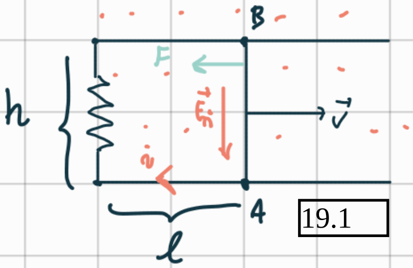
FISICA 2 - 04/04/22

GENERATORI

Qui parleremo di generatori che convertono energia meccanica in energia elettrica.
Consideriamo il seguente circuito, immerso in un campo magnetico uscente, la sbarra si può muovere



19.1

Inizialmente non c'è corrente, ma appena muoviamo la sbarra con velocità $\vec{v}$ cambia l'area della spira e quindi il flusso. Dalla legge di Faraday la fem indotta è

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt}$$

poiché $\Sigma_i = hl$, $\Phi_\Sigma(\vec{B}) = B\Sigma_i = Bhl$
ed essendo $v = \frac{dl}{dt}$ si ha

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt} = -B\frac{d\Sigma}{dt} = -Bh\frac{dl}{dt} = \boxed{-Bhv}$$

Questo effetto in realtà è una conseguenza della forza di Lorentz.
Infatti, se muovo la sbarretta le cariche libere nella sbarra si muovono e quindi subiscono una forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B}$$

e di conseguenza generano un campo elettrico indotto

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

pertanto la Fem indotta è

$$\mathcal{E}_i = \int_B^A \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -vhB$$

come ottenuto prima.

OSS: Questo moto, purtroppo, non è privo di attriti. È presente una FORZA DI ATTRITO ELETTROMAGNETICO. Dalla seconda legge di Laplace si ha

$$\boxed{\vec{F} = i \int_B^A d\vec{s} \times \vec{B} = -ihB\hat{u}_x}$$

che si oppone al moto naturalmente.

Dalla legge di Ohm la corrente che circola nel circuito è

$$i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{vhB}{R}$$

la forza di attrito diventa

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{h^2 B^2}{R} \vec{v}}$$

OSS: Ha la tipica forma dell'ATTRITO VISCOSO, in quanto è proporzionale alla velocità.

Per mantenere una velocità costante devo spostare la sbarra con una forza uguale e contraria a quella d'attrito elettromagnetico

$$\vec{F}_{est} = -\vec{F}$$

Per fare ciò devo compiere lavoro o, in altri termini, una potenza pari a

$$i = \frac{hBv}{R}$$

$$P = \underbrace{\vec{F}_{est}\cdot\vec{v}} = \frac{h^2B^2v}{R} = \underbrace{i^2R}$$

- Questa è la POTENZA MECCANICA: l'energia per unità di tempo che devo fornire per mantenere una velocità costante.
- Questa è la POTENZA ELETTRICA dissipata dalla resistenza.

Sto pertanto convertendo energia meccanica in energia elettrica: ho un GENERATORE

Come generatore, tuttavia, non è particolarmente funzionale: bisogna avere delle rotaie infinite. Di solito, si usano meccanismi rotazionali come il DISCO DI BARLOW.

19.2

Esso è un disco di materiale conduttore collegato con un circuito come in figura. Se il disco ruota con velocità ω si viene a creare, per variazione del flusso, una d.d.p. tra A (centro del disco) e B.

Il campo elettrico indotto è

$$\vec{E}_i = \vec{v}\times\vec{B} = \frac{d\varphi}{dt}\, r\, \hat{u}_\varphi \times \vec{B} = \omega r\, \hat{u}_\varphi \times \vec{B} = -\omega r B$$

Allora la fem è

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B \vec{E}_i\cdot d\vec{s} = -\omega B \int_r^0 r'\,dr' = \frac{1}{2}\omega B r^2$$

e la corrente è

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B r^2}{2R}$$

Il momento magnetico è

$$\vec{M} = i\int_B^A \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = -\frac{B^2 r^4}{4R}\vec{\omega}$$

Questo dunque un ATTRITO TORCENTE che si oppone alla velocità angolare. Se mantenere ω costante devo applicare un momento $\vec{M}_{ext}$ uguale ed opposto a $\vec{M}$.

