Elisa Antuca Massimo Bertolotti

TITOLO TITOLOZZO QUESTO TITOLO È PROVVISORIOZZO

E CI PIACE COSÌ

Manualozzo di Analisi Matematica 3

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\chi(S) = v - e + f$$

$$\pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z}$$

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Note per la lettura

"Un matematico è una macchina per trasformare caffè in teoremi."

Alfréd Rényi, *studioso del teorema di Van Moka-mpen.*

Senza troppe pretese di formalità, com'è intuibile dal termine dal termine tecnico *manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti a quattro mani basati sul corso di *Geometria 2* tenuto dai docenti Alberto Albano, Cinzia Casagrande ed Elena Martinengo nell'Anno Accademico 2020-2021 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.
Il corso è diviso in *cinque* parti, pertanto abbiamo ritenuto opportuno dividere in altrettante parti il testo, seguendo l'ordine delle lezioni: Topologia generale, Omotopia, Classificazione delle superfici topologiche, Approfondimenti di Algebra Lineare e infine Geometria proiettiva. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di *Geometria 1*, *Algebra 1* e *Analisi 1*.
In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate.
Per quanto ci piacerebbe esserlo, non siamo *esseri infallibili*: ci saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiediamo gentilmente di segnalarceli su `https://maxmaci.github.io` per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.
I disegni sono stati realizzati da Massimo Bertolotti, l'addetto alla grafica e ai capricci di LaTeX (ed è molto capriccioso, fidatevi). Chi volesse dilettarsi può cercare di distinguere chi fra i due autori ha scritto cosa, non dovrebbe essere troppo difficile.

Seconda edizione, compilato il 14 ottobre 2021.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

Indice

I

Introduzione ad Analisi Matematica 3

CAPITOLO 1

Alla ricerca della lunghezza dell'ellisse

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Una circonferenza e un'*ellisse* a primo acchito possono sembrare molto simili: in fondo, una circonferenza non è altro che un'ellisse i cui punti focali coincidono e dunque l'ellisse si può vedere come una circonferenza "allungata" rispetto ad un asse. Il valore dell'area delimitata da una circonferenza (πr^2) e la lunghezza di una circonferenza ($2\pi r$) sono ben noti già dall'antichità, i cui calcoli sono stati opportunamente formalizzati in epoca moderna; tuttavia, riguardo l'ellisse, ci accorgiamo di aver incontrato nel corso degli studi precedenti quasi esclusivamente il valore dell'area delimitata da essa (πab), ma *non la lunghezza dell'ellisse*. Come mai?

1.1 Una domanda banale: la lunghezza di un'ellisse

Partiamo col seguente *quiz*: quale delle seguenti tre espressioni è il valore, o una sua *approssimazione*, della lunghezza di un'ellisse di semiassi di lunghezza a e b?

a) $L(a,b) = \pi ab$

b) $L(a,b) \approx \pi(a+b) + 3\pi\frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}$

c) $L(a,b) \approx 2\pi a$.

Chiaramente, come abbiamo detto nell'introduzione del capitolo, la lunghezza dell'ellisse *non* è una formula nota dagli studi passati e possiamo (per ora) solamente escludere la *prima risposta*, in quanto essa è il valore dell'**area** delimitata dell'ellisse.

Osservazione. Possiamo escludere la prima risposta anche per motivi puramente **dimensionali**: a e b sono, dimensionalmente parlando, due lunghezze, quindi πab deve essere una *lunghezza al quadrato*, cioè un'area e non può essere una lunghezza!

In realtà, la domanda del quiz è mal posta: le risposte *b)* e *c)* sono entrambe corrette.
Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan fornì come nota a margine non commentata in un suo articolo del 1914 (Ramanujan, «Modular equations and approximations to π») l'approssimazione *b)*:

$$L(a,b) \approx \pi\left((a+b) + 3\frac{(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}\right)$$

Vedremo fra poco che anche l'approssimazione data dalla *a)* è anch'essa lecita.
Il motivo per cui diamo approssimazioni ma non formule esatte per la lunghezza dell'ellisse è dovuto al fatto che *non esiste* una formula esplicita in termini di *funzioni elementari*, bensì possiamo esprimerla soltanto come **somma di una serie**.

Teorema 1.1.1. - Lunghezza dell'ellisse di semiassi di lunghezza a e b.
Siano $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi dell'ellisse e $e = e(a,b) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'**eccentricità**; allora si ha

$$L(a,b) = 2\pi a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{1-2j}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}e^j\right)^2 \tag{1.1}$$

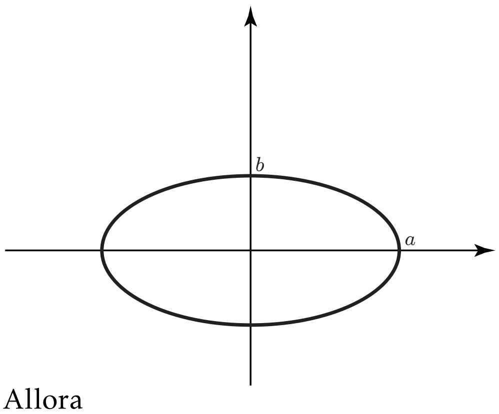
dove !! indica il **doppio fattoriale**:

- $(-1)!! = 0!! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 2 \text{ se } n>0 \text{ è pari} \\ n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \text{ se } n>0 \text{ è dispari}\end{cases}$

Il primo termine della serie fornisce l'approssimazione espressa nella risposta *a)*:

$$L(a,b) \approx 2\pi a$$

1.1.1 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: la serie di Taylor*



Dimostriamo finalmente la lunghezza dell'ellisse. Come è noto dal corso di Analisi 2, per una curva *regolare* come l'ellisse è possibile calcolarne la lunghezza usando un'opportuna parametrizzazione.
Poniamo $a \geq b$ le lunghezze dei semiassi ed $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1)$ l'eccentricità. Una parametrizzazione è

$$\vec{r}(t) = (a\sin t,\ b\cos t) \quad t \in [0,2\pi]$$

Allora

$$L = \int_0^{2\pi} \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt = \int_0^{2\pi} \|(a\cos t,\ -b\sin t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-(a^2+b^2)\sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$$

C'è un problema: la funzione $f(t) = \sqrt{1-e^2\sin^2 t}$ non è **elementarmente integrabile**, cioè non ammette primitive in termini di funzioni elementari.

Attenzione! Non essere elementarmente integrabile *non* significa che non sia integrabile! La funzione integranda $f(t)$ è continua su $[0, 2\pi]$, dunque per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* ammette primitive su $[0, 2\pi]$. Una di esse è

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 y dy} \quad \forall y \in [0, 2\pi]$$

Il problema è che *non* possiamo riscrivere F in modo esplicito usando *solo* funzioni elementari.

Questo tipo di integrale è detto **integrale ellittico**.

Digressione. Gli *integrali ellittici* si incontrano in molti ambiti matematici. Ad esempio, appaiono nella risoluzione dell'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

Sono il motivo per cui tale equazione si studia spesso per piccole oscillazioni, in modo da poter operare una linearizzazione $\sin\theta \sim \theta$ e calcolare il moto senza passare per tali integrali non calcolabili.
Un altro esempio della loro importanza è noto agli appassionati di Geometria: infatti, la branca della Geometria Algebrica nasce anche dagli studi su tali integrali.

Potremmo limitarci a considerare l'intero integrale ellittico come una nuova funzione, ma al più potremmo calcolarne il valore tramite metodi dell'Analisi Numerica. Invece, proviamo a riscrivere l'integrale utilizzando uno **sviluppo in serie** della funzione integranda.
Poniamo $x = -e^2 \sin^2 t$ e osserviamo che

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = (1 + x)^\alpha \quad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}$$

Poichè $(1 + x)^\alpha$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ in un intorno di $x = 0$, si può approssimare localmente col **polinomio di Taylor** di ordine n centrato in $x = 0$, $\forall n \geq 0$. Se il polinomio in questione è

$$P_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

con $\binom{\alpha}{j}$ il **coefficiente binomiale generalizzato**[1], allora l'approssimazione dell'integranda data dal polinomio di Taylor è proprio

$$(1 + x)^{1/2} \approx \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0$$

Risostituendo $x = -e^2 \sin^2 t$ abbiamo un'approssimazione dell'integranda. Tuttavia, noi vorremmo un *risultato esatto*.
Sappiamo intuitivamente che più termini si hanno nello sviluppo di Taylor, più accurata

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pagina 55 è possibile trovare la definizione e le proprietà del binomiale generalizzato.

è l'approssimazione; cosa succede per $n \to \infty$? Dobbiamo studiare la somma di serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j$$

Già ci dobbiamo porre nuove domande: la serie *converge* e per quali valori di x? Supponendo che la serie converga per opportuni valori di x, la serie converge proprio a $(1+x)^{1/2}$? *In generale*, per $f \in \mathscr{C}^\infty$ qualsiasi **NO**, la serie di Taylor non converge proprio e se converge non converge ad f! Tuttavia, in questo caso siamo particolarmente fortunati: $\forall x \in (-1,1)$ la serie converge[2] e vale

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} x^j \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

In questa prima parte della dimostrazione abbiamo capito che è importante determinare quando è possibile passare dalla semplice *approssimazione* di una funzione con il *polinomio di Taylor* a poter riscrivere una funzione come una **serie di Taylor** di funzioni opportune.

1.1.2 *La problematica dimostrazione della lunghezza dell'ellisse: passaggio al limite sotto segno di integrale*

Torniamo al problema originale. Ricordando che $x = -e^2 \sin^2 t$, poiché $t \in [0, 2\pi]$ si ha che $x \in \left[-e^2, 0\right] \subseteq (-1,1)$ dato che $e^2 < 1$. Possiamo riscrivere l'integranda come il suo sviluppo in *serie di Taylor*:

$$\left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} \left(-e^2 \sin^2 t\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Sostituiamo nell'integrale; poiché la funzione è pari e simmetrica, possiamo ricondurci a studiare l'integrale su $[0, \pi/2]$:

$$L = a \int_0^{2\pi} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^2 \sin^2 t\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \, dt \boxed{=}$$

Incontriamo un nuovo problema: cos'è l'**integrale di una serie**? Se avessimo una somma di un numero *finito* di termini per la *linearità* dell'integrale potremmo scambiare la sommatoria con l'integrale, ma è possibile farlo nel caso di una serie?
Riscriviamo l'espressione precedente con la definizione di serie come *limite* per $n \to +\infty$ delle *ridotte*:

$$\boxed{=}\ 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t \right) dt$$

Il problema precedente si può riformulare come "*È possibile scambiare integrale e limite?*". Tale questione è come il problema del **passaggio al limite sotto segno di integrale**.
In generale, la risposta è **NO**: non è possibile scambiare limite e integrale. Ciò nonostante

[2] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di tale convergenza.

anche questa volta siamo particolarmente fortunati e il passaggio è *lecito*[3] e si ha

$$\begin{aligned} L &= 4a \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{n} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \sin^{2j} t dt \\ &= 4a \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j e^{2j} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j} t dt \end{aligned}$$

Completando il calcolo dell'integrale[4] si ottiene la formula della lunghezza scritta precedentemente.

