Sei un amore Marco ♡

FISICA 2 - 30/03/22

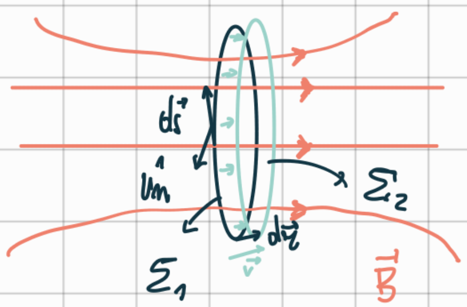
La scorsa lezione abbiamo visto la LEGGE DI FARADAY

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Il valore di $\mathcal{E}_i$ può cambiare in diversi modi

- variazione della forma del circuito, ossia di Σ
- variazione dell'angolo tra B e Σ
- variazione di B nel tempo → un effetto NON previsto dalle leggi già note
- spostamento rigido del circuito.

17.1



DIM. della LEGGE DI FARADAY (CASO SPECIFICO)

DIM Spostiamo una spira in un campo magnetico non uniforme (ma costante nel tempo): lo spostamento infinitesimo della spira

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

dove $\vec{v}$ è la velocità di spostamento (rigido)

Ciascuna carica subisce una forza di Lorentz

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

Ogni carica subisce un campo elettrico indotto

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

che tende a far girare le cariche. La forza elettromotrice nella spira è il lavoro prodotto sulla spira:

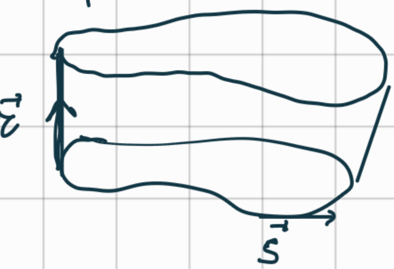
$$\mathcal{E}_i = \Gamma_\gamma(\vec{E}_i) = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \oint \vec{v}\times\vec{B}\, d\vec{s}$$

$$= \oint d\vec{s}\times\vec{v}\cdot\vec{B} = \oint d\vec{s}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{B}$$

$$= \frac{d}{dt}\oint_\gamma d\vec{s}\times d\vec{r}\cdot\vec{B}\ \boxed{=}$$

Lo spostamento individua un cilindro (storto). Osserviamo che il prodotto vettoriale $d\vec{s}\times d\vec{r}$ è ortogonale alla superficie laterale ed è un multiplo del versore normale, ma in particolare il coefficiente è l'elemento area!

17.2



$$d\Sigma_\ell \cdot \hat{u}_n = d\vec{s}\times d\vec{r}$$

elemento infinitesimo d'area laterale

Si avrà $\Sigma_\ell \cdot \hat{u}_n = \oint_\gamma d\vec{s}\times d\vec{r}$ dove γ è il bordo dell'area laterale/ di una base.

$$\boxed{=}\ \frac{d}{dt}\int_{\Sigma_\ell}\vec{B}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma_\ell$$

Abbiamo trovato che

$$\mathcal{E}_i = \frac{d}{dt}\Phi_{\Sigma_\ell}(\vec{B})$$

flusso tagliato: flusso sulla sup. laterale.

Definito

$$d\Phi_\Sigma = \lim \Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}) - \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B})$$ dove • Σ_1 è una superficie che

$$\frac{d}{dt} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\quad}{\Delta t}$$

finisce sul circuito prima dello spostamento

- Σ_2 è una superficie che finisce sul circuito dopo lo spostamento.

Poiché il cilindro è una sup. chiusa, si ha

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_\ell$$

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = 0$$

$$\Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}) - \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) + \Phi_{\Sigma_\ell}(\vec{B})$$

Da cui segue che

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\Phi_\Sigma(\vec{B})$$

dove Σ è la superficie che finisce sul circuito. ■

Per uno spostamento rigido la f.e.m. indotta è una conseguenza della forza di Lorentz; la stessa cosa per variazioni della forma o dell'angolo. Quello che NON è previsto è che la variazione temporale di $\vec{B}$ influenzi $\vec{E}_i$.

Riassumiamo la relazione tenendo conto di un campo magnetico cambiante

17.3

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\Phi_\Sigma(\vec{B})$$

Corollario possibile.

THM div.

$$\int_{\partial\Sigma_i} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Sigma} E_i \cdot d\vec{s} = -\int_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \hat{u}_n\, d\Sigma$$

THM ROTORE

$$\Rightarrow \int_\Sigma \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = -\int_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma$$

Perché la relazione è sempre uguale $\forall E, B$, vale a livello differenziale. Otteniamo dunque la (SECONDA) LEGGE DI MAXWELL

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

In realtà tutto ciò visto finora è conseguenza della legge, non il viceversa.

~ . ~

Ora, sapevamo che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \vec{A} \text{ t.c. } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Allora, dalla 2° legge di Maxwell

il vettore di He

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Allora se $\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0$ si ha

$$\vec{\nabla}\left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0$$

e quindi il campo elettrico è determinato non più solo da $\vec{\nabla} V$, ma da

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

AUTOFLUSSO E INDUTTANZA

Una spira che è attraversata da un campo magnetico tale che c'è una corrente elettrica indotta in realtà genera a sua volta un campo magnetico e quindi una corrente.