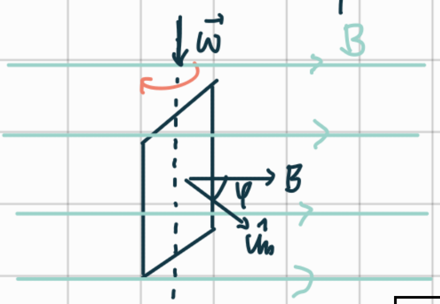
La potenza meccanica/rotazionale da fornire è

$$P = \vec{M}_{ext} \cdot \vec{\omega} = \frac{B^2 r^4 \omega^2}{4R} = i^2 R$$

Generatori che funzionano in modo analogo sono le dinamo o le pale eoliche, ma questi in realtà sono ...

GENERATORI DI AC.

La CORRENTE ALTERNATA è una corrente che cambia segno periodicamente.
Consideriamo una spira rettangolare che ruota in senso orario, attraversata da un campo magnetico uniforme.



Poiché ruota, il flusso varia e varia la

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt}$$

19.3

Questo flusso dipende dall'angolo tra B e la spira. Se la spira ruota con velocità angolare ω, l'angolo tra $\hat{u}_n$ e $\vec{B}$ è dato da

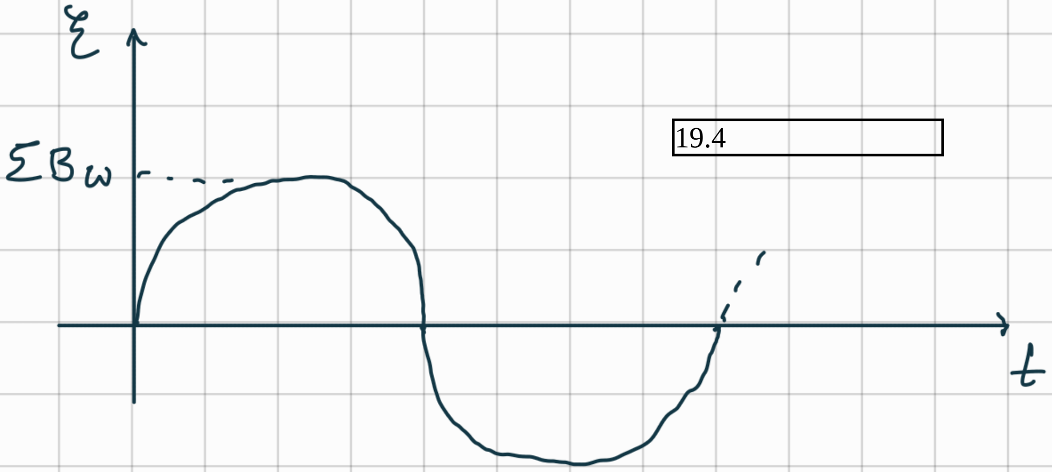
$$\varphi = \omega t$$

FASE A SECONDA DELLE CONDIZIONI INIZIALI, SPESSO $\phi = 0$

Allora $\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \hat{u}_n \Sigma = \Sigma B \cos(\omega t + \phi)$

Segue $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt} = \Sigma_i B\omega \sin(\omega t + \phi)$