1.2 NON BANALI CONSEGUENZE DI UNA DOMANDA BANALE

Abbiamo finalmente raggiunto una *risposta*, seppur assolutamente non banale, alla domanda che ci eravamo posti originalmente: qual è la *lunghezza dell'ellisse*? Nel far ciò ci siamo imbattuti in tutta una serie di problemi: esplicitare integrali non *elementarmente* risolvibili, la *convergenza* di *serie di Taylor* di funzioni ad una funzione specifica, il *passaggio al limite* sotto segno di *integrale*. La teoria matematica che tratteremo a partire dai capitoli successivi *nasce* proprio da questi problemi apparsi nell'*insidiosa ricerca* di una formula della lunghezza dell'ellisse.
In particolare, per capire quando era possibile il passaggio al limite sotto segno di integrale sono stati sviluppati diversi *teoremi*, più o meno vantaggiosi da utilizzare, le cui ipotesi variano sensibilmente fra di loro: alcuni si inseriscono nella già nota *teoria Riemanniana degli integrali*, mentre altri richiedono ipotesi completamente diverse. È da questi innumerevoli approcci al problema che, storicamente parlando, fu tale quesito a dare un *impeto* fondamentale allo sviluppo della **teoria degli integrali di Lebesgue**.

[3] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione che in questo caso il passaggio è lecito.

[4] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare tale calcolo.

II

Convergenza di funzioni

CAPITOLO 2

Convergenza di funzioni

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Le **[COMPLETARE]**

2.1 Convergenza uniforme di funzioni

Per poter trattare i problemi enunciati nel Capitolo 1 a pagina 3 dobbiamo parlare di convergenza di funzioni. Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di distanza, spazio metrico e convergenza.

Definizione 2.1.1. - Spazio metrico e distanza.
Uno **spazio metrico** è una coppia $(X,\, d)$ dove X è un insieme e $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **distanza**, cioè tale che $\forall x,\, y,\, z \in X$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $d(x,\, y) \geq 0,\ d(x,\, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x,\, y) = d(y,\, x)$.
3. $d(x,\, y) \leq d(x,\, z) + d(z,\, y)$.

Definizione 2.1.2. - Convergenza.
Una successione $v_n \in X$ **converge** in X a $v \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ d(v_n,\, v) < \varepsilon \tag{2.1}$$

Un *caso particolare* di spazio metrico è lo spazio $X = \mathscr{C}([a,b];\, \mathbb{R})$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la **metrica lagrangiana**:

$$d(f,\, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \tag{2.2}$$

Osservazione. La distanza è ben definita perché la funzione $|f(x) - g(x)|$, essendo definita su $[a,b]$ compatto, ammette massimo per il teorema di Weierstrass.

Definizione 2.1.3. - Convergenza nella metrica lagrangiana.
Siano f_n, $f \in X$. f_n converge a f in X se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Questa relazione si può riscrivere come

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a,b]$$

Osservazione. La condizione, riscritta in questo modo, non solo *non necessita* più dell'esistenza del *massimo*, ma non è neanche necessario che l'intervallo sia *compatto* o che la funzione sia *continua*: questa è in realtà una relazione *più generale* rispetto alla semplice convergenza nella metrica lagrangiana!

Definizione 2.1.4. - Convergenza uniforme.
Siano $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq R$ qualsiasi. Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A \tag{2.4}$$

Definizione 2.1.5. - Funzione limite.
Se f_n converge uniformemente a f su A, f si dice **funzione limite**.

Osservazione. Segue immediatamente dalla definizione che se f_n converge uniformemente a f su A, allora $\forall B \subseteq A$ si ha che f_n converge uniformemente a f su B.

Attenzione! È estremamente importante dire **dove** converge f_n: infatti, una stessa successione può convergere uniformemente su A, ma allo stesso tempo *non convergere* uniformemente in un altro insieme B. Vedremo un esempio fondamentale a riguardo successivamente.

Ora passiamo da questa definizione ad una formulazione equivalente *operativa*. Essa è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Possiamo definire una successione $c_n := \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}^+$. Allora la relazione sopra, per definizione di limite di una successione, è equivalente a $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

In conclusione abbiamo mostrato che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \iff \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0 \tag{2.5}$$

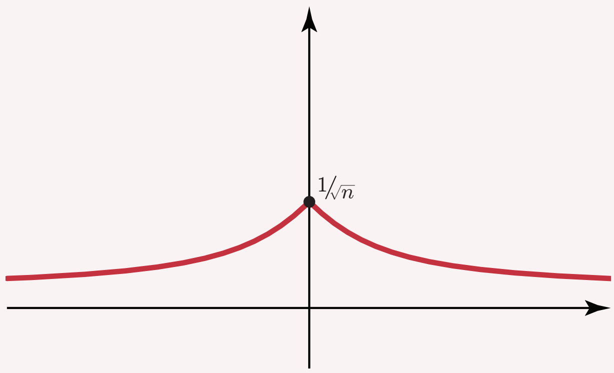
Esempio. Proviamo che $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformemente a $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}$. Dobbiamo provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

1. Calcoliamo il sup con n *fissato*:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right)$$

   Per trovarlo tracciamo il grafico di $\varphi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$ e cerchiamo il suo estremo superiore. Per parità della funzione ci basta fare le nostre considerazioni su $(0, +\infty)$ per poi disegnare il resto del grafico grazie alla simmetria assiale rispetto all'asse y; studiando opportunamente la derivata si ottiene il seguente grafico.



   Segue chiaramente che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\varphi_n(x) = \varphi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Calcoliamo il limite per $n \to +\infty$:

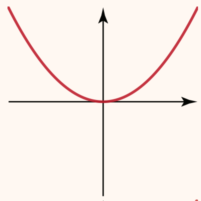
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Abbiamo così verificato la convergenza richiesta.

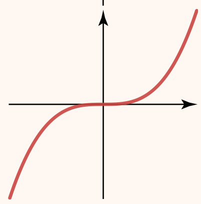
Esempio.
Consideriamo $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 0$. Allora:
1. x^n converge uniformemente a 0 su *ogni* insieme $[-a, a]$, $\forall a\colon 0 < a < 1$.
2. x^n **non** converge uniformemente a 0 su $(-1, 1)$.

Dimostrazione.

1. Sia $a \in (0,1)$ fissato e consideriamo
$$|x^n - 0| = |x^n| \implies \sup_{x\in[-a,a]} |x^n - 0| = \sup_{x\in[-a,a]} |x^n|$$
Qual è il grafico di x^n?
   - Se n **pari**, è visivamente simile a quello di x^2.



   - Se n **dispari**, è visivamente simile a quello di x^3.



Tuttavia per $|x^n|$, $\forall n \geq 2$, che è una funzione pari, il grafico è visivamente simile a quello di x^2. Segue immediatamente che
$$\sup_{x\in[-a,a]} |x^n| = a^n,\ \forall a\colon 0 < a < 1$$
Ora si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[-a,a]} |x^n| \right) = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$
perché $a \in (0,1)$ e quindi a^n è una successione geometrica convergente e pertanto il limite a $+\infty$ è sempre necessariamente 0.
2. In questo caso
$$\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1,\ \forall n$$
da cui
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| \right) = 1 \neq 0$$
pertanto *non* c'è convergenza uniforme su $(-1,1)$.

□

2.1.1 *Eserciziamoci! Convergenza uniforme*

Esercizio. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente a 0 su $[0,1]$?

Soluzione. Dimostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x^n}{n}-0\right|\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}\right)=0$$

Poiché

$$\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}=\frac{x^n}{n}\Big|_{x=1}=\frac{1}{n}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

2.1.2 *Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme*

Come nel caso delle successioni numeriche, esiste un **criterio di Cauchy** per la convergenza uniforme.

Teorema 2.1.1. - Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.
Siano $f_n : A\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Allora

$$f_n \text{ converge uniformemente su } A \iff$$
$$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n,m\geq N\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A \qquad (2.6)$$

Osservazione. Il criterio di Cauchy è un *risultato teorico molto importante*, in quanto permette di mostrare la convergenza uniforme di una successione di funzioni *senza sapere* quale sia il limite come invece è necessario nella definizione di convergenza, in modo analogo a ciò che succede con il criterio di Cauchy per le *successioni numeriche*.

2.1.3 *Visualizzazione della convergenza uniforme*

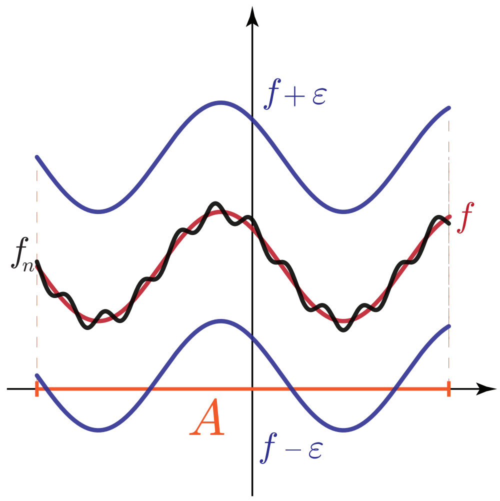
Siamo abituati alle successioni numeriche v_n ed eventualmente a studiare il loro andamento in modo grafico, rappresentando sulle ascisse il numero n e sulle ordinate il valore v_n. Nel caso di successioni di funzioni l'argomento è una funzione, quindi per studiarle può essere utile proprio disegnare i grafici degli f_n e come convergono verso f.
Come appare *visivamente* la convergenza uniforme? Possiamo riscrivere la condizione della convergenza uniforme

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\ \forall n\geq N\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in A$$

come

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon,\ \forall x\in A \text{ definitivamente} \qquad (2.7)$$

In altre parole, f_n deve essere compresa nell'**intorno tubulare** di $f(x)$ definitivamente, nel senso che le f_n devono stare in questo intorno per ogni n sufficientemente grande (cioè $\forall n\geq N$).



Definizione 2.1.6. - Intorno tubulare.
Un **intorno tubulare** di larghezza ε di una curva è l'unione di tutti i dischi di raggio ε con centro un punto di una curva.

2.1.4 *Generalizzazioni della convergenza uniforme*

Prima di tutto, ricordiamo le definizioni di norma e spazio normato.

Definizione 2.1.7. - Spazio normato e norma.
Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ dove X è un spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ reale o complesso e $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **norma**, cioè tale che $\forall x,\ y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$ essa soddisfi le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$.

Osservazione. Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico se consideriamo la **metrica indotta dalla norma**, cioè la funzione data da $d(x,\ y) := \left\|x - y\right\|$.

Generalizziamo la definizione di convergenza uniforme considerando $f_n,\ f : A \longrightarrow Y$, con A *insieme qualsiasi* e Y uno spazio *normato*; se vogliamo che valga anche il criterio di Cauchy è necessario che Y sia *anche* uno spazio **completo**.

Definizione 2.1.8. - Successione di Cauchy.
Una successione $v_n \in X$ è **di Cauchy** in X se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N\ d(v_n,\ v_m) < \varepsilon \tag{2.8}$$

Definizione 2.1.9. - Spazio completo.
Uno spazio metrico è detto **completo** se tutte le successioni di Cauchy convergono.

Osservazione. Una successione convergente è *sempre* di Cauchy, ma in generale *non tutte* le successioni di Cauchy convergono. L'implicazione opposta è vera solo se lo spazio è completo.

Possiamo ora, date queste nuove ipotesi, riformulare la convergenza uniforme.

Definizione 2.1.10. - Convergenza uniforme, generalizzata.
Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). Si dice che f_n **converge uniformemente** a f **su** A se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon,\ \forall x \in A \tag{2.9}$$

Digressione. Volendo è possibile generalizzare ulteriormente parlando di convergenza uniforme per funzioni a valori in semplici **spazi metrici** (completi), sostituendo a $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ la condizione $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Nei nostri studi non affronteremo ciò e ci limiteremo a considerare il caso di spazi normati (completi).

2.2 CONVERGENZA PUNTUALE

Durante gli studi di Calcolo delle probabilità e statistica si è parlato di tre tipi di convergenze di successioni di variabili aleatorie: la **convergenza in probabilità**, la **convergenza quasi certa** e la **convergenza in legge** (o in distribuzione). Consideriamo ora quest'ultima, di cui riportiamo la definizione.