Una spira percorsa da corrente genera un campo magnetico, il quale modificandosi può modificare il flusso attraverso lo spira stessa e generare una corrente indotta.

Il campo magnetico generato dalla spira è

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

il flusso generato tramite la spira stessa da questo campo magnetico è detto AUTOFLUSSO e

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_\Sigma \oint_\gamma \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n}{r^2} \, d\Sigma$$

Si definisce allora l'INDUTTANZA

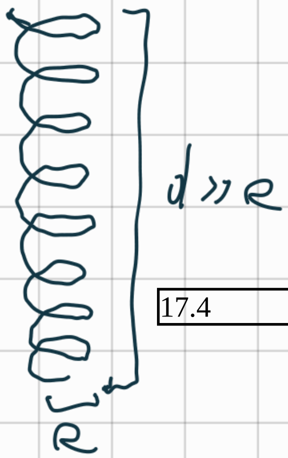
$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Sigma \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n}{r^2} \, d\Sigma}$$

che dipende solo dalle proprietà geometriche.

Allora l'autoflusso è dato da

$$\boxed{\Phi_\Sigma(\vec{B}) = L i}$$

ES: (SOLENOIDE MOLTO LUNGO)



17.4

Dato che il solenoide è molto lungo, possiamo escludere effetti di bordo come se fosse infinito. Il campo magnetico è

densità lineare di spire

$$B = \mu_0 i n$$

Allora

$= \pi R^2$ num. tot. di spire $= nd$

num. tot. di spire = nd

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \Sigma B \cdot N = \mu_0 i n^2 \Sigma d$$

L'induttanza è $L = \mu_0 n^2 \Sigma d$

UNITÀ DI MISURA:

HENRY

$$[L] = \frac{Wb}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s = H$$

L'ordine di grandezza è sempre limitato; si usano di solito: mH o μH

ESEMPIO: • SOLENOIDE RETTILINEO di: $n = 10^3$ spire/m, $\Sigma = 100\ cm^2$
si ha $L = 4\pi \cdot 10^{-3}\ H/m$

AUTO INDUZIONE

Ricordiamo che c'è una corrente elettrica indotta quando varia il flusso di $\vec{B}$

$$\mathcal{E}_i = \frac{-d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt}$$

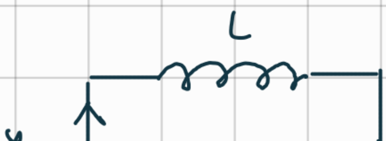
La stessa cosa succede per il campo magnetico generato da una corrente variabile

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

CIRCUITO RL

17.5



Quando si chiude, la corrente passa nel solenoide, generando una f.e.m. autoindotta

$$\mathcal{E}_i = -L\frac{di}{dt}$$

che si oppone a quella generata da $\mathcal{E}$.

La corrente parte lentamente: l'induttore funge da inerzia.
Ora, il potenziale ai capi del resistore è

$$V = \mathcal{E} + \mathcal{E}_i = Ri \Rightarrow \mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - Ri = L\frac{di}{dt}$$

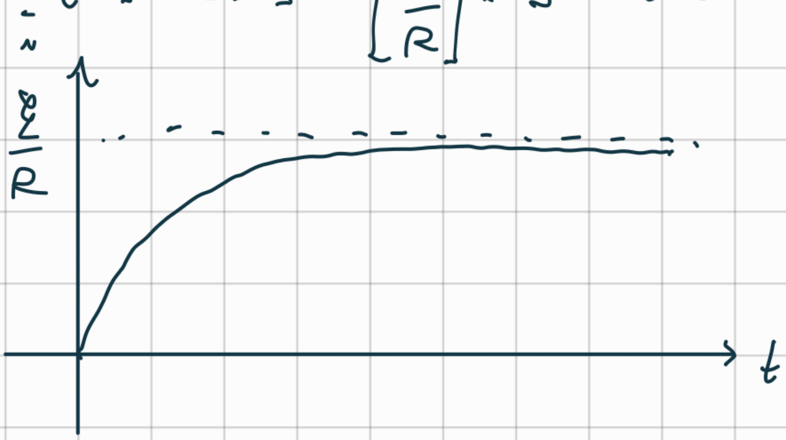
$$\Rightarrow \int_0^{i(t)} \frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\log\left(\frac{\mathcal{E} - Ri(t)}{\mathcal{E}}\right) = \frac{t}{L}$$

$$\mathcal{E} - Ri(t) = \mathcal{E}e^{-Rt/L}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\tau t}\right)}$$