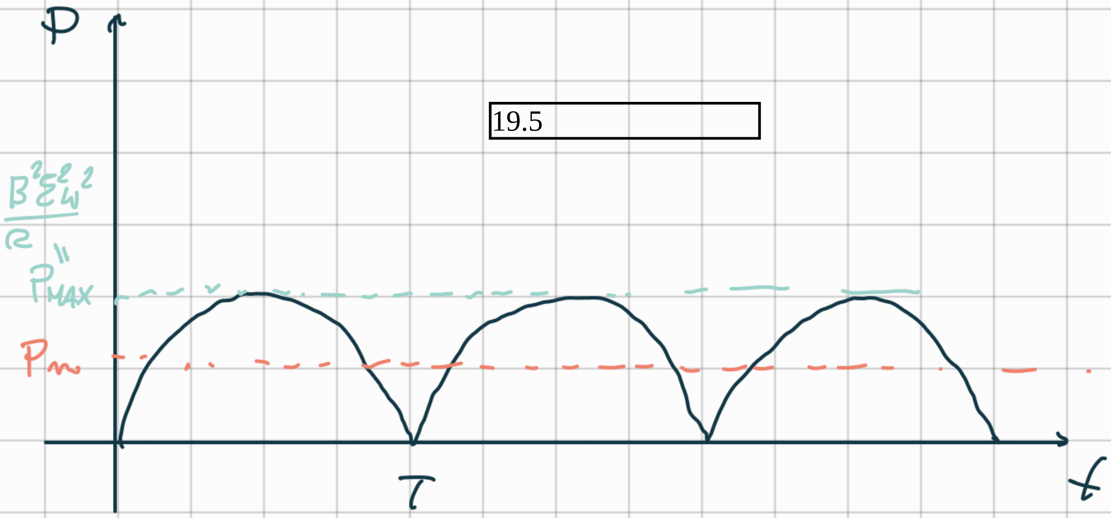
Questo ddp ha forma sinusoidale



Questo metodo è molto più efficiente: la potenza elettrica è

$$\boxed{P = \mathcal{E}_i\, i = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = \frac{B^2\Sigma^2\omega^2}{R}\sin^2\omega t = M\omega}$$

Contrariamente da prima, la potenza dipende dal tempo...



... onde se guardiamo la potenza media in un periodo

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{B^2\Sigma^2\omega^2}{RT}\int_0^T \sin^2\omega t\, dt$$

$$\boxed{= \frac{B^2 \Sigma^2 \omega^2}{2R} = \frac{P_{MAX}}{2}}$$

Si definisce una forza elettromotrice EFFICACE definita in modo che

$$\boxed{P_m = \frac{\mathcal{E}_{EFF}^2}{R}}$$

Ossia

$$\mathcal{E}_{EFF}^2 = \frac{\mathcal{E}_{MAX}^2}{2}$$

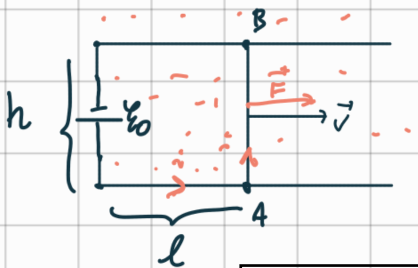
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{EFF} = \frac{\Sigma B \omega}{\sqrt{2}}}$$

Ci interessa ciò perché normalmente le oscillazioni sono così frequenti che non è funzionale studiando al variare del tempo; sostanzialmente studiamo il generatore AC nelle condizioni medie in modo che sia trattato un generatore DC.

Motori

I motori funzionano al contrario: trasformano energia elettrica in energia meccanica. Se consideriamo il sistema di prima, ma ci pongo nel circuito una fem $\mathcal{E}_0$ allora circola della corrente su di esso, in particolare sulla sbarra. Per la legge di Oersted (?)

$$\vec{F} = i\left(\int d\vec{l}\right) \times \vec{B} = i h B \hat{u}_x \Rightarrow \text{la sbarra si sposta!}$$



Perché varia il flusso nella superficie del circuito c'è una fem indotta

$$\mathcal{E}_i = -vhB$$

19.6

che si contrappone a $\mathcal{E}$

che si contrappone a $\mathcal{E}_0$.

Allora $i = \frac{\mathcal{E}_0 - vhB}{R}$ e la forza complessiva sulla sbarra

$$\vec{F} = i\,hB\,\hat{u}_x = \frac{\mathcal{E}_0 - vhB}{R}\,hB\,\hat{u}_x$$

Questo è un caso che presenta un simil-attrito viscoso $\vec{F}_A = -\frac{h^2B^2}{R}\vec{v}$

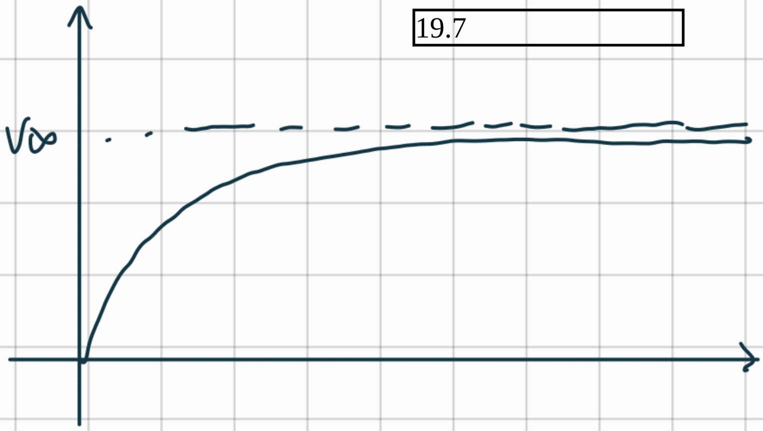
Con la legge di Newton

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\mathcal{E}_0 - vhB}{R}\,hB = m\frac{dv}{dt}$$