Definizione 2.2.1. - Convergenza in legge.
Dato $(\Omega, \mathscr{M}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variabili aleatorie e le due corrispettive *funzioni di distribuzione*

$$\begin{aligned} F_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}(X \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

allora si dice che X_n converge a X **in legge** $\left(X_n \xrightarrow{d} X\right)$ se

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ punto di continuità di } F. \tag{2.10}$$

Quello che abbiamo appena scritta non è altro che il caso applicato agli *studi probabilistici* della **convergenza puntuale** di una successione ad una funzione limite nel punto x.

Definizione 2.2.2. - Convergenza puntuale.
Siano $f_n, f : A \longrightarrow Y$ con A insieme qualsiasi e Y spazio normato (completo). f_n

converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{2.11}$$

Confrontiamo qui $f_n, f : A \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. **(CU)** f_n converge a f **uniformemente** su A se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A$$

2. **(CP)** f_n converge a f **puntualmente** in ogni punto di A se

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Il quantificatore esistenziale $\exists$ implica che ciò che esiste dipende da tutto ciò che lo precede: nella convergenza puntuale N non dipende dal solo ε come così capita nella **convergenza uniforme**, ma anche da x. La convergenza uniforme è più restrittiva rispetto alla puntuale.

Osservazione. Questa differenza è concettualmente analoga a quella che c'è fra continuità uniforme e continuità.

Osservazione. Possiamo considerare $\forall \varepsilon > 0$ due punti x' e x'' su cui valutare la **soglia** N di un successione di funzioni: in questo caso abbiamo per il primo punto $N(\varepsilon, x')$ e per il secondo $N(\varepsilon, x'')$. Vediamo subito che $\max(N(\varepsilon, x'), N(\varepsilon, x''))$ è una soglia lecita sia per x' sia x''.
In generale, se voglio passare dalla convergenza puntuale alla convergenza uniforme devo considerare

$$\sup_{x \in A} N(\varepsilon, x)$$

- Se A è finito, allora $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = \max_{x \in A} N(\varepsilon) = N(\varepsilon)$ e c'è convergenza uniforme.
- Se $\sup_{x \in A} N(\varepsilon) = +\infty$ allora *non* c'è convergenza uniforme.

Dalle definizioni segue immediatamente che

$$f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } A \implies \implies f_n \text{ converge puntualmente a } f \text{ in ogni punto di } A \tag{2.12}$$

ma in generale vale che la convergenza puntuale **NON** implica la convergenza uniforme.

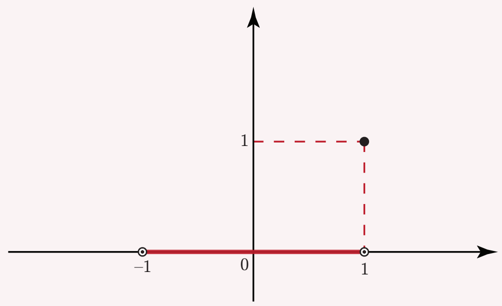
Esempio. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n, \ \forall n \geq 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}$ fissato si ha

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Allora x^n converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

in ogni punto di $(-1, 1]$.



Abbiamo provato precedentemente che $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ in ogni intervallo $[-a, a] \subsetneqq (-1, 1)$, $\forall a \in (0, 1)$, ma *non* converge uniformemente a $f = 0$ in $(-1, 1)$.
Questo mostra che su $(-1, 1)$ c'è convergenza puntuale ma non uniforme.

Osservazione. Questo esempio mostra inoltre che la CP *non* è sufficiente in generale per trasferire la continuità alla funzione limite.

2.3 Proprietà di regolarità nel caso di convergenza uniforme e puntuale

Adesso studiamo il diverso comportamento delle due tipologie di convergenza viste rispetto alle proprietà enunciate nel titolo di questa sezione: se le funzioni f_n della successione sono limitate/continue/integrabili/differenziabile, la funzione limite f è limitata/continua/integrabile/differenziabile?

2.3.1 *Limitatezza*

Teorema 2.3.1. - Teorema di limitatezza per successioni.
Siano $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n limitata su $[a, b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a, b]$.

Allora f è limitata su $[a, b]$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$\exists n > 0 : |f(x)| \leq n, \ \forall x \in A$$

Per l'ipotesi 2) sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A$$

Posto ad esempio[a] $\varepsilon = 2$, consideriamo la soglia $N_2 = N(2)$ e $n = N_2$. Allora la relazione precedente risulta

$$\left|f_{N_2}(x) - f(x)\right| < 2, \ \forall x \in A$$

Consideriamo $f_{N_2}(x)$: per l'ipotesi 1) è limitata, cioè

$$\exists n_2 > 0 : \left|f_{N_2}(x)\right| \leq n, \ \forall x \in A$$

Per ogni $x \in A$ si ha quindi

$$|f(x)| = \left|f(x) + f_{N_2}(x) - f_{N_2}(x)\right| \leq \left|f(x) - f_{N_2}(x)\right| + \left|f_{N_2}(x)\right| \leq 2 + n_2 = n, \ \forall x \in A$$

□

[a] La scelta di ε è assolutamente arbitraria.

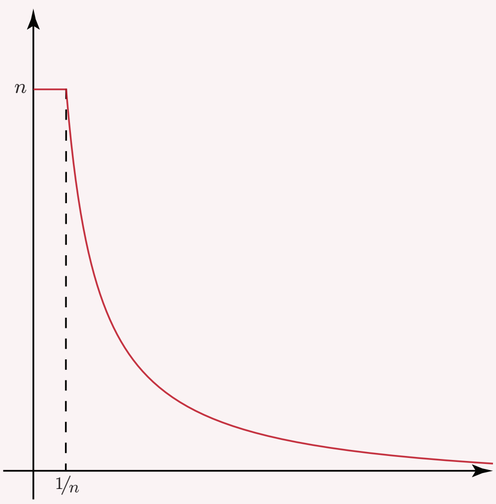
Digressione. Il risultato si generalizza ponendo $f_n, f : X \longrightarrow Y$, dove X è un qualunque insieme e Y è uno spazio normato.

La convergenza puntuale non è sufficiente per trasferire la limitatezza alla funzione limite: infatti, possiamo costruire un controesempio di una successione f_n limitata che converge puntualmente ad una funzione non limitata.

Esempio. Sia $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\forall x \in (0,1]$.
Un grafico qualitativo di f_n è rappresentato in figura.



Per ogni $n \geq 1$ la funzione f_n è limitata su $(0,1]$. Inoltre, $\forall x \in (0,1]$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Infatti, fissato $x \in (0,1]$, indicando con le parentesi quadre la *parte intera* e posto

$$n_x = \left[\frac{1}{x}\right] + 1$$

allora se $n \geq n_x$ si ha $x > 1/n$ e dunque

$$f_n(x) = \frac{1}{x}$$

Si ha dunque

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

La successione di funzioni *limitate* f_n converge quindi puntualmente $\forall x \in (0,1]$ alla funzione $\frac{1}{x}$ che **non** è limitata su $(0,1]$.

2.3.2 *Continuità*

Teorema 2.3.2. - Teorema di continuità per successioni.
Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n continua su $[a,b]$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora f è continua su $[a,b]$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in [a,b]$ fissato. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta \implies |f() - f(x_0)| < \varepsilon$$

Per l'ipotesi 2) sappiamo che f_n converge uniformemente; allora, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \; \forall x \in [a,b]$$

Questa relazione chiaramente vale anche per x_0:

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Per l'ipotesi 1) ogni f_n è continua in x_0, in particolare f_N la è. Per definizione di continuità, considerato sempre lo stesso $\varepsilon > 0$ di prima $\exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Quindi, se $|x - x_0| < \delta$ abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Digressione. Il risultato si generalizza ponendo $f_n, f : X \longrightarrow Y$, dove X è un qualunque insieme e Y è uno spazio normato.

La convergenza puntuale non è sufficiente per trasferire la continuità alla funzione limite:

infatti, possiamo costruire un controesempio di una successione f_n continua che converge puntualmente ad una funzione non continua.

Esempio. Consideriamo la successione geometrica $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$, sull'intervallo $[0,1]$. Sappiamo che essa converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq x < 1 \\ 1 < & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

La successione di funzioni *continue* f_n converge quindi puntualmente per ogni $x \in [0,1]$ alla funzione f che **non** è continua su $[0,1]$.

2.3.3 *Integrabilità e passaggio al limite sotto segno di integrale*

Teorema 2.3.3. - Teorema di integrabilità per successioni, passaggio al limite sotto segno di integrale.
Siano $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$, $\forall n \geq 1$.
2. f_n converge uniformemente a f su $[a,b]$.

Allora

1. $f \in \mathscr{R}([a,b])$.
2. Vale il **passaggio al limite sotto segno di integrale**:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \tag{2.13}$$

Vedremo la dimostrazione di una versione più generica del teorema quando parleremo degli integrali di Lebesgue.
Per quanto questo teorema ha una notevole importanza, ha un campo d'azione particolarmente limitato. Infatti, anche cambiando leggermente le ipotesi non è più possibile affermare la tesi. Vediamo alcuni di questi controesempi.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è sufficiente per trasferire alla funzione limite l'integrabilità su un intervallo *illimitato*.
Consideriamo la successione di funzioni $f_n : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{n}{nx + x^2}, \ \forall x \geq 1, n \geq 1$$

Per ogni $x \geq 1$ osserviamo che $f_n(x) \sim \frac{n}{nx}$ per $n \to +\infty$, quindi si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{nx} = \frac{1}{x}$$

Si ha quindi convergenza puntuale in ogni punto di $[1,+\infty)$ alla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.
Inoltre, la convergenza è uniforme su $[1,+\infty)$: vale infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n}{nx + x^2} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{n+x}$$

per ogni $x \geq 1$, $n \geq 1$. Per *monotonia*, si ha quindi

$$\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 1} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n+1}, \ \forall n \geq 1$$

Deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

da cui segue la convergenza uniforme su $[1,+\infty)$. Osserviamo ora che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$f_n(x) \sim \frac{n}{x^2}, \ x \to +\infty$$

e dunque f_n è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$, per ogni $n \geq 1$; la funzione limite $f(x) = \frac{1}{x}$ *non* è invece integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$.
La successione di funzioni f_n *integrabili* su $[1,+\infty)$ converge quindi uniformemente su $[1,+\infty)$ alla funzione f che **non** è integrabile su $[1,+\infty)$.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione necessaria per il passaggio al limite sotto segno di integrale.
Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Invece, sappiamo che x^n converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq x < 1 \\ 1 < & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

dunque su $[0,1]$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è una funzione *identicamente nulla* tranne un *numero finito* di punti (in questo caso, uno soltanto). Allora

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x^n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

x^n non converge uniformemente su $[[0,1]$, ma il passaggio al limite sotto segno di integrale si verifica comunque.

Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Invece, sappiamo che x^n converge puntualmente in ogni punto di $[0,1]$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq x < 1 \\ 1 < & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

dunque su $[0,1]$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è una funzione *identicamente nulla* tranne un *numero finito* di punti (in questo caso, uno soltanto). Allora

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x^n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

x^n non converge uniformemente su [[0,1], ma il passaggio al limite sotto segno di integrale si verifica comunque.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale nel caso in un intervallo *illimitato*. Sia $f_n : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \geq x \geq 2n \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < n \vee x > 2n \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_0^n 0 dx + \int_n^{2n} \frac{1}{n} dx + \int_{2n}^{+\infty} 0 dx \right] = \lim_{n\to+\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{n} dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{x}{n} \right]_n^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n - -n}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Invece, si vede immediatamente che

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$$

Vediamo che f_n converge uniformemente su $[0,+\infty)$ a 0:

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[0,+\infty)} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Anche aggiungendo al teorema l'ipotesi che $f(x)$ sia Riemann-integrabile (in questo caso ciò è verificato), il passaggio al limite sotto segno di integrale *non* si verifica *necessariamente* se l'intervallo è illimitato.

