FISICA 2 - 11/04/22

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Ricordiamo le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Vogliamo sapere se esistono soluzioni delle eq. di Maxwell dell'elettrodinamica nel vuoto (dove "nel vuoto" intendiamo che $\rho=0$, $\vec{j}=0$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Consideriamo

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{\text{per la I e.d.M.}} - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

Dalla II e IV e.d.M,

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Allora

$$\nabla^2 E - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Usando l'operatore di D'Alembert $\square = \nabla^2 - \frac{1}{\ }\frac{\partial^2}{\ }$

Usando l'operatore di D'Alembert $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

dove $v^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{1}{c^2}$ si ottiene

$$\boxed{\Box \vec{E} = 0}$$

Analogamente

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{\substack{=0 \text{ per} \\ \text{III e.d.M}}} - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\Box \vec{B} = 0}$$

In sostanza ogni onda che si propaga con la velocità della luce è equazione di queste due equazioni.

NEI MATERIALI (DIELETTRICI LINEARI, DIAMAGNETI E PARAMAGNETI LINEARI)

Sostituiamo nelle equazioni ε_0 con $\varepsilon = k_e \varepsilon_0$

μ_0 con $\mu = k_m \mu_0$

Allora abbiamo le stesse equazioni, ma le onde soluzioni di:

$$\Box \vec{B} = 0 \qquad \Box \vec{E} = 0$$

hanno velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{k_e k_m}} < c$$

CARATTERISTICHE DELLE SOLUZIONI DI

Le soluzioni più generale sono

$$\vec{E}(\vec{r} \pm \vec{v}t) \qquad \vec{B}(\vec{r} \pm \vec{v}t$$

Come sono correlate le due?

Focalizziamoci su $\vec{r} - \vec{v}t$ (i ragionamenti sono analoghi con $\vec{r} + \vec{v}t$)

Denotiamo, per comodità

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{v}t = (x - v_x t, y - v_y t, z - v_z t)$$

Cos'è la velocità di $\vec{B}$ rispetto al tempo? L'unica dipendenza è da $\vec{u}$, quindi

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial u_x}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial u_y}\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial u_z}\frac{\partial u_z}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} v_x - \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} v_y - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} v_z = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Si osserva che vale la seguente identità vettoriale:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \underbrace{\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0 \text{ per III e.d.M.}} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

Allora

$$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{II edM}}{=} -\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

Ma essendo questa relazione è vera $\forall \vec{E}, \vec{B}, \vec{v}$, quindi

$$\boxed{\vec{E} = \vec{B}\times\vec{v}}$$

Procedendo analogamente, si ottiene

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = -\vec{v}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{=0 \text{ per I e.d.M}} + \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{E})$$

ossia è una proprietà di qualunque campo dipendente solo da $\vec{z} - \vec{v}t$

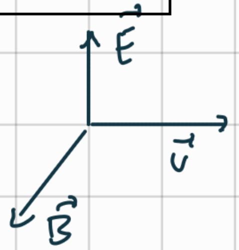
$$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{E}) = -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = v^2(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{v^2}\,\vec{v}\times\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\frac{1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = -\frac{1}{v^2}(\vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{E}$$
$$= -\frac{1}{v^2}\vec{\nabla}(\vec{v}\times\vec{E})$$

Dato una direzione di propagazione $\vec{v}$ dell'onda, in ogni istante $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali a $\vec{v}$

22.1



$$\boxed{\text{Le onde elettromagnetiche sono trasversali.}}$$

DIM (identità precedente)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_y B_z - v_z B_z & v_z B_x - v_x B_z & v_x B_y - v_y B_x \\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{vmatrix}$$

Per pignizia, guardiamo solo la componente x:

$$v_x \partial_y B_y - v_y \partial_y B_x - v_z \partial_z B_x + v_x \partial_z B_z =$$

$$= v_x (\partial_y B_y + \partial_z B_z) - (B_y \partial_y + v_z \partial_z) B_x$$

$$= v_x (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (v \cdot \vec{\nabla}) B_x$$

(È più facile farlo con i simboli di Levi-Civita, se solo l'avessi capito. :( )

Le altre componenti sono analoghe. ∎

Abbiamo quindi tre vettori sempre ortogonali

Da questa relazione si ottiene che

$$\boxed{E = B\, v}$$

Conseguenze:

- $\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{E} \times \vec{B} = B^2 \vec{v} = \frac{\vec{E}}{v^2} \vec{v} = E B \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

È uno strumentopolo misterioso che ci servirà più avanti.

