorema l'ipotesi che $f(x)$ sia Riemann-integrabile (in questo caso ciò è verificato), il passaggio al limite sotto segno di integrale *non* si verifica *necessariamente* se l'intervallo è illimitato.

ESEMPIO. La convergenza puntuale *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, nemmeno nel caso di un intervallo limitato. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = nx\left(1-x^2\right)^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx = -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n(-2x)\left(1-x^2\right)^n =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{1}{n+1}\left(1-x^2\right)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Invece, osserviamo che, fissato x rispetto alla n $nx\left(1-x^2\right)^n = x\frac{\left(1-x^2\right)^n}{\frac{1}{n}}$ si può vedere come il rapporto di un esponenziale di ragione (in modulo) minore di 1 con il reciproco di un termine lineare, dunque per $n \to +\infty$ l'esponenziale tende a 0 molto più velocemente di $\frac{1}{n}$: segue che

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} nx\left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^1 0dx = 0$$

Per lo stesso ragionamento si vede che $f_n(x)$ converge puntualmente a 0 per ogni punto di $[0,1]$, ma *non* si verifica il passaggio al limite sotto segno di integrale.

2.3.4 *Derivabilità*

Date $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con f la funzione limite di f_n su A, possiamo porci due domande:

1. f_n derivabile su $A \implies f$ derivabile su A?
2. Vale lo scambio tra derivata e limite?

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = D\left(\lim_{n\to+\infty} f(x)\right)$$

O, in altre parole, il diagramma seguente è commutativo?

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\lim"'] & f_n' \arrow[d, "\lim"] \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \arrow[r, "D"'] & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n' \end{tikzcd}$$

La risposta ad entrambe domande, a differenza di quanto ci si potrebbe aspettare dati i risultati su limitatezza/continuità/integrabilità, è **NO**, anche nel caso di *convergenza uniforme*.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per trasferire alla funzione limite la derivabilità.
Consideriamo la successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

- f_n è derivabile.
- f_n abbiamo visto[a] converge uniformemente su $\mathbb{R}$ a $f(x) = |x|$ che *non* è derivabile in $x = 0$.

[a] Si veda pag. 13, sezione 2.1.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per poter scambiare limite e derivata, anche se si aggiunge l'ipotesi che la funzione limite sia derivabile.
Consideriamo la successione $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

- f_n è derivabile su $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, e vale

$$f'(x) = \sqrt{n}\cos(nx),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1$$

- ◇ f_n converge **puntualmente** a $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{limitato}} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

  ◇ f_n converge **uniformemente** a $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right|\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

  Osserviamo che in entrambi i casi $f(x) = 0$ su $\mathbb{R}$: questa funzione è chiaramente derivabile e vale

$$D\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = D(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

  D'altro canto, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\cos(nx)$$

Ad esempio, per $x = 0$ troveremmo

$$\lim_{n\to+\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Quindi non si può per $x = 0$ scambiare limite e derivata-

Esiste comunque un legame tra *successioni di funzioni*, *derivabilità* e convergenza uniforme; scopriamo che non è più la successione f_n a convergere uniformemente, bensì sono le derivate f' della successioni a doverlo fare.

Teorema 2.3.4. - Teorema di derivabilità per successioni.
Siano dati $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

1. f_n derivabili su (a,b).
2. $\exists c \in (a,b) : f_n(c)$ converge puntualmente.
3. f_n' converge uniformemente a g su (a,b).

Allora

1. $\exists\ f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che f_n converge uniformemente a f su (a,b).
2. f è derivabile.
3. $f'(x) = g(x),\ \forall x \in (a,b)$, ossia

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x),\ \forall x \in (a,b) \tag{2.14}$$

Per dimostrare il teorema, faremo uso di tre strumenti: il *criterio di Cauchy per la convergenza uniforme* (teorema 2.1.1, pag. 15), il *teorema di scambio di limiti* e una conseguenza *teorema di Lagrange*. Enunciamo questi ultimi due.

Teorema 2.3.5. - Teorema di scambio di limiti.
Dati $g_n, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e c punto di accumulazione di I, se

1. g_n converge *uniformemente* a g su I
2. Per ogni $n \geq 1$ esiste $L_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to c} g_n(x) = L_n$$

Allora:

1. Esistono finiti

$$\lim_{x\to c} g(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} L_n \tag{2.15}$$

2. Vale la relazione

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{n\to+\infty} L_n \tag{2.16}$$

ossia

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to c} g_n(x) \tag{2.17}$$

Corollario 2.3.1. - Conseguenza al teorema di Lagrange.

Sia $h : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (α, β). Allora:

$$\forall u, v \in (\alpha, \beta) : |h(u) - h(v)| \leq \left(\sup_{x \in (\alpha, \beta)} \left| h'(x) \right| \right) |u - v| \tag{2.18}$$

Dimostrazione. (del Teorema di derivabilità per successioni.)

1. Dimostriamo la *convergenza uniforme* di f_n su (a, b). Per il Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme è sufficiente dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \, \sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $x \in (a, b)$, preso c come da ipotesi 2):

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_n(c) - f_m(c)|$$

Studiamo il *primo addendo*. Per il *corollario al teorema di Lagrange* si ha

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| \leq \left(\sup_{t \in (a,b)} |x - c| \right)$$

Inoltre, poiché per ipotesi 3) f_n' converge uniformemente su (a, b), si ha per il criterio di Cauchy che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_1 \, \sup_{x \in (a,b)} \left| f_n'(x) - f_m'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Segue dunque che

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| &\leq \left(\sup_{t \in (a,b)} |x - c| \right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - c| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in (a, b), \ \forall n, m \geq N_1 \end{aligned}$$

Per il secondo addendo, dato che per ipotesi 2) f_n converge puntualmente in c, possiamo applicare il criterio di Cauchy per le successioni:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_2 \left| f_n(c) - f_m'(c) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posto $N = \max\{N_1, N_2\}$, per ogni $n, m \geq N$ si ha

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_n(c) - f_m(c)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Da cui segue:

$$\sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \forall n, m \geq N$$

2. Denominiamo f il limite *puntuale* di f_n, che esiste e coincide con quello uniforme per la dimostrazione appena fatta al punto 1). Riscriviamo la tesi 2) e 3) nella seguente maniera:

   b. Per ogni $d \in (a,b)$ vale $\lim_{x\to d} \frac{f(x)-f(d)}{x-d}$

   c. $\lim_{x\to d} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d} = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to d} \frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d}$.

   Verifichiamo le ipotesi del *teorema di scambio dei limiti*:

   - $\lim_{x\to d} \frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d}$ esiste *finito* in quanto per ipotesi 1) gli f_n sono *derivabili* su (a,b).
   - $\frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d}$ converge *uniformemente* su $(a,b)\setminus\{d\}$.
     Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in (a,b)\setminus\{d\}$ si ha, in virtù del *corollario al teorema di Lagrange*

     $$\left|\frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d} - \frac{f_m(x)-f_m(d)}{x-d}\right| \le \left|\frac{f_n(x)-f_m(x)-(f_n(d)-f_m(d))}{x-d}\right| \le \\ \le \sup_{t\in(a,b)} \left|f_n'(t)-f_m'(t)\right|$$

     Inoltre, si applica il *criterio di Cauchy* alle successione f_n': per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists N = N_0$ tale che per ogni $\forall n, m \ge N$ vale

     $$\sup_{t\in(a,b)} \left|f_n'(t)-f_m'(t)\right| < \varepsilon$$

     da cui segue

     $$\left|\frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d} - \frac{f_m(x)-f_m(d)}{x-d}\right| < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)\setminus\{d\}$$

   Per il *criterio di Cauchy* sulla convergenza uniforme, c'è convergenza uniforme su $(a,b)\setminus\{d\}$. Il teorema di scambio dei limiti garantisce che il limite

   $$\lim_{x\to d} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d} \iff \lim_{x\to d} \frac{f(x)-f(d)}{x-d}$$

   esiste *finito* (tesi 2)) e vale lo *scambio di limite e derivata* (tesi 3)).

□

CAPITOLO 3

Serie di funzioni

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Le Nel Capitolo 2 a pagina 11 abbiamo iniziato a trattare la convergenza uniforme e puntuale di successioni di funzioni. Adesso passiamo a parlare di serie di funzioni. **[COMPLETARE]**

3.1 Serie in uno spazio normato

Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di serie a valori reali e di convergenza (assoluta) di una serie a valore reali.