Esempio. La convergenza puntuale *non* è condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, nemmeno nel caso di un intervallo limitato. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = nx\left(1-x^2\right)^n$ definite su $[0,1]$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx = -\frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n(-2x)\left(1-x^2\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} n \left[\frac{1}{n+1} \left(1-x^2\right)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Invece, osserviamo che, fissato x rispetto alla n $nx\left(1-x^2\right)^n = x\frac{\left(1-x^2\right)^n}{\frac{1}{n}}$ si può vedere come il rapporto di un esponenziale di ragione (in modulo) minore di 1 con il reciproco di un termine lineare, dunque per $n \to +\infty$ l'esponenziale tende a 0 molto più velocemente di $\frac{1}{n}$: segue che

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} nx\left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^1 0dx = 0$$

Per lo stesso ragionamento si vede che $f_n(x)$ converge puntualmente a 0 per ogni punto di $[0,1]$, ma *non* si verifica il passaggio al limite sotto segno di integrale.

2.3.4 *Derivabilità*

Date $f_n, f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con f la funzione limite di f_n su A, possiamo porci due domande:

1. f_n derivabile su $A \implies f$ derivabile su A?
2. Vale lo scambio tra derivata e limite?

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = D\left(\lim_{n\to+\infty} f(x)\right)$$

O, in altre parole, il diagramma seguente è commutativo?

$$\begin{tikzcd}
f_n \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\lim"'] & f_n' \arrow[d, "\lim"] \\
\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \arrow[r, "D"'] & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'
\end{tikzcd}$$

La risposta ad entrambe domande, a differenza di quanto ci si potrebbe aspettare dati i risultati su limitatezza/continuità/integrabilità, è **NO**, anche nel caso di *convergenza uniforme*.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per trasferire alla funzione limite la derivabilità.
Consideriamo la successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

- f_n è derivabile.
- f_n abbiamo visto[a] converge uniformemente su $\mathbb{R}$ a $f(x) = |x|$ che *non* è derivabile in $x = 0$.

[a] Si veda pag. 13, sezione 2.1.

Esempio. La convergenza uniforme *non* è condizione sufficiente per poter scambiare limite e derivata, anche se si aggiunge l'ipotesi che la funzione limite sia derivabile.
Consideriamo la successione $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

- f_n è derivabile su $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, e vale

$$f'(x) = \sqrt{n}\cos(nx),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1$$

- ◇ f_n converge **puntualmente** a $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{limitato}} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

◇ f_n converge **uniformemente** a $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right|\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Osserviamo che in entrambi i casi $f(x) = 0$ su $\mathbb{R}$: questa funzione è chiaramente derivabile e vale

$$D\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = D(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

D'altro canto, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cos(nx)$$

Ad esempio, per $x = 0$ troveremmo

$$\lim_{n\to+\infty} D(f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$$

Quindi non si può per $x = 0$ scambiare limite e derivata-

Esiste comunque un legame tra *successioni di funzioni*, *derivabilità* e convergenza uniforme; scopriamo che non è più la successione f_n a convergere uniformemente, bensì sono le derivate f' della successioni a doverlo fare.

Teorema 2.3.4. - Teorema di derivabilità per successioni.

Siano dati $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

1. f_n derivabili su (a,b).
2. $\exists c \in (a,b) : f_n(c)$ converge puntualmente.
3. f_n' converge uniformemente a g su (a,b).

Allora

1. $\exists\ f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che f_n converge uniformemente a f su (a,b).
2. f è derivabile.
3. $f'(x) = g(x),\ \forall x \in (a,b)$, ossia

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x),\ \forall x \in (a,b) \tag{2.14}$$

Per dimostrare il teorema, faremo uso di tre strumenti: il *criterio di Cauchy per la convergenza uniforme* (teorema 2.1.1, pag. 15), il *teorema di scambio di limiti* e una conseguenza *teorema di Lagrange*. Enunciamo questi ultimi due.

Teorema 2.3.5. - Teorema di scambio di limiti.

Dati $g_n, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e c punto di accumulazione di I, se

1. g_n converge *uniformemente* a g su I
2. Per ogni $n \geq 1$ esiste $L_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to c} g_n(x) = L_n$$

Allora:

1. Esistono finiti
$$\lim_{x\to c} g(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} L_n \tag{2.15}$$
2. Vale la relazione
$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{n\to+\infty} L_n \tag{2.16}$$
ossia
$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to c} g_n(x) \tag{2.17}$$

COROLLARIO 2.3.1. - CONSEGUENZA AL TEOREMA DI LAGRANGE.
Sia $h:(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivabile in (α,β). Allora:
$$\forall u,v\in(\alpha,\beta): |h(u)-h(v)| \le \left(\sup_{x\in(\alpha,\beta)}\left|h'(x)\right|\right)|u-v| \tag{2.18}$$

DIMOSTRAZIONE. (DEL TEOREMA DI DERIVABILITÀ PER SUCCESSIONI.)
1. Dimostriamo la *convergenza uniforme* di f_n su (a,b). Per il Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme è sufficiente dimostrare che
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): \forall n,m\ge N \quad \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$
Sia $\varepsilon>0$. Per ogni $x\in(a,b)$, preso c come da ipotesi 2):
$$|f_n(x)-f_m(x)| \le |f_n(x)-f_m(x)-(f_n(c)-f_m(c))| + |f_n(c)-f_m(c)|$$
Studiamo il *primo addendo*. Per il *corollario al teorema di Lagrange* si ha
$$|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(c)-f_m(c))| \le \left(\sup_{t\in(a,b)} |x-c|\right)$$
Inoltre, poiché per ipotesi 3) f_n' converge uniformemente su (a,b), si ha per il criterio di Cauchy che
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1=N_1(\varepsilon): \forall n,m\ge N_1 \quad \sup_{x\in(a,b)} \left|f_n'(x)-f_m'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
Segue dunque che
$$|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(c)-f_m(c))| \le \left(\sup_{t\in(a,b)} |x-c|\right) \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-c| \le \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x\in(a,b),\ \forall n,m\ge N_1$$

Per il *secondo addendo*, dato che per ipotesi 2) f_n converge puntualmente in c, possiamo applicare il criterio di Cauchy per le successioni:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_2\ \left|f_n(c) - f_m'(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posto $N = \max\{N_1, N_2\}$, per ogni $n, m \geq N$ si ha

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_n(c) - f_m(c)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)\end{aligned}$$

Da cui segue:

$$\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ \forall n, m \geq N$$

2. Denominiamo f il limite *puntuale* di f_n, che esiste e coincide con quello uniforme per la dimostrazione appena fatta al punto 1). Riscriviamo la tesi 2) e 3) nella seguente maniera:

   b. Per ogni $d \in (a,b)$ vale $\lim_{x\to d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d}$

   c. $\lim_{x\to d} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to d} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d}$.

   Verifichiamo le ipotesi del *teorema di scambio dei limiti*:

   - $\lim_{x\to d} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d}$ esiste *finito* in quanto per ipotesi 1) gli f_n sono *derivabili* su (a,b).
   - $\frac{f_n(x)-f_n(d)}{x-d}$ converge *uniformemente* su $(a,b)\setminus\{d\}$.
     Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in (a,b)\setminus\{d\}$ si ha, in virtù del *corollario al teorema di Lagrange*

     $$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} - \frac{f_m(x) - f_m(d)}{x - d}\right| &\leq \left|\frac{f_n(x) - f_m(x) - (f_n(d) - f_m(d))}{x - d}\right| \leq \\ &\leq \sup_{t\in(a,b)} \left|f_n'(t) - f_m'(t)\right|\end{aligned}$$

     Inoltre, si applica il *criterio di Cauchy* alle successione f_n': per ogni $\varepsilon > 0\ \exists N = N_0$ tale che per ogni $\forall n, m \geq N$ vale

     $$\sup_{t\in(a,b)} \left|f_n'(t) - f_m'(t)\right| < \varepsilon$$

     da cui segue

     $$\left|\frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} - \frac{f_m(x) - f_m(d)}{x - d}\right| < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)\setminus\{d\}$$

   Per il *criterio di Cauchy* sulla convergenza uniforme, c'è convergenza uniforme su $(a,b)\setminus\{d\}$. Il teorema di scambio dei limiti garantisce che il limite

   $$\lim_{x\to d} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} \Longleftrightarrow \lim_{x\to d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d}$$

   esiste *finito* (tesi 2) e vale lo *scambio di limite e derivata* (tesi 3).

□

CAPITOLO 3

Serie di funzioni

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Le Nel Capitolo 2 a pagina 11 abbiamo iniziato a trattare la convergenza uniforme e puntuale di successioni di funzioni. Adesso passiamo a parlare di serie di funzioni. **[COMPLETARE]**

3.1 Serie in uno spazio normato

Innanzitutto, ricordiamo le definizioni di serie a valori reali e di convergenza (assoluta) di una serie a valore reali.

Definizione 3.1.1. - Serie a valori reali e convergenza di una serie.

Data una successione $x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, la **serie** $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ è la somma di tutti gli elementi della successione.
Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \quad \forall n \geq 0 \tag{3.1}$$

si dice che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge** se converge la successione s_n; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n \to +\infty} s_n \tag{3.2}$$

Definizione 3.1.2. - Convergenza assoluta.

Sia x_n una successione a valori reali. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge assolutamente** in $\mathbb{R}$ se converge la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$.

Teorema 3.1.1. - Convergenza assoluta implica convergenza semplice.
Ogni serie di numeri reali assolutamente convergente è anche semplicemente convergente.

Dimostrazione. Per dimostrare che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge, per il *Criterio di Cauchy per le serie*[a] è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| < \varepsilon$$

Per ipotesi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ converge: per il Criterio di Cauchy, si ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right|\right| = |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right| < \varepsilon$$

D'altra parte, dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$\left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| < |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + \left|x_{n+p}\right| < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Dalle ultime due relazioni si deduce immediatamente la prima relazione e dunque la tesi. □

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina 57 è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di Cauchy.

Osservazione. Il teorema appena dimostrato è una conseguenza della **completezza** di $\mathbb{R}$. Infatti, abbiamo usato il *criterio di Cauchy*, che si basa sul fatto che le successioni di Cauchy convergono sempre in $\mathbb{R}$ e quindi proprio per la completezza dei reali.

Il viceversa del teorema appena dimostrato non è valido, come segue dal seguente controesempio.

Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$: non converge assolutamente in quanto la serie, con gli elementi in modulo, diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che, essendo la **serie armonica**[a], non converge. Tuttavia, la serie semplice è una serie a segni alterni e poiché

- $\frac{1}{n}$ è decrescente $\forall n \geq 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

per il *criterio di Leibniz* la serie semplice converge. Pertanto, la convergenza semplice non implica la convergenza assoluta.

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare maggiori dettagli sulle serie notevoli.

Prendiamo ora $x_n \in X$, con X un insieme generico. Per generalizzare la definizione di serie convergente abbiamo bisogno che su X si possano compiere i seguenti passaggi:

- Poter definire s_n, cioè è necessario *sommare* elementi di X.
- Poter definire la *convergenza* in X.

Se dotiamo l'insieme X di una struttura di **spazio normato** possiamo generalizzare ad una serie generale le definizioni precedentemente enunciate per le serie a valori reali: infatti, se X è spazio normato gode sia dell'essere uno spazio metrico (e quindi è spazio topologico di Hausdorff, il che permette di definire univocamente la convergenza della successione) sia dell'essere spazio vettoriale (che permette la somma di elementi).

DEFINIZIONE 3.1.3. - SERIE E CONVERGENZA DI UNA SERIE.