ESEMPIO: (ONDE PIANE)

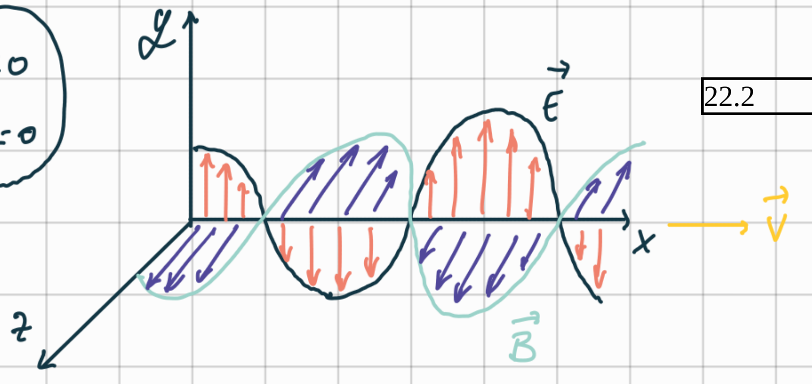
$\vec{E}(x - vt)$ $\quad$ $\vec{B}(x - vt)$ $\quad$ (è il caso particolare di $\vec{v} = (v, 0, 0)$)

$E = (0, E_y, E_z)$ $\quad B = \frac{1}{v}(0, -E_z, E_y)$

↓ è completamente determinato una volta noto $\vec{E}$ (e $\vec{v}$)

$$\vec{B} = \frac{1}{v^2}\begin{vmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & E_y & E_z \\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{vmatrix} = \frac{1}{v^2}\left(-vE_z\hat{u}_y + vE_y\hat{u}_z\right) = \frac{1}{v}\left(-E_z\hat{u}_y + E_y\hat{u}_z\right)$$

$E_z = 0$
$B_y = 0$



22.2

Giao Maccio

In questo caso: $\begin{cases} E_y = E_0 \cos(kx - \omega t) \\ B_z = \frac{E_0}{v}\cos(kx - \omega t) \end{cases}$

POLARIZZAZIONE

Abbiamo visto la polarizzazione rettilinea, circolare, ellittica, ...
Considereremo ora la polarizzazione del campo prima elettrico (quello del campo magnetico è automaticamente determinato)

$\vec{E} = (0, E_y, E_z)$ $\qquad \vec{B} = \left(0, -\frac{E_z}{v}, \frac{E_y}{v}\right)$

$E_y = E_{0y}\cos(kx - \omega t)$
$E_z = E_{0z}\cos(kx - \omega t + \delta)$

- POLARIZZAZIONE RETTILINEA $(\delta = 0, \pi)$

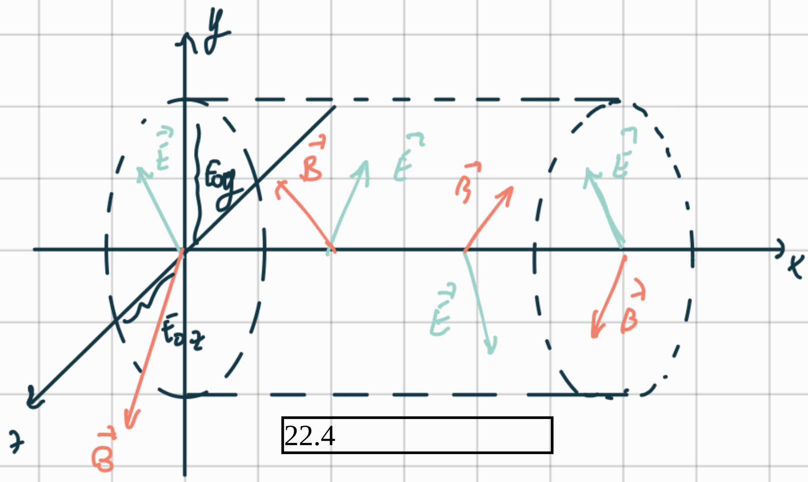
22.3

$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_{0z}}{E_{0y}}$

|| piano è inclinato di angolo θ

piano è inclinato di angolo δ.
Per ottenere una situazione canonica basta ruotare il sistema di riferimento.

- POL. ELLITTICA ($\delta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$)



22.4

$$E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t)$$
$$E_z = E_{0z} \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2} = 1$$

- POL. CIRCOLARE

$E_{0y} = E_{0z} = E_0$; per il resto è uguale al caso

Normalmente, le onde elettromagnetiche sono NON polarizzate, ossia in cui il δ non è costante e la fase varia molto rapidamente nel tempo.

Queste onde sono dette INCOERENTI e non hanno una direzione preferenziale nel piano ortogonale.

È possibile polarizzare le onde filtrando opportunamente le onde incoerenti, ottenendo delle ONDE COERENTI (occhiali da sole / 3D, schermi dei PC)

ENERGIA DELLE ONDE ELM

Abbiamo visto che la densità di energia del campo elettrico e del campo magnetico sono

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \qquad u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Da cui la densità di energia del campo elettromagnetico è

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B}{2\mu_0}$$

Nel caso delle onde elettromagnetiche $E = Bv = B \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

Allora la densità di energia di un'onda elettromagnetica generata da un campo elettrico $\vec{E}$ o magnetico $\vec{B}$

$$\boxed{u = \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2}$$

Ricordiamo che

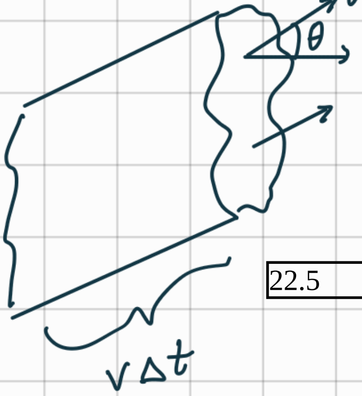
$$\vec{E} \times \vec{B} = B^2 \vec{v} = \frac{E^2}{v^2} \vec{v}$$

Poniamo

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{B^2}{\mu_0} \vec{v} = u \vec{v}}$$

Questo vettore è detto VETTORE DI POINTING.

Se voglio sapere l'energia per unità di tempo una superficie Σ ci basta considerare l'energia nel cilindro di base Σ e altezza $v \Delta t$, dove questa altezza è inclinata nella direzione della velocità $\vec{v}$



22.5

$\Delta U = u \Sigma_i v \Delta t \cos\theta = u \Sigma_i \hat{u}_n \cdot \vec{v} \Delta t$

$$\frac{du}{dt} = \int_\Sigma u \vec{v} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_i = \int_\Sigma \vec{S} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_i$$

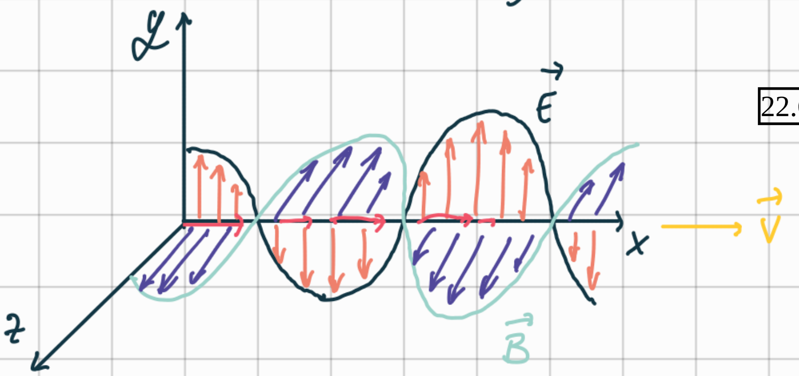
Il flusso del vettore di poynting ci dice la potenza che attraversa la superficie

ESEMPIO:

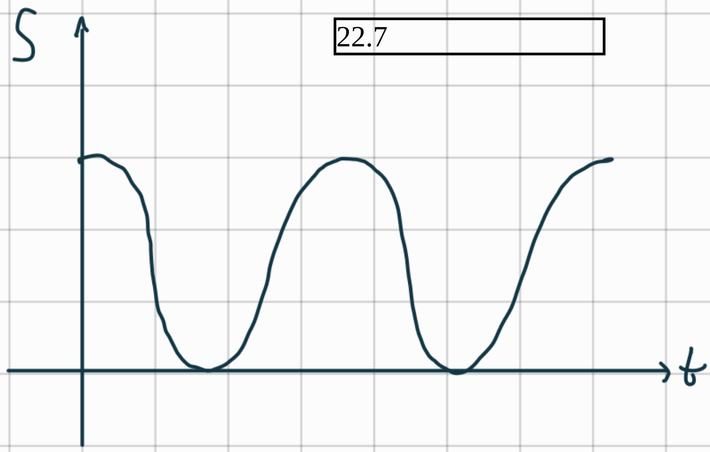
$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$
$$B = \frac{E_0}{v} \cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_0^2}{v^2} \vec{v} \cos^2(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 v^2} E_0^2 \vec{v} \cos(kx - \omega t) = \varepsilon_0 \vec{E}^2 \vec{v} \cos(kx - \omega t)$$



22.6



22.7

Poiché nella pratica oscilla molto frequentemente il valore di S, si considera spesso il suo valore medio su un periodo

$$S_m = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| \, dt = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 v}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) \, dt$$

$$\boxed{S_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 v}$$

Si definisce anche un campo elettrico efficace

$$\boxed{E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}}$$

in modo che $S_m = \varepsilon_0 E_{eff}^2 v$.

Es: Quant'è l'energia che in principio potrei ottenere da un pannello solare? Dobbiamo sapere quanta energia raggiunge il pannello per unità di tempo... e quindi serve studiare il flusso del Poynting.

INTENSITÀ DI UN ONDA

DEF: L'INTENSITÀ di un onda corrisponde al valor medio dell'energia che passa attraverso una superficie ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo e per unità di area.

$$\boxed{I = \frac{1}{\Sigma}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \frac{P_m}{\Sigma}}$$

Per onde ELM

$$\boxed{I = S_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 v E_0^2}$$

ES: La radiazione solare ha intensità

$$I = 1{,}4\cdot10^3\ W/m^2$$

Ricaviamo il campo elettrico (in modulo)

$$E_0 = \frac{2I}{\varepsilon_0 v} = 1{,}03\cdot10^3\ V/m$$

$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{-1} = Z_0^{-1}$ (Z_0 ha dim. di $377\,\Omega$)

Segue che

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \simeq 3,43 \cdot 10^{-6}\,T$$

POTENZA: Un pannello solare da $1m^3$ $\sqrt{}$ l'efficienza teorica del 100%

si otterebbe una potenza di: $W = 1,4 \cdot 10^3\,W$, ... ma i più moderni hanno un'efficienza del 10%