Elisa Antuca   Massimo Bertolotti

TITOLO TITOLOZZO QUESTO TITOLO È PROVVISORIOZZO

E CI PIACE COSÌ

Manualozzo di Analisi Matematica 3

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\chi(S) = v - e + f$$

$$\pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z}$$

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Note per la lettura

"Un matematico è una macchina per trasformare caffè in teoremi."

Alfréd Rényi, *studioso del teorema di Van Moka-mpen.*

Senza troppe pretese di formalità, com'è intuibile dal termine dal termine tecnico *manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti a quattro mani basati sul corso di *Geometria 2* tenuto dai docenti Alberto Albano, Cinzia Casagrande ed Elena Martinengo nell'Anno Accademico 2020-2021 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.
Il corso è diviso in *cinque* parti, pertanto abbiamo ritenuto opportuno dividere in altrettante parti il testo, seguendo l'ordine delle lezioni: Topologia generale, Omotopia, Classificazione delle superfici topologiche, Approfondimenti di Algebra Lineare e infine Geometria proiettiva. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di *Geometria 1*, *Algebra 1* e *Analisi 1*.
In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate.
Per quanto ci piacerebbe esserlo, non siamo *esseri infallibili*: ci saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiediamo gentilmente di segnalarceli su `https://maxmaci.github.io` per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.
I disegni sono stati realizzati da Massimo Bertolotti, l'addetto alla grafica e ai capricci di LaTeX (ed è molto capriccioso, fidatevi). Chi volesse dilettarsi può cercare di distinguere chi fra i due autori ha scritto cosa, non dovrebbe essere troppo difficile.

Seconda edizione, compilato il 3 dicembre 2021.

Indice

I

Introduzione ad Analisi Matematica 3

CAPITOLO 1

Alla ricerca della lunghezza dell'ellisse

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Una circonferenza e un'*ellisse* a primo acchito possono sembrare molto simili: in fondo, una circonferenza non è altro che un'ellisse i cui punti focali coincidono e dunque l'ellisse si può vedere come una circonferenza "allungata" rispetto ad un asse. Il valore dell'area delimitata da una circonferenza (πr^2) e la lunghezza di una circonferenza ($2\pi r$) sono ben noti già dall'antichità, i cui calcoli sono stati opportunamente formalizzati in epoca moderna; tuttavia, riguardo l'ellisse, ci accorgiamo di aver incontrato nel corso degli studi precedenti quasi esclusivamente il valore dell'area delimitata da essa (πab), ma *non la lunghezza dell'ellisse*. Come mai?

1.1 Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse

Partiamo col seguente *quiz*: quale delle seguenti tre espressioni è il valore, o una sua *approssimazione*, della lunghezza di un'ellisse di semiassi di lunghezza a e b?

a) $L(a,b) = \pi ab$
b) $L(a,b) \approx \pi(a+b) + 3\pi \frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}$
c) $L(a,b) \approx 2\pi a$.

Chiaramente, come abbiamo detto nell'introduzione del capitolo, la lunghezza dell'ellisse *non* è una formula nota dagli studi passati e possiamo (per ora) solamente escludere la *prima risposta*, in quanto essa è il valore dell'**area** delimitata dell'ellisse.

> **Osservazione.** Possiamo escludere la prima risposta anche per motivi puramente **dimensionali**: a e b sono, dimensionalmente parlando, due lunghezze, quindi πab deve essere una *lunghezza al quadrato*, cioè un'area e non può essere una lunghezza!

In realtà, la domanda del quiz è mal posta: le risposte *b)* e *c)* sono entrambe corrette.
Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan fornì come nota a margine non commentata in un suo articolo del 1914 (**ramanujan:1914piapprox**) l'approssimazione *b)*:

$$L(a,b) \approx \pi\left((a+b)+3\frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}\right)$$

Vedremo fra poco che anche l'approssimazione data dalla *a)* è anch'essa lecita.
Il motivo per cui diamo approssimazioni ma non formule esatte per la lunghezza dell'ellisse è dovuto al fatto che *non esiste* una formula esplicita in termini di *funzioni elementari*, bensì possiamo esprimerla soltanto come **somma di una serie**.

Teorema 1.1.1. - Lunghezza dell'ellisse di semiassi di lunghezza a e b.
Siano $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi dell'ellisse e $e = e(a,b) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'**eccentricità**; allora si ha

$$L(a,b) = 2\pi a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2j}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}e^j\right)^2 \tag{1.1}$$

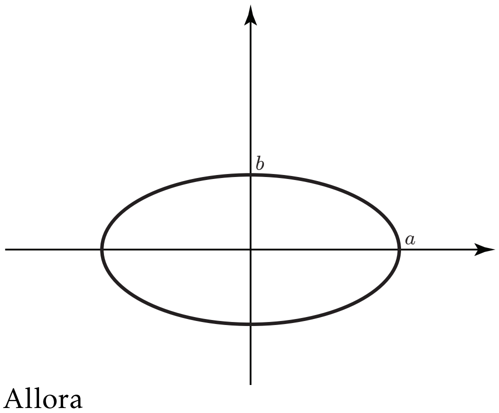
dove !! indica il **doppio fattoriale**:

- $(-1)!! = 0!! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 2 \text{ se } n>0 \text{ è pari} \\ n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \text{ se } n>0 \text{ è dispari}\end{cases}$

Il primo termine della serie fornisce l'approssimazione espressa nella risposta *a)*:

$$L(a,b) \approx 2\pi a$$

1.1.1 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor*



Dimostriamo finalmente la lunghezza dell'ellisse. Come è noto dal corso di Analisi 2, per una curva *regolare* come l'ellisse è possibile calcolarne la lunghezza usando un'opportuna parametrizzazione.
Poniamo $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi ed $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'eccentricità. Una parametrizzazione è

$$\vec{r}(t) = (a\sin t,\ b\cos t) \quad t \in [0,2\pi]$$

Allora

$$L = \int_0^{2\pi} \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a\cos t,\ -b\sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-(a^2+b^2)\sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$$

C'è un problema: la funzione $f(t) = \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$ non è **elementarmente integrabile**, cioè non ammette primitive in termini di funzioni elementari.

Attenzione! Non essere elementarmente integrabile *non* significa che non sia integrabile! La funzione integranda $f(t)$ è continua su $[0, 2\pi]$, dunque per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* ammette primitive su $[0, 2\pi]$. Una di esse è

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 y} dy \quad \forall y \in [0, 2\pi]$$

Il problema è che *non* possiamo riscrivere F in modo esplicito usando *solo* funzioni elementari.

Questo tipo di integrale è detto **integrale ellittico**.

Digressione. Gli *integrali ellittici* si incontrano in molti ambiti matematici. Ad esempio, appaiono nella risoluzione dell'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Sono il motivo per cui tale equazione si studia spesso per piccole oscillazioni, in modo da poter operare una linearizzazione $\sin \theta \sim \theta$ e calcolare il moto senza passare per tali integrali non calcolabili.
Un altro esempio della loro importanza è noto agli appassionati di Geometria: infatti, la branca della Geometria Algebrica nasce anche dagli studi su tali integrali.

Potremmo limitarci a considerare l'intero integrale ellittico come una nuova funzione, ma al più potremmo calcolarne il valore tramite metodi dell'Analisi Numerica. Invece, proviamo a riscrivere l'integrale utilizzando uno **sviluppo in serie** della funzione integranda.
Poniamo $x = -e^2 \sin^2 t$ e osserviamo che

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = (1 + x)^\alpha \quad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}$$

Poichè $(1 + x)^\alpha$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ in un intorno di $x = 0$, si può approssimare localmente col **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in $x = 0$, $\forall n \geq 0$. Se il polinomio in questione è

$$P_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

con $\binom{\alpha}{j}$ il **coefficiente binomiale generalizzato**[1], allora l'approssimazione dell'integranda data dal polinomio di Taylor è proprio

$$(1 + x)^{1/2} \approx \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

Risostituendo $x = -e^2 \sin^2 t$ abbiamo un'approssimazione dell'integranda. Tuttavia, noi vorremmo un *risultato esatto*.
Sappiamo intuitivamente che più termini si hanno nello sviluppo di Taylor, più accurata

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pag. 121 è possibile trovare la definizione e le proprietà del binomiale generalizzato.

è l'approssimazione; cosa succede per $n \to \infty$? Dobbiamo studiare la somma di serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j$$

Già ci dobbiamo porre nuove domande: la serie *converge* e per quali valori di x? Supponendo che la serie converga per opportuni valori di x, la serie converge proprio a $(1+x)^{1/2}$? *In generale*, per $f \in \mathscr{C}^\infty$ qualsiasi **NO**, la serie di Taylor non converge proprio e se converge non converge ad f! Tuttavia, in questo caso siamo particolarmente fortunati: $\forall x \in (-1,1)$ la serie converge[2] e vale

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

In questa prima parte della dimostrazione abbiamo capito che è importante determinare quando è possibile passare dalla semplice *approssimazione* di una funzione con il *polinomio di Taylor* a poter riscrivere una funzione come una **serie di Taylor** di funzioni opportune.

1.1.2 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale*

Torniamo al problema originale. Ricordando che $x = -e^2 \sin^2 t$, poiché $t \in [0, 2\pi]$ si ha che $x \in \left[-e^2, 0\right] \subseteq (-1,1)$ dato che $e^2 < 1$. Possiamo riscrivere l'integranda come il suo sviluppo in *serie di Taylor*:

$$\left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} \left(-e^2 \sin^2 t\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Sostituiamo nell'integrale; poiché la funzione è pari e simmetrica, possiamo ricondurci a studiare l'integrale su $[0, \pi/2]$:

$$L = a \int_0^{2\pi} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t\, dt \boxed{=}$$

Incontriamo un nuovo problema: cos'è l'**integrale di una serie**? Se avessimo una somma di un numero *finito* di termini per la *linearità* dell'integrale potremmo scambiare la sommatoria con l'integrale, ma è possibile farlo nel caso di una serie?
Riscriviamo l'espressione precedente con la definizione di serie come *limite* per $n \to +\infty$ delle *ridotte*:

$$\boxed{=}\ 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \right) dt$$

Il problema precedente si può riformulare come "*È possibile scambiare integrale e limite?*". Tale questione è come il problema del **passaggio al limite sotto segno di integrale**.
In generale, la risposta è **NO**: non è possibile scambiare limite e integrale. Ciò nonostante

[2] Nelle "Note aggiuntive", a pag. XXX è possibile trovare la dimostrazione di tale convergenza.

anche questa volta siamo particolarmente fortunati e il passaggio è *lecito*[3] e si ha

$$\begin{aligned} L &= 4a \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t\,dt \\ &= 4a \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t\,dt \\ &= 4a \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j} t\,dt \end{aligned}$$

Completando il calcolo dell'integrale[4] si ottiene la formula della lunghezza scritta precedentemente.

1.2 NON BANALI CONSEGUENZE DI UNA DOMANDA BANALE

Abbiamo finalmente raggiunto una *risposta*, seppur assolutamente non banale, alla domanda che ci eravamo posti originalmente: qual è la *lunghezza dell'ellisse*? Nel far ciò ci siamo imbattuti in tutta una serie di problemi: esplicitare integrali non *elementarmente* risolvibili, la *convergenza* di *serie di Taylor* di funzioni ad una funzione specifica, il *passaggio al limite* sotto segno di *integrale*. La teoria matematica che tratteremo a partire dai capitoli successivi *nasce* proprio da questi problemi apparsi nell'*insidiosa ricerca* di una formula della lunghezza dell'ellisse.
In particolare, per capire quando era possibile il passaggio al limite sotto segno di integrale sono stati sviluppati diversi *teoremi*, più o meno vantaggiosi da utilizzare, le cui ipotesi variano sensibilmente fra di loro: alcuni si inseriscono nella già nota *teoria Riemanniana degli integrali*, mentre altri richiedono ipotesi completamente diverse. È da questi innumerevoli approcci al problema che, storicamente parlando, fu tale quesito a dare un *impeto* fondamentale allo sviluppo della **teoria degli integrali di Lebesgue**.

[3] Nelle "Note aggiuntive", a pag. XXX è possibile trovare la dimostrazione che in questo caso il passaggio è lecito.

[4] Nelle "Note aggiuntive", a pag. XXX è possibile trovare tale calcolo.

II

Convergenza di funzioni,//
parte prima

CAPITOLO 2

Convergenza di funzioni

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, dopo aver finito le citazioni stupide.

L e **[COMPLETARE]**

2.1 Convergenza uniforme di funzioni

Per poter trattare i problemi enunciati nel Capitolo 1 a pagina 3 dobbiamo parlare di convergenza di funzioni. Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di distanza, spazio metrico e convergenza.

Definizione 2.1.1. - Spazio metrico e distanza.
Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **distanza**, cioè tale che $\forall x, y, z \in X$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definizione 2.1.2. - Convergenza di successioni secondo una distanza.
Una successione $v_n \in X$ **converge** in X a $v \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, d(v_n, v) < \varepsilon \tag{2.1}$$

Un *caso particolare* di spazio metrico è lo spazio $X = \mathscr{C}([a,b]; \mathbb{R})$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la **metrica lagrangiana**:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \tag{2.2}$$

Osservazione. La distanza è ben definita perché la funzione $|f(x)-g(x)|$, essendo definita su $[a,b]$ compatto, non si considera solo l'estremo superiore ma ammette massimo per il teorema di Weierstrass.

Definizione 2.1.3. - Convergenza nella metrica lagrangiana.
Siano $f_n,\ f \in X$. Si dice che f_n converge a f in X se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N,\ \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Siccome vale per il massimo allora vale per qualsiasi x, quindi la relazione si può riscrivere come

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a,b]$$

Osservazione. La condizione, riscritta in questo modo, non solo *non necessita* più dell'esistenza del *massimo*, ma non è neanche necessario che l'intervallo sia *compatto* o che le funzioni f_n siano *continue*: questa è in realtà una relazione *più generale* rispetto alla semplice convergenza nella metrica lagrangiana!
Vedremo che nel caso di funzioni continue sui compatti la convergenza uniforme coincide con quella lagrangiana.

Definizione 2.1.4. - Convergenza uniforme.
Siano $f_n,\ f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq R$ qualsiasi. Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A \tag{2.4}$$

Definizione 2.1.5. - Funzione limite.
Se f_n converge a f su A, f si dice **funzione limite**.

Osservazione. Segue immediatamente dalla definizione che se f_n converge uniformemente a f su A, allora $\forall B \subseteq A$ si ha che f_n converge uniformemente a f su B.

Attenzione! È estremamente importante dire **dove** converge f_n: infatti, una stessa successione può convergere uniformemente su A, ma allo stesso tempo *non convergere* uniformemente in un altro insieme B. Vedremo un esempio fondamentale a riguardo successivamente.

Ora passiamo da questa definizione ad una formulazione equivalente *operativa*. Se essa vale per qualsiasi x in A, allora vale per il sup e viceversa, quindi è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N,\ \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Siccome il sup dipende da n, possiamo definire una successione $c_n := \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}^+$. Allora la relazione sopra, per definizione di limite di una successione, è equivalente a $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

In conclusione abbiamo mostrato che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \iff \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \tag{2.5}$$

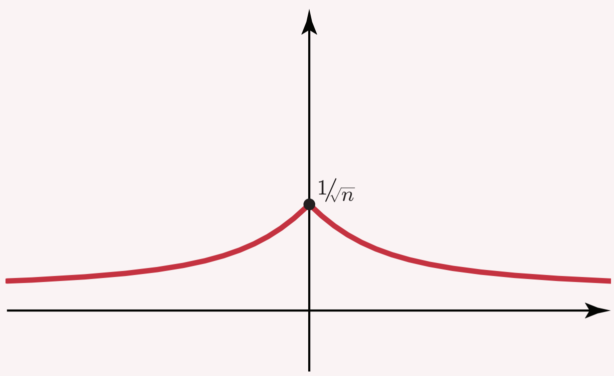
Esempio. Proviamo che $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformemente a $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}$. Dobbiamo provare che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

1. Calcoliamo il sup con *n fissato*:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \overset{*}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right)$$

dove $(*)$ si ha perché l'argomento del valore assoluto è sempre positivo.
Per trovare il sup tracciamo il grafico di $\varphi_n(x) = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|$ e cerchiamo il suo estremo superiore. Per parità della funzione ci basta fare le nostre considerazioni su $(0, +\infty)$ per poi disegnare il resto del grafico grazie alla simmetria assiale rispetto all'asse y; studiando opportunamente la derivata e il limite all'infinito si ottiene il seguente grafico.



Segue chiaramente che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi_n(x) = \varphi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \; (= c_n)$$

2. Calcoliamo il limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Abbiamo così verificato la convergenza richiesta.

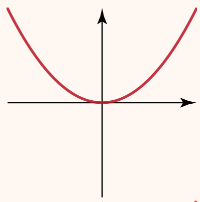
Esempio. Successione geometrica.
Consideriamo $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$. Allora:
1. x^n converge uniformemente a 0 su *ogni* insieme $[-a, a]$, $\forall a\colon 0 < a < 1$.
2. x^n **non** converge uniformemente a 0 su $(-1, 1)$.

Dimostrazione.
1. Sia $a \in (0,1)$ fissato e consideriamo

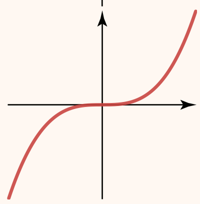
$$|x^n - 0| = |x^n| \implies \sup_{x\in[-a,a]} |x^n - 0| = \sup_{x\in[-a,a]} |x^n|$$

Qual è il grafico di x^n?

- Se n **pari**, è visivamente simile a quello di x^2.



- Se n **dispari**, è visivamente simile a quello di x^3.



Siccome $|x^n|$, $\forall n \geq 2$ è una funzione pari, il grafico è visivamente simile a quello di x^2. Segue immediatamente che

$$\sup_{x\in[-a,a]} |x^n| = a^n,\ \forall a\colon 0 < a < 1$$

Ora si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[-a,a]} |x^n|\right) = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

perché $a \in (0,1)$ e quindi a^n è una successione geometrica convergente e pertanto il limite a $+\infty$ è sempre necessariamente 0.

2. In questo caso anche se non ho il massimo ho l'estremo superiore

$$\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1,\ \forall n$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in(-1,1)} |x^n|\right) = 1 \neq 0$$

pertanto *non* c'è convergenza uniforme su $(-1,1)$.

□

2.1.1 *Eserciziamoci! Convergenza uniforme*

Esercizio. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente a 0 su $[0,1]$?

Soluzione. Dimostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x^n}{n}-0\right|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}\right) = 0$$

Poiché

$$\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n} = \left.\frac{x^n}{n}\right|_{x=1} = \frac{1}{n}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

2.1.2 *Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme*

Come nel caso delle successioni numeriche, esiste un **criterio di Cauchy** per la convergenza uniforme.

Teorema 2.1.1. - Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.
Siano $f_n : A\subseteq\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$f_n \text{ converge uniformemente su } A \iff \\ \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon): \forall n,m\geq N,\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A \tag{2.6}$$

Osservazione. Il criterio di Cauchy è un *risultato teorico molto importante*, in quanto permette di mostrare la convergenza uniforme di una successione di funzioni *senza sapere* quale sia il limite come invece è necessario nella definizione di convergenza, in modo analogo a ciò che succede con il criterio di Cauchy per le *successioni numeriche*.

2.1.3 *Visualizzazione della convergenza uniforme*

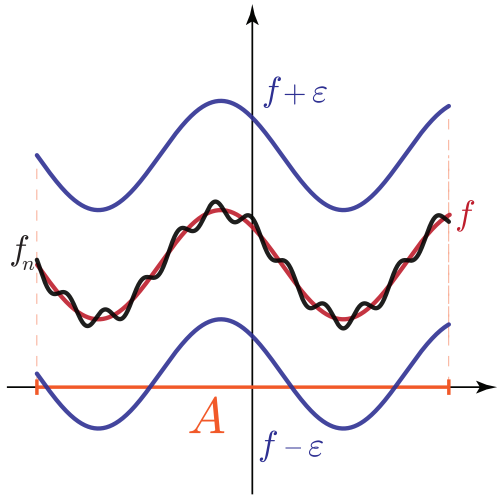
Siamo abituati alle successioni numeriche v_n ed eventualmente a studiare il loro andamento in modo grafico, rappresentando sulle ascisse il numero n e sulle ordinate il valore v_n. Nel caso di successioni di funzioni l'argomento è una funzione, quindi per studiarle può essere utile proprio disegnare i grafici degli f_n, vedere come cambiano al variare di n e come convergono verso f.
Come appare *visivamente* la convergenza uniforme? Possiamo riscrivere la condizione della convergenza uniforme

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon),\ \forall n\geq N,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A$$

come

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon,\ \forall x\in A \text{ definitivamente} \tag{2.7}$$

In altre parole, scelto ε, trovo un N nella successione tale che definitivamente f_n deve essere compresa nell'**intorno tubulare** di $f(x)$, cioé le f_n devono stare in questo intorno per ogni n sufficientemente grande ($\forall n \geq N$), quindi la striscia cattura globalmente tutte le f_n da un certo N in poi.



Visivamente la successione geometrica non converge uniformemente su $(-1,1)$ a 0 perché non posso restringermi intorno alla funzione limite $f(x) = 0$ per qualsiasi ε io scelga, infatti $f_n(1) = 1, \forall n$.

Definizione 2.1.6. - Intorno tubulare.
Un **intorno tubulare** di larghezza ε di una curva è l'unione di tutti i dischi di raggio ε con centro un punto di una curva.

2.1.4 *Generalizzazioni della convergenza uniforme*

Prima di tutto, ricordiamo le definizioni di norma e spazio normato.

Definizione 2.1.7. - Spazio normato e norma.
Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ dove X è un spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ reale o complesso e $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **norma**, cioè tale che $\forall x,\ y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Osservazione. Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico se consideriamo la **metrica indotta dalla norma**, cioè la funzione data da $d(x,\ y) := \|x - y\|$.

Generalizziamo la definizione di convergenza uniforme considerando $f_n,\ f : A \longrightarrow Y$, con A *insieme qualsiasi* e Y uno spazio *normato*; se vogliamo che valga anche il criterio di Cauchy è necessario che Y sia *anche* uno spazio **completo**.

Definizione 2.1.8. - Successione di Cauchy.
Una successione $v_n \in X$ è **di Cauchy** in X se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N,\ d(v_n,\ v_m) < \varepsilon \tag{2.8}$$

DEFINIZIONE 2.1.9. - SPAZIO COMPLETO.
Uno spazio metrico è detto **completo** se tutte le successioni di Cauchy convergono.

OSSERVAZIONE. Una successione convergente è *sempre* di Cauchy, ma in generale *non tutte* le successioni di Cauchy convergono. L'implicazione opposta è vera solo se lo spazio è completo.

Possiamo ora, date queste nuove ipotesi, riformulare la convergenza uniforme.

DEFINIZIONE 2.1.10. - CONVERGENZA UNIFORME, GENERALIZZATA.
Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato completo. Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon,\ \forall x \in A \tag{2.9}$$

DIGRESSIONE. Volendo è possibile generalizzare ulteriormente parlando di convergenza uniforme per funzioni a valori in semplici **spazi metrici** (completi), sostituendo a $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ la condizione $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, infatti se non ci si trova in uno spazio vettoriale potrebbe non essere definita la differenza. Nei nostri studi non affronteremo ciò e ci limiteremo a considerare il caso di spazi normati (completi).

2.2 CONVERGENZA PUNTUALE

Durante gli studi di CALCOLO DELLE PROBABILITÀ si è parlato di tre tipi di convergenze di successioni di variabili aleatorie: la **convergenza in probabilità**, la **convergenza quasi certa** e la **convergenza in legge** (o in distribuzione). Consideriamo ora quest'ultima, di cui riportiamo la definizione.

DEFINIZIONE 2.2.1. - CONVERGENZA IN LEGGE.
Dato $(\Omega, \mathscr{M}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variabili aleatorie e le due corrispettive *funzioni di distribuzione*

$$\begin{aligned} F_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

allora si dice che X_n converge a X **in legge** $\left(X_n \xrightarrow{d} X\right)$ se

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ punto di continuità di } F. \tag{2.10}$$

Quello che abbiamo appena scritta non è altro che il caso applicato agli *studi probabilistici* della **convergenza puntuale** di una successione ad una funzione limite nel punto x.

DEFINIZIONE 2.2.2. - CONVERGENZA PUNTUALE.
Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{2.11}$$

Confrontiamo qui $f_n, f : A \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. **(CU)** f_n converge a f **uniformemente** su A se
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A$$
2. **(CP)** f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se
$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Il quantificatore esistenziale $\exists$ implica che ciò che esiste dipende da tutto ciò che lo precede: nella convergenza puntuale N non dipende dal solo ε come così capita nella **convergenza uniforme**, ma anche da x. La convergenza uniforme è più restrittiva rispetto alla puntuale perché la soglia N è indipendente da x, quindi basta trovare un solo N che va bene per tutte le $x \in A$ (ed è questo il motivo per cui $\forall x \in A$ appare al fondo della formula), al contrario della convergenza puntuale in cui la soglia N dipende dalla x che consideriamo.

OSSERVAZIONE. Questa differenza è concettualmente analoga a quella che c'è fra continuità uniforme e continuità.

OSSERVAZIONE. Possiamo considerare $\forall \varepsilon > 0$ due punti x' e x'' su cui valutare la **soglia** N di un successione di funzioni: in questo caso abbiamo per il primo punto $N(\varepsilon,\ x')$ e per il secondo $N(\varepsilon,\ x'')$. Vediamo subito che $\max(N(\varepsilon,\ x'), N(\varepsilon,\ x''))$ è una soglia lecita sia per x' sia x''.
Finché si ha un numero finito di punti si può considerare il massimo, ma in generale se voglio passare dalla convergenza puntuale alla convergenza uniforme avendo un numero infinito di punti devo considerare

$$\sup_{x \in A} N(\varepsilon, x)$$

- Se $\sup_{x \in A} N(\varepsilon)$ è finito, allora $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = \max_{x \in A} N(\varepsilon) = N(\varepsilon)$ e c'è convergenza uniforme.
- Se $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = +\infty$ allora *non* c'è convergenza uniforme.

Dalle definizioni segue immediatamente che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \implies \\ \implies f_n \text{ converge puntualmente a } f \text{ in ogni punto di } A \tag{2.12}$$

ma in generale vale che la convergenza puntuale **NON** implica la convergenza uniforme perché fissata la tolleranza ε la soglia N potrebbe cambiare al variare di $x \in A$.

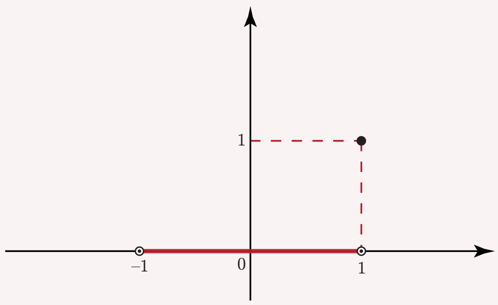
Esempio. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$.
Dagli studi fatti nel corso di Analisi 1 si ha $\forall x \in \mathbb{R}$ fissato

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Allora x^n converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

in ogni punto di $(-1, 1]$ e la funzione limite è discontinua.



Abbiamo provato precedentemente che $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ in ogni intervallo $[-a, a] \subsetneq (-1, 1)$, $\forall a \in (0, 1)$, ma *non* converge uniformemente a $f = 0$ in $(-1, 1)$.
Questo mostra che su $(-1, 1)$ c'è convergenza puntuale ma non uniforme.

Osservazione. Questo esempio mostra inoltre che la CP *non* è sufficiente in generale per trasferire la continuità alla funzione limite.

2.3 PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ NEL CASO DI CONVERGENZA UNIFORME E PUNTUALE

Adesso studiamo il diverso comportamento delle due tipologie di convergenza viste rispetto alle proprietà di regolarità: se le funzioni f_n della successione sono limitate/continue/integrabili/differenziabili, la funzione limite f è limitata/continua/integrabile/differenziabile?

2.3.1 *Limitatezza*

Teorema 2.3.1. - Teorema di limitatezza per successioni.

Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che
1. f_n limitata su $[a,b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora f è limitata su $[a,b]$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare e f è limitate, ovvero che

$$\exists M > 0 \colon |f(x)| \leq n, \ \forall x \in A$$

Per l'ipotesi 2) sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A$$

Posto ad esempio[a] $\varepsilon = 2$, consideriamo la soglia $N_2 = N(2)$ e $n = N_2$. Allora la relazione precedente risulta

$$\left| f_{N_2}(x) - f(x) \right| < 2, \ \forall x \in A$$

Consideriamo $f_{N_2}(x)$: per l'ipotesi 1) è limitata, cioè

$$\exists M_2 > 0 \colon \left| f_{N_2}(x) \right| \leq M_2, \ \forall x \in A$$

Per ogni $x \in A$ si ha quindi

$$|f(x)| = \left| f(x) + f_{N_2}(x) - f_{N_2}(x) \right| \leq \left| f(x) - f_{N_2}(x) \right| + \left| f_{N_2}(x) \right| \leq 2 + M_2 = M, \ \forall x \in A$$

□

[a] La scelta di ε è assolutamente arbitraria.

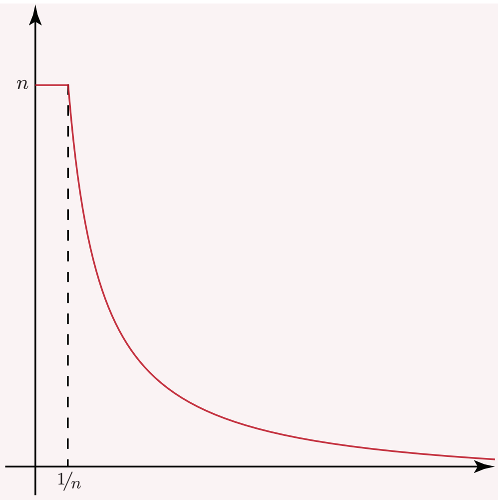
Digressione. Il risultato si generalizza ponendo $f_n, f : X \longrightarrow Y$, dove X è un qualunque insieme e Y è uno spazio normato.

La convergenza puntuale non è sufficiente per trasferire la limitatezza alla funzione limite: infatti, possiamo costruire un controesempio di una successione f_n limitata che converge puntualmente ad una funzione non limitata.

Esempio. Sia $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\forall x \in (0,1]$.
Un grafico qualitativo di f_n è rappresentato in figura.



Per ogni $n \geq 1$ la funzione f_n è limitata su $(0,1]$. Inoltre, $\forall x \in (0,1]$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Infatti, fissato $x \in (0,1]$, indicando con le parentesi quadre la *parte intera* e posto

$$n_x = \left[\frac{1}{x}\right] + 1$$

allora se $n \geq n_x$ si ha $x > 1/n$ e dunque

$$f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Si ha dunque

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

La successione di funzioni *limitate* f_n converge quindi puntualmente $\forall x \in (0,1]$ alla funzione $\frac{1}{x}$ che **non** è limitata su $(0,1]$.

2.3.2 *Continuità*

Teorema 2.3.2. - Teorema di continuità per successioni.
Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n continua su $[a,b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora f è continua su $[a,b]$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in [a,b]$ fissato. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Per l'ipotesi 2) sappiamo che f_n converge uniformemente; allora, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in [a,b]$$

Questa relazione chiaramente vale anche per x_0:

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Per l'ipotesi 1) ogni f_n è continua in x_0, in particolare f_N la è. Per definizione di continuità, considerato sempre lo stesso $\varepsilon > 0$ di prima $\exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Quindi, se $|x - x_0| < \delta$ abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Digressione. Il risultato si generalizza ponendo $f_n, f : X \longrightarrow Y$, dove X è un qualunque insieme e Y è uno spazio normato.

La convergenza puntuale non è sufficiente per trasferire la continuità alla funzione limite: infatti, possiamo costruire un controesempio di una successione f_n continua che converge puntualmente ad una funzione non continua.

Esempio. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n$, $n \ge 1$, sull'intervallo $[0,1]$. Sappiamo che essa converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

La successione di funzioni *continue* f_n converge quindi puntualmente per ogni $x \in [0,1]$ alla funzione f che **non** è continua su $[0,1]$.

2.3.3 *Integrabilità e passaggio al limite sotto segno di integrale*

D'ora in avanti indicheremo con $\mathscr{R}([a,b])$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su $[a,b]$.

Teorema 2.3.3. - Teorema di integrabilità per successioni, passaggio al limite sotto segno di integrale.
Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \ge 1$ tali che

1. $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$, $\forall n \ge 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora

1. $f \in \mathscr{R}([a,b])$.
2. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.13)$$

OSSERVAZIONE. Nel caso di un intervallo *illimitato* la convergenza uniforme

- *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, e non è necessaria neanche nel caso limitato
- *non* è condizione sufficiente per trasferire alla funzione limite l'integrabilità

Inoltre la convergenza puntuale *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, nemmeno nel caso di un intervallo limitato.
Di seguito vedremo dei controesempi.

Vedremo la dimostrazione di una versione più generica del teorema quando parleremo degli integrali di Lebesgue.

ESEMPI. Per quanto questo teorema ha una notevole importanza, ha un campo d'azione particolarmente limitato. Infatti, anche cambiando leggermente le ipotesi non è più possibile affermare la tesi. Vediamo alcuni di questi controesempi.

1. La convergenza **uniforme** *non* è **sufficiente** per trasferire alla funzione limite l'integrabilità su un intervallo *illimitato*.
2. La convergenza **uniforme** *non* è condizione **necessaria** per il passaggio al limite sotto segno di integrale.
3. La convergenza **uniforme** *non* è condizione **sufficiente** per il passaggio al limite sotto il segno di integrale nel caso in un intervallo *illimitato*.
4. La convergenza **puntuale** *non* è condizione **sufficiente** per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, *nemmeno* nel caso di un intervallo *limitato*.

DIMOSTRAZIONE.

I Consideriamo la successione di funzioni $f_n : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{n}{nx + x^2}, \ \forall x \geq 1, n \geq 1$$

Per ogni $x \geq 1$ osserviamo che $f_n(x) \sim \frac{n}{nx}$ per $n \to +\infty$, quindi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{nx} = \frac{1}{x}$$

Si ha quindi convergenza puntuale in ogni punto di $[1,+\infty)$ alla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Inoltre, la convergenza è uniforme su $[1,+\infty)$: vale infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{nx + x^2} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{n+x}$$

per ogni $x \geq 1$, $n \geq 1$. Per *monotonia*, si ha quindi

$$\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 1} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n+1}, \ \forall n \geq 1$$

Deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

da cui segue la convergenza uniforme su $[1,+\infty)$. Osserviamo ora che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^2}, \ x \to +\infty$$

e dunque f_n è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$, per ogni $n \geq 1$; la funzione limite $f(x) = \frac{1}{x}$ *non* è invece integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$. La successione di funzioni f_n *integrabili* su $[1,+\infty)$ converge quindi uniformemente su $[1,+\infty)$ alla funzione f che **non** è integrabile su $[1,+\infty)$.

II Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Invece, sappiamo che x^n converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

dunque su $[0,1]$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è una funzione *identicamente nulla* tranne un *numero finito* di punti (in questo caso, uno soltanto). Allora

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x^n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

x^n non converge uniformemente su $[0,1]$, ma il passaggio al limite sotto segno di integrale si verifica comunque.

III Sia $f_n : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{se } x < n \vee x > 2n \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_0^n 0 dx + \int_n^{2n} \frac{1}{n} dx + \int_{2n}^{+\infty} 0 dx\right] = \lim_{n\to+\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{n} dx =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{x}{n}\right]_n^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-n}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Invece, si vede immediatamente che

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$$

Vediamo che f_n converge uniformemente su $[0,+\infty)$ a 0:

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[0,+\infty)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Anche aggiungendo al teorema l'ipotesi che $f(x)$ sia Riemann-integrabile (in questo caso ciò è verificato), il passaggio al limite sotto segno di integrale *non* si verifica *necessariamente* se l'intervallo è illimitato.

IV Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = nx\left(1-x^2\right)^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx = -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n(-2x)\left(1-x^2\right)^n =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{1}{n+1}\left(1-x^2\right)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Invece, osserviamo che, se abbiamo fissato x rispetto alla n, allora $nx\left(1-x^2\right)^n = x\frac{\left(1-x^2\right)^n}{\frac{1}{n}}$ si può vedere come il rapporto di un esponenziale di ragione (in modulo) minore di 1 con il reciproco di un termine lineare, dunque per $n \to +\infty$ l'esponenziale tende a 0 molto più velocemente di $\frac{1}{n}$: segue che

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} nx\left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

Per lo stesso ragionamento si vede che $f_n(x)$ converge puntualmente a 0 per ogni punto di $[0,1]$, ma *non* si verifica il passaggio al limite sotto segno di integrale.

2.3.4 *Derivabilità*

Date $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con f la funzione limite di f_n su A, possiamo porci due domande:

1. f_n derivabile su $A \implies f$ derivabile su A?
2. Vale lo scambio tra derivata e limite?

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = D\left(\lim_{n\to+\infty} f(x)\right)$$

O, in altre parole, il diagramma seguente è commutativo?

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\lim"'] & f_n' \arrow[d, "\lim"] \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \arrow[r, "D"'] & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n' \end{tikzcd}$$

La risposta ad entrambe domande, a differenza di quanto ci si potrebbe aspettare dati i risultati su limitatezza, continuità e integrabilità, è **NO**, anche nel caso di *convergenza uniforme*.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per trasferire alla funzione limite la derivabilità.

Consideriamo la successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

- f_n è derivabile.
- f_n abbiamo visto[a] converge uniformemente su $\mathbb{R}$ a $f(x) = |x|$ che *non* è derivabile in $x = 0$.

[a] Si veda pag. 13.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per poter scambiare limite e derivata, anche se si aggiunge l'ipotesi che la funzione limite sia derivabile.

Consideriamo la successione $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

f_n è derivabile su $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, e vale

$$f'(x) = \sqrt{n}\cos(nx), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \geq 1$$

- ◇ f_n converge **puntualmente** a $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{limitato}} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

◇ f_n converge **uniformemente** a $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right|\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Osserviamo che in entrambi i casi $f(x) = 0$ su $\mathbb{R}$: questa funzione è chiaramente derivabile e vale

$$D\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = D(0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

D'altro canto, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\cos(nx)$$

Ad esempio, per $x = 0$ troveremmo

$$\lim_{n\to+\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Quindi non si può per $x = 0$ scambiare limite e derivata-

Esiste comunque un legame tra *successioni di funzioni*, *derivabilità* e convergenza uniforme; scopriamo che non è più la successione f_n a dover convergere uniformemente, bensì sono le derivate f' della successioni a doverlo fare.

Teorema 2.3.4. - Teorema di derivabilità per successioni.

Siano dati $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

1. f_n derivabili su (a,b).
2. $\exists c \in (a,b) : f_n(c)$ converge puntualmente.
3. f_n' converge uniformemente a g su (a,b).

Allora

1. $\exists \ f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che f_n converge uniformemente a f su (a,b).
2. f è derivabile.
3. $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in (a,b)$, ossia

$$D\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x), \ \forall x \in (a,b) \tag{2.14}$$

Per dimostrare il teorema, faremo uso di tre strumenti: il *criterio di Cauchy per la convergenza uniforme* [1], il *teorema di scambio di limiti* e una conseguenza *teorema di Lagrange*. Enunciamo questi ultimi due.

Teorema 2.3.5. - Teorema di scambio di limiti.
Dati $g_n, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e c punto di accumulazione di I, se

1. g_n converge *uniformemente* a g su I
2. Per ogni $n \geq 1$ esiste $L_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to c} g_n(x) = L_n$$

Allora:

1. Esistono finiti
$$\lim_{x \to c} g(x), \qquad \lim_{n \to +\infty} L_n \tag{2.15}$$
2. Vale la relazione
$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{n \to +\infty} L_n \tag{2.16}$$
ossia
$$\lim_{x \to c} \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to c} g_n(x) \tag{2.17}$$

Corollario 2.3.1. - Conseguenza al teorema di Lagrange.
Sia $h : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (α, β). Allora:

$$\forall u, v \in (\alpha, \beta),\ |h(u) - h(v)| \leq \left(\sup_{x \in (\alpha,\beta)} \left| h'(x) \right| \right) |u - v| \tag{2.18}$$

Dimostrazione. (del Teorema di derivabilità per successioni.)

1. Dimostriamo la *convergenza uniforme* di f_n su (a, b). Per il Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme è sufficiente dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N,\ \sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $x \in (a, b)$, preso c come da ipotesi 2):

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_n(c) - f_m(c)|$$

Studiamo il *primo addendo*. Per il *corollario al teorema di Lagrange* si ha

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| \leq \left(\sup_{t \in (a,b)} |x - c| \right)$$

[1] Si veda il teorema 2.1.1, pag. 15.

Inoltre, poiché per ipotesi 3) f_n' converge uniformemente su (a,b), si ha per il criterio di Cauchy che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n,m \geq N_1,\ \sup_{x\in(a,b)} \left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Segue dunque che

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| &\leq \left(\sup_{t\in(a,b)} |x-c|\right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-c| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in (a,b),\ \forall n,m \geq N_1\end{aligned}$$

Per il *secondo addendo*, dato che per ipotesi 2) f_n converge puntualmente in c, possiamo applicare il criterio di Cauchy per le successioni:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n,m \geq N_2,\ \left|f_n(c) - f_m'(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posto $N = \max\{N_1, N_2\}$, per ogni $n,m \geq N$ si ha

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_n(c) - f_m(c)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)\end{aligned}$$

Da cui segue:

$$\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ \forall n,m \geq N$$

2. Denominiamo f il limite *puntuale* di f_n, che esiste e coincide con quello uniforme per la dimostrazione appena fatta al punto 1). Riscriviamo la tesi 2) e 3) nella seguente maniera:

   b. Per ogni $d \in (a,b)$ vale $\lim_{x\to d} \frac{f(x) - f(d)}{x-d}$

   c. $\lim_{x\to d} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x-d} = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to d} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x-d}$.

   Verifichiamo le ipotesi del *teorema di scambio dei limiti*:

   - $\lim_{x\to d} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x-d}$ esiste *finito* in quanto per ipotesi 1) gli f_n sono *derivabili* su (a,b).
   - $\frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d}$ *converge uniformemente* su $(a,b) \setminus \{d\}$.
     Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in (a,b) \setminus \{d\}$ si ha, in virtù del *corollario al teorema di Lagrange*

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(x) - f_n(d)}{x-d} - \frac{f_m(x) - f_m(d)}{x-d}\right| &\leq \left|\frac{f_n(x) - f_m(x) - (f_n(d) - f_m(d))}{x-d}\right| \leq \\ &\leq \sup_{t\in(a,b)} \left|f_n'(t) - f_m'(t)\right|\end{aligned}$$

Inoltre, si applica il *criterio di Cauchy* alle successione f_n': per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists N = N_0$ tale che per ogni $\forall n, m \geq N$ vale

$$\sup_{t \in (a,b)} \left| f_n'(t) - f_m'(t) \right| < \varepsilon$$

da cui segue

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} - \frac{f_m(x) - f_m(d)}{x - d} \right| < \varepsilon, \ \forall x \in (a, b) \setminus \{d\}$$

Per il *criterio di Cauchy* sulla convergenza uniforme, c'è convergenza uniforme su $(a, b) \setminus \{d\}$. Il teorema di scambio dei limiti garantisce che il limite

$$\lim_{x \to d} \lim_{n \to +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} \iff \lim_{x \to d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d}$$

esiste *finito* (tesi 2) e vale lo *scambio di limite e derivata* (tesi 3).

$\square$

CAPITOLO 3

Serie di funzioni

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Le Nel Capitolo 2 abbiamo iniziato a trattare la convergenza uniforme e puntuale di successioni di funzioni. Adesso passiamo a parlare di serie di funzioni. [**COMPLETARE**]

3.1 Serie in uno spazio normato

Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di serie a valori reali e di convergenza (assoluta) di una serie a valore reali.

Definizione 3.1.1. - Serie a valori reali e convergenza di una serie.

Data una successione $x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, la **serie** $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ è la somma di tutti gli elementi della successione.
Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \quad \forall n \geq 0 \tag{3.1}$$

si dice che la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge** se converge la successione s_n; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n \to +\infty} s_n \tag{3.2}$$

Definizione 3.1.2. - Convergenza assoluta.

Sia x_n una successione a valori reali. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge assolutamente** in $\mathbb{R}$ se converge la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$.

Teorema 3.1.1. - Convergenza assoluta implica convergenza semplice.
Ogni serie di numeri reali assolutamente convergente è anche semplicemente convergente.

Dimostrazione. Per dimostrare che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge, per il *Criterio di Cauchy per le serie*[a] è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| < \varepsilon$$

Per ipotesi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ converge: per il Criterio di Cauchy, si ha

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \left||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right|\right| = |x_{n+1}|+|x_{n+2}|+\ldots+\left|x_{n+p}\right| < \varepsilon$$

D'altra parte, dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$\left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| < |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right| < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Dalle ultime due relazioni si deduce immediatamente la prima relazione e dunque la tesi. □

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina 123 è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di Cauchy.

Osservazione. Il teorema appena dimostrato è una conseguenza della **completezza** di $\mathbb{R}$. Infatti, abbiamo usato il *criterio di Cauchy*, che si basa sul fatto che le successioni di Cauchy convergono sempre in $\mathbb{R}$ e quindi proprio per la completezza dei reali.
Se lo spazio non è completo si ottiene solo che la successione delle ridotte è di Cauchy, e senza la completezza dello spazio non posso dire che convergono.

Il viceversa del teorema appena dimostrato non è valido, come segue dal seguente controesempio.

Esempio. Convergenza semplice non implica convergenza assoluta

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$: non converge assolutamente in quanto la serie, con gli elementi in modulo, diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che, essendo la **serie armonica**[a], non converge. Tuttavia, la serie semplice è una serie a segni alterni e poiché
- $\frac{1}{n}$ è decrescente $\forall n \geq 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

per il *criterio di Leibniz* la serie semplice converge. Pertanto, la convergenza semplice non implica la convergenza assoluta.

[a]Nelle "Note aggiuntive", a pagina 127 è possibile trovare maggiori dettagli sulle serie notevoli.

Prendiamo ora $x_n \in X$, con X un insieme generico. Per generalizzare la definizione di serie convergente abbiamo bisogno che su X si possano compiere i seguenti passaggi:
- Poter definire s_n, cioè è necessario *sommare* elementi di X.
- Poter definire la *convergenza* in X.

Se dotiamo l'insieme X di una struttura di **spazio normato** possiamo generalizzare ad una serie generale le definizioni precedentemente enunciate per le serie a valori reali: infatti, se X è spazio normato gode sia dell'essere uno spazio metrico (e quindi è spazio topologico di Hausdorff, il che permette di definire univocamente la convergenza della successione) sia dell'essere spazio vettoriale (che permette la somma di elementi).

DEFINIZIONE 3.1.3. - SERIE E CONVERGENZA DI UNA SERIE.

Data una successione $x_n \in X$ in uno spazio *normato*, $n \geq 0$, la **serie** $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ è la somma di tutti gli elementi della successione.
Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \quad \forall n \geq 0 \tag{3.3}$$

si dice che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge** se converge la successione s_n; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n\to+\infty} s_n \tag{3.4}$$

DEFINIZIONE 3.1.4. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato e x_n una successione in X. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge totalmente** o **assolutamente** in X se converge la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$.

Dall'osservazione a pag. 32 il teorema 3.1.1 necessita della *completezza* dei reali. Per generalizzarlo ci basta lavorare in *spazi normati completi*.

TEOREMA 3.1.2. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE.
Ogni serie in X spazio normato completo totalmente convergente è anche semplicemen-

te convergente.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella affrontata nel teorema 3.1.1: è sufficiente sostituire al valore assoluto $|\cdot|$ la norma $\|\cdot\|$. $\square$

In generale, il problema della convergenza in spazi normati è *inesplorato*, ma se lo spazio è *completo* possiamo passare per la *convergenza totale* e studiare una serie a valori reali tramite i *criteri di convergenza*[1] noti dall'Analisi Matematica 1.

3.2 SERIE DI FUNZIONI

Consideriamo lo spazio $X = \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R}) = \mathscr{C}([a,b])$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la *metrica lagrangiana*:

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Una serie convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ in questo spazio si può quindi scrivere, per definizione, come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

dove S_n è una successione di funzioni. Allora la condizione di convergenza di serie in X si può formulare come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathscr{C}([a,b]) \iff S_n \text{ converge con metrica lagriangiana in} \mathscr{C}([a,b])$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathscr{C}([a,b]) \iff S_n \text{ converge uniformemente in} \mathscr{C}([a,b])$$

Per la stessa osservazione fatte a pag. 12, per parlare di convergenza uniforme non sono necessarie né la *compattezza* di $[a,b]$ né la *continuità* delle funzioni.
Possiamo *estendere* la definizione di convergenza di una serie di funzioni per

$$f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con A insieme contenuto nei reali o, ancora più in generale, per funzioni del tipo

$$f_n : X \longrightarrow Y$$

dove X è un *insieme qualunque* e Y è uno **spazio normato completo**.

Studieremo quindi in questo capitolo le **serie di funzioni** $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$; per studiare la *convergenza* di tali serie applicheremo le convergenze viste in precedenza alla *successione delle ridotte* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pag. 125 è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di convergenza delle serie a valori reali.

DEFINIZIONE 3.2.1. - CONVERGENZA DI UNA SERIE DI FUNZIONI.
In queste definizioni la convergenza delle ridotte si trasferisce sulla convergenza della serie:

- **(CP)** La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ **converge puntualmente** in $x \in A$ se $S_n(x)$ converge puntualmente in $x \in A$.
- **(CU)** La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ **converge uniformemente** in $x \in A$ se $S_n(x)$ converge uniformemente su A.

3.2.1 *Il criterio di Weierstrass*

Per motivi che saranno chiari nel Capitolo 4 dedicato alle *serie di potenze*, in questa sottosezione lavoreremo nel *campo dei complessi* $\mathbb{C}$.
Abbiamo dato la definizione di convergenza uniforme di una serie di funzione, ma essa non è di facile applicazione operativa. Infatti, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente su $A \subseteq \mathbb{C}$ se e solo se, definita $S(z)$ la funzione limite delle ridotte

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$$

essa vale

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{z \in A} |S_n(z) - S(z)| \right) = 0$$

Tuttavia, questa funzione richiede la conoscenza della *somma* $S(z)$, cosa che in generale *non* avviene. Usare direttamente il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme è sicuramente più conveniente, ma non è semplice comunque da verificare. Esiste tuttavia una condizione *sufficiente* che consente di provare la convergenza uniforme senza la conoscenza della somma limite.

PROPOSIZIONE 3.2.1. - CRITERIO DI WEIERSTRASS.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c_n \in \mathbb{R} \colon\ |f_n(z)| \leq c_n,\ \forall z \in A$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge (come serie *numerica*).

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge *uniformemente* in A.

OSSERVAZIONE. La dimostrazione utilizza il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.

Osservazione. Significato del criterio.
Le ipotesi 1) e 2) implicano immediatamente la convergenza puntuale (assoluta) della serie di potenze in ogni $z \in A$. Infatti, fissato z ho la relazione $|f_n(z)| \leq c_n$; da questo vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

e, poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)|$ converge per criterio del confronto e quindi la serie di funzioni converge puntualmente.
Quello che osserviamo nello specifico è che l'ipotesi 1) funge da *maggiorazione uniforme* della serie di funzioni su A, da cui possiamo ricavare, anche a partire dalla convergenza puntuale della serie, la convergenza uniforme su A.

3.3 Proprietà di regolarità di una serie di funzioni

Ci poniamo ora il problema di studiare come si modificano i teoremi di *limitatezza*, *continuità*, *integrabilità*, *integrabilità* e *derivabilità* visti nel Capitolo 2 nel caso delle *serie di funzioni*.

3.3.1 *Limitatezza*

Teorema 3.3.1. - Teorema di limitatezza per serie.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n limitata su A, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su A.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in A$, $S(x)$ è limitata su A.

Dimostrazione. La strategia è passare per la successione delle ridotte. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in A$, allora si ha:

- S_n limitata su A, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente uniformemente a S su A.

Per il teorema di limitatezza per le successioni, S è limitata su A. □

3.3.2 *Continuità*

Notiamo immediatamente che il *teorema di continuità per le serie* è del tutto analogo al *teorema di limitatezza* appena dimostrato.

Teorema 3.3.2. - Teorema di continuità per serie.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n continua su A, $\forall n \geq 1$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su A.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in A$, $S(x)$ è continua su A.

Dimostrazione. La strategia è passare per la successione delle ridotte. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in A$, allora si ha:

- S_n continua su A, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente uniformemente a S su A.

Per il teorema di continuità per le successioni, S è continua su A. □

3.3.3 *Integrabilità e scambio tra integrale e serie*

Teorema 3.3.3. - Teorema di integrabilità per serie, scambio tra integrale e serie.
Sia $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su $[a,b]$.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in [a,b]$:

1. $S \in \mathscr{R}([a,b])$.
2. Vale lo **scambio tra integrale e serie**:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in [a,b]$, allora si ha:

- $S_n \in \mathscr{R}([a,b])$, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente *uniformemente* a S su $[a,b]$.

Per il teorema di integrabilità per le successioni:

- $S \in \mathscr{R}([a,b])$ (somma di funzioni integrabili).
- Vale il *passaggio al limite sotto segno di integrale* per la successione delle ridotte, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

Poiché l'*integrale di una somma finita* è uguale ad una *somma finita di integrali*, il primo membro dell'equazione può essere riscritto come

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

e poiché $\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx$, otteniamo la tesi:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

□

3.3.4 *Derivabilità*

Teorema 3.3.4. - Derivabilità termine a termine.

Sia $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. f_n derivabile su (a,b), $\forall n \geq 1$.
2. $\exists c \in (a,b)$ tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$ converge
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su (a,b).

Allora:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su (a,b)

Inoltre, detta f la funzione somma:

3. f è derivabile su (a,b)
4. $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$, $\forall x \in (a,b)$, ossia vale la **derivazione termine a termine**:

$$D\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x),\ \forall x \in (a,b) \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Si applica il teorema di derivazione alla successione delle ridotte

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ \forall x \in (a,b),\ \forall n \geq 1$$

Verifichiamo le ipotesi:

1. S_n è derivabile su (a,b) $\forall n \geq 1$ perché lo sono le f_k su (a,b), $\forall k \geq$.
2. $S_n(c)$ converge perché $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$ converge per ipotesi.
3. $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$ converge uniformemente su (a,b) per ipotesi.

Allora per il teorema di derivazione per le successioni si ha che

$$S_n(x) \text{ converge uniformemente su } (a,b)$$

ossia, per definizione, che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(x) \text{ converge uniformemente su } (a,b)$$

Inoltre, definita la somma $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$, $\forall x \in (a,b)$, si ha che f è derivabile su (a,b) e per il teorema di derivazione

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x), \ \forall x \in (a,b)$$

□

Osservazione. La derivazione termine a termine si può interpretare anche come "la derivata della serie è la serie delle derivate", estendendo così la regola delle somma *finita* delle derivate.

CAPITOLO 4

Serie di potenze

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, dopo aver finito le citazioni stupide.

Le Nel Capitolo 2 abbiamo iniziato a trattare la convergenza uniforme e puntuale di successioni di funzioni. Adesso passiamo a parlare di serie di funzioni. [**COMPLETARE**]

4.1 Serie di potenze

Definizione 4.1.1. - Serie di potenze.
Una **serie di potenze** è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.1}$$

con a_n numeri complessi (eventualmente dipendenti da n), $z_0 \in \mathbb{C}$ dato e z che varia in un insieme A detto **insieme di convergenza**, costituito da tutti i punti z in cui la serie converge.

Cambiando le variabili possiamo *centrare* la serie in $z_0 = 0$ e dunque studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \dots \tag{4.2}$$

Chiaramente la serie così scritta converge in $z = 0$ (o, se prendiamo la serie *non* centrata nell'origine, in $z = z_0$), dato che la serie ha termini *costantemente nulli* e quindi è banalmente convergente.
Ci interessa ora studiare qual è l'insieme in $\mathbb{C}$ in cui tali serie convergono.

Teorema 4.1.1. - Insieme di convergenza.
Se una serie di potenze converge in $z_0 \in \mathbb{C}$, allora essa converge (assolutamente) in ogni punto z con $|z| < |z_0|$.

Dimostrazione. Sappiamo dalle ipotesi che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$$

è convergente, quindi per la condizione necessaria di convergenza il termine $a_n z_0^n$ tende a zero. Per definizione di limite significa che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N,\ \left|a_n z_0^n\right| < \varepsilon$$

Scegliamo arbitrariamente $\varepsilon = 1$, cioè $\exists N_1 = N(1) \colon \forall n \geq N$ vale $\left|a_n z_0^n\right| < 1$. Allora definitivamente vale

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n\right| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Poiché per ipotesi $|z| < |z_0|$, si ha $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ e quindi la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|$$

converge. Per il criterio del confronto di serie segue che anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$$

è convergente e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

converge (assolutamente). □

Con questo non solo abbiamo dimostrato che se la serie di potenze converge in z_0 allora la serie converge in tutti i punti z con $|z| < |z_0|$, ma implicitamente sappiamo anche che se la serie *non* converge in z_0 allora *non* converge per $|z| > |z_0|$.
Infatti, se la serie non converge in z_0 supponiamo *per assurdo* che esista z^*, con $|z^*| > |z_0|$, in cui la serie converge. Per il teorema appena dimostrato, in tutti i punti z con $|z| < |z^*|$ la serie di potenze converge, ma fra questi è compreso anche z_0 dove essa *non* converge.

4.1.1 *Il raggio di convergenza*

Per queste osservazioni l'insieme di convergenza della serie è un *cerchio* centrato nell'origine di un certo *raggio* R. Diamo una definizione formale di questo raggio.