Risolvendo la EDO $v = \frac{\mathcal{E}_0}{hB}\left(1 - e^{-\frac{h^2B^2}{mR}t}\right)$

19.7



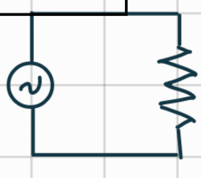
$$v_\infty = \frac{\mathcal{E}_0}{hB}$$

Lo stesso succede in modo analogo con il disco di Barlow

CIRCUITI IN AC

- **RESISTORE R**

19.8

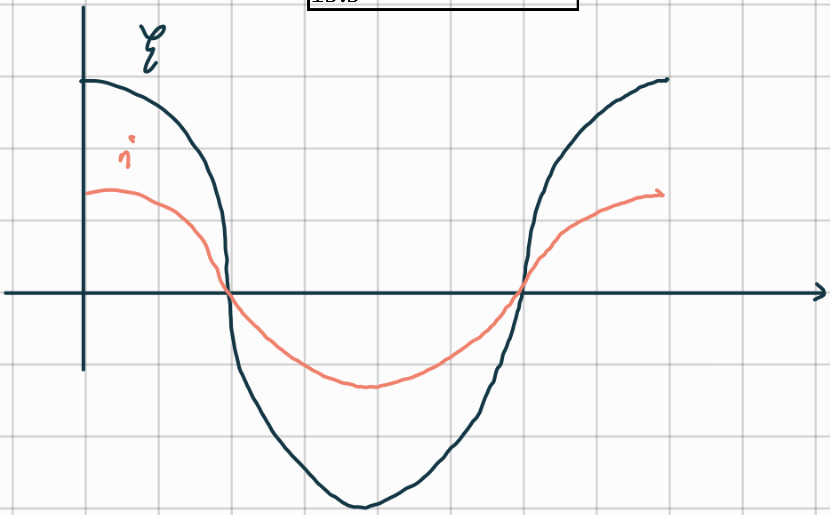


$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$

$i(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$

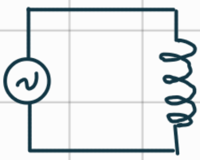
R

19.9



Sono in fase.

• INDUTTORE L

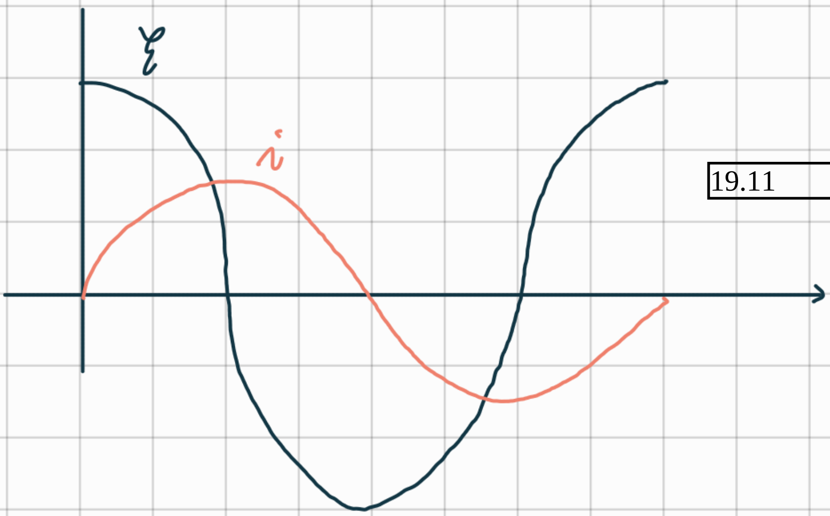


19.10

$$\mathcal{E}(t) - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}(t)}{L} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)}{L} \rightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin \omega t$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \pi/2\right)$$



19.11

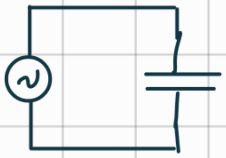
NON sono in fase: c'è una fase di $\pi/$

La ddp dell'induttore è

$$V_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t$$

?