Data una successione $x_n \in X$ spazio *normato*, $n \geq 0$, la **serie** $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ è la somma di tutti gli elementi della successione.
Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \quad \forall n \geq 0 \tag{3.3}$$

si dice che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge** se converge la successione s_n; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n\to+\infty} s_n \tag{3.4}$$

DEFINIZIONE 3.1.4. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato e x_n una successione in X. La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ **converge totalmente** o **assolutamente** in X se converge la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$.

Dall'osservazione a pag. 30 il teorema "Convergenza assoluta implica convergenza semplice" (teorema 3.1.1, pag. 30) necessita della *completezza* dei reali. Per generalizzarlo ci basta lavorare in *spazi normati completi*.

TEOREMA 3.1.2. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE.
Ogni serie in X spazio normato completo totalmente convergente è anche semplicemente convergente.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella affrontata nel teorema 3.1.1, pag. 30: è sufficiente sostituire al valore assoluto $|\cdot|$ la norma $\|\cdot\|$. □

In generale, il problema della convergenza in spazi normati è *inesplorato*, ma se lo spazio è *completo* possiamo passare per la *convergenza totale* e studiare una serie a valori reali tramite i *criteri di convergenza*[1] noti dall'Analisi 1.

3.2 SERIE DI FUNZIONI

Consideriamo lo spazio $X = \mathscr{C}([a,b];\, \mathbb{R}) = \mathscr{C}([a,b])$ delle funzioni continue su un intervallo compatto con la *metrica lagrangiana*:

$$d(f,\, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Una serie convergente $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ in questo spazio si può quindi scrivere, per definizione, come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

dove S_n è una successione di funzioni. Allora la condizione di convergenza di serie in X si può formulare come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathscr{C}([a,b]) \iff S_n \text{ converge con metrica lagriangiana in} \mathscr{C}([a,b])$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathscr{C}([a,b]) \iff S_n \text{ converge uniformemente in} \mathscr{C}([a,b])$$

Per la stessa osservazione fatte a pag. 12, sezione 2.2, per parlare di convergenza uniforme non sono necessarie né la *compattezza* di $[a,b]$ né la *continuità* delle funzioni.
Possiamo *estendere* la definizione di convergenza di una serie di funzioni per

$$f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con A insieme contenuto nei reali o, ancora più in generale, per funzioni del tipo

$$f_n : X \longrightarrow Y$$

dove X è un *insieme qualunque* e Y è uno **spazio normato completo**.

Studieremo quindi le **serie di funzioni** $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$; per studiare la *convergenza* di tali serie applicheremo le convergenze viste in precedenza alla *successione delle ridotte* $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

[1] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di convergenza delle serie a valori reali.

DEFINIZIONE 3.2.1. - CONVERGENZA DI UNA SERIE DI FUNZIONI.

- **(CP)** La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ **converge puntualmente** in $x \in A$ se $S_n(x)$ converge puntualmente in $x \in A$.
- **(CU)** La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ **converge uniformemente** in $x \in A$ se $S_n(x)$ converge uniformemente su A.

3.2.1 *Il criterio di Weierstrass*

Per motivi che saranno chiari a partire dalla sezione 4.1 (pag. 37) sulle serie di potenze, in questa sottosezione lavoreremo nello spazio dei complessi $\mathbb{C}$.
Abbiamo dato la definizione di convergenza uniforme di una serie di funzione, ma essa non è di facile applicazione operativa. Infatti, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente su $A \subseteq \mathbb{C}$ se e solo se, definita $S(z)$ la funzione limite delle ridotte $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$, vale

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{z \in A} |S_n(z) - S(z)| \right) = 0$$

Tuttavia, questa funzione richiede la conoscenza della *somma* $S(z)$, cosa che in generale *non* avviene. Usare direttamente il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme è sicuramente più conveniente, ma non è semplice comunque da verificare. Esiste tuttavia una condizione *sufficiente* che consente di provare la convergenza uniforme senza la conoscenza della somma limite.

PROPOSIZIONE 3.2.1. - CRITERIO DI WEIERSTRASS.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che

1. $\forall n \ \exists c_n \in \mathbb{R}: \ |f_n(z)| \leq c_n, \ \forall z \in A$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge.

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente in A.

OSSERVAZIONE. La dimostrazione utilizza il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.

OSSERVAZIONE. SIGNIFICATO DEL CRITERIO.
Le ipotesi 1) e 2) implicano immediatamente la convergenza puntuale della serie di potenze in ogni $z \in A$. Infatti, fissato z ho la relazione $|f_n(z)| \leq c_n$; da questo vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

e, poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)|$ converge per criterio del confronto e quindi la serie di funzioni converge puntualmente.
Quello che osserviamo nello specifico è che l'ipotesi 1) funge da *maggiorazione uniforme* della serie di funzioni su A, da cui possiamo ricavare, anche a partire dalla convergenza puntuale della serie, la convergenza uniforme su A.

3.3 PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DI UNA SERIE DI FUNZIONI

Ci poniamo ora il problema di studiare come si modificano i teoremi di *limitatezza*, *continuità*, *integrabilità*, *integrabilità* e *derivabilità* visti nel Capitolo 2 a pagina 11 nel caso delle *serie di funzioni*.

3.3.1 *Limitatezza*

Teorema 3.3.1. - Teorema di limitatezza per serie.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n limitata su A, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su A.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in A$, $S(x)$ è limitata su A.

Dimostrazione. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in A$, allora si ha:

- S_n limitata su A, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente uniformemente a S su A.

Per il teorema di limitatezza per le successioni, S è limitata su A. □

3.3.2 *Continuità*

Teorema 3.3.2. - Teorema di continuità per serie.
Siano $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. f_n continua su A, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su A.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in A$, $S(x)$ è continua su A.

Dimostrazione. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in A$, allora si ha:

- S_n continua su A, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente uniformemente a S su A.

Per il teorema di continuità per le successioni, S è continua su A. □

3.3.3 *Integrabilità e scambio tra integrale e serie*

TEOREMA 3.3.3. - TEOREMA DI INTEGRABILITÀ PER SERIE, SCAMBIO TRA INTEGRALE E SERIE.
Sia $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ tali che

1. $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$, $\forall n \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge *uniformemente* a f su $[a,b]$.

Allora, posto $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\forall x \in [a,b]$:

1. $S \in \mathscr{R}([a,b])$.
2. Vale lo **scambio tra integrale e serie**:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx \tag{3.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\forall x \in [a,b]$, allora si ha:

- $S_n \in \mathscr{R}([a,b])$, poiché le f_k lo sono.
- S_n convergente *uniformemente* a S su $[a,b]$.

Per il teorema di integrabilità per le successioni:

- $S \in \mathscr{R}([a,b])$.
- Vale il *passaggio al limite sotto segno di integrale* per la successione delle ridotte, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)\, dx = \int_a^b S(x)\, dx$$

  Poiché l'*integrale di una somma finita* è uguale ad una *somma finita di integrali*, il primo membro dell'equazione può essere riscritto come

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx$$

  e poiché $\int_a^b S(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\, dx$, otteniamo la tesi:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx$$

□

3.3.4 *Derivabilità*

TEOREMA 3.3.4. - DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE.
Sia $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. f_n derivabile su (a,b), $\forall n \geq 1$.

2. $\exists c \in (a,b)$ tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$ converge
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su (a,b).

Allora:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su (a,b)

Inoltre, detta f la funzione somma:

3. f è derivabile su (a,b)
4. $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x),\ \forall x \in (a,b)$, ossia vale la **derivazione termine a termine**:

$$D\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x),\ \forall x \in (a,b) \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Si applica il teorema di derivazione alla successione delle ridotte

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ \forall x \in (a,b),\ \forall n \geq 1$$

Verifichiamo le ipotesi:

1. S_n è derivabile su $(a,b)\ \forall n \geq 1$ perché lo sono le f_k su $(a,b),\ \forall k \geq$.
2. $S_n(c)$ converge perché $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$ converge per ipotesi.
3. $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$ converge uniformemente su (a,b) per ipotesi.

Allora per il teorema di derivazione per le successioni si ha che

$$S_n(x) \text{ converge uniformemente su } (a,b)$$

ossia, per definizione, che

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x) \text{ converge uniformemente su } (a,b)$$

Inoltre, definita $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x),\ \forall x \in (a,b)$, f è derivabile su (a,b) e

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x),\ \forall x \in (a,b)$$

□

CAPITOLO 4

Serie di potenze

"BEEP BOOP QUESTA È UNA CITAZIONE."

Marinobot, *dopo aver finito le citazioni stupide.*

Le Nel Capitolo 2 a pagina 11 abbiamo iniziato a trattare la convergenza uniforme e puntuale di successioni di funzioni. Adesso passiamo a parlare di serie di funzioni. **[COMPLETARE]**

4.1 Serie di potenze

Definizione 4.1.1. - Una **serie di potenze** è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.1}$$

con a_n numeri reali (eventualmente dipendenti da n) e $x,\ x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$, dove x_0 è dato.

L'ambito naturale di studio delle serie di potenze è $\mathbb{C}$: da qui in poi considereremo la serie (con anche i suoi coefficienti) in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n,\ z \in \mathbb{C} \tag{4.2}$$

dove $z \in A \subseteq \mathbb{C}$. Cambiando le variabili possiamo centrare la serie in $z_0 = 0$, cioè studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \dots \tag{4.3}$$

Chiaramente la serie così scritta converge in $z = 0$ (o, se prendiamo la serie *non* centrata nell'origine, in $z = z_0$), dato che la serie ha termini *costantemente nulli* e quindi è banalmente convergente.
Ci interessa ora studiare in quale insieme di $\mathbb{C}$ tali serie convergono.

Teorema 4.1.1. - Insieme di convergenza.
Se una serie di potenze converge in $z_0 \in \mathbb{C}$, allora essa converge (assolutamente) in ogni punto z con $|z| < |z_0|$.

Dimostrazione. Sappiamo dalle ipotesi che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ è convergente, quindi per la condizione necessaria di convergenza il termine $a_n z_0^n$ tende a zero. Per definizione di limite significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N \; \left|a_n z_0^n\right| < \varepsilon$$

Scegliamo arbitrariamente $\varepsilon = 1$, cioè $\exists N_1 = N(1) \colon \forall n \geq N$ vale $\left|a_n z_0^n\right| < 1$. Allora definitivamente vale

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n\right| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Poiché per ipotesi $|z| < |z_0|$, vale $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ e quindi la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|$ converge.

Per il teorema di confronto segue che anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ è convergente e quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge (assolutamente). □

Con questo non solo abbiamo dimostrato che se la serie di potenze converge in z_0 la serie converge in tutti i punti z con $|z| < |z_0|$, ma implicitamente sappiamo anche che la serie *non* converge in z_0 allora *non* converge per $|z| > |z_0|$.
Infatti, se in z_0 la serie non converge supponiamo per assurdo che esista z^*, con $|z^*| > |z_0|$, in cui la serie converge. Per il teorema appena dimostrato in tutti i punti z con $|z| < |z^*|$ la serie di potenze converge, ma fra questi è compreso anche z_0 dove essa *non* converge.

4.1.1 *Il raggio di convergenza*

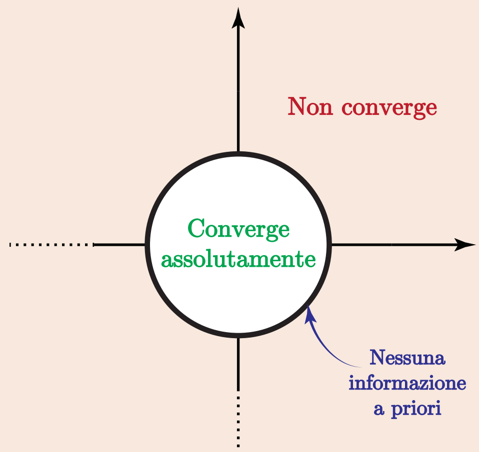
Per queste osservazioni l'insieme di convergenza della serie è un *cerchio* centrato nell'origine di un certo *raggio* R. Diamo una definizione formale di questo raggio.

Definizione 4.1.2. - Cerchio e raggio di convergenza.
Preso $A = \left\{ z \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\} \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme di convergenza della serie di potenze centrata in $z_0 = 0$ e consideriamo l'insieme $E = \{|z| \mid z \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ dato da tutti i moduli dei punti di convergenza della serie. Il **raggio di convergenza** è definito come

$$r := \sup E = \sup \left\{ |z| \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

Esso può essere:
- $R = 0$; in tal caso la serie converge *solo* per $z = 0$.
- $R = +\infty$; in tal caso la serie converge *per ogni* $z \in \mathbb{C}$.

- $0 < R < +\infty$; in base al teorema 4.1.1, pag. 4.1.1, la serie converge (assolutamente) per $|z| < r$, *non* converge per $|z| < r$ e a priori non abbiamo *alcuna informazione* per i punti z sul *bordo*, cioè tali che $|z| = r$. L'*insieme di convergenza* risulta essere un **cerchio aperto** centrato nell'origine di raggio R, a cui si aggiungono eventualmente altri punti di convergenza sul *bordo* (tutti, nessuno o solo alcuni).



Poiché sappiamo che la serie converge assolutamente per $|z| < r$, lo studio del raggio di convergenza passa attraverso lo studio della serie assoluta associata $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$.

Per determinare il raggio di convergenza, possiamo ad esempio usare la **legge di D'Alembert** o detto anche *criterio del rapporto*, che ci fornisce una condizione *sufficiente* su come determinare il raggio di convergenza.

PROPOSIZIONE 4.1.1. - LEGGE DI D'ALEMBERT O CRITERIO DEL RAPPORTO.

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, se $a_n \neq 0$ definitivamente ed esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

allora

1. $L = 0 \implies R = +\infty$
2. $L = +\infty \implies R = 0$
3. $0 < L < +\infty \implies R = \frac{1}{L}$

Questa proposizione ha il vantaggio di essere operativamente utile, ma ovviamente solo se valgono le ipotesi: non è scontato che il limite del rapporto sia ben definito!

Un teorema più generale che vale *per ogni serie* è il *criterio della radice* o altresì noto come **legge di Cauchy-Hadamard**.

Teorema 4.1.2. - Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

e sia

$$\lambda = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n|} \tag{4.4}$$

Allora

1. Se $\lambda = 0$, la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Se $0 < \lambda < +\infty$, la serie converge $R = \frac{1}{\lambda}$.
3. Se $\lambda = +\infty$, la serie converge solo in $z = 0$.

Osservazione. I tre casi scritti esauriscono *tutti* i casi possibili. Infatti, per la permanenza del segno del limsup[a] vale

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0,\ \forall n \geq 0 \implies \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$$

[a] Nelle “Note aggiuntive”, a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato insieme ad altri relativi al limsup e liminf.

Dimostrazione. (della legge di Cauchy-Hadamard.)
Partiamo dal dimostrare il punto 2): dobbiamo provare che $R = \frac{1}{\lambda}$, ossia

- Se $|z| < 1/\lambda$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge.
- Se $|z| > 1/\lambda$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *non* converge.
- Sia z tale che $|z| < 1/\lambda$. Se $z = 0$ la serie banalmente converge.
  Se $z \neq 0$, vale $\lambda < 1/|z|$; consideriamo allora λ' tale che $\lambda < \lambda' < 1/|z|$: poiché $\lambda' > \lambda$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

  $$* \quad \exists N : \forall n \geq N\ \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda'$$

  Proviamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente usando il criterio del confronto.

  $$|a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n||z|^n \underset{*}{<} (\lambda')^n |z|^n = (\lambda'|z|)^n,\ \forall n \geq N$$

  Questo è il termine n-esimo della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda'|z|)^n$ di ragione $\lambda'|z|$.

  Poiché $0 < \lambda'|z| < 1$ per la scelta di λ', la serie geometrica converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ e dunque converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- Sia z tale che $|z| > 1/\lambda$. Per mostrare la non convergenza della serie proviamo che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n z^n \neq 0, \ \forall z \colon |z| > \frac{1}{\lambda}$$

Questo è equivalente a mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0, \ \forall z \colon |z| > \frac{1}{\lambda}$$

Poiché $z \neq 0$, vale $\lambda > 1/|z|$. Consideriamo allora λ'' tale che $1/|z| < \lambda'' < \lambda$: poiché $\lambda'' < \lambda$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$* \quad \exists n_k \to +\infty \colon \sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|} > \lambda''$$

Si ha, lungo la sottosuccessione:

$$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| = |a_n| |z^{n_k}| \underset{*}{>} (\lambda'')^{n_k} |z|^{n_k} = \left(\lambda''|z|_{>1 \text{ per la scelta di } \lambda''}\right)^{n_k} > 1, \ \forall n_k$$

Poiché esiste una sottosuccessione che è sempre maggiore di 1, deve esistere un valore limite della successione $|a_n z^n|$ maggiore o uguale a 1. Ma allora

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n| \geq 1 \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0$$

La dimostrazione del punto 1) è analoga alla prima parte della dimostrazione del punto 2). In questo caso, dobbiamo mostrare che la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$.
Se $z = 0$, la serie banalmente converge, mentre se $z \neq 0$, si ha chiaramente che $0 = \lambda < 1/|z|, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideriamo allora λ' tale che $0 < \lambda' < 1/|z|$: poiché $\lambda' > 0$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$* \quad \exists N \colon \forall n \geq N \ \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda'$$

Proviamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente usando il criterio del confronto.

$$|a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n||z|^n \underset{*}{<} (\lambda')^n |z|^n = (\lambda'|z|)^n, \ \forall n \geq N$$

Questo è il termine n-esimo della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda'|z|)^n$ di ragione $\lambda'|z|$.

Poiché $0 < \lambda'|z| < 1$ per la scelta di λ', la serie geometrica converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ e dunque converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Poiché la scelta di z è stata arbitraria, vale la tesi.

La dimostrazione del punto 1) è analoga alla seconda parte della dimostrazione del punto 2). In questo caso, dobbiamo mostrare che la serie converge solo in $z = 0$.
Se $z = 0$, la serie banalmente converge. Per mostrare la non convergenza della serie proviamo che la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} a_n z^n \neq 0, \ \forall z \neq 0$$

Questo è equivalente a mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0, \ \forall z \neq 0$$

Dato $z \neq 0$, consideriamo allora λ'' tale che $1/|z| < \lambda'' < +\infty$: poiché $\lambda'' < +\infty$, per la caratterizzazione del massimo limite si ha

$$* \quad \exists n_k \to +\infty : \sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|} > \lambda''$$

Si ha, lungo la sottosuccessione:

$$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| = |a_n| |z^{n_k}| \underset{*}{>} (\lambda'')^{n_k} |z|^{n_k} = \Big(\underbrace{\lambda''|z|}_{>1 \text{ per la scelta di } \lambda''}\Big)^{n_k} > 1, \ \forall n_k$$

Poiché esiste una sottosuccessione che è sempre maggiore di 1, deve esistere un valore limite della successione $|a_n z^n|$ maggiore o uguale a 1. Ma allora

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n| \geq 1 \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| \neq 0$$

La scelta di z è arbitraria, purché z sia diverso da zero; per questo motivo vale la tesi.
□

4.2 COMPORTAMENTO SUL BORDO

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_n, \ z \in \mathbb{C}$$

con raggio di convergenza finito e non nullo. I possibili comportamenti sul *bordo* del cerchio di convergenza sono i seguenti:

1. Convergenza in *tutti i punti* del bordo del cerchio di convergenza
2. *Non* convergenza in *nessun punto* del bordo del cerchio di convergenza
3. Convergenza solo in *alcuni punti* del bordo del cerchio di convergenza

Mostriamo per ciascuno di essi un esempio.

Esempio. Caso 1.
Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

Con la formula di D'Alembert vediamo che il raggio di convergenza è $R = 1$. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 = \ell \implies r = \frac{1}{\ell} = 1$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$ la serie converge (assolutamente):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^\alpha}$$

La serie in modulo è la *serie armonica generalizzata* che, per $\alpha > 1$, converge; la serie semplice converge su tutti i punti del bordo.

ESEMPIO. CASO 2.
Consideriamo la *serie geometrica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$$

Poichè $a_n \equiv 1\ \forall n$, il criterio del rapporto ci fornisce come raggio di convergenza $R = 1$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$ la serie *non* converge: possiamo osservare che presa la successione $c_n \in \mathbb{C}$, vale[a]

$$\lim_{n\to+\infty} |c_n| \neq 0 \implies \lim_{n\to+\infty} c_n \neq 0$$

In questo caso:

$$\lim_{n\to+\infty} |z^n| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 \implies \lim_{n\to+\infty} z^n \neq 0$$

È evidente che la *condizione necessaria* di convergenza *non* è soddisfatta: la serie *non* converge in nessun punto del bordo.

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato.

ESEMPIO. CASO 3.
Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

L'applicazione del criterio del confronto è esattamente analogo a quello visto nel caso e il raggio di convergenza è pertanto $R = 1$.
Se $z = 1$ la serie *non* converge, dato che essa diventa una serie armonica generalizzata con $\alpha \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Invece, per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$ e $z \neq 1$ la serie converge: infatti, possiamo applicare il *criterio di Abel-Dirichlet*.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \beta_n$$

con $\alpha_n = z^n$ e $\beta_n = 1/n^\alpha$, $n \geq 1$.

1. $\beta_n = 1/n^\alpha$ è una successione di elementi strettamente positivi, decrescenti e infinitesima per $n \to +\infty$.
2. La successione delle *somme parziali* di $\alpha_n = z^n$ è *limitata*. Consideriamo

$$\left|\sum_{n=1}^{k} z^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{k} z^n - 1\right| \boxed{=}$$

Poiché $\sum_{n=0}^{k} z^n$ è un serie geometrica parziale, sappiamo la sua somma parziale. Applicando poi una *disuguaglianza triangolare*, troviamo una *maggiorazione* della somma parziale di α_n.

$$\boxed{=} \left|\frac{1-z^{k+1}}{1-z} - 1\right| = \left|\frac{z-z^{k+1}}{1-z}\right| \leq \frac{|z| + \left|-z^{k+1}\right|}{|1-z|} \leq \frac{1+1}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}, \ \forall k \geq 1$$

Osserviamo che, nonostante la serie converga, essa non converge assolutamente: la serie in modulo è la serie armonica generalizzata con $\alpha \leq 1$, nota per essere divergente.

Anche se in generale non possiamo affermare a priori come converge sul bordo si può osservare che, in alcuni casi particolari, dalla converge in un punto del bordo si ottiene la convergenza sull'intero bordo. Vediamone alcuni

Proposizione 4.2.1. - Convergenza assoluta sul bordo se la serie di potenze converge assolutamente in un punto.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

Se la serie converge assolutamente in un punto della frontiera del cerchio di convergenza, allora converge assolutamente su tutta questa frontiera.

Dimostrazione. Supponiamo che la serie converga assolutamente in z_0, dove $|z_0| = R$ e prendiamo un qualunque z tale che $|z| = R$. Osserviamo che, presa la serie in modulo, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||z^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||z|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|R^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||z_0|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|a_n z_0^n\right|$$

che converge per ipotesi. Allora la serie di potenze converge assolutamente. □

Corollario 4.2.1. - Convergenza sul bordo se la serie di potenze a coefficienti reali positivi converge in $z = R$.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

Se la serie ha coefficienti reali positivi e converge nel punto $z = R$, dove $R \in (0, +\infty)$ è il raggio di convergenza, allora converge in ogni punto della frontiera del cerchio di convergenza.

Dimostrazione. Poiché a_n e R sono reali positivi, $a_n = |a_n|$ e $R = |R|$. Allora si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n R^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n R^n|$$

Quindi in questo caso la convergenza semplice della serie implica la convergenza assoluta. Poiché la serie converge assolutamente in un punto del bordo, segue dalla proposizione precedente la convergenza (assoluta) in tutti i punti del bordo. □

4.3 SERIE DI POTENZE E CONVERGENZA UNIFORME

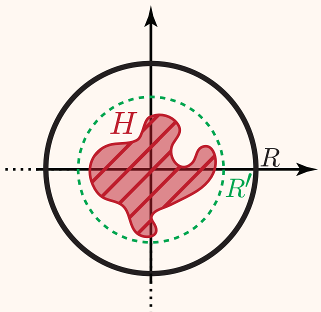
Teorema 4.3.1. - Converge uniforme delle serie di potenze.

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R \in (0, +\infty)$. Allora

1. La serie converge uniformemente su ogni insieme $H \subseteq \mathbb{C}$ tale che $\overline{H} \subsetneqq B_R(0)$, con $B_R(0)$ il disco aperto di convergenza.
2. Se la serie converge assolutamente in ogni $z \in \partial B_R(0)$ (il bordo del disco), allora converge uniformemente sul disco chiuso $\overline{B_R(0)}$.

Dimostrazione. Per questa dimostrazione useremo il *criterio di Weierstrass* enunciato nella sezione 3.2.1, pag. 33.

1. Sia H tale che $\overline{H} \subsetneqq B_R(0)$. Per il criterio di Weierstrass, per provare la convergenza uniforme su H è sufficiente provare che esiste una successione c_n tale che
   a. $|a_n z^n| \le c_n, \ \forall z \in H$
   b. $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge.

   Poiché H è solo *strettamente contenuto* nel disco aperto di convergenza, $\exists R' < R$ tale che si abbia $\overline{H} \subseteq B_{R'}(0)$, ossia $|z| \le R', \ \forall z \in H$.
   Allora si ha, $\forall n \ge 0$ e $\forall z \in H$

   $$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \le \underbrace{|a_n|(R')^n}_{\text{non dipende da } z}$$

   Inoltre, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(R')^n$ converge in quanto è la convergenza della serie di potenze per il punto $z = R'$, che è *interno* al disco di convergenza $B_R(0)$. Applicando il criterio di Weierstrass otteniamo la tesi.
2. Si ripete la dimostrazione sull'insieme $\overline{B_R(0)}$ con $R' = R$, considerando che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| R^n$ converge per ipotesi sulla convergenza sul bordo.

□

Esempio. Serie geometrica.

Sulla *serie geometrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ abbiamo già ricavato diverse informazioni: ha raggio di convergenza $R=1$ e *non* c'è convergenza (assoluta) sul bordo. Studiamo ora la convergenza uniforme.

- Converge uniformemente su ogni insieme H tale che $\overline{H} \subsetneqq B_1(0)$ per il teorema precedente.
- Non avendo alcuna convergenza sul bordo, a priori non possiamo dare risultati generali sulla convergenza uniforme sulla base del teorema visto. Tuttavia, possiamo mostrare direttamente - grazie al fatto che la somma parziale e limite della serie geometrica è nota[a] - che la serie non converge uniformemente sul disco aperto $B_1(0)$. Infatti

$$\sup_{z\in B_1(0)} |S_n(z) - S(z)| = \sup_{z\in B_1(0)} \left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z\in B_1(0)} \left| \frac{-z^{n+1}}{1-z} \right| =$$
$$= \sup_{z\in B_1(0)} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = +\infty, \ \forall n \geq 0$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{z\in B_1(0)} |S_n(z) - S(z)| \right) = +\infty \neq 0$$

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare maggiori dettagli sulla somma (parziale) della serie geometrica e come ricavarla.

4.4 Proprietà di regolarità della somma di una serie di potenze

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze con $R>0$ il raggio di convergenza. Studiamo le proprietà di continuità e derivabilità della **funzione somma**

$$\begin{aligned} f : B_R(0) \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned} \tag{4.5}$$

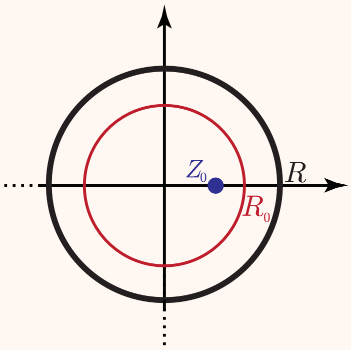
4.4.1 *Continuità*

Proposizione 4.4.1. - Proprietà di continuità per la somma di una serie di potenze, caso generale.

La funzione f è continua su $B_R(0)$.

Attenzione! La convergenza della serie di potenze su $B_R(0)$ *non* è in generale uniforme, ma sappiamo al più che converge uniformemente su H tale che $\overline{H} \subsetneqq B_R(0)$, quindi dobbiamo tenere conto di questo fattore nelle dimostrazioni che faremo.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $f \in \mathscr{C}(B_R(0))$, cioè f continua in z_0, $\forall z_0 \in B_R(0)$.



Sia $z_0 \in B_R(0)$ fissato. Per proprietà della metrica, allora $\exists R_0 < R$ tale che $z_0 \in B_{R_0}(0)$. Su $B_{R_0}(0)$ si ha continuità uniforme e dunque, posto

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

si ha

1. S_n continua su $B_{R_0}(0)$ perché è un polinomio.
2. S_n converge uniformemente a f su $B_R(0)$.

Per il teorema di continuità della funzione limite, f è continua in $B_{R_0}(0)$ e dunque in z_0. □

Questo risultato ci permette di parlare della convergenza sul disco aperto, ma se c'è qualche tipo di convergenza sul bordo, e quindi f è definita anche su di esso, si può estendere la continuità di f fino a tale frontiera? Studiamo due casi.

Corollario 4.4.1. - Proprietà di continuità per la somma di una serie di potenze, caso sul bordo con convergenza assoluta.
Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con raggio di convergenza $R > 0$. Se la serie converge (assolutamente) su $\partial B_R(0)$ allora la serie è continua su $\overline{B_R(0)}$.

Dimostrazione. Segue immediatamente ricordando che dalle ipotesi di convergenza assoluta sul bordo, sulla base del teorema 4.3.1, pag. 45, vale la convergenza uniforme su $\overline{B_R(0)}$. □

Se invece supponiamo che la serie converga in un punto[1] z_0, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, possiamo definire la **funzione somma** come

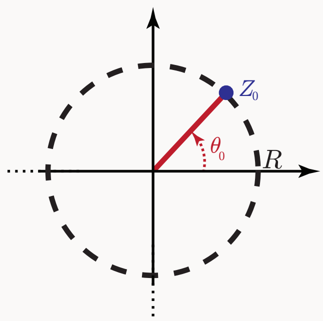
$$\begin{aligned} f : B_R(0) \cup \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned} \tag{4.6}$$

La convergenza uniforme di f anche sui punti di convergenza z_0 sul bordo ci viene garantita dal **teorema di Abel**.

Teorema 4.4.1. - Teorema di Abel.
Sia dato la serie di potenze la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con raggio di convergenza $R > 0$.

[1] Nel caso di più punti di convergenza $z_0, z_1, \ldots$, la funzione somma f sarà definita su $B_R(0) \cup \{z_0\} \cup \{z_1\} \cup \ldots$. Qui riportiamo per semplicità il caso di un solo punto, ma i risultati successivi sono opportunamente generalizzabili con più punti di convergenza sul bordo.

Se $\exists z_0 = Re^{i\theta_0}$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, allora



1. la serie converge uniformemente sul *segmento*

$$\Sigma_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\theta_0},\ r \in [0, R] \right\} \tag{4.7}$$

2. La restrizione di f a Σ_0 è *continua* su z_0, ossia

$$\lim_{r \to R} f\left(re^{i\theta_0}\right) = f(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n \tag{4.8}$$

4.4.2 *Derivabilità*

Abbiamo definito la funzione somma dal disco aperto $B_R(0)$ in campo complesso a $\mathbb{C}$, ma al momento non conosciamo cosa vuol dire derivabilità di una funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Per il momento, limitiamoci al caso reale, cioè consideriamo una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ x \in \mathbb{R},\ a_n \in \mathbb{R}$$

con raggio di convergenza $R > 0$. In questo caso il cerchio di convergenza è un intervallo $(-R, R)$, con estremi eventualmente inclusi. La funzione somma risulta allora la funzione

$$\begin{aligned} f : (-R, R) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned} \tag{4.9}$$

TEOREMA 4.4.2. - DERIVABILITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE.
Sia data

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ \forall x \in (-R, R),\ a_n \in \mathbb{R}$$

con $R > 0$ il raggio di convergenza. Allora

1. f è derivabile su $(-R, R)$
2. La derivata di f è

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\ \forall x \in (-R, R) \tag{4.10}$$

Per dimostrare questo teorema useremo il teorema di derivibilità per serie di funzioni (teorema 3.3.4, pag. 35, capitolo Capitolo 3 a pagina 29): poiché le ipotesi 1) e 2) sono banalmente verificate, dobbiamo contrarci sull'ipotesi 3), ovvero abbiamo bisogno di informazioni sulla convergenza uniforme della serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$; poiché la serie delle derivate è ancora una serie di potenze, allora ci basta studiare il raggio di convergenza.

LEMMA 4.4.1. - CONVERGENZA DELLA SERIE DI DERIVATE DELLA SERIE DI POTENZE.
Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e sia $R > 0$ il suo raggio di convergenza. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza R.

DIMOSTRAZIONE. Riscriviamo la serie delle derivate, operando un cambio di indici ponendo $n = k+1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(k+1)\, a_{k+1}}_{=b_k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k a_k$$

Sia R' il suo raggio di convergenza. Per il teorema di Cauchy-Hadamard si ha

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |(n+1)\, a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} \underbrace{(n+1)^{1/n}}_{=\alpha_n} \underbrace{|a_{n+1}|^{1/n}}_{=\beta_n} = \limsup_{n\to+\infty} \alpha_n \beta_n \boxed{=}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(n+1)}{n}}$$

Poichè $\frac{\log(n+1)}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ per confronto della crescita degli infiniti, $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = e^0 = 1$, dunque α_n ammette limite e dunque coincide col suo lim sup. Allora, per proprietà[a] del lim sup:

$$\boxed{=} \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \limsup_{n\to+\infty} \beta_n = \limsup_{n\to+\infty} |a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} \left(|a_{n+1}|^{1/n+1}\right)^{n+1/n} \boxed{=}$$

Poichè $n+1/n \to 1$ per $n \to +\infty$, possiamo applicare Cauchy-Hadamar sulla serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R > 0$: poiché

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |a_{n+1}|^{1/n+1}$$

allora abbiamo mostrato che

$$\frac{1}{R'} = \ldots = \limsup_{n\to+\infty} \left(|a_{n+1}|^{1/n+1}\right)^{n+1/n} = \frac{1}{R}$$

cioè $R' = R$. □

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pagina XXX è possibile trovare la dimostrazione di questo risultato insieme ad altri relativi al limsup e liminf.

Grazie a questo lemma, possiamo finalmente dimostrare il teorema lasciato in sospeso all'inizio della sezione.

DIMOSTRAZIONE. (DEL TEOREMA DI DERIVABILITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE.)

Fissiamo $\overline{x} \in (-R, R)$ arbitrario e sia (a, b) tale che
- $\overline{x} \in (a, b)$.
- $[a, b] \subsetneq (-R, R)$

Applichiamo ora il teorema di derivabilità termine a termine della serie di funzioni su (a, b) sulla serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; vediamo che le ipotesi sono verificate:
- $f_n(x) = a_n x^n$ derivabile in (a, b), $\forall n \geq 1$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge $\forall x \in (a, b)$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge uniformemente su (a, b) per la scelta di (a, b), sulla base del lemma precedentemente dimostrato.

Per il teorema di derivabilità termine a termine f è derivabile in (a, b) e dunque anche in $\overline{x}$, con derivata in tal punto

$$f'(\overline{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Per l'arbitrarietà di $\overline{x}$, questi risultati valgono $\forall x \in (-R, R)$ e dunque segue la tesi. □

4.5 FUNZIONI ANALITICHE E SERIE DI TAYLOR

La tesi 2) appena dimostrata ci dice che la derivata f' è una somma di serie di potenze con stesso raggio di convergenza R di f. Possiamo riapplicare il teorema alla funzione f':
- f' è derivabile in $(-R, R)$.
- $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, $\forall x \in (-R, R)$.

Ma anche f'' è una serie di potenze con raggio R: possiamo riapplicare il teorema su f'' e ammettere l'esistenza di f''' come serie di potenze. Iterando il ragionamento, si trova che esiste $f^{(k)}(x)$, $\forall x \in (-R, R)$, $\forall k \geq 0$ e vale

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \ \forall x \in (-R, R) \tag{4.11}$$

Esplicitiamo il primo termine di $f^{(k)}(x)$:

$$f^{(k)}(x) = k(k-1)\dots(k-k+1) a_k x^0 + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = k! a_k + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

In $x = 0$ otteniamo

$$f^{(k)}(0) = k! a_k + 0 = k! a_k$$

Da cui otteniamo una espressione del termine a_k in funzione della derivata k-esima, supponendo che esiste tale derivata:

$$a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}, \ \forall k \geq 0 \tag{4.12}$$

Riscriviamo questi risultati in un unico teorema.

TEOREMA 4.5.1. - ANALITICITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE.
Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

con raggio di convergenza $R > 0$ e sia f la sua somma. Allora

1. $f \in \mathscr{C}^\infty((-R, R))$.
2. La derivata k-esima è nella forma

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \ \forall x \in (-R, R) \tag{4.13}$$

3. Il coefficiente a_k si può scrivere come

$$a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}, \ \forall k \geq 0 \tag{4.14}$$

4. f è *analitica* in 0, ossia si può scrivere come una **serie di Taylor di f centrata in** $x = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k, \ \forall x \in (-R, R) \tag{4.15}$$

Diamo una definizione formale del termine "funzione analitica" che abbiamo appena usato nel teorema.

DEFINIZIONE 4.5.1. - FUNZIONE ANALITICA.
Sia $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$.

1. Dato $x_0 \in U$, f si dice **analitica** in x_0 se $\exists r_0 > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \ \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0) \subseteq U$$

2. f si dice **analitica in** U se è analitica in ogni punto $x_0 \in U$. In questo caso si scrive $f \in \mathscr{A}(U)$.

Il problema della *ricostruzione* di una funzione come somma della sua serie di Taylor, introdotto nello studio della lunghezza dell'ellisse nel Capitolo 1 a pagina 3, si può anche formulare come

"Ogni funzione $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ è anche analitica su U?"

ossia

$$f \in \mathscr{C}^\infty(U) \overset{?}{\Longrightarrow} f \in \mathscr{A}(U)$$

In generale la risposta è **no**, come possiamo vedere nell'esempio successivo. Bisogna quindi capire sotto quali ipotesi ulteriori una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ è anche analitica.

III

APPENDICI-TE

CAPITOLO 5

Note aggiuntive

"Le note a piè di pagina sono le superfici ingannatrici che permettono ai paragrafi tentacolari di aderire alla realtà più ampia della biblioteca."

Nicholson Baker, *bibliotecario di Cthulhu.*

Riportiamo alcune note, precisazioni e dimostrazioni complementari agli argomenti dei capitoli principali che possono risultare utili al lettore.

5.1 Capitolo 1: alla ricerca della lunghezza dell'ellisse

5.1.1 *Il coefficiente binomiale generalizzato*

Definizione 5.1.1. - Coefficiente binomiale.
Dati $n, j \in \mathbb{N}$ con $n \geq j$, si definisce il **coefficiente binomiale** il numero

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \tag{5.1}$$

dove ! indica il **fattoriale**:

- $(0)! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Se $n < j$, allora poniamo $\binom{n}{j} = 0$

Possiamo estendere la definizione del coefficiente binomiale sostituendo a n e j dei qualunque numeri complessi α e β (purché *non* sia un intero negativo) utilizzando la generalizzazione del fattoriale, la *funzione Gamma di Eulero*. Vediamone la definizione con α tale che $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$.

Definizione 5.1.2. - Funzione Gamma di Eulero.
Dato α tale che $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$, definiamo la **funzione Gamma di Eulero** in campo comples-

so come il prolungamento analitico dell'integrale improprio convergente

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\alpha} dx \tag{5.2}$$

Essa gode di alcune proprietà:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \ \forall \alpha > 0$
- $\Gamma(n) = (n+1)!, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definita la funzione Gamma, diamo ora una definizione generalizzata di coefficiente binomiale.

Definizione 5.1.3. - Coefficiente binomiale generalizzato con Gamma di Eulero.
Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid \mathfrak{Re}(z) \in \mathbb{Z} \wedge \mathfrak{Re}(z) \leq 0\}$, si definisce il **coefficiente binomiale generalizzato** il numero

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{5.3}$$

Questa definizione è corretta, ma presenta alcuni inconvenienti:

- *Non è definita* sui complessi con parte reale un numero intero negativo o zero.
- *Non è operativa*, dato che richiede di conoscere i valori della funzione Gamma che, in generale, non sono noti.

Consideriamo ora il caso del binomiale $\binom{\alpha}{j}$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$ e $j \in \mathbb{N}$. Se $\alpha \in \mathbb{N}$, osserviamo come la forma operativa del binomiale è la seguente:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{j} &= \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)(\alpha-j)\cdots 1}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)\cancel{(\alpha-j)!}}{j!\cancel{(\alpha-j)!}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}\end{aligned}$$

In realtà questa relazione si ottiene anche col coefficiente che abbiamo definito in precedenza se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $j \in \mathbb{N}$. Innanzitutto, diamo qualche notazione.

Definizione 5.1.4. - Simbolo di Pochhammer o fattoriale crescente.
Dati $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, il **simbolo di Pochhammer** o altresì detto **fattoriale crescente** è il numero

$$\alpha^{\overline{j}} = (\alpha)_j := \frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)} \tag{5.4}$$

Questa equivale a

$$\alpha^{\overline{j}} = (\alpha)_j = \prod_{k=0}^{j-1}(\alpha+j) = \prod_{k=1}^{j}(\alpha+j-1) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1) \tag{5.5}$$

Definizione 5.1.5. - Fattoriale decrescente.

Dati $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, il **fattoriale decrescente** è il numero

$$\alpha^{\underline{j}} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{5.6}$$

Questa equivale a

$$\alpha^{\underline{j}} = \prod_{k=0}^{j-1}(\alpha-j) = \prod_{k=1}^{j}(\alpha-j+1) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1) \tag{5.7}$$

Attenzione! La notazione $(\alpha)_j$, introdotta da Leo August Pochhammer, è talvolta usata anche per indicare il fattoriale *decrescente* oltre che quello *crescente*. Anche se useremo il simbolo di Pochammer solo per il fattoriale crescente, prediligeremo la notazione introdotta da Knuth et al.

Osserviamo che

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)} = \frac{\alpha^{\underline{j}}}{j!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)^{\overline{j}}}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)_j}{j!}$$

Allora possiamo considerare questa definizione operativa come la generalizzazione nel caso $\alpha \in \mathbb{C}$ e $j \in \mathbb{N}$ del binomiale.

Definizione 5.1.6. - Coefficiente binomiale generalizzato, definizione operativa.
Dati $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, si definisce il **coefficiente binomiale generalizzato** il numero

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha^{\underline{j}}}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)^{\overline{j}}}{j!} = \frac{(\alpha-j+1)_j}{j!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \tag{5.8}$$

Osservazione. Se $\alpha < j$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $j \in \mathbb{N}$, si ha al numeratore il fattore $(\alpha-\alpha)$ e quindi $\binom{\alpha}{j} = 0$. Il

Valgono inoltre le seguenti proprietà, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \tag{5.9}$$

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1} \tag{5.10}$$

$$\binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha+1}{k} \tag{5.11}$$

5.2 Capitolo 3: serie di funzioni

5.2.1 *Tanti criteri di Cauchy*

Il **criterio di Cauchy** è un importante teorema che fornisce condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di una successione.

Teorema 5.2.1. - Criterio di Cauchy per le successioni.
Sia v_n successione in X spazio metrico *completo*. Allora

$$v_n \text{ converge in } X \iff v_n \text{ è di Cauchy } \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N\ d(v_n, v_m) < \varepsilon \quad (5.12)$$

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) Supponiamo che v_n converge a $v \in X$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N d(v_n, v) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendiamo $n, m \geq N$. Per la disuguaglianza triangolare della metrica d si ha

$$d(v_n, v_m) < d(v_n, v) + d(v, v_m) = d(v_n, v) + d(v_m, v) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$) Vale per la completezza dello spazio X. □

Osservazione. L'implicazione $\Longrightarrow$) vale in generale su qualunque spazio metrico, mentre l'altra vale solo se lo spazio è completo. Per dimostrare che X sia completo può essere utile utilizzare alcune delle seguenti proprietà:[a]

- Una successione di Cauchy è *convergente* se e solo se ha punti di accumulazione.
- Una successione di Cauchy è *convergente* se ha una *sottosuccessione convergente*.
- Se X è spazio metrico *compatto*, allora X è spazio metrico *completo*; non è vero il viceversa.

[a] **antucabertolottigeo2**.

Intuitivamente... Possiamo vedere una successione di Cauchy come una successione che *oscilla* sempre di meno, fino a posizionarsi su un valore relativamente costante, dove le oscillazioni fra due valori distinti della successione sono davvero piccole.

In termini matematici, possiamo formalizzare questa intuizione così: una oscillazione dopo l'N-esimo elemento è la più grande differenza fra due elementi della successione scelti arbitrariamente dopo l'N-esimo:

$$osc(N) := \sup \{d(v_n, v_m) \mid n, m \geq N\}$$

Allora una serie è di Cauchy se

$$\lim_{N \to +\infty} osc(N) = 0$$

Questo ci permette di *estendere* il criterio di Cauchy a situazione *molto variegate* tra di loro dove bisogna studiare una convergenza, tutte *accomunate* dall'idea che "portare l'oscillazione a *zero* è equivalente alla convergenza".
Abbiamo visto nel Capitolo 2 a pagina 11, a pag. 15 il criterio di Cauchy per la *convergenza uniforme*; qui di seguito riportiamo quello per le successioni.

COROLLARIO 5.2.1. - CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE.

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ in uno spazio *normato completo* è convergente se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} \right\| < \varepsilon \tag{5.13}$$

DIMOSTRAZIONE. Considerate le ridotte $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge se e solo se la successione delle ridotte converge. Poiché X è uno spazio completo, questo equivale a dire che la successione delle ridotte s_n è di Cauchy, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \| s_m - s_n \| < \varepsilon$$

Senza perdita di generalità poniamo $m = n + p$: la relazione qui sopra coincide con

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left\| x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} \right\| < \varepsilon$$

e quindi segue la tesi. $\square$

CAPITOLO 6

Elenchi delle definizioni e dei teoremi

elenco delle definizioni

ELENCO DEI TEOREMI

Bibliografia

[Ram14] S. A. Ramanujan. «Modular equations and approximations to π». In: *Quarterly Journal of Mathematics* XLV (1914), pp. 350–372.

Indice analitico