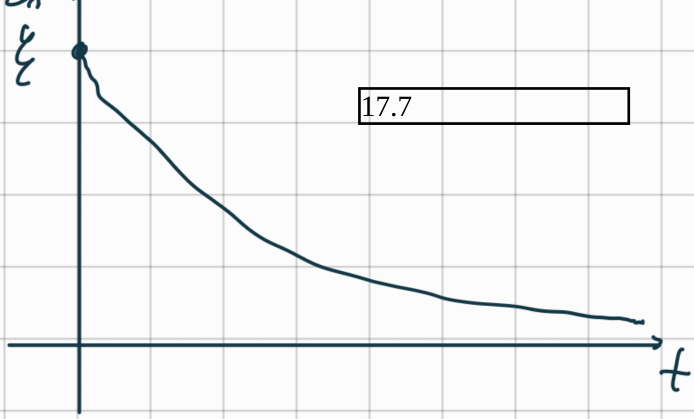
$[L] = \Omega s \quad \left[\frac{L}{R}\right] = s \quad$ dove $\tau = \frac{R}{L} \quad [\tau] = s^{-1}$



17.6

oss: $\mathcal{E}_i = -L\frac{di}{dt} = -L\frac{R}{LR}\mathcal{E}e^{-\frac{Rt}{L}} = -\mathcal{E}e^{-\frac{Rt}{L}}$

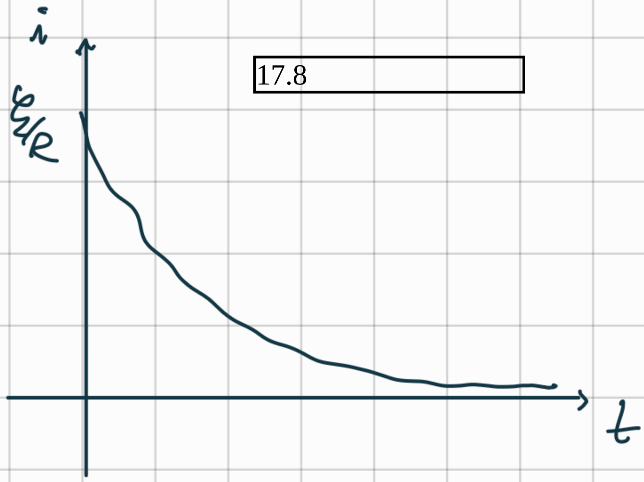
$\mathcal{E}_i$



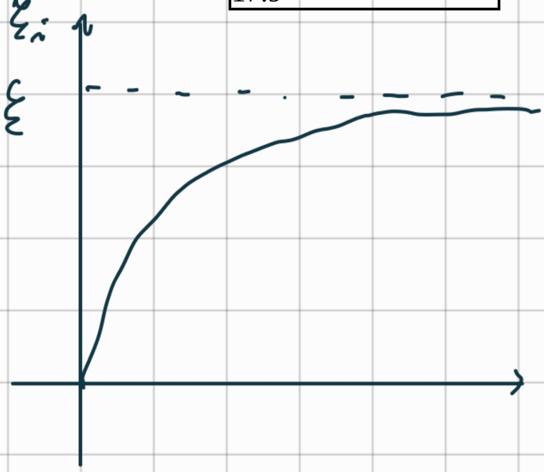
17.7

All'inizio $\mathcal{E}_i$ si oppone fortemente al passaggio di corrente elettrica, per poi passare più facilmente al crescere del tempo.

* Confronto con il circuito RC



17.8



17.9

Ora, ricordiamo che i condensatori immagazzinano energia

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

nel campo elettrico tra le piastre; si può definire quindi una densità di energia

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Si può generalizzare anche non coi condensatori:

$$U_E = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$$

Si può fare uno caso analogo con il circuito RL. Supponiamo che la potenza erogata dal generatore è

$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} i$$

mentre quella sviluppata dalla resistenza e quella assorbita dall'induttore sono

$$P_R = R i^2$$

$$P_L = \mathcal{E}_i i = -L i \frac{di}{dt}$$

Allora, se la d.d.p. ai capi del condensatore è

$$\mathcal{E} = R i + L \frac{di}{dt}$$

Si ha $\mathcal{E} i = R i^2 + L i \frac{di}{dt}$

$$P_{\mathcal{E}} = P_R + P_L$$

L'energia immagazzinata dall'induttore (solenoide)

$$U_L = \int_0^{+\infty} P_L \, dt = \int_0^{+\infty} L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^{+\infty} L i \, di = \frac{1}{2} L i_\infty^2$$

$$U_L = \frac{1}{2} L i_\infty^2 = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}$$

dove $i_\infty = \lim_{t \to +\infty} i(t)$ o, in termini fisici, la corrente a regime.

L'energia dell'induttore è immagazzinata nel campo magnetico generato

Es: Se l'induttore è un solenoide,

$$L = \mu_0 \Sigma\, n^2 d$$

$B = \mu_0 n i$

$$\rightarrow U_L = \frac{1}{2} \mu_0 \Sigma\, d\, n^2 i^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \underbrace{\Sigma\, d}_{\text{volume del solenoide}}$$

Per gli induttori, in generale. | Per i condensatori in generale

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$U_B = \int_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV$$

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

$$U_E = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$$

Se ci sono sia C, che L, allora si combinano.
Allora se ci sono sia il campo elettrico e magnetico si ha la densità di energia del campo elettromagnetico

$$u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$