• CONDENSATORE C



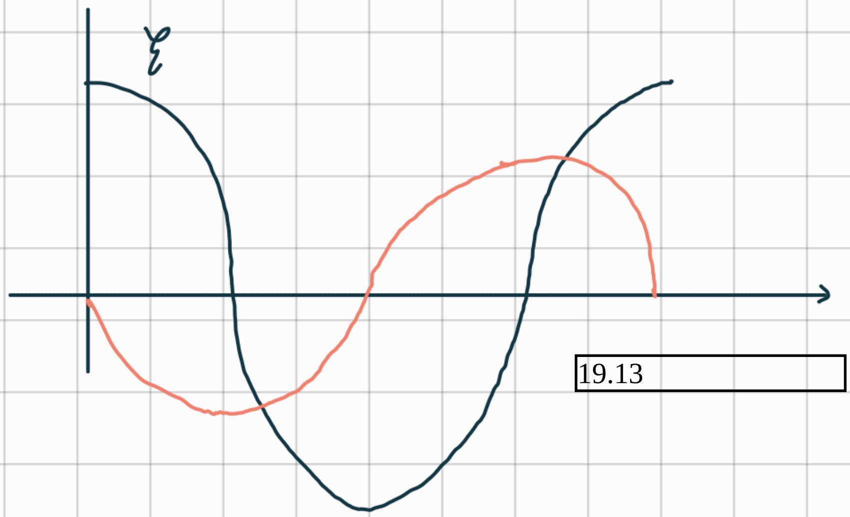
19.12

$$\mathcal{E}(t) = V_C(t) = \frac{q}{C}$$

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \frac{\frac{dq}{dt}}{C} = \frac{i(t)}{C} \Rightarrow i(t) = C\,\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$$

$$= -\mathcal{E}_0 \omega C \sin \omega t$$

$$= \mathcal{E}_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)$$



19.13

In generale: se $i(t) = i_0 \cos \omega t$

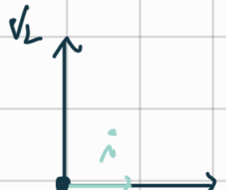
allora $V_i = Z_i \, i_0 \cos(\omega t + \phi_i)$

dove Z_i è l'IMPEDENZA è un ostacolo alla corrente (e si misura in Ω)

- $i = R$: $Z_R = R$ $\quad \phi_R = 0$
- $i = L$: $Z_L = \omega L$ $\quad \phi_L = \pi/2$
- $i = C$: $Z_C = \frac{1}{\omega C}$ $\quad \phi_C = -\pi/2$

oss: la fase è opposta a quella di prima perché prima consideravamo $\mathcal{E}$ e poi i, mentre in elettrotecnica prima prendo i e poi calcolo V

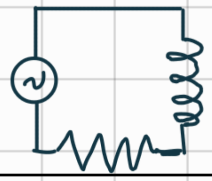
Ciò si può rappresentare come dei vettori secondo il seguente schema



19.14

che ruotano con velocità angolare ω. Per costruire i circuiti combinati possiamo considerare la somma vettoriale di questi vettori in rotazione.

- SERIE RL



19.15

$i(t) = i_0 \cos \omega t$

$V_L(t) = Z_L i_0 \cos(\omega t + \pi/2)$

$V_R(t) = Z_R i_0 \cos(\omega t)$

$$V(t) = V_L(t) + V_R(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \text{ dove}$$

V è il vettore nello schema precedente

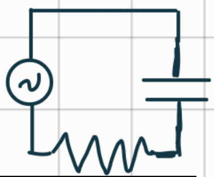
19.16

$$V_0 = \sqrt{Z_L^2 + Z_R^2}\, i_0$$

da cui

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{Z_L}{Z_R}$$

- SERIE RC



19.17

$i(t) = i_0 \cos \omega t$

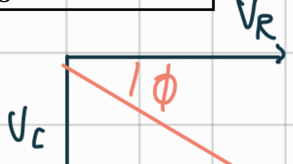
$V_C(t) = Z_C i_0 \cos(\omega - \pi/2)$

$V_R(t) = Z_R i_0 \cos(\omega t)$

$$V(t) = V_C(t) + V_R(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \text{ dove}$$

V è il vettore nello schema precedente

19.18



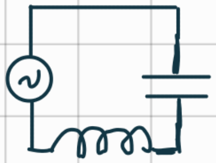
$$V_0 = \sqrt{Z_L^2 + Z_R^2}\, i_0$$

$\operatorname{tg} \phi = \ldots$

$$\tan\varphi = -\frac{Z_C}{Z_R}$$

- SERIE LC

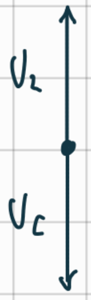
19.19



$$i(t) = i_0 \cos \omega t$$
$$V_C(t) = Z_C\, i_0 \cos(\omega t - \pi/2)$$
$$V_L(t) = Z_L\, i_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$V(t) = V_C(t) + V_L(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \text{dove}$$

V è il vettore, nello schema precedente



19.20

$$V_0 = |Z_L - Z_C|\, i_0$$

$$\phi = \begin{cases} -\pi/2 & Z_C > Z_L \\ \pi/2 & Z_L > Z_C \end{cases}$$

Questi risultati si ritrovano facilmente col...

METODO SIMBOLICO

Introduciamo un' INTENSITÀ DI CORRENTE COMPLESSA

$$\boxed{I = I_0\, e^{i\omega t}}$$

(la cui corrente è la sua parte reale, I_0)

e consideriamo l' IMPEDENZA COMPLESSA

$$\mathcal{Z} = Z_i\, e^{i\phi_i}$$

tale per cui

$$V = \mathcal{Z} I$$

Allora: $\mathcal{Z}_R = R$

$$\mathcal{Z}_L = i\omega L$$

$$\mathcal{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Il vantaggio di parlare a questo calcolo è che

- per elementi in SERIE

$$\mathcal{Z} = \sum_i \mathcal{Z}_i$$

- per elementi in PARALLELO

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} = \sum_i \frac{1}{\mathcal{Z}_i}$$

AMMETTENZA

In altre parole, si comportano come resistenze!

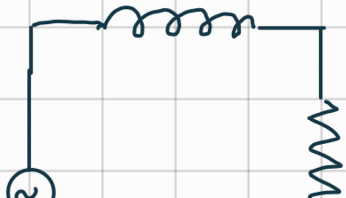
$$\mathcal{Z}_{RL} = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_L = R + i\omega L$$

$$\Rightarrow Z_{RL} = |\mathcal{Z}_{RL}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \frac{\omega L}{R}$$

- SERIE RLC

19.21



In elettrotecnica: i (immaginario) $= j$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z}_C$$

$$= R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$I = I_0 e^{i\omega t} \qquad = Z e^{i\phi}$$

Allora

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

e $V = I_0\left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) e^{i\omega t}$

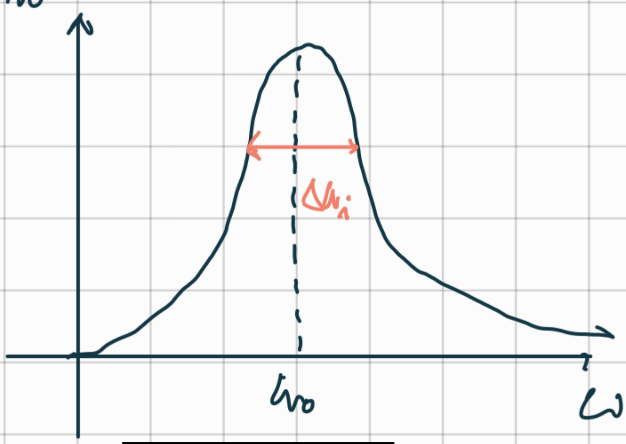
$$= I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{i(\omega t + \phi)}$$

In termini non complessi

$$V(t) = \underbrace{i_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega t - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{V_0} \cos(\omega t + \phi)$$

Allora si ha

$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega t - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



19.22

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si ha, come lunghezza caratteristica,

↗ larghezza caratteristica

$$\Delta\omega \sim \frac{R}{L}$$

se tendo $R/L \to 0$, ottengo dei picchi molto alti e, stretti

nel generatore posso SELEZIONARE delle frequenze date dalla corrente posta solo per ω vicino alla corrente.

MERCOLEDÌ LEZIONE, GIOVEDÌ 21 ESERCIZI