Definizione 4.1.2. - Cerchio e raggio di convergenza.

Prendiamo

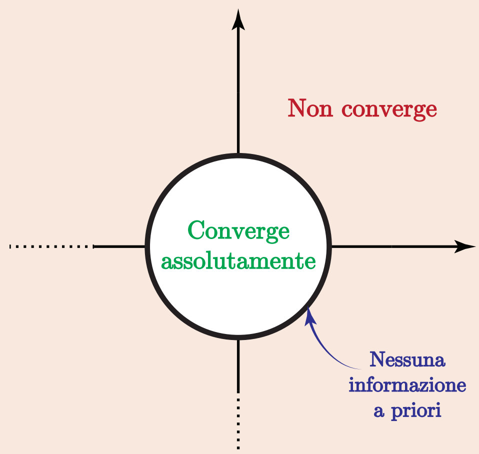
$$A = \left\{ z \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\} \subseteq \mathbb{C}$$

l'insieme di convergenza della serie di potenze centrata in $z_0 = 0$ e consideriamo l'insieme $E = \{|z| \mid z \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ dato da tutti i moduli dei punti di convergenza della serie. Il **raggio di convergenza** è definito come

$$r := \sup E = \sup \left\{ |z| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

Esso può essere:

- $R = 0$; in tal caso la serie converge *solo* per $z = 0$.
- $R = +\infty$; in tal caso la serie converge *per ogni* $z \in \mathbb{C}$.
- $0 < R < +\infty$; in base al teorema 4.1.1 la serie converge (assolutamente) per $|z| < r$, *non* converge per $|z| > r$ e a priori non abbiamo *alcuna informazione* per i punti z sul *bordo*, cioè tali che $|z| = r$. L'*insieme di convergenza* risulta essere un **cerchio aperto** centrato nell'origine di raggio R, a cui si aggiungono eventualmente altri punti di convergenza sul *bordo* (tutti, nessuno o solo alcuni).



Poiché sappiamo che la serie converge assolutamente per $|z| < r$, lo studio del raggio di convergenza passa attraverso lo studio della serie assoluta associata $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$.

Per determinare il raggio di convergenza, possiamo ad esempio usare il **criterio di D'Alembert** o detto anche *criterio del rapporto*, che ci fornisce una condizione *sufficiente* su come determinare il raggio di convergenza.

PROPOSIZIONE 4.1.1. - CRITERIO DI D'ALEMBERT O DEL RAPPORTO.

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, se $a_n \neq 0$ definitivamente ed esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

allora
1. $L = 0 \implies R = +\infty$
2. $L = +\infty \implies R = 0$
3. $0 < L < +\infty \implies R = 1/L$

Questa proposizione ha il vantaggio di essere operativamente utile, ma ovviamente solo se valgono le ipotesi: non è scontato che il limite del rapporto sia ben definito!
Un teorema più generale che vale *per ogni serie* è il *criterio della radice* o altresì noto come **teorema di Cauchy-Hadamard**.

Teorema 4.1.2. - Teorema di Cauchy-Hadamard
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

e sia

$$\lambda = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n|} \tag{4.3}$$

Allora
1. Se $\lambda = 0$, la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Se $0 < \lambda < +\infty$, la serie converge $R = 1/\lambda$.
3. Se $\lambda = +\infty$, la serie converge solo in $z = 0$.

Osservazione. I tre casi scritti esauriscono *tutti* i casi possibili. Infatti, per la permanenza del segno del limsup[a] vale

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0,\ \forall n \geq 0 \implies \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$$

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato insieme ad altri relativi al limsup e liminf.

Dimostrazione. (del teorema di Cauchy-Hadamard.)

I Partiamo dal dimostrare il punto 2): dobbiamo provare che $R = \frac{1}{\lambda}$, ossia
   a. Se $|z| < 1/\lambda$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge.
   b. Se $|z| > 1/\lambda$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *non* converge.

   Infatti, la condizione a. non basta per dimostrare che la convergenza è solo all'interno del cerchio. Proviamo ora le due tesi.
   a. Sia z tale che $|z| < 1/\lambda$. Se $z = 0$ la serie banalmente converge perché ogni serie converge nel suo centro.
      Se $z \neq 0$, vale $\lambda < 1/|z|$; consideriamo allora λ' tale che $\lambda < \lambda' < 1/|z|$: poiché

$\lambda' > \lambda$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$* \quad \exists N : \forall n \geq N, \ \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda'$$

Proviamo che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente usando il criterio del confronto.

$$|a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n||z|^n \underset{*}{<} (\lambda')^n |z|^n = (\lambda'|z|)^n, \ \forall n \geq N$$

Questo è il termine n-esimo della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda'|z|)^n$$

di ragione $\lambda'|z|$. Poiché $0 < \lambda'|z| < 1$ per la scelta di λ', la serie geometrica converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$$

e dunque converge anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

.

b. Sia z tale che $|z| > 1/\lambda$. Per mostrare la non convergenza della serie proviamo che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n z^n \neq 0, \ \forall z \colon |z| > \frac{1}{\lambda}$$

Per questo è sufficiente mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0, \ \forall z \colon |z| > \frac{1}{\lambda}$$

Anche se $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico con la distanza indotta dal modulo, siamo passati da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ col modulo in modo da utilizzare l'ipotesi del lim sup, la quale richiede uno spazio metrico ordinato (come è $\mathbb{R}$).
Poiché $z \neq 0$, vale $\lambda > 1/|z|$. Consideriamo allora λ'' tale che $1/|z| < \lambda'' < \lambda$: poiché $\lambda'' < \lambda$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$* \quad \exists n_k \to +\infty \colon \sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|} > \lambda''$$

Si ha, lungo la sottosuccessione:

$$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| = |a_n| z^{n_k} \underset{*}{>} (\lambda'')^{n_k} |z|^{n_k} \underset{\substack{\text{per la} \\ \text{scelta} \\ \text{di } \lambda''}}{=} (\lambda''|z| > 1)^{n_k} > 1, \ \forall n_k$$

Poiché esiste una sottosuccessione che è sempre maggiore di 1, deve esistere un valore limite della successione $|a_n z^n|$ maggiore o uguale a 1. Ma allora

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n| \geq 1 \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0$$

II La dimostrazione del punto 1) è analoga alla prima parte della dimostrazione del punto 2). In questo caso, dobbiamo mostrare che la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$. Se $z = 0$, la serie banalmente converge, mentre se $z \neq 0$, si ha chiaramente che $0 = \lambda < 1/|z|$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideriamo allora λ' tale che $0 < \lambda' < 1/|z|$: poiché $\lambda' > 0$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$* \qquad \exists N : \forall n \geq N \ \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda'$$

Proviamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente usando il criterio del confronto.

$$|a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n||z|^n \underset{*}{<} (\lambda')^n |z|^n = (\lambda'|z|)^n, \ \forall n \geq N$$

Questo è il termine n-esimo della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda'|z|)^n$$

di ragione $\lambda'|z|$. Poiché $0 < \lambda'|z| < 1$ per la scelta di λ', la serie geometrica converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$$

e dunque converge anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Poiché la scelta di z è stata *arbitraria*, vale la tesi.

III La dimostrazione del punto 3) è analoga alla seconda parte della dimostrazione del punto 2). In questo caso, dobbiamo mostrare che la serie converge solo nel punto $z = 0$.
Se $z = 0$, la serie banalmente converge. Per mostrare la *non* convergenza della serie proviamo che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n z^n \neq 0, \ \forall z \neq 0$$

Questo è equivalente[a] a mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0, \ \forall z \neq 0$$

Dato $z \neq 0$, consideriamo allora λ'' tale che $1/|z| < \lambda'' < +\infty$: poiché $\lambda'' < +\infty$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$* \quad \exists n_k \to +\infty : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \lambda''$$

Si ha, lungo la sottosuccessione:

$$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| = |a_n| z^{n_k} \underset{*}{>} (\lambda'')^{n_k} |z|^{n_k} \underset{\substack{\text{per la} \\ \text{scelta} \\ \text{di } \lambda''}}{=} (\lambda''|z| > 1)^{n_k} > 1, \ \forall n_k$$

Poiché esiste una sottosuccessione che è sempre maggiore di 1, deve esistere un valore limite della successione $|a_n z^n|$ maggiore o uguale a 1. Ma allora

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n| \geq 1 \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0$$

La scelta di z è arbitraria, purché z sia diverso da zero; per questo motivo vale la tesi.

□

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato.

4.2 COMPORTAMENTO SUL BORDO

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_n, \ z \in \mathbb{C}$$

con raggio di convergenza finito e non nullo. I possibili comportamenti sul *bordo* del cerchio di convergenza sono i seguenti:

1. Convergenza in *tutti i punti* del bordo del cerchio di convergenza
2. *Non* convergenza in *nessun punto* del bordo del cerchio di convergenza
3. Convergenza solo in *alcuni punti* del bordo del cerchio di convergenza

Mostriamo per ciascuno di essi un esempio.

Esempio. Caso 1.
Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

Con la formula di D'Alembert vediamo che il raggio di convergenza è $R = 1$. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 = L \implies r = \frac{1}{L} = 1$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$ la serie converge (assolutamente):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^\alpha}$$

La serie in modulo è la *serie armonica generalizzata* che, per $\alpha > 1$, converge; la serie semplice converge su tutti i punti del bordo.

Esempio. Caso 2.
Consideriamo la *serie geometrica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$$

Poichè $a_n \equiv 1\ \forall n$, il criterio del rapporto ci fornisce come raggio di convergenza $R = 1$.
Per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$ la serie *non* converge: ricordiamo che, presa la successione $c_n \in \mathbb{C}$, vale

$$\lim_{n\to+\infty} |c_n| \neq 0 \iff \lim_{n\to+\infty} c_n \neq 0$$

In questo caso:

$$\lim_{n\to+\infty} |z^n| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 \implies \lim_{n\to+\infty} z^n \neq 0$$

È evidente che la *condizione necessaria* di convergenza *non* è soddisfatta: la serie *non* converge in nessun punto del bordo.

Esempio. Caso 3.
Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

L'applicazione del criterio del confronto è esattamente analogo a quello visto nel caso 1 e il raggio di convergenza è pertanto $R = 1$.
Se $z = 1$ la serie *non* converge, dato che essa diventa una serie armonica generalizzata con $\alpha \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Invece, per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$ e $z \neq 1$ la serie converge: infatti, possiamo applicare il *criterio di Abel-Dirichlet*.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \beta_n$$

con $\alpha_n = z^n$ e $\beta_n = 1/n^\alpha,\ n \geq 1$.

1. $\beta_n = 1/n^\alpha$ è una successione di elementi strettamente positivi, decrescenti e infinitesima per $n \to +\infty$.
2. La successione delle *somme parziali* di $\alpha_n = z^n$ è *limitata*. Consideriamo

$$\left|\sum_{n=1}^{k} z^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{k} z^n - 1\right| \boxed{=}$$

Poiché $\sum_{n=0}^{k} z^n$ è un serie geometrica parziale, sappiamo la sua somma parziale.
Applicando poi una *disuguaglianza triangolare*, troviamo una *maggiorazione* della

somma parziale di α_n.

$$\boxed{=} \left| \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} - 1 \right| = \left| \frac{z - z^{k+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{|z| + \left|-z^{k+1}\right|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + 1}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}, \ \forall k \geq 1$$

Osserviamo che, nonostante la serie converga, essa non converge assolutamente: la serie in modulo è la serie armonica generalizzata con $\alpha \leq 1$, nota per essere divergente.

Anche se in generale non possiamo affermare a priori come converge sul bordo si può osservare che, in alcuni casi particolari, dalla convergenza in un punto del bordo si ottiene la convergenza sull'intero bordo. Vediamo alcuni risultati.

Proposizione 4.2.1. - Convergenza assoluta sul bordo se la serie di potenze converge assolutamente in un punto.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

Se la serie converge assolutamente in un punto della frontiera del cerchio di convergenza, allora converge assolutamente su tutta questa frontiera.

Dimostrazione. Supponiamo che la serie converga assolutamente in z_0, dove $|z_0| = R$ e prendiamo un qualunque z tale che $|z| = R$. Osserviamo che, presa la serie in modulo, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||z^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||z|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|R^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||z_0|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|a_n z_0^n\right|$$

che converge per ipotesi. Allora la serie di potenze converge assolutamente. □

Corollario 4.2.1. - Convergenza sul bordo se la serie di potenze a coefficienti reali positivi converge in $z = R$.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

Se la serie ha coefficienti reali positivi e converge nel punto $z = R$, dove $R \in (0, +\infty)$ è il raggio di convergenza, allora converge in ogni punto della frontiera del cerchio di convergenza.

Dimostrazione. Poiché a_n e R sono reali positivi, $a_n = |a_n|$ e $R = |R|$. Allora si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n R^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n R^n|$$

Quindi in questo caso la convergenza semplice della serie implica la convergenza assoluta. Poiché la serie converge assolutamente in un punto del bordo, segue dalla proposizione precedente la convergenza (assoluta) in tutti i punti del bordo. □

4.3 Serie di potenze e convergenza uniforme

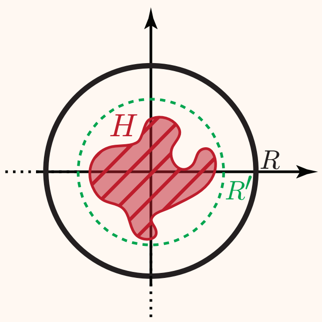
Teorema 4.3.1. - Converge uniforme delle serie di potenze.

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R \in (0, +\infty)$. Allora

1. La serie converge uniformemente su ogni insieme $H \subseteq \mathbb{C}$ tale che $\overline{H} \subsetneq B_R(0)$, con $B_R(0)$ il disco aperto di convergenza, ovvero su qualsiasi insieme contenuto nel disco aperto tale che la sua chiusura non tocchi il bordo.
2. Se la serie converge assolutamente in ogni $z \in \partial B_R(0)$ (il bordo del disco), allora converge uniformemente sul disco chiuso $\overline{B_R(0)}$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione useremo il *criterio di Weierstrass*[a].

1. Sia H tale che $\overline{H} \subsetneq B_R(0)$. Per il criterio di Weierstrass, per provare la convergenza uniforme su H è sufficiente provare che esiste una successione c_n tale che
   a. $|a_n z^n| \le c_n$, $\forall z \in H$
   b. $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge.



[a] Si veda Capitolo 3, sezione 3.2.1, pag. 35.

Poiché H è solo *strettamente contenuto* nel disco aperto di convergenza, $\exists R' < R$ tale che si abbia $\overline{H} \subseteq B_{R'}(0)$, ossia $|z| \le R'$, $\forall z \in H$.
Allora si ha, $\forall n \ge 0$ e $\forall z \in H$

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \le \underbrace{|a_n|(R')^n}_{\substack{c_n \text{ non} \\ \text{dipende da } z}}$$

Inoltre, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(R')^n$$

converge in quanto è la convergenza della serie di potenze per il punto $z = R'$, che è *interno* al disco di convergenza $B_R(0)$. Applicando il criterio di Weierstrass otteniamo la tesi.

2. Si ripete la dimostrazione sull'insieme $\overline{B_R(0)}$ con $R' = R$, considerando che la

serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| R^n$$

converge per ipotesi sulla convergenza sul bordo.

□

Esempio. Serie geometrica.
Sulla *serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

abbiamo già ricavato diverse informazioni: ha raggio di convergenza $R = 1$ e *non* c'è convergenza (assoluta) sul bordo, inoltre ne conosciamo la somma. Studiamo ora la convergenza uniforme.

- Converge uniformemente su ogni insieme H tale che $\overline{H} \subsetneq B_1(0)$ per il teorema precedente.
- Non avendo alcuna convergenza sul bordo, a priori non possiamo dare risultati generali sulla convergenza uniforme sulla base del teorema visto. Tuttavia, possiamo mostrare direttamente - grazie al fatto che la somma parziale e limite della serie geometrica è nota[a] - che la serie non converge uniformemente sul disco aperto $B_1(0)$. Infatti

$$\sup_{z \in B_1(0)} |S_n(z) - S(z)| = \sup_{z \in B_1(0)} \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} \right| = \sup_{z \in B_1(0)} \left| \frac{-z^{n+1}}{1 - z} \right| =$$
$$= \sup_{z \in B_1(0)} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = +\infty, \ \forall n \geq 0$$

da cui

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{z \in B_1(0)} |S_n(z) - S(z)| \right) = +\infty \neq 0$$

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare maggiori dettagli sulla somma (parziale) della serie geometrica e come ricavarla.

4.4 PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con $R > 0$ il raggio di convergenza. Studiamo le proprietà di continuità e derivabilità della **funzione somma**

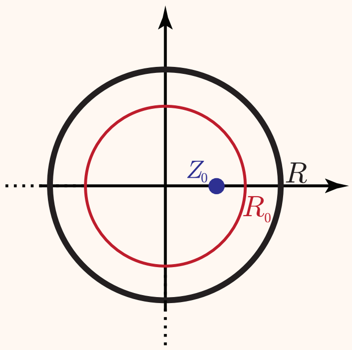
$$\begin{aligned} f : B_R(0) \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.4.1 *Continuità*

Proposizione 4.4.1. - Proprietà di continuità per la somma di una serie di potenze, caso generale.
La funzione f è continua su $B_R(0)$.

Attenzione! La convergenza della serie di potenze su $B_R(0)$ *non* è in generale uniforme, ma sappiamo al più che converge uniformemente su H tale che $\overline{H} \subsetneq B_R(0)$, quindi dobbiamo tenere conto di questo fattore nelle dimostrazioni che faremo.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $f \in \mathscr{C}(B_R(0))$, cioè f continua in z_0, $\forall z_0 \in B_R(0)$. Sfrutto il fatto che la continuità è una proprietà locale, quindi fisso un punto e studio la continuità nel punto.



Sia $z_0 \in B_R(0)$ fissato. Per proprietà della metrica, allora $\exists R_0 < R$ tale che $z_0 \in B_{R_0}(0)$. Su $B_{R_0}(0)$ si ha continuità uniforme e dunque, posto

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

si ha

1. S_n continua su $B_{R_0}(0)$ perché è un polinomio.
2. S_n converge uniformemente a f su $B_R(0)$.

Per il teorema di continuità della funzione limite, f è continua in $B_{R_0}(0)$ e dunque in z_0.
□

Questo risultato ci permette di parlare della convergenza sul disco aperto, ma se c'è qualche tipo di convergenza sul bordo, e quindi f è definita anche su di esso, si può estendere la continuità di f fino a tale frontiera? Studiamo due casi.

Corollario 4.4.1. - Proprietà di continuità per la somma di una serie di potenze, caso sul bordo con convergenza assoluta.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

con raggio di convergenza $R > 0$. Se la serie converge (assolutamente) su $\partial B_R(0)$ allora la serie è continua su $\overline{B_R(0)}$.

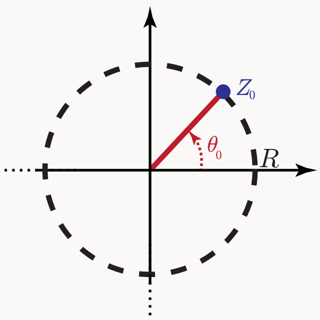
Dimostrazione. Segue immediatamente ricordando che, dalle ipotesi di convergenza assoluta sul bordo, vale la convergenza uniforme su $\overline{B_R(0)}$ sulla base del teorema 4.3.1.
□

Se invece supponiamo che la serie converga in un punto[1] z_0, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, possiamo definire la **funzione somma** come

$$\begin{aligned} f : B_R(0) \cup \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned} \tag{4.5}$$

La convergenza uniforme di f anche sui punti di convergenza z_0 sul bordo ci viene garantita dal **teorema di Abel**.

TEOREMA 4.4.1. - TEOREMA DI ABEL.
Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con raggio di convergenza $R > 0$. Se $\exists z_0 = Re^{i\theta_0}$ (ovvero z_0 sta nel bordo del raggio di convergenza) tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, allora



1. la serie converge uniformemente sul *segmento*

$$\Sigma_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\theta_0},\ r \in [0, R] \right\} \tag{4.6}$$

2. La restrizione di f a Σ_0 è *continua* su z_0, ossia

$$\lim_{r \to R} f\left(re^{i\theta_0}\right) = f(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n \tag{4.7}$$

4.4.2 *Derivabilità*

Abbiamo definito la funzione somma dal disco aperto $B_R(0)$ in campo complesso a $\mathbb{C}$, ma al momento non conosciamo cosa vuol dire derivabilità di una funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Per il momento, limitiamoci al caso reale, cioè consideriamo una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ x \in \mathbb{R},\ a_n \in \mathbb{R}$$

con raggio di convergenza $R > 0$. In questo caso il cerchio di convergenza è un intervallo $(-R, R)$, con estremi eventualmente inclusi. La funzione somma risulta allora la funzione

$$\begin{aligned} f : (-R, R) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned} \tag{4.8}$$

[1] Nel caso di più punti di convergenza z_0, z_1, ..., la funzione somma f sarà definita su $B_R(0) \cup \{z_0\} \cup \{z_1\} \cup \ldots$. Qui riportiamo per semplicità il caso di un solo punto, ma i risultati successivi sono opportunamente generalizzabili con più punti di convergenza sul bordo.

Teorema 4.4.2. - Derivabilità della somma di una serie di potenze.
Sia data

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ \forall x \in (-R, R), \ a_n \in \mathbb{R}$$

con $R > 0$ il raggio di convergenza. Allora

1. f è derivabile su $(-R, R)$
2. La derivata di f è

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \ \forall x \in (-R, R) \tag{4.9}$$

Osservazione. Nell'equazione della derivata di f la sommatoria parte da $n = 1$ in quanto il termine per $n = 0$ è identicamente uguale a zero; inoltre, se così non fosse, il primo termine sarebbe $a_0 \frac{1}{x}$, che non è definito in $x = 0$, contraddicendo la prima delle due tesi.

Per dimostrare questo teorema useremo il *teorema di derivabilità* per serie di funzioni [2]: poiché le ipotesi di tale teorema 1) e 2) sono banalmente verificate, dobbiamo contrarci sull'ipotesi 3), ovvero abbiamo bisogno di informazioni sulla convergenza uniforme della serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Poiché la serie delle derivate è ancora una serie di potenze, allora ci basta studiare il raggio di convergenza.

Lemma 4.4.1. - Convergenza della serie di derivate della serie di potenze.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

e sia $R > 0$ il suo raggio di convergenza. Allora la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza R.

Dimostrazione. Riscriviamo la serie delle derivate, operando un cambio di indici ponendo $n = k + 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(k+1)\, a_{k+1}}_{=b_k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k a_k$$

[2] Si veda Capitolo 3, teorema 3.3.4, pag. 38.

Sia R' il suo raggio di convergenza. Per il teorema di Cauchy-Hadamard si ha

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |(n+1)\,a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} \underbrace{(n+1)^{1/n}}_{:=\alpha_n} \underbrace{|a_{n+1}|^{1/n}}_{:=\beta_n} = \limsup_{n\to+\infty} \alpha_n \beta_n \boxed{=}$$

Ottenendo così il prodotto di due successioni. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(n+1)}{n}}$$

Poichè $\frac{\log(n+1)}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ per *confronto della crescita degli infiniti*, si ha che $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = e^0 = 1$, dunque α_n ammette limite e coincide col suo lim sup. Allora, per proprietà[a] del lim sup:

$$\boxed{=} \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \limsup_{n\to+\infty} \beta_n = \limsup_{n\to+\infty} |a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \boxed{=}$$

Applicare Cauchy-Hadamard sulla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

con raggio di convergenza $R > 0$, osserviamo che

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$$

In quanto $\dfrac{n+1}{n} \to 1$ per $n \to +\infty$, allora abbiamo mostrato che

$$\frac{1}{R'} = \ldots = \limsup_{n\to+\infty} \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{R}$$

cioè $R' = R$. □

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato insieme ad altri relativi al limsup e liminf.

Grazie a questo lemma, possiamo finalmente dimostrare il teorema lasciato in sospeso all'inizio della sezione.

Dimostrazione. (del Teorema di derivabilità della somma di una serie di potenze.)
Fissiamo $\overline{x} \in (-R, R)$ arbitrario e sia (a, b) tale che

- $\overline{x} \in (a, b)$.
- $[a, b] \subsetneqq (-R, R)$

Applichiamo ora il teorema di derivabilità termine a termine della serie di funzioni su (a, b) sulla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Vediamo che le ipotesi sono verificate:

- $f_n(x) = a_n x^n$ derivabile in (a, b), $\forall n \geq 1$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge $\forall x \in (a,b)$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ converge uniformemente su (a,b) per la scelta di (a,b), sulla base del lemma precedentemente dimostrato.

Per il teorema di derivabilità termine a termine f è derivabile in (a,b) e dunque anche in $\overline{x}$, con derivata in tal punto

$$f'(\overline{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

Per l'arbitrarietà di $\overline{x}$, questi risultati valgono $\forall x \in (-R,R)$ e dunque segue la tesi. $\square$

4.5 FUNZIONI ANALITICHE E SERIE DI TAYLOR

La tesi 2) appena dimostrata ci dice che la derivata f' è una somma di serie di potenze con stesso raggio di convergenza R di f. Possiamo riapplicare il teorema alla funzione f', notando però che la serie inizia da $n = 2$:

- f' è derivabile in $(-R,R)$.
- $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}, \ \forall x \in (-R,R)$.

Ma anche f'' è una serie di potenze con raggio R: possiamo riapplicare il teorema su f'' e ammettere l'esistenza di f''' come serie di potenze. Iterando il ragionamento, si trova che esiste $f^{(k)}(x), \ \forall x \in (-R,R), \ \forall k \geq 0$ e vale

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \ \forall x \in (-R,R) \tag{4.10}$$

Esplicitiamo il primo termine di $f^{(k)}(x)$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= k(k-1)\dots(k-k+1)a_k x^0 + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \\ &= k!a_k + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \end{aligned}$$

Valutando in $x = 0$ otteniamo

$$f^{(k)}(0) = k!a_k + 0 = k!a_k$$

Da cui otteniamo una espressione del termine a_k in funzione della derivata k-esima, supponendo che esiste tale derivata:

$$a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}, \ \forall k \geq 0 \tag{4.11}$$

Riscriviamo questi risultati in un unico teorema.

TEOREMA 4.5.1. - ANALITICITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

con raggio di convergenza $R > 0$ e sia f la sua somma. Allora

1. $f \in \mathscr{C}^\infty((-R, R))$.
2. La derivata k-esima è nella forma

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k},\ \forall x \in (-R, R) \tag{4.12}$$

3. Il coefficiente a_k si può scrivere come

$$a_k = \frac{f^{(k)}}{k!},\ \forall k \geq 0 \tag{4.13}$$

4. f è *analitica* in 0, ossia si può scrivere come una **serie di Taylor di f centrata in** $x = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k,\ \forall x \in (-R, R) \tag{4.14}$$

Diamo una definizione formale del termine “funzione analitica” che abbiamo appena usato nel teorema, notando che l’analiticità è un concetto locale, cioé vale nell’intorno di un punto.

DEFINIZIONE 4.5.1. - FUNZIONE ANALITICA.
Sia $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$.

1. Dato $x_0 \in U$, f si dice **analitica** in x_0 se $\exists r_0 > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,\ \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0) \subseteq U$$

2. f si dice **analitica in** U se è analitica in ogni punto $x_0 \in U$. In questo caso si scrive $f \in \mathscr{A}(U)$.

Il problema della *ricostruzione* di una funzione come somma della sua serie di Taylor, introdotto nello studio della lunghezza dell’ellisse nel Capitolo 1, si può anche formulare come

“Ogni funzione $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ è anche analitica su U?”

ossia

$$f \in \mathscr{C}^\infty(U) \overset{?}{\Longrightarrow} f \in \mathscr{A}(U)$$

In generale la risposta è **no**, come possiamo vedere nell’esempio successivo.

ESEMPIO. CONTROESEMPIO FUNZIONE $\mathscr{C}^\infty$ MA NON ANALITICA.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Innanzitutto, mostriamo che f è di classe $\mathscr{C}^\infty$:

- f è certamente di classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- Dimostriamo che esiste $f^{(k)}(0)$, $\forall k \geq 0$, che essa sia uguale a 0 per ogni k e che $f^{(k)} \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, $\forall k \geq 0$.
  Per far ciò, innanzitutto mostriamo per *induzione* su k che per ogni $k \geq 0$ esiste un polinomio P_{3k} di grado $3k$ tale per cui

  $$f^{(k)}(x) = P_{3k}\left(x^{-1}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \ \forall x \neq 0$$

  La relazione è banalmente vera per $k = 0$. quindi proviamo ora il passo induttivo: supponiamo che sia vera la relazione per ogni intero minore o uguale a k e dimostriamo che è vera per $k+1$. A tal fine deriviamo la relazione corrispondente all'interno k, ottenendo

  $$f^{(k+1)}(x) = -P'_{3k}(x^{-1})x^{-2} e^{-1/x^2} + 2x^{-3} P_{3k}(x^{-1}) e^{-1/x^2}, \quad \forall\ x \neq 0$$

  e dunque

  $$f^{(k+1)}(x) = Q(x^{-1}) e^{-1/x^2}, \quad \forall\ x \neq 0,$$

  dove

  $$Q(u) = -u^2 P'_{3k}(u) + 2u^3 P_{3k}(u), \quad \forall\ u \neq 0$$

  Osserviamo che P'_{3k} è un polinomio di grado $3k-1$; si ricava quindi che $u^2 P'_{3k}(u)$ è un polinomio di grado $3k+1$, mentre $2u^3 P_{3k}(u)$ è un polinomio di grado $3k+3$. Concludiamo che Q è un polinomio di grado $3k+3 = 3(k+1)$, come richiesto. Utilizzando i *confronti di crescita*, dalla relazione appena mostrata si vede che

  $$\lim_{x \to 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \to 0} P_{3k}(x^{-1}) e^{-1/x^2} = 0, \quad \forall\ k \geq 0$$

  e dunque esiste $f^{(k)}(0)$, per ogni $k \geq 0$, e si ha $f^{(k)}(0) = 0$. Inoltre, la funzione $f^{(k)}$ è continua in $x = 0$, per costruzione; concludiamo quindi che $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Tuttavia, $f \notin \mathscr{A}(\mathbb{R})$. Infatti, la serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0}{k!} x^k \equiv 0$$

che sì converge, ma *non* a f, ossia $f(x) \neq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, $\forall x \neq 0$.

Bisogna quindi capire sotto quali ipotesi ulteriori una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ è anche analitica, ovvero si può scrivere come somma della sua serie di Taylor: in particolare dobbiamo verificare che la seria innanzi tutto converga e che converga alla f voluta (il che non è successo nell'esempio precedente). Cerchiamo a tal scopo una condizione *sufficiente*. Riprendiamo il problema come era stato posto originalmente; approssimiamo f con il *polinomio* di Taylor, tenendo conto del *resto* $R_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

Per passare da questa approssimazione alla riscrittura di f come *serie* di Taylor è necessario ridurre il resto dell'approssimazione a zero al crescere dei termini del polinomio, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Ricordiamo l'espressione del resto in *forma di Lagrange* , che è di tipo quantitativo:

$$\exists \xi = \xi_{x,n} \ : \ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

La condizione sufficiente che andremo ora a definire necessita di avere una informazione sulle derivate $f^{(n)}$ per *n sufficientemente grande*.

Teorema 4.5.2. - Condizione sufficiente di analiticità.
Sia $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ e sia $x_0 \in U$. Se $\exists r_0 > 0$, $\exists M > 0$, $\exists n_0 > 0$ tale che

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le \frac{Mn!}{r_0^n},\ \forall x \in (x_0 - r_0,\ x_0 + r_0),\ \forall n \ge n_0 \tag{4.15}$$

allora f è *analitica* in x_0 e vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\ \forall x \in (x_0 - r_0,\ x_0 + r_0)$$

nello stesso intervallo della stima considerato sopra.

Dimostrazione. Sia $x \in (x_0 - r_0,\ x_0 + r_0)$ fissato. Dobbiamo provare che

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

dove ξ è ottenuto applicando la formula di Taylor con il resto in *formula di Lagrange*. Poiché $\xi \in (x_0 - r_0,\ x_0 + r_0)$, per l'ipotesi di partenza si può stimare $f^{(n+1)}(\xi)$:

$$0 \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \underset{\forall n \ge n_0}{\le}$$

$$\le \frac{\frac{M\cancel{(n+1)!}}{r_0^{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}}|x-x_0|^{n+1} = M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{r_0^{n+1}} = M\left(\frac{|x-x_0|}{r_0}\right)^{n+1}$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$0 \le |R_n(x)| \le M\left(\frac{|x-x_0|}{r_0}\right)^{n+1},\ \forall n \ge n_0$$

Poiché $\left(\frac{|x-x_0|}{r_0}\right)^{n+1}$ è una successione geometrica di ragione $\frac{|x-x_0|}{r_0} \in (0,1)$, essa tende a 0 per $n \to +\infty$: per il *teorema del confronto* abbiamo $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. $\square$

Osservazione. Questa condizione sufficiente si verifica anche se $\exists M > 0, \exists r_0 > 0$ tale per cui

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \ \forall x \in (x_0 - r_0,\ x_0 + r_0),\ \forall n \geq 0 \tag{4.16}$$

Infatti, $\forall r_0 > 0$, per confronto di crescita si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{r_0^n} = +\infty$$

Dunque esiste sempre n_0 tale che $\forall n \geq n_0$ si ha $\frac{n!}{r_0^n} > 1$. Segue allora

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M < M\frac{n!}{r_0^n},\ \forall x \in (x_0 - r_0,\ x_0 + r_0),\ \forall n \geq n_0$$

4.5.1 *Eserciziamoci! Funzioni analitiche e serie di Taylor*

Esercizio. Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Sia $R > 0$ il suo raggio di convergenza e sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall\ x \in (-R, R)$$

Provare che $f \in \mathscr{A}((-R,R))$.

Soluzione. La tesi da dimostrare è

$$\forall\ x_0 \in (-R,R) \quad \exists\ r_0 > 0 \quad \exists \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-x_0)^n, \quad \forall\ x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0).$$

Fissiamo $x_0 \in (-R,R)$ e consideriamo $r_0 := R - |x_0| > 0$; $\forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$, applicando la formula del binomio di Newton si ricava

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0 + x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x-x_0)^k.$$

Possiamo scambiare l'ordine delle sommatorie in quanto la serie doppia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x-x_0|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|x-x_0| + |x_0|)^n$$

converge, infatti $|x-x_0|+|x_0|<r_0+|x_0|=R$.
Scambiamo allora l'ordine e cambiamo nome agli indici, ottenendo

$$f(x)=f(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+m}\binom{n+m}{n}x_0^n(x-x_0)^m=\sum_{m=0}^{+\infty}b_m(x-x_0)^m$$

con

$$b_m=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+m}\binom{n+m}{n}x_0^n.$$

4.5.2 *Esempi di funzioni analitiche*

Teorema 4.5.3. - Analiticità di e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$.
Le funzioni e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ sono analitiche in $x_0=0$ e vale

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k,\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4.17}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4.18}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4.19}$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k,\quad \forall x\in(-1,1),\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \tag{4.20}$$

Attenzione! L'ultima formula vale solo per $x\in(-1,1)$, indipendentemente dal dominio di $(1+x)^\alpha$. Ad esempio, se $\alpha=\frac{1}{3}$, $(1+x)^\alpha=\sqrt[3]{1+x}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, però si può scrivere somma della sua serie di Taylor solo in $(-1,1)$; in altre parole, l'analiticità è una proprietà *locale*.

Le prime tre formule si dimostrano usando la condizione sufficiente precedentemente dimostrata. Per quanto riguarda la quarta formula, *non* si riesce a verificare la validità di tale condizione, ma con un altro ragionamento si trova comunque l'analiticità. Questo mostra che la condizione scritta sopra è *solo* sufficiente, ma *non* necessaria per l'analiticità.

Dimostrazione.

- e^x, $\cos x$, $\sin x$. È noto che

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k\qquad\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\qquad\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

sono i polinomi di Taylor di e^x, $\sin x$ e $\cos x$ centrati in $x_0=0$. Per $n\to+\infty$ si ottengono le serie di Taylor

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Proviamo ora che valgono le uguaglianze scritte. Per dimostrare che valgono su tutto $\mathbb{R}$ è sufficiente dimostrate che valgono su un intervallo del tipo $(-r_0, r_0)$ con $r_0 > 0$ arbitrario.
Sia allora $r_0 > 0$ fissato arbitrariamente e sia $x \in (-r_0, r_0)$. Proviamo che è vera la condizione 4.16, dato che essa implica la condizione sufficiente 4.15. Vediamo i tre casi:

◇ e^x. La derivata di $f(x) = e^x$ è $f^{(n)}(x) = e^x$, quindi si ha

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x \leq e^{r_0} = M, \ \forall x \in (-r_0, r_0), \ \forall n \geq 0$$

◇ $\cos x$, $\sin x$. Poiché le derivate di seno e coseno sono ciclicamente seno e coseno con opportuni segni, la derivata n-esima di $\cos x$ e $\sin x$ in modulo è sempre limitata da 1.

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq 1 = M, \ \forall x \in (-r_0, r_0), \ \forall n \geq 0$$

Poiché la condizione è verificata su $(-r_0, r_0)$ e vale l'analiticità su tale intervallo, per l'arbitrarietà di r_0 l'analiticità si verifica su tutto $\mathbb{R}$.

- $(1+x)^\alpha$. Mostriamo innanzitutto che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ converge $\forall x \in (-1, 1)$, usando il criterio del rapporto:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!} \frac{(n+1)!}{|\alpha(\alpha-1)\underbrace{(\alpha-(n+1)+1)}_{\alpha-n}|} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{|n+1|}{|\alpha - n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1$$

Adesso definiamo la funzione somma

$$g_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \ \forall x \in (-1, 1)$$

Dobbiamo dimostrare che $g_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$, $\forall x \in (-1, 1)$. Per la derivazione termine a termine abbiamo

$$g'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} n x^{n-1} =$$

$$= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-1(n-1)+1)}{(n+1)!} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} =$$

$$\underset{n-1=m}{=} \alpha \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{m} x^m = \alpha g_{\alpha-1}(x), \ \forall x \in (-1, 1)$$

Quindi $g'_\alpha(x) = \alpha g_{\alpha-1}(x)$, $\forall x \in (-1,1)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
(1+x)\, g_{\alpha-1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} = \\
&\underset{n+1=m}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{m=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{m-1} x^m = \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1} \right] x^m = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{m} x^m
\end{aligned}$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1} &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-1-m+1)}{m!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-1-(m-1)+1)}{(m-1)!} = \\
&= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-1-(m-1)+1)}{(m-1)!} \frac{\left(\alpha \cancel{-1-m+1+m}\right)}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{m} = \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} = \binom{\alpha}{m}
\end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che

$$(1+x)\, g_{\alpha-1}(x) = g_\alpha(x)$$

Si ha

$$\begin{cases} g'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{(1+x)} g_\alpha(x) \\ g_\alpha(0) = 1 \end{cases}$$

che è un *problema di Cauchy* o altresì noto come un'*equazione differenziale lineare* omogenea del I grado con dato iniziale, la cui soluzione è

$$g_\alpha(x) = e^{\alpha \int_0^x \frac{1}{1+t} dt} = e^{\alpha \log(1+x)} = (1+x)^\alpha, \ \forall x \in (-1,1)$$

□

DIGRESSIONE. UNO SGUARDO AL FUTURO: IL CASO COMPLESSO

In ANALISI MATEMATICA 4 si riprenderà la questione della *derivabilità* in campo complesso, definendola e proseguendo con il problema di studiare l'*analiticità* delle funzioni in campo complesso.

In campo reale le funzioni *analitiche* sono solo un piccolo sottoinsieme delle funzioni $\mathscr{C}^\infty(U)$, che a loro volta un sottoinsieme stretto delle funzioni $\mathscr{C}^1(U)$, $\mathscr{C}^2(U)$, …, a loro volta sottoinsieme delle funzioni *derivabili* $D(U)$ e infine delle funzioni *continue* $\mathscr{C}(U)$.

In campo complesso abbiamo una sorpresa. Infatti, se la funzione è *derivabile* una volta, lo è *infinitamente* con continuità e sono anche *analitiche*!

$$D(U) = \mathscr{C}^1(U) = \ldots = \mathscr{C}^\infty(U) = \mathscr{A}(U)$$

Si vedrà che questo è dovuto al fatto che $\mathbb{C}$ ha la struttura di campo come $\mathbb{R}$, ma allo stesso tempo è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$ stesso.

4.6 FUNZIONI ESPONENZIALE E LOGARITMO IN CAMPO COMPLESSO

4.6.1 *Funzione esponenziale in campo complesso*

DEFINIZIONE 4.6.1. - ESPONENZIALE IN CAMPO COMPLESSO.
L'**esponenziale in campo complesso** è la funzione definita $\forall z \in \mathbb{C}$ come

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{4.21}$$

DIMOSTRAZIONE. Questa funzione è ben definita. Applichiamo alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

il criterio di d'Alembert:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Segue che converge per ogni $z \in \mathbb{C}$. □

OSSERVAZIONE. Ricordando che in campo reale vale la relazione

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

si ricava che la funzione esponenziale definita in campo complesso coincide con la nota funzione esponenziale nel caso di $z = x \in \mathbb{R}$, ottenendo così una naturale estensione dell'esponenziale reale a quello complesso.

PROPOSIZIONE 4.6.1. - PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE COMPLESSO.

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \ \forall z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}$
2. $e^z \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
3. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
4. Vale la **formula di Eulero**:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \ \forall y \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

5. $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
6. $|e^z| = e^{\Re e z}, \ \arg(e^z) = \Im m z + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
7. $e^{z+2k\pi i} = e^z, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE.

I Siano $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Dobbiamo provare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

Ricordiamo[a] che, date due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{C}$$

il loro prodotto è la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n, \text{ dove } \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \beta_{n-k}, \quad \forall\, n \geq 0$$

Nel caso in questione $\alpha_n = \frac{z_1^n}{n!}, \quad \beta_n = \frac{z_2^n}{n!}, \quad \forall\, n \geq 0$, dunque

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{(n-k)}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{(n-k)}}{k!(n-k)!}, \quad \forall\, n \geq 0.$$

Osserviamo che vale

$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}, \quad \forall\, n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n.$$

Dalla formula del binomio di Newton, ricaviamo allora

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{(n-k)}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{(n-k)} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}, \quad \forall\, n \geq 0$$

Abbiamo quindi ottenuto la tesi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

I–III Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato. Applichiamo la formula dimostrata al punto I con $z_1 = z$ e $z_2 = -z$; otteniamo

$$e^{z-z} = e^z e^{-z} \implies 1 = e^z e^{-z}$$

Da questo segue che $e^{-z} = 1/e^z$.

IV Fissato $y \in \mathbb{R}$, dalla definizione dell'esponenziale complesso segue che

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n y^n}{n!}$$

Riordiniamo i termini della serie separando i termini di posto pari e quelli di posto dispari[b], ottenendo

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Calcoliamo ora i^{2k} e i^{2k+1}:

- $i^{2k} = \left(i^2\right)^k = (-1)^k$.
- $i^{2k+1} = i\left(i^2\right)^k = i\,(-1)^k$.

Allora

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ricordando che

$$\cos y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

segue la tesi.

V Sia $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Dalla relazione provata in I segue che $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Applicando la *formula di Eulero*, si ha la tesi.

VI Sia $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, ossia $x = \mathfrak{Re}\, z$ e $y = \mathfrak{Im}\, z$. La formula provata al punto V esprime il numero complesso e^z in forma trigonometrica; da essa si ricava quindi immediatamente il risultato.

VII Siano $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Dalla relazione provata al punto I segue che

$$e^{z+2k\pi i} = e^z\, e^{2k\pi i}$$

Applicando la **formula di Eulero** si ricava immediatamente che

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$$

e questo consente di concludere la tesi.

□

[a] Nelle “Note aggiuntive”, a pagina A.3.1 è possibile trovare alcune informazioni sulla proprietà di prodotto (secondo Cauchy).

[b] Per riordinare la serie come due “sottoserie” senza che la somma venga modificata è necessaria la convergenza assoluta. Poiché ogni serie di potenze converge assolutamente all’interno del suo cerchio di convergenza, in questo caso non abbiamo problemi di riorganizzazione della serie. Nelle “Note aggiuntive”, a pagina XXX è possibile trovare alcune informazioni sul problema di riorganizzazione della serie.

Osservazione. Dalla relazione $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ segue che in campo complesso la funzione esponenziale è **periodica** di periodo $2\pi i$.
Di conseguenza, in campo complesso la funzione esponenziale *non* è invertibile.
L’*invertibilità* è però garantita consentendo come inversa una *funzione multivoca*.

Definizione 4.6.2. - Funzione multivoca.
Una **funzione multivoca** è una *relazione binaria seriale* che associa ad ogni valore x nel dominio X uno o più valori y nel codominio Y.

4.6.1.1 Eserciziamoci! Funzione esponenziale in campo complesso

ESERCIZIO. *Scegli la risposta corretta.* Il modulo del numero complesso e^{iz}, con $z \in \mathbb{C}$, è:

a $e^{\mathfrak{Re}\,z}$
b $e^{-\mathfrak{Im}\,z}$
c $e^{|z|}$
d $e^{\mathfrak{Re}\,z}$

SOLUZIONE. Per la proprietà 6, dato $w \in \mathbb{C}$ $|e^w| = e^{\mathfrak{Re}\,w}$. Posto

$$w = iz = i\left(\mathfrak{Re}\,z + i\,\mathfrak{Im}\,z\right) = -\mathfrak{Im}\,z + i\,\mathfrak{Re}\,z$$

segue immediatamente che $\mathfrak{Re}\,w = -\mathfrak{Im}\,z$ e quindi $\left|e^{iz}\right| = e^{-\mathfrak{Im}\,z}$. La risposta corretta è **b**.

4.6.2 *Funzione logaritmo in campo complesso*

DEFINIZIONE 4.6.3. - LOGARITMO IN CAMPO COMPLESSO.
Dato un numero complesso z, si chiamano **logaritmi complessi** di z, se esistono, i numeri complessi w tali che

$$e^w = z \tag{4.23}$$

L'insieme di tali numeri si indica con

$$\log z \tag{4.24}$$

o, per distinguerlo dal logaritmo reale, con

$$\log_{\mathbb{C}} z \tag{4.25}$$

Proviamo ora che l'insieme dei logaritmi di z è *non vuoto* ed *infinito* se $z \neq 0$.

TEOREMA 4.6.1. - CARATTERIZZAZIONE DEI LOGARITMI IN CAMPO COMPLESSO.
L'insieme dei logaritmi di un numero complesso z è *non vuoto* se e solo se $z \neq 0$. In questo caso esso è *infinito* ed è costituito dai numeri complessi

$$\log_{\mathbb{C}} z = \log_{\mathbb{R}}|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.26}$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che, per definizione, i logaritmi di un numero complesso z sono le soluzioni dell'equazione $e^w = z$. Dalle proprietà dell'esponenziale è noto che $e^w \neq 0$, per ogni numero complesso w; di conseguenza, l'equazione non ha soluzioni se $z = 0$.
Sia ora $z \neq 0$; posto $w = u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}$, ricordiamo che

$$e^w = e^u\left(\cos v + i \sin v\right)$$

affinché questo numero sia uguale a z si dovrà quindi avere

$$|e^w| = e^u = |z| \quad \text{e} \quad \arg(e^w) = v = \arg(z) + 2k\pi$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Otteniamo quindi

$$u = \log_{\mathbb{R}}|z| \in \mathbb{R}$$

e dunque

$$w = \log_{\mathbb{R}}|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

□

Attenzione! Si presti attenzione al diverso significato del simbolo log nella formula caratterizzante il *logaritmo complesso*: a *primo membro* esso indica i *logaritmi complessi* del numero z; a secondo membro, l'unico logaritmo reale del numero reale positivo $|z|$. Per evitare confusioni, qui è stato indicato in pedice a quale logaritmo ci riferiamo.

In figura sono rappresentati alcuni dei logaritmi complessi di un numero complesso *non nullo* z.
Come si osserva dalla formula essi hanno tutti la *stessa parte reale* e parti immaginarie che *differiscono* per multipli di 2π.

4.6.2.1 Eserciziamoci! Funzione logaritmo in campo complesso

Esercizio. *Scegli la risposta corretta.* I logaritmi del numero complesso $-2i$ sono:

a $\log_{\mathbb{R}} 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

b $-\log_{\mathbb{R}} 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

c $\log_{\mathbb{R}} 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

d $-\log_{\mathbb{R}} 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Soluzione. Applicando la formula caratterizzante il logaritmo complesso:

$$\log_{\mathbb{C}}(-2i) = \log_{\mathbb{R}}|-2i| + i\left(\arg(-2i) + 2k\pi\right) = \log_{\mathbb{R}} 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

La risposta corretta è pertanto **a**.

III

Teoria della misura e integrale di Lebesgue

CAPITOLO 5

Teoria della misura

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

MARINOBOT, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

STUDIEREMO **[COMPLETARE]**

5.1 Il contesto storico: il problema delle discontinuità nell'integrale definito

Seppur tecniche per calcolare aree e volumi furono già introdotte dai matematici dell'antica Grecia, fu solo nel tardo XVII secolo che vennero sviluppati i principi dell'integrazione indipendentemente da Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), i quali immaginarono l'area sotto una curva come una *somma infinita* di rettangoli di *larghezza infinitesima*.
Nel corso dell'Ottocento una buona parte delle ricerche dell'Analisi si concentrarono su un aspetto dell'integrale definito di una funzione: *quanti* possono essere i *punti discontinuità* di una funzione integrabile e, più in generale, quali *classi* di funzioni sono integrabili?
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) in *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal (1823)* definì l'integrale per funzioni continue o con al più un numero finito di discontinuità.
Successivamente, fu Bernhard Riemann (1826-1866) nella sua *Tesi di abilitazione all'insegnamento (1851-1852)* a estendere il concetto di integrale alle funzioni limitate e dare una caratterizzazione delle funzioni integrabili (ora dette **integrabili secondo Riemann**).

DEFINIZIONE 5.1.1. - CARATTERIZZAZIONE DEGLI INTEGRALI SECONDO RIEMANN.
La funzione $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata è **integrabile** (secondo Riemann) se e solo se

$\forall \varepsilon > 0\ \exists D$ suddivisione di $[a, b]$ in un numero finito di intervalli $I_1, \ldots, I_n$ tale per cui

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right) \mathscr{L}(I_i) < \varepsilon \tag{5.1}$$

Dalla caratterizzazione di Riemann è evidente che affinché una funzione sia integrabile è necessario rendere *piccola* l'*oscillazione* di f, ossia

$$\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f$$

Dal teorema di *Heine-Cantor* è noto che per le funzioni continue su $[a, b]$ questa oscillazione è arbitrariamente piccola se l'ampiezza dell'intervallo I_i è sufficientemente piccola, mentre in generale non lo è.

Esempio. La funzione di Dirichlet.
Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{5.2}$$

Osserviamo come essa *non* è integrabile su $[0, 1]$: poiché $\forall D$ partizione di $[0, 1]$ per densità dei razionali si ha

$$\sup_{I_i} f = 1 \qquad \inf_{I_i} f = 1,\ \forall i = 1, \ldots, n$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right) \mathscr{L}(I_i) = \sum_{i=1}^{n} (1-0) \mathscr{L}(I_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{L}(I_i) = \mathscr{L}([0,1]) = 1,\ \forall D \text{ suddivisione}$$

Nel corso di Analisi Matematica Uno abbiamo dato la definizione di integrale secondo Riemann per le funzioni limitate.

5.2 Algebre e σ-algebre

Definizione 5.2.1. - σ-algebra, spazi e insiemi misurabili.
Sia X insieme qualsiasi e $\mathscr{M}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. $\mathscr{M}$ è una **σ-algebra** se soddisfa i seguenti assiomi:

1. L'*insieme stesso* sta nella σ-algebra: $X \in \mathscr{M}$.
2. La σ-algebra è chiusa rispetto alla *complementarizzazione*: $A \in \mathscr{M} \implies A^C \in \mathscr{M}$.
3. La σ-algebra è chiusa rispetto alla *unione numerabile*: $A_n \in \mathscr{M} \implies \cup_{n \geq 1} A_n \in \mathscr{M}$.

La coppia $(X, \mathscr{M})$ si dice **spazio misurabile** e gli insiemi che appartengono a $\mathscr{M}$ sono detti **insiemi misurabili**.

Osservazione.

- $\varnothing \in \mathscr{M}$ in quanto è il complementare dell'insieme X.
- La σ-algebra è chiusa rispetto all'*intersezione finita*: $A_k \in \mathscr{M} \implies \cap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{M}$

Infatti, si può scrivere l'intersezione tramite unione e complementari - operazioni interne alla σ-algebra - tramite le *leggi di De Morgan*[a].

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare alcune informazioni sulle leggi di De Morgan.

Esempio. Ogni insieme è uno spazio misurabile, in quanto ammette almeno la σ-algebra triviale data da $\mathscr{P}(X)$.

Definizione 5.2.2. - σ-algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi.
Data una famiglia $\mathscr{F}$ di sottoinsiemi di X, si dice **σ-algebra generata da** $\mathscr{F}$ l'intersezione di *tutte* le σ-algebre che contengono $\mathscr{F}$ ed è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathscr{F}$.

Esempio. Se X è spazio *topologico* e $\mathscr{F}$ è la famiglia degli *aperti* di X (che coincide con la *topologia* τ se definita con gli assiomi degli aperti), la σ-algebra generata da $\mathscr{F}$ si chiama **σ-algebra dei Borelliani di** X e si indica con $\mathscr{B}(X)$.
Osserviamo che la famiglia $\mathscr{F}$ di per sé non è una σ-algebra: se A è aperto, A^C è chiuso e quindi non appartiene a $\mathscr{F}$; invece, in $\mathscr{B}(X)$ ci stanno anche i chiusi della topologia e quindi la complementarizzazione è un'operazione interna.

5.3 FUNZIONI MISURABILI

Definizione 5.3.1. - Funzione misurabile.
Sia $(X, \mathscr{M})$ spazio misurabile e Y spazio topologico. Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice **misurabile** se $f^{-1}(A) \in \mathscr{M}$, $\forall A \subseteq Y$ *aperto*.

Digressione. In Calcolo delle Probabilità, le funzioni misurabili sono dette **variabili aleatorie**.

Osservazione. Se $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X)$, allora *ogni* funzione è misurabile.

Esempi.

1. Sia $(X, \mathscr{B}(X))$ spazio misurabile su X spazio topologico con la σ-algebra dei Borelliani di X e sia Y spazio topologico. Allora
$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{continua} \Longrightarrow \quad f : X \longrightarrow Y \quad \text{misurabile.}$$
Infatti, $\forall A \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(A)$ è aperto per continuità di f e quindi $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}(X)$.
2. Sia $(X, \mathscr{M})$ spazio misurabile qualsiasi e sia $E \subseteq X$. Definiamo la **funzione caratteristica di** E o **indicatrice di** E la funzione
$$\begin{aligned} \chi_E : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \chi_E(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Allora

$$\chi_E \text{ è misurabile} \iff E \in \mathscr{M}$$

Infatti, preso $A \subseteq \mathbb{R}$, si ha

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } 0 \notin A,\ 1 \notin A \\ E^C & \text{se } 0 \in A,\ 1 \notin A \\ E & \text{se } 0 \notin A,\ 1 \in A \\ X & \text{se } 0 \in A,\ 1 \in A \end{cases}$$

Allora $f^{-1}(A) \in \mathscr{M} \iff E \in \mathscr{M}$.

Osservazione. La funzione caratteristica $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è la *funzione di Dirichlet*[a].

[a] Si veda pag. XXX.

Proposizione 5.3.1. - Proprietà della funzioni misurabili.

1. Sia $(X, \mathscr{M})$ uno spazio misurabile e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, dove $\mathbb{C}$ ha la topologia Euclidea. Possiamo "scomporre" la funzione a valori complessi come combinazione lineare di funzioni reali rispetto alla base $(1, i)$.

$$\forall x \in X f(x) \in \mathbb{C} \implies f(x) = \underbrace{u(x)}_{\text{parte reale}} + i \underbrace{v(x)}_{\text{parte immaginaria}}, \text{con } u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

   Allora
   a. f è misurabile $\implies u,\ v,\ |f|$ misurabili.
   b. u, v sono misurabili $\implies f = u + iv$ è misurabile.
2. Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Se f, g sono misurabili, allora
   - $f + g$ è misurabile.
   - fg è misurabile.

5.3.1 *Caratterizzazione delle funzioni misurabili*

In Calcolo delle Probabilità abbiamo dato una definizione di funzione misurabile $f : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow Y$ se la controimmagine tramite f di un Borelliano è un insieme misurabile per $\mathscr{M}$. Vedremo ora come questa definizione è equivalente a quella data all'inizio della sezione.

Teorema 5.3.1. - Caratterizzazione delle funzioni misurabili.

1. $f : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow Y$ misurabile con Y spazio topologico $\iff f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$, $\forall B$ borelliano di Y
2. Posto $\mathbb{R}^*Y = [-\infty, +\infty]$, $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabile $\iff f((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{M}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Che differenza c'è tra la definizione e le caratterizzazioni? In sostanza possono essere considerate tre "test" differenti per mostrare o confutare che una funzione sia misurabile.

$$A \qquad f^{-1}(A) \in \mathscr{M},\ \forall A \text{ aperto di } Y$$
$$B \qquad f^{-1}(B) \in \mathscr{M},\ \forall B \text{ Borelliano di } Y$$
$$C \qquad f^{-1}((\alpha,+\infty)) \in \mathscr{M},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \text{con } Y = \mathbb{R}^* = [-\infty,+\infty]$$

Da un punto di vista *operativo* B non conviene come metodo per verificare che f sia misurabile: i Borelliani, pur avendo la *stessa cardinalità* degli aperti, li contengono *strettamente*[1] e quindi bisogna verificare altri insiemi (come i chiusi) rispetto a quelli che si verificherebbero con la condizione A.
Tuttavia, B fornisce delle informazioni che immediatamente non si avevano dalla definizione originale: sono misurabili non solo le controimmagini degli aperti, ma anche le controimmagini dei chiusi.
Col caso C ci limitiamo ad operare in $\mathbb{R}^* = [-\infty,+\infty]$, ma è sicuramente più vantaggioso da applicare rispetto ad A.

5.3.2 *Passaggio al limite per funzioni misurabili*

Ci chiediamo se, date f_n successione di funzioni misurabili che convengono ad una funzione f in *una qualche* convergenza, f risulta essere ancora misurabile e se sì, con quale tipo di convergenza.
A differenza di quanto visto col passaggio al limite della continuità, la risposta è affermativa anche sotto la sola ipotesi di *convergenza puntuale*!
Per dimostrarlo (e lo faremo per funzioni a valori in $\mathbb{C}$), abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari che riguardano sup, inf, lim sup, lim inf di una successione di funzione. Per poter parlare di lim sup e lim inf abbiamo bisogno di avere il codomini della funzione in uno spazio Y con ordinamento, pertanto ci porremo in $\mathbb{R}^* = [-\infty,+\infty]$, ossia le nostre funzioni saranno del tipo

$$f : (X,\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty,+\infty]$$

DEFINIZIONE 5.3.2. - sup, inf, lim sup E lim inf DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI.

$$\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(x) := \sup_{n\geq 1} f_n(x),\ \forall x \in X$$
$$\left(\inf_{n\geq 1} f_n\right)(x) := \inf_{n\geq 1} f_n(x),\ \forall x \in X$$
$$\left(\limsup_{n\to+\infty} f_n\right)(x) := \limsup_{n\to+\infty} f_n(x),\ \forall x \in X$$
$$\left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right)(x) := \liminf_{n\to+\infty} f_n(x),\ \forall x \in X$$

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare un approfondimento sulla relazione tra Borelliani, aperti e altre classi di insiemi.

Proposizione 5.3.2. - Misurabilità di sup, inf, lim sup e lim inf di una successione di funzioni misurabili.
Siano $(X, \mathscr{M})$ uno spazio misurabile e siano $f_n : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ misurabili. Allora

$$\sup_{n\geq 1} f_n \quad \inf_{n\geq 1} f_n \quad \limsup_{n\to\infty} f_n \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

Dimostrazione.

1. Sia $g(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$, $\forall x \in X$. Dobbiamo provare che g sia misurabile, con $g : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$. Per il teorema 5.3.1 sulla *caratterizzazione* delle funzioni misurabili è sufficiente dimostrare che $g^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{M}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Si prova che

$$g^{-1}((\alpha, +\infty)) = \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}((\alpha, +\infty)),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Poiché f_n è misurabile si ha

$$f_n^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{M}$$

ed essendo $\mathscr{M}$ una σ-algebra vale

$$g^{-1}((\alpha, +\infty)) = \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{M}$$

2–3–4 Si riconducono al caso 1) perché

$$\inf_{n\geq 1} f_n = -\left(\sup_{n\geq 1}(-f_n)\right)$$
$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k} f_n$$
$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{k\geq 1}\inf_{n\geq k} f_n$$

□

Corollario 5.3.1. - Passaggio al limite per funzioni misurabili in $\mathbb{C}$.
Sia $(X, \mathscr{M})$ uno spazio misurabile e siano $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
Se f_n sono misurabili ed esiste $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in X$$

allora f è misurabile.

Dimostrazione. Riconduciamoci al caso reale per utilizzare la proposizione precedente.

Posto

$$f_n = u_n + iv_n \qquad f = u + iv$$

dove

$$u_n = \mathfrak{Re}(f_n) \,:\, X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_n = \mathfrak{Im}(f_n) \,:\, X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u = \mathfrak{Re}(f) \,:\, X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v = \mathfrak{Im}(f) \,:\, X \longrightarrow \mathbb{R}$$

Come visto nella proposizione 5.3.1, f_n misurabile implica che sia u_n sia v_n siano misurabili e, dal risultato precedente sulle funzioni a valori in $\mathbb{R}^*$ si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n,\ \limsup_{n\to+\infty} v_n \text{ misurabili.}$$

D'latra parte si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \implies \left\{ \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x) \lim_{n\to+\infty} v_n(x) = v(x) \right.$$

Poiché i limiti esistono si ha

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = u(x)$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \limsup_{n\to+\infty} v_n = v(x)$$

Quindi $u(x)$ e $v(x)$ sono misurabili, pertanto anche $f = u + iv$ è misurabile. □

5.4 MISURA DI PEANO-JORDAN

Negli stessi anni in cui si lavorò per espandere la classe di funzioni che ammettono integrale definito, diversi matematici lavorano su un'altra questione, quella della **misura** di un insieme.
Chiaramente già dall'antichità erano note misure di figure "elementari", come ad esempio la lunghezza e l'area di un poligono o il volume di certi solidi, spesso sulla base di principi come quello di *esaustione*.
Solo nel XIX secolo si cercò di formalizzare questi ragionamenti ed espandere il concetto di misura non soltanto a figure generiche, ma anche a più dimensioni fino ad arrivare ad una astrazione di tale concetto ad insiemi, indipendentemente dall'essere in $\mathbb{R}^n$.
Il primo ad introdurre un concetto di misura di un sottoinsieme della retta, del piano o delle spazio fu Giuseppe **Peano** (1858-1932). Nel suo Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale (1887), il matematico torinese ipotizza di "modernizzare" il metodo di esaustione già citato in precedenza. Ad esempio, prendo un insieme limitato in $\mathbb{R}^2$, ossia quello che all'epoca veniva denominato *campo piano*, potremmo considerare dei poligoni che contengono tale insieme - che chiameremo *poligoni esterni* - e dei poligoni che sono contenuti in tale insieme - i cosiddetti *poligoni interni*.
Se l'estremo inferiore dei poligoni esterni coincide con quello superiore di quelli interni, potremmo dire che l'insieme è misurabile e ha area pari a questo limite. Inoltre, Peano fornisce una condizione necessaria e sufficiente: la differenza tra i poligoni esterni ed interni deve essere piccola a piacere, ossia la frontiera dell'insieme (che chiaramente è contenuta nell'area di piano fra i poligoni esterni ed interni) dovrà avere misura nulla.
Possono capitare anche insiemi che non ammettono area. Ad esempio, supponiamo di prendere tutti i punti a distanza *razionale* $r \leq 1$ dall'origine, cioè infinite circonferenze di raggio razionale interne al disco di raggio 1. Chiaramente l'area interna è uguale a

0, mentre essendo l'insieme denso nel disco di raggio 1, ogni poligono che la contiene contiene il cerchio e quindi l'area esterna è ≥ 1: essendo l'area interna e l'area esterna diverse, il poligono non ammette aree.
La misura di Peano, per quanto innovativa, risente di alcuni problemi: parlare di poligoni o solidi poligonali è facile farlo in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, ma non è generalizzabile in dimensioni maggiori: ad esempio, qual è la misura di un ipersolido poligonale di dimensione 4? Inoltre, la misura di Peano non è numerabilmente additiva, ossia un'unione *infinita numerabile* di insiemi misurabili secondo Peano non è necessariamente ancora misurabile. Qualche anno dopo i lavori di Peano, il matematico francese Marie Camille **Jordan** (1838-1922) *estende* il concetto di misura introdotta da Peano a una generica dimensione n, utilizzando invece che poligoni o solidi poligoni delle *unioni di intervalli*, *rettangoli* o, in generale, *parallelepipedi* n-dimensionali, poiché questi hanno una misura ben nota!
Anche se questa misura coincide con quella di Peano (dopotutto, le unioni di parallelepipedi sono un *caso particolare* di ipersolidi poligonali), in questo modo si risolve il *primo problema* dei due problemi enunciati precedentemente; ciò nonostante, questa definizione non è ancora una misura numerabilmente-additiva.

5.4.1 *Definizione e osservazioni sulla misura di Peano-Jordan*

DEFINIZIONE 5.4.1. - PARALLELEPIPEDO n-DIMENSIONALE.
Un **parallelepipedo** n-dimensionale è un *plurintervallo*, ossia come il prodotto cartesiano di n intervalli:

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \quad \text{con } -\infty < a_i < b_i < +\infty \tag{5.4}$$

Posta la **lunghezza** di un intervallo come

$$\mathscr{L}([a_i, b_i]) = b_i - a_i \tag{5.5}$$

la misura n-dimensionale del parallelepipedo è

$$V_n(P) = \prod_{i=1}^{n} \mathscr{L}([a_i, b_i]) \tag{5.6}$$

Introduciamo formalmente la misura esterna e la misura interna di un insieme limitato A come estremi inferiori e superiori di un **insieme elementare**, cioè un'unione finita di parallelepipedi:

- MISURA ESTERNA:

$$m_{PJ}^{X}(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} V_n(P_i) \mid P_i \text{ parallelepipedi}, \bigcup_{i=1}^{n} P_i \supseteq A\right\} \tag{5.7}$$

- MISURA INTERNA:

$$m_{PJ,X}(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} V_n(P_i) \mid P_i \text{ parallelepipedi}, \bigcup_{i=1}^{n} P_i \subseteq A\right\} \tag{5.8}$$

In generale $m_X(A) \leq m^X(A)$.

DEFINIZIONE 5.4.2. - MISURA DI PEANO-JORDAN.
Un insieme limitato A è **misurabile secondo Peano-Jordan** se $m_{PJ}^{X}(A) = m_{PJ,X}(A)$ e la **misura** (secondo P-J) dell'insieme è

$$m_{PJ}(A) = m_{PJ}^{X}(A) = m_{PJ,X}(A) \tag{5.9}$$

PROPOSIZIONE 5.4.1. - CRITERIO DI MISURABILITÀ.
L'insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile per Peano-Jordan se e solo se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \subseteq A, Q \supseteq A$ con P, Q insiemi elementari tali che

$$m_{PJ}(Q) - m_{PJ}(P) \leq \varepsilon \tag{5.10}$$

Definito

$$\mathscr{M} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{è P-J misurabile}\} \tag{5.11}$$

essa è un'*algebra, ma* non una σ-algebra, cioè non è chiusa rispetto all'unione *numerabile infinita*.

ESEMPIO. CONTROESEMPIO DELL'ADDITIVITÀ NUMERABILE DELLA MISURA DI PEANO-JORDAN.
Consideriamo

$$E = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{n \geq 1} \{r_n\}$$

dove $\{r_n\}$ è un'enumerazione di razionali in $[0,1]$.
$\{r_n\}$ è un punto e dunque è misurabile con misura nulla, ma $\bigcup_{n \geq 1} \{r_n\} = E$ *non* è misurabile, dato che

$$\begin{cases} m_{PJ}^{X}(E) = 1 \\ m_{PJ,X}(E) = 0 \end{cases}$$

In altre parole, la misura secondo Peano-Jordan è additiva, ma non σ-additiva.

DIGRESSIONE. Il termine italiano "Misura di Peano-Jordan" è improprio, in quanto essa non è una *misura* nel senso *moderno* del termine. Nell'Anglosfera lo stesso concetto viene chiamata "Jordan content".

5.5 MISURA SECONDO LEBESGUE

Per quanto innovativa, la misura di Peano-Jordan presenta alcuni notevoli problemi:

- É definita solo per *insiemi limitati*.
- Non è *numerabilmente additività*: la misura di un'unione numerabilmente infinita di insiemi misurabili non è necessariamente misurabile.

Il concetto *moderno* di misura di un sottoinsieme dello spazio n-dimensionale viene per la prima volta presentato in *Intégrale, longueure, aire* (1902) dal matematico francese Henri **Lebesgue** (1875-1941) nell'ambito dell'annoso problema delle discontinuità nell'integrale definito.
La costruzione della misura secondo Lebesgue inizia in modo analogo a quella di Peano-

Jordan, definendo i *parallelepipedi*; per poter definire la misurabilità di insiemi illimitati si ammettono parallelepipedi *degeneri*.

DEFINIZIONE 5.5.1. - PARALLELEPIPEDO n-DIMENSIONALE.
Un **parallelepipedo** n-dimensionale è un *plurintervallo*, ossia come il prodotto cartesiano di n intervalli eventualmente *degeneri*:

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \quad \text{con } -\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty \tag{5.12}$$

Posta la **lunghezza** di un intervallo come

$$\mathscr{L}([a_i, b_i]) = \begin{cases} b_i - a_i & \text{se } -\infty < a_i \leq b_i < +\infty \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5.13}$$

la misura n-dimensionale del parallelepipedo è

$$V_n(P) = \prod_{i=1}^{n} \mathscr{L}([a_i, b_i]) \tag{5.14}$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$.

OSSERVAZIONE. Come mai $0 \cdot \infty$ non è lasciato indeterminato, ma posto proprio uguale a 0?. Per capirlo, facciamo prima un esempio in dimensione 2; consideriamo il rettangolo degenere

$$P = \{a_1\} \times (a_2, +\infty)$$

Esso è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, ma ha chiaramente dimensione 1: seppur come semiretta ha una lunghezza ben definita (e in tal caso sarebbe infinita tale lunghezza), è ragionevole dire che come oggetto *bidimensionale* abbia *area* 0.
In altre parole, se almeno un intervallo che compone il parallelepipedo n-dimensionale ha lunghezza nulla, P è da intendersi come elemento di dimensione k in uno spazio n-dimensionale, con $k < n$; in questo caso la sua misura *n-dimensionale* è nulla, anche se fosse *illimitato* in diverse direzioni, da qui spiegato il perché di $0 \cdot \infty = 0$.

A differenza di Peano-Jordan, Lebesgue definisce solamente la **misura esterna** dell'insieme:

$$m^X(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} V_n(P_i) \mid P_i \text{ parallelepipedi}, \bigcup_{i=1}^{n} P_i \supseteq A \right\}$$

Essa si può vedere come una funzione

$$m^X : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty] \tag{5.15}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- Se l'insieme è un parallelepipedo n-dimensionale, la misura esterna del parallelepipedo ovviamente coincide con la misura n-dimensionale di esso:

$$m^X(P) = V_n(P), \ \forall P \text{ parallelepipedo} \tag{5.16}$$

- È *monotona*:

$$m^X(A) \leq m^X(B), \ \forall A \subseteq B \tag{5.17}$$

- È σ-*subadditiva*:
$$m^X\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^X(A_n), \forall A_n \subseteq \mathbb{R}^n \tag{5.18}$$
- È invariante per traslazioni:
$$m^X(A+\{x\}) = m^X(A),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \tag{5.19}$$

Osserviamo che per m^X vale *solo* la σ-*subadditività*, ma non la σ-additività.

DEFINIZIONE 5.5.2. - INSIEME MISURABILE SECONDO LEBESGUE.
Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **misurabile secondo Lebesgue**se $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ vale
$$m-n^X(E) = m_n^X(E\cap A) + m_n^X\left(E \cap A^C\right) \tag{5.20}$$

E è un **insieme test** arbitrario: A è misurabile se decompone bene E in due sottoinsiemi misurabili $E\cap A$ e $E \cap A^C$.

PROPOSIZIONE 5.5.1. - GLI INSIEMI MISURABILI SECONDO LEBESGUE SONO UNA σ-ALGEBRA.
L'insieme
$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ è Lebesgue-misurabile}\}$$
è una σ-algebra.

DEFINIZIONE 5.5.3. - MISURA SECONDO LEBESGUE.
La **misura secondo Lebesgue** è la restrizione della misura esterna a $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$:
$$m_n = m_n^X|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)} \text{ ossia } m_n : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,+\infty] \tag{5.21}$$

5.5.1 *Insiemi misurabili secondo Lebesgue*

La definizione data di insieme misurabile secondo Lebesgue non è particolarmente operativa, in quanto richiede di controllare che un generico insieme test decomponga bene l'insieme di cui verificarne la misurabilità. Vedremo questo principio successivamente; di seguito presentiamo alcune classi importanti di insiemi misurabili secondo Lebesgue.

- **INSIEMI ELEMENTARI:** (unioni di) parallelepipedi, anche degeneri
$$m_n(P) = V_n(P)$$
$$m_n\left(\bigcup_{i=1}^{+} \infty P_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} V_n(P_i)$$
  In particolare:
  - Preso $P = \mathbb{R}^n$, allora $m_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$.
  - Preso $P = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, allora $m_n(\{x\}) = 0$.
- **BORELLIANI:** $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
  Vedremo un esempio di un insieme misurabile *non* Borelliano.
- **TUTTI GLI INSIEMI AVENTI MISURA *ESTERNA* NULLA:**
$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^n\ m_n^X(A) = 0 \implies A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \text{ e } m_n(A) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo provare che $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$m_n^X(E) = m_n^X(E \cap A) + m_n^X\left(E \cap A^C\right)$$

Ricordiamo che m_n^X è σ-subadditiva e quindi finito-subadditiva, quindi

$$E = (E \cap A) \cup \left(E \cap A^C\right) \implies m_n^X(E) \leq m_n^X(E \cap A) + m_n^X\left(E \cap A^C\right)$$

È sufficiente allora provare la disuguaglianza opposta. Osserviamo che $E \cap A^C \subseteq E$, dunque per monotonia di m_n^X si ha

$$m_n^X(E) \geq m_n^X\left(E \cap A^C\right) = m_n^X\left(E \cap A^C\right) + 0 = m_n^X\left(E \cap A^C\right) + m_n^X(E \cap A)$$

Infatti $E \cap A \subseteq A$ implica, per monotonia di m_n^X che

$$0 \leq m_n^X(E \cap A) \leq m_n^X(A) = 0$$

e quindi $m_n^X(E) \geq m_n^X\left(E \cap A^C\right) + m_n^X(E \cap A)$. □

ATTENZIONE! **Non** tutti gli insiemi sono misurabili! Il seguente controesempio utilizza l'assioma della scelta e l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Nella teoria di Lebesgue hanno un ruolo importante gli insiemi di misura nulla: esplicitiamo il legame tra misura nulla e cardinalità. È noto che ogni singolo punto ha misura nulla; osserviamo che presa una famiglia di punti $\{x_n\}$ si ha

$$0 \leq m_n\left(\bigcup_{n\geq 1}\{x_n\}\right) \leq \sum_{n\geq 1} m_n(\{x_n\}) = 0$$

Ogni insieme **numerabile** è misurabile e ha misura nulla.

ESEMPIO. Posto $n = 1$ (ossia consideriamo la misura in $\mathbb{R}$), si ha

$$m_1(\mathbb{Q}) = 0, \; m_1(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$$

Esistono anche insiemi di misura nulla con *cardinalità del continuo*.

ESEMPIO. INSIEME DI CANTOR.
Consideriamo l'intervallo $[0,1]$ e operiamo il seguente procedimento:

- **Passo 1.** Prendiamo l'intervallo $[0,1]$, lo suddividiamo in tre sottointervalli di ugual lunghezza $I_1 = [0, 1/3], I_2 = \left[\frac{1}{3}, 2/3\right]$, $I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ e rimuoviamo l'intervallo I_2, lasciando dunque gli intervalli I_1 e I_2.
- **Passo 2.** Prendiamo ciascun intervallo che avevamo al passo 1 e lo suddividiamo in modo analogo in tre parti uguali e per ciascun intervallo eliminiamo il sottointervallo centrale, lasciando dunque 4 intervalli.
- **Passo 3 e successivi.** Ripetiamo il procedimento del passo 2 con gli intervalli ottenuti nel passaggio precedente.

Sorprendentemente, dopo infiniti di questi passi ci sono ancora punti che rimangono e sono non numerabili! Abbiamo così costruito l'**insieme di Cantor**: x appartiene

all'insieme di Cantor se, scritto in base 3, *non* ha alcun 1 nella scrittura.
Tuttavia, la sua lunghezza è nulla, dato che, considerati i vari passaggi dell'insieme di Cantor:

- **Passo 0.** C_0 coincide con l'intervallo $[0,1]$: $\mathscr{L}(C_0) = 1$
- **Passo 1.** Togliamo un segmento di lunghezza 1/3 da un segmento di lunghezza 1:
  $\mathscr{L}(C_1) = \mathscr{L}(C_0) - 1/3 = 2/3$
- **Passo 2.** Togliamo dei segmento di lunghezza complessiva 2/9 da un'unione di segmenti di lunghezza 2/3:
  $\mathscr{L}(C_2) = \mathscr{L}(C_1) - 2/9 = 2/3$

dopo infiniti passi arriviamo a 0.

5.5.2 *Regolarità della misura di Lebesgue*

Ora enunciamo una proprietà della misura di Lebesgue, detta **regolarità**.

Teorema 5.5.1. - Regolarità della misura di Lebesgue. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon$ aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che
   - $E \subseteq A_\varepsilon$.
   - $m_n^X(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$.
3. $\exists B$ Borelliano di $\mathbb{R}^n$ tale che
   - $E \subseteq B$.
   - $m_n^X(B \setminus E) = 0$.
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon$ chiuso di $\mathbb{R}^n$ tale che
   - $E \supseteq C_\varepsilon$.
   - $m_n^X(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$.
5. $\exists D$ Borelliano di $\mathbb{R}^n$ tale che
   - $E \supseteq D$.
   - $m_n^X(E \setminus D) = 0$.

Dimostrazione. □

5.5.3 *Confronto tra la misura di Peano-Jordan e di Lebesgue*

Come abbiamo visto, la misura di Peano-Jordan soddisfa solo alcune proprietà della misura in senso assiomatico, essendo σ-subadditiva, mentre la misura secondo Lebesgue è a tutti gli effetti una misura assiomatica moderna. Ci si può dunque chiedere se tali concetti sono incompatibili tra di loro oppure se c'è una qualche relazione tra di esse.
È già noto che non tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue lo sono secondo Peano-Jordan.

Esempio. Consideriamo $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

- E numerabile implica che E è Lebesgue-misurabile e $m_1(E) = 0$.
- E non è Peano-Jordan misurabile, in quanto

$$m_{PJ}^X(E) = 1 \neq 0 = m_{PJ,X}(E)$$

Invece, si vede banalmente che gli insiemi elementari, ossia le unioni di parallelepipedi n-dimensionali, sono misurabili sia secondo Lebesgue, sia secondo Peano-Jordan (a patto di fare un'unione finita di elementi); in particolare, le misure coincidono.

$$m_{PJ}(P) = m_n(P) = V_n(P)$$
$$m_{PJ}\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) = m_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) = \sum_{i=1}^{k} V_n(P_i)$$

Il seguente teorema ci afferma un risultato importante: *tutti* gli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan sono misurabili secondo Lebesgue e le misure in tal caso coincidono.

Teorema 5.5.2. - Equivalenza della misura di Peano-Jordan e Lebesgue.
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato. Allora
1. Se E è Peano-Jordan misurabile allora E è Lebesgue misurabile.
2. Se vale ciò, allora $m_{PJ}(E) = m_n(E)$.

Dimostrazione. Dimostriamo il punto 1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e Peano-Jordan misurabile. Per provare che E è misurabile secondo Lebesgue useremo il teorema 5.5.1 di *regolarità*. In particolare, proviamo che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon$ aperto tale che
- $E \subseteq A_\varepsilon$.
- $m_n^X(A_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$.

Sappiamo che E è misurabile secondo Peano-Jordan, dunque per il criterio equivalente $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$ unioni finite di parallelepipedi con $B_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon$ tali che $m_{PJ}(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$. Allora l'insieme A_ε così definito è proprio quello che stavamo cercando. Noto innanzitutto che $A_\varepsilon \setminus E \subseteq A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon$, per monotonia della misura esterna otteniamo:

$$m_n^X(A_\varepsilon \setminus E) < m_n^X(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) = m_{PJ}^X(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) = m_{PJ}(A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$$

□

5.6 Generalizzazione del concetto di misura

5.6.1 *Definizione assiomatica di misura*

Definizione 5.6.1. - Misura e spazio di misura.
Dato $(X, \mathscr{M})$ uno spazio misurabile, una funzione $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$ è detta **misura** se soddisfa le seguenti proprietà:
- **Non negatività:** $\forall A \in \mathscr{M}, \; \mu(A) \geq 0$.
- **Insieme vuoto nullo:** $\mu(\varnothing) = 0$.
- **σ-additività:** $\forall A_n \in \mathscr{M}$ tali che $A_i \cap A_j = \varnothing \; \forall i \neq j$, allora

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \tag{5.22}$$

In tal caso la terna $(X, \mathscr{M}, \mu)$ è detta **spazio di misura**.
- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice σ-**finita** se

- $\mu(X) = +\infty$.
- $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$, con $X_n \in \mathscr{M}$ tale che $\mu(X_n) \leq +\infty$.

■ μ si dice **di probabilità** se $\mu(X) = 1$.

Esempi. Spazi di misura.

1. $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ è spazio di misura con la **misura di Lebesgue**

$$m_n : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty] \tag{5.23}$$

Osserviamo che m_n è σ-finito perché $m_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ con

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{n\geq 0} B_n(0) \quad \text{con } m_n(B_n(0)) < +\infty$$

2. Fissato $x_0 \in X$ insieme qualunque, $(X, \mathscr{P}(X))$ è spazio di misura con la funzione δ **di Dirac concentrata in** x_0:

$$\begin{aligned} \delta : \mathscr{P}(X) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases} \end{aligned} \tag{5.24}$$

3. Preso X insieme qualunque e scelti
   - $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una famiglia di elementi di X.
   - $p_n \geq 0, \forall n \geq 0$ dei **pesi**.

   allora $(X, \mathscr{P}(X))$ è spazio di misura con la **misura di conteggio pesata**:

$$\begin{aligned} \mu : \mathscr{P}(X) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \sum_{n:\ x_n \in E} p_n \end{aligned} \tag{5.25}$$

Se $\sum_{n:\ x_n \in E} p_n = 1$, μ_p è una **misura di probabilità discreta**, come la m.d.p. *binomiale*, di *Poisson*, ecc...

4. Preso $X = \mathbb{N}$, i punti $x_n = n, \forall n \geq 1$ e $p_n = 1$, $\forall n \geq 1$, allora $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ è spazio di misura con la **misura di conteggio semplice**, un caso particolare dell'esempio precedente:

$$\forall E \subseteq \mathbb{N},\ \mu(E) = \sum_{n:\ n\in E} 1 = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ infinito} \end{cases} \tag{5.26}$$

CAPITOLO 6

Integrale di Lebesgue

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, dopo aver finito le citazioni stupide.

Dallo **[COMPLETARE.]**

6.1 I tre passi dell'integrale astratto di Lebesgue

La definizione che daremo *non* è la stessa enunciata da Lebesgue, limitata alle funzioni *da valori reali a valori reali*, bensì una generalizzazione avvenuta successivamente atta ad *astrarre* (da qui il termine) il concetto di integrale a funzioni da uno spazio di misura a valori reali (estesi) o complessi.
Premettiamo innanzitutto alcune osservazioni su come questa definizione si distinguerà da quella di *integrale di Riemann*:

1. La definizione si dà per funzioni definite su uno spazio di misura $(X, \mathscr{M}, \mu)$, mentre per Riemann le funzioni erano definite su $\mathbb{R}$ o al più su $\mathbb{R}^n$.
2. La definizione *non* richiede alcuna ipotesi sulla misura di X, non distinguendo neanche casi tra misura finita e misura infinita.

La definizione viene data per *passaggi successivi*, utilizzando a partire dal passo 2 i passaggi precedenti. Supponiamo sempre di considerare funzioni con dominio un generico *spazio di misura* $(X, \mathscr{M}, \mu)$.

- **Passo 1:** definiamo l'integrale per funzioni $s : X \longrightarrow [0, +\infty)$ **semplici**, misurabili e non negative.
- **Passo 2:** definiamo l'integrale per funzioni $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ **misurabili**, non negativi.
- **Passo 3:** definiamo l'integrale per funzioni $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ **misurabili** e **integrabili**.

Prima di passare ai passi qui sopra enunciati, dobbiamo definire cos'è una *funzione semplice* e capire come mai sono così importanti per l'integrale di Lebesgue.

6.2 FUNZIONI SEMPLICI

Definizione 6.2.1. - Funzione semplice.
Una funzione $s : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow [0, +\infty)$, con $(X, \mathscr{M})$ spazio misurabile, è detta **semplice** se la sua immagine $S(X)$ è *finita*.

Se s ha l'immagine finita di cardinalità n, allora esistono n valori distinti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ valori *distinti* tali che

$$s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

Se consideriamo $A_i = \{x \mid s(x) = \alpha_i\} = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, allora possiamo decomporre s come "somma pesata" delle funzioni caratteristiche degli insiemi A_i nella cosiddetta **decomposizone standard di** s:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \tag{6.1}$$

Proposizione 6.2.1. - Una funzione semplice è misurabile se e solo se le controimmagini degli A_i sono misurabili.
Una funzione semplice s, scritta in decomposizione standard come

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

è misurabile se e solo se gli insiemi $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ sono misurabili, $\forall i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione.
Per definizione di funzione misurabile, $s : (X, \mathscr{M}) \longrightarrow [0, +\infty)$ è misurabile se e solo se $\forall A \subseteq [0, +\infty)$ aperto, la controimmagine

$$s^{-1}(A) = \bigcup_{\alpha_i \in A} s^{-1}(\{\alpha_i\}) = \bigcup_{i:\ \alpha_i \in A} A_i$$

è misurabile in X.
$\Longleftarrow)$ Poiché i valori α_i, per definizione di s, sono finiti, per ogni i possiamo considerare un intorno aperto $U \subseteq [0, +\infty)$ di α_i sufficientemente piccolo da non contenere alcun a_j, $\forall j \neq i$. Passando alla controimmagine

$$s^{-1}(U) = \bigcup_{k:\ \alpha_k \in U} A_k = A_i$$

per ipotesi sulla misurabilità di s si ha che A_i è misurabile, $\forall i$.
$\Longrightarrow)$ Preso $A \subseteq [0, +\infty)$ aperto, abbiamo visto come la controimmagine è unione finita degli A_i:

$$s^{-1}(A) = \bigcup_{i:\ \alpha_i \in A} A_i$$

Poiché per ipotesi gli A_i sono misurabili, allora A è unione di insiemi misurabili e quindi è anch'esso misurabile. □

ESEMPI.

1. Sia $(X, \mathscr{M}) = (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}))$ e consideriamo la funzione $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ come da grafico. Osserviamo che $s(X) = \{0, 4, 8\}$, dunque è semplice; le controimmagini dei valori 0, 4 e 8 sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} A_1 &= s^{-1}(\{0\}) = (-\infty, -1] \cap [2, +\infty) \\ A_2 &= s^{-1}(\{4\}) = (-1, 1] \\ A_3 &= s^{-1}(\{8\}) = (1, 2) \end{aligned}$$

Pertanto la decomposizione standard di s risulta

$$s = 0\chi_{(-\infty,-1]\cap[2,+\infty)} + 4\chi_{(-1,1]} + 8\chi_{(1,2)} = 4\chi_{(-1,1]} + 8\chi_{(1,2)}$$

2. La funzione di Dirichlet

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{6.2}$$

è semplice perché $s([0,1]) = \{0, 1\}$ e infatti

$$s = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$$

6.2.1 *Approssimazione di funzioni misurabili non negative con funzioni semplici*

Riprendendo l'idea di Lebesgue alla base del suo integrale, ci interessa studiare le funzioni passando attraverso la loro immagine. Si può ipotizzare di *approssimare* tale funzione f con una *funzione semplice*: partizionando il codominio in opportuni intervalli individuati da quote fissate, se passiamo alle controimmagini possiamo sapere quali punti di f sono contenuti nell'intervallo posto ad una certa quota e pertanto definire una funzione caratteristica che, come nelle *carte topografiche a isoipse*, approssima la funzione f per difetto.

TEOREMA 6.2.1. - APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI MISURABILI NON NEGATIVE CON FUNZIONI SEMPLICI.
Sia $(X, \mathscr{M})$ uno spazio misurabile e sia $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una funzione misurabile.

Allora esiste una successione di funzioni semplici misurabili $s_n : X \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che

- $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x),\ \forall x \in X,\ n \geq 1.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x),\ \forall x \in X.$

OSSERVAZIONE. La successione s_n converge a f puntualmente in modo *monotono*.

DIMOSTRAZIONE.

- **PASSO 1: costruzione della successione s_n e verifica della monotonia.**
Fissato $n \geq 1$, dividiamo $[0, +\infty)$ in $[0, n)$ e $[n, +\infty]$; dividiamo ulteriormente

l'intervallo $[0,n)$ in $n2^n$ parti uguali

$$\left[0,\frac{1}{2^n}\right) \quad \left[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}\right)\dots\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right)\dots\left[\frac{n2^n-1}{2^n},n\right),\ \forall i=1,\ \dots,\ n2^n$$

Posto $E_{n,i}=f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right)\right)$ e $F_n=f^{-1}\left([n,+\infty]\right)$, $\forall i=1,\ \dots,\ n2^n$, si definisce

$$s_n=\sum_{i=1}^{n2^n}\frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}}+n\chi_{F_n} \tag{6.3}$$

Da questa costruzione segue che:

- ◇ s_n è semplice per n fissato: è una combinazione lineare *finita* di funzioni caratteristiche con pesi distinti.
- ◇ È monotona al crescere di n:

$$0\le s_n(x)\le s_{n+1}(x)\le f(x)$$

  Intuitivamente, passando da s_n a s_{n+1}:
  - ∗ i nodi individuati in s_n rimangono inalterati.
  - ∗ vengono aggiunti dei nodi intermedi dimezzando ogni intervallino $\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right)$.
  - ∗ vengono aggiunti dei nuovi nodi tra n e $n+1$

  Riducendo la dimensione di ciascun intervallino, l'approssimazione così definita risulta essere più raffinata del passo precedente.

- ■ **Passo 2: misurabilità di s_n, $\forall n\ge 1$.**
  Ricordiamo che, dati $s_i\ge 0$ e $A_i\in\mathscr{M}$, $i=1,\ \dots,\ k$ si ha

$$s=\sum_{i=1}^{k}s_i\chi_{A_i}\ \text{misurabile}\iff A_i\ \text{misurabile}\forall i$$

  Gli intervalli di $\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right)$, $\forall i=1,\ \dots,\ n2^n$ e $[n,+\infty)$ sono Borelliani in $[0,+\infty]$; pertanto, le controimmagini $E_{n,i}$ e F_n tramite f funzione misurabile sono anch'esse misurabili in X.

- ■ **Passo 3: approssimazione nel senso della convergenza puntuale.**
  Proviamo che vale la relazione

$$\lim_{n\to+\infty}s_n(x)=f(x),\ \forall x\in\ X$$

  Fissiamo $x\in X$ e distinguiamo i casi.
  - ◇ **Caso 1:** $f(x)\in[0,+\infty)$.
    Poiché $\lfloor f(x)\rfloor\le f(x)<\lfloor f(x)\rfloor+1$, posto $N_x:=\lfloor f(x)\rfloor+1$ si ha che

$$f(x)<N_x\le n,\ \forall n\ge N_x$$

Pertanto, esiste $N_x \geq 1$ tale per cui $f(x) < n$, $\forall n \geq N_X$.
Sulla base di ciò si ha che $f(x) \in [0,n)$, $\forall n \geq N_x$ e dunque esiste $i \in \{0,\ldots,n2^n\}$ tale per cui

$$f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \implies x \in f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]\right) = E_{n,i}$$

Allora $s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$ perché

$$\chi_{E_{n,j}}(x) = \delta_{i,j}$$
$$\chi_{F_n}(x) \equiv 0$$

dove $\delta_{i,j}$ è il delta di Kronecker; segue che

$$0 \leq s_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \implies 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{i}{2^n}$$

Passando al limite

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} f(x) - s_n(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{i}{2^n} = 0$$

Pertanto, per il teorema del confronto

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) - s_n(x) = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$$

◇ **Caso 2:** $f(x) = +\infty$.
Chiaramente

$$f(x) \in [n,+\infty],\ \forall n \geq 1 \implies x \overset{-1}{\inf}([n,+\infty]) = F_n$$

Allora $s_n(x) = n$ perché

$$\chi_{E_{n,j}}(x) \equiv 0$$
$$\chi_{F_n}(x) \equiv 1$$

Segue che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty = f(x) \implies \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$$

□

6.3 PASSO 1: FUNZIONI SEMPLICI, MISURABILI, NON NEGATIVE

Definizione 6.3.1. - Integrale di Lebesgue per funzioni semplici, misurabili, non negative.
Sia $s : (X,\mathcal{M},\mu) \longrightarrow [0,+\infty)$ funzione semplice, misurabile e non negativa che si decompone, dato $s(X) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, nella forma standard

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \quad A_i = s^{-1}(\{A_i\})$$

Dato $E \in \mathscr{M}$, si definisce *integrale esteso a A di s rispetto alla misura* μ il valore

$$\int_E s d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \tag{6.4}$$

con la convenzione che se un termine di tale sommatoria è $0 \cdot \infty$ allora tale termine sia uguale a 0.

Osservazione. $\mu(A_i \cap E)$ è ben definito in quanto $A_i \cap E$ è misurabile:

- A_i sono misurabili $\forall i$ perché s è misurabile per ipotesi.
- E è misurabile per ipotesi.
- L'*intersezione* è un'operazione chiusa nella σ-algebra $\mathscr{M}$

Osservazione. Come mai poniamo convenzionalmente $0 \cdot \infty = 0$? L'integrale generalizza e astrae il calcolo dell'area sottesa ad una curva; se ho un intervallo di lunghezza infinita ma a quota zero, chiaramente l'area sottesa è uguale a zero.

Esempi. Per il primo e secondo esempio riprendiamo le funzioni viste a pag. 89.

1. Consideriamo la funzione del primo esempio, che ha dominio in $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m_1)$ e calcoliamo l'integrale su $E = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s dm_1 &= 0 m_1((-\infty,-1] \cup [2,+\infty)) + 4 m_1([-1,1]) + 8 m_2((1,2)) = \\ &= 0 \cdot (+\infty) + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 16 \end{aligned}$$

2. Consideriamo la funzione di Dirichlet su $[0,1]$, che ha dominio in $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m_1)$ l'integrale su $E = [0,1]$:

$$\int_{[0,1]} s dm_1 = 1 \cdot m_1([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m_1([0,1] \setminus \mathbb{Q})$$

   Poiché
   - $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ è misurabile e si ha $m_1([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$.
   - $m_1([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = m1([0,1]) - m1([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$

   allora

$$\int_{[0,1]} s dm_1 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

3. Consideriamo $(X, \mathscr{M}, \mu) = \left(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_p\right)$ con μ_p la misura di conteggio di **Poisson** di parametro $\lambda > 0$:.

$$\mu_p(\{n\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \forall n \geq 0 \tag{6.5}$$

$$\mu_p(E) = \sum -n\colon n \in E e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \forall E \subseteq \mathbb{N} \tag{6.6}$$

Definiamo $s : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty)$ come

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 1 \\ 2 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

La funzione s è semplice, dato che $s(\mathbb{N}) = \{1, 2\}$, e

$$s = \chi_{\{0,1\}} + 2\chi_{\{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}}$$

Allora, posto $E = \mathbb{N}$, l'integrale sul dominio è

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} s d\mu_P &= 1 \cdot \mu_P(\{0,1\}) + 2\mu_P(\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}) = \\ &= e^{-\lambda} \cdot 1 + e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1} + 2 \sum_{n \geq 2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + 2 \sum_{n \geq 2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

Osservazione. La funzione di Dirichlet è una funzione *non* integrabile secondo *Riemann*, ma è integrabile secondo Lebesgue.

6.3.1 *σ-additività dell'integrale di funzioni semplici, misurabili, non negative rispetto al dominio*

Proposizione 6.3.1. - σ-additività dell'integrale di funzioni semplici, misurabili, non negative rispetto al dominio.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $s : X \longrightarrow [0, +\infty)$ semplice misurabile *non* negativa. Allora vale

$$\int_{\bigcup_{n \geq 1} E_n} s d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} s d\mu, \ \forall E_n \in \mathcal{M} : E_i \cap E_j = \varnothing, \ \forall i \neq j \tag{6.7}$$

Per dimostrare tale proprietà ci servirà un risultato sulle serie con *doppi indici*.

Proposizione 6.3.2. - Commutatività degli indici nelle serie doppie.

- Se $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$, allora
$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}$$
- Più in generale, se $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}| < +\infty$, allora vale la relazione precedente.

Dimostrazione. (della σ-additività dell'integrale rispetto al dominio.)

Siano $E_n \in \mathscr{M}$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ e sia $E = \cup_{n\geq 1} E_n$. Sia $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ la decomposizione standard di s funzione semplice, dove $s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ e $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, $\forall i = 1, \dots, k$. Si ha

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \boxed{=}$$

Per σ-additività della misura μ vale

$$\mu(A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\left(A \cap E_j\right)$$

quindi

$$\boxed{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\left(A_i \cap E_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{+\infty} \underbrace{\alpha_i \mu\left(A_i \cap E_j\right)}_{\geq 0} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu\left(A_i \cap E_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{E_j} s d\mu$$

□

Vediamo il risultato appena dimostrato da un punto di vista differente. Possiamo considerare l'integrale di Lebesgue non solo come un *funzionale* che, fissato un insieme misurabile $E \in (X, \mathscr{M}, \mu)$, agisce sulla funzione s, bensì come una *funzione d'insieme* in cui s è fissata, mentre la variabile è l'insieme misurabile E:

$$\begin{aligned} \mu_s : \mathscr{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \int_E s d\mu \end{aligned} \tag{6.8}$$

L'uguaglianza ricavata dalla proposizione precedente

$$\int_{\cup_{n\geq 1} E_n} s d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_E s d\mu, \; \forall E_n \in \mathscr{M} : E_i \cap E_j = \varnothing, \; \forall i \neq j$$

si riscrive pertanto come

$$\mu_s \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n \right) = \sum_{n\geq 1} \mu_s(E_n)$$

Pertanto, μ_s è una misura su $\mathscr{M}$.

6.4 PASSO 2: FUNZIONI A VALORI REALI MISURABILI, NON NEGATIVE

Sia $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty]$ funzione misurabile e non negativa. Dato $E \in \mathscr{M}$, vogliamo definire l'*integrale esteso ad E di f rispetto alla misura μ* utilizzando l'integrale delle funzioni semplici definito al passo 1.

DEFINIZIONE 6.4.1. - INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI A VALORI REALI, MISURABILI, NON NEGATIVE.
Sia $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty]$ funzione misurabile e non negativa. Si definisce

l'*integrale esteso ad E di f rispetto alla misura μ* come

$$\int_E f\,d\mu := \sup\left\{\int_E s\,d\mu \;\middle|\; s : X \longrightarrow [0,+\infty) \text{ semplice, misurabile: } 0 \le s \le f\right\} \tag{6.9}$$

OSSERVAZIONE.

- L'insieme

$$\left\{\int_E s\,d\mu \;\middle|\; s : X \longrightarrow [0,+\infty) \text{ semplice, misurabile: } 0 \le s \le f\right\} \subseteq [0,+\infty]$$

non è vuoto, in quanto contiene sempre $0 = \int_E 0\,d\mu$.
- $\int_E f\,d\mu \in [0,+\infty]$
- Se f è semplice allora si ritrova l'integrale definito al *passo 1*.

ATTENZIONE!
Ogni funzione misurabile *non negativa* ammette integrale secondo Lebesgue.
Questa notevole differenza rispetto all'integrale di Riemann è situa nella definizione. Se l'integrale di Riemann richiede che la somma inferiore e la somma superiore coincidono, quello di Lebesgue richiede solo l'esistenza del sup: la prima condizione non si verifica sempre, mentre la seconda è sempre verificata in $\mathbb{R}^*$.

PROPOSIZIONE 6.4.1. - PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI MISURABILI NON NEGATIVE.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura.

1. **Monotonia rispetto alla funzione integranda:**
date $f, g : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabili, non negative tali per cui $f \le g$, allora

$$\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu, \ \forall E \in \mathscr{M} \tag{6.10}$$

2. **Monotonia rispetto al dominio della funzione integranda:**
dati $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile, non negativa e $E, F \in \mathscr{M}$ tali per cui $E \subseteq F$, allora

$$\int_E f\,d\mu \le \int_F g\,d\mu \tag{6.11}$$

3. **Linearità dell'integrale (prodotto per uno scalare):**
dati $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile, non negativa e $c \ge 0$

$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu, \ \forall E \in \mathscr{M} \tag{6.12}$$

4. **Ininfluenza degli insiemi di misura nulla sull'integrale:**
sia $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile, non negativa; se $E \in \mathscr{M}$ con $\mu(E) = 0$, allora

$$\int_E f \, d\mu = 0 \tag{6.13}$$

5. **Integrazione sullo spazio intero:**
sia $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile, non negativa; allora

$$\int_E f \, d\mu = c \int_X f \chi_E d\mu, \; \forall E \in \mathscr{M} \tag{6.14}$$

6.4.1 *Teorema della convergenza monotona*

Il **teorema della convergenza monotona**, altresì noto come Teorema di Beppo-Levi (principalmente in Italia) o di Lebesgue, si inserisce nel filone dei risultati sul problema del *passaggio al limite sotto segno di integrale* di cui abbiamo parlato per la prima volta nel Capitolo 1.
Abbiamo già visto[1] che se una successione di funzioni f_n Riemann-integrabili su un compatto converge uniformemente a f, allora f è Riemann-integrabile e vale il passaggio al limite dell'integrale. Il teorema che dimostreremo, pur essendo applicabile solo a funzioni misurabili e monotone *crescenti*, risulta avere diversi notevoli vantaggi rispetto al risultato basato sulla convergenza uniforme.

Teorema 6.4.1. - Teorema della convergenza monotona.
Siano $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ con $n \geq 1$ tali che

1. f_n sono misurabili.
2. $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \; \forall x \in X.$
3. $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \; \forall n \geq 1, \; \forall x \in X.$

allora

1. f è misurabile.
2. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f \, d\mu \in [0, +\infty] \tag{6.15}$$

Osservazione.

- L'uguaglianza della tesi è valida per ogni misura di X, anche infinita.
- Il risultato è in generale *falso* se $f_n(x)$ decresce rispetto ad n, $\forall x \in X$.

Esempio. Controesempio con una successione di funzioni decrescenti.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m_1)$ e $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per ogni x vale

- $f_n(x)$ decrescente rispetto ad n.

[1] Si veda Capitolo 3, teorema 2.3.3, pag. 22.

- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

Pertanto:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm_1 = \lim_{n\to+\infty} (+\infty) = +\infty$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right) dm_1 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dm_1 = 0$$

DIMOSTRAZIONE. (DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA.)

I f è misurabile perché è limite puntuale di funzioni misurabili.

II Osserviamo che f misurabile e non negativa implica che

$$\exists \int_X f \, d\mu \in [0,+\infty]$$

Dalla monotonia data per ipotesi 3) segue, per monotonia dell'integrale rispetto alla funzione integranda, che

$$\underbrace{0 \le \int_X f_n d\mu \le \int_X f_{n+1} d\mu}_{*} \overbrace{\le \int_X f \, d\mu}^{*}$$

Da $*$ si nota come la successione

$$\int_X f_n d\mu \in [0,+\infty]$$

è crescente e quindi per il *teorema sui limiti di successioni monotone* esiste il suo limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \in [0,+\infty]$$

Considerando $*$, per il *teorema della permanenza del segno* si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f \, d\mu$$

È sufficiente dimostrare che vale la disuguaglianza di verso opposto:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \ge \int_X f \, d\mu$$

Ricordiamo che per definizione

$$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{ \int_X s \, d\mu \,\middle|\, s : X \longrightarrow [0,+\infty) \text{ semplice, misurabile} : 0 \le s \le f \right\}$$

Pertanto ci sarà sufficiente provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu \geq \int_X s d\mu, \ \forall s \text{ funzione definita come sopra.}$$

Osserviamo che questa è vera se mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu \geq c\int_X s d\mu, \ \forall s \text{ funzione definita come sopra, } \forall c \in (0,1)$$

Basterà infatti passare poi al limite per $c \to 1^-$ per ottenere la condizione cercata. Siano quindi $c \in (0,1)$ e $s : X \longrightarrow [0,+\infty]$ semplice, misurabile e tale che $0 \leq s \leq f$ su X. Per ogni $n \geq 1$ definiamo

$$E_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}$$

Osserviamo che se $x \in E_n$, allora

$$f_n(x) \geq cs(x) \implies f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq cs(x) \implies x \in E_{n+1}, \ \forall n \geq 1$$

Cioè $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Ora abbiamo

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs d\mu = c\int_E s d\mu = c\mu_s(E_n)$$

dove μ_s è la misura definita come

$$\mu_s(E) = \int_E s d\mu$$

Abbiamo quindi ricavato che

$$* \quad \int_X f_n d\mu \geq c\mu_s(E_n), \ \forall n \geq 1$$

Se $n \to +\infty$, essendo μ_S una misura E_n una successione insiemistica crescente, per continuità della misura

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_s(E_n) = \mu_s\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right)$$

Passando al limite nella disequazione * otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu \geq c\mu_s\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = c\int_{\bigcup_{n\geq 1} E_n} d\mu_s$$

Per concludere, proviamo che

$$\bigcup_{n\geq 1} E_n = X$$

Banalmente l'inclusione $\subseteq$ è verificata: per trovare l'altra si usa la convergenza puntuale di $f_n(x)$ e $f(x)$, $\forall x \in X$.

$\square$

6.4.2 *Additività dell'intergrale, scambio di integrale e serie*

PROPOSIZIONE 6.4.2. - ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $f_1, \dots, f_N : X \longrightarrow [0,+\infty]$ funzioni misurabili. Allora

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{N} f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^{N} \int_X f_i \, d\mu \tag{6.16}$$

OSSERVAZIONE. *Tutti* gli integrali nell'enunciato esistono (eventualmente infiniti) in quanto le f_i sono funzioni misurabili non negative.

DIMOSTRAZIONE. Si prova per induzione su N. Il passo induttivo è immediato, pertanto proviamo la base dell'induzione ($N = 2$): dimostriamo dunque che

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu$$

- **PASSO 1:** proviamo il risultato nel caso di funzioni semplici $s, t : X \longrightarrow [0,+\infty)$ misurabili. Esse si possono scrivere come

$$\begin{array}{lll} & s = \sum_{i=1}^{k} s_i \chi_{A_i} & t = \sum_{i=1}^{n} k t_j \chi_{B_j} \\ \text{dove} & s(X) = \{s_1, \dots, s_k\} & t(X) = \{t_1, \dots, t_n\} \\ & A_i = s^{-1}(\{s_i\}), \; i = 1, \dots, k & B_j = t^{-1}\left(\left\{t_j\right\}\right), \; j = 1, \dots, n \end{array}$$

  Consideriamo $E_{i,j} = A_i \cap B_j$, $\forall i, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$: essi formano una nuova partizione di X e, preso $x \in E_{ij}$, si ha

$$\begin{cases} s(x) = s_i \\ t(x) = t_j \end{cases}$$

  Questo significa che $s(x) + t(x) = s_i + t_j$, $\forall x \in E_{ij}$, ossia

$$s + t = \sum_{i,j} \left(s_i + t_j \right) \chi_{E_{ij}}$$

  Integriamo secondo Lebesgue:

$$\int_X (s+t) \, d\mu = \sum_{i,j} \left(s_i + t_j \right) \mu\left(E_{ij} \right) = \sum_{i,j} s_i \mu\left(E_{ij} \right) + \sum_{i,j} t_j \mu\left(E_{ij} \right) = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$$

- **PASSO 2:** proviamo il risultato nel caso di funzioni $f_1, f_2 : X \longrightarrow [0,+\infty)$ misurabili.
  È noto che:
  - ◇ Esiste una successione di funzioni semplici misurabili $s_n : X \longrightarrow [0,+\infty]$ tali che

  * $0 \le s_n(x) \le s_{n+1}(x) \le f_1(x),\ \forall x \in X.$
  * $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f_1(x),\ \forall x \in X$

◇ Esiste una successione di funzioni semplici misurabili $t_n : X \longrightarrow [0,+\infty]$ tali che
  * $0 \le t_n(x) \le t_{n+1}(x) \le f_2(x),\ \forall x \in X.$
  * $\lim_{n\to+\infty} t_n(x) = f_2(x),\ \forall x \in X$

Di conseguenza si ha

$$0 \le (s_n + t_n)(x) \le (s_{n+1} + t_{n+1})(x) \le (f_1 + f_2)(x),\ \forall x \in X$$
$$\lim_{n\to+\infty} (s_n + t_n)(x) = (f_1 + f_2)(x),\ \forall x \in X$$

Integriamo secondo Lebesgue:

$$\begin{aligned}\int_X (f_1 + f_2)\,d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_X (s_n + t_n)\,d\mu = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \right) = \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n d\mu + \lim_{n\to+\infty} \int_X t_n d\mu = \\ &= \int_X f_1\,d\mu + \int_X f_2 d\mu\end{aligned}$$

□

Una conseguenza immediata di questa proprietà è che per le successioni di funzioni misurabili non negative vale lo *scambio tra integrale e serie*.

Corollario 6.4.1. - Scambio tra integrale e serie per funzioni misurabili e non negative.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura siano $f_n : X \longrightarrow [0,+\infty]$, $n \ge 1$ funzioni misurabili. Allora vale lo scambio tra integrale e serie:

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu \tag{6.17}$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle ridotte

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x),\ \forall x \in X$$

Ricordiamo che $g_k(x)$ è una successione crescente su k per ogni $x \in X$, in quando $f_n(x) \ge 0$; poiché valgono le ipotesi del teorema della convergenza monotona sulla successione g_k, possiamo applicarlo.
Prima di farlo, osserviamo che per additività dell'integrale vale

$$\int_X \sum_{n=1}^{k} f_n = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n$$

Noto ciò, dimostriamo facilmente il risultato desiderato:

$$\int\left(\lim_{k\to+\infty} g_k\right)d\mu = \lim_{k\to+\infty}\int_X g_k\,d\mu$$
$$\Longrightarrow \int\left(\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k} f_n\right)d\mu = \lim_{k\to+\infty}\int_X\sum_{n=1}^{k} f_n\,d\mu = \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_X f_n$$
$$\Longrightarrow \int_X\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

□

6.4.3 *Integrazione rispetto alla misura conteggio pesata*

Teorema 6.4.2. - Integrazione rispetto alla misura conteggio pesata.
Sia $\left(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_p\right)$ spazio di misura dove μ_p è la *misura conteggio pesata* definita da

$$\mu_p(\{n\}) = p_n,\ \forall n \geq 1 \text{ con } p_n \geq 0$$
$$\mu_p(E) = \sum_{n\geq E}\mu_p(\{n\}),\ \forall E \subseteq \mathbb{N}$$

Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,+\infty]$. Allora si ha

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_p = \sum_{n\geq 1} f_n p_n$$

In particolare, se $p_n = 1$, $\forall n \geq 1$, si ha, indicata con μ^* la misura conteggio corrispondente,

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu^* = \sum_{n\geq 1} f_n$$

Osservazione. Nell'enunciato non è richiesta esplicitamente la misurabilità di f in quanto ogni $f : (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})) \longrightarrow [0,+\infty]$ è *sempre misurabile*. Infatti, $\forall A \subseteq [0,+\infty]$ aperto, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e quindi $f^{-1}(A) \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Dimostrazione. Osserviamo che f è una successione

$$\{f_n\}_{n\geq 1} = \{f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots\}$$

Per $k \geq 1$ definiamo $g^k : \mathbb{N} \longrightarrow [0,+\infty]$ mediante

$$g_n^k = g^k(n) = \begin{cases} f_n & \text{se } n \leq k \\ 0 & \text{se } n > k \end{cases}$$

Ad esempio:

$$\left\{g_n^1\right\}_{n\geq 1} = \{f_1, 0, 0, \ldots\}$$
$$\left\{g_n^2\right\}_{n\geq 1} = \{f_1, f_2, 0, \ldots\}$$
$$\vdots \left\{g_n^k\right\}_{n\geq 1} = \{f_1, f_2, \ldots, f_k, 0 \ldots\}$$

Si ha $\lim\limits_{k\to+\infty} g^k(n) = f_n = f(n)$, $\forall n \geq 1$, quindi g^k converge puntualmente a f in ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, la successione g_n^k soddisfa

$$g_n^{k+1} \geq g_n^k, \ \forall k \geq 1$$

Pertanto, g^k è una successione che converge *puntualmente* in modo *monotona crescente* a f. Per il *teorema della convergenza monotona*, si ha

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_p = \lim_{k\to+\infty} g^k d\mu_p$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ calcoliamo $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} g^k d\mu_p$. Osserviamo che $g^k(\mathbb{N}) = \{f_1, \ldots, f_k, 0\}$, quindi g^k è *semplice* avendo immagine finita. Allora

$$\left(g^k\right)^{-1}(\{f_n\}) = n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq k \left(g^k\right)^{-1}(\{0\}) = \{k+1, k+2, \ldots\} = A_0$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_{\mathbb{N}} d^k d\mu_p = \sum_{n=1}^{k} f_n \mu_p(\{n\}) + 0 \cdot \underbrace{\mu_p(A_0)}_{\substack{=0 \text{ (anche} \\ \text{nel caso} \\ 0\cdot\infty)}} = \sum_{n=1}^{k} f_n p_n$$

Concludendo:

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_p = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} g^k d\mu_p = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n p_n$$

□

Il seguente risultato, che abbiamo già incontrato[2] e che ci è servito per dimostrare la σ-additività dell'integrale di funzioni semplici rispetto al dominio, si può anche vedere come corollario dell'*integrazione della misura conteggio semplice*, oltre che in modo *elementare*.

Corollario 6.4.2. - Commutatività degli indici nelle serie doppie.

[2]Si veda pag. 93.

Se $a_{ij} \geq 0$ $\forall i, j$, allora

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}$$

6.4.4 *Lemma di Fatou*

Lemma 6.4.1. - Lemma di Fatou.
Se $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ sono misurabili, $\forall n$, allora

$$\int_X \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n d\mu \right) d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu \tag{6.18}$$

Dimostrazione. Posto $g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x)$ dove $k \geq 1$, $x \in X$, allora $g_k \leq f_k$ e quindi

$$\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$$

Inoltre:

- $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x)$, $\forall x \in X$.
- g_k è misurabile, $\forall k \geq 1$.
- $\lim_{n \to +\infty} g_k(x) = \liminf_{n \to +\infty} f_n(x)$ per caratterizzazione del $\liminf$.

Per il teorema della convergenza monotona

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X g_k d\mu = \int_X \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$$

□

Osservazione.

- Poiché f_n sono misurabili e non negative, anche $\liminf_{n \to +\infty}$ è misurabile e non negativo e pertanto il suo integrale secondo Lebesgue esiste sempre.
- Ci sono casi in cui vale *soltanto* la disuguaglianza stretta.

Esempio. Lemma di Fatou con disuguaglianza stretta.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m_1)$ e $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Si ha

$$\liminf_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \implies \int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n \right) dm_1 = 0$$

Mentre invece

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm_1 = \liminf_{n \to +\infty} 1 = 1$$

6.4.5 *σ-additività dell'integrale di funzioni misurabili non negative rispetto al dominio*

Proposizione 6.4.3. - σ-additività dell'integrale rispetto al dominio.
Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ funzione misurabile. Allora

$$\int_{\bigcup_{n\geq 1} E_n} f\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{E_n} f\,d\mu,\ \forall E_n \in \mathcal{M} : E_i \cap E_j = \varnothing,\ \forall i \neq j \tag{6.19}$$

Dimostrazione. Posto $E := \bigcup_{n\geq 1} E_n$, ricordiamo che

$$\int_E f\,d\mu = \int_X (f\chi_E)\,d\mu \text{ con } f\chi_E = \begin{cases} f & \text{su } E \\ 0 & \text{su } X \setminus E \end{cases}$$

Osserviamo che $\chi_E = \sum_{n\geq 1} \chi_{E_n}$ perché $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ e $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, pertanto

$$\int_E f\,d\mu = \int_X (f\chi_E)\,d\mu = \int_X \left(f \sum_{n\geq 1} f\chi_{E_n} d\mu \right) = \int_X \sum_{n\geq 1} \underbrace{(f\chi_{E_n})}_{\geq 0} d\mu =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \int_X f\chi_{E_n} d\mu = \sum_{g\geq 1} \int_{E_n} f\,d\mu$$

□

Osservazione. Questo è il caso generale per *funzioni misurabili* di un risultato precedentemente dimostrato per *funzioni semplici*, misurabili, non negative. Notiamo che questo risultato richiede *implicitamente* tale caso: infatti, nella dimostrazione abbiamo fatto uso del *teorema della convergenza monotona*, che richiede la σ-additività rispetto al dominio delle funzioni semplici.

6.4.6 *Misura indotta dall'integrale di Lebesgue*

Una conseguenza della σ-additività rispetto al dominio dell'integrale di Lebesgue è che, in modo analogo a come abbiamo visto per le funzioni semplici, possiamo costruire un *nuovo spazio di misura* $\left(X,\mathcal{M},\mu_f\right)$ a partire da uno spazio di misura $(X,\mathcal{M},\mu)$ dato e una funzione $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile.

Corollario 6.4.3. - Misura indotta dalla funzione misurabile non negativa.
Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile. Allora la funzione

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathcal{M} &\longrightarrow [0,+\infty] \\ E &\longmapsto \int_E f\,d\mu \end{aligned} \tag{6.20}$$

è una misura su $\mathcal{M}$.

Esempio. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m_1)$ e prendiamo la **funzione gaussiana**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione è continua e dunque misurabile. La misura μ_f indotta è di probabilità dato che $\mu_f(\mathbb{R}) = 1$ e viene chiamata **misura di probabilità normale**:

$$\mu_f(E) = \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dm_1,\ \forall E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$
$$\mu_f(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dm_1 = 1$$

Se consideriamo lo spazio di misura $\left(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), \mu_f\right)$ e una funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile, possiamo definire

$$\int_E g d\mu_f,\ \forall E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$

Cos'è questo integrale? La risposta tale quesito è il seguente teorema.

Teorema 6.4.3. - Integrale rispetto alla misura indotta.
Dato $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile, consideriamo lo spazio di misura indotto $\left(X, \mathscr{M}, \mu_f\right)$ con

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathscr{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \textstyle\int_E f d\mu \end{aligned}$$

Sia $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_X g d\mu_f = \int_X g f d\mu \tag{6.21}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, prima dimostriamo la proprietà per funzioni caratteristiche, poi per combinazioni lineari di esse (funzioni semplici), poi consideriamo il caso di una funzione f misurabile non negativa, approssimandola co una successione di funzioni semplici misurabili.

I Sia $g = \chi_A$ con $A \in \mathscr{M}$ (pertanto g è misurabile). Si ha

$$\int_X \chi_A d\mu_f = \int_A 1 d\mu_f = 1\mu_f(A) = \mu_f(A) \underset{\substack{\text{def.} \\ \text{di } \mu_f}}{=} \int_A f d\mu = \int_X (\chi_A f d\mu)$$

II Sia $g : X \longrightarrow [0, +\infty)$ misurabile semplice, scritta nella decomposizione standard come

$$g = \sum_{i=1}^{k} g_i \chi_{A_i} \quad \text{con } g(X) = \{g_1, \ldots, g_k\} \text{ e } A_i = g^{-1}(\{g_i\}),\ i = 1,\ \ldots,\ k$$

Allora

$$\int_X g d\mu_f = \int_X \left(\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_A \right) d\mu_f) \sum_{i=1}^{k} g_i \int_X \chi_{A_i} d\mu_f \underset{\text{passo 1}}{=} \sum_{i=1}^{k} g_i \int_X \chi_A f d\mu =$$

$$= \int_X \underbrace{\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_{A_i}}_{=g} f d\mu = \int_X g f d\mu$$

III Consideriamo $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile. È noto che esiste una successione $g_n : X \longrightarrow [0, +\infty)$ di funzioni semplici misurabili tali

- $\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = g(x),\ \forall x \in X.$
- $g_{n+1}(x) \leq g_n(x),\ \forall x \in X,\ \forall n \geq 1.$

Allora

$$\int_X g d\mu_f \underset{\substack{\text{thm. di} \\ \text{convergenza} \\ \text{monotona}}}{=} \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n d\mu_f \underset{\text{passo 2}}{=} \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n f d\mu$$

Osservando che

- $\lim_{n \to +\infty} (g_n f)(x) = (g f)(x),\ \forall x \in X.$
- $(g_{n+1} f)(x) \leq (g_n f)(x),\ \forall x \in X,\ \forall n \geq 1.$

possiamo concludere, per il teorema di convergenza monotona, che

$$\int_X g d\mu_f = \int_X (g f) d\mu$$

□

Esempio. Riprendiamo l'esempio visto in precedenza [a] della funzione gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ \forall x \in X$$

In $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m_1)$ essa implica la misura di probabilità $(\mu_f(X) = 1)$ normale

$$\mu_f(E) = \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ \forall E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$

la quale induce il nuovo spazio di misura $\left(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), \mu_f\right)$. Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dm_1$$

Osserviamo che per $g(x) = x^k$ quello che otteniamo integrando rispetto alla misura μ_f è il momento k-esimo di f.

[a] Si veda pag. 105.

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che se $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ è misurabile, allora

$$\mu_f(E) = \int_E f\,d\mu = 0,\ \forall E \in \mathscr{M} : \mu(E) = 0$$

Riscriviamo questa relazione come

$$\forall E \in \mathscr{M} : \mu(E) = 0 \implies \mu_f(E) = 0$$

Questo si esprime dice che μ_f è **assolutamente continua rispetto a** μ e si indica $\mu_f \ll \mu$.

DEFINIZIONE 6.4.2. - CONTINUITÀ ASSOLUTA.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\lambda : X \longrightarrow [0,+\infty]$. λ si dice **assolutamente continua rispetto a** μ se

$$\forall E \in \mathscr{M} : \mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0 \tag{6.22}$$

e si indica come $\lambda \ll \mu$.

ESEMPI.

- MISURA ASSOLUTAMENTE CONTINUA.
  Se $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile, μ_f definita precedentemente è assolutamente continua rispetto a μ
- MISURA NON ASSOLUTAMENTE CONTINUA.
  Sia $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m_1)$ e consideriamo la *misura conteggio*

$$\begin{aligned} \lambda : \mathscr{L}(\mathbb{R}) &\longrightarrow [0,+\infty] \\ E &\longmapsto \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases} \end{aligned}$$

λ *non* è assolutamente continua rispetto a m_1: infatti, preso $E = \{\overline{x}\}$, con $\overline{x} \in \mathbb{R}$, si ha

$$m_1(\{\overline{x}\}) = 0 \text{ ma } \lambda(\{\overline{x}\}) = 1$$

Diamo ora una caratterizzazione delle misure assolutamente continue finite.

TEOREMA 6.4.4. - CARATTERIZZAZIONE DELLE MISURE ASS. CONT. FINITE.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\lambda : \mathscr{M} \longrightarrow [0,+\infty)$ una misura *finita*, ossia tale per cui $\lambda(X) < +\infty$. Allora

$$\lambda \ll \mu \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathscr{M} : \mu(E) < \delta \implies \lambda(E) < \varepsilon \tag{6.23}$$

Tra le misure assolutamente rispetto ad una misura μ ci sono le misure del tipo μ_f introdotte prima. Ci si potrebbe chiedere se ce ne sono altre: se μ è σ-finita, ossia se soddisfa

$$\mu(X) = +\infty \quad X = \bigcup_{n\geq 1} X_n,\ \mu(X_n) < +\infty$$

La risposta è *no*, come si può vedere dal teorema seguente.

Teorema 6.4.5. - Teorema di Radon-Nicodym.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura con μ misura σ-finita e sia $\lambda : X \longrightarrow [0,+\infty]$ una misura. Allora

$$\lambda \ll \mu \iff \exists\ f : X \longrightarrow [0,+\infty]\ :\ \lambda(E) = \int_E f\,d\mu,\ \forall E \in \mathscr{M} \tag{6.24}$$

6.5 INTEGRABILITÀ

Ci stiamo avvicinando al terzo e ultimo passo dell'integrale di Lebesgue: lo scopo è quello di estendere la definizione per funzione *a valori complessi*.
Tuttavia, a differenza del passo 2, dove l'integrale può essere assumere valori in $[0,+\infty]$, l'insieme dei complessi $\mathbb{C}$ non contempla il valore $+\infty$; inoltre, come vedremo, la costruzione dell'integrale scelta può presentare delle *forme di indecisione* che *non* possiamo risolvere.
Per proseguire, dobbiamo necessariamente considerare una classe particolare di funzioni misurabili, le **funzioni integrabili**.

Definizione 6.5.1. - Integrabilità.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. La funzione f si dice **integrabile** se

1. f misurabile.
2. $\displaystyle\int_X |f|\,d\mu < +\infty$ dove $|f| : X \longrightarrow [0,+\infty]$

Indichiamo l'insieme delle funzioni integrabili come $\mathscr{L}^1(\mu)$.

Osservazione.
- Per definizione $f \in \mathscr{L}^1(\mu) \iff |f| \in \mathscr{L}^1(\mu)$.
- Nel caso particolare $f : X \longrightarrow [0,+\infty)$, se f è misurabile, allora esiste

$$\int_X f\,d\mu$$

finito o $+\infty$, dunque $f : X \longrightarrow [0,+\infty)$ misurabile ammette *sempre* integrale secondo Lebesgue, ma è integrabile solo se

$$\int_X f\,d\mu < +\infty$$

PROPOSIZIONE 6.5.1. - LE FUNZIONI INTEGRABILI FORMANO UNO SPAZIO VETTORIALE.
$\mathscr{L}^1(\mu)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma di funzioni e prodotto di una funzione per uno scalare.

DIMOSTRAZIONE. Siano $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Allora:

1. $\alpha f + \beta g$ misurabile perché f e g sono misurabili.
2. $$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_X |\alpha||f| + |\beta||g| d\mu = |\alpha| \underbrace{\int_X |f| d\mu}_{\substack{<+\infty \\ \text{perché} \\ f \text{ int.}}} + |\beta| \underbrace{\int_X |g| d\mu}_{\substack{<+\infty \\ \text{perché} \\ g \text{ int.}}} < +\infty$$

Pertanto $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^1(\mu)$. □

6.5.1 *Decomposizione di una funzione a valori complessi in termini di funzioni a valori reali non negativi*

Come fu utilizzato il passo 1 dell'integrale di Lebesgue per definire il passo 2, ci interessa utilizzare il secondo passo dell'integrale di Lebesgue per definire il terzo. Lo scopo quindi è di scomporre una generica funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ integrabile in una combinazione lineare di funzioni non negative ancora integrabili, in modo che il loro integrale sia definito. Per far ciò, consideriamo la *parte reale* e *immaginaria* di f:

- **Parte reale:** $u := \mathfrak{Re} f : X \longrightarrow \mathbb{R}$
- **Parte immaginaria:** $v := \mathfrak{Im} f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

In questo modo, abbiamo scomposto f come una combinazione lineare di funzioni misurabili reali, ma possono assumere valori anche negativi. Decomponiamo ulteriormente u e v usando le *parti positive* e *parti negative*:

- **Parte positiva di** u: $u^+ := \max(u, 0) \geq 0$
- **Parte negativa di** u: $u^- := \max(-u, 0) \geq 0$
- **Parte positiva di** v: $v^+ := \max(v, 0) \geq 0$
- **Parte negativa di** v: $v^- := \max(-v, 0) \geq 0$

Ottenendo così $u = u^+ - u^-$ e $v = v^+ - v^-$.
Tornando quindi a $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, possiamo ottenere f come combinazione lineare di quattro funzioni reali *non negative*.

$$f = (\mathfrak{Re} f) + i(\mathfrak{Im} f) = \left((\mathfrak{Re} f)^+ - (\mathfrak{Re} f)^-\right) + i\left((\mathfrak{Im})^+ - (\mathfrak{Im})^-\right) \tag{6.25}$$

Con la prossima proposizione dimostreremo che le funzioni qui definite sono tutte integrabili.

PROPOSIZIONE 6.5.2. - INTEGRABILITÀ DELLE PARTI POSITIVE E NEGATIVE DELLE PARTI REALI E IMMAGINARIE.
Se $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, allora $(\mathfrak{Re} f)^\pm$, $(\mathfrak{Im} f)^\pm \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

DIMOSTRAZIONE. □

6.6 PASSO 3: FUNZIONI COMPLESSE INTEGRABILI

Avendo enunciato tutte le premesse del caso, siamo nelle condizioni di enunciare il terzo passo dell'integrale di Lebesgue.

DEFINIZIONE 6.6.1. - INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI A VALORI COMPLESSE, INTEGRABILI.

Sia $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione *integrabile*. Posto

$$f = (\Re f)^+ - (\Re f)^- + i\left[(\Im f)^+ - (\Im f)^-\right]$$

si definisce l'*integrale esteso ad E di f rispetto alla misura μ* come

$$\int_E f\,d\mu := \int_E (\Re f)^+\,d\mu - \int_E (\Re f)^- + i\left(\int_E (\Im f)^+\,d\mu - \int_E (\Im f)^-\,d\mu\right) \tag{6.26}$$

OSSERVAZIONE. L'ipotesi $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ implica, come dice la proposizione 6.5.2, che $(\Re f)^\pm$, $\left(\Im_f\right)^\pm \in \mathscr{L}^1(\mu)$ e quindi vale

$$\int_X (\Re f)^\pm\,d\mu < +\infty \qquad \int_X (\Im f)^\pm\,d\mu < +\infty$$

Di conseguenza, tale integrale esiste finito in $\mathbb{C}$. Se infatti le quattro funzioni ottenute decomponendo f non fossero integrabili, allora potrebbero capitare delle situazioni in cui *due degli integrali* della scomposizione danno la *forma indeterminata* $\infty - \infty$.

PROPOSIZIONE 6.6.1. - PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE PER FUNZIONI A VALORI COMPLESSI.

1. **Linearità:**

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu,\ \forall f, g \in \mathscr{L}^1(\mu),\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{C} \tag{6.27}$$

2. **Monotonia rispetto al modulo:**

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu,\ \forall f \in \mathscr{L}^1(\mu) \tag{6.28}$$

3. **σ-additività rispetto al dominio:** se $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$, $\forall E_n \in \mathscr{M}: E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, allora

$$f \in \mathscr{L}^1(\mu) \implies \int_E f\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{E_n} f\,d\mu \tag{6.29}$$

4. **Assoluta continuità:**

$$f \in \mathscr{L}^1(\mu) \implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \colon \forall E \in \mathscr{M} \colon \mu(E) < \delta \implies \left|\int_E f\,d\mu\right| < \varepsilon \tag{6.30}$$

in altre parole, l'integrale si può rendere arbitrariamente più piccolo in modulo a patto di integrare su un dominio di misura sufficientemente piccola.

Dimostrazione. Dimostriamo l'assoluta continuità (punto 4).
Consideriamo $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$; sappiamo che f è misurabile e pertanto anche $|f| : X \longrightarrow [0, +\infty)$ la è.
Consideriamo la misura

$$\begin{aligned} \mu_{|f|} : \mathscr{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \textstyle\int_E |f| d\mu \end{aligned}$$

Essa è assolutamente continua rispetto a μ. Inoltre, $\mu_{|f|}$ è finita perché $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ e quindi

$$\mu_{|f|}(X) \int_X |f| d\mu < +\infty$$

Per la caratterizzazione delle misure finite assolutamente continue rispetto a μ si ha

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \colon E \in \mathscr{M},\ \mu(E) < \delta \implies \mu_{|f|}(E) = \int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

Si ha quindi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \colon \exists E \in \mathscr{M},\ \mu(E) < \delta \implies \left| \int_E f\, d\mu \right| \underset{\substack{\text{prop. 2} \\ \text{dell'int.}}}{\leq} \int_E |f| d\mu < \varepsilon \implies \left| \int_E f\, d\mu \right| < \varepsilon$$

□

6.6.1 *Teorema della convergenza dominata*

Teorema 6.6.1. - Teorema della convergenza dominata.

Dimostrazione. □

6.7 TRA INTEGRALE DI RIEMANN E INTEGRALE DI LEBESGUE

Nell'excursus storico abbiamo visto come l'*integrale di Lebesgue* e le sue successive astrazioni di inizio '900 siano state la risposta a due domande che indirizzarono gli studi di Analisi del XIX secolo:

- Come si può allargare la classe delle funzioni integrabili?
- Come si può caratterizzare l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione integrabile secondo Riemann?

Con i tre passi precedentemente esposti abbiamo costruito l'integrale astratto di Lebesgue e risposto alla prima domanda, mentre rimane al momento aperta la seconda; inoltre, nel caso di funzioni d $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, sorge la questione: *che relazione c'è tra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue?*
Nel caso di funzioni limitate su un intervallo chiuso e che sono Riemann-integrabili scopriamo che tali integrali coincidono.

Teorema 6.7.1. - Integrale proprio di Riemann implica integrale di Lebesgue.
Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e misurabile. Allora

$$f \in \mathscr{R}([a,b]) \implies f \in \mathscr{L}^1([a,b], m_1) \tag{6.31}$$

e

$$\int_{[a,b]} |f| dm_1 = \int_a^b f(x)\, dx \tag{6.32}$$

Osservazione. Il viceversa non è vero: come abbiamo già visto[a], la funzione di Dirichlet è integrabile secondo Lebesgue ma non secondo Riemann.

[a] Si veda pag. 92.

Situazione differente si ha con l'integrale improprio di Riemann: infatti, può capitare che ci siano funzioni integrabili (almeno impropriamente) secondo Riemann ma *non* secondo Lebesgue!

Teorema 6.7.2. - Integrale improprio di Riemann e integrale di Lebesgue.
Sia $f : [a,+\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che $f \in \mathscr{R}([a,b])$ per ogni $b > a$. Allora

1. Vale la relazione

$$\int_{[a,+\infty)} |f| dm_1 = \int_0^{+\infty} |f(x)| dx \in [0,+\infty] \tag{6.33}$$

2. Se l'integrale improprio di Riemann di f su $[a,+\infty)$ converge *assolutamente* allora f è integrabile secondo Lebesgue su $[a,+\infty)$ e

$$\int_{[a,+\infty)} f\, dm_1 = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R} \tag{6.34}$$

Osservazione. Se l'integrale improprio di Riemann di f su $[a,+\infty)$ converge ma non *assolutamente* allora f *non* è integrabile secondo Lebesgue su $[a,+\infty)$.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

sull'intervallo $[\pi,+\infty)$. Mostriamo che:

1. L'integrale di f secondo Riemann converge semplicemente.
2. L'integrale di f secondo Riemann *non* converge assolutamente.
3. La funzione f *non* è integrabile secondo Lebesgue.

I Integrando per parti si ha

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{\pi}^{R} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \to +\infty} \left[-\frac{\cos x}{x} \bigg|_{\pi}^{R} - \int_{\pi}^{R} \frac{\cos x}{x^2} dx \right]$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left[\underbrace{-\frac{\cos R}{R}}_{\substack{\to 0 \text{ per} \\ R \to \infty}} + \cos \pi - \int_{\pi}^{R} \frac{\cos x}{x^2} dx \right] = -1 - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

dato che

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

e

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

converge, allora

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right|$$

converge e dunque per *confronto*

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

converge (assolutamente). Ne consegue che l'integrale di $f(x)$ è *semplicemente convergente*.

II Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

operando nell'ultimo passaggio un cambio di indice $k-1 \to k$. Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - 1 \right]$$

Poiché l'integrale è minorato dalla *serie armonica*, che sappiamo essere *divergente*, allora l'integrale diverge e quindi l'integrale della funzione $f(x)$ *non* converge *assolutamente*.

III Per il primo punto del teorema 6.7.2 vale

$$\int_{[\pi,+\infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm_1 = \int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

Poiché l'integrale improprio di Riemann *non* converge assolutamente, segue che f non è integrabile su $[\pi, +\infty)$ e pertanto non ammette integrale secondo Lebesgue.

Sulla base di questi risultati siamo finalmente in grado di rispondere al secondo quesito: con una certa ironia, la caratterizzazione dell'insieme dei punti di discontinuità di una funzione integrabile secondo Riemann è basata sulla **misura di Lebesgue**.

Teorema 6.7.3. - Caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.
Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e sia D_f l'insieme delle discontinuità di f. Se m_1 è la misura di Lebesgue unidimensionale, allora

$$f \in \mathscr{R}([a,b]) \iff m_1\left(D_f\right) = 0 \tag{6.35}$$

Esempio. Sia $C \subseteq [0,1]$ l'insieme di Cantor e sia $f = \chi_C$ la funzione caratteristica su tale insieme. Si ha che $D_f = \partial C$, ma poiché C è un chiuso con interno vuoto, allora

$$D_f = \partial C = C$$

Essendo $m_1(C) = 0$, f è integrabile secondo Riemann su $[0,1]$.

6.8 Il ruolo degli insiemi di misura nulla

Abbiamo appena visto come una funzione è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme delle sue discontinuità è un insieme di misura nulla. In altre parole, una funzione è integrabile secondo Riemann su un dato intervallo se e solo se essa è continua, tolto al più un insieme misurabilmente nullo di discontinuità.
Più in generale, ha senso parlare di proprietà valide su un particolare dominio tolto un insieme di misura nulla: poiché queste proprietà non valgono su insiemi la cui *rilevanza è minima*, quantomeno dal punto della *misura*, possiamo definire tale proprietà come *quasi ovunque valida*.

Definizione 6.8.1. - Proprietà quasi ovunque valida.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Si dice che una proprietà vale **"quasi ovunque"** (**q.o.**) o "μ-**quasi ovunque**" se vale in tutto X tranne eventualmente su un insieme di misrua μ nulla.

Esempio. Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ misurabili. Allora

$$f = g \textbf{ q.o.} \iff \text{Posto } E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \tag{6.36}$$

Esempio. Consideriamo la funzione di Dirichlet $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Sappiamo che $m_1([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0$, quindi

$$\{x \in [0,1] \mid f(x) \neq 0\} = [0,1]\cap\mathbb{Q}$$

ha misura nulla e pertanto la funzione di Dirichlet è *quasi ovunque* la funzione identicamente *nulla*.

Proposizione 6.8.1. - Ruolo degli insiemi di misura nulla nell'integrazione. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora

1. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ allora
$$\forall E \in \mathcal{M},\ \mu(E) = 0 \implies \int_E f\,d\mu = 0 \tag{6.37}$$
2. Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ allora
$$f = g \textbf{ q.o.} \implies \int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu \tag{6.38}$$

Dimostrazione.

I

II Posto
$$E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$
si ha $\mu(E) = 0$. Allora
$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus E} f\,d\mu + \int_E f\,d\mu = \int_{X\setminus E} g\,d\mu + 0 = \int_{X\setminus E} g\,d\mu + \int_E g\,d\mu = \int_X g\,d\mu$$

III Sia
$$E = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1}\left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n\geq 1} E_n$$
Osserviamo che $E_n = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{n}, +\infty\right)\right) \in \mathcal{M}$ in quanto è controimmagine di un

aperto tramite una funzione misurabile; su ha allora

$$
\begin{aligned}
0 = \int_X f\,d\mu &\le \\
\le \int_{E_n} f\,d\mu &\le && \text{(monotonia dell'integrale rispetto al dominio)} \\
\le \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu &= && \text{(monotonia rispetto l'integranda)} \\
= \frac{1}{n}\mu(E_n) &\le 0
\end{aligned}
$$

Segue dunque che $\mu(E_n) = 0$, $\forall n \ge 1$; utilizzando la σ-subadditività della misura vediamo che

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n\ge1} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Vale dunque la tesi.

□

Avendo definito il concetto di proprietà quasi ovunque valida, possiamo enunciare un'altra versione dello *scambio tra integrale e serie*; questo risultato che segue dal teorema della convergenza dominata.

Teorema 6.8.1. - Scambio tra integrale e serie per funzioni integrabili.
Sia $(X, \mathscr{M}, \mu)$ unop spazio di misura. Siano $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ integrabili. Supponiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$$

Allora

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è definita q.o. in X.
2. $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$
3. Vale lo *scambio tra integrale e serie*:

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f\,d\mu \in \mathbb{C} \tag{6.39}$$

6.9 Dallo spazio $\mathscr{\ell}^1$ allo spazio l^1

Ricordiamo che, dato uno spazio di misura $(X, \mathscr{M}, \mu)$ si definisce lo spazio delle funzioni integrabili

$$\mathscr{L}^1 = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ misurabili} \mid \int_X |f| d\mu < +\infty \right\} \tag{6.40}$$

il quale è un spazio vettoriale con le operazioni di somma di funzioni e prodotto di una funzione per uno scalare complesso.
Vogliamo ora introdurre una struttura *metrica* in $\mathscr{L}^1(\mu)$; nello specifico, cerchiamo una

norma - in questo modo potremo avvalerci di risultati che sono validi solo in *spazi normati*. Possiamo considerare come potenziale candidata la funzione

$$\begin{aligned} N : \mathscr{L}^1(\mu) &\longrightarrow [0,+\infty) \\ f &\longmapsto \int_X |f| d\mu \end{aligned} \tag{6.41}$$

Tuttavia, la suddetta è una **pseudonorma** in quanto soddisfa due delle tre proprietà della norma, ma non la *prima*: può valere zero per altre funzione oltre quella nulla. Infatti:

1. $f = 0 \implies \displaystyle\int_X |f| d\mu = 0$ ma $\displaystyle\int_X |f| d\mu = 0 \implies f$ q.o. in X.

Come precedentemente detto, le proprietà 2 e 3 sono verificate:

2. $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$, $\forall f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
3. $N(f+g) \le N(f) + N(g)$, $\forall f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Per risolvere il problema, si introduce la relazione

$$f, g \in \mathscr{L}^1(\mu) : f \sim g \iff f = g \text{ q.o. in } X \tag{6.42}$$

che si dimostra essere di equivalenza in $\mathscr{L}^1(\mu)$. Si definisce allora

$$L^1(\mu) = \frac{\mathscr{L}^1(\mu)}{\sim} \tag{6.43}$$

Invece che indicare gli elementi di $L^1(\mu)$ come classi di equivalenza $[f]$ (dove $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$), faremo un *abuso di notazione* e indicheremo solo $f \in L^1$.
Adesso in $L^1(\mu)$ possiamo definire finalmente una vera e onesta norma:

$$\begin{aligned} |\cdot| : L^1(\mu) &\longrightarrow [0,+\infty) \\ [f] &\longmapsto \|[f]\| = \int_X |f| d\mu \end{aligned} \tag{6.44}$$

Questa norma è ben posta come funzione in $L^1(\mu)$ in quanto *non* dipende dal *rappresentante* scelto:

$$g \in [f] \iff f = g \text{ q.o. in } X \implies \int_X |g| d\mu = \int_X |f| d\mu$$

IV

APPENDICI-TE

APPENDICE A

Note aggiuntive

"Le note a piè di pagina sono le superfici ingannatrici che permettono ai paragrafi tentacolari di aderire alla realtà più ampia della biblioteca."

Nicholson Baker, *bibliotecario di Cthulhu.*

Riportiamo alcune note, precisazioni e dimostrazioni complementari agli argomenti dei capitoli principali che possono risultare utili al lettore.

A.1 Capitolo 1: alla ricerca della lunghezza dell'ellisse

A.1.1 *Il coefficiente binomiale generalizzato*

Definizione A.1.1. - Coefficiente binomiale.
Dati $n, j \in \mathbb{N}$ con $n \geq j$, si definisce il **coefficiente binomiale** il numero

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \tag{A.1}$$

dove ! indica il **fattoriale**:

- $(0)! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Se $n < j$, allora poniamo $\binom{n}{j} = 0$

Possiamo estendere la definizione del coefficiente binomiale sostituendo a n e j dei qualunque numeri complessi α e β (purché *non* sia un intero negativo) utilizzando la generalizzazione del fattoriale, la *funzione Gamma di Eulero*. Vediamone la definizione con α tale che $\mathfrak{Re}\,(\alpha) > 0$.

Definizione A.1.2. - Funzione Gamma di Eulero.
Dato α tale che $\mathfrak{Re}\,(\alpha) > 0$, definiamo la **funzione Gamma di Eulero** in campo comples-

so come il prolungamento analitico dell'integrale improprio convergente

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\alpha} dx \tag{A.2}$$

Essa gode di alcune proprietà:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \forall \alpha > 0$
- $\Gamma(n) = (n+1)!,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Definita la funzione Gamma, diamo ora una definizione generalizzata di coefficiente binomiale.

Definizione A.1.3. - Coefficiente binomiale generalizzato con Gamma di Eulero.
Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid \Re(z) \in \mathbb{Z} \wedge \Re(z) \leq 0\}$, si definisce il **coefficiente binomiale generalizzato** il numero

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{A.3}$$

Questa definizione è corretta, ma presenta alcuni inconvenienti:

- *Non è definita* sui complessi con parte reale un numero intero negativo o zero.
- *Non è operativa*, dato che richiede di conoscere i valori della funzione Gamma che, in generale, non sono noti.

Consideriamo ora il caso del binomiale $\binom{\alpha}{j}$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$ e $j \in \mathbb{N}$. Se $\alpha \in \mathbb{N}$, osserviamo come la forma operativa del binomiale è la seguente:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{j} &= \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)(\alpha-j)\cdots 1}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)\cancel{(\alpha-j)!}}{j!\cancel{(\alpha-j)!}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}\end{aligned}$$

In realtà questa relazione si ottiene anche col coefficiente che abbiamo definito in precedenza se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $j \in \mathbb{N}$. Innanzitutto, diamo qualche notazione.

Definizione A.1.4. - Simbolo di Pochhammer o fattoriale crescente.
Dati $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, il **simbolo di Pochhammer** o altresì detto **fattoriale crescente** è il numero

$$\alpha^{\overline{j}} = (\alpha)_j := \frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)} \tag{A.4}$$

Questa equivale a

$$\alpha^{\overline{j}} = (\alpha)_j = \prod_{k=0}^{j-1}(\alpha+j) = \prod_{k=1}^{j}(\alpha+j-1) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1) \tag{A.5}$$

Definizione A.1.5. - Fattoriale decrescente.

Dati $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, il **fattoriale decrescente** è il numero

$$\alpha^{\underline{j}} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{A.6}$$

Questa equivale a

$$\alpha^{\underline{j}} = \prod_{k=0}^{j-1}(\alpha-j) = \prod_{k=1}^{j}(\alpha-j+1) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1) \tag{A.7}$$

Attenzione! La notazione $(\alpha)_j$, introdotta da Leo August Pochhammer, è talvolta usata anche per indicare il fattoriale *decrescente* oltre che quello *crescente*. Anche se useremo il simbolo di Pochammer solo per il fattoriale crescente, prediligeremo la notazione introdotta da Knuth et al.

Osserviamo che

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)} = \frac{\alpha^{\underline{j}}}{j!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)^{\overline{j}}}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)_j}{j!}$$

Allora possiamo considerare questa definizione operativa come la generalizzazione nel caso $\alpha \in \mathbb{C}$ e $j \in \mathbb{N}$ del binomiale.

Definizione A.1.6. - Coefficiente binomiale generalizzato, definizione operativa. Dati $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, si definisce il **coefficiente binomiale generalizzato** il numero

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha^{\underline{j}}}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)^{\overline{j}}}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)_j}{j!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \tag{A.8}$$

Osservazione. Se $\alpha < j$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $j \in \mathbb{N}$, si ha al numeratore il fattore $(\alpha-\alpha)$ e quindi $\binom{\alpha}{j} = 0$. Il

Valgono inoltre le seguenti proprietà, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \tag{A.9}$$

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1} \tag{A.10}$$

$$\binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha+1}{k} \tag{A.11}$$

A.2 CAPITOLO 3: SERIE DI FUNZIONI

A.2.1 *Tanti criteri di Cauchy*

Il **criterio di Cauchy** è un importante teorema che fornisce condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di una successione.

Teorema A.2.1. - Criterio di Cauchy per le successioni.
Sia v_n successione in X spazio metrico *completo*. Allora

$$v_n \text{ converge in } X \iff v_n \text{ è di Cauchy} \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N\ d(v_n,\ v_m) < \varepsilon \quad \text{(A.12)}$$

Dimostrazione.
$\implies$) Supponiamo che v_n converge a $v \in X$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N d(v_n,\ v) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendiamo $n, m \geq N$. Per la disuguaglianza triangolare della metrica d si ha

$$d(v_n,\ v_m) < d(v_n,\ v) + d(v,\ v_m) = d(v_n,\ v) + d(v_m,\ v) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\impliedby$) Vale per la completezza dello spazio X. □

Osservazione. L'implicazione $\implies$) vale in generale su qualunque spazio metrico, mentre l'altra vale solo se lo spazio è completo. Per dimostrare che X sia completo può essere utile utilizzare alcune delle seguenti proprietà[a]:

- Una successione di Cauchy è *convergente* se e solo se ha punti di accumulazione.
- Una successione di Cauchy è *convergente* se ha una *sottosuccessione convergente*.
- Se X è spazio metrico *compatto*, allora X è spazio metrico *completo*; non è vero il viceversa.

[a] Per approfondimenti si veda il Capitolo 6 di **antucabertolotti:2021manualozzogeometria**.

Intuitivamente... Possiamo vedere una successione di Cauchy come una successione che *oscilla* sempre di meno, fino a posizionarsi su un valore relativamente costante, dove le oscillazioni fra due valori distinti della successione sono davvero piccole.

In termini matematici, possiamo formalizzare questa intuizione così: una oscillazione dopo l'N-esimo elemento è la più grande differenza fra due elementi della successione scelti arbitrariamente dopo l'N-esimo:

$$osc(N) := \sup\{d(v_n,\ v_m) \mid n, m \geq N\}$$

Allora una serie è di Cauchy se

$$\lim_{N \to +\infty} osc(N) = 0$$

Questo ci permette di *estendere* il criterio di Cauchy a situazione *molto variegate* tra di loro dove bisogna studiare una convergenza, tutte *accomunate* dall'idea che "portare l'oscillazione a *zero* è equivalente alla convergenza".
Abbiamo visto[1] il criterio di Cauchy per la *convergenza uniforme*; qui di seguito riportiamo quello per le *serie*.

[1] Si veda Capitolo 2, pag. 15.

COROLLARIO A.2.1. - CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE.
Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ in uno spazio *normato completo* è convergente se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N, \; \forall p \in \mathbb{N} \; \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} \right\| < \varepsilon \tag{A.13}$$

DIMOSTRAZIONE. Considerate le ridotte

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

converge se e solo se la successione delle ridotte converge. Poiché X è uno spazio completo, questo equivale a dire che la successione delle ridotte s_n è di Cauchy, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N, \; \forall p \in \mathbb{N} \; \| s_m - s_n \| < \varepsilon$$

Senza perdita di generalità poniamo $m = n + p$: la relazione qui sopra coincide con

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N, \; \forall p \in \mathbb{N} \; \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} \right\| < \varepsilon$$

e quindi segue la tesi. □

A.2.2 *Criteri di convergenza delle serie*

Di seguito enunceremo diversi criteri utili per studiare la convergenza di una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

- **Limite del termine della successione.** (*Criterio necessario*, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Se la serie converge, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Per contronominale vale

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ non converge} \tag{A.14}$$

- **Convergenza assoluta.** (*Criterio sufficiente*, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

converge, allora si dice che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge *assolutamente* e inoltre essa converge anche semplicemente.

- **Criterio del rapporto o di d'Alembert.** (*Criterio sufficiente*, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Se esiste R tale che
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R \tag{A.15}$$
se $R < 1$, la serie è *assolutamente* convergente. Se $R > 1$, la serie diverge. Se $R = 1$, non abbiamo informazioni sulla convergenza.
- **Criterio della radice o di Cauchy.** (*Criterio sufficiente*, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Sia
$$R = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \tag{A.16}$$
Se $R < 1$, la serie è *assolutamente* convergente, mentre se $R > 1$, la serie diverge. Se $R = 1$, non abbiamo informazioni sulla convergenza.
Se una serie infinita converge o diverge col criterio della radice, lo stesso risultato si ottiene con il *criterio del rapporto* ma *non* vale il viceversa.
- **Criterio dell'integrale.** (*Criterio necessario e sufficiente*, $\mathbb{R}$) Sia $f : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una funzione non-negativa e monotona decrescente tale per cui $f(n) = a_n$. Allora, posto
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx$$
la serie a_n converge se e solo se l'integrale converge.
- **Criterio di confronto diretto.** (*Criterio sufficiente*, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Se la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$
è una serie *assolutamente* convergente e $|a_n| < |b_n|$ per n sufficientemente grande, allora la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$
converge *assolutamente*.
- **Criterio del confronto asintotico** (*Criterio necessario e sufficiente*, $\mathbb{R}$) Se $a_n,\ b_n > 0,\ \forall n$, e il limite
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$$
esiste, è finito e diverso da zero, allora
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge.} \tag{A.17}$$
- **Criterio di condensazione di Cauchy.** (*Criterio necessario e sufficiente*, $\mathbb{R}$) Sia a_n una successione non negativa e non crescente. Allora
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.} \tag{A.18}$$
Inoltre, nel caso di convergenza, si ha
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} < 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

- **Criterio di Abel-Dirichlet.** (*Criterio sufficiente*, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n, \quad a_n \in \mathbb{C},\ b_n \in \mathbb{R} \tag{A.19}$$

Se
  - ◇ $b_n > 0$ è decrescente e infinitesima per $n \to +\infty$.
  - ◇ la successione delle somme parziali di a_n è limitata, ossia

$$\exists M > 0 \colon \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq M,\ \forall k \leq 0$$

allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

converge (semplicemente).
- **Criterio di Leibniz.** (*Criterio sufficiente*, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n \in \mathbb{R} \tag{A.20}$$

Se $a_n > 0$ è decrescente ed infinitesima per $n \to +\infty$, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

converge (semplicemente).

A.2.3 *Serie a valori reali notevoli*

Di seguito enunceremo alcune serie a valori reali di particolare rilevanza.
- **Serie geometrica.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

La ridotta è uguale a

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

La serie dunque converge se e solo se $|z| < 1$ e in tal caso converge a $\frac{1}{1-z}$.
- **Serie armonica generalizzata.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \tag{A.21}$$

converge se $p > 1$ e diverge per $p \leq 1$; per $p = 1$ abbiamo la **serie armonica**. Se $p > 1$ la somma della serie armonica generalizzata, se vista in funzione di p, è $\zeta(p)$, ossia la *funzione zeta di Riemann* valutata in p.
- **Serie logaritmica.**

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \tag{A.22}$$

per ogni numero reale positiva p. Diverge per $p \leq 1$, ma converge per ogni $p > 1$.

A.3 CAPITOLO 4: SERIE DI POTENZE

A.3.1 *Il prodotto di serie (secondo Cauchy)*

In questa sezioni ricordiamo la definizione ed alcune proprietà del prodotto di serie (secondo Cauchy), basandoci sul Capitolo 3 di **rudin:1976principles**.
Date le due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{C}$$

vogliamo definire il loro prodotto. L'idea alla base della definizione è quella di *generalizzare* il prodotto di due *polinomi*: è noto che, dati i polinomi

$$\sum_{n=0}^{J} \alpha_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{J} \beta_n z^n$$

il loro prodotto si scrive come

$$\sum_{n=0}^{2J} \gamma_n z^n \quad \text{con} \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}, \quad \forall\ n \geq 0$$

Possiamo estendere formalmente questa scrittura al caso di serie di potenze, ponendo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

dove γ_n è definito come precedentemente. Il risultato per $z = 1$ suggerisce quindi come definire il prodotto delle serie iniziali.

DEFINIZIONE A.3.1. - PRODOTTO DI SERIE (SECONDO CAUCHY).
Date le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{C}$$

si definisce **prodotto secondo Cauchy** la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \quad \text{con} \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}, \quad \forall\ n \geq 0$$

Il problema principale sul prodotto di serie è quello della sua convergenza, a partire dalla convergenza delle serie iniziali: più precisamente, ci si chiede:

se le serie iniziali convergono rispettivamente a α e β, la serie prodotto converge a $\alpha\beta$?

In generale la risposta è **no**, come mostra il prossimo esempio.

ESEMPIO. SERIE CONVERGENTI, AVENTI PRODOTTO NON CONVERGENTE.
Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Applicando il criterio di Leibniz, si verifica facilmente che la serie converge. La serie prodotto della serie data per se stessa ha termine generale

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}, \quad \forall\ n \geq 0.$$

Ora, si ha

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2, \ \forall n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n$$

Otteniamo quindi

$$\left|\gamma_n\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}, \quad \forall\ n \geq 0.$$

Questo prova che

$$\liminf_{n\to+\infty} \left|\gamma_n\right| \geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2 \implies \lim_{n\to+\infty} \left|\gamma_n\right| \neq 0.$$

Perciò si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n \neq 0$$

e quindi la serie prodotto non può convergere.

Osserviamo che nell'esempio riportato la serie iniziale *converge semplicemente*, ma non *assolutamente*; questo è il motivo per cui la serie prodotto *non converge*. Infatti, in presenza della convergenza assoluta la serie prodotto *converge*.

Teorema A.3.1. - Prodotto di serie (secondo Cauchy) convergente se una serie converge assolutamente.
Siano date le due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n, \quad \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{C},$$

e si supponga che esse convergano a α e β, rispettivamente. Inoltre, si supponga che *almeno una* di esse converga *assolutamente*. Allora, la loro serie prodotto converge a $\alpha\beta$.

A.4 CAPITOLO 5: TEORIA DELLA MISURA

A.4.1 *Brevi cenni di teoria degli insiemi*

Questa sezione è basata sul capitolo 3 di XXX.

Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel e Assioma di Scelta

Insiemi ben ordinati

Ordinali

Cardinalità Definiremo la cardinalità per insiemi *ben ordinati*; poiché per l'*Assioma di Scelta* ogni insieme è ben ordinato, la seguente definizione risulta essere valida sotto la teoria degli insiemi di **Zermelo–Fraenkel** con l'Assioma di Scelta (ZFC).

Definizione A.4.1. - Cardinalità.
Due insiemi X e Y hanno la stessa **cardinalità** se sono **equipotenti** o **equinumerosi**, ossia se esiste una corrispondenza *biunivoca* tra i due insiemi. Tale relazione si indica come

$$|X| = |Y| \tag{A.23}$$

L'equipotenza è una relazione di equivalenza sulle classi di tutti gli insiemi. Ad ogni insieme X possiamo assumere di associare il **numero cardinale** o **cardinale** $|X|$, in modo tale che due insiemi che hanno lo stesso numero cardinale soddisfino la condizione di equipotenza.

Digressione. Se consideriamo valido l'*Assioma di Regolarità* è comunque possibile definire la cardinalità anche senza l'*Assioma di Scelta* sulla base delle relazioni di equivalenza indotte dall'equipotenza.

Ricordiamo che X è *finito* se è in corrispondenza biunivoca con un *ordinale finito* $n \in \mathbb{N}$:

$$|X| = |n|$$

Poichè $|n| = |m| \iff n = m$, gli *ordinali finiti* corrispondono ai *cardinali finiti* e quindi $|n| = n$, ossia

$$|X| = n$$

Denotiamo ora alcuni cardinali *infiniti* che appaiono frequentemente:

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$: **cardinalità dei naturali** o **cardinalità degli insiemi infinitamente numerabili** (si legge "*aleph zero*").
- $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$: **cardinalità dei reali** o **cardinalità del continuo**.

Ordine dei cardinali Possiamo definire una relazione d'*ordine* sui cardinali come segue:

$$|X| \leq |Y| \iff \exists\ f : X \longrightarrow Y \ \text{ iniettiva} \tag{A.24}$$

Inoltre, definiamo l'ordine stretto

$$|X| < |Y| \iff |X| \leq |Y| \wedge |X| \neq |Y| \tag{A.25}$$

ossia se

- esiste una funzione $f : X \longrightarrow Y$ iniettiva.
- non esistono funzioni $f : X \longrightarrow Y$ suriettive.

Sulla base di queste definizioni possiamo enunciare già una serie di proprietà interessanti che collegano questa relazione d'ordine alle ben note *relazioni insiemistiche* di inclusione e uguaglianza di insiemi.

Proposizione A.4.1. - Relazioni insiemistiche e ordine delle cardinalità.
Dati X e Y insiemi:

- $X \subseteq Y \iff \exists\ \iota : X \hookrightarrow Y$ inclusione $\iff |X| \leq |Y|$.
- $X \supseteq Y \iff \exists\ f : X \longrightarrow Y$ suriettiva $\iff |X| \geq |Y|$.

- Se $|X| < |Y|$, allora $X \subsetneq Y$.
- Se X e Y sono *finiti*, allora $|X| = |Y| \iff X = Y$; se X e Y sono *infiniti* $|X| = |Y| \not\Longrightarrow X = Y$, ma vale soltanto la relazione banale $X = Y \implies |X| = |Y|$.

Il seguente teorema è particolarmente importante: oltre ad avere come conseguenza che $<$ è una relazione d'ordine *parziale*, permette di determinare alcune cardinalità sulla base di sole funzioni *iniettive*.

Teorema A.4.1. - Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder.
Se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$, allora $|X| = |Y|$.
Equivalentemente, se esistono due funzioni *iniettive* $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ allora esiste una funzione *biettiva* $h : X \longrightarrow Y$.

Esempi. Alcune applicazioni del teorema di Cantor-Bernstein-Schröder.

L'intervallo $[0,1]$ ha la cardinalità del continuo; infatti, possiamo considerare le seguenti funzioni iniettive

- $\iota : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ inclusione.
- $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \frac{2\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi} \end{aligned}$$

Come visto a pag. XXX, dato l'insieme di Cantor C si può definire una funzione $f : C \longrightarrow [0,1]$ *suriettiva*; in questo modo, $|C| \geq [0,1]$ ma, in quanto $C \subseteq [0,1]$ si ha $|C| = |[0,1]| = \mathfrak{c}$.

Aritmetica dei cardinali Possiamo definire delle *operazioni aritmetiche* con i cardinali; dati $|X| = \kappa$ e $|Y| = \lambda$, si ha

$$\kappa + \lambda = |X \cup Y| \text{ se } X \text{ e } Y \text{ disgiunti} \tag{A.26}$$
$$\kappa \cdot \lambda = |X \times Y| \tag{A.27}$$
$$\kappa^{\lambda} = \left|X^{Y}\right| \tag{A.28}$$

dove con X^Y indichiamo l'insieme delle funzioni da Y in X.
Queste operazioni sono ben definite se sono indipendenti dalla scelta di X e Y.

Cardinalità dell'insieme delle parti

Teorema A.4.2. - Biezione tra $\mathscr{P}(X)$ e insieme delle funzioni da X in $\{0,1\}$.
Dato un qualunque insieme X, sia $\mathscr{P}(X)$ l'insieme delle parti di X e sia $2^X := \{0,1\}^X$ l'insieme di tutte le funzioni $X \longrightarrow \{0,1\}$. Allora esiste una biezione tra $\mathscr{P}(X)$ e 2^X, data da

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{P}(X) &\longrightarrow 2^X \\ X &\longmapsto \chi_X \end{aligned} \tag{A.29}$$

con χ_X la *funzione indicatrice* su X; l'inversa di tale funzione è la seguente:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : 2^X &\longrightarrow \mathscr{P}(X) \\ f &\longmapsto \{x \in X \mid f(x) = 1\} \end{aligned} \tag{A.30}$$

Corollario A.4.1. - Cardinalità dell'insieme delle parti.
Se un insieme X ha cardinalità $|X|$, l'insieme delle parti ha cardinalità

$$|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|} \tag{A.31}$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente, si ha una biezione tra $\mathscr{P}(X)$ e $2^{|X|} := \{0,1\}^X$, dunque hanno la stessa cardinalità. Per esponenziazione dei cardinali, si ha

$$|\mathscr{P}(X)| = \left|\{0,1\}^X\right| = |\{0,1\}|^{|X|} = 2^{|X|}$$

□

Poiché questo corollario vale sia per insiemi arbitrari, l'immediata conseguenza del corollario è poter definire la cardinalità dell'insieme delle parti di insiemi *infiniti* già noti:

- $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$
- $|\mathscr{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$

Il seguente teorema permette di dare una relazione di ordine *non* triviale tra cardinali.

Teorema A.4.3. - Teorema di Cantor.
Per ogni insieme $|X|$ si ha

$$|X| < |\mathscr{P}(X)| \tag{A.32}$$

In termini di cardinali, per ogni cardinale κ si ha

$$\kappa < 2^{\kappa} \tag{A.33}$$

A.4.2 *Famiglie di insiemi e relazioni tra di loro*

Studiamo ora alcune delle più comuni *famiglie di insiemi* che si incontrano nello studio della teoria della misura.

Nome	Notazione	Cardinalità
Insieme delle parti	$\mathscr{P}(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$
Insiemi misurabili (secondo Lebesgue)	$\mathscr{L}(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$
Borelliani	$\mathscr{B}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{c}$
Topologia (famiglia degli aperti)	$\mathcal{T}$	$\mathfrak{c}$

Proposizione A.4.2. - Relazioni tra classi di insiemi.
Valgono le seguenti inclusioni:

$$\mathcal{T} \subsetneq \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R}) \tag{A.34}$$

Mostreremo alcune di queste inclusioni in modo formale, mentre per altre daremo solo un'intuizione della dimostrazione.

Cardinalità dell'insieme delle parti dei reali Come visto a pag. 132, se $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ è la cardinalità del continuo, allora la cardinalità dell'*insieme delle parti dei reali* è

$$|\mathscr{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}} \tag{A.35}$$

Cardinalità degli insiemi misurabili Per trovare quanti sono gli insiemi misurabili, consideriamo l'*insieme di Cantor* C. Abbiamo visto (pag. XXX) che esso gode delle seguenti proprietà:

1. Il numero di punti prima e dopo il processo iterativo per costruire C rimane invariato, dunque C è *non numerabile* e ha la stessa cardinalità di $[0,1]$:

$$|C| = |[0,1]| = \mathfrak{c}$$

2. C è misurabile e $m_1(C) = 0$.

Dal punto 1 segue che l'insieme delle parti dell'insieme di Cantor ha cardinalità $\mathscr{P}(C) = 2^{\mathfrak{c}}$, mentre dal punto 2 si può dedurre che ogni sottoinsieme di C ha misura nulla ed è pertanto misurabile. Insiemisticamente parlando, le relazioni sono

$$\mathscr{P}(C) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

Passando alle cardinalità:

$$2^{\mathfrak{c}} \underset{(1)}{|\mathscr{P}(C)|} \leq |\mathscr{L}(\mathbb{R})| \leq |\mathscr{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}} \implies |\mathbb{R}| = 2^{\mathfrak{c}}$$

Inclusione stretta di $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ in $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ Il fatto che la cardinalità degli insiemi Lebesgue-misurabili in $\mathbb{R}$ coincida con quella dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ non è sufficiente[2] per affermare che i due insiemi coincidano; costruiamo ora un sottoinsieme particolare di $\mathbb{R}$ che risulta *non misurabile*.

Definizione A.4.2. - Insieme di Vitali.
Considerata in $\mathbb{R}$ la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} \tag{A.36}$$

possiamo definire delle classi di equivalenza in $\mathbb{R}/\sim$:

$$\begin{aligned} [0] &= \left\{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{123}{72}, \dots\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \\ \left[\sqrt{2}\right] &= \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \sqrt{2} - 1, \dots\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{2} + q,\ q \in \mathbb{Q}\right\} \\ [\pi] &= \left\{\pi, \pi - \frac{3}{4}, \pi + 23, \dots\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + q,\ q \in \mathbb{Q}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

[2]Si veda pag. 130.

Scelto[a] un elemento che stia in $[0,1]$ da ogni classe di equivalenza, definisco l'**insieme di Vitali** V come unione di questi elementi.

[a] Per poter fare questa operazione è necessario supporre l'*Assioma di Scelta*.

Per costruzione $V \subseteq [0,1]$. Preso l'insieme *numerabile* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, possiamo prendere una sua *numerazione* $\{q_n\}$ e definire delle *traslazioni* dell'insieme di Vitali V:

$$V_n = V + q_n \subseteq [-1,2]$$

Lemma A.4.1. - Lemma 1 di Vitali - gli insiemi di Vitali traslati sono 2 a 2 disgiunti. Dato V insieme di Vitali e $\{q_n\}$ numerazione di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, allora $V_n \cap V_m = \varnothing$, $\forall n \neq m$.

Dimostrazione. Consideriamo $x \in V_n \cap V_m$: questo implica che $x \in V_n$ e $x \in V_m$, ossia

$$\begin{cases} x = y + q_n, \ y \in V, \ q_n \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \\ x = z + q_m, \ z \in V, \ q_m \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \end{cases}$$

Pertanto,

$$y + q_n = z + q_m \iff y - z = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$$

Poichè y e z differiscono di un razionale, essi appartengono alla stessa classe di equivalenza in $\mathbb{R}/\sim$, ma dato che nella costruzione dell'insieme di VItali abbiamo preso[a] uno e un solo elemento da tale classe, allora segue che $y = z$. È immediato verificare che $q_m = q_n$ e, essendo elementi numerazione, allora $n = m$. In altre parole, l'intersezione non è vuota solo se $V_n = V_m$. □

[a] In virtù dell'*Assioma di Scelta*.

Lemma A.4.2. - Lemma 2 di Vitali - ogni numero reale in $[0,1]$ appartiene ad un V_n per un certo n: Dato V insieme di Vitali vale la seguente relazione:

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

Dimostrazione. Sia $x \in [0,1]$. Poiché la relazione $\sim$ forma una partizione di $\mathbb{R}$, deve esistere y tale che $x - y = q \in \mathbb{Q}$; riscrivendo tale relazione si ha $x = y + q$, ossia $x = y + q_n$ per un certo n. □

Possiamo osservare alcune proprietà sulla base dei due lemmi appena mostrati:

- **Conseguenze del lemma 1:**

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } m(V) = 0 \\ +\infty & \text{se } m(V) > 0 \end{cases}$$

- **Conseguenze del lemma 2:**

$$1 = m([0,1]) \leq m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n\right) \leq m([-1,2]) = 3$$

In altre parole, si deduce che

$$1 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V) \leq 3$$

ma poiché la somma di infinite copie di $m(V)$ o è 0 o è $+\infty$ per la conseguenza del lemma 1, in nessuno dei due casi la somma sta in $[1,3]$. Pertanto, V *non* è misurabile, in quanto non possiamo associargli un valore $m(V)$.

Cardinalità dei Borelliani e inclusione stretta di $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ in $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ Per *induzione transfinita* si dimostra che i Borelliani hanno la cardinalità del continuo.

$$|\mathscr{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \tag{A.37}$$

Pertanto, l'inclusione $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathscr{L}(\mathbb{R})$ è stretta.

DIGRESSIONE. L'Assioma della Scelta *non* è necessario per dimostrare l'inclusione stretta di $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ in $\mathscr{L}(\mathbb{R})$. Infatti, si può costruire un insieme misurabile *non* Borelliano senza farne uso.

APPENDICE B

Elenchi delle definizioni e dei teoremi

Elenco delle definizioni

ELENCO DEI TEOREMI

Appendice A: Note aggiuntive