Definizione 3.1.1. - Serie a valori reali e convergenza di una serie.

Data una successione $x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, la **serie** $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ è la somma di tutti gli elementi della successione.

Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \quad \forall n \geq 0 \tag{3.1}$$

si dice che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge** se converge la successione s_n; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n \to +\infty} s_n \tag{3.2}$$

Definizione 3.1.2. - Convergenza assoluta.

Sia x_n una successione a valori reali. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge assolutamente** in $\mathbb{R}$ se converge la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$.

Teorema 3.1.1. - Convergenza assoluta implica convergenza semplice.
Ogni serie di numeri reali assolutamente convergente è anche semplicemente convergente.

Dimostrazione. Per dimostrare che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge, per il *Criterio di Cauchy per le serie*[a] è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left| x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} \right| < \varepsilon$$

Per ipotesi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ converge: per il Criterio di Cauchy, si ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left| |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right| \right| = |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right| < \varepsilon$$

D'altra parte, dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$\left| x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} \right| < |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right| < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Dalle ultime due relazioni si deduce immediatamente la prima relazione e dunque la tesi. □

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare maggiori dettagli sul criterio di Cauchy.

Osservazione. Il teorema appena dimostrato è una conseguenza della **completezza** di $\mathbb{R}$. Infatti, abbiamo usato il *criterio di Cauchy*, che si basa sul fatto che le successioni di Cauchy convergono sempre in $\mathbb{R}$ e quindi proprio per la completezza dei reali.

Il viceversa del teorema appena dimostrato non è valido, come segue dal seguente controesempio.

Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$: non converge assolutamente in quanto la serie, con gli elementi in modulo, diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che, essendo la **serie armonica**[a], non converge. Tuttavia, la serie semplice è una serie a segni alterni e poiché

- $\frac{1}{n}$ è decrescente $\forall n \geq 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

per il *criterio di Leibniz* la serie semplice converge. Pertanto, la convergenza semplice non implica la convergenza assoluta.

[a]Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare maggiori dettagli sulle serie notevoli.

Prendiamo ora $x_n \in X$, con X un insieme generico. Per generalizzare la definizione di serie convergente abbiamo bisogno che su X si possano compiere i seguenti passaggi:

- Poter definire s_n, cioè è necessario *sommare* elementi di X.
- Poter definire la *convergenza* in X.

Se dotiamo l'insieme X di una struttura di **spazio normato** possiamo generalizzare ad una serie generale le definizioni precedentemente enunciate per le serie a valori reali: infatti, se X è spazio normato gode sia dell'essere uno spazio metrico (e quindi è spazio topologico di Hausdorff, il che permette di definire univocamente la convergenza della successione) sia dell'essere spazio vettoriale (che permette la somma di elementi).

DEFINIZIONE 3.1.3. - SERIE E CONVERGENZA DI UNA SERIE.

Data una successione $x_n \in X$ spazio *normato*, $n \geq 0$, la **serie** $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ è la somma di tutti gli elementi della successione.
Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \quad \forall n \geq 0 \tag{3.3}$$

si dice che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge** se converge la successione s_n; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n\to+\infty} s_n \tag{3.4}$$

DEFINIZIONE 3.1.4. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato e x_n una successione in X. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge totalmente** o **assolutamente** in X se converge la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$.

Dall'osservazione a pag. 30 il teorema "Convergenza assoluta implica convergenza semplice" (teorema 3.1.1, pag. 30) necessita della *completezza* dei reali. Per generalizzarlo ci basta lavorare in *spazi normati completi*.

TEOREMA 3.1.2. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE.
Ogni serie in X spazio normato completo totalmente convergente è anche semplicemente convergente.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella affrontata nel teorema 3.1.1, pag. 30: è sufficiente sostituire al valore assoluto $|\cdot|$ la norma $\|\cdot\|$. $\square$

In generale, il problema della convergenza in spazi normati è *inesplorato*, ma se lo spazio è *completo* possiamo passare per la *convergenza totale* e studiare una serie a valori reali tramite i *criteri di convergenza*[1] noti dall'Analisi 1.

3.2 SERIE DI FUNZIONI

Consideriamo lo spazio $X = \mathscr{C}([a,b];\,\mathbb{R}) = \mathscr{C}([a,b])$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la *metrica lagrangiana*:

$$d(f,\, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Una serie convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ in questo spazio si può quindi scrivere, per definizione, come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

dove S_n è una successione di funzioni. Allora la condizione di convergenza di serie in X si può formulare come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathscr{C}([a,b]) \iff S_n \text{ converge con metrica lagriangiana in} \mathscr{C}([a,b])$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathscr{C}([a,b]) \iff S_n \text{ converge uniformemente in} \mathscr{C}([a,b])$$

Per la stessa osservazione fatte a pag. 12, sezione 2.2, per parlare di convergenza uniforme non sono necessarie né la *compattezza* di $[a,b]$ né la *continuità* delle funzioni.
Possiamo *estendere* la definizione di convergenza di una serie di funzioni per

$$f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con A insieme contenuto nei reali o, ancora più in generale, per funzioni del tipo

$$f_n : X \longrightarrow Y$$

dove X è un *insieme qualunque* e Y è uno **spazio normato completo**.

Studieremo quindi le **serie di funzioni** $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$; per studiare la *convergenza* di tali serie applicheremo le convergenze viste in precedenza alla *successione delle ridotte* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di convergenza delle serie a valori reali.

Definizione 3.2.1. - Convergenza di una serie di funzioni.

- **(CP)** La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ **converge puntualmente** in $x \in A$ se $S_n(x)$ converge puntualmente in $x \in A$.
- **(CU)** La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ **converge uniformemente** in $x \in A$ se $S_n(x)$ converge uniformemente su A.

3.3 SERIE DI FUNZIONI NEI CONFRONTI DI LIMITATEZZA, CONTINUITÀ, INTEGRABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

Ci poniamo ora il problema di studiare come si modificano i teoremi di limit*atezza/continuità/integrabilità/inte* visti nel Capitolo 2 a pagina 11 nel caso delle *serie di funzioni*.

3.3.1 *Limitatezza*

Teorema 3.3.1. - Teorema di limitatezza per serie.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n limitata su A, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su A.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in A$, $S(x)$ è limitata su A.

Dimostrazione. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in A$, allora si ha:

- S_n limitata su A, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente uniformemente a S su A.

Per il teorema di limitatezza per le successioni, S è limitata su A. □

3.3.2 *Continuità*

Teorema 3.3.2. - Teorema di continuità per serie.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n continua su A, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su A.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in A$, $S(x)$ è continua su A.

Dimostrazione. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in A$, allora si ha:

- S_n continua su A, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente uniformemente a S su A.

Per il teorema di continuità per le successioni, S è continua su A. □

3.3.3 *Integrabilità e scambio tra integrale e serie*

Teorema 3.3.3. - Teorema di integrabilità per serie, scambio tra integrale e serie.
Sia $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. $f_n \in \mathscr{R}[a,b]$, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su $[a,b]$.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in [a,b]$:

1. $S \in \mathscr{R}[a,b]$.
2. Vale lo **scambio tra integrale e serie**:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in [a,b]$, allora si ha:

- $S_n \in \mathscr{R}[a,b]$, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente *uniformemente* a S su $[a,b]$.

Per il teorema di integrabilità per le successioni:

- $S \in \mathscr{R}[a,b]$.
- Vale il *passaggio al limite sotto segno di integrale* per la successione delle ridotte, ossia
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$
Poiché l'*integrale di una somma finita* è uguale ad una *somma finita di integrali*, il primo membro dell'equazione può essere riscritto come
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$
e poiché $\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx$, otteniamo la tesi:
$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

□

Bibliografia

[Ram14] S. A. Ramanujan. «Modular equations and approximations to π». In: *Quarterly Journal of Mathematics* XLV (1914), pp. 350–372.

Indice analitico

coefficiente binomiale
generalizzato, 5

doppio fattoriale, 4

eccentricità, 4

integrale
ellittico, 5

polinomio di Taylor, 5

serie di Taylor, 6