

MASSIMO BERTOLOTTI

fatto di sangue

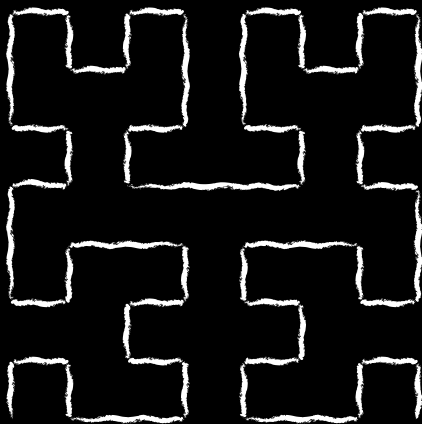
FRA DUE ANALISTI  
PER CAUSA DI UN INTEGRALE

si sospettano moventi misurabili



$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n|}$$

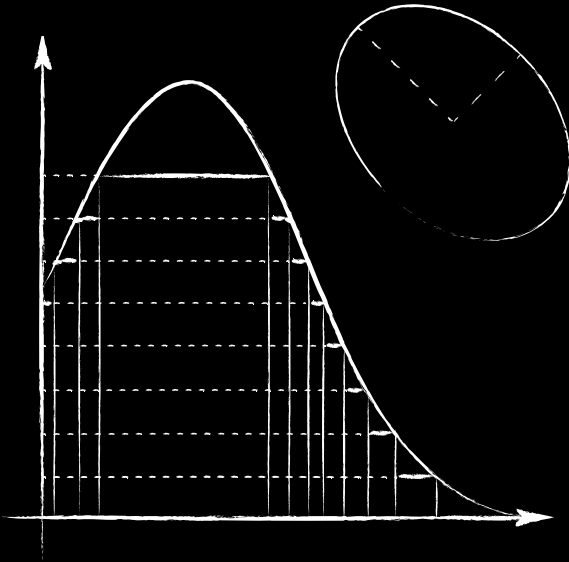
Manualozzo™ di Analisi Matematica 3



$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$





# I

## ELETTROSTATICA



# DALLA LEGGE DI COULOMB AL FORMALISMO DEI CAMPI VETTORIALI

---

*“Per ogni problema c’è una soluzione che è semplice, chiara... e sbagliata.”*

*HENRY LOUIS MENCKEN ad un suo studente che trovò come perimetro dell’ellisse  $\pi ab$ .*

**L**A MECCANICA ci descrive come funziona un sistema soggetto ad una certa *forza*. Ad oggi, siamo riusciti a ricondurre tutte le forze ad alcune **interazioni fondamentali**; in ordine di magnitudine decrescente:

- (Nucleare) Forte.
- Elettromagnetica.
- (Nucleare) Debole
- Gravitazionale

Wow, sono *davvero* poche! Dov’è la frizione, la forza elastica, le reazioni vincolari, le forze chimiche che legano le particelle, gli urti tra palle del biliardo? Che ci crediate o no, *tutte* queste forze sono elettromagnetiche. E le altre interazioni fondamentali che fine fanno?

Le **interazioni (nucleari) forti** tengono uniti i *quark* che costituiscono neutroni e protoni, nonché legano assieme protoni e neutroni nel *nucleo atomico*, ma agiscono su una scala così piccola che risultano essere completamente impercettibili - pur essendo centinaia di volte più forti delle forze elettromagnetiche!

Le **interazioni (nucleari) deboli**, che riguardano certi procedimenti di decadimenti nucleari, hanno un nome autoesplicativo: sono forze a microscopico raggio d’azione e sono più deboli delle forze elettromagnetiche.

Non parliamo poi della **interazione gravitazionale**: essa è terribilmente debole nonostante abbia un *range* d’azione infinito, e la notiamo solamente in presenza di grandi, *enormi* concentrazioni di massa - i pianeti e le stelle. Se al posto delle forze elettriche l’atomo fosse tenuto assieme da forze gravitazionali, un singolo atomo di idrogeno sarebbe più grande dell’intero universo osservabile.

Quindi, non solo le **forze elettromagnetiche** sono quelle dominanti nella vita di tutti i giorni (sono potenti e hanno un *range* d’azione infinito), ma sono anche le sole che *al momento* sono completamente spiegate da una teoria. Certo, c’è una teoria gravitazionale

classica e relativistica, ma non ne esiste una soddisfacente in campo quantistico; per le forze deboli c'è una teoria popolare, ma ostica, e per le forti si sta facendo strada la *cromodinamica*... eppure, nessuna di queste teorie può vantare una verifica sperimentale definitiva. La cosa curiosa è che tutte queste teorie sperimentali si rifanno al modello perfetto, da emulare, delle *leggi (classiche) dell'elettromagnetismo*.

Anche se le prime osservazioni sui fenomeni elettromagnetici sono attribuite al filosofo greco Talete nel VI secolo a.C., fu grazie alle innumerevoli scoperte di Franklin, Coulomb, Ampère, Faraday, Volta e tanti altri che **James Clerk Maxwell** impacchettò tutto questo bagaglio scientifico in quattro, stupende formule matematiche - che probabilmente avrete visto per la prima volta su una discutibile maglietta di un fan sfegatato della Fisica.

Prima di arrivare a formulare tutte le equazioni di Maxwell, tuttavia, ci conviene fare un tour guidato attraverso la storia di questa disciplina, costruendo passo per passo queste leggi facendo le stesse osservazioni dei più famosi scienziati che lavorarono sull'elettromagnetismo - chiaramente, viste con degli strumenti matematici moderni. In questo capitolo, dopo un'excursus storico dello studio dei fenomeni elettrostatici introdurremo la **legge di Coulomb**; la seconda parte sarà più prettamente matematica e tratterà del **formalismo dei campi vettoriali** - introducendo diversi strumenti particolarmente utili ai nostri scopi.

### 1.1 I PRIMI STUDI DELL'ELETTRICITÀ

Già, ma... che significa il termine "**elettromagnetismo**"? La sua etimologia permette di svelare molte informazioni su come stati osservati in natura questi fenomeni:

- "Elettro" e "elettricità" derivano da *electricus*, parola latina coniata nel 1600 da **William Gilbert** nel suo trattato *De Magnete*, derivata a sua volta dal termine *elektron*, "ambra" in greco: infatti, le popolazioni attorno al Mediterraneo sapevano che oggetti in ambra, se strofinati con il pelo di gatto o col vello di lana, erano in grado di attrarre oggetti leggeri come piume e pagliuzze.
- "Magnetismo" deriva da *magnētis lithos*, "pietra di Magnesia" in greco: sull'isola egea di Magnesia erano diffuse rocce di *magnetite*, un minerale ferroso che in certi casi è capace di attrarre piccoli pezzetti di ferro.

**Elettrizzazione per strofinio** Il già citato Gilbert fu il primo a dare un certo rigore allo studio di questi fenomeni. Sperimentando sistematicamente con vari materiali, egli descrisse gli effetti delle **azioni elettriche per strofinio** - anche noto come **effetto triboelettrico** - come segue:

- a) Due oggetti della *stessa sostanza*, dopo essere stati strofinati da un panno, si *respingono* se sono vicini l'un l'altro.
- b) Due oggetti di *sostanze diverse* possono *attrarsi* o *respingersi*, a seconda dei materiali presi; ad esempio, vetro e ambra si attraggono.
- c) Due oggetti che sono attratti separatamente da un terzo oggetto si respingeranno a vicenda.
- d) Un oggetto è attratto da un materiale e un'altro oggetto è respinto da quel materiale, allora i due oggetti si attraggono tra di loro.



Gilbert controllò tante combinazioni di materiali, ma non "pelo di gatto" e "polistirolo da imballaggio". Immagino non avesse un gatto per farlo.

Da queste osservazioni Gilbert concluse l'esistenza di due tipi diversi di elettrizzazione, attribuite a **cariche elettriche** differenti.

**DEFINIZIONE 1.1.1. - CARICA ELETTRICA POSITIVA E NEGATIVA .**

Convenzionalmente, si dice che:

- Corpi come il vetro acquisiscono carica elettrica **positiva**, indicata con il segno più (+).
- Corpi come l'ambra acquisiscono carica elettrica **negativa**, indicata con il segno meno (-).

Sintetizzando quanto detto:

- Cariche elettriche *dello stesso segno* (+/+, -/-) si **respingono**.
- Cariche elettriche *di segno opposto* (+/-) si **attraggono**.

Il buon vecchio Gilbert si accorse anche che, seppur esistevano materiali (ambra, vetro, ebanite, bachelite...) che venivano elettrizzati per strofinio, altri (metalli, il corpo umano...) non venivano proprio elettrizzati. I primi li chiamò **isolanti**, i secondi **conduttori**.

**La struttura della materia e i fenomeni elettrostatici** Gilbert scrisse per bene tutte queste osservazioni nel suo trattato *De Magnete*, scritto nel 1600: all'epoca non poteva spiegare *perché* succedeva ciò che aveva descritto, ma noi grazie alla conoscenza della *struttura microscopica della materia* possiamo farlo. Senza perderci in tanti dettagli, la materia è fatta di **atomi**, tutti costituiti da tre particelle: **protoni** *p*, **neutroni** *n* ed **elettroni** *e*, rispettivamente di massa

- $m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- $m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- $m_e = \frac{1}{1840} m_p = 9,1091 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Riprendendo la convenzione precedente, si vede che il protone ha carica *positiva*, mentre l'elettrone ha carica *negativa* e il neutrone non ha carica elettrica; ad oggi non è osservata alcuna carica elettrica più piccola di quella del protone o dell'elettrone - in altre parole, la carica elettrica è una grandezza **quantizzata**<sup>1</sup>. Indicheremo con  $-e$  la carica dell'elettrone e, in virtù della quantizzazione della carica elettrica, la chiameremo **carica elementare**, mentre con  $+e$  indicheremo la carica del protone.

Il **nucleo**, costituito da protoni e neutroni, sta saldamente assieme grazie all'interazione nucleare forte che sovrasta le azioni repulsive delle cariche positive, che tra l'altro rendono il nucleo *carico positivo*. Attorno al nucleo orbitano, attratte da forze elettriche, gli *elettroni*: queste particelle sono in numero pari al numero di protoni nel nucleo e, a differenza di essi, sono molto più liberi di muoversi nello spazio circostante il nucleo. Si osserva che l'atomo è, nel suo complesso, *eletttricamente neutro*, dato che la carica del protone e dell'elettrone è uguale in modulo e la carica complessiva. Questo è estremamente importante per la struttura della materia; se non ci fosse questa *cancellazione*<sup>2</sup> della carica, saremmo soggetti a forze estreme: una patata esploderebbe violentemente se ci fosse anche solo una cancellazione imperfetta dell'ordine di una parte su  $10^{10}$ .

Sostanze diverse hanno legami più o meno deboli tra il nucleo e gli elettroni, in particolari quelli periferici. Cosa succede, a livello microscopico, con l'elettrizzazione per strofinio? Il **contatto** tra i due corpi trasferisce *per mezzo meccanico* elettroni dello strato superficiale da un corpo all'altro, dal corpo in cui sono meno fortemente legati verso quello in cui lo sono di più.

<sup>1</sup>La quantizzazione della carica è evidente a livello atomico e subatomico, ma diventa inapprezzabile se la non riescono a misurare variazioni dell'ordine della carica elementare - sperimentalmente si è visto intorno per carica sopra i  $200e$ . Negli esperimenti normali di elettrostatica la carica è di fatto una quantità continua.

<sup>2</sup>Per cancellazione non intendiamo che le cariche si annichiliscono fisicamente, ma che i loro effetti si compensano, non producendo alcuna interazione "esterna".

- Negli **isolanti**, le cariche trasferite per strofinio rimangono *localizzate*. Gli isolanti **non** trasportano facilmente la carica.
- Nei **conduttori**, le cariche elettriche negative sono *libere di muoversi* e **non** rimangono localizzate. I conduttori trasportano facilmente la carica.

In altre parole, le forze elettriche sono una manifestazione fondamentale delle particelle atomiche (cariche) che costituiscono la materia, ma si manifestano a livello *macroscopico* quando viene disturbata la simmetria naturale tra cariche positive e negative presenti negli atomi. Possiamo, in particolare, enunciare il seguente principio.

**PRINCIPIO 1.1.1. - PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DELLA CARICA .**

Poiché la *carica totale* di un corpo è data dalla *somma algebrica* di tutte le cariche, in un sistema *eletticamente isolato* la carica totale rimane costante nel tempo, ossia si *conserva*.

**Induzione elettrostatica** L'effetto triboelettrico che abbiamo visto è un caso particolare di **elettizzazione per contatto**; tuttavia, si possono caricare corpi anche senza alcun contatto diretto, come accade con l'**induzione elettrostatica**

Avviciniamo ad un *conduttore*  $C$ , preso elettricamente scarico e sostenuto da un supporto isolante, un corpo carico  $D$  - ad esempio, carico positivamente. Il corpo carico esercita delle *forze elettriche* sulle cariche microscopiche presenti sul conduttore; gli *elettroni* nel conduttore sono liberi di muoversi sulla superficie e si dispongono nella zona di  $C$  *più vicina* al corpo carico, mentre la parte del conduttore più distante da  $D$  risulterà carica positivamente<sup>3</sup>. La carica complessiva del conduttore è, per conservazione della carica, sempre nulla, ma le cariche sono distribuite in modo non uniforme: convenzionalmente, pur essendo l'eccesso di cariche positive in una parte del conduttore dovuto al moto delle cariche negative, diremo che le cariche positive si sono spostate nella zona di  $C$  a maggior distanza da  $D$ .

Se collegassimo il conduttore  $C$  ad un conduttore  $T$  molto più esteso di  $C$ , ad esempio la Terra, di fatto si creerebbe un unico conduttore  $C + T$  praticamente infinito per i nostri scopi. In questo caso, le cariche positive si allontanerebbero molto da  $D$ ; se interrompessimo il collegamento del conduttore a  $T$  il conduttore  $C$  resta carico negativamente - basta allontanare  $D$  per ottenere  $C$  negativo con distribuzione uniforme di carica.

**Misura delle cariche elettriche: l'elettroscopio a foglie** Abbiamo detto che la carica elettrica è una grandezza quantizzata... ma non abbiamo ancora parlato di come definirla esattamente, né di come *misurarla*! Al momento, ne diamo una definizione operativa, tramite l'**elettroscopio a foglie**

Dato un contenitore isolante e trasparente si consideri un asta metallica che lo penetra in un foro in modo da rimanere bloccata. All'estremità inferiore, internamente al recipiente, sono appese due sottilissime foglioline metalliche - generalmente d'oro - liberi di ruotare attorno all'asse orizzontale dell'asta. Se l'asta metallica è scarica, le foglioline sono verticali per effetto della gravità.

Toccando l'asta con un corpo carico, essa si carica e parte della corrente posseduta dall'asta si dispone sulle foglioline. Poiché le foglioline sono cariche dello stesso segno, si respingono e divergono dalla verticale di un angolo  $\alpha$  che può opportunamente misurato con una scala graduata: abbiamo creato uno strumento in grado di rilevare la presenza

<sup>3</sup>Chiaramente, se il corpo  $D$  fosse carico negativamente accaderebbe l'opposto: gli elettroni in  $C$  sarebbero respinti per l'interazione elettrica e si disporrebbero lontani dal corpo carico, rendendo positiva la zona vicina a  $D$ .



di cariche elettriche. Possiamo allora dare la seguente definizione *operativa* di carica elettrica.

**DEFINIZIONE 1.1.2. - DEFINIZIONE OPERATIVA DI CARICA ELETTRICA .**

Se due corpi uguali, toccando l'asta di un elettroscopio a foglie inizialmente scarico, fanno ruotare le foglioline di uno stesso angolo  $\alpha$ , allora hanno la stessa carica  $q$ .

Potremmo fornire già in questa maniera un'opportuna unità di misura, ma non è particolarmente utile e non è compatibile con la filosofia di molti sistemi di unità di misura. Tuttavia, per dare una possibile definizione *non operativa*, dobbiamo quanto meno parlare dell'interazione elettrostatica.

## 1.2 LEGGE DI COULOMB

Corpi carichi si attraggono o si respingono, a qualunque distanza, a seconda della loro carica: più sono vicini e più sono carichi, maggiore è questa attrazione/repulsione. Questa descrizione qualitativa delle forze di natura elettrostatica era già nota da Gilbert, ma per averne una *quantitativa* dobbiamo aspettare quasi duecento anni. Nel 1785, il fisico francese **Charles Augustin de Coulomb** pubblicò la sua memoria *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de metal*, in cui stabilì, mediante l'uso di una bilancia di torsione analoga a quella di *Cavendish* per la misura delle forze gravitazionali, una legge matematica per la descrizione dell'interazione elettrostatica.

**DEFINIZIONE 1.2.1. - LEGGE DI COULOMB .**

Date due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$ , poste a distanza  $r$  nel vuoto, interagiscono con una forza  $F$  diretta secondo la loro congiungente data da

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.1)$$

**OSSERVAZIONI.**

- $\vec{F}$  è la forza che  $q_1$  esercita su  $q_2$ ; la forza che  $q_2$  esercita su  $q_1$  è  $-\vec{F}$ .
- $k$  è una costante di proporzionalità detta **costante di Coulomb** che dipende dalle unità di misura.
- $\hat{u}_r$  è il versore del vettore distanza  $\vec{r}$  dalla carica  $q_1$  alla carica  $q_2$ .
- $q_1 q_2$  è il prodotto delle due cariche: se hanno lo stesso segno, la forza è repulsiva perché  $\vec{F}$  ha lo stesso verso di  $\hat{u}_r$ , altrimenti se hanno segno opposto è attrattiva perché hanno versi discordi.

**Unità di misura della carica elettrica** Non abbiamo ancora dato per bene un'unità di misura della carica elettrica. Potremmo basarci proprio sulla legge di Coulomb e definirla in modo che  $k = 1$  e che la carica unitaria è tale che, se posta a distanza unitaria da un'altra carica unitaria, essa subisce una forza unitaria (come accade nel *sistema centimetro-grammo-secondo* o *c.g.s.*).

Nonostante alcuni evidenti vantaggi teorici nell'utilizzare il sistema c.g.s., noi utilizzeremo per ragioni anche soprattutto storiche, l'unità di misura della carica elettrica prevista dal **SI**, il **coulomb** (C).

Non è un'unità fondamentale, bensì è definito come  $A \cdot s$ , ossia come la carica che attraversa in un secondo un conduttore percorso dalla corrente di un ampere. Non sapendo

ancora che cosa sia la corrente elettrica, né tanto meno un'ampere, non approfondiremo qui la definizione.

#### UNITÀ DI MISURA.

**CARICA ELETTRICA:** coulomb (C) o ampere per secondi (A s).

**Dimensioni:**  $[q] = [I][s] = \text{IT}$ .

Sta di fatto che è una misura estremamente "sbagliata", quanto meno per i problemi che trattiamo. Ad esempio, la tipica carica da strofinamento è dell'ordine di  $10 \times 10^{-7} \text{ C}$  - dobbiamo impegnarci molto per fare un Coulomb! Generalmente utilizziamo dei suoi *sottomultipli*, ad esempio:

■ *millicoulomb*:  $1 \text{ mC} = 10^{-3} \text{ C}$ .

■ *microfarad*:  $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$ .

Nel **SI**, la costante  $k$  della legge di Coulomb viene posta a

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \quad (1.2)$$

dove  $\epsilon_0$  è detta **costante dielettrica del vuoto** e assume il valore

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2 \text{ m}^2}{\text{N}} \quad (1.3)$$

La legge di Coulomb 1.1 assume la forma

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.4)$$

**Legge di Coulomb e legge di gravitazione universale** Come si vede immediatamente, la legge di Coulomb è analoga - a livello di formula - alla **legge di gravitazione universale**:

$$\vec{\mathbf{F}} = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.5)$$

dove  $G_N$  è la **costante di gravitazione universale**.

$$G_N = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \quad (1.6)$$

Tuttavia, a livello di forze sono profondamente differenti, come il seguente esempio mette in evidenza.

**ESEMPIO.** La forza di Coulomb tra due cariche uguali per strofinio, poste a distanza di  $r = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$  è, in modulo

$$F = k \frac{q^2}{r^2} \simeq 9 \cdot 10^9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-14} \text{ N} \simeq 0,9 \text{ N}$$

La forza gravitazionale in condizioni simili, prese due masse  $m = 1 \text{ hg} = 10^{-1} \text{ kg}$  alla stessa distanza  $r$  di prima, è

$$F = G_N \frac{m^2}{r^2} \simeq 7 \cdot 10^{-17} \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} \text{ N} \simeq 7 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

La forza di attrazione gravitazionale è molto più debole della forza attrattiva elettrostatica!

**Principio di sovrapposizione per forze** Le forze elettriche agenti su una carica  $q_0$  dovute alle cariche circostanti si comportano come vettori; è immediato supporre che vige un **principio di sovrapposizione**.

**PRINCIPIO 1.2.1. - PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER FORZE ELETTROSTATICHE .**

La forza elettrostatica agente su una carica  $q_0$  da un sistema di cariche è data dalla somma vettoriale delle singole interazioni tra  $q_0$  e ciascuna carica del sistema.

### 1.3 FORMALISMO DEI CAMPI VETTORIALI

Il problema fondamentale che la teoria dell'elettromagnetismo vuole risolvere è il seguente: se ho delle cariche elettriche *qui*, magari muovendoli in giro, cosa succede a delle cariche *là*?

La trattazione di un problema simile con le sole forze, come si farebbe in un qualunque corso di Fisica I, non è necessariamente la più vantaggiosa: in particolare, quando le cariche cominciano a muoversi, le forze tra di loro cambiano perché cambiano le posizioni nel tempo... e dovremo anche tenere conto degli effetti di magneti sul moto delle cariche!

È necessario un cambio di punto di vista, dove le forze ci sono ancora, ma non consideriamo *soltanto* loro. La soluzione classica ottocentesca assume la forma di una **teoria di campo**. In estrema sintesi, lo spazio attorno ad una carica elettrica è permeata da campi elettrici e magnetici: una seconda carica, in presenza di questi campi, subisce una forza; i campi, in altre parole, trasmettono l'influenza di una carica sull'altra e sono i portatori dell'interazione elettromagnetica. I fenomeni elettromagnetici si modificano in base all'interazione tra i campi, le particelle in movimento e altro.

**DEFINIZIONE 1.3.1. - CAMPO VETTORIALE .**

Un **campo vettoriale**  $\vec{G}$  è una funzione

$$\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (G_x(x, y, z), G_y(x, y, z), G_z(x, y, z)) \quad (1.7)$$

dove  $(x, y, z)$  sono eventualmente funzioni del tempo.

**NOTAZIONE.** In notazione versoriale, un campo vettoriale è

$$\vec{G}(x, y, z) = G_x \hat{u}_x + G_y \hat{u}_y + G_z \hat{u}_z \quad (1.8)$$

**OSSERVAZIONE.** Con  $\vec{E}$  indichiamo il **campo elettrico**, mentre indichiamo con  $\vec{B}$  il **campo magnetico**.

**Linee di campo** Potremmo rappresentare il campo disegnando ad ogni punto di  $\mathbb{R}^3$  il vettore ad esso associato da  $\vec{G}$ .

In alternativa, possiamo disegnare delle curve dette **linee di campo**.

**DEFINIZIONE 1.3.2. - LINEA DI CAMPO .**

Una linea di campo di  $\vec{G}$  è una curva

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \vec{r}(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

tale per cui in ogni suo punto il vettore tangente alla curva è il vettore dato da  $\vec{G}$ :

$$\dot{\gamma}(t) = \vec{G}(\gamma(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

In generale, le linee di campo sono soluzioni  $\vec{r} = (x, y(x), z(x))$  del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{G_y}{G_x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{G_z}{G_x} \end{cases} \quad (1.11)$$

#### 1.4 CAMPO ELETTROSTATICO

Un campo vettoriale è quindi una mappa che a punti di  $\mathbb{R}^3$  associa vettori tridimensionali. In questo formalismo, la forza di Coulomb si può vedere come il vettore in un certo punto di un campo vettoriale detto **campo elettrostatico**.

##### DEFINIZIONE 1.4.1. - CAMPO ELETTROSTATICO.

Il **campo elettrostatico** generato da un sistema di cariche  $q_i$  ferme associa ad ogni punto dello spazio una forza pari alla forza elettrica che agisce su una **carica di prova**  $q_0$  positiva posta in quel punto, divisa per la carica stessa:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.12)$$

dove  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$  e  $\hat{u}_i = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ .

**Unità di misura** Nel SI l'unità di misura del campo elettrico, essendo il rapporto tra una forza e una carica, è il **newton su coulomb** ( $\frac{N}{C}$ ). Più avanti vedremo un'altra unità di misura usata maggiormente nelle applicazioni pratiche.

##### UNITÀ DI MISURA.

**CAMPO ELETTRICO:** newton su Coulomb ( $\frac{N}{C}$ ).

**Dimensioni:**  $[E] = \frac{[F]}{[q]} = LMT^{-3}I^{-1}$ .

**Campo elettrostatico e forza di Coulomb** Si noti che dalla definizione segue ovviamente che la forza che  $q_0$  subisce si può esprimere in funzione del campo elettrostatico da

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (1.13)$$

Nella 1.12 abbiamo fatto uso di un **principio di sovrapposizione** per campi vettoriali.

**PRINCIPIO 1.4.1. - PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER CAMPI ELETTROSTATICI .**

Il campo elettrico generato da un sistema di cariche è data dalla somma vettoriale dei campi elettrici generati da ciascuna carica del sistema.

Preso il caso di una singola carica  $Q$  posta nell'origine, il campo elettrico generato da  $Q$  è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

**ESEMPIO - LINEE DI CAMPO DELLA FORZA DI COULOMB .**

Data una carica  $Q$  posta nell'origine del nostro sistema di riferimento, il campo elettrico di Coulomb nel piano è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x, y)$$

Posto

$$\begin{aligned} dx &= \dot{x}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ dy &= \dot{y}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Da cui otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{x}{y} \\ \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} &= \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} \Rightarrow \log \frac{x}{x_0} = \log \frac{y}{y_0} \Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} x \end{aligned}$$

Dalle condizioni al contorno  $(0, 0)$  e  $(x_0, y_0)$  si ricavano le linee di forza del campo coulombiano: è un fascio di rette passanti per l'origine del sistema di riferimento.

**OSSERVAZIONE.** Notiamo che la forza di Coulomb esercitata da una singola carica  $Q$  posta nell'origine presenta un'evidente simmetria radiale; la stessa definizione 1.1 è già di fatto fornita in coordinate sferiche! Allora, il campo elettrostatico in coordinate sferiche è dato da

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r$$

ossia coincide con la componente radiale, dato che  $E_\varphi = E_\theta = 0$ .

**1.5 DIPOLO ELETTRICO**

Consideriamo due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$ , rispettivamente fisse in  $\vec{r}_1 = (0, 0, z_0)$  e  $\vec{r}_2 = (0, 0, -z_0)$ . I campi elettrici generati dalle singole cariche sono, in un generico punto  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \\ \vec{E}_2(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \end{aligned}$$

Il campo elettrico complessivo è dato da

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right) \quad (1.14)$$

Dato che

$$\begin{cases} \vec{r} - \vec{r}_1 = (x, y, z - z_0) \\ \vec{r} - \vec{r}_2 = (x, y, z + z_0) \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \\ E_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \\ E_z(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{z - z_0}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{z_0}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Se consideriamo  $q_1$  e  $q_2$  di carica uguale a  $q$  e di segno opposto (per esempio,  $q_1 = q$  e  $q_2 = -q$ ) abbiamo a che fare con il sistema detto **dipolo elettrico**.

**Momento di dipolo elettrico** Al dipolo possiamo associare il **momento di dipolo elettrico**.

**DEFINIZIONE 1.5.1. - MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO .**

Il **momento di dipolo elettrico** è una misura della separazione di cariche positive e negative in un sistema. In altre parole, misura la *polarità* di un sistema elettrostatico.

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (1.15)$$

dove  $\vec{d}$  è il vettore spostamento dalla carica negativa alla carica positiva-

Nel nostro caso, il modulo del momento di dipolo è  $p = 2qz_0$ .

**DIGRESSIONE.** Lo studio del dipolo elettrico è di particolare rilievo: ad esso sono riconducibili le interazioni elettrostatiche più semplici a cui sono soggetti i sistemi *microscopici elettricamente neutri*, come atomi e molecole non ionizzate.

Un esempio di ciò, anche se poco più complesso, è quello della molecola dell'acqua: è detta *polare* in quanto gli elettroni condivisi sono distribuiti in modo non uniforme; c'è una concentrazione di carica negativa nel mezzo, presso l'atomo d'ossigeno, mentre agli estremi è positiva.

Vedremo come il momento di dipolo ha particolare rilievo soprattutto quando la distanza tra le cariche è così piccola che non è facilmente misurabile, oppure quando parleremo di dielettrici.

**Studio del campo di dipolo** Vogliamo descrivere il campo elettrostatico generato tramite vettori e tramite le linee di campo.

**OSSERVAZIONE.** Il sistema ha evidente natura *cilindrica*: ci basterebbe studiare il comportamento su un piano passante per l'asse  $z$  - ad esempio  $y = 0$ ; ciò che succede nello

spazio si può capire con un'opportuna rotazione di tale piano.

- Consideriamo il piano  $z = 0$ , ortogonale al dipolo e “a metà strada” tra le due cariche. Chiaramente,  $E_x = E_y = 0$ , dato che i denominatori sono uguali e i numeratori uguali, ma di segno opposto. Invece, si ha

$$E_z = \frac{-2qz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

- Consideriamo ora il piano  $z = z_0$  e  $y = 0$ . Si ha

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{xq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x|^3} - \frac{1}{(x^2 + 4z_0^2)^{3/2}} \right) \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{-2qz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + 4z_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Analizzando ulteriori casi si denotano, per il dipolo elettrico, le linee di campo come in figura.

**OSSERVAZIONE.** Dove il campo elettrico è *intenso*, la rappresentazione delle linee di campo è più densa, mentre si fa più rada dove il campo è *meno intenso*.

Se considerassimo  $q_1 = q_2 = q$ , le linee di campo sarebbero come quelle nella seguente figura.

**OSSERVAZIONE.** Dalle formule di dipolo, si vede che  $\vec{E}$  è l'opposto del gradiente di un opportuno *potenziale*<sup>a</sup>  $V$ :

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right) \quad (1.16)$$

Vedremo che questo *non* è un caso: il potenziale elettrostatico è *sempre* un campo *conservativo*.

<sup>a</sup>Nelle “XXX”, a pagina 111 è possibile trovare la definizione di gradiente e altri operatori differenziali.

**Campo di dipolo lontano** Cosa succede alle forze elettrostatiche e al campo elettrostatico se lo si osserva a *debita distanza* dal dipolo? Se siamo molto lontani dal sistema, diciamo a distanza  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = z_0$ , non ci sono molte distinzioni pratiche fra due cariche distinte, opposte e distanti e considerare due cariche distinte, opposte ma *coincidenti*: di fatto, un dipolo da lontano appare come un *dipolo puntiforme* posto nell'origine. Seppur il problema del dipolo sia normalmente a simmetria cilindrica, è evidente che conviene trattare l'approssimazione a grandi distanze con le coordinate sferiche. Si ricordi dalla definizione delle coordinate sferiche che, denotato  $\theta$  come l'angolo polare tra l'asse  $z$  (positivo) e  $\vec{r}$ , si ha  $z = r \cos \theta$ . Allora

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \left( x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 \right)^{1/2} = \left( \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 + z_0^2}_{=r^2} - 2z_0z \right)^{1/2} = \left( r^2 + z_0^2 - 2z_0r \cos \theta \right)^{1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_2| = \left( x^2 + y^2 + (z + z_0)^2 \right)^{1/2} = \left( \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=r^2} + z_0^2 + 2z_0z \right)^{1/2} = \left( r^2 + z_0^2 + 2z_0r \cos \theta \right)^{1/2}$$

Il potenziale è

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( (r^2 + z_0^2 - 2z_0r \cos \theta)^{-1/2} - (r^2 + z_0^2 + 2z_0r \cos \theta)^{-1/2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} - \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} + \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \right) \equiv \end{aligned}$$

Poiché  $r \gg z_0$ , si può provare sviluppare in serie di Taylor la radice.

**RICORDIAMO...** Lo sviluppo in serie di Taylor della potenza alla  $\alpha$  del binomio  $1 + x$  è

$$(1 + a)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} a^k \quad (1.17)$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; l'uguaglianza vale solo  $\forall a \in (-1, 1)$ .

Possiamo limitarci allo sviluppo al primo ordine: posto  $a = \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r} < 1$ , si ha

$$\left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right) = 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} \mp \frac{z_0 \cos \theta}{r} + o(a^2)$$

Il potenziale diventa

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} - \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} + \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} + \frac{z_0 \cos \theta}{r} - \left( 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} - \frac{z_0 \cos \theta}{r} \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \\ V(r, \theta, \varphi) &= \frac{q2z_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.18) \end{aligned}$$

L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento  $\vec{p}$  e non  $q$  e  $z_0$  separatamente: misurando il potenziale potremo ricavare solo informazioni su  $\vec{p}$ , ma non sulla costituzione del sistema!

**ESEMPIO.** Un dipolo costituito da due cariche  $2q$  e  $-2q$  e distanza dall'origine  $z_0/2$  hanno momento di dipolo uguale a quello appena studiato e pertanto anche stesso potenziale e campo elettrico.

Calcoliamo ora il campo elettrostatico usando il gradiente espresso in coordinate sferiche:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{u}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{u}_\varphi = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{u}_\theta \quad (1.19)$$



**OSSERVAZIONE.** Sommando il contributo di più cariche uniformi il potenziale (e quindi il campo elettrico) può dipendere da relazioni differenti da  $1/r$ .

**Metodi alternativi al campo di dipolo lontano** Ci sono altri modi equivalenti per ottenere il potenziale di cui sopra. Uno di questi passa tramite il teorema del coseno.

**RICORDIAMO...** Dati un triangolo di angoli  $\alpha, \beta, \gamma$ , rispettivamente opposti ai lati  $a, b, c$ , vale per il **teorema dei coseni**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (1.20)$$

La distanza di  $\vec{r}$  si può

## 1.6 DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

Nella pratica difficilmente avremo a che fare con una, due o qualche carica, bensì di un numero *enorme* di cariche puntiformi. Chiaramente, trattare tutte le cariche una per una e vedere le interazioni con le altre non è benché minimamente consigliato: per fare un esempio, un  $\text{mm}^3$  di rame contiene circa  $2,5 \cdot 10^{21}$  elettroni.

Per ovviare a questa difficoltà si assume che le cariche siano così tante che si abbia un *continuum* di cariche; introduciamo dunque il concetto di **distribuzione continua di carica**, caratterizzata da una **densità di carica**.

### DEFINIZIONE 1.6.1. - DENSITÀ DI CARICA VOLUMICA .

Considerato un oggetto di volume  $V$  carico tale che nell'elemento di volume  $dV(x, y, z) = dxdydz$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica volumica** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \rho(x, y, z)dV \quad (1.21)$$

### UNITÀ DI MISURA.

**DENSITÀ DI CARICA VOLUMICA:** coulomb su metro cubo  $\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^3}\right)$ .

**Dimensioni:**  $[\rho] = \frac{[Q]}{[V]} = \text{ITL}^{-3}$ .

Essa funziona in modo analogo alla densità di massa volumica; la carica totale sull'oggetto si otterrà integrando sul volume la relazione precedente:

$$q_{\text{tot}} = \int_V \rho(x, y, z)dV \quad (1.22)$$

Il campo elettrico generato dall'oggetto, interno o esterno al corpo che sia, si ottiene come semplice generalizzazione della 1.12:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (1.23)$$

dove  $\vec{r} = (x, y, z)$  è il punto nello spazio in cui misurare il campo elettrico,  $\vec{r}' = (x', y', z')$  è un punto del volume  $V$  e  $dV = dx'dy'dz'$ .

Capita spesso che cariche sorgenti, anziché essere poste in una regione spaziale tridimensionale, occupino invece una superficie. In questi casi conviene introdurre la **densità superficiale**.

**DEFINIZIONE 1.6.2. - DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE .**

Considerato una superficie  $\sigma$  carica tale che sull'elemento d'area  $d\Sigma(x, y, z)$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica superficiale** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \sigma(x, y, z)d\Sigma \quad (1.24)$$

**UNITÀ DI MISURA.**

**DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE:** coulomb su metro quadro  $\left(\frac{C}{m^2}\right)$ .

**Dimensioni:**  $[\sigma] = \frac{[Q]}{[A]} = \text{ITL}^{-2}$ .

La carica totale e il campo elettrico sono, rispettivamente,

$$q_{tot} = \int_{\Sigma} \sigma(x, y, z)d\Sigma \quad (1.25)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Sigma \quad (1.26)$$

Analogamente, si può fare anche per il caso di una linea, introducendo la **densità lineare**.

**DEFINIZIONE 1.6.3. - DENSITÀ DI CARICA LINEARE .**

Considerato una linea  $\sigma$  carica tale che sull'elemento di linea  $d\ell$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica lineare** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \lambda(x, y, z)d\ell \quad (1.27)$$

**UNITÀ DI MISURA.**

**DENSITÀ DI CARICA LINEARE:** coulomb su metro  $\left(\frac{C}{m}\right)$ .

**Dimensioni:**  $[\lambda] = \frac{[Q]}{[\ell]} = \text{ITL}^{-1}$ .

La carica totale e il campo elettrico sono, rispettivamente,

$$q_{tot} = \int_{\ell} \lambda(x, y, z)d\ell \quad (1.28)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \lambda(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell \quad (1.29)$$

**OSSERVAZIONE.** Può capire di avere una densità di carica *non* nulla, ma carica totale nulla.

**Filo carico rettilineo (infinito)** Si consideri un filo rettilineo di lunghezza  $L$  con densità lineare costante  $\lambda$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che il filo carico sia lungo l'asse  $x$ . Si ha

$$q = \int_{\ell} \lambda(x', y', z')d\ell = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} dx' = \lambda L \implies \lambda = \frac{q}{L}$$

Più che concentrarci sulla carica del filo, tuttavia, ci interessa studiare il campo elettrostatico. Per il sistema di riferimento scelto,  $\vec{r}' = (x', 0, 0)$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' \quad (1.30)$$

In componenti cartesiane:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{x-x'}{((x'-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx' \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y}{((x'-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx' \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{z}{((x'-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx' \end{cases}$$

Si verifica nuovamente che  $\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}V$ , dove

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+y^2+z^2}} dx' \quad (1.31)$$

Risolvendo l'integrale<sup>4</sup> troviamo

$$V = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}+x-\frac{L}{2}}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}-x+\frac{L}{2}} \frac{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}+x+\frac{L}{2}}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}-x-\frac{L}{2}} \right) \quad (1.32)$$

e il campo in componenti cartesiane diventa:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}} \right) \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{y^2+z^2} \left( \frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}} \right) \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{y^2+z^2} \left( \frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2+z^2}} \right) \end{cases}$$

Il sistema si studia però in modo più semplice sfruttando la simmetria cilindrica e utilizzando, per l'appunto, le coordinate cilindriche, posto l'asse  $x$  come asse relativo all'altezza:

$$\begin{cases} x = x \\ y = R \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

Il potenziale diventa

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+R^2}} dx' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+R^2}+\frac{L}{2}-x}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+R^2}-\frac{L}{2}-x} \right) \quad (1.33)$$

<sup>4</sup>Calcolarlo in questo modo non lo consigliamo neanche ai peggiori nemici del Manualozzo™. Per chi volesse comunque provarlo a fare, nelle "XXX", a pagina ?? è possibile trovare lo sviluppo del calcolo.

e

$$\begin{cases} E_R(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2 - x + \frac{L}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2 - x - \frac{L}{2}}} \right) \\ E_\theta(x, y, z) = 0 \\ E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + R^2}} \right) \end{cases}$$

Supponiamo ora che il filo sia infinitamente lungo, ossia  $L \rightarrow +\infty$ ; una primissima osservazione ci dice che, per avere  $\lambda$  costante anche  $q$  deve tendere a  $+\infty$ . Poiché

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(x \pm \frac{L}{2}\right)^2 + R^2} = \lim_{L \rightarrow +\infty} L = +\infty$$

Segue che

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow +\infty} E_x = 0 \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_y = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{L} - \frac{x - \frac{L}{2}}{L} \right) = \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_z = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{L} - \frac{x - \frac{L}{2}}{L} \right) = \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \end{cases}$$

In coordinate cilindriche, poiché

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2} &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \sqrt{1 + \frac{R^2}{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}} = \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \left( 1 + \frac{R^2}{2\left(x - \frac{L}{2}\right)^2} \right) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \end{aligned}$$

si ha, facendo calcoli lunghi e noiosi, a:

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow +\infty} E_R = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{L} \left( \frac{1}{\left|x - \frac{L}{2}\right| - x + \frac{L}{2}} - \frac{1}{\left|x - \frac{L}{2} - x\right| - \frac{L}{2}} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon R} \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_\theta = 0 \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_x = 0 \end{cases}$$

Il campo in coordinate cilindriche risulta

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{\mathbf{u}}_R \quad (1.34)$$

**OSSERVAZIONE.** Avremmo potuto vedere che il campo dipendeva soltanto dalla componente radiale direttamente facendo un'analisi dimensionale. Infatti, poiché

$$\lambda = \frac{q}{L} \implies [\lambda] = \frac{[C]}{[L]} = \frac{C}{m},$$

il campo elettrico ha dimensioni

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \mathcal{K} \frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \implies [E] = \frac{[\lambda]}{[\epsilon_0]} \frac{1}{[L]}$$

dove  $\mathcal{K}$  è una costante numerica e non influisce sulla dimensione. L'unica componente che si deve considerare "libera", perché non è vincolata dalle condizioni del sistema, è una lunghezza: nel nostro caso, andando per intuizione fisica sulla base di simmetrie presenti, la distanza assiale  $R$ .

**Superficie carica infinita** Si consideri una superficie piana  $\Sigma$  con densità superficiale costante  $\sigma$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che la superficie coincida con il piano  $x = 0$ . Si ha

$$q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma = \sigma \int_{\Sigma} d\Sigma = \sigma A \implies \sigma = \frac{q}{A}$$

dove  $A$  è l'area della superficie. Chiaramente, se la superficie è tale che  $A \rightarrow +\infty$ , allora anche  $q \rightarrow +\infty$ .

Più che concentrarci sulla carica del filo, tuttavia, ci interessa studiare il campo elettrostatico. Per il sistema di riferimento scelto,  $\vec{r}' = (0, y', z')$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Sigma \quad (1.35)$$

Poiché stiamo considerando il piano  $xy$ , la parametrizzazione della superficie è

$$\vec{s} = y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \quad (1.36)$$

Pertanto, l'elemento di superficie è

$$d\Sigma = \left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} \right\| dy dz = \|\hat{u}_x\| dy dz = dy dz$$

Si ha, in componenti cartesiane:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma x}{(x^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} dy' dz' \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(y - y')}{(x^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} dy' dz' \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(z - z')}{(x^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} dy' dz' \end{cases}$$

**OSSERVAZIONE.** Poiché il campo è uniforme, spostandosi parallelamente al piano non dovrebbe essere discernibile alcuna differenza, ossia non ci devono essere componenti particolari in alcuna; in altre parole, essendo il sistema invariante per traslazioni, il campo elettrostatico dovrà essere *ortogonale* alla superficie.

Si vede esattamente quanto ipotizzato. Infatti, operando un cambio di variabile

$$\begin{cases} u = y' - y \\ v = z' - z \end{cases}$$

si ricava che

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dudv}{(x^2+u^2+v^2)^{3/2}} dudv \\ E_y(x, y, z) = 0 \\ E_z(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Operando un ulteriore cambio di variabile, questa volta alle coordinate polari

$$\begin{cases} u = R \cos \theta \\ v = R \sin \theta \end{cases}$$

ricordando che l'elemento d'area diventa  $dydz = R dR d\theta$ , si ha

$$E_x(x, y, z) = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{R dR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_0^\infty = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

In sintesi, il campo elettrico generato da una superficie piana infinita è

$$\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \hat{u}_x \quad (1.37)$$

**OSSERVAZIONE.** In realtà avremmo dovuto aspettarci che il campo non dipendesse dalla distanza  $x$ . Dalla formula del campo elettrico di Coulomb sappiamo che

$$[\epsilon E] = \frac{N}{C}$$

Siccome  $\sigma$  è una densità superficiale, la sua unità di misura è già

$$[\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

si deve avere

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A$$

con  $A$  adimensionale... e in effetti nel nostro caso  $A = \frac{1}{2}$ .

**Sfera uniformemente carica** Si consideri una palla sferica di raggio  $R$  con densità volumica costante  $\rho$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'origine coincida con il centro della sfera. Si ha

$$q = \int_V \rho(x', y', z') dV = \rho \int_V dV = \rho V_s = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad (1.38)$$

In questo caso, studiare il campo elettrico esterno ed interno alla sfera per un punto generico diventa particolarmente laborioso; tuttavia, vedremo una legge fisica che ci permetterà di semplificare la trattazione di questo problema. Qui ci limiteremo a considerare il campo elettrostatico agente su un punto degli assi, ad esempio  $\vec{r} = (x, 0, 0)$ .

Notiamo che l'evidente simmetria radiale del problema ci porta a concludere che le componenti  $y$  e  $z$  del campo siano nulle, ossia

$$\begin{cases} E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{x - x'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y')^2 + (z')^2}} dx' dy' dz' \\ E_y(x, 0, 0) = 0 \\ E_z(x, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

Trattando di una sfera, ci conviene passare nelle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

ricordando che l'elemento di volume diventa  $dV = dx' dy' dz' = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$ . L'argomento nella radice al denominatore diventa

$$(x' - x)^2 + (y')^2 + (z')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - 2xx' + x^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta.$$

e il numeratore è invece

$$x - x' = x - r \cos \theta$$

Da ciò

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \int_0^2 \pi d\theta \frac{x - r \cos \theta}{(r^2 - 2rx \cos \theta + x^2)^{3/2}} r^2 \cos \theta = \\ &= \frac{\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{x - r \cos \theta}{(r^2 - 2rx \cos \theta + x^2)^{3/2}} r^2 \sin \theta d\theta \quad \square \end{aligned}$$

Cambiamo la variabile  $\theta$  con  $y = \cos \theta$  (a cui è associato  $dy = -\sin \theta d\theta$ ), ottenendo

$$\square \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{x - y}{(x^2 - 2rxy + r^2)^{3/2}} r^2$$

Non è immediato, ma si può trovare che anche in questo caso specifico  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , dove

$$V(x, 0, 0) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rxy + x^2}} \quad \square$$

Svolgendo l'integrale rispetto alla variabile  $t$ , si vede che

$$\begin{aligned} \square \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rxy + x^2}} &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \left[ -\frac{r}{x} \sqrt{r^2 + x^2 - 2rxy} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \left( -\frac{r}{x} |r - x| + \frac{r}{x} |r + x| \right) \end{aligned}$$

A questo punto distinguiamo il caso di un punto esterno alla sfera ( $x > R$ ) o di uno interno ad essa ( $x < R$ ).

**Il caso esterno:**  $x > R$

$$E_x(x, 0, 0) = -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \frac{2r^2}{x} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{2}{3} R^3 \partial_x \frac{1}{x} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{x^2}$$

Ricordando che  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , si ha

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \quad (1.39)$$

**Il caso interno:**  $x < R$

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \frac{r}{x} (r + x - |r - x|) = \\ &= -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[ \int_0^x dr \frac{r}{x} (r + x - x + r) + \int_x^R dr \frac{r}{x} (r + x - r + x) \right] = \\ &= -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left( \frac{2}{3} x^2 + R^2 - x \right) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \partial_x \left( R^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Ricordando che  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , si ha

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (1.40)$$

Il grafico del campo elettrostatico, al variare di  $x > 0$ , è il seguente:



# IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E LA LEGGE DI GAUSS

*“La situazione si complica. Ora, ce ne sono due di loro!”*

*NUTE GUNRAY, scoprendo la convergenza puntuale dopo quella uniforme.*

**P**<sup>ER</sup>

## 2.1 FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

### DEFINIZIONE 2.1.1. - FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE .

Il **flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata**  $\Sigma$ , parametrizzata da una funzione  $\vec{r}(u, v)$ , è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv \quad (2.1)$$

**INTUITIVAMENTE...** Se descriviamo la corrente di un fluido come l'acqua con un campo vettoriale  $\vec{F}$ , il flusso di  $\vec{F}$  rappresenta *quanto fluido* passa *attraverso* una certa superficie per unità di tempo (anche se quest'ultima viene spesso sottointesa).

Con questa interpretazione euristica si può capire anche perché l'integrale presenta nella definizione un *prodotto scalare*: se l'acqua scorre perpendicolarmente alla superficie, molta acqua passerà e il flusso sarà dunque grande; al contrario, se il fluido scorre parallelamente alla superficie l'acqua non l'attraverserà mai e quindi il flusso è nullo. In altre parole, ciò che influisce sul flusso è la componente del flusso perpendicolare alla superficie!

Matematicamente parlando, il flusso non è altro che un tipo di integrale superficiale di un campo vettoriale.

Come abbiamo detto, la superficie deve essere **orientabile**: detto in una maniera suggestiva, intuitiva ma non formale come farebbero i fisici, una superficie con due *facce*

distinte e due orientazioni possibili che corrispondono alla scelta di un *campo normale* che punta sempre dalla parte di una delle facce.

In particolare, la superficie deve essere effettivamente orientata, ossia si deve scegliere uno dei campi normali in modo da definire quando il flusso è positivo e quando è negativo. Generalmente, per convenzione si impone che il vettore normale alla superficie è orientato verso l'esterno: quando la componente perpendicolare del campo vettoriale  $\vec{E}$  e il vettore normale saranno *concordi*, cioè quando  $\vec{E}$  è *uscente* dalla superficie, si ha un flusso *positivo*; se il campo  $\vec{E}$  è *entrante* la superficie, allora si ha un flusso *negativo*.

**OSSERVAZIONE.** Data una superficie chiusa  $\Sigma$ , tracciamo una curva chiusa  $\gamma$  su di essa; possiamo scindere  $\Sigma$  in due sottosuperfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  che hanno in comune una superficie  $\Sigma_{1,2}$  delimitata da  $\gamma$ . Il flusso per linearità di scinde in

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2}$$

In realtà, il flusso non è influenzato da quale sia la superficie  $\Sigma_{1,2}$ : infatti, per uno dei sottoflussi il contributo dato da  $\Sigma_{1,2}$  sarà negativo perché il campo è entrante, ma per l'altro sottoflusso sarà positivo perché il campo è uscente.

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2} = \Phi_{\Sigma_1 - \Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_2 - \Sigma_{1,2}} - \Phi_{\Sigma_{1,2}} = \Phi_{\Sigma_1 - \Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_2 - \Sigma_{1,2}}$$

## 2.2 LEGGE DI GAUSS

### TEOREMA 2.2.1. - LEGGE DI GAUSS.

Il flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$  attraverso una superficie **chiusa** è uguale alla somma algebrica (o nel caso di una distribuzione continua, dell'integrale) delle cariche contenute all'interno della superficie, comunque siano distribuite, divisa per  $\epsilon_0$ .

■ **Caso discreto:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{(\sum_i q_i)_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

■ **Caso continuo:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) dV \quad \text{tale che } \partial V = \Sigma \quad (2.3)$$

Lo dimostreremo per una *singola* carica contenuta nella superficie - dato che il caso per molteplici cariche e per una distribuzione continua seguono praticamente immediatamente - ma prima di farlo in modo formale, vediamo una derivazione più "fisica".

**Angolo solido** Per far ciò, ci servirà la nozione di *angolo solido*.

### DEFINIZIONE 2.2.1. - ANGOLO SOLIDO.

L'**angolo solido** è una generalizzazione a tre dimensioni dell'angolo piano e dà una misura della parte di spazio compresa entro un fascio di semirette uscenti intorno ad un punto  $P$ . In termini matematici, esso è definito come l'area sulla sfera unitaria intorno a  $P$  individuata dalla superficie (finita)  $\Sigma$ :

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \int \frac{\cos\theta d\Sigma}{r^2} \quad (2.4)$$

dove

- $d\Omega$  è l'angolo solido infinitesimo.
- $d\Sigma$  : 0 è la *proiezione ortogonale* al raggio dell'elemento infinitesimo di superficie  $d\Sigma$ .
- $\theta$  è l'*angolo polare* delle coordinate sferiche.

Poiché  $d\Sigma_0$  è un elemento infinitesimo della calotta sferica, data una parametrizzazione in coordinate sferiche vale

$$d\Sigma_0 = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

da cui segue che

$$d\Sigma = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.5)$$

Integrando  $\theta$  da 0 a  $\pi$  e  $\varphi$  da 0 a  $2\pi$ , si ottiene l'angolo solido sotto cui dal centro  $P$  è vista tutta la superficie:

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = 4\pi \quad (2.6)$$

Questo risultato è valido per una qualunque superficie *chiusa* che racchiuda  $P$  - e ne corrisponde al valore massimo dell'angolo solido.

#### UNITÀ DI MISURA.

**ANGOLO SOLIDO:** Steradiane (sr).

*Dimensioni:*  $[\Omega] = 1$ .

**Derivazione fisica della legge di Gauss** Dato il campo di Coulomb  $\vec{E}$  generato dalla carica  $q$ , vogliamo determinare l'elemento di flusso infinitesimo  $d\Phi(\vec{E})$ , ossia il flusso tramite l'elemento d'area infinitesimo  $d\Sigma$ .

Innanzitutto, si noti che l'angolo tra il versore radiale  $\hat{u}_r$  uscente dalla carica  $q$  e il versore normale  $\hat{u}_n$  alla superficie coincide con un possibile angolo polare  $\theta$  che parametrizza un punto della calotta sferica unitaria centrata in  $q$ .

$$\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n = \cos \theta$$

Il flusso infinitesimo diventa

$$d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

**OSSERVAZIONE.** Il flusso del campo  $\vec{E}$  generato da una carica puntiforme dipende solo dall'angolo solido e *non* dalla superficie o dalla distanza dalla carica: il flusso è lo stesso per qualunque superficie il cui bordo si appoggi sul cono individuato dall'angolo solido. Questo è una *diretta* conseguenza che il campo di Coulomb presenta un fattore  $1/r^2$ ; se la relazione fosse stata anche solo leggermente diversa non varrebbe tale dipendenza.

Per una superficie (finita) e chiusa che racchiude la carica  $q$  si ha

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Dimostrazione formale della legge di Gauss**

**DIMOSTRAZIONE.** Per semplicità, poniamo l'origine del nostro sistema di riferimento dove è situata la carica. Data la simmetria di carattere radiale fornita dal campo elettrostatico di Coulomb, ci conviene utilizzare le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Parametrizziamo la superficie  $\Sigma$  con l'angolo *polare*  $\theta$  e l'angolo *azimutale*  $\varphi$  delle coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta, \varphi) &= x(\theta, \varphi)\vec{u}_x + y(\theta, \varphi)\vec{u}_y + z(\theta, \varphi)\vec{u}_z = \\ &= r(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + r(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + r(\theta, \varphi) \cos \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

Osserviamo che per descrivere una superficie con le coordinate sferiche è necessario fornire la *distanza*  $r(\theta, \varphi)$  dall'origine nella direzione indicata dagli angoli  $\theta$  e  $\varphi$ . Anzi, la parametrizzazione può essere espressa totalmente in termini *radiali*! Infatti, il versore radiale è dato da

$$\hat{u}_r = \frac{\hat{e}_r}{|\hat{e}_r|} = \frac{\frac{\partial x^i}{\partial r} \hat{u}_i}{1} = \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z$$

Raccogliendo  $r(\theta, \varphi)$  dalla parametrizzazione scritta prima si ottiene quindi

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \hat{u}_r$$

Per definizione, il flusso è

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \left| \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right| d\theta d\varphi \quad \square$$

Poiché il versore normale è

$$\hat{u}_n = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right|}$$

il flusso si può calcolare come

$$\square \int_\Sigma \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{1}{r(\theta, \varphi)^2} \hat{u}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi$$

Per semplificare quel prodotto misto, dobbiamo prima analizzare i termini che partecipano al prodotto vettoriale.

In un generico punto<sup>a</sup>  $(\theta, \varphi)$  della superficie, i vettori della base del piano tangente alla superficie in tal punto sono

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta, \varphi) \vec{u}_r) = \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \hat{u}_r + r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (r(\theta, \varphi) \vec{u}_r) = \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{u}_r + r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Si nota subito che le componenti parallele a  $\vec{u}_r$  *non* influiscono al flusso. Al netto di costanti moltiplicative, il contributo di tali componenti è un  $\vec{u}_r$  nel prodotto vettoriale del prodotto misto, ma valendo

$$\begin{cases} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_r \times \vec{a} = 0 \\ \hat{u}_r \cdot \vec{a} \times \hat{u}_r = 0 \end{cases}, \quad \forall \vec{a} \text{ vettore}$$

tali componenti non cambieranno in alcun modo il flusso; ciò che invece lo cambia sono le derivate dei versori radiali. Sviluppando, l'espressione del flusso si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\vec{E}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{1}{r(\theta, \varphi)} \hat{u}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{1}{r(\theta, \varphi)^2} \hat{u}_r \cdot \left( r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} \times r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} \right) d\theta d\varphi = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \hat{u}_r \cdot \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{u}_y - \sin \theta \hat{u}_z \\ \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \hat{u}_x + \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_y \end{cases}$$

e

$$\hat{u}_r \cdot \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \sin \theta$$

segue che

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (2.7)$$

dove  $\Sigma$  è l'angolo solido sull'intera superficie.

Se la superficie (finita) è chiusa si ha  $\Omega = 4\pi$ , ottenendo quindi il risultato desiderato.  $\square$

<sup>a</sup>Qui indicato tramite le coordinate ad esso associate dalla parametrizzazione.

**OSSERVAZIONE.** La 2.7 descrive il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie **qualunque**. La legge di Gauss si potrebbe vedere come un *caso specifico* di questa relazione.

Il caso per cariche multiple segue dal *principio di sovrapposizione* dei campi elettrici:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_\Sigma \left( \sum_i \vec{E}_i \right) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \sum_i \int_\Sigma \vec{E}_i \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Da questa si ottiene, passando al continuo, la relazione 2.3.

**Flusso tramite una superficie chiusa per una carica esterna** La legge di Gauss descrive il flusso tramite una superficie chiusa tenendo conto delle cariche *interne* ad essa... e si ci fossero delle cariche *esterne*?

Limitiamoci all'inizio al caso di una singola carica esterna: il campo di Coulomb entra nella superficie chiusa, attraversa lo spazio contenuto da essa e poi esce dall'altro lato. In termini di angolo solido, il cono elementare che sottende l'angolo solido infinitesimo  $d\Sigma$

determina sulla superficie chiusa due elementi  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ . Per la convenzione sul segno del flusso:

- $\vec{E}$  entra in  $d\Sigma_1$ :  $\vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 < 0$ .
- $\vec{E}$  esce da  $d\Sigma_2$ :  $\vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 > 0$ .

I flussi infinitesimi che otteniamo<sup>1</sup> sono

$$\begin{cases} d\Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ d\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{cases}$$

Integrando sull'intera superficie chiusa otteniamo

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0 \quad (2.8)$$

Il flusso tramite una superficie *chiusa* dipende *solo* dalle cariche interne ad essa.

**OSSERVAZIONE.** Cosa cambia dal caso della carica interna? Il campo elettrico in quella situazione risulta essere *entrante* (se la carica è positiva) o *uscente* (se la carica è negativa) da ogni elemento infinitesimo; il flusso avrà quindi sempre lo stesso segno oppure essere nullo, ma sulla superficie intera questo si ha solo se questa è parallela al campo.

### 2.3 APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI GAUSS

La legge di Gauss, in linea di principio, ci descrive solo il flusso tramite una superficie chiusa. Tuttavia, in situazioni di *evidenti simmetrie*, confrontando la definizione di flusso con quello ottenuto dalla legge di Gauss possiamo sorprendentemente calcolare in modo abbastanza facile il campo elettrostatico che genera il flusso.

**ATTENZIONE!** Bisogna fare attenzione ad utilizzare la legge di Gauss in assenza di simmetrie. Ad esempio, consideriamo una situazione come in figura.

Qui il flusso è nullo perché ciò che entra esce, ma il campo elettrico non è nullo.

**Filo carico rettilineo (infinito)** Si consideri un filo rettilineo infinito con densità lineare costante  $\lambda$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che il filo carico sia lungo l'asse  $z$ . Poniamo un cilindro attorno al filo in modo che il filo passi per l'asse del cilindro. Data l'evidente simmetria cilindrica del sistema usiamo, per motivi che dovrebbero essere oramai chiari, le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Oltre ad essere un sistema di riferimento, fissato  $R$  abbiamo una parametrizzazione del cilindro di raggio  $R$ .

Ora, ci è già noto che in questo sistema di riferimento il campo elettrostatico dipende esclusivamente dalla coordinata radiale e ha direzione radiale, ossia  $\vec{E} = E(R)\hat{u}_R$ . Per come abbiamo posto il cilindro  $\Sigma$ , il versore normale alla superficie laterale coincide con quello radiale delle coordinate cilindriche, pertanto

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int \vec{E} \cdot \hat{u}_R d\Sigma = \int E(R)\hat{u}_R \cdot \hat{u}_R d\Sigma = E(R) \int d\Sigma \quad \square$$

<sup>1</sup>Il procedimento è analogo a quello con cui si ottiene l'equazione 2.7.

dove l'ultimo passaggio è lecito in quanto sulla superficie del cilindro il raggio è fissato e quindi anche  $E(R)$  è costante.

Dato che l'elemento di area è dato da  $d\Sigma = d\Phi dz$ , si ha

$$\boxed{=} \lim_{L \rightarrow +\infty} 2\pi R L E(R)$$

Per la legge di Gauss,

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

dove  $\lambda$  è la densità lineare di carica; per ottenere il flusso per il filo infinito ci basterebbe mandare  $L$  all'infinito. Eguagliando i due flussi ottenuti si ricava che

$$2\pi R \cancel{L} E(R) = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0}$$

e quindi

$$\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \quad (2.9)$$

**Superficie carica infinita** Si consideri una superficie piana  $\Sigma$  con densità superficiale costante  $\sigma$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che la superficie coincida con il piano  $x = 0$ . Come per il caso del filo carico rettilineo, consideriamo un cilindro, questa volta che interseca la superficie ortogonalmente e posto in maniera che le basi siano alla stessa distanza dal piano.

Ci è già noto che il campo elettrostatico dipende esclusivamente dalla coordinata perpendicolare al piano, cioè  $x$ , e ha direzione  $\hat{u}_x$ . In particolare, si osservi che da facce opposte del piano il versore normale  $u_n = u_x$  cambia verso e quindi cambia verso anche il campo elettrostatico:

$$\vec{E} = \begin{cases} E(|x|)\hat{u}_x & \text{se } x > 0 \\ -E(|x|)\hat{u}_x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il flusso tramite il cilindro  $\Sigma$  si può scindere in tre componenti: i due flussi  $\Phi_{A_1}$  e  $\Phi_{A_2}$  attraverso le basi e il flusso  $\Phi_{SL}$  attraverso la superficie laterale; tuttavia, poiché la superficie laterale è sempre ortogonale al campo, quest'ultima componente è nulla. Inoltre, si ha che il campo esce sempre dalle basi, pertanto i flussi saranno positivi e, per questioni di simmetria, coincidono:

$$\Phi_{A_1} = \Phi_{A_2} \quad (2.10)$$

Pertanto,

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 2 \int_A E(|x|) d\Sigma = 2E(|x|) \int_{A_1} d\Sigma = 2E(|x|)A_1$$

Ricordando che la densità di carica superficiale  $\sigma$  è costante, la carica interna al cilindro è data da

$$q = \sigma A_1$$

Per la legge di Gauss si ha

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{\sigma A_1}{\varepsilon_0}$$

Eguagliando i due flussi ottenuti si ricava che

$$2\cancel{A_1}E(|x|) = \frac{\sigma \cancel{A_1}}{\varepsilon_0}$$

e quindi

$$\vec{E}(|x|) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{u}_x \quad (2.11)$$

**Sfera uniformemente carica** Si consideri una palla sferica di raggio  $R$  con densità volumica costante  $\rho$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'origine coincida con il centro della sfera. Come superficie  $\Sigma$  per calcolare il flusso scelgo una sfera di raggio  $r$  centrata anch'essa nell'origine.

Ci è già noto che il campo elettrostatico dipende esclusivamente dalla coordinata radiale e ha direzione radiale, ossia  $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$ . Il versore normale alla superficie  $\Sigma$  è  $\hat{u}_n = \hat{u}_r$ . A questo punto distinguiamo il calcolo quando la superficie sferica ha raggio maggiore della palla ( $r > R$ ) o quando ha raggio minore ( $r < R$ ).

**Il caso esterno:  $r > R$**  In questo caso la superficie sferica *contiene* la sfera uniformemente carica. Il flusso dunque è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int E(r)d\Sigma = E(r)4\pi r^2$$

dato che  $E(r)$  è costante sulla sfera di raggio  $r$ . La superficie sferica contiene *tutta* la carica della palla al suo interno, quindi per la legge di Gauss

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$

e quindi

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r \quad (2.12)$$

**OSSERVAZIONE.** Una qualunque distribuzione di carica a simmetria *sferica* dipendente dalla distanza radiale, ossia  $\rho(x, y, z) = \rho(r)$ , genera al suo esterno un campo uguale a quello di una carica puntiforme.

**Il caso interno:  $r < R$**  In questo caso la superficie sferica contiene al suo interno solo una parte della carica complessiva:

$$q_{interna} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Se il flusso, calcolato secondo la definizione, non cambia espressione (ma valore sì!)...

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E(r)4\pi r^2$$

... quello per la legge di Gauss diventa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0}$$

e quindi

$$\vec{E}(r) = \frac{q_{interna}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{u}_r \quad (2.13)$$

Riassumendo, il campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica di raggio  $R$  a distanza  $r$  dall'origine è

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{u}_r & \text{se } r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (2.14)$$



# IL POTENZIALE ELETTRICO

*“La situazione si complica. Ora, ce ne sono due di loro!”*

*NUTE GUNRAY, scoprendo la convergenza puntuale dopo quella uniforme.*

## P<sup>ER</sup>

### 3.1 CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE

#### DEFINIZIONE 3.1.1. - CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE .

Il circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva chiusa  $\gamma$ , parametrizzata da una funzione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , è

$$\Gamma_{\gamma}(\vec{E}) = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (3.1)$$

### 3.2 FORZE CONSERVATIVE E CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

**Dalle forze conservative...** La circuitazione ha particolare rilevanza in ambito fisico; la sua prima applicazione che vedremo è in una caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi. Prima però, riguardiamo rapidamente il concetto di lavoro e del suo ruolo per quelle forze dette forze conservatrici, trattato nel corso di FISICA I.

#### DEFINIZIONE 3.2.1. - LAVORO .

Dati due punti  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$ , il **lavoro** di una forza  $\vec{F}$  lungo una curva  $\gamma$  tra i due punti è definito come

$$W_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (3.2)$$

In generale, il lavoro dipende dal *percorso effettuato*: il lavoro compiuto da una stessa forza lungo due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  è differente. Per un caso particolare di forze, tuttavia, il lavoro dipende esclusivamente dagli estremi e non dal percorso effettuato.

**DEFINIZIONE 3.2.2. - FORZA CONSERVATIVA .**

Una forza  $\vec{F}$  è detta **conservativa** se per qualunque curva  $\gamma_1, \gamma_2$  tra due punti  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$  il lavoro è

$$W_{\gamma_1} = W_{\gamma_2} \quad (3.3)$$

In altre parole,  $\vec{F}$  è conservativa se il lavoro dipende *solo* dai punti iniziali e finali e non quale sia la curva lungo la quale si calcola.

**PROPOSIZIONE 3.2.1. - CARATTERIZZAZIONE DELLE FORZE CONSERVATIVE .**

Se una forza  $\vec{F}$  è conservativa, allora esiste una funzione  $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  detta **energia potenziale** tale che<sup>a</sup>

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (3.4)$$

e tale per cui

$$W = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = -\Delta U \quad (3.5)$$

In altri termini:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (3.6)$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{\nabla}U \cdot d\vec{s} \quad (3.7)$$

<sup>a</sup>Il meno è presente per motivi storici.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo una curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [t_1, t_2]$$

Posto

$$\begin{cases} \vec{r}(t_A) = \vec{r}_A \\ \vec{r}(t_B) = \vec{r}_B \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = - \int_{t_A}^{t_B} \vec{\nabla}U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) dt = \\ &= - (U(\vec{r}(t_B)) - U(\vec{r}(t_A))) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \end{aligned}$$

Infatti,

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \vec{\nabla}U \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}. \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Il potenziale è sempre definito a meno di costante additiva. Infatti, se considero due potenziali  $U$  e  $U' = U + U_0$  dove  $U_0$  è una costante reale, si ha che

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U' = -\vec{\nabla}(U + U_0) = -\vec{\nabla}U - \underbrace{\vec{\nabla}U_0}_{=0} = -\vec{\nabla}U$$

**...ai campi vettoriali conservativi** In modo analogo a come abbiamo fatto per le forze conservative, possiamo facilmente definire un *campo vettoriale conservativo*.

**DEFINIZIONE 3.2.3. - CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO .**

Una campo vettoriale  $\vec{G}$  è detto **conservativo** se per qualunque curva  $\gamma_1, \gamma_2$  tra due punti  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$  si ha

$$\int_{\gamma_1} \vec{G} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{G} \cdot d\vec{s} \quad (3.8)$$

**PROPOSIZIONE 3.2.2. - CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI .**

Se un campo vettoriale  $\vec{G}$  è conservativo, allora esiste un campo scalare  $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  detto **potenziale** tale per cui<sup>a</sup>

$$\begin{cases} \vec{G} = -\vec{\nabla}\phi \\ \Gamma_\gamma(\vec{G}) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

per ogni curva chiusa  $\gamma$ .

<sup>a</sup>Il meno è presente per motivi storici.

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 3.2.1. Per ottenere il risultato come enunciato nella tesi - ossia come circuitazione - si noti che, avendo

$$\int_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_A),$$

allora, poiché si ha  $\vec{r}_a = \vec{r}_B$ , vale

$$\Gamma_\gamma(\vec{G}) = \oint_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Il potenziale è sempre definito a meno di costante additiva. Infatti, se considero due potenziale  $\phi$  e  $\phi' = \phi + \phi_0$  dove  $\phi_0$  è una costante reale, si ha che

$$\vec{G} = -\vec{\nabla}\phi' = -\vec{\nabla}(\phi + \phi_0) = -\vec{\nabla}\phi - \underbrace{\vec{\nabla}\phi_0}_{=0} = -\vec{\nabla}\phi$$

### 3.3 POTENZIALE ELETTRICO

Nei diversi esempi di campi elettrostatici visti nel Capitolo 1 a pagina 3 abbiamo sempre trovato un potenziale che ci permetteva di semplificare notevolmente la trattazione del problema. Come preannunciato, questo non è un caso: infatti, il *campo elettrostatico* è sempre conservativo.

**TEOREMA 3.3.1. - IL CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO .**

Il campo elettrostatico  $\vec{E}$  è conservativo, ossia è il gradiente (cambiato di segno) di un opportuno campo scalare  $V$ .

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (3.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo inizialmente per il campo elettrostatico generato da una carica puntiforme. Il campo di Coulomb è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

Ricordiamo che l'operatore nablà in coordinate sferiche diventa

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

Si verifica facilmente che

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.11)$$

è il potenziale del campo di Coulomb:

$$-\vec{\nabla}V = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \vec{E} \quad \square$$

Si osservi che per i campi elettrostatici generati da un sistema di cariche  $q_i$  vale il principio di sovrapposizione; noto che ciascuno di questi campi sono conservativi e

$$\vec{E}_i = -\vec{\nabla}V_i$$

allora anche il campo complessivo generato dal sistema di cariche è conservativo e il potenziale è la somma dei potenziali:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = -\vec{\nabla}V \quad (3.12)$$

dove

$$V = \sum_i V_i \quad (3.13)$$

Il caso di una distribuzione continua di carica segue da queste relazioni, passando al continuo.

Ricapitolando:

- Per una singola carica  $q$ , centrata nell'origine, il potenziale in  $\vec{r}$  è:

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.14)$$

- Per un sistema di cariche  $q_i$ , ciascuna posta in  $\vec{r}_i$ , il potenziale in  $\vec{r}$  è

$$V(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (3.15)$$

- Per una distribuzione continua di cariche in un volume  $V$  è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' \quad (3.16)$$

- Per una distribuzione continua di cariche su una superficie  $\Sigma$  è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{\sigma(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Sigma \quad (3.17)$$

- Per una distribuzione continua di cariche su una superficie  $\Sigma$  è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\lambda(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\ell \quad (3.18)$$

**OSSERVAZIONE.** il potenziale si considera a tutti gli effetti un campo scalare *continuo*: se così non fosse, le derivate spaziali sarebbero infinite nelle discontinuità e quindi avremmo in certi punti del dominio di definizione del potenziale un campo elettrostatico infinito, che nella pratica non è possibile avere.

**ATTENZIONE!** Come potremo vedere più avanti, in generale il campo *elettrico* può dipendere dal tempo; tuttavia, in tal caso il campo **non** è conservativo e dunque non esiste un potenziale. Solo il campo elettrostatico, cioè un campo elettrico che *non* varia nel tempo, ammette un potenziale.

Una conseguenza immediata del fatto che il campo elettrostatico è conservativo è il seguente.

**COROLLARIO 3.3.1. - LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO È NULLA .**  
Su ogni curva chiusa  $\gamma$  nello spazio, la circuitazione del campo elettrostatico è nulla.

$$\Gamma_{\gamma}(\vec{E}) = 0 \quad (3.19)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il campo elettrostatico è conservativo, dunque per la caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi<sup>a</sup> segue la tesi.  $\square$

<sup>a</sup>Si veda la proposizione 3.2.2 a pag. 33.

**Energia potenziale e potenziale elettrico** La forza di Coulomb è conservativa e ammette un potenziale, o per meglio dire un'energia potenziale,  $U$  tale che  $vbaF = -\vec{\nabla}U$ , mentre abbiamo dimostrato poc'anzi che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Dalla legge  $\vec{F} = q\vec{E}$  che lega campo elettrostatico e forza di Coulomb si ha immediatamente una relazione tra l'energia potenziale e il potenziale elettrico:

$$U = qV \quad (3.20)$$

**ESEMPIO.** Per un carica puntiforme  $Q$  si ha potenziale

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.21)$$

e l'energia potenziale che un'altra carica  $q$  ha, se soggetta al campo elettrostatico generato da  $Q$  è

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.22)$$

**Unità di misura** Dalla relazione 3.20 si definisce l'unità di misura del potenziale, il **volt**.

$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{J}{C}$$

**UNITÀ DI MISURA.****POTENZIALE:** volt (V) o joule su coulomb ( $\frac{J}{C}$ ).**Dimensioni:**  $[V] = \frac{[J]}{[C]} = ML^2T^{-3}I^{-1}$ 

Abbiamo già visto che il campo elettrico, dalla formula  $\vec{F} = q\vec{E}$ , ha unità di misura il newton su coulomb ( $\frac{N}{C}$ ). Tuttavia, grazie al fatto che  $\vec{E}$  è conservativo ed è quindi un *gradiente* rispetto ad una variabile che ha dimensioni di una lunghezza, può essere definito

**UNITÀ DI MISURA.****CAMPO ELETTRICO:** volt su metro ( $\frac{V}{m}$ ) o newton su coulomb ( $\frac{N}{C}$ ).**Dimensioni:**  $[E] = \frac{[F]}{[q]} = LMT^{-3}I^{-1}$ .

**OSSERVAZIONE.** Come già detto, il potenziale è definito a meno di una costante additiva. Generalmente si pone il sistema di riferimento in modo che il potenziale all'infinito (o ai bordi del dominio di definizione) sia una costante, generalmente zero per  $V \rightarrow \infty$ . Poiché non si può considerare un sistema di questo genere, l'unica condizione misurabile realmente (ed operativamente) è la **differenza di potenziale**.

**Potenziale e attrattività delle cariche****ESEMPIO - ARMATURE ELETTRICHE .**

Consideriamo due piastre elettrostatiche di segno opposto, come in figura. Il funzionamento di tale sistema non è dissimile, a livello puramente qualitativo, da un dipolo elettrico: tra le due piastre il campo è sostanzialmente analogo a quello sull'asse verticale congiungente i dipoli e quindi è diretto dalla piastra positiva a quella negativa.

Poiché  $\vec{F} = q\vec{E}$ , le cariche positive saranno attratte verso la parte negativa, quelle negative verso la piastra positiva.

Si osserva che, essendo  $\vec{\nabla}V = -\vec{E}$ , il gradiente del potenziale è un campo vettoriale diretto - quando lo consideriamo dentro l'armatura - diretto dalla piastra negativa a quella positiva, cioè dal potenziale minore a quello maggiore.

Si ha che

$$V_1 < V_2$$

Questo ragionamento si può anche generalizzare in altri contesti, osservando dunque che il campo elettrico è diretto dal **potenziale maggiore al potenziale minore**, e quindi

- cariche **positive** si muovono verso la zona di **minor** potenziale.
- cariche **negative** si muovono verso la zona di **maggior** potenziale.

**Superfici equipotenziali**

**DEFINIZIONE 3.3.1. - SUPERFICI EQUIPOTENZIALI .**

Data un sistema in cui si ha una certa funzione di potenziale  $V$ , le **superfici equipotenziali** sono gli insiemi descritti dall'equazione

$$V(\vec{r}) = \text{const} \quad (3.23)$$

Le superfici equipotenziali sono sempre ortogonali, punto per punto, a  $\vec{\nabla}V$  e quindi

anche al campo vettoriale elettrostatico  $\vec{E}$ .

#### ESEMPLI.

- Per il potenziale della carica puntiforme,  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const}$  implica  $r = \text{const}$ : le superfici equipotenziali sono circonferenze concentriche di raggio  $r$ , al variare di  $r$ .
- Per il dipolo elettrico  $+/-$ :
- Per il dipolo elettrico  $+/+$ :

### 3.4 DISCONTINUITÀ DI CAMPO ELETTRICO TRA SUPERFICI

Precedentemente abbiamo ricavato il campo elettrostatico e il potenziale di volumi uniformemente carichi, come una sfera. Ci chiediamo ora quale sia il campo elettrostatico e di conseguenza il potenziale di una **superficie cava** uniformemente carica, come ad esempio una superficie sferica o un cilindro.

**Superficie sferica uniformemente carica** Si consideri una superficie sferica di raggio  $R$  con densità superficiale costante  $\sigma$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'origine coincida con il centro della sfera. La carica totale sulla superficie è

$$q = 4\pi R^2 \sigma \quad (3.24)$$

Distinguiamo, come al solito, due casi: il campo elettrico interno ( $r < R$ ) e quello esterno ( $r > R$ ) alla sfera.

**$r < R$**  Utilizziamo la legge di Gauss su una superficie  $\Sigma$  di raggio  $r < R$  centrata nell'origine. Dalla definizione di flusso abbiamo che

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int E(r) d\Sigma = 4\pi r^2 E_r(r)$$

dato che  $E(r)$  è costante su  $\Sigma$ . Tuttavia, poiché la carica è concentrata tutta sulla sfera di raggio  $R$ , la superficie  $\Sigma$  *non* contiene alcuna carica; pertanto, per la legge di Gauss

$$4\pi r^2 E_r(r) = \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = 0$$

da cui segue che

$$\vec{E}(r) = 0 \quad (3.25)$$

**$r > R$**  Sulla base di osservazioni precedenti, il comportamento esterno è analogo a quello di una carica puntiforme nell'origine.

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \quad (3.26)$$

Il campo elettrico, pertanto, è discontinuo e vale

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (3.27)$$

mentre invece il potenziale è continuo e vale

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{se } r \leq R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (3.28)$$

Si osserva una discontinuità pari a  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  tra il campo elettrico interno ed esterno alla superficie.



**Cilindro uniformemente carico** Si consideri una superficie cilindrica di raggio  $R_0$  e lunghezza  $L$  con densità superficiale costante  $\sigma$ , dove le cariche sono disposte sulla faccia laterale. Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'asse  $z$  passi per l'asse del cilindro. La carica totale sulla superficie è

$$q = A_{laterale} \sigma = 2\pi R_0 L \sigma \quad (3.29)$$

Distinguiamo due casi: il campo elettrico interno ( $R < R_0$ ) e quello esterno ( $R > R_0$ ) al cilindro.

**$R < R_0$**  Utilizziamo la legge di Gauss su un cilindro  $\Sigma$  di raggio  $R < R_0$  con asse sull'asse  $z$ . Dalla definizione di flusso abbiamo che

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int E(R) d\Sigma = 2\pi R L E_R(R)$$

dato che  $E(R)$  è costante su  $\Sigma$ . Tuttavia, poiché la carica è concentrata tutta sul cilindro di raggio  $R_0$ , la superficie  $\Sigma$  *non* contiene alcuna carica; pertanto, per la legge di Gauss

$$2\pi R L E_R(R) = \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0} = 0$$

da cui segue che

$$\vec{E}(R) = 0 \quad (3.30)$$

**$R > R_0$**  In modo simile al caso della sfera, il comportamento esterno è analogo a quello di un filo carico.

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} \hat{u}_R = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L r} \hat{u}_R \quad (3.31)$$

Il campo elettrico, pertanto, è discontinuo e vale

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq R \\ \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} \hat{u}_R = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L r} \hat{u}_R & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (3.32)$$

mentre invece il potenziale è continuo e vale

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \log R = -\frac{q}{2\pi \epsilon_0 L} \log R & \text{se } r \leq R \\ -\frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \log r = -\frac{q}{2\pi \epsilon_0 L} \log r & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (3.33)$$

Si osserva una discontinuità pari a  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  tra il campo elettrico interno ed esterno alla superficie.

**Discontinuità di campo elettrico tra superfici** Sebbene l'andamento del campo elettrico nei due esempi precedenti è leggermente diverso, per entrambi i casi la discontinuità tra campo elettrico interno ed esterno in uno stesso punto è pari al valore  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Non è una coincidenza fortuita, bensì possiamo mostrare che questo è *sempre* così.

**PROPOSIZIONE 3.4.1. - DISCONTINUITÀ DI CAMPO ELETTRICO TRA SUPERFICI .**

La differenza di campo elettrico tra due lati di una superficie carica è, punto per punto, pari a

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo tale proprietà per un foglio carico (supponiamo positivamente), dato che la superficie si può considerare almeno localmente come un foglio carico.

Posta una carica positiva su una faccia del foglio, ci aspettiamo che si allontani da esso “dallo stesso lato del foglio” a causa di un campo elettrico  $\vec{E}_1$ ; viceversa, mettendo una particella positiva dall'altra faccia è prevedibile che la particella sarà respinta dalla superficie da quello stesso lato dalla forza generata dal campo elettrico  $\vec{E}_2$ , ossia dal verso opposto di  $\vec{E}_1$ : ci dovrà essere necessariamente una discontinuità di campo elettrico per avere questo cambio drastico di verso.

Disegniamo un circuito rettangolare  $\gamma = [ABCD]$  che interseca il campo e che sia sufficientemente piccolo in modo da considerare  $\vec{E}$  costante sul circuito. Dato che la circuitazione lungo  $\gamma$  è influenzata solo dalle componenti tangenziali  $E_{i,t}$  e non dalle componenti perpendicolari  $E_{i,n}$  al circuito, si ha

$$0 = \Gamma_\gamma(\vec{E}) = E_{1,t}d_{AB} - E_{2,t}d_{CD} = (E_{2,t} - E_{1,t})d_{AB}$$

Da cui segue che

$$E_{2,t} = E_{1,t},$$

ossia che le componenti tangenziali devono essere uguali.

Consideriamo lo stesso foglio, questa volta intersecandolo con una superficie cilindrica con altezza sufficientemente piccola in modo che il campo elettrico è considerabile costante lungo la superficie di base. Calcolando il flusso e confrontandolo con quello ottenuto dalle legge di Gauss, ricordiamo che lungo la superficie laterale esso è nullo:

$$\frac{q_{A_{base}}}{\varepsilon_0} = \Phi_\Sigma(\vec{E}) = E_{1,n}A_{base} - E_{2,n}A_{base}$$

Da cui segue invece

$$E_{1,n} - E_{2,n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Allora, facendo la differenza punto per punto, si ha

$$\Delta\vec{E} = \underbrace{(E_{1,t} - E_{2,t})}_{=0} \hat{u}_t + \underbrace{(E_{1,n} - E_{2,n})}_{=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \hat{u}_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_n \quad \square$$

### 3.5 LEGGI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA

A questo punto siamo arrivati ad avere tutti gli strumenti e i risultati necessari per enunciare le **leggi di Maxwell relative all'elettrostatica**.

Tuttavia, prima di far ciò è importante riprendere in mano alcuni risultati matematici e fisici che ci serviranno a tal scopo.

**RICORDIAMO...**

- 1a **Teorema della divergenza:** si consideri un volume  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  compatto con bordo liscio  $\partial V$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \int_{\partial V} \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

o, equivalentemente,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \Phi_\Sigma(\vec{G})$$

- 2a **Legge di Gauss:** il flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$  attraverso una superficie *chiusa* è eguale alla quantità di carica contenuta all'interno della superficie, comunque siano distribuite, divisa per  $\varepsilon_0$ .

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

dove  $V$  è uno spazio delimitato da  $\Sigma$ , ossia tale che  $\partial V = \Sigma$ .

- 1b **Teorema del rotore:** si consideri una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  semplice - ossia senza intersezioni con sé stessa, chiusa e liscia a tratti; si consideri inoltre una superficie  $\Sigma$  liscia tale che  $\partial \Sigma = \gamma$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_\Sigma \vec{\nabla} \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

o, equivalentemente,

$$\Phi_\Sigma(\vec{\nabla} \vec{G}) = \Gamma_\gamma(\vec{G})$$

- 2b **Circuitazione del campo elettrico nulla:** su ogni curva chiusa  $\gamma$  nello spazio, la circuitazione del campo elettrostatico è nulla.

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = 0$$

### TEOREMA 3.5.1. - EQUAZIONI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA.

Dato il campo elettrostatico  $\vec{E}$  e una densità di carica  $\rho$ , valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad (3.34)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per ottenere la prima legge, partiamo dalla legge di Gauss

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (3.35)$$

scritta nella sua formulazione integrale:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Applichiamo il teorema della divergenza al primo membro:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot E dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

Poiché questa relazione è vera per un qualunque volume  $V$  arbitrario, si deve necessariamente avere uguaglianza degli integrandi, ottenendo

$$\vec{\nabla} \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Per ottenere la seconda legge, partiamo dalla circuitazione nulla del campo elettrostatico

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = 0$$

scritta nella sua formulazione integrale:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Applicando il teorema del rotore al membro non nullo:

$$\int_\Sigma \vec{\nabla} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$$

Poiché questa relazione è vera per una qualunque superficie  $\Sigma$  arbitraria, si deve necessariamente avere che l'unico termine non dipendente dalla superficie sia sempre nullo.

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0$$

□

**OSSERVAZIONE.** Mentre la prima equazione vale in generale, la seconda vale solo in elettrostatica, considerando un campo elettrico statico e in assenza di campo magnetico. Nel caso generale, vedremo che il rotore del campo elettrico dipende dalla variazione temporale del campo magnetico.

#### ESEMPIO - SFERA UNIFORMEMENTE CARICA .

Verifichiamo che vale la prima equazione dell'elettrostatica nel caso del campo generato da una sfera carica uniformemente:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} \hat{u}_r & \text{se } r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{u}_r & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Data la divergenza di un campo in coordinate sferiche<sup>a</sup>, che ricordiamo essere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}$$

allora si ha, per un punto *esterno* alla sfera (in cui *non* c'è alcuna densità di corrente) vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) = 0 \quad (3.36)$$

mentre per un punto *interno* alla sfera (in cui si ha una densità di corrente  $\rho$ ) vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\rho R}{3\epsilon_0 R^2} \hat{u}_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\rho R}{3\epsilon_0 R^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 \rho}{3\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

<sup>a</sup>Nelle "XXX", a pagina 119 è possibile trovare a grandi linee il procedimento per ricavare la divergenza in coordinate sferiche.

### 3.6 EQUAZIONE DI POISSON E DI LAPLACE

L'irrotazionalità del campo elettrostatico garantita dalla seconda equazione di Maxwell ci dice che, almeno localmente, è anche conservativo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \iff \exists V: \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Sostituendo nella prima legge di Maxwell, ossia la legge di Gauss, otteniamo

$$\vec{\nabla} E = \frac{\rho}{\epsilon} \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

che è un'equazione alle derivate parziali detta **equazione di Poisson**.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.37)$$

Questa equazione differenziale ci descrive il potenziale in una regione dove è presente una sorgente di densità di carica  $\rho$ .

In una regione priva di cariche si ha  $\rho \equiv 0$ ; l'**equazione di Laplace** descrive il potenziale in tale regione.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.38)$$

Imponendo delle opportune *condizioni di contorno*, che siano di natura *fisica* o imposte come tali per *convenzione*, potremmo idealmente ricavare le soluzioni di queste equazioni e determinare in modo prettamente matematico il potenziale - e di conseguenza anche il campo elettrostatico. Il problema principale è che *non sempre* è possibile trovare facilmente una soluzione; tuttavia, per alcuni specifici casi, ad esempio campi che presentano delle *simmetrie* interessanti, possiamo calcolare senza troppi problemi il potenziale.

**Equazioni di Poisson e di Laplace con simmetria sferica** Consideriamo un campo a simmetria sferica, ossia dipendente esclusivamente dalla distanza radiale:

$$V(\vec{r}) = V(r) \hat{u}_r$$

Dato che il laplaciano in coordinate sferiche è

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

allora in un punto dello spazio dove *non* c'è densità di carica si ha potenziale dato dalla soluzione dell'*equazione di Laplace*

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) = 0$$

Facendo gli opportuni calcoli...

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) &= 0 \\ r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= A \\ \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= \frac{A}{r^2} \end{aligned}$$

... otteniamo il potenziale

$$V(r) = -\frac{A}{r} + B \quad (3.39)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti date dalle condizioni al contorno.

In un punto dello spazio dove c'è densità di carica  $\rho$  si ha potenziale dato dalla soluzione dell'*equazione di Poisson*

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Consideriamo il caso di  $\rho$  costante, per semplicità. Facendo gli opportuni calcoli...

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \\ r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r^3 + C \\ \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r + \frac{C}{r^2} \end{aligned}$$

... otteniamo il potenziale

$$V(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C}{r} + D \quad (3.40)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti date dalle condizioni al contorno.

#### ESEMPIO - SFERA UNIFORMEMENTE CARICA .

Il campo elettrostatico della sferica uniformemente carica di raggio  $R$  è un campo a simmetria radiale, pertanto il potenziale soddisfa, all'interno e all'esterno della sfera, le equazioni di Poisson e Laplace trovate prima.

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C}{r} + D & \text{se } r \leq R \\ -\frac{A}{r} + B & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (3.41)$$

Ci basta ora imporre le condizioni al contorno.

- Per *convenzione*, si suppone che il potenziale per  $r \rightarrow \infty$  tenda a 0, dato che il

campo elettrico si considera trascurabili a enormi distanze.<sup>a</sup>

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$$

Imponendo ciò, si trova

$$B = 0$$

- Quando siamo a grandi distanze, la sfera carica uniformemente è assimilabile ad una carica puntiforme, pertanto l'altra condizione al limite è che il campo elettrico della sfera all'esterno sia quello della sfera; da ciò è necessario imporre

$$A = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

- Sulla base della continuità del potenziale, sul dominio del campo elettrico il potenziale si considera *finito*, pertanto poniamo

$$C = 0$$

in modo da togliere il termine  $\frac{1}{r}$ , che renderebbe il potenziale infinito in  $r = 0$ .

- Per garantire la continuità del potenziale si deve imporre

$$V_{\text{interno}}(R) = V_{\text{esterno}}(R)$$

Risolvendo l'equazione

$$-\frac{\rho}{6\epsilon_0}R^2 + D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \implies D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\rho}{6\epsilon_0}R^2$$

Il potenziale complessivo è unico ed è

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{6\epsilon_0} [R^2 - r^2] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} [R^2 - r^2] + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} & \text{se } r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (3.42)$$

<sup>a</sup>Questo è lecito farlo perché lo **zero del potenziale** è arbitrario, grazie al fatto che il potenziale stesso è definito a meno di costanti: sostanzialmente, come decido di misurare il potenziale è una scelta di chi studia il sistema, anche se generalmente ci sono motivi fisici (come in questo caso) o geometrici per fare una certa scelta. Ciò non significa, tuttavia, che tale scelta è *insignificante*, dato che *ogni* valore del potenziale deve essere misurato tenendo conto di tale zero.

**Equazione di Laplace con simmetria cilindrica** Consideriamo un campo a simmetria cilindrica, ossia dipendente esclusivamente dalla distanza assiale:

$$V(\vec{r}) = V(R)\hat{u}_R$$

Dato che il laplaciano in coordinate cilindriche è

$$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

allora in un punto dello spazio dove non c'è densità di carica si ha potenziale dato dalla soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) = 0$$

Facendo gli opportuni calcoli...

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) &= 0 \\ r \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= A \\ \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= \frac{A}{r}\end{aligned}$$

... otteniamo il potenziale

$$V(r) = A \log r + B \tag{3.43}$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti date dalle condizioni al contorno.



# CONDUTTORI

---

*“Se si trascurano i casi assolutamente più semplici, allora in tutta la matematica non c’è una singola serie infinita la cui somma è stata rigorosamente determinata. In altre parole, una delle parti più importanti della matematica sta in piedi senza alcun fondamento.”*

*NIELS HENRIK ABEL, deluso dal non poter trovare la somma delle sue serie preferite.*

## N<sup>EL</sup>

### 4.1 EQUILIBRIO IN UN CAMPO ELETTROSTATICO

#### DEFINIZIONE 4.1.1. - EQUILIBRIO STABILE .

Un punto  $P$  è di **equilibrio stabile** per un corpo puntiforme se per un qualsiasi spostamento, piccolo a piacere, da tale posizione esistono forze che riportano l’oggetto nella posizione originale.

#### DEFINIZIONE 4.1.2. - EQUILIBRIO INSTABILE .

Un punto  $P$  è di **equilibrio instabile** per un corpo puntiforme se esistono spostamenti, piccolo a piacere, da tale posizione esistono forze che riportano l’oggetto nella posizione originale.

Consideriamo delle *sorgenti* fisse (continue o discrete che siano, *non* cambia) nel vuoto e sia  $\vec{E}(\vec{r})$  il campo elettrico generato da queste cariche. Esistono dei punti tali per cui, se poniamo una carica  $q$  lì, essa rimarrà in equilibrio stabile?

La risposta è data dal *teorema di Earnshaw* e la risposta è **no**.

#### TEOREMA 4.1.1. - TEOREMA DI EARNSHAW .

*Una collezione di cariche puntuali non possono essere mantenute in una configurazione di equilibrio stabile soltanto dall’interazione elettrostatica delle cariche con un campo elettrico.*

In questa dimostrazione assumiamo che la carica sia positiva ( $q > 0$ ), ma la dimostrazione è *mutatis mutandis* la stessa per  $q < 0$ .

**OSSERVAZIONE.** La carica nella dimostrazione si suppone essere una **carica di prova**, e quindi il campo generato dalla carica  $q$  è trascurabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che la carica, immersa nel campo elettrico e non soggetta ad altre forze, è in equilibrio stabile in  $P = \vec{r}$ ; ciò significa che:

1. La carica di per sé è ferma; la forza totale agenti sulla carica è dunque nulla, e dato che le uniche forze sulla carica in  $\vec{r}$  è la forza di Coulomb/forza associata al campo elettrico si ha

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = 0 \xrightarrow{q \neq 0} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

2. Per un (piccolo) spostamento  $\delta\vec{r}$  attorno a  $\vec{r}$ , la forza riporta la carica verso il punto  $\vec{r}$ , cioè la forza

$$\vec{F}(\vec{r} + \delta\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r} + \delta\vec{r})$$

deve puntare verso  $\vec{r}$ . Consideriamo una superficie chiusa (arbitrariamente piccola) attorno alla carica. Per quanto abbiamo detto, in un qualunque suo punto la forza di Coulomb in tal punto deve essere diretta verso  $\vec{r}$ . Pertanto, se il campo è entrante la superficie, il flusso tramite la superficie è negativo...

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) < 0 \quad (4.1)$$

... ma possiamo applicare la legge di Gauss per ricavare il valore del flusso tramite tale superficie, tuttavia si avrebbe

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} < 0 \implies q < 0$$

il che è un assurdo! Segue che non ci può essere equilibrio elettrostatico stabile.  $\square$

L'unica possibilità di avere una carica in equilibrio stabile è se si trovasse esattamente nello stesso punto di un'altra carica  $Q$  di segno opposto e quantità di carica maggiore. Infatti, in tal caso qualunque superficie, piccolo a piacere, scegliamo attorno al punto di equilibrio si avrà sempre flusso pari a

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q + Q}{\epsilon_0}$$

per la legge di Gauss; questa volta non si ha alcun assurdo, dato che il campo elettrico è entrante e quindi il flusso è negativo e, se  $|Q| > |q|$ , allora anche il flusso secondo Gauss è negativo.

**DIGRESSIONE.** Da quanto detto, un sistema di cariche libere *dello stesso segno* non potrà mai restare in equilibrio stabile spontaneamente, ma necessariamente occorrono altre forze per vincolare le cariche.

Una conseguenza di ciò è che il modello classico dell'atomo non è stabile, esso basato su una distribuzione fissata di cariche: nel *nucleo atomico* non ci potrebbe essere più di un protone senza compromettere la stabilità del nucleo! È grazie all'interazione *nucleare forte* che, essendo particolarmente forte a distanze microscopiche, i protoni superano la repulsione elettrostatica tra di loro e permettono la stabilità dell'atomo.

## 4.2 CONDUTTORI

**DEFINIZIONE 4.2.1. - CONDUTTORE .**

Un **conduttore** è un materiale in cui alcune delle cariche elettriche che li costituiscono sono libere di muoversi.

Per caricare un conduttore possiamo utilizzare diversi metodi, ad esempio con dell'induzione elettrostatica, ma per mantenerlo carico abbiamo bisogno di tenerlo *isolato* da qualunque altro conduttore.

In presenza di un campo elettrico  $\vec{E}$ , le cariche libere all'interno possono muoversi in modo ordinato e dare vita ad una *corrente elettrica*, ma di questo ci occuperemo nel capitolo XXX. Dato che stiamo studiando i fenomeni elettrostatici, le cariche sono in equilibrio se non abbiamo un *moto di cariche*. Ciò si ha, in termini di condizione media macroscopica, se all'interno del materiale si ha

$$\vec{E} = 0 \quad (4.2)$$

Ci sono alcune conseguenze di questa condizione.

- Poiché il campo elettrico è nullo, qualunque superficie si consideri *all'interno* del conduttore avrà flusso nullo; per la legge di Gauss, questo significa che all'interno "stretto" del conduttore *non ci sono cariche*!

Con ciò non intendiamo che il corpo *non* è carico — senno che stiamo a studiarlo? — bensì che non c'è un eccesso di carica di un segno o dell'altro, ma questo eccesso può stare *solo* sulla superficie del conduttore, con distribuzione di carica superficiale

$$\sigma = \mathcal{P}q\Sigma$$

Per di più, questa distribuzione di carica *non* è generalmente uniforme, bensì si concentrano maggiormente dove il **raggio di curvatura** è *minore*.

- Poiché il campo elettrico è nullo, il potenziale deve essere una costante in ogni punto del conduttore; in particolare ciò è vero sui punti della superficie: pertanto, la superficie di un conduttore è sempre una *superficie equipotenziale*.
- Dato che la superficie del conduttore è equipotenziale, in un punto esterno vicino al conduttore il campo elettrico è *ortogonale* alla superficie del conduttore, indipendente da quale sia la sua forma. Vale pertanto il cosiddetto **teorema di Coulomb**.

**TEOREMA 4.2.1. - TEOREMA DI COULOMB .**

Il campo elettrico all'esterno di un conduttore con densità superficiale  $\sigma$  è

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n \quad (4.3)$$

□

Il verso è *uscente* il conduttore se la densità è positiva, *entrante* se è negativa.

- Ponendo a contatto due o più conduttori tramite un filo conduttore (trascurabile), si ottiene un unico corpo conduttore: all'equilibrio deve valere la condizione  $\vec{E} = 0$  e  $V = \text{const}$ , ossia il potenziale — che inizialmente poteva essere differenze su ciascun conduttore — deve diventare uguale su tutti i corpi.

**ESEMPIO.** Consideriamo due sfere di carica  $q_i$ , densità di carica  $\sigma_1$  costante e raggio  $R_i$ , per  $i = 1, 2$ . Dato che il campo elettrico esterno è  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$ , per

continuità del potenziale esse hanno potenziali pari a

$$V_1 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \qquad V_2 = \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}$$

Se le colleghiamo con un filo conduttore trascurabile, all'equilibrio il potenziale diventa unico e pari a  $V'_1 = V'_2 = V$  costante, con  $V'_i$  il potenziale su ciascuna sfera dopo averle collegate. Da questa relazione si ottiene come si distribuisce la carica totale

$$q_{tot} = q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$$

sulle sfere. Infatti, se  $\sigma'_i$  sono le densità di corrente sulle sfere *dopo* averle collegate, si ha

$$\begin{aligned} V'_1 &= V'_2 \\ \frac{\sigma'_1 R_1}{\varepsilon_0} &= \frac{\sigma'_2 R_2}{\varepsilon_0} \\ \frac{q'_1 R_1}{4\pi R_1^2} &= \frac{q'_2 R_2}{4\pi R_2^2} \\ \frac{q'_1}{R_1} &= \frac{q'_2}{R_2} \end{aligned}$$

Questa relazione trovata è una riconferma di quanto affermato in precedenza sui raggi di curvatura: più piccolo è il raggio di curvatura, maggiore sarà la carica in quei punti (e quindi anche maggiore sarà la densità di carica). Esplicitamente, come si distribuisce la carica tra le due sfere si ricava così:

$$\begin{aligned} q_{tot} = q'_1 + q'_2 &= q'_1 + \frac{R_2}{R_1} q'_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} q'_1 &\implies q'_1 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} q_{tot} \\ q_{tot} = q'_1 + q'_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} q_{tot} + q'_2 &\implies q'_2 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} q_{tot} \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Campo elettrico indotto

Per quanto osservato, si può notare come in un conduttore in equilibrio elettrostatico la carica debba avere lo stesso segno dappertutto per mantenere  $\vec{E} = 0$ . Questo, tuttavia, non è più vero nel momento in cui il conduttore è immerso in un campo elettrico esterno.

Ad esempio, consideriamo due piastre cariche di segno opposto in modo che tra di esse si forma un campo elettrico *uniforme*  $\vec{E}$ , diretto dall'armatura positiva a quella negativa. Ponendo un conduttore carico in mezzo alle due piastre, le cariche sono soggette ad una forza di Coulomb dovuta alle due piastre e si spostano nel conduttore: le cariche negative si spostano verso la piastra positiva, mentre le positive verso la piastra negativa, come in figura. La differenza tra le cariche interne al conduttore crea un **campo elettrico indotto**  $\vec{E}_i$ ; se lo consideriamo all'equilibrio, esso ha stessa direzione e intensità di  $\vec{E}$ , ma ha verso opposto in modo da avere all'interno del conduttore la condizione di equilibrio elettrico.

$$\vec{E}_i = -\vec{E} \tag{4.4}$$

Questo accade in generale anche se il conduttore è immerso in un generico campo elettrico, non necessariamente uniforme o generato da delle armature cariche: per avere l'equilibrio nel conduttore le cariche si devono disporre in modo che la differenza di carica all'interno

di esso generi un campo elettrico indotto uguale e opposto a quello del campo elettrico in cui il conduttore è immerso.

### 4.3 CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE

Come abbiamo ribadito più volte, parte delle cariche in un conduttore sono libere di muoversi. Se carichiamo un conduttore e poi lo *isoliamo*, possiamo *conservare* della carica elettrica al suo interno — e quindi dell'energia elettrica — che potrà eventualmente essere utilizzata successivamente per altri scopi. Ci interessa dunque *caratterizzare* i conduttori in base alla loro capacità di caricarsi.

**OSSERVAZIONE.** Per studiare un conduttore carico all'equilibrio, dalle osservazioni precedenti ci basta considerarlo come fosse una superficie carica  $\Sigma$  con densità di carica  $\sigma$ . La carica nel conduttore è

$$q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma$$

mentre il potenziale in un qualunque punto del conduttore è

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(x', y', z')}{|\vec{r}'|} d\Sigma$$

dove supponiamo, sempre per le osservazioni precedenti, di considerare l'*origine* del sistema di riferimento scelto all'interno del conduttore e di misurare il potenziale in tale punto — dopotutto, il potenziale è *costante* in tutto il conduttore.

Ora, osserviamo che se aumentassimo la carica sul conduttore da  $q$  a  $mq$ , si avrebbe un aumento sia della densità di carica di un fattore  $m$ , sia del potenziale sempre di un fattore  $m$ . Il loro rapporto, pertanto, rimane costante ed è indipendente da come aumenta la carica e il potenziale: pertanto, esso rappresenta quanto aumenta il potenziale del conduttore all'aumentare della carica.

#### DEFINIZIONE 4.3.1. - CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE .

La **capacità** di un conduttore è la misura di quanta carica elettrica bisogna fornire ad un conduttore isolato per aumentare il suo potenziale di un'unità.

$$C = \frac{q}{V} \tag{4.5}$$

Il potenziale in questa definizione è misurato rispetto ad un sistema di riferimento dove lo zero è posto sulla *terra*, considerato un conduttore di dimensioni *infinite* rispetto all'altro e tale per cui se collegassimo il conduttore carico alla terra la carica si disperdesse e il potenziale complessivo è nullo.

#### ESEMPIO - SFERA CONDUTTRICE DI RAGGIO $R$ .

In una sfera conduttrice di raggio  $R$ , all'equilibrio la carica è distribuita uniformemente sulla superficie con densità  $\sigma$ . Si ha

$$q = \int_{\Sigma} \sigma d\Sigma = \sigma \int_{\Sigma} d\Sigma = \sigma A_{sfera} = 4\pi R^2 \sigma$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma}{|\vec{r}'|} d\Sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{R} \int_{\Sigma} d\Sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

La capacità del conduttore è

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (4.6)$$

Osserviamo che la capacità della sfera non dipende dal materiale, ma solo dal raggio. Questo non è un caso: la capacità è solamente una funzione della *geometria* del conduttore, ma non del materiale con cui è fatto, dalla carica che c'è sopra o dal potenziale in esso (o meglio, differenza di potenziale).

**ESEMPIO.** Riprendendo il caso delle due sfere conduttrici collegate da un filo trascurabile, come cambia la capacità? La carica complessiva  $q_{tot}$  è data dalla somma delle cariche  $q_1$  e  $q_2$  sulle due sfere, mentre il nuovo potenziale  $V$  del sistema è costante e uguale su entrambe le sfere. Segue allora

$$C = \frac{q_1 + q_2}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} = 4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2) = C_1 + C_2 \quad (4.7)$$

ossia la capacità del sistema di due conduttori collegati da un filo è dato dalla somma delle due capacità dei singoli condensatori.

### Unità di misura

#### UNITÀ DI MISURA.

**CARICA ELETTRICA:** farad (F) o coulomb su volt ( $\frac{C}{V}$ ).

**Dimensioni:**  $[C] = \frac{[q]}{[V]} = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$ .

Come per la maggior parte delle unità di misura che si affrontano nell'elettromagnetismo, le capacità utilizzate in ambito pratico sono generalmente di molti ordini di magnitudine minori del farad, cioè siamo praticamente obbligati ad utilizzare sempre dei *sottomultipli* del farad, ad esempio:

- *millifarad*:  $1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$ .
- *microfarad*:  $1 \text{ }\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ .
- *nanofarad*:  $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ .
- *picofarad*:  $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ .

**OSSERVAZIONE.** Si osservi che

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2 \text{ m}^2}{\text{N}} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

**ESEMPIO.** Una sfera di rame di raggio

- $R = 0,1 \text{ m}$  ha capacità  $C = 11 \text{ pF}$ .
- $R = 6,7 \cdot 10^6 \text{ m}$ , cioè una sfera con raggio quello terrestre, ha capacità  $C = 0,74 \text{ mF}$ .

### 4.4 CONDUTTORE CAVO

Consideriamo un conduttore volumico che non sia pieno, ma che presenta al suo interno una *cavità* senza cariche al suo interno: tale conduttore presenta ora due superfici, una

*esterna* e una *interna*. Nel caso del conduttore pieno sappiamo che, all'equilibrio, le cariche si distribuiscono sulla superficie esterna.

Sorprendentemente, ciò succede anche nel caso del conduttore cavo: non ci sono cariche nella superficie interna e si distribuiscono *esattamente* come nel caso senza cavità.

**PROPOSIZIONE 4.4.1. - UN CONDUTTORE CAVO HA CAMPO ELETTRICO NULLO AL SUO INTERNO.**

*Un conduttore cavo che non presenta cariche all'interno delle cavità si comporta come un conduttore pieno con la stessa geometria. In particolare, le cariche elettriche all'equilibrio si distribuiscono solamente sulla superficie esterna,*

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che, quando consideriamo l'equilibrio elettrostatico, il campo interno al conduttore deve essere nullo. Se consideriamo una superficie  $\Sigma$  che circonda completamente la cavità, ma giace interamente all'interno del materiale conduttore, il flusso tramite tale superficie è nullo in quanto il campo elettrico nei punti della superficie è nullo.

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0$$

Applicando la *legge di Gauss*, segue che la carica *complessiva* interna a  $\Sigma$  deve essere nulla.

$$q_{tot,\Sigma \text{ interna}} = 0 \quad (4.8)$$

Ciò nonostante, questo non preclude ancora la possibilità che ci sia una quantità uguale di cariche positive e negative nella superficie interna del conduttore in modo che  $q_{tot,\Sigma \text{ interna}}$  sia nulla. Per escludere tale possibilità, consideriamo un circuito chiuso  $\gamma$  arbitrario che interseca la superficie interna; sappiamo che la *circuitazione* lungo  $\gamma$  del campo elettrico è nulla, tuttavia:

- l'integrale di linea lungo la parte di  $\gamma$  contenuta nella cavità NON sarebbe nullo se, per assurdo, ci fossero cariche sulla superficie, dato che ci sarebbe un campo elettrico *non* nullo.
- l'integrale di linea lungo la parte di  $\gamma$  contenuta nel conduttore sarebbe, invece, nullo perché  $\vec{E} = 0$  dentro il conduttore.

Pertanto *non* ci possono essere cariche sulla superficie interna e pertanto anche *dentro* la cavità il campo elettrico deve essere nullo.  $\square$

Questo è vero anche in presenza di un *campo elettrico esterno*  $\vec{E}$ . In tal caso, come succede nel conduttore, all'interno della cavità si viene a formare un campo indotto  $\vec{E}_i$  dalla separazione delle cariche che controbilancia quello esterno in modo che il campo complessivo all'interno sia nullo.

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E} + \vec{E}_i = 0$$

#### 4.4.1 Conduttore cavo con carica

Consideriamo, all'equilibrio, una sfera conduttrice cava (inizialmente non carica) di raggio  $R_3$  e raggio della cavità  $R_2$ ; al suo interno prendiamo un'ulteriore sfera conduttrice di raggio  $R_1 < R_2$ , e supponiamo che quest'ultima abbia una carica  $Q$  positiva. Sappiamo che nella sfera interna il campo elettrico è nullo; la stessa cosa succede sulla *sfera esterna*, ma è meno ovvio.

La sfera carica genera un campo elettrico radiale che, all'esterno di essa, *non* è nullo e attraversa la sfera esterna. Le cariche nel conduttore esterno si dispongono come

se fosse attraversati da un *campo elettrico esterno*; in particolare le cariche *negative* si posizionano lungo la superficie *interna*, mentre quelle *positive* sono respinte sulla superficie esterna in modo che le cariche sulla superficie interna  $q_{int}$  controbilancino quelle sulla superficie esterna  $q_{ext}$ . Diremo che questo tipo di campo elettrico è un caso di **induzione totale**.

**DEFINIZIONE 4.4.1. - INDUZIONE COMPLETA .**

Diciamo che si ha **induzione completa** se le linee di campo elettrico generato da un conduttore terminano completamente in un altro conduttore e, pertanto, il conduttore induce totalmente la sua carica al secondo.

Ora, consideriamo una superficie ipotetica  $\Sigma$  che è contenuta nella sfera esterna e che contiene la cavità. Perché siamo all'equilibrio si ha  $\vec{E} = 0$ , il flusso è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0$$

Ma per la legge di Gauss la carica complessiva è  $q_{tot} = 0$ . Necessariamente, sulla superficie interna deve affacciarsi una carica  $q_{int} = -Q$ , da cui si ha che  $q_{ext} = Q$ .

Il campo elettrico indotto dovuto dalla disposizione di cariche *controbilancia* quello della sfera interna quindi all'interno del conduttore esterno non c'è campo elettrico. Invece, al di fuori del conduttore esterno si verifica nuovamente il campo elettrico dovuto alla sfera carica interna.

La situazione è quindi la seguente, al variare della distanza radiale  $r$ :

- Punti nella sfera interna ( $S_1$ ):  $r < R_1$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = 0 \\ V(r) = k_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Punti nella cavità:  $R_1 < r < R_2$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Punti nella sfera esterna ( $S_2$ ):  $R_2 < r < R_3$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = 0 \\ V(r) = k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Punti esterni:  $r > R_3$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + k_4, \quad k_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fissiamo le costanti imponendo le condizioni di passaggio:

- $V(\infty) = \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0 \implies k_4 = 0.$
- $V_{esterno}(R_3) = V_{S_2}(R_3) \implies k_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}.$
- $V_{S_2}(R_2) = V_{cavit}(R_2) \implies k_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right).$
- $V_{cavit}(R_1) = V_{S_1}(R_1) \implies k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$



Ricapitolando:

- Punti nella sfera interna ( $S_1$ ):  $r < R_1$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = 0 \\ V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{cases}$$

- Punti nella cavità:  $R_1 < r < R_2$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \end{cases}$$

- Punti nella sfera esterna ( $S_2$ ):  $R_2 < r < R_3$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = 0 \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \end{cases}$$

- Punti esterni:  $r > R_3$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$

In presenza di un campo elettrico *esterno* si può trovare che, sebbene all'esterno della sfera conduttrice il campo esterno è modificato da quello generato dalla sfera interna, all'interno della cavità è presente *al più* quello dato dalla carica interna.

Prima di vedere qualche altro caso analogo, per motivi che saranno chiari tra un poco ci interessa calcolare la differenza di potenziale tra la sfera interna e la sfera esterna.

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

**Conduttore cavo collegato alla carica interna** Colleghiamo le due sfere con un filo conduttore trascurabile. I due conduttori sono ora allo stesso potenziale, le cariche su  $S_2$  si dispongono sulla superficie della sfera esterna: funzionalmente otteniamo in tutto e per tutto un conduttore cavo senza alcun oggetto carico nell'ambiente interno.

Ricapitolando:

- Punti interni:  $r < R_3$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = 0 \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3^2} \end{cases}$$

- Punti esterni:  $r > R_3$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{cases}$$

**Conduttore cavo collegato alla terra** Supponiamo invece di prendere il sistema originale e di collegare il conduttore esterno alla *terra*: in questo modo, le cariche esterne si disperdono nella Terra, dato che la sfera esterna collegata alla terra è come se fosse un unico conduttore di dimensioni *infinite*. Il campo elettrico anche *all'esterno* è *nullo* e, necessariamente, anche il potenziale è *nullo*, dato che il conduttore è allo stesso potenziale della terra, che per convenzione si fissa a 0.

Le *uniche* cariche presenti sulla superficie esterna sono le *cariche negative* che si dispongono

sulla superficie interna per contrastare il campo elettrico generato dalla carica nella cavità.

Ricapitolando:

- Punti nella sfera interna ( $S_1$ ):  $r < R_1$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = 0 \\ V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{cases}$$

- Punti nella cavità:  $R_1 < r < R_2$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ V(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{cases} \end{cases}$$

- Punti non nella cavità:  $r > R_2$  e

$$\begin{cases} E_r(r) = 0 \\ V(r) = 0 \end{cases}$$

**Schermo elettrostatico** Tutti questi esempi ricadono nel fenomeno dello **schermo elettrostatico**, detto anche **schermo di Faraday**.

#### DEFINIZIONE 4.4.2. - LOL.

Uno **schermo elettrostatico**, detto anche **schermo di Faraday**, è un sistema costituito da un contenitore - non necessariamente continuo - di materiale conduttore in modo da isolare l'ambiente interno da un campo elettrostatico esterno.

#### DIGRESSIONE - GABBIA DI FARADAY.

Una **gabbia di Faraday** è uno schermo di Faraday che presenta delle aperture e, di conseguenza, sono più complesse da analizzare.

Anticipando che i campi elettromagnetici si propagano come onde, uno schermo continuo come il *conduttore cavo* attenua essenzialmente tutte le lunghezze d'onda più corte dello spessore della pelle, i buchi nella gabbia possono permettere alle lunghezze d'onda più corte di attraversarli. Più corta è la lunghezza d'onda, più facilmente passa attraverso una maglia di determinate dimensioni. Così, per lavorare bene con lunghezze d'onda brevi, cioè ad alte frequenze, i fori nella gabbia devono essere *più piccoli* della lunghezza d'onda dell'onda incidente.

## 4.5 CONDENSATORI

#### DEFINIZIONE 4.5.1. - CONDENSATORE.

Un **condensatore** è un sistema di conduttori, i quali sono separati da una differenza di potenziale  $\Delta V$  e tra i quali c'è induzione completa.

**NOTAZIONE.** Spesso abbrevieremo la differenza di potenziale con d.d.p.

La maggior parte dei condensatori sono costituite da due o più conduttori elettrici nella forma di piastre metalliche o superfici separate dal vuoto o da un materiale dielettrico<sup>1</sup>, dette **armature**.

<sup>1</sup>Vedremo nel capitolo XXX la definizione di materiale dielettrico.

Dalla legge di Coulomb una carica su un'armatura eserciterà una *forza* sulle cariche dell'altro conduttore, attraendo cariche del segno opposto e respingendo cariche uguali. Per quanto visto con i conduttori cavi, la carica totale  $q$  su un'armatura deve essere uguale ma opposta a quella sull'armatura che le sta di fronte, creando un campo elettrico tra i due conduttori.

Lo scopo principale dei condensatori non è solo quello di *deposito* di cariche elettriche nelle armature, ma anche di immagazzinare **energia elettrica** nel campo elettrico; possiamo crearlo se applichiamo una d.d.p. tra le armature. Per misurare questa proprietà di immagazzinare carica, ci interessa definire, in modo analogo a come abbiamo fatto per i conduttori, una **capacità** dei condensatori.

**DEFINIZIONE 4.5.2. - CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE .**

La **capacità** di un condensatore è la misura di quanta carica elettrica bisogna fornire ad un'armatura del condensatore per aumentare di un'unità la d.d.p. tra le armature.

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad (4.9)$$

Come era per i conduttori, anche la capacità dei condensatori è dipendente esclusivamente dalla *geometria* del conduttore, ma non del materiale con cui è fatto, dalla carica che c'è sopra o dal potenziale in esso (o meglio, differenza di potenziale).

**OSSERVAZIONE.** Generalmente, si presuppone di costruire dei condensatori la cui distanza tra le armature sia *molto più piccola* dello spessore delle armature - in modo che sostanzialmente i condensatori considerati siano praticamente uguali anche in termini di dimensioni - e di studiare la differenza di potenziale a debita distanza dal *bordo* in modo da evitare eventuali effetti non graditi.

**Condensatore piano** Consideriamo due armature piane, distanti  $d = x_2 - x_1$ ; supponiamo che tale distanza sia molto più piccola della larghezza e altezza media delle armature; per dare un confronto dimensionalmente sensato, potremmo dire

$$d^2 \ll \Sigma \quad (4.10)$$

dove  $\Sigma$  è l'area della superficie.

Il campo elettrico tra due armature piane, lontano dai bordi, è

$$E(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\Sigma \epsilon_0}$$

La differenza di potenziale tra le armature è quindi

$$\Delta V = \int_{x_1}^{x_2} \frac{q}{\Sigma \epsilon_0} dx = \frac{qd}{\Sigma \epsilon_0}$$

e quindi la capacità del condensatore piano è

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \quad (4.11)$$

**Condensatore cilindrico** Consideriamo un conduttore cilindrico con armatura interna di raggi  $R_1$ , armatura esterna di raggi  $R_2$  e  $R_3$ . In modo analogo a come abbiamo trovato che il campo elettrico di un cilindro uniformemente carico, il campo elettrico nella cavità è

$$E(R) = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L r}, \quad R_1 < R < R_2$$

Allora la d.d.p. è

$$\Delta V = V(R_2) - V(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} E_R(R) dR = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \log \frac{R_2}{R_1}$$

Se consideriamo la distanza tra le armature molto più piccola dei raggi, possiamo considerare le armature come se fossero due cilindri di raggio molto vicino ad  $R$ :

$$d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2 \implies R \sim R_2 \sim R_1$$

Supponiamo, inoltre, di studiare il campo elettrico (e quindi il potenziale) lontano dai bordi, onde evitare effetti di bordo non desiderati e difficili da descrivere.

$$d \ll L$$

Fissato ciò, si può sviluppare il logaritmo con Taylor per ottenere

$$\log \frac{R_2}{R_1} = \log \left( 1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) \simeq \frac{d}{R_1} \simeq \frac{d}{R}$$

da cui

$$\Delta V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{d}{R}$$

e quindi la capacità del condensatore cilindrico è

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 RL}{d} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \quad (4.12)$$

dove  $\Sigma = 2\pi RL$  è la superficie dell'armatura cilindrica.

**Condensatore sferico** Dallo studio del condensatore sferico abbiamo visto che la differenza di potenziale tra le

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right)$$

Se consideriamo la distanza tra le armature molto più piccola dei raggi, possiamo considerare le armature come se fossero due sfere di raggio molto vicino ad  $R$ :

$$d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2 \implies R \sim R_2 \sim R_1$$

Fissato ciò, si ha

$$\Delta V \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{d}{R^2} \right)$$

e quindi la capacità del condensatore sferico è

$$C \simeq 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{R^2}{d} \right) = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \quad (4.13)$$

dove  $\Sigma = 4\pi R^2$  è la superficie dell'armatura sferica.

#### 4.5.1 Condensatori in serie e in parallelo

Per caricare dei condensatori e immagazzinarci dell'energia possiamo fornire cariche ad una delle armature tramite un collegamento conduttivo esterni, come dei *fili metallici*, e poi scaricare le cariche dall'altra armatura con un altro filo. La quantità di carica che si va a depositare sulle armature è *proporzionale* alla d.d.p. tra le armature - che possiamo controllare collegando ai capi delle armature una batteria o un generatore con dei fili. Quello che abbiamo descritto è un semplice tipo di **circuito elettrico**.

In questo capitolo non daremo una definizione più precisa di circuito o andremo nel dettaglio del loro funzionamento, ma lo faremo quando parleremo di *corrente elettrica* nel Capitolo 5; nel frattempo anticipiamo ora due concetti importanti nel loro studio.

##### DEFINIZIONE 4.5.3. - COLLEGAMENTO IN SERIE E IN PARALLELO .

- Due o più componenti sono collegate **in serie** se tutte sono collegate lungo un unico "percorso elettrico", in cui ogni componente è collegata direttamente ad una sola altra componente.
- Due o più componenti sono collegate **in parallelo** se le componenti sono connesse su *rami* separati del "percorso elettrico".

Si possono già fare alcune osservazioni:

- In un collegamento *in serie*, la *carica totale*  $q$  rimane costante lungo il percorso e ogni oggetto riceve la *stessa*<sup>2</sup>; di conseguenza, vedremo che anche la *corrente* risulta essere sempre la *stessa* in ogni componente.
- In un collegamento *in parallelo*, la carica si *distribuisce* nei vari rami in modo proporzionale alle caratteristiche delle componenti, e lo stesso fa la corrente elettrica. La carica e la corrente complessiva in un collegamento in parallelo è quindi la somma di quella nei vari fili.
- In un collegamento *in serie*, la differenza di potenziale diminuisce per ogni componente che è presente nel filo. Pertanto, la d.d.p. in un collegamento in serie è la somma di quella tra tutte i capi delle componenti.
- In un collegamento *in parallelo*, la differenza di potenziale è la stessa ai capi di ogni componente, perché metà delle estremità sono attaccate allo stesso filo e l'altra metà ad un altro filo.

L'idea cardine dello studio dei circuiti elettrici è di *semplificarli* il più possibile, quanto meno ipoteticamente: se abbiamo diversi oggetti elettrici collegati nel circuito caratterizzati da delle quantità particolari  $Z_i$ , ci immaginiamo di sostituire diversi elementi dello stesso tipo (collegati in serie e in parallelo) con un'unica componente **equivalente** caratterizzata da una quantità  $Z_{eq}$  che deriva da quelle delle componenti singole.

**Condensatori in serie** Consideriamo due condensatori  $C_1$  e  $C_2$ : la piastra inferiore del primo è collegata alla superiore della seconda, in serie. Per quanto osservato, la carica complessiva è la stessa in ogni componente:

$$q_1 = q_2 = q_{tot}$$

Al contrario, il potenziale diminuisce ad ogni nuovo condensatore che si incontra lungo il filo e in particolare la d.d.p. ai capi dell'intero sistema è la somma delle d.d.p. ai capi delle

<sup>2</sup>Non necessariamente sono le stesse identiche cariche: ad esempio, nel caso dei condensatori le cariche che partono dall'altra piastra collegata *non* sono le stesse che sono arrivate sull'altra, bensì sono cariche respinte da quelle presenti nell'altra armatura. In ogni caso, ciò che non cambia è la *quantità* di carica totale.

singole componenti.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Allora, se

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V_1} = \frac{q_{tot}}{\Delta V_1} \qquad C_2 = \frac{q_2}{\Delta V_2} = \frac{q_{tot}}{\Delta V_2}$$

si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un condensatore di capacità

$$C_{eq} = \frac{q_{tot}}{\Delta V} = \frac{q_{tot}}{\Delta V_1 + \Delta V_2} \implies \frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{q_{tot}} + \frac{\Delta V_2}{q_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.14)$$

Nel caso generale di  $n$  condensatori in serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (4.15)$$

**Condensatori in parallelo** Consideriamo due condensatori  $C_1$  e  $C_2$ , le cui piastre superiori sono collegate ad uno stesso filo, e si ha una cosa simile con le piastre inferiori. Per quanto osservato, la carica complessiva si distribuirà nei due fili:

$$q_{tot} = q_1 + q_2$$

Poiché le piastre superiori sono collegate dallo stesso filo, essendo questo un unico conduttore equipotenziale, si ha in entrambe le armature in alto lo stesso potenziale  $V_1$ . Lo stesso vale per le armature inferiori, che sono collegate da uno stesso filo e quindi hanno potenziale  $V_2$ . Segue che la d.d.p.  $\Delta V_1$  tra le piastre del primo condensatore di capacità  $C_1$  e la d.d.p.  $\Delta V_2$  tra le piastre del secondo condensatore di capacità  $C_2$  è la stessa:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

Allora, se

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V_1} = \frac{q_1}{\Delta V} \qquad C_2 = \frac{q_2}{\Delta V_2} = \frac{q_2}{\Delta V}$$

si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un condensatore di capacità

$$C_{eq} = \frac{q_{tot}}{\Delta V} = \frac{q_1 + q_2}{\Delta V} = \frac{q_1}{\Delta V} + \frac{q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (4.16)$$

Nel caso generale di  $n$  condensatori in parallelo:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (4.17)$$

#### 4.6 LAVORO DI CARICA DI UN CONDENSATORE ED ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL CONDENSATORE

Per creare una separazione di carica  $q$  nel condensatore, ossia portare la carica  $Q$  dalla piastra negativa alla piastra positiva (dal potenziale minore a quello maggiore), una fonte di energia esterna deve compiere un certo **lavoro** per opporre tale spostamento alla forza del campo elettrico, che la riporterebbe alla piastra originale. L'energia  $U$  che viene fornita sotto forma di lavoro  $W$  incrementa il potenziale da 0 fino ad avere una differenza di potenziale  $\Delta V$ , cioè corrisponde all'energia necessaria per creare partendo da armature scariche il *campo elettrico*.

Posto  $\Delta V = V(q) - V(0) = V$  e dunque  $V = \frac{q}{C}$ , si ha

$$W = U = \int_0^q dU = \int_0^q dV = \int_0^q V(Q)dQ = \int_0^q \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Big|_0^q = \frac{q^2}{2C}$$

$$W = U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \quad (4.18)$$

Questa energia è immagazzinata fondamentalmente nel campo elettrico. Ad esempio, consideriamo un condensatore ad armature piane cdi superficie  $\Sigma$  a distanza  $d$ ; il suo campo elettrico tra le armature è

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\Sigma \varepsilon_0}$$

e la sua capacità è

$$C = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d}$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{E^2 \Sigma^2 \varepsilon_0^2 d}{2 \varepsilon_0 \Sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Sigma d$$

Osserviamo come  $\Sigma d$  corrisponde al volume  $Vol$  occupato dal campo elettrico tra le facce del condensatore: l'ultima formula è uguale alla **densità di energia per unità di volume**

$$\mu_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (4.19)$$

moltiplicata per il volume  $Vol$  di campo elettrico, confermando che l'energia del condensatore non è conservata nelle piastre, ma nel *campo elettrico*

#### 4.7 ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

In generale, il campo elettrico immagazzina *sempre* dell'energia nel campo stesso, dato che è l'energia necessaria a separare le cariche richieste per generare il campo elettrico. Tale energia, in un certo volume  $V$ , è pari a

$$U = \int_V \mu_E dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V |\vec{E}(r)|^2 dV \quad (4.20)$$

dove  $\mu_E$  è la densità di energia elettrostatica, definita come nell'equazione (4.19).

#### 4.8 PRESSIONE ELETTROSTATICA

In un condensatore le piastre sono caricate con segno opposto: questo comporta l'esistenza di una forza che tende a farle *attrarre*. Questa forza è

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{U}} \quad (4.21)$$

dove  $U$ , nel caso di un condensatore ad armature piane, è

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \Sigma}$$

In modulo, tale forza è

$$F = \left| \frac{\partial U}{\partial d} \right| = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} \quad (4.22)$$

La **pressione elettrostatica** percepita dalle piastre è

$$P = \frac{F}{\Sigma} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad (4.23)$$



# CORRENTE ELETTRICA

*“Se la tua nuova teoria si può esprimere con grande semplicità, allora esisterà un’eccezione patologica ad esso!”*

*ADRIAN MATHESIS, adirato per essere stato bocciato da Riemann.*

**N**ei capitoli precedenti abbiamo esplorato i fenomeni elettrostatici.

## 5.1 CORRENTE ELETTRICA E FORZA ELETTROMOTRICE

I conduttori *metallici* sono costituiti, a livello microscopico, da un *reticolo spaziale* i cui vertici sono *ioni positivi*, cioè atomi che hanno perso uno o più elettroni, e al cui interno si muovono gli *elettroni liberi*, gli unici portatori di carica nei metalli. Ciascuno di questi elettroni è libero di muoversi in una sua direzione e con una propria velocità, dovute alla situazione termica dell’oggetto. Non è evidentemente fattibile studiare il moto di *ogni* singolo elettrone, dato che il numero di elettroni liberi in un conduttore è estremamente elevato.

### ESEMPIO - ELETTRONI LIBERI IN DIVERSI MATERIALI .

Ricordiamo che la **costante di Avogadro** è definito come il numero di particelle per mole di un qualunque materiale:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

In questo caso, dato che per ogni atomo di metallo c’è generalmente un elettrone libero, questo numero corrisponde al numero di *elettroni liberi* in una mole di un certo elemento chimico.

Definiamo  $\rho$  la densità del materiale e  $A$  il numero di massa, cioè quanti grammi pesa una mole del materiale; possiamo calcolare la **densità di carica** in diversi materiali.

#### ■ Rame (Cu)

$$n_{\text{Cu}} = \frac{N_A \cdot \rho_{\text{Cu}}}{A_{\text{Cu}}} = \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{63,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ el/m}^3$$

### ■ Argento (Ag)

$$n_{\text{Ag}} = \frac{N_A \cdot \rho_{\text{Ag}}}{A_{\text{Ag}}} = \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 10,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{107,87 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ el/m}^3$$

L'ordine di grandezza è lo stesso per tutti i conduttori metallici.

Ci conviene studiare il moto medio degli  $N$  elettroni nel materiale. Tuttavia, in *assenza* di un campo elettrico non percepiamo alcun movimento preferenziale degli elettroni: ogni elettrone si muove in modo del tutto *casuale* e dunque la somma dei loro moti, e di conseguenza la velocità media, sarà *nulla*:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = 0 \quad (5.1)$$

Consideriamo invece la seguente situazione: prendiamo un conduttore con potenziale  $V_1$  e lo colleghiamo ad un altro conduttore con potenziale  $V_2 > V_1$  tramite un filo trascurabile. Sappiamo che il campo elettrico tra i conduttori è diretto dal potenziale maggiore al minore; gli elettroni - portatori di carica negativi - andranno dal primo conduttore verso il secondo tramite il filo che li collega in un tempo il cui limite inferiore è dell'ordine di

$$t \sim \frac{d}{c},$$

dove  $d$  è la lunghezza del filo e  $c$  la *velocità della luce*, fino a raggiunge l'equilibrio.

$$V'_1 = V'_2 = V$$

Siamo in presenza del fenomeno di **conduzione elettrica**.

#### DEFINIZIONE 5.1.1. - CORRENTE ELETTRICA .

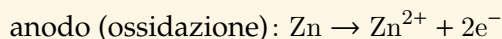
Un moto *ordinato* di elettroni liberi di un conduttore in una certa direzione è detto una **corrente elettrica**.

Dato che la velocità della luce è estremamente elevata, l'equilibrio è raggiunto quasi istantaneamente e la corrente elettrica è di breve vita. Per poter indurre un moto consistente e *duraturo* di cariche dobbiamo *mantenere* una differenza di potenziale.

Per far ciò, ci serve un **generatore di forza elettromotrice** (f.e.m.), un marchingegno che trasforma energia *non* elettrica in energia elettrica tale da avere, ai capi del generatore, una differenza di potenziale  $\Delta V$ , *indipendentemente* da cosa ci si collega.

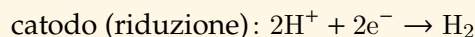
#### DIGRESSIONE - PILA DI VOLTA .

Il primo generatore di questo tipo fu la **pila di Volta**. Tale generatore consisteva, nella sua forma più semplice costituita da una singola *cella*, in un disco di *zinco* (lo chiameremo **anodo**) e uno di *rame* (il **catodo**), separate da una stoffa imbevuta di una soluzione elettrolitica come acqua e acido solforico. Lo zinco sulla superficie dell'anodo è ossidato dalla soluzione elettrolitica e si dissolve nell'elettrolita come ioni carichi positivamente, lasciando due elettroni liberi nel metallo.



Quando lo zinco entra nell'elettrolita, due atomi positivi di idrogeno dell'elettrolita accettano due elettroni dalla superficie del catodo di rame, riducendosi ad una molecola

di idrogeno non carica.



Gli elettroni usati nel rame per formare le molecole di ossigeno provengono da un filo esterno che lo collega al disco di zinco; l'idrogeno prodotto nella riduzione si disperde in forma gassosa.

Misurando la d.d.p. tra i dischi si osserva un valore fisso di circa 0,76 V; se impilassimo più celle la differenza di potenziale aumenterebbe. Il valore della d.d.p. misurata dipende dalla coppia di metalli scelti.

### 5.1.1 Intensità di corrente

#### DEFINIZIONE 5.1.2. - INTENSITÀ DI CORRENTE .

L'**intensità di corrente elettrica** è definita come la rapidità con cui fluiscono delle cariche attraverso una certa superficie  $\Sigma$ :

$$I = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (5.2)$$

**ATTENZIONE!** La corrente viene studiata per ragioni storiche supponendo che a muoversi siano *cariche positive*, anche se nella maggior parte dei materiali che conducono corrente elettrica (ad esempio, i metalli) la corrente è portata da *cariche negative*.

#### DEFINIZIONE 5.1.3. - VELOCITÀ DI DERIVA .

La **velocità di deriva** è la velocità media che hanno  $N$  particelle cariche in un materiale a causa di un campo elettrico  $\vec{E}$ :

$$\vec{v}_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad (5.3)$$

La velocità di deriva ha la stessa direzione del campo elettrico.

I concetti di velocità di deriva e intensità di corrente, come possiamo facilmente immaginare, sono strettamente correlati. Consideriamo un filo conduttore percorso da portatori di carica con carica  $e$ : essendo in presenza di una forza elettromotrice - e quindi di un campo elettrico - le cariche si muovono mediamente con velocità di deriva  $\vec{v}_d$  e percorreranno, in un intervallo infinitesimo di tempo  $\Delta t$ , un tratto di filo

$$d = |\vec{v}_d| \Delta t$$

La carica complessiva che passa attraverso una superficie infinitesima  $d\Sigma$  in un tempo  $\Delta t$  è quella contenuta in  $\Delta V$ , che corrisponde al volume di un cilindro infinitesimo di basi  $d\Sigma \vec{u}_n \cdot \hat{u}_d$  e altezza  $d$ , dove  $\vec{u}_n$  è il versore normale alle superficie e  $\hat{u}_d$  è il versore nella direzione e verso della velocità di deriva:

$$\begin{aligned} dV &= d\Sigma \vec{u}_n \cdot \hat{u}_d d = d\Sigma \vec{u}_n \cdot \hat{u}_d |\vec{v}_d| \Delta t \\ &= d\Sigma \vec{u}_n \cdot \vec{v}_d \Delta t = \\ &= d\Sigma \cos \theta |\vec{v}_d| \Delta t \end{aligned}$$

$$\Delta q = n_+ e dV = n_+ e d\Sigma \vec{u}_n \cdot \vec{v}_d \Delta t =$$

$$n_+ e d\Sigma \cos \theta |\vec{v}_d| \Delta t$$

Qui  $\theta$  è l'angolo tra i due versori,  $n_+$  la densità di cariche positive liberi per unità di volume ed  $e$  la carica delle particelle libere. La carica di corrente infinitesima è dunque

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\Delta q}{\Delta t} = n_+ e dV = n_+ e d\Sigma \vec{u}_n \cdot \vec{v}_d = \\ &= n_+ e d\Sigma \cos \theta |\vec{v}_d| \end{aligned}$$

Possiamo semplificare questa notazione introducendo il concetto di **densità di corrente**.

#### DEFINIZIONE 5.1.4. - DENSITÀ DI CORRENTE .

La **densità di corrente** è il campo vettoriale che ad ogni punto in un conduttore associa un vettore, la cui direzione è la velocità di deriva delle cariche *positive* in tal punto e il cui modulo è pari alla quantità di carica che attraversa in un unità di tempo un unità di area della sezione perpendicolare del conduttore in tal punto. In altre parole,

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d \quad (5.4)$$

Riscrivendo,

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

da cui si ottiene che l'intensità di corrente attraverso una superficie finita  $\Sigma$  è

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \Phi_{\Sigma}(\vec{j}) \quad (5.5)$$

Se, come nei conduttori metallici, i portatori di carica (con carica  $-e$ ) sono negativi, la velocità di deriva  $\vec{v}_{d,-}$  ha stessa direzione e verso opposto del campo elettrico; la densità di corrente è invece nella stessa direzione del campo elettrico perché la carica è negativa:

$$\vec{j} = -n_- e \vec{v}_{d,-} \quad (5.6)$$

Se consideriamo invece fluidi ionizzati, soluzioni elettrolitiche o semiconduttori, i portatori di carica sono di segno misto e possono avere velocità di deriva differenti  $\vec{v}_{d,+}$  e  $\vec{v}_{d,-}$ . La densità è ottenuta come una somma vettoriale di due quantità concordi che hanno lo stesso verso del campo elettrico:

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_{d,+} - n_- e \vec{v}_{d,-} \quad (5.7)$$

#### Unità di misura

##### UNITÀ DI MISURA.

**CORRENTE ELETTRICA:** ampere (A).

**Dimensioni:**  $[I] = I$

L'**ampere** - e non il *coulomb*, come ci si potrebbe aspettare - è l'unica unità di misura fondamentale del SI che introdurremo in questa trattazione. Come precedentemente detto, 1 C è definito come la carica che una corrente da 1 A attraversa una data superficie in 1 s. Nella pratica sono utilizzati i suoi *sottomultipli*, ad esempio: *sottomultipli*, ad esempio:

- *milliampere*:  $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$ .
- *microampere*:  $1 \text{ }\mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$ .
- *nanoampere*:  $1 \text{ nA} = 10^{-9} \text{ A}$ .

**UNITÀ DI MISURA.****DENSITÀ DI CORRENTE:** ampere su metro quadro  $\left(\frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right)$ .**Dimensioni:**  $[j] = \frac{[I]}{[\Sigma]} = \text{IL}^{-2}$ 

## 5.1.2 Conservazione della carica e corrente elettrica

Data una densità  $\vec{j}$ , abbiamo trovato che la carica totale che passa nell'unità di tempo attraverso un volume  $V$  è data dal flusso della densità tramite il bordo della  $\Sigma$ :

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

Sulla superficie, l'integrando  $\vec{j} \cdot \hat{u}_n$  non ha necessariamente segno costante; dato che  $\vec{j}$  ha direzione dipendente dalla carica di deriva, segno diversi corrispondono a due situazioni differenti.

- quando le cariche *negative entrano* la superficie o le cariche *positive escono*,  $\vec{j} \cdot \hat{u}_n < 0$ .
- quando le cariche *negative escono* la superficie o le cariche *positive entrano*,  $\vec{j} \cdot \hat{u}_n > 0$ .

Dal *principio di conservazione della carica* nessuna carica nel conduttore (isolato) si può annichilire e sparire, e quindi la carica complessiva deve rimanere *costante*. Se la carica interna  $q_{int}$  alla superficie diminuisce, tale carica deve essere uscita dalla superficie e quindi ha cambiato l'intensità di corrente  $I$  che l'attraversa; in particolare, essa dovrà corrispondere alla *variazione temporale* della carica interna

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} \quad (5.8)$$

Il meno nell'espressione è dato dal fatto che se l'integrale è complessivamente positivo, ciò corrisponde ad una *diminuzione* della carica interna - che ricordiamo si considera rispetto a quella positiva - e pertanto ha derivata negativa.

Se  $V$  è il volume racchiuso da una superficie chiusa  $\Sigma$ , la carica interna è ovviamente

$$q_{int} = \int_V \rho dV$$

Possiamo derivare temporalmente entrambi i termini e scambiare<sup>1</sup> integrale e derivata in quanto il volume è invariante temporalmente.

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Usando il *teorema della divergenza* si ha, per qualsiasi volume  $V$ , che

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

ottenendo quindi **lequazione di continuità**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.9)$$

<sup>1</sup>Non motiveremo *rigorosamente* perché si può fare questo scambio. Gli analisti si mettano il cuore in pace.

**DIGRESSIONE.** Questa relazione vale in generale per descrivere il trasporto di una certa quantità *conservata*, energia e quantità di moto. Nello specifico,  $\rho$  è l'ammontare della quantità per unità di volume (una densità), mentre  $\vec{j}$  è il flusso della quantità. Se la quantità *non* si conserva, la legge si generalizza come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \quad (5.10)$$

dove  $\sigma$  rappresenta quanta quantità viene generata (se positiva) o rimossa (se negativa) per unità di volume e per unità di tempo.

**Il caso stazionario** Consideriamo il *caso stazionario* dell'equazione di continuità, ossia quando la densità di carica  $\rho$  risulta essere costante nel tempo. Dall'equazione di continuità segue che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

ossia la densità di corrente è un **campo solenoidale**<sup>2</sup>. Consideriamo una porzione tubulare di conduttore come in figura. Sappiamo che il flusso sulla superficie che delimita questa porzione è nullo, ma esso è determinato completamente dal flusso sulle sezioni perpendicolari del conduttore<sup>3</sup>

$$0 = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2$$

Ma se consideriamo le intensità di correnti lungo le sezioni...

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 = - \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 \\ I_2 &:= \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 \end{aligned}$$

...allora segue che  $0 = I_1 - I_2$ , ossia

$$I_1 = I_2 \quad (5.11)$$

Nel caso stazionario, l'intensità di corrente è **sempre costante**.

Riprendendo l'analogia con fluidodinamica tra intensità di corrente e portata, la portata è costante nei fluidi incompressibili, cioè quelli la cui densità di massa è  $\rho = \text{const.}$

## 5.2 LEGGE DI OHM

Ad inizio del capitolo, abbiamo descritto brevemente come sono costituiti i conduttori metallici. Tale descrizione, in realtà, corrisponde al **modello di Drude-Lorentz** della *conduzione elettrica* proposto dal fisico tedesco Paul **Drude** nel 1900 ed espanso nel 1905 dall'olandese Hendrick Antoon **Lorentz**. Il modello permette di spiegare, nell'ambito della teoria classica dell'elettromagnetismo, le proprietà di trasporto degli elettroni nei materiali - in particolare i metalli - tramite la teoria cinetica: gli elettroni si comportano, secondo questa interpretazione, in modo molto simile ad un *flipper*<sup>4</sup>, in cui elettroni rimbalzanti *urtano* continuamente con un reticolo cristallino di ioni fissi.

<sup>2</sup>Vedi capitolo XXX yadda yadda

<sup>3</sup>La densità di corrente sulla superficie laterale del tubo è tangente e quindi il suo flusso è nullo.

<sup>4</sup>Per gli amici d'oltreoceano o per coloro che si divertivano ai giochi pre-installati su *Windows XP™*, un *pinball*.

**DIGRESSIONE.** Tale modello fu integrato nel 1933 da Arnold Sommerfeld and Hans Bethe con i risultati della teoria quantistica nel **modello di Drude-Sommerfeld**. Una differenza, ad esempio, è che il modello non parla esplicitamente di ioni o di reticoli cristallini, la cui assenza viene giustificata in termini quantistici.

Approfondiamo meglio questo modello. Gli elettroni liberi si muovono attraverso il reticolo cristallino in modo completamente disordinato; nel loro moto, gli elettroni si vanno a scontrare continuamente con gli ioni in interazioni che chiamiamo *urti*. Tra un urto e il successivo il moto è libero e in traiettoria rettilinea, cosicché il moto degli elettroni si possa rappresentare come un spezzata di segmenti con direzione e verso variabili. Senza campo elettrico *non* c'è una direzione privilegiata e quindi una corrente.

Si può definire

- un **tempo medio di percorrenza**  $\tau$ .
- un **cammino libero medio**  $\ell$  tra due urti successivi

che sono legati tra di loro dalla velocità media  $v$  degli elettroni nel metallo.

$$\ell = v\tau \quad (5.12)$$

Da queste supposizioni microscopiche possiamo derivare una legge microscopica. All'applicazione di un campo elettrico  $\vec{E}$  non si muoverà più di moto rettilineo uniforme, ma subisce un'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}$$

dove  $m_e$  è la massa dell'elettrone. Alla distribuzione casuale delle velocità si sovrappone quindi una velocità data da questa accelerazione; poiché è più piccola rispetto a quella che l'elettrone possiede di per sé, il tempo medio  $\tau$  non cambia in modo significativo. Se  $\vec{v}_i$  è la velocità dopo un urto, la velocità subito prima l'urto successivo sarà

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i - \frac{e}{m_e}\vec{E}\tau$$

Calcoliamo la velocità media su  $N$  elettroni, con  $N$  molto grande, in modo da definire la *velocità di deriva* indotta dal campo elettrico:

$$\vec{v}_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{i+1} = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{v}_i}_{=0} - \frac{e}{m_e\tau}\vec{E} = -\frac{e}{m_e\tau}\vec{E}$$

La media delle velocità dopo l'urto è casuale e perciò è nulla; la velocità di deriva è quindi

$$\vec{v}_d = -\frac{e}{m_e}\vec{E}\tau \quad (5.13)$$

Se  $n_-$  la densità di elettroni liberi per unità di volume, la densità di corrente che consegue a questo modo ordinato è

$$\vec{j} = -n_-e\vec{v}_d = \frac{n_-e^2\tau}{m_e}\vec{E} = \sigma\vec{E} \quad (5.14)$$

dove

$$\sigma = \frac{n_-e^2\tau}{m_e}$$

è una grandezza caratteristica del materiale nota come **conduttività**. L'equazione

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5.15)$$

è nota come **legge di Ohm della conduzione elettrica**, dal fisico tedesco Georg **Ohm** che nel 1827 introdusse un caso specifico di tale equazione per spiegare dei risultati sperimentali da lui studiati. La legge si può scrivere anche nella forma

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (5.16)$$

dove

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

è detta **resistività**.

**DEFINIZIONE 5.2.1. - CONDUTTIVITÀ E RESISTIVITÀ .**

La **conduttività** è una grandezza associata ai conduttori definita come

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \quad (5.17)$$

che rappresenta la difficoltà della corrente a muoversi nel conduttore ed è caratteristica del *materiale* con cui è fatto.

Il valore

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (5.18)$$

viene detto **resistività** e rappresenta la difficoltà della corrente a muoversi nel conduttore.

Non tutti i conduttori rispettano questa legge, ma quelli che lo fanno sono detti **conduttori ohmici**.

**ESEMPIO - ESEMPI DI CONDUTTORI OHMICI E NON OHMICI .**

- **Ohmici:** fili conduttori di metalli come rame, o argento, resistenze ideali.
- **Non ohmici:** filamento di tungsteno delle lampade a incandescenza, diodi, semiconduttori.

**5.2.1 Legge di Ohm nei conduttori metallici**

Consideriamo un conduttore metallico cilindrico di lunghezza  $d = \overline{AB}$  e sezione  $\Sigma$ . Ai capi del conduttore è applicata, con un generatore di f.e.m., una d.d.p. pari a

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ed > 0$$

Il campo elettrico è costante (con modulo  $|\vec{E}| = E$ ) e diretto, parallelo all'asse del cilindro, da  $A$  verso  $B$ ; in regime stazionario, anche la densità di corrente  $\vec{j}$  è costante (con modulo  $|\vec{j}| = j$ ) e scorre nella stessa direzione<sup>5</sup>. Allora, dalla *legge di Ohm*, segue che

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = j\Sigma = \sigma E\Sigma = \frac{V}{d} \sigma \Sigma = V \frac{\Sigma}{\rho d}$$

<sup>5</sup>Ciò è dovuto alla scelta storica di orientare la densità di corrente con le cariche positive. Gli elettroni, invece, percorrono il conduttore da  $B$  verso  $A$ .



Definita la **resistenza** come

$$R = \frac{\rho d}{\Sigma}$$

si ottiene la **legge di Ohm** nella forma amata dagli elettrotecnici:

$$V = IR \quad (5.19)$$

La legge si può scrivere anche nella forma

$$I = GV \quad (5.20)$$

dove

$$G = \frac{1}{R}$$

è detta **conduttanza**.

#### DEFINIZIONE 5.2.2. - RESISTENZA E CONDUTTANZA .

La **resistenza** è una grandezza associata ai conduttori metallici di lunghezza  $d$  e sezione  $\Sigma$ , definita come

$$R = \frac{\rho d}{\Sigma}$$

che rappresenta la difficoltà della corrente a muoversi nel conduttore. Il termine  $\rho$  è la *resistività* del conduttore e dipende dal materiale.

Il valore

$$G = \frac{1}{R} \quad (5.21)$$

viene detto **conduttanza** e rappresenta la facilità della corrente a muoversi nel conduttore.

Un conduttore

#### Unità di misura

##### UNITÀ DI MISURA.

**RESISTENZA ELETTRICA:** ohm ( $\Omega$ ) o volt su ampere ( $\frac{V}{A}$ ).

**Dimensioni:**  $[R] = \frac{[V]}{[I]} = ML^2T^{-3}I^{-2}$

##### UNITÀ DI MISURA.

**CONDUTTANZA ELETTRICA:** siemens (S), mho ( $\mathcal{U}$ ) o ampere su volt ( $\frac{A}{V}$ ).

**Dimensioni:**  $[G] = \frac{[I]}{[V]} = I^2T^3M^{-1}L^{-2}$

#### DIGRESSIONE - E MHO IL SIEMENS? UNA TRAGICOMMEDIA SULLA CONDUTTANZA .

Nei libri di testo contemporanei l'unità di misura associata alla conduttanza è il *siemens*; tuttavia, in alcuni un po' datati è possibile trovare l'alquanto buffo *mho*. Inoltre, se scartabellassimo libri ancora più vecchi troveremmo sì il *siemens*, ma per indicare la resistenza! Che pasticcio hanno combinato i fisici con questa grandezza?

Facciamo un po' d'ordine e torniamo indietro al 1860. L'ingegnere Werner Siemens era tra i proprietari di un'azienda che costruiva telegrafi in Germania, Russia e Regno Unito; per migliorare il loro funzionamento aveva bisogno di studiare a livello pratico la resistenza dei conduttori al passaggio della corrente, ma una buona unità di misura di tale grandezza, che sia riproducibile, non esisteva. Siemens propose lui stesso negli

*Annalen der Physik und Chemie* quella che diventerà nota come *l'unità di mercurio del Dr. Siemens*: essa corrispondeva alla resistenza elettrica presente in una colonna di mercurio con lunghezza di un metro e sezione uniforme di  $1 \text{ mm}^2$  mantenuta alla temperatura di zero gradi Celsius.

Tale unità — il cui nome completo ha quel non so che di cinema espressionista tedesco e potrebbe figurare bene come pellicola accanto a *Il gabinetto del dottor Caligari* — verrà semplicemente chiamata *siemens*, nome che non causerà assolutamente alcuna confusione in futuro.

Seppur sia simile, almeno concettualmente, ad altre unità basate sul mercurio come *l'atmosfera*, in realtà si rivelò problematica proprio nel suo tentativo di essere riproducibile: per definire questa colonna di mercurio erano necessari dei tubi di vetro, i quali però non avevano sezioni costanti. Altri fattori come pressione dell'aria, umidità... potevano influenzare questa misurazione. Inoltre, non era coerente con altre unità di misura preesistenti! Nonostante questi problemi, fu comunque utilizzata per diversi anni.

La ricerca di un'unità di misura migliore proseguì. L'anno successivo, il 1861, Latimer Clark e Sir Charles Bright presentarono un articolo all'*Associazione Britannica per l'Avanzamento della Scienza*, suggerendo di creare uno standard per la resistenza e di chiamarla in onore del fisico tedesco Georg Ohm... chiamandola *ohma*. Si stabilì subito una commissione, a cui parteciparono fisici dal calibro di James Clark Maxwell e Lord Kelvin, per inventare un'unità che fosse coerente con il sistema metrico francese e pratica da utilizzare - a differenza di quella di Siemens. Nel terzo verbale della commissione, nel 1864, si ripropose di chiamarla in onore di Ohm e dunque si riferirono all'unità di misura come... *ohmad*. A volte mi chiedo se i fisici ci sono o ci fanno. Solo nel 1867 il termine *ohm* si userà in modo diffuso.

A dir la verità, l'*ohm* definito dall'Associazione Britannica non era neanche così differente da quello di Siemens, dato che cambiava soltanto la lunghezza della colonna di mercurio da 100 cm a 104,7 cm. Ciò nonostante, dato che avere due unità di misura differenti per una stessa grandezza era ridicolo, nel 1881 al *Congresso Internazionale degli Elettricisti* si decise di compiere una scelta definitiva tra le due: l'unità di misura della resistenza non doveva essere il *siemens*, ma l'*ohm*... anche se nel frattempo la colonna di mercurio si allungò a 104,9 cm.

Come ricordò Maxwell al convegno, “le dimensioni contano<sup>[Senza fonte]</sup>” e negli anni l'unità di misura rimase la stessa, ma la colonnina di mercurio cambiò lunghezza più e più volte per adattarsi a studi sempre più analitici - stranamente non cambiò lo spessore, ma evidentemente quello non contava più di tanto. La colonna di mercurio puro rimase lo standard fino alla *Conferenza Generale sui Pesi e le Misure* del 1948, dove l'*ohm* fu ridefinito in termini assoluti. Attualmente, il *siemens* di Siemens vale circa  $0,9537 \Omega$  moderni.

Il povero Siemens, nonostante l'unità della resistenza non prese il suo nome, non si perse d'animo e continuò a sperimentare con l'elettromagnetismo: nel 1867 brevettò una delle prime dinamo industriali — casualmente lo stesso giorno in cui Sir Charles Wheatstone brevettò una sua personale versione della dinamo. Successivamente, nel 1888 divenne nobile, trasformando il suo cognome in *von Siemens*, e negli anni a seguire la sua azienda si espanse fino a diventare l'odierna multinazionale *Siemens AG*.

La resistenza elettrica aveva finalmente ottenuto un'unità di misura, ma ne man-

cava ancora una per la *conduttanza*. O meglio, siccome tale grandezza era il reciproco della resistenza, mancava soltanto il nome dell'unità di misura: dopotutto, se i reciproci dei *secondi* si chiamano *hertz*, anche il reciproco della resistenza merita un nome, che diamine!

Il primo ad accorgersi di cotale mancanza fu Lord Kelvin. Basandosi su alcune idee forniteli dai suoi studenti, nel 1883 Lord Kelvin propose al grande pubblico di utilizzare il termine *mho*.

Se non ve ne foste accorti, *mho* è letteralmente *ohm* letto al contrario - perché un *mho* è il reciproco di un *ohm*.

Non fu l'unica proposta avanza in quell'incontro: Kelvin propose entusiasta - sempre su un'idea di origine studentesca - che la corretta pronuncia di *mho* si dovesse ottenere prendendo una registrazione di *ohm* con il fonografo di Edison e ascoltandola al contrario.

Non si sa se Kelvin non si accorse di essere stato preso in giro dagli studenti o Kelvin stava cercando di prendersi gioco del suo pubblico, ma sta di fatto che *mho* prese inesplicabilmente piede come nome per la conduttanza; anche il simbolo del *mho* fu ottenuto ribaltando la Omega maiuscola dell'*ohm*.

La cosa peculiare è che la malsana (in *mho*, come direbbero gli Americani) idea venne riproposta in elettrotecnica in altri due contesti.

- l'ingegnere Arthur E. Kennelly scelse il *daraf* per descrivere l'*elastanza elettrica*, in quanto essa è il reciproco della conduttanza e la conduttanza usa i *farad*. In questo caso mi turba di più il nome dell'inverso della conduttanza che non il *daraf*.
- l'ingegnere Vladimir Karapetoff propose nel 1911 di usare gli *yrneh* come reciproco dell'unità di misura dell'induttanza, l'*henry*; la pronuncia, tra l'altro, doveva essere "earney". Non dormo la notte cercando di capire come mai quella sia la pronuncia di *yrneh*.

alcuni ingegneri proposero di utilizzare i *daraf* per il reciproco dei

Saltiamo molti anni e nella *Conferenza Generale sui Pesi e le Misure* 1971 si decise che questo scherzo era durato abbastanza: l'unità di misura della conduttanza verrà chiamato *siemens*... aspettate, di nuovo *siemens*?

Eh sì, gli scienziati lì riuniti volevano dedicare un'unità di misura a Siemens — non hanno neanche specificato se a Werner von Siemens o al fratello Sir William Siemens — senza tener conto che in passato è stata usata un'unità di misura dallo stesso nome per tutt'altri scopi. Non si curarono di questo e il *siemens* fu approvato: da allora, usare il *mho* per la conduttanza è considerato un nome non accettabile (e non consona) per un'unità di misura del SI e pertanto deve essere rigorosamente evitato.

Dopo questa breve ma importante digressione passiamo alle unità

### 5.3 POTENZA DISSIPATA DA UNA RESISTENZA

In un conduttore elettrico in cui scorre una corrente elettrica, la **potenza** necessaria per spostare una carica è data da

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = \vec{F} \cdot \vec{v}_d = e \vec{E} \cdot \vec{v}_d \quad (5.22)$$

Questa energia viene dispersa nell'ambiente sotto forma di *calore*.

Se  $n$  è il numero di cariche per unità di volume, la **densità di potenza**, ossia la potenza per

unità di volume, è

$$P_V = ne\vec{E} \cdot \vec{v}_d = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (5.23)$$

con  $\vec{j}$  la densità di corrente. La potenza totale dissipata segue facilmente da

$$P = \int_V P_V dV \quad (5.24)$$

Consideriamo il caso particolare di un conduttore ohmico cilindrico di lunghezza  $d$  e di superficie  $\Sigma$  in situazione di corrente stazionaria. La densità di corrente e il campo elettrico sono costanti e paralleli, dunque densità di potenza è costante e pari a

$$P_V = jE \quad (5.25)$$

quindi la potenza totale è data da

$$P = \int_V P_V dV = P_V \mathcal{V} = jE\Sigma d = \underbrace{\Sigma j}_{=I} \underbrace{Ed}_{=V} = IV$$

dove  $V$  è il calo di potenziale ai capi del conduttore. In sostanza, in presenza di un calo di potenziale si ha una dispersione di energia sotto forma di calore: maggiore è la corrente nel conduttore, maggiore sarà l'energia dispersa.

Cosa succede, a livello microscopico? La d.d.p. ai capi del conduttore generano un campo elettrico che induce una velocità di deriva nei portatori di carica, fornendo a loro un'energia cinetica. Quando le particelle urtano gli ioni del reticolo cristallino, nell'urto (elastico) viene ceduta energia cinetica dagli elettroni agli ioni, i quali tuttavia sono immobili e quindi *vibrano*, trasformando quella energia sotto forma di calore. Quanta energia viene dispersa dipende dal materiale e dalla geometria del conduttore: questa informazione fisico-empirica è presentata matematicamente nella resistività  $\rho$  e, di conseguenza, dalla resistenza.

Questo è quello che viene chiamato **effetto Joule**; nella sua forma più basica questo si esprime dalla legge

$$P = IV \quad (5.26)$$

Se assumiamo che il conduttore trasforma completamente l'energia in calore, allora

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (5.27)$$

**ESEMPIO.** Qualunque elettrodomestico o oggetto che produce calore, in una forma o nell'altra, a partire da corrente elettrica si basa sull'effetto Joule, come lampadine, fon, forni...

**OSSERVAZIONE.** La legge dell'effetto Joule si può utilizzare per descrivere il legame tra la potenza generata da un generatore di f.e.m. e la corrente in un conduttore: se  $\mathcal{E}$  è la forza elettromotrice generata e  $P$  la potenza prodotta dal generatore, il generatore produrrà una corrente di intensità

$$I = \frac{P}{\mathcal{E}} \quad (5.28)$$

**Lavoro compiuto dal campo elettrico** Per ottenere l'energia dispersa in un periodo di tempo  $t$ , ossia il lavoro compiuto dal campo elettrico nel conduttore per spostare le cariche, ci basta integrare rispetto al tempo la potenza:

$$U = W = \int_0^t P dt = \int_0^t IV dt \quad (5.29)$$

Se la corrente è stazionaria, si ha

$$U = W = \frac{I^2 V}{2} = \frac{I^3 R}{2} = \frac{V^3}{2R^2} \quad (5.30)$$

## 5.4 CIRCUITI ELETTRICI

Nel Capitolo 4 a pagina 47 abbiamo introdotto brevemente i circuiti elettrici, limitandoci a studiare come si comportano dei condensatori collegati in serie e in parallelo. Ora riprendiamo e approfondiamo ciò che abbiamo detto, alla luce delle nostre nuove conoscenze sulla corrente elettrica.

### DEFINIZIONE 5.4.1. - CIRCUITO ELETTRICO .

Un **circuito elettrico** è un insieme interconnesso di componenti elettrici, sono connessi da fili conduttori in un percorso chiuso in modo che la corrente elettrica possa fluire con continuità.

### DEFINIZIONE 5.4.2. - COMPONENTE, NODO, RAMO, MAGLIA, INTERRUTTORE .

In un circuito elettrico,

- un **componente elettrico** è un congegno con due o più terminali da cui la corrente può entrare o uscire allo scopo di modificare il comportamento degli elettroni o dei campi elettromagnetici. Esse si distinguono in
  - ◇ componenti **attive**: dette anche **sorgenti** o *generatori*, producono energia elettrica in quanto indicano una corrente o una d.d.p. per mezzi non elettrici; ad esempio, sono componenti attive i generatori di tensione e di corrente.
  - ◇ componenti **passive**: non producono energia, bensì la ricevono per utilizzarla in altri scopi; ad esempio, sono componenti passive i condensatori, i resistori e gli induttori.
- un **nodo** è il punto di incontro di tre o più fili.
- un **ramo** è un filo con e/o componenti che collegano due nodi
- una **maglia** è un insieme di rami all'interno di un circuito che forma un circuito chiuso senza auto-intersezioni.
- un **interruttore** permette di chiudere o aprire un circuito, lasciando rispettivamente passare o fermando la corrente elettrica.

Lo scopo dell'**analisi dei circuiti elettrici** è quella di *risolvere* i circuiti, ossia trovare le differenze di potenziali e le correnti per ciascuna componente del circuito. Ovviamente, noi studieremo soltanto un *modello* dei circuiti elettrici reali, supponendo che:

- La corrente si suppone *stazionaria* nel circuito.
- La carica rimane *costante* a meno di incontrare un nodo o una componente.
- I fili conduttori e i generatori di f.e.m. *non* possiedono di per sé una resistenza (o al più è trascurabile).
- Il circuito può essere rappresentato secondo una *rappresentazione schematica piana*.
- Le relazioni che caratterizzano le componenti *passive* sono lineari.

Di seguito potete vedere un esempio di circuito.

### Circuito elettrico

## Collegamenti in serie e in parallelo

#### DEFINIZIONE 5.4.3. - COLLEGAMENTO IN SERIE E IN PARALLELO .

- Due o più componenti sono collegate **in serie** se tutte sono collegate lungo un unico “percorso elettrico”, in cui ogni componente è collegata direttamente ad una sola altra componente.
- Due o più componenti sono collegate **in parallelo** se le componenti sono connesse su *rami* separati del “percorso elettrico”.

Si possono già fare alcune osservazioni:

- In un collegamento *in serie*, la *carica totale*  $q$  rimane costante lungo il percorso e ogni oggetto riceve la *stessa*<sup>6</sup>; di conseguenza, anche la *corrente* risulta essere sempre la *stessa* in ogni componente.
- In un collegamento *in parallelo*, la carica si *distribuisce* nei vari rami in modo proporzionale alle caratteristiche delle componenti, e lo stesso fa la corrente elettrica. La carica e la corrente complessiva in un collegamento in parallelo è quindi la *somma* di quella nei vari fili.
- In un collegamento *in serie*, la differenza di potenziale diminuisce per ogni componente che è presente nel filo. Pertanto, la d.d.p. in un collegamento in serie è la

<sup>6</sup>Non necessariamente sono le stesse identiche cariche: ad esempio, nel caso dei condensatori le cariche che partono dall'altra piastra collegata *non* sono le stesse che sono arrivate sull'altra, bensì sono cariche respinte da quelle presenti nell'altra armatura. In ogni caso, ciò che non cambia è la *quantità* di carica totale.

somma di quella tra tutte i capi delle componenti.

- In un collegamento *in parallelo*, la differenza di potenziale è la stessa ai capi di ogni componente, perché metà delle estremità sono attaccate allo stesso filo e l'altra metà ad un altro filo.

L'idea cardine dello studio dei circuiti elettrici è di *semplificarli* il più possibile, riducendo il numero di componenti: se abbiamo diversi oggetti elettrici collegati nel circuito caratterizzati da delle quantità particolari  $Z_i$ , ci immaginiamo di sostituire diversi elementi dello stesso tipo (collegati in serie e in parallelo) con un'unica componente **equivalente** caratterizzata da una quantità  $Z_{eq}$  che deriva da quelle delle componenti singole.

**Resistori** Prima di descrivere altro, definiamo un componente elettrico molto utile, il resistore.

#### DEFINIZIONE 5.4.4. - RESISTORE .

Un **resistore** è un componente elettrico che implementa gli effetti di una resistenza elettrica all'interno di un circuito.

Nei circuiti elettronici, i resistori sono utilizzati per ridurre l'intensità di corrente e voltaggi, oltre ad altri usi.

**Alcuni simboli elettronici** I modelli di circuiti elettrici che andiamo a studiare sono rappresentabili in diagrammi in cui fili e componenti sono stilizzati sotto forma di pittogrammi che permettono di vedere a colpo d'occhio il funzionamento di un circuito. Di seguito sono elencate i pittogrammi di alcune componenti elettriche che abbiamo incontrato finora.

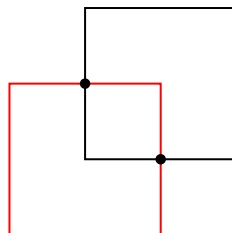
- **Filo conduttore.**



- **Nodo e rami.**



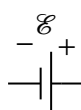
- **Maglia.** (quella in rosso è una possibile maglia del circuito)



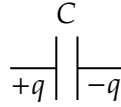
- **Interruttore.**



- **Generatore di forza elettromagnetica (continua) o batteria.**



■ Condensatore.



■ Resistore.



#### 5.4.1 Condensatori in serie e in parallelo

Qui riprendiamo solamente i risultati, per come ricavarli rimandiamo a pag. 59, Capitolo 4.

**OSSERVAZIONE.** La corrente passa attraverso un condensatore in un circuito? La risposta è *tecnicamente no, ma di fatto sì*.

Quando una corrente giunge ad una delle armature del condensatore la corrente *non* attraversa il vuoto o il materiale tra le piastre. Ciò nonostante, le cariche che raggiungono l'armatura *respingono* nell'armatura opposta una quantità di cariche dello *stesso segno* pari a quella arrivata sul condensatore, creando nei fili collegati una nuova corrente di *pari intensità*.

In altre parole, le correnti alle due estremità dell'armatura non sono costituita dagli stessi elettroni perché questi non possono attraversare lo spazio interno al condensatore, ma l'intensità è la stessa per effetti di repulsione delle cariche sull'armatura di arrivo: le due correnti sono virtualmente *indistinguibili* l'una dall'altra.

#### Condensatori in serie

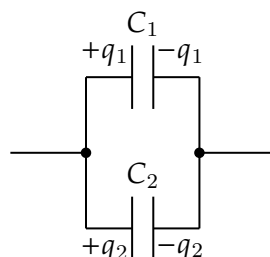
$$\begin{array}{c}
 C_1 \qquad C_2 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline +q \quad -q \quad +q \quad -q \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5.31}$$

Nel caso generale di  $n$  condensatori in serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \tag{5.32}$$

#### Condensatori in parallelo





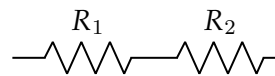
$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (5.33)$$

Nel caso generale di  $n$  condensatori in parallelo:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (5.34)$$

#### 5.4.2 Resistori in serie e in parallelo

**Resistori in serie** Consideriamo due resistori  $R_1$  e  $R_2$ , collegati in serie.



Per quanto osservato, la corrente stazionaria che li attraversa è la stessa:

$$I_1 = I_2 = I$$

Invece, ciascun resistore presenta una d.d.p. ai suoi capi: il potenziale diminuisce ad ogni nuovo resistore che si incontra lungo il filo e in particolare la d.d.p. ai capi dell'intero sistema è la somma delle d.d.p. ai capi delle singole componenti.

$$V = V_1 + V_2$$

Per la *legge di Ohm*, se

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1}{I} \quad R_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_2}{I}$$

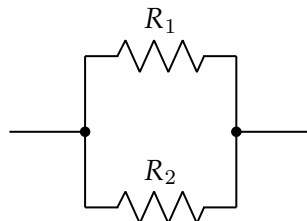
si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un resistore di capacità

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{V_1 + V_2}{I} = \frac{V_1}{I} + \frac{V_2}{I} = R_1 + R_2 \quad (5.35)$$

Nel caso generale di  $n$  resistori in serie:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (5.36)$$

**Resistori in parallelo** Consideriamo due resistori  $R_1$  e  $R_2$ , collegati in parallelo.



Per quanto osservato, la corrente stazionaria che li attraversa si distribuirà nei due fili:

$$I = I_1 + I_2$$

Invece, i terminali d'arrivo dei due resistori sono collegati dallo stesso filo e quindi si ha lo stesso potenziale. Lo stesso vale per i terminali d'uscita, che sono collegati da uno stesso filo e quindi hanno ugual potenziale. La d.d.p. ai capi delle due resistenze è pertanto la stessa:

$$V_1 = V_2 = V$$

Per la *legge di Ohm*, se

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V}{I_1} \qquad R_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{V}{I_2}$$

si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un resistore di capacità

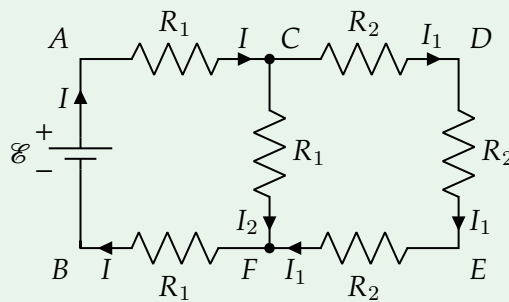
$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{I}{V} = \frac{I_1 + I_2}{V} = \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Nel caso generale di  $n$  resistori in parallelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (5.38)$$

#### 5.4.2.1 Eserciziamoci! Resistori in serie e in parallelo

**ESERCIZIO.** Si consideri il seguente circuito.



Noto che

$$\mathcal{E} = 17,4 \text{ V} \qquad R_1 = 3 \, \Omega \qquad R_2 = 9 \, \Omega$$

si calcoli:

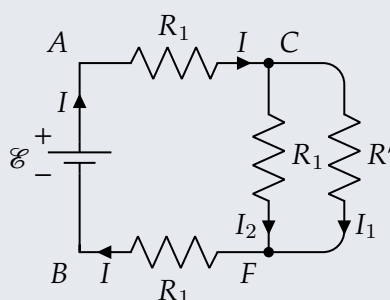
- La corrente elettrica  $I$  generata dal generatore di f.e.m..
- La d.d.p. tra i nodi C e F.
- Calcolare  $I_1$  e  $I_2$ .
- Calcolare la potenza dissipata dai resistori del circuito.

**SOLUZIONE.** Sappiamo che la differenza di potenziale tra i capi  $A$  e  $B$  coincide con la d.d.p.  $\mathcal{E}$  del generatore di f.e.m. che mantiene separate cariche positive e negative.

$$V_A - V_B = \mathcal{E}$$

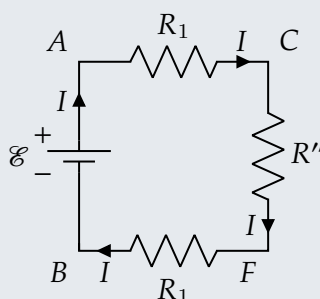
Data la disposizione del circuito possiamo ottenere una resistenza equivalente a quelle presenti che ha ai suoi capi come d.d.p. proprio  $\mathcal{E}$ ; grazie ad essa e alla legge di Ohm potremo poi ricavare la corrente  $I$  prodotta dal generatore.

- **Passo 1:** semplifichiamo il ramo  $\overrightarrow{CDEF}$ , sostituendo i tre resistori in serie con uno equivalente.



$$R' = R_2 + R_2 + R_2 = 3R_2 = 3 \cdot 9\Omega = 27\Omega$$

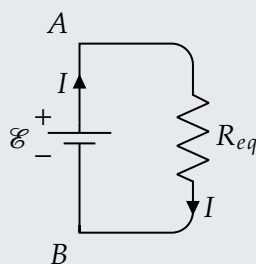
- **Passo 2:** semplifichiamo i rami paralleli collegati ai nodi  $C$  e  $F$ .



$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'} \Rightarrow R'' = \frac{R_1 R'}{R_1 + R'} = \frac{3 \cdot 27}{3 + 27} \Omega = 2,7\Omega$$

Si osservi che a questo passo la corrente che scorre in ogni tratto del circuito è  $I$ .

- **Passo 3:** semplifichiamo i tre resistori in serie rimasti con un resistore equivalente.



$$R_{eq} = R_1 + R_{eq} + R_1 = 2R_1 + R_{eq} = 2 \cdot 3\Omega + 2,7\Omega = 8,7\Omega$$

Possiamo ora ricavare la corrente  $I$  poiché è la corrente che passa nel resistore equivalente:

$$I = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{17,4 \text{ V}}{8,7 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Per calcolare la d.d.p. tra  $C$  e  $F$  non possiamo utilizzare il passo 3: in tale semplificazione i punti  $C$  e  $F$  *non* esistono in più avendo semplificato i resistori che li precedono o li seguono, rispettivamente. Invece, ai passi 2 e 3 tali punti esistono ancora.

Potremmo porci al passo 1 per calcolare  $V_F - V_C$ , ma avremmo da sommare la differenza di potenziale dei singoli rami - e quindi ci sarebbe bisogno di calcolare prima le correnti  $I_1$  e  $I_2$ . Per semplificare i calcoli, possiamo applicare la legge di Ohm al passo 2 dato che la corrente in tal caso è soltanto  $I$ :

$$V_C - V_F = IR'' = 2 \cdot 2,7 \text{ V} = 5,4 \text{ V}$$

Per calcolare  $I_1$  e  $I_2$ , sappiamo che ai capi di  $R_1$  e  $R'$  nel condotto parallelo si ha come d.d.p.  $V_C - V_F$  in entrambi i casi.

$$I_2 = \frac{V_C - V_F}{R_1} = \frac{5,4 \text{ V}}{3 \Omega} = 1,8 \text{ A}$$

$$I_1 = I - I_2 = 2 - 1,8 = 0,2 \text{ A}$$

In modo analogo a  $I_2$ , si poteva calcolare  $I_1$  usando  $R'$ :

$$I_1 = \frac{V_C - V_F}{R'} = \frac{5,4 \text{ V}}{27 \Omega} = 0,2 \text{ A}$$

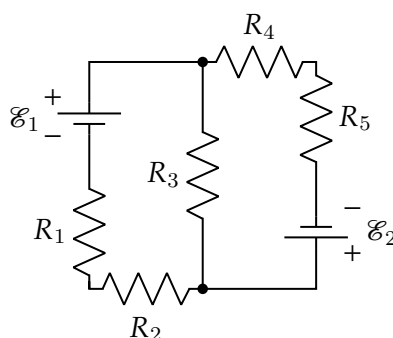
La potenza dissipata dal circuito, data dalla somma di tutte le potenze dissipate dai singoli resistori, è pari alla potenza dissipata dal circuito equivalente e il suo resistore:

$$P = I^2 R_{eq} = 4 \cdot 8,7 \text{ W} = 34,8 \text{ W}$$

Il circuito disperde come calore 34,8 J al secondo.

### 5.4.3 Leggi di Kirchhoff

Abbiamo visto che ci conviene studiare i circuiti elettrici semplificandoli, se possibile, ad un solo generatore di f.e.m. e con una componente singola equivalente alle altre dello stesso tipo presenti (un resistore equivalente e/o condensatore equivalente e/o ...). Il *problema* è che *non* sempre è possibile analizzare i circuiti usando le tecniche di semplificazione per componenti in serie e/o paralleli, in particolare se sono presenti nodi e multiple sorgenti. Ad esempio, nel seguente circuito potremmo ridurre  $R_1$  con  $R_2$  in serie e analogamente  $R_4$  e  $R_5$ , ma dopo come facciamo con i due generatori?



In nostro aiuto vengono due “regole” dell’analisi dei circuiti, dette **leggi di Kirchhoff**, chiamate così in onore del loro inventore Gustav **Kirchhoff**.

### Prima legge di Kirchhoff

#### TEOREMA 5.4.1. - PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF O LEGGE DEI NODI .

La somma algebrica di tutte le correnti che entrano un nodo è pari alla somma algebrica di tutte le correnti che escono dal nodo o, equivalentemente, la somma algebrica di tutte le correnti che attraversano un nodo del circuito deve essere pari a zero:

$$\sum_k^n I_k = 0 \quad (5.39)$$

$I_k$  è una corrente con segno che attraversa il nodo dal ramo  $k$ -esimo, mentre  $n$  è il numero di rami connessi al nodo. □

Il segno della corrente è fissato arbitrariamente per indicare se la corrente è entrante oppure uscente<sup>7</sup>. In casi complessi non è però possibile determinare quale sia il verso di percorrenza della corrente, soprattutto in presenza di più generatori di f.e.m.. In tal caso, si può ipotizzare un verso di percorrenza della corrente nei rami in cui esso sia *ignoto* e applicare poi le leggi di Kirchhoff. Supponendo di poter risolvere il circuito, il vero verso della corrente si deduce in base al segno della corrente:

- Il valore della corrente ottenuta ha segno *positivo*; in tal caso, il verso ipotizzato è quello *reale*.
- Il valore della corrente ottenuta ha segno *negativo*; in tal caso, il verso ipotizzato è *errato* e va *invertito*.

### Seconda legge di Kirchhoff

#### TEOREMA 5.4.2. - SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF O LEGGE DELLE MAGLIE .

La somma algebrica di tutte le differenze di potenziale attorno una maglia è zero:

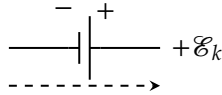
$$\sum_k^n V_k = 0 \quad (5.40)$$

$V_k$  è un voltaggio con segno, mentre  $n$  è il numero di componenti e generatori che causano un voltaggio. □

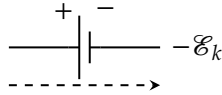
<sup>7</sup>In generale, si pone + per la corrente entrante in un nodo e – per la corrente uscente.

Per determinare il segno, fissiamo prima dei versi ipotetici in cui scorre la corrente nei vari rami della maglia<sup>8</sup> e scegliamo un verso di percorrenza della maglia; attribuiamo ad ogni d.d.p. il segno nella seguente maniera:

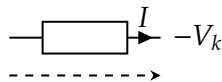
- Per un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_k$ , se il verso di percorrenza passa dal  $-$  al  $+$  (quindi dal potenziale minore a quello maggiore), poniamo un segno *positivo*:



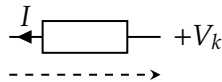
- Per un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_k$ , se il verso di percorrenza passa dal  $+$  al  $-$  (quindi dal potenziale maggiore a quello minore), poniamo un segno *negativo*:



- Per una componente con voltaggio  $V_k$ , se il verso di percorrenza è concorde con il verso (ipotetico) della corrente che lo attraversa poniamo un segno *negativo*:

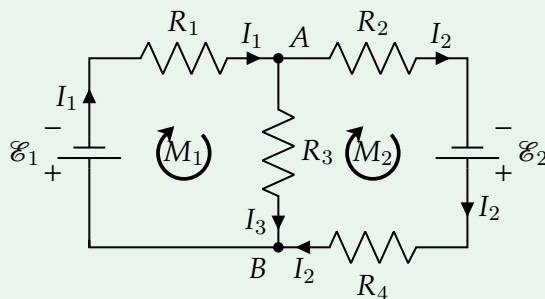


- Per una componente con voltaggio  $V_k$ , se il verso di percorrenza è opposto con il verso (ipotetico) della corrente che lo attraversa poniamo un segno *positivo*:



#### 5.4.3.1 Eserciziamoci! Leggi di Kirchhoff

**ESERCIZIO.** Si consideri il seguente circuito.



Noto che

$$\mathcal{E}_1 = 5 \text{ V} \quad \mathcal{E}_2 = 2 \text{ V} \quad R_1 = 1 \, \Omega \quad R_2 = 2 \, \Omega \quad R_3 = 4 \, \Omega \quad R_4 = 3 \, \Omega$$

Si calcoli la corrente elettrica nei rami.

<sup>8</sup>O quanto meno nei rami in cui il verso *non* è noto!

**SOLUZIONE.** Data la presenza di due generatori, potrebbe non essere chiaro quale sia il verso della corrente. In questo caso i versi che *ipotizziamo* sono quelli indicati nel diagramma.

Applichiamo innanzitutto la prima legge di Kirchhoff al nodo A, con la convenzione + per la corrente entrante, – per quella uscente:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

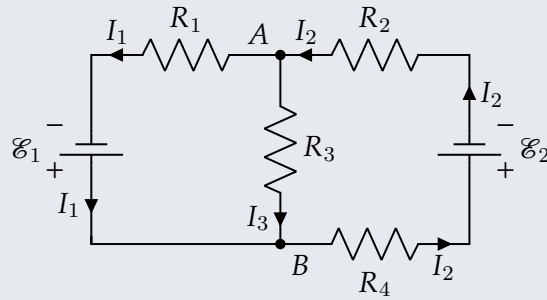
Utilizziamo la seconda legge sulle due maglie piccole  $M_1$  e  $M_2$  del circuito, seguendo il verso di percorrenza orario come indicato in figura. In entrambi i casi, partiamo dal generatore nella maglia.

$$\begin{cases} M_1: & -\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \\ M_2: & \mathcal{E}_2 - R_4 I_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare le correnti, risolviamo il sistema con tutte e tre le equazioni ottenute:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ \mathcal{E}_1 + R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) = 0 \\ \mathcal{E}_2 - R_4 I_2 + R_3 (I_1 - I_2) - R_2 I_2 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ (R_1 + R_3) I_1 + R_3 I_2 = -\mathcal{E}_1 \\ (R_3 - R_4 - R_2) I_2 + R_3 I_1 = -\mathcal{E}_2 \end{cases} \\ & \begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} \\ (R_3 - R_4 - R_2) I_2 + R_3 \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} = -\mathcal{E}_2 \end{cases} \\ & \begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} \\ \left( R_3 - R_4 - R_2 - \frac{R_3^2}{R_1 + R_3} \right) I_2 = -\mathcal{E}_2 + \frac{\mathcal{E}_1 R_3}{R_1 + R_3} \end{cases} \\ & \begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} \\ [R_1 R_3 - (R_2 + R_4)(R_1 + R_3)] I_2 = -\mathcal{E}_2 (R_1 + R_3) + \mathcal{E}_1 R_3 \end{cases} \\ & \begin{cases} I_2 = \frac{-\mathcal{E}_2 (R_1 + R_3) + \mathcal{E}_1 R_3}{R_1 R_3 - (R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} = \frac{-2 \cdot (1+4) + 5 \cdot 4}{1 \cdot 4 - (2+3) \cdot (1+4)} \text{ A} = \frac{10}{-16} \text{ A} = -0,625 \text{ A} \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} = \frac{-4 - 4 \cdot (-0,625)}{1+4} \text{ A} = \frac{-1,5}{5} \text{ A} = -0,3 \text{ A} \\ I_3 = I_1 - I_2 = -0,3 + 0,625 \text{ A} = 0,325 \text{ A} \end{cases} \end{aligned}$$

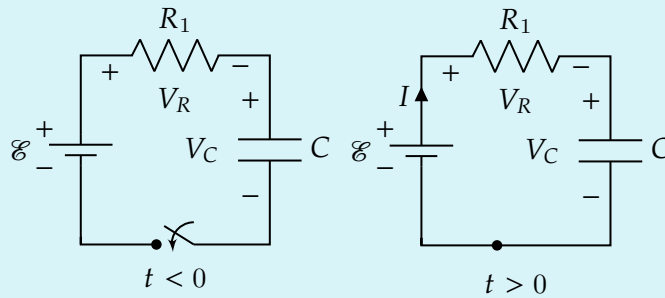
In questo caso, i versi delle correnti  $I_1$  e  $I_2$  sono errati, mentre è corretto il verso di  $I_3$ . Il circuito con i versi corretti è il seguente:



#### 5.4.4 Circuiti RC

##### DEFINIZIONE 5.4.5. - CIRCUITO RC.

Un **circuito RC** è un circuito che presenta solo *resistori* e *condensatori*.



Consideriamo il caso semplice di un circuito RC con un resistore e un condensatore dotato di un interruttore, inizialmente aperto. Al tempo  $t = 0$  viene chiuso l'interruttore: poiché si verifica la separazione di cariche da parte del generatore di f.e.m., la corrente può circolare nel circuito per caricare il condensatore, inizialmente *scarico*.

- Al tempo  $t < 0$  la d.d.p.  $V_C$  ai capi del condensatore è *nulla*, dato che non si hanno cariche sul condensatore, e anche la differenza  $V_R$  ai capi della resistenza lo è perché non scorre corrente.

$$q(t) = 0 \quad I(t) = 0 \quad V_R(t) = 0 \quad V_C(t) = 0$$

- Appena il circuito è *chiuso* ( $t = 0$ ) scorre subito una corrente  $I_0 = I(0)$ : essa attraversa il resistore e raggiunge il condensatore, il quale inizierà subito a caricarsi. Ai capi del resistore si ha una d.d.p. pari a  $V_R(0) = I_0 R$ , mentre l'assenza di cariche sul condensatore fa sì che in questo istante  $V_C(0) = 0$ . Ci si potrà aspettare da ciò che la corrente iniziale, per la legge di Ohm, sia  $\mathcal{E}/R$ .

$$q(0) = 0 \quad I(0) = I_0 \quad V_R(0) = I_0 R \quad V_C(0) = 0$$

- Man mano che passa il tempo il condensatore si *carica* e la carica  $q$  sul condensatore *aumenta*; per questo motivo, *meno cariche sono libere* di muoversi e la corrente  $I$  che scorre nel circuito *decresce*. Di conseguenza, il voltaggio del resistore *diminuirà*, ma al contempo *aumenterà* quello relativo al condensatore.

$$q(t) = 0 \quad I(t) = \frac{dq}{dt} \quad V_R(t) = I(t)R \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

- In un *tempo infinito* ( $t = +\infty$ ) il condensatore sarà completamente carico e *non* scorrerà più corrente nel circuito: poiché nel resistore non scorre corrente, non



si ha una d.d.p. in sua corrispondenza ( $V_R(+\infty) = 0$ ), mentre quella ai capi del condensatore coincide con quello del generatore ( $V_C(+\infty) = \mathcal{E}$ ). La carica accumulata è  $q(+\infty) = q_\infty = V_C \mathcal{C}$ .

$$q(+\infty) = q_\infty = V_C \mathcal{C} \quad I(+\infty) = 0 \quad V_R(+\infty) = 0 \quad V_C(0) = \mathcal{E}$$

Formalizziamo questo discorso empirico usando la *legge di Kirchhoff* delle maglie. Fissato come verso di percorrenza della maglia quello della corrente  $I$ , la somma delle d.d.p. è

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - V_R - V_C &= 0 \\ \mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} &= 0 \\ \mathcal{E} - \frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C} &= 0 \end{aligned}$$

RisolviAMO questa equazione differenziale per descrivere la carica  $q = q(t)$  del condensatore:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\mathcal{E}C - q}{RC} \\ \int_0^q \frac{d\tilde{q}}{\tilde{q} - \mathcal{E}C} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t d\tilde{t} \\ \log \tilde{q} - \mathcal{E}C \Big|_0^q &= -\frac{1}{RC} \tilde{t} \Big|_0^t \\ \log \frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} &= -\frac{t}{RC} \\ \frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} &= e^{-\frac{t}{RC}} \\ q(t) &= \mathcal{E}C \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \end{aligned} \tag{5.41}$$

L'andamento temporale della corrente è dettato dal **tempo caratteristico del circuito RC**:

$$\tau = RC \tag{5.42}$$

Essa è una costante dimensionalmente pari ad una quantità temporale e quindi nel SI si misura in secondi:

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}\text{I}^{-2} \cdot \text{M}^{-1}\text{L}^{-2}\text{T}^4\text{I}^2 = \text{T}$$

Come previsto, la carica dopo un tempo di carica *infinito* è  $q_\infty = \mathcal{E}C$ . Per un *matematico*, ciò significherebbe che il condensatore non può mai caricarsi completamente; invece, per un *fisico* questo si realizza - approssimando, chiaramente! - per un tempo tra  $3\tau = 3RC$  e  $3\tau = 3RC$ . Infatti, si ha

$$\begin{aligned} q(3\tau) &= \mathcal{E}C \left( 1 - e^{-3\frac{\tau}{\tau}} \right) = 0,950 \cdot \mathcal{E}C \\ q(5\tau) &= \mathcal{E}C \left( 1 - e^{-5\frac{\tau}{\tau}} \right) = 0,993 \cdot \mathcal{E}C \end{aligned}$$

i quali sono valori *molto* vicini al valore asintotico  $q_\infty$  e che nella pratica possiamo assimilare ad esso.

Per ottenere la corrente che attraversa il circuito ci basta considerare il flusso di corrente attraverso il condensatore - in poche parole, basta derivare  $q(t)$  rispetto al tempo:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.43)$$

Come previsto, la corrente che percorre inizialmente il circuito è  $\frac{\mathcal{E}}{R}$ , mentre asintoticamente tende a zero.

Noto carica e corrente, i valori delle d.d.p. ai capi del resistore e del condensatore sono facili da ricavare:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (5.44)$$

$$V_R(t) = RI(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.45)$$

Riprendendo quanto già detto, il voltaggio del condensatore aumenta al crescere del tempo di carica, mentre quello del resistore diminuisce.

La *potenza* erogata dal generatore è ovviamente dipendente dal tempo e vale

$$P_{gen}(t) = \mathcal{E}I(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.46)$$

mentre quella dissipata del resistore è, in base all'effetto Joule,

$$P_R(t) = I^2(t)R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (5.47)$$

Il lavoro per caricare il condensatore è  $W = \frac{1}{2} V_C q$ ; la potenza elementare relativa è la sua derivata temporale<sup>9</sup>, ossia

$$P_C(t) = V_C(t)I(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} = P_{gen} - P_R \quad (5.48)$$

Ciò è coerente col *principio di conservazione dell'energia*: l'energia immagazzinata (per unità di tempo) dal condensatore è ciò che *rimane* dell'energia prodotta dal generatore dopo che parte di essa è stata dissipata sotto forma di calore dal resistore.

Sul lungo termine, l'energia prodotta dal generatore complessivamente è

$$W_{gen} = \int_0^{+\infty} P_{gen}(t) dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt = -\frac{\mathcal{E}^2}{R} RC e^{-\frac{t}{RC}} \Big|_0^{+\infty} = \mathcal{E}^2 C$$

$$W_R = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C \quad (5.49)$$

mentre quella dissipata dal resistore è

$$W_R = \int_0^{+\infty} P_R(t) dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}^2}{R} RC e^{-\frac{2t}{RC}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C$$

<sup>9</sup>Si vede, infatti che

$$P_C = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} V_C q \right) = \frac{1}{2} \left( q \frac{dV_C}{dt} + V_C \frac{dq}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left( q \frac{dV_C}{dt} + V_C I \right)$$

ed essendo  $V_C = \frac{q}{C}$ , allora  $\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{C}$  e quindi

$$P_C = \frac{1}{2} \left( q \frac{I}{C} + V_C I \right) = \frac{1}{2} (V_C I + V_C I) = V_C I$$

**OSSERVAZIONE.** L'energia dissipata complessivamente dal resistore è indipendente dal valore della resistenza, ma è sempre la metà di quanto produce il generatore di f.e.m..

Il lavoro di carica del condensatore è, per *principio di conservazione dell'energia*, pari a

$$W_{gen} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C \quad (5.50)$$



# II

## ELETTRODINAMICA



# DIELETTRICI

---

*“Si dovrebbe sempre generalizzare.”*

CARL JACOBI, prima che Teoria delle Categorie gli facesse cambiare idea.

## D<sup>OPO</sup>

### 6.1 MATERIALE DIELETTRICI E CONDENSATORI

Consideriamo un *condensatore* alle cui armature è collegato un *elettroscopio*: anche lo abbiamo introdotto come strumento per misurare la carica, può essere usato (e qui lo useremo in questo secondo modo) anche per misurare la differenza di potenziale e/o il campo elettrico. Ricordiamo che, per il condensatore piano con armature distanti  $d$  e densità di carica uniforme  $\sigma$ , il campo elettrico interno è

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

e la differenza di potenziale è

$$V_0 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = E_0 d$$

Se colleghiamo (in parallelo) l'elettroscopio, tale differenza di potenziale corrisponde ad un certo angolo di separazione delle foglioline d'oro.

**Potenziale e capacità di un condensatore con conduttore all'interno** Se introduciamo una *lastra conduttrice* di spessore  $s$  nello spazio tra le due piastre, osservando l'elettroscopio ci accorgiamo che l'angolo tra le foglioline è minore rispetto al caso precedente. Effettivamente avviene un calo di potenziale, ma perché?

Il campo elettrico del condensatore induce una separazione di carica nella lastra conduttrice, formando una distribuzione superficie di carica positiva da un lato e negativa dall'altra. Ciò induce un campo elettrico di verso opposto a quello già presente, in modo che all'interno della lastra *non* ci sia campo elettrico, ma questo comporta una diminuzione del campo elettrico. In termini di potenziali, si noti che la d.d.p.

- tra la prima piastra e il conduttore è  $V_1 = E_0 d_1$ .
- tra il conduttore e la seconda piastra è  $V_2 = E_0 d_2$ .

dove  $d_i$  è la distanza tra la piastra  $i$ -esima e il conduttore; poiché  $d_1 + d_2 = d - s$ , la differenza di potenziale complessiva è

$$V_C = V_1 + V_2 = E_0 (d - s) = V_0 - V_{\text{lastra}} < V_0$$

In altre parole, la d.d.p. *diminuisce* di un fattore  $E_0 s$ . Se occupassi l'intera intercapedine con un materiale conduttore, è evidente che si avrebbe  $V = 0$ : il condensatore diventerebbe un unico conduttore e le cariche si disporrebbero sulla superficie esterna.

Al contrario, la capacità *aumenta*. Se chiamiamo la nuova capacità  $C_C$ , noto che  $V_C = \frac{q_0}{C_C}$ , si ha

$$V_C = \frac{q}{C_C} = E_0 (d - s) = \frac{q}{\Sigma \epsilon_0} (d - s) \implies \frac{1}{C_C} = \frac{d - s}{\Sigma \epsilon_0} C_C = \frac{\Sigma \epsilon_0}{d - s} > \frac{\Sigma \epsilon_0}{d} = C_0$$

$$C_C = \frac{\Sigma \epsilon_0}{d - s} > C_0 \quad (6.1)$$

**Potenziale e capacità di un condensatore con isolante all'interno. Costante dielettrica relativa** Ripetendo l'esperimento con una lastra di *materiale isolante*<sup>1</sup>, ci accorgiamo che la differenza di potenziale  $V$  (e quindi il campo elettrico) è comunque *minore* del caso col vuoto nell'intercapedine, ma tale d.d.p. è maggiore del caso con il materiale conduttore - a parità di spessore.

$$V_C < V < V_0$$

Se riempiessi tutto lo spazio intermedio con una lastra di isolante, si avrebbe  $V_K \neq 0$ . In particolare, si osserva che il potenziale tra le piastre in presenza di un isolante di spessore  $s$  è

$$V(s) = (V_K - V_0) \frac{s}{d} + V_0$$

dove  $V_K$  indica il potenziale per  $s = d$  (condensatore pieno di isolante) e  $V_0$  quello per  $s = 0$  (condensatore vuoto).

Sperimentalmente, si trova che il rapporto tra la d.d.p.  $V_0$  misurata con il condensatore vuoto e quella  $V_K$  con il condensatore riempito di isolante è *caratteristico* del tipo di materiale, ma non dipende dalla geometria o dalla carica delle armature.

**DEFINIZIONE 6.1.1. - COSTANTE DIELETTICA RELATIVA E SUSCETTIBILITÀ ELETTRICA DEL DIELETTRICO .**

La **costante dielettrica relativa** è il rapporto adimensionale

$$\kappa = \frac{V_0}{V_K} > 1 \quad (6.2)$$

La grandezza

$$\chi = \kappa - 1 > 0 \quad (6.3)$$

viene detta **suscettibilità elettrica del dielettrico**.

Maggiore è  $\kappa$ , maggiori sono le capacità conduttive del materiale: formalmente, un materiale è un *conduttore perfetto* se  $\kappa = +\infty$ , ossia se  $V_K = V_C = 0$ .

La seguente tabella presenta alcuni materiali e le loro costanti dielettriche relative.

<sup>1</sup>In realtà quello che affrontiamo in questo paragrafo è vero solo alcuni tipi di isolanti, i cosiddetti **dielettrici (lineari)**; nella sezione XXX approfondiremo la differenza tra i due.



Materiale	Costante dielettrica relativa $\kappa$
Aria	1,000 59
Acqua	80
Alcool etilico	28
Ambra	2,5
Bachelite	4,9
Carta	3,7
Polistirolo	2,6
Porcellana	6,5

Come per il caso del conduttore, la capacità *aumenta*:

$$C_{\kappa} = \frac{q}{V_{\kappa}} = \frac{q\kappa}{V_0} = \kappa C_0$$

$$C_{\kappa} = \kappa C_0 > C_0 \quad (6.4)$$

**Costante dielettrica assoluta** Nel Capitolo 1 abbiamo definito la *costante dielettrica del vuoto*  $\varepsilon_0$ . Come era prevedibile dal nome, non è l'unica costante dielettrica: per trattare dei fenomeni elettromagnetici nei materiali ci conviene definire delle costanti, basate su  $\varepsilon_0$ , che incorporano l'informazione sulla conducibilità elettrica data dalla costante dielettrica relativa  $\kappa$ .

**DEFINIZIONE 6.1.2. - COSTANTE DIELETTICA ASSOLUTA .**

La **costante dielettrica assoluta** è definita come

$$\varepsilon = \kappa \varepsilon_0 \quad (6.5)$$

Le formule che descrivono fenomeni elettrici nei materiali<sup>2</sup> possono essere ottenute facilmente dal caso nel vuoto sostituendo a  $\varepsilon_0$  la costante assoluta  $\varepsilon$ .

**ESEMPIO.** Per un condensatore piano nel vuoto si ha

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d}$$

Per un condensatore con un isolante (dielettrico) all'interno si ha

$$C_{\kappa} = \kappa C_0 = \frac{\kappa \varepsilon_0 \Sigma}{d} = \frac{\varepsilon \Sigma}{d}$$

**OSSERVAZIONE.** In generale, si può calcolare la costante dielettrica *relativa* misurando la costante dielettrica *assoluta* del materiale con un qualche *esperimento opportuno* e dividendo per la costante dielettrica nel vuoto.

$$\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (6.6)$$

**Campo elettrico nel condensatore con isolante all'interno** Ritornando al condensatore completamente riempito di isolante, se il potenziale è minore il campo elettrico è minore del caso nel vuoto; si vede, infatti, che

$$E_{\kappa} = \frac{V_k}{d} = \frac{V_0}{\kappa d} = \frac{E_0}{\kappa} \leq E_0$$

<sup>2</sup>Come già detto, questo vale solo per i dielettrici (lineari), che approfondiremo nella sezione XXX.

La variazione del campo elettrico dovuta alla presenza del materiale è

$$E_0 - E_\kappa = \frac{V_0}{d} - \frac{V_0}{\kappa d} = \frac{V_0}{d} \frac{\kappa - 1}{\kappa} = E_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

Se la densità di carica è  $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ , si osserva che

$$E_\kappa = E_0 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\sigma_0} \quad (6.7)$$

dove

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0 < \sigma_0 \quad (6.8)$$

La (6.7) mostra come il campo elettrico all'interno del dielettrico si possa vedere come la *sovrapposizione* di due campi elettrici nel vuoto, uno  $E_0$  dovuto dalle cariche libere (distribuzione di carica  $\sigma$ ) sulle armature, l'altro  $E_p$  di intensità minore e generato da una distribuzione di carica  $\sigma_p$ . Le cariche che generano quest'ultimo si possono *immaginare* come depositate sulle facce della *lastra dielettrica*, con segno opposto a quello della carica libera sull'armatura continua - in modo per certi versi simile a quanto succede con i conduttori, ma in maniera ridotta.

## 6.2 POLARIZZAZIONE

È noto che gli isolanti sono caratterizzati da una scarsa presenza di cariche libere, a differenza dei conduttori. Ciò farebbe presupporre che le cariche sulle facce che abbiamo immaginato nella sezione precedente come potenziale spiegazione del campo  $E_p$  siano, per l'appunto, un *lavoro di fantasia* della fervida immaginazione di un fisico.

In realtà tali cariche non sono per nulla fittizie, ma non sono lo stesso tipo di cariche libere presenti nei conduttori, bensì sono il risultato macroscopico di *processi microscopici*, alla cui base stanno i fenomeni di *polarizzazione*.

Negli isolanti, come appena detto, le cariche non sono particolarmente libere: quasi tutti gli elettroni sono legati agli atomi e non possono allontanarsi spontaneamente. Si può comunque, con l'azione di *agenti esterni*, separare *localmente* cariche positive e negative all'interno degli atomi - senza romperne quindi i legami - in modo da indurre una separazione di carica.

Il fenomeno della **polarizzazione** consiste proprio in questo: molto brevemente, esso consiste nel rendere degli atomi normalmente neutri in microscopici *dipoli* sotto l'effetto di un campo elettrico esterno, in modo da causare il comportamento osservato in precedenza nei dielettrici. Non esiste un *unico* modo di polarizzare atomi o molecole; noi ci occuperemo della *polarizzazione elettronica* e della *polarizzazione per orientamento*.

**Polarizzazione elettronica** Approfondiamo ora il primo tipo. Un atomo, secondo il modello non quantistico, consiste in un *nucleo* positivo immerso in una *nube* di elettroni negativi. In assenza di un campo elettrico esterno, il nucleo è neutro e la distribuzione degli elettroni attorno al nucleo è mediamente simmetrica, in modo che il centro di massa della nube coincida con la posizione del nucleo.

Introducendo il campo elettrico, la nube negativa subisce uno spostamento *contro* il campo elettrico, mentre il nucleo positivo si sposta in senso *concorde* al campo fino a raggiungere una nuova posizione di equilibrio in cui il campo elettrico è *controbilanciato* dall'attrazione di *dipolo* tra cariche di segno opposto. All'equilibrio, tra i due centri

di cariche c'è una distanza  $\vec{x}$ , con cui definiamo il **momento di dipolo elettrico** della configurazione ottenuta.

$$\vec{p}_a = q\vec{x} = Ze\vec{x} \quad (6.9)$$

dove  $Z$  è il numero di cariche nell'atomo e  $\vec{x}$  va dal centro di carica negativa a quello positiva - ossia nella direzione del campo elettrico.

**OSSERVAZIONE.** Si noti che nel singolo atomo tale spostamento è dell'ordine di  $10 \times 10^{-15}$ , pari circa alle dimensioni del nucleo e quindi il momento di dipolo è *davvero piccolo*. Tuttavia, poiché gli atomi per unità di volume sono un numero estremamente elevato, l'effetto complessivo in un materiale è invece *misurabile*.

La **polarizzazione per elettrizzazione** funziona sinteticamente così: un atomo soggetto ad un campo elettrico esterno  $\vec{E}$  acquista un momento di dipolo  $\vec{p}_a$  elettrico microscopico, parallelo e concorde al campo  $\vec{E}$ .

**OSSERVAZIONE.** Per creare e mantenere questa distanza tra i centri di carica è necessaria dell'energia, fornita dal campo elettrico e che viene immagazzinata nel dipolo.

**Polarizzazione per orientamento** Sebbene abbiamo visto come polarizzare degli atomi, ci sono alcune sostanze le cui molecole presentano già un *momento di dipolo intrinseco*: questo avviene nel caso di molecole poliatomiche (che, non sorprendentemente, sono dette molecole **polari**) come l'*acqua* ( $H_2O$ ) o l'*anidride carbonica* ( $CO_2$ ) in cui la distribuzione delle cariche - dovuta ai legami elettrostatici - è tale che il centro delle cariche negative *non* coincide con quello positivo.

Tuttavia, in assenza di campo elettrico esterno i momenti di dipoli molecolari sono puramente *casuali* a causa dell'agitazione termica che distrugge con urti eventuali configurazioni ordinate; il momento di dipolo medio è nullo.

$$\langle \vec{p} \rangle = 0$$

In presenza di un campo elettrico  $\vec{E}$  esterno, i momenti di dipoli si allineano con il campo a causa del momento delle forze, facendo sì che il momento di dipolo medio risulti non nullo.

$$\langle \vec{p} \rangle \neq 0$$

Ciò nonostante, l'orientamento delle molecole è soltanto *parziale* perché disturbato dall'agitazione termica: se la temperatura è bassa e il campo è intenso allora aumentano le molecole allineate.

La **polarizzazione per orientamento** è quindi una polarizzazione basata sul fatto che le molecole polari sono intrinsecamente dei dipoli.

**Dielettrici e isolanti** Prima di spiegare come queste due polarizzazioni agiscono a livello macroscopico nei materiali dielettrici, dobbiamo effettivamente spiegare cosa sia un *materiale dielettrico*.

Fino ad ora abbiamo utilizzato abbastanza interscambiabilmente il termine "isolante" e "dielettrico", ma *non* sono sinonimi.

- Gli isolanti non hanno (molti) elettroni liberi che si muovono spontaneamente. Di conseguenza, sono materiali che hanno un'alta *resistività* e non scorre praticamente alcuna corrente se soggetto ad un campo esterno. Inoltre,  $\epsilon_0$  costante dielettrica è minore per gli isolanti.

- I dielettrici sono materiali isolanti le cui particelle (atomi, molecole) sono facilmente soggette a fenomeni di polarizzazione. Pertanto, immagazzinano facilmente energia nei dipoli formati.

Nei fatti, sebbene tutti i dielettrici sono isolanti, *non* tutti gli isolanti sono dielettrici. Se non specificato diversamente, quando parliamo di isolanti consideriamo sempre *isolanti dielettrici*.

**Polarizzazione del dielettrico** I momenti dipoli dei singoli atomi o molecole sono *microscopici*. Tuttavia, l'elevato numero di particelle per unità di volume e l'alta suscettibilità alla polarizzazione fa sì che nei dielettrici questi effetti si *sovrappongono* e si abbia un risultato misurabile a livello *macroscopico*.

In termini espliciti, in presenza di un campo elettrico esterno  $\vec{E}$  ciascun atomo o particella in un unità di volume  $\Delta V$  del dielettrico acquista un momento di dipolo  $\langle \vec{p} \rangle$ , parallelo e concorde con  $\vec{E}$ .

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Qui  $N$  è il numero di atomi nel volume  $\Delta V$ . La **densità di polarizzazione** è quindi

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = n \langle \vec{p} \rangle \quad (6.10)$$

dove

$$n = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N}{\Delta V}$$

è la densità di particelle. Il vettore  $\vec{P}$  è anche detto **vettore polarizzazione del dielettrico** e caratterizza l'effetto di formazione dei momenti di dipolo indotti dal campo esterno.

La maggior parte dei *dielettrici* soddisfano una legge di proporzionalità lineare tra la densità di dipolo e il campo elettrico:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (6.11)$$

I dielettrici che seguono tale legge sono detti **lineari**: sono sostanze *amorfe* con simmetria spaziale in tutte le direzioni (**isotropia spaziale**); in altre parole, *non* ci sono direzioni preferenziali dovute *a priori* dal materiale. I dielettrici *non lineari*, come certi cristalli, sono invece anisotropi:  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$  non sono necessariamente paralleli, ma sono su direzioni particolari dette *assi cristallografici*. La suscettibilità elettrica, di conseguenza, non potrà essere rappresentata da un semplice numero, ma è rappresentata da un  *tensore*.

**OSSERVAZIONE.** Ecco spiegato il perché del termine “suscettibilità elettrica”: un materiale come acqua e alcol etilico hanno alta suscettibilità elettrica e sono pronti a polarizzarsi fortemente, mentre altri come la carta o il polistirolo che hanno bassa suscettibilità tendono a polarizzarsi di meno.

**ESEMPIO.** Ricordiamo che nel caso del condensatore si aveva

$$E_\kappa = \frac{E_0}{\kappa} \text{ con } E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Allora, la densità di polarizzazione, in modulo, è

$$P = \varepsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0 = \sigma_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \sigma_p \quad (6.12)$$

Il vettore polarizzazione corrisponde alla densità (vettoriale) di cariche “fittizia” definita precedentemente.

### 6.2.1 Campo elettrico generato dalla polarizzazione

Dopo aver visto come il vettore di polarizzazione sia legato ad un campo elettrico esterno, ci interessa capire come funziona il campo *generato dal dielettrico polarizzato* e quale sia il legame con il vettore di polarizzazione.

Consideriamo un dielettrico *polarizzato uniformemente*, ossia tale per cui  $\vec{P} = \text{const}$  e supponiamo di suddividerlo in prismi infinitesimi di base  $d\Sigma$ , altezza  $dh$  e volume  $dV = d\Sigma dh$ . Le cariche formano tanti dipoli elettrici, ciascuno pari a

$$d\vec{p} = \vec{P} dV = |\vec{P}| d\Sigma d\vec{h} = dq d\vec{h}$$

dove  $d\vec{h}$  è concorde con  $\vec{P}$  e  $dq$  è la carica interna al prisma. Ricordiamo che distribuzioni di cariche *differenti* ma con stesso momento di dipolo sono esternamente *indistinguibili* l’una dall’altra; è dunque perfettamente *equivalente* rimpiazzare l’effetto di moltissimi dipoli microscopici interni al prisma  $dV$  con un sistema costituito da due distribuzioni di cariche

$$\pm dq_p = \pm |\vec{P}| d\Sigma$$

poste *nel vuoto*, distanti  $dH$  e distribuite sulle basi del prisma con densità

$$\pm \sigma_p = \frac{\pm dq_p}{d\Sigma} = \pm \frac{|\vec{P}| d\Sigma}{d\Sigma} = \pm |\vec{P}|$$

Siccome supponiamo  $\vec{P}$  uniforme su tutto il dielettrico, il vettore di polarizzazione è lo stesso per due prismi contigui. Di conseguenza, sulle superfici di contatto le cariche sono uguali e contrarie; se ripetiamo questo ragionamento con altri prismi contigui alle basi, le uniche cariche rimanenti che *non* sono compensate sono solo quelle sulle basi dei primi che *appartengono* alla superficie del dielettrico.

Quello che stiamo facendo è supporre che le cariche nel dielettrico, spostate *localmente* dalle posizioni di equilibrio in quanto il materiale è polarizzato uniformemente, si compensino all’interno ma *non* all’esterno dato che la superficie di bordo non permette ulteriori compensazioni. Le cariche si distribuiscono sulla superficie con densità

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{u}_n \quad (6.13)$$

dove  $\hat{u}_n$  è il versore normale alla superficie  $\Sigma$  del materiale.

**ATTENZIONE!** Sebbene a tratti ciò possa ricordare il comportamento dei conduttori, il funzionamento è *fondamentalmente* differente. Le cariche di polarizzazione non sono libere come nei conduttori e quelle che notiamo sulla superficie non sono elettroni che si sono raccolti lì da altre parti del materiale, ma sono gli elettroni *già presenti superficialmente*: li notiamo solo in virtù degli *spostamenti locali* negli atomi e nelle molecole.

Questo è il motivo per cui non possiamo *asportare un pezzo* di dielettrico e misurare le cariche superficiali, come potremmo fare ad esempio con un conduttore - il funzionamento

è più vicino a quello che studieremo dei *magnete*, da questo punto di vista.

La carica - che avevamo definito “fittizia” - in una particolare porzione di superficie  $\Sigma_0$  è

$$q = \int_{\Sigma_0} \sigma_p d\Sigma = \int_{\Sigma_0} \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma \quad (6.14)$$

**OSSERVAZIONE.** Se la polarizzazione è uniforme non si manifestano cariche all’interno del dielettrico, quindi la carica totale sulla superficie *deve* essere nulla:

$$0 = \int_{\Sigma} \sigma_p d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene che

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} dV = 0 \quad (6.15)$$

Se il vettore di polarizzazione *non* è uniforme, la carica *non* si distribuisce solo sulla superficie. Consideriamo sempre la suddivisione in prismi infinitesimi e studiamo il valore della carica sulla base comune a due prismi contigui, con asse parallelo all’asse  $z$  e area di base  $d\Sigma = dxdy$ . La carica su una superficie infinitesima è

$$dq(z) = \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

Ricordiamo che il versore  $\hat{\mathbf{u}}_n$  lo prendiamo orientato verso l’esterno della superficie; nel nostro caso, il versore  $\hat{\mathbf{u}}_n$  si ha quindi che la densità di carica nel dielettrico dovuta alla polarizzazione è

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} \quad (6.16)$$

Nel caso di  $\vec{\mathbf{P}}$  uniforme si ha

$$0 = q_{tot} = \int_V \rho_p dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} dV + \int_{\partial V} \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0$$

### 6.3 EQUAZIONI DELL’ELETTROSTATICA NEL DIELETTRICO

Siamo ora in grado di formulare le equazioni dell’elettrostatica nei materiali dielettrici. Consideriamo un campo elettrostatico  $\vec{\mathbf{E}}$  che attraversa un materiale dielettrico, inducendo un vettore di polarizzazione  $\vec{\mathbf{P}}$ .

Mentre il rotore del campo elettrico rimane nullo...

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad (6.17)$$

... la sua divergenza risulta pari alla carica complessiva nel materiale, diviso per  $\epsilon_0$  - ma tale carica è pari alla somma della carica  $\rho$  già presente e della carica da polarizzazione  $\rho_p$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \text{vba} \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}}{\epsilon_0} \implies \vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \rho$$

Definito il **campo elettrostatico di induzione dielettrica**

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \quad (6.18)$$

otteniamo la legge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (6.19)$$

Nel caso dei dielettrici lineari, ricordiamo che

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

da cui

$$\vec{D} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

ed equivalentemente, la legge (6.19) si può riscrivere come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (6.20)$$

**OSSERVAZIONE.** Come abbiamo osservato in altri casi lavorando con i dielettrici *lineari*, l'ultima legge è pari all'analogia equazione dell'elettrostatica nel vuoto a cui abbiamo sostituito a  $\varepsilon_0$  la costante assoluta  $\varepsilon$ .





# III

## MAGNETISMO



# MAGNETOSTATICA

---

*“È una rottura pensare alle convergenze, ma a volte bisogna davvero farlo.”*

*SINAI ROBINS, ricordandosi delle innumerevoli convergenze di funzioni tre giorni prima dell'esame di Analisi Matematica 3.*

C<sup>ON</sup>

## 7.1 MAGNETISMO

Inizialmente gli studi dei fenomeni magnetici erano separati da quelli sull'elettricità, dato che i due fenomeni risultavano completamente scorrelati. Con gli occhi del fisico odierno, sappiamo perché non si fece tale collegamento: le leggi che descrivono i fenomeni *magnetostatici*, i primi osservati, non sono dipendenti da aspetti di natura *elettrica*.

Tuttavia, questo non è più il caso quando consideriamo fenomeni se introduciamo la corrente elettrica



# IV

POSTILLE AL NOME DELLA ROSA



# RICHIAMI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE E CALCOLO DIFFERENZIALE

*“Non c’è niente nel mondo il cui significato non sia quello di un qualche massimo o minimo.”*

LEONHARD EULER, dimenticandosi del concetto di estremo inferiore e superiore.

**N**<sup>ON</sup>

## 8.1 VARIETÀ DIFFERENZIABILE

### DEFINIZIONE 8.1.1. - CARTA, COORDINATE LAGRANGIANE, PARAMETRIZZAZIONE LOCALE.

Dato un insieme di punti  $M$  non vuoto, una **carta** è una coppia  $(U, \varphi)$  dove

- $U$  è un insieme<sup>a</sup> contenuto in  $M$  detto **dominio della carta**.
- $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  è una funzione *iniettiva*<sup>b</sup>, con  $\varphi(U)$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

La funzione  $\varphi$  associa ad ogni punto  $p \in U \subseteq M$  un  $m$ -upla  $(q^\lambda)$  (con  $\lambda = 1, \dots, m$ ) dette **coordinate** di  $p$  rispetto alla carta  $(U, \varphi)$ .

$$\varphi(p) = (q^1(p), \dots, q^n(p)) \quad (8.1)$$

La funzione  $\varphi$  è suriettiva è quindi invertibile: l’inversa  $\varphi^{-1}$ , detta **parametrizzazione locale**, associa alle coordinate  $q^\lambda$  il punto  $p \in U \subseteq M$  con quelle coordinate.

<sup>a</sup>A seconda delle definizioni,  $U$  si impone per definizione essere aperto per una topologia innata su  $M$  oppure risulta aperto per una topologia indotta dall’atlante e nella definizione non è richiesto specificarlo. Le due definizioni sono equivalenti.

<sup>b</sup>A seconda delle definizioni,  $\varphi$  si impone per definizione essere un omeomorfismo - i.e. mappa continua con inversa continua - oppure risulta un omeomorfismo in seguito alla topologia indotta dall’atlante stesso. Le due definizioni sono equivalenti.

**DEFINIZIONE 8.1.2. - FUNZIONE DI TRANSIZIONE .**

Date due carte  $(U_1, \varphi_1)$ ,  $(U_2, \varphi_2)$  su  $M$  con  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , la **funzione di transizione** dalla carta  $(U_1, \varphi_1)$  alla carta  $(U_2, \varphi_2)$  è la funzione

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (8.2)$$

Essendo definita tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  si possono definire le sue *derivate*.

Se due carte hanno una funzione di transizione *differenziabile*, di solito  $\mathcal{C}^\infty$  o più raramente  $\mathcal{C}^k$ , le carte sono dette **compatibili**.

**DEFINIZIONE 8.1.3. - ATLANTE .**

Un **atlante** è una collezione di carte  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  che copre tutto l'insieme  $M$ , cioè per qualunque punto  $p \in M$  esiste almeno una carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per un certo  $\alpha \in I$ , tale che  $p \in U_\alpha$ .

Se le funzioni di transizione dell'atlante sono  $\mathcal{C}^k$ , allora l'atlante si chiama **atlante  $\mathcal{C}^k$** .

Se l'atlante è  $\mathcal{C}^\infty$ , la funzione di transizione è un **diffeomorfismo**, in quanto è una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  con inversa  $\mathcal{C}^\infty$ .

**DEFINIZIONE 8.1.4. - ATLANTE MASSIMALE .**

Dato un atlante  $\mathcal{A}$ , l'**atlante massimale** è l'atlante contenente tutte le carte compatibili con l'atlante originale  $\mathcal{A}$ .

**DEFINIZIONE 8.1.5. - TOPOLOGIA INDOTTA DALL'ATLANTE .**

Un atlante definisce sempre una topologia sull'insieme  $M$ , detta

$A \subseteq M$  aperto se  $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  con la topologia Euclidea.

Secondo questa topologia:

1.  $U_\alpha$  è aperto in  $M$ .
2.  $\varphi_\alpha$  manda aperti in aperti, quindi è aperta ed, essendo biettiva, è un omeomorfismo tra  $U_\alpha$  e  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ .

**DEFINIZIONE 8.1.6. - VARIETÀ DIFFERENZIABILE .**

Una **varietà differenziabile** (altresì detta **varietà differenziale**) di classe  $\mathcal{C}^k$  e **dimensione**  $n$  è un insieme di punti  $M$  non vuoto che può essere coperto da un **atlante  $\mathcal{C}^k$**   $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ , che di solito supponiamo massimale, dove  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \alpha \in I$ . Inoltre, lo spazio topologico<sup>a</sup>  $M$  si suppone spesso essere Hausdorff e a base numerabile.

<sup>a</sup>Con la topologia su  $M$  con cui si sono definite le carte o con la topologia indotta dall'atlante.

In sintesi, una **varietà differenziabile** è una varietà topologica con una struttura differenziabile globale: l'esistenza dell'atlante soddisfa le condizioni di varietà topologica, mentre la struttura differenziabile è indotta dalle condizioni di compatibilità delle carte dell'atlante.

Per semplicità considereremo, se non specificato, le varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e quindi tralasciamo il termine "di classe  $\mathcal{C}^k$ ".

**ESEMPLI.**

- Gli spazi affini  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n$  con coordinate cartesiane, polari, sferiche,



cilindriche...

- Le sfere  $S^n$  di dimensione  $n$ .
- Le superfici regolari in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzate da

$$\begin{aligned} \vec{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

## 8.2 METRICA

### DEFINIZIONE 8.2.1. - METRICA .

Una **metrica** (o anche detto  **tensore metrico**) su una varietà differenziabile  $M$  è una mappa bilineare simmetrica - ossia un campo tensoriale simmetrico doppiamente contravariante - non degenerare

$$\begin{aligned} g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto X \cdot Y = \langle X, Y \rangle = g(X, Y) \end{aligned} \quad (8.3)$$

che ad una coppia di campi vettoriali sopra  $M$  associa un campo scalare su  $M$ . Essa soddisfa le proprietà di un **prodotto interno**:

- **Bilinearità**, ossia lineare separatamente in entrambi gli argomenti:

$$g(f\vec{X} + h\vec{Y}, \vec{Z}) = fg(\vec{X}, \vec{Z}) + hg(\vec{Y}, \vec{Z}), \quad \forall f, h \in \mathcal{F}(M), \quad \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathcal{X}(M) \quad (8.4)$$

$$g(\vec{X}, f\vec{Y} + h\vec{Z}) = fg(\vec{X}, \vec{Y}) + hg(\vec{X}, \vec{Z}), \quad \forall f, h \in \mathcal{F}(M), \quad \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathcal{X}(M) \quad (8.5)$$

- **Simmetria**:

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{Y}, \vec{X}), \quad \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathcal{X}(M) \quad (8.6)$$

- **Non degenerare**: per ogni campo vettoriale  $\vec{X} \neq 0$

$$\exists \vec{Y} : g(\vec{X}, \vec{Y}) \neq 0 \quad (8.7)$$

La metrica generalizza molte delle proprietà del *prodotto scalare* di vettori negli spazio Euclidei.

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$  e dati i campi  $\vec{X} = X^\lambda \vec{e}_\lambda$ ,  $\vec{Y} = Y^\mu \vec{e}_\mu \in \mathcal{X}(M)$  si ha

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(X^\lambda \vec{e}_\lambda, Y^\mu \vec{e}_\mu) = X^\lambda Y^\mu g(\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\mu) = X^\lambda Y^\mu g_{\lambda\mu}$$

dove

$$g_{\lambda\mu} = g(\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\mu) \quad (8.8)$$

sono le componenti di  $g$  nelle coordinate scelte.

### DEFINIZIONE 8.2.2. - COORDINATE ORTOGONALI .

Data  $M$  varietà differenziabile e  $(q^\lambda)$  coordinate su  $M$ , le coordinate sono **ortogonali** rispetto ad una metrica  $g$  se  $g_{\mu\nu} = 0$ ,  $\forall \mu \neq \nu$ .

### DEFINIZIONE 8.2.3. - VARIETÀ RIEMANNIANE .

Una varietà **Riemanniana**  $(M, g)$  è una varietà differenziabile  $M$  a cui è associata una metrica  $g$ .

**Metrica e 1-forme** La metrica si può descrivere da una matrice invertibile. Invertendola, otteniamo la matrice associata ad un campo tensoriale simmetrico doppiamente covariante, ossia una mappa bilineare che a due 1-forme sulla varietà differenziabile  $M$  associa un campo scalare.

$$\begin{aligned} g : \Omega(M) \times \Omega(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle = [g^{-1}](\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Pertanto,  $g^{-1}$  definisce un prodotto interno sulle 1-forme.

**OSSERVAZIONE.** Vale anche il ragionamento contrario: da un campo tensoriale  $(2, 0)$  simmetrico che definisce un prodotto interno sulla varietà si può considerare il campo tensoriale  $(0, 2)$  associato alla matrice inversa, il quale è una metrica sulla stessa varietà e un prodotto interno per le 1-forme.

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$  e dati le 1-forme  $\underline{\alpha} = \alpha_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda$ ,  $\underline{\beta} = \beta_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda \in \Omega^1(M)$  si ha

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\alpha_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda, \beta_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda) = \alpha_\lambda \beta_\lambda g(\underline{\epsilon}^\lambda, \underline{\epsilon}^\lambda) = \alpha_\lambda \beta_\lambda g^{\lambda\mu}$$

dove

$$g^{\lambda\mu} = g(\underline{\epsilon}^\lambda, \underline{\epsilon}^\mu) \quad (8.10)$$

**Isomorfismi musicali** Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su una varietà Riemanniana  $(M, g)$ , possiamo considerare due isomorfismi mutualmente inversi tra fibrati vettoriali:

- **Bemolle:** dato un campo vettoriale  $X = X^\lambda \vec{e}_\lambda$  su  $M$ , il **bemolle**  $X^b$  è una 1-forma su  $M$  ottenuta **abbassando un indice**:

$$\begin{aligned} b : TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto X^b = g_{\mu\lambda} X^\mu \underline{\epsilon}^\lambda = X_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda \end{aligned} \quad (8.11)$$

Utilizzando il prodotto interno definito da  $g$ , si ha per qualunque campo vettoriale  $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$X^b(Y) = g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

- **Diesis:** dato una 1-forma  $\varphi = \varphi_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda$  su  $M$ , il **diesis**  $\varphi^\sharp$  è un campo vettoriale su  $M$  ottenuto **alzando un indice**:

$$\begin{aligned} b : T^*M &\longrightarrow TM \\ \varphi &\longmapsto \varphi^\sharp = g^{\mu\lambda} \varphi_\mu \vec{e}_\lambda = \varphi^\lambda \vec{e}_\lambda \end{aligned} \quad (8.12)$$

dove  $g^{\mu\lambda}$  sono componenti della matrice inversa associata alla metrica  $g$ .

Utilizzando il prodotto interno definito da  $g$ , si ha per qualunque campo vettoriale  $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\langle \varphi^\sharp, Y \rangle = g(\varphi^\sharp, Y) = \varphi(Y)$$

### 8.3 ELEMENTO DI LINEA

#### DEFINIZIONE 8.3.1. - SPOSTAMENTO INFINITESIMO .

Il vettore **spostamento infinitesimo** è la variazione infinitesima del vettore posizione  $\vec{r}$ .

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$ ,

$$d\vec{s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} dq^\lambda = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right| \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right|} dq^\lambda = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right| dq^\lambda \hat{u}_\lambda \quad (8.13)$$

Lo spostamento infinitesimo si calcola ricavando, per ogni direzione  $\hat{u}_\lambda$ , la variazione della corrispondente coordinata *tenendo costanti* le altre.

#### DEFINIZIONE 8.3.2. - ELEMENTO DI LINEA .

L'**elemento di linea** è il quadrato della lunghezza di uno spostamento infinitesimo. Se  $g$  è il tensore metrico della varietà  $n$ -dimensionale, allora

$$ds^2 = g(d\vec{s}, d\vec{s}) \quad (8.14)$$

**NOTAZIONE.** Talvolta si indica lo spostamento infinitesimo e l'elemento di linea, in maniera alternativa a  $d\vec{s}$  e  $ds$ , come  $d\vec{\ell}$  e  $d\ell$

Poiché lo spostamento infinitesimo è arbitrario,  $ds^2$  definisce completamente la metrica; in notazione suggestiva ma non corretta dal punto di vista tensoriale

$$ds^2 = g \quad (8.15)$$

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$ , si ha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \quad (8.16)$$

Se la metrica è ortogonale, l'elemento di linea è della forma

$$ds^2 = g_{11} (dq^1)^2 + \dots + g_{nn} (dq^n)^2 \quad (8.17)$$

**Applicazioni** Preso un vettore  $\vec{r}$  parametrizzante una curva, il vettore spostamento  $d\vec{s}$  rappresenta una sua parte infinitesima tale da sembrare lineare. Per questo motivo il parente stretto del vettore spostamento, l'elemento di linea permette il calcolo dell'arcolunghezza e degli integrali curvilinei, oltre che definire la metrica.

#### DEFINIZIONE 8.3.3. - ARCOLUNGHEZZA .

L'**arcolunghezza** è la distanza tra due punti lungo una sezione di una curva  $\vec{r}(\tau)$

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{|ds^2|} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dr^\mu}{dt} \frac{dr^\nu}{dt}} \quad (8.18)$$

#### DEFINIZIONE 8.3.4. - INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE .

Un **integrale curvilineo di prima specie** è un integrale dove un campo scalare

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

viene valutato lungo una curva  $\gamma$  di parametrizzazione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow U$ :

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\vec{r}(\tau)) |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (8.19)$$

In particolare, la lunghezza della curva  $\gamma$  è

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (8.20)$$

**DEFINIZIONE 8.3.5. - INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE .**

Un **integrale curvilineo di seconda specie** è un integrale dove un campo vettoriale  $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  viene valutato lungo una curva  $\gamma$  di parametrizzazione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow U$ :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(\tau)) \cdot |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (8.21)$$

Gli integrali curvilineo di seconda specie sono indipendenti dalla parametrizzazione, ma dipendono invece dall'*orientazione*: nella fattispecie, invertire l'orientazione della parametrizzazione cambia il segno dell'integrale curvilineo.

#### 8.4 ELEMENTO DI AREA

**DEFINIZIONE 8.4.1. -**

Data una superficie  $\Sigma$  a due dimensioni immersa in  $\mathbb{R}^3$ , l'**elemento di superficie** è una sua porzione infinitesima. In termini matematici, scelte una parametrizzazione  $\vec{r}(u, v)$  di  $\Sigma$  e dunque una scelta di coordinate  $(u, v)$ , allora l'elemento di superficie è una 2-forma data da

$$d\Sigma = \sqrt{\det g} du dv = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (8.22)$$

dove  $g$  è la metrica associata alla superficie con la parametrizzazione scelta.

**Applicazioni** Come si può facilmente immaginare, l'elemento di superficie permette il calcolo degli integrali superficiali.

**DEFINIZIONE 8.4.2. - INTEGRALE SUPERFICIALE PER CAMPI SCALARI .**

Un **integrale superficiali per campi scalari** è un integrale dove un campo scalare  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  viene valutato su una superficie di parametrizzazione  $\vec{r} : T \longrightarrow U$ :

$$\int_{\Sigma} f d\Sigma = \int_T f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{\det g} du dv = \int_T f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (8.23)$$

In particolare, l'area di  $\Sigma$  è

$$A = \int_{\Sigma} 1 d\Sigma = \int_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (8.24)$$

Un integrale superficiale per campi vettoriali può essere definito in due modi differenti:

- Integrando il campo *componente per componente* utilizzando l'integrale superficiale per campi scalari; il risultato in tal caso è un vettore.
- Integrando la *componente normale* del campo tramite la superficie con l'integrale superficiale per campi scalari; il risultato in tal caso è uno scalare ed è il **flusso** del campo vettoriale tramite la superficie considerata.

## 8.5 ELEMENTO DI VOLUME

### DEFINIZIONE 8.5.1. - ELEMENTO DI VOLUME .

Fissate delle coordinate  $(x^i)$ , un **elemento di volume** su una varietà Riemanniana *orientabile* di dimensione  $n$  è una  $n$ -forma data da

$$dV = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (8.25)$$

dove  $g$  è la metrica associata alla varietà.

Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , si può fisicamente vedere come una porzione infinitesima di volume - anche se in termini matematici rimane una 3-forma su  $\mathbb{R}^3$ . Date le coordinate  $(u, v, s)$  su  $\mathbb{R}^3$  e la metrica  $g$  ad esse associata, si esprime per convenzione come

$$dV = \sqrt{\det g} du dv ds \quad (8.26)$$

**Cambio di coordinate** Nelle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  la forma di volume è

$$dV = dx dy dz$$

Operando un cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = x(u, v, s) \\ y = y(u, v, s) \\ z = z(u, v, s) \end{cases}$$

la forma di volume cambia con il determinante della Jacobiana del cambiamento:

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, s)} \right| du dv ds$$

**Applicazioni** L'elemento di volume permette di definire l'integrale (di Lebesgue) di una funzione su una varietà differenziabile. Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , la forma di volume permette il calcolo degli **integrali tripli**.

In particolare, il volume di un dominio  $V$  è dato da

$$V = \int_V 1 dV = \int_V dV$$

## 8.6 OPERATORE STAR DI HODGE

### DEFINIZIONE 8.6.1. - SIMBOLO DI LEVI-CIVITA .

Il **simbolo di Levi-Civita** è definito come

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ è una permutazione pari di } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{se } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ è una permutazione dispari di } (1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8.27)$$

**DEFINIZIONE 8.6.2. - OPERATORE STAR DI HODGE .**

Data una varietà Riemanniana *orientata*  $M$  di dimensione  $n$ , lo **star di Hodge** è una funzione lineare

$$* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

che associa alla  $k$ -forma  $\beta$  un'unica  $(n - k)$ -forma  $*\beta$ , detta **duale di Hodge** definita dall'identità

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV \quad (8.28)$$

dove  $dV \in \omega^n(X)$  è la forma di volume indotta da  $g$ .

Fissate delle componenti  $(q^\lambda)$ , una  $k$ -forma ha una scrittura canonica data da

$$\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} \underline{\varepsilon}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underline{\varepsilon}^{i_k} \quad (8.29)$$

dove  $\alpha_{i_1 \dots i_k}$  sono funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  sulla varietà. Allora, il duale di Hodge è definito come

$$*\alpha = \frac{1}{k!(n-k)!} \sqrt{|g|} \alpha_{j_1 \dots j_k} g^{j_1 i_1} \dots g^{j_k i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \underline{\varepsilon}^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \underline{\varepsilon}^{i_n} = \frac{1}{k!(n-k)!} \sqrt{|g|} \alpha^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \underline{\varepsilon}^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \underline{\varepsilon}^{i_n}$$

dove  $g$  è la metrica su  $M$  e

$$\alpha^{i_1 \dots i_k} = \alpha_{j_1 \dots j_k} g^{j_1 i_1} \dots g^{j_k i_k}$$

**PROPRIETÀ 8.6.1. - .** Data una varietà Riemanniana  $(M, g)$  di dimensione  $n$  e sia  $\alpha \in \Omega^k(M)$ . Allora valgono le seguenti:

- Il duale di Hodge della funzione/0-forma identicamente unitaria  $1$  è

$$*1 = dV \quad (8.30)$$

- Il duale del duale di Hodge di una  $k$ -forma è

$$*(*\alpha) = (-1)^{k(n+1)} \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha \quad (8.31)$$

## 8.7 OPERATORI DIFFERENZIALI

In questa sezione ci limitiamo a considerare lo spazio affine  $\mathbb{R}^3$  - dotato delle proprietà di varietà differenziale - ove non specificato diversamente.

**DEFINIZIONE 8.7.1. - OPERATORE NABLA .**

L'operatore **nabla** è una notazione matematica che semplifica la scrittura di diverse equazioni. In coordinate cartesiane su  $\mathbb{R}^3$ , si può immaginare un vettore puramente formale che contiene gli operatori delle derivate parziali nelle tre direzioni spaziali

(cartesiane):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \quad (8.32)$$

**ATTENZIONE!** L'operatore nabra assume significato soltanto quando viene *applicato*, come ad un campo scalare o ad un campo vettoriale. Ad esempio, una scrittura del tipo  $\vec{\nabla} + \vec{v}$  non ha alcun senso né fisico, né matematico.

L'operatore nabra ha tre possibili applicazioni, a seconda se viene moltiplicato per un campo scalare, oppure se moltiplicato con un campo vettoriale per mezzo del prodotto scalare o quello vettoriale.

**Cambio di coordinate** Anche se lo scriviamo come vettore formale,  $\vec{\nabla}$  si può anche vedere come *covettore* - un nome carino per dire le *forme lineari*. In particolare, le componenti di  $\vec{\nabla}$  cambiano come i covettori, cioè dobbiamo operare in modo covariante e utilizzare la *matrice* del cambiamento di base:

$$\frac{\partial}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (8.33)$$

## Gradiente

### DEFINIZIONE 8.7.2. - CAMPO SCALARE .

Un **campo scalare**  $\varphi$  è una funzione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \varphi(x, y, z) \end{aligned} \quad (8.34)$$

dove  $(x, y, z)$  sono eventualmente funzioni del tempo.

Un campo scalare è quindi una mappa che a punti di  $\mathbb{R}^3$  associa valori scalari.

### DEFINIZIONE 8.7.3. - GRADIENTE .

Dato un campo scalare  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ , il **gradiente** è il campo vettoriale dato dall'applicazione della nabra tramite moltiplicazione per uno scalare a  $\varphi$ :

$$\vec{\nabla} \varphi = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi) \quad (8.35)$$

### ESEMPLI.

- Se  $\varphi$  rappresenta l'*altitudine*,  $\vec{\nabla} \varphi$  è la discesa.
- Se  $\varphi$  rappresenta la *pressione* o la *temperatura*,  $\vec{\nabla} \varphi$  è la direzione in cui essa varia più rapidamente.

### DEFINIZIONE 8.7.4. - CAMPO CONSERVATIVO E POTENZIALE .

Dato un campo vettoriale  $\vec{G}$ , se esiste un campo scalare  $\varphi$  tale che  $\vec{G} = \vec{\nabla} \varphi$ , allora  $\vec{G}$  viene detto **conservativo** e il campo scalare  $\varphi$  è detto **potenziale**.

**OSSERVAZIONE.** Dato un campo scalare, esistono delle **superfici equipotenziali** tali per cui  $\varphi = \text{costante}$  sulla superficie. Il gradiente di  $\varphi$  è, punto per punto, ortogonale alla superficie equipotenziale.

**Spostamento infinitesimo e gradiente** Diamo una definizione alternativa del gradiente che ci tornerà più utile avanti. Si noti che il modulo, direzione e verso del gradiente è indipendente dal sistema di coordinate, in virtù della sua natura vettoriale. Fissati due punti infinitamente vicini, possiamo considerare il gradiente del campo scalare  $\varphi$  come il vettore tale che il prodotto scalare per il vettore spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$  dà la variazione di  $\varphi$  per tale spostamento.

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s} \quad (8.36)$$

dove  $d\varphi$  è matematicamente una 1-forma e si calcola tramite la derivata esterna, in coordinate:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx^i} dx^i \quad (8.37)$$

Questa definizione è *intrinseca* e non richiede alcun sistema di coordinate, e può essere utilizzato per ricavare anche l'espressione dell'operatore nabla in altre coordinate.

Per questioni operative conviene comunque servirsi di un sistema di coordinate e calcolare le componenti del gradiente in tale sistema.

## Divergenza

### DEFINIZIONE 8.7.5. - DIVERGENZA .

Dato un campo vettoriale  $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , la **divergenza** è il campo scalare dato dall'applicazione della nabla tramite prodotto scalare ad  $\vec{G}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \partial_x G_x + \partial_y G_y + \partial_z G_z \quad (8.38)$$

**ESEMPIO.** Se  $\vec{G}$  rappresenta la velocità dell'aria in una certa regione di spazio,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$  rappresenta quanta più aria sta "uscendo" da quella regione rispetto a quanta ne sta "entrando". Se scaldiamo l'aria, essa si espande, i vettori puntano verso l'esterno della regione e la divergenza è positiva; se raffreddiamo l'aria, l'aria si contrae e la divergenza ha un valore negativo.

## Rotore

### DEFINIZIONE 8.7.6. - ROTORE .

Dato un campo vettoriale  $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , il **rotore** è il campo vettoriale dato dall'applicazione della nabla tramite prodotto vettoriale ad  $\vec{G}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = (\partial_y G_z - \partial_z G_y, \partial_z G_x - \partial_x G_z, \partial_x G_y - \partial_y G_x) \quad (8.39)$$



Si definisce anche come il determinante formale

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_x & G_y & G_z \\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{vmatrix} \quad (8.40)$$

**ESEMPIO.** Supponiamo che  $\vec{G}$  rappresenta la velocità di un flusso d'acqua in una certa regione di spazio e di porre una pallina ruvida nel fluido, in modo che non si può spostare da tale punto. Anche se non si sposta da lì, il fluido fa comunque ruotare la pallina: l'asse di rotazione è nella direzione di  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$  applicato al centro della palla, mentre la velocità angolare dipende dal modulo del rotore in tale punto. In altre parole, è una misura di come un fluido potrebbe ruotare (o meglio, far ruotare qualcosa a livello microscopico)

**DEFINIZIONE 8.7.7. - CAMPO IRROTAZIONALE .**

Un campo vettoriale  $\vec{G}$  viene detto **irrotazionale** se  $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ .

**DEFINIZIONE 8.7.8. - CAMPO SOLENOIDALE E VETTORE POTENZIALE .**

Dato un campo vettoriale  $\vec{G}$ , se esiste un campo vettoriale  $\vec{A}$  tale che  $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , allora  $\vec{G}$  viene detto **solenoidale** e il campo vettoriale  $\vec{A}$  è detto **vettore potenziale**.

### 8.7.1 Derivate seconde

Dato che dopo aver applicato l'operatore nabla otteniamo campi scalari o vettoriali, possiamo riapplicare l'operatore nabla come in precedenza per ottenere delle derivate seconde; alcune hanno particolare rilevanza perché sono importanti dal punto di vista matematico oppure perché sono costantemente nulle.

i)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi$ , dove  $\nabla^2 \varphi$  è il **laplaciano**:

$$\nabla^2 \varphi = \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi \quad (8.41)$$

ii)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$

iii)  $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$

iv)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = 0$

v)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \nabla^2 \vec{G}$ , dove  $\nabla^2 \vec{G}$  è il **laplaciano vettoriale**:

$$\nabla^2 \vec{G} = (\nabla^2 \partial_x E, \nabla^2 \partial_y E, \nabla^2 \partial_z E) \quad (8.42)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo ii) e iv).

ii)

$$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_x & G_y & G_z \\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{vmatrix} = (\partial_y \partial_z \varphi - \partial_z \partial_y \varphi) \hat{u}_x + (\partial_z \partial_x \varphi - \partial_x \partial_z \varphi) \hat{u}_y + (\partial_x \partial_y \varphi - \partial_y \partial_x \varphi) \hat{u}_z = 0$$

iv)

$$\begin{aligned}
& (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\partial_y G_x - \partial_x G_y, \partial_z G_x - \partial_x G_z, \partial_x G_y - \partial_y G_x) = \\
& = \partial_x \partial_y G_z - \partial_x \partial_z G_y + \partial_y \partial_z G_x - \partial_y \partial_x G_z + \partial_z \partial_x G_y - \partial_z \partial_y G_x = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Definite le nostre derivate seconde, otteniamo una conseguenza quasi immediata.

**PROPOSIZIONE 8.7.1. - OGNI CAMPO CONSERVATIVO È IRROTAZIONALE .**

Ogni campo conservativo  $\vec{G}$  è irrotazionale.

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\vec{G} = \vec{\nabla}\varphi$  per un opportuno potenziale  $\varphi$  definito a meno di costanti, allora si ha che

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 \quad \square$$

Concludiamo la discussione con alcuni teoremi non banali (e forniti senza dimostrazione) che seguono dalle derivate seconde qui definite

**TEOREMA 8.7.1. - OGNI CAMPO IRROTAZIONALE È CONSERVATIVO .**

Ogni campo irrotazionale  $\vec{G}$  è (localmente) conservativo, ossia è il gradiente di un opportuno campo scalare  $\varphi$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0 \implies \exists \varphi : \vec{G} = \vec{\nabla}\varphi \quad \square$$

**TEOREMA 8.7.2. - OGNI CAMPO CON DIVERGENZA NULLA È SOLENOIDALE .**

Ogni campo  $\vec{G}$  con divergenza nulla è (localmente) solenoideale, ossia è il rotore di un opportuno campo vettoriale  $\vec{A}$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0 \implies \exists \vec{A} : \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \square$$

## 8.8 TEOREMA DELLA DIVERGENZA E DEL ROTORE

### Teorema della divergenza

**TEOREMA 8.8.1. - TEOREMA DELLA DIVERGENZA .**

Si consideri un volume  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  compatto con bordo liscio  $\partial V$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \int_{\partial V} \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \quad (8.43) \quad \square$$

Utilizzando la notazione fisica, la 7.43 si scrive come

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \Phi_\Sigma(\vec{G}) \quad (8.44)$$

### Teorema del rotore

**TEOREMA 8.8.2. - TEOREMA DEL ROTORE .**

Si consideri una curva  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  semplice - ossia senza intersezioni con sé stessa, chiusa e liscia a tratti; si consideri inoltre una superficie  $\Sigma$  liscia tale che  $\partial\Sigma = \gamma$ . Dato un

campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{s} \quad (8.45)$$

□

Utilizzando la notazione fisica, la 7.45 si scrive come

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\nabla} \vec{G}) = \Gamma_{\gamma}(\vec{G}) \quad (8.46)$$

**OSSERVAZIONE.** Ci sono infinite superfici con bordo  $\gamma$ , ma il flusso del rotore rimane sempre invariato.

## 8.9 OPERATORI DIFFERENZIALI E FORME DIFFERENZIALI

Consideriamo  $\mathbb{R}^n$  in coordinate cartesiane: questa è una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  con metrica l'identità, ossia  $g = \mathbb{I}$ .

**Gradiente** Dato un campo scalare  $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , il **gradiente** di  $\varphi$  è definito come il campo vettoriale  $\vec{\nabla} \varphi$  associato tramite l'isomorfismo musicale del diesis alla 1-forma  $d\varphi$ ,

$$\vec{\nabla} \varphi = (d\varphi)^{\sharp} \in \Omega^1(M), \quad (8.47)$$

dove  $d\varphi$  è il differenziale (o derivata esterna) della funzione  $\varphi$ .

**Rotore** Il **rotore** di un campo vettoriale  $\vec{G}$  su  $\mathbb{R}^n$  è definito come la  $(n-2)$ -forma  $\text{rot} \vec{G}$  seguente:

$$\text{rot} \vec{G} = * (d[E]^b) = * (d\underline{E})$$

Questa è una generalizzazione del concetto del rotore ad  $n$  dimensioni. Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , il rotore è una 1-forma; pertanto il rotore vettoriale a noi noto è semplicemente il campo vettoriale che otteniamo applicando l'isomorfismo musicale del diesis a  $\text{rot} \vec{G}$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = (\text{rot} \vec{G})^{\sharp} \quad (8.48)$$

**Divergenza** La **divergenza** di  $\vec{G}$  è definito come il campo scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \text{tr} \{ d\vec{G} \} \quad (8.49)$$

dove  $d\vec{G}$  è il differenziale della funzione.

Possiamo definire la divergenza in termini di operatore *star di Hodge*. Dato un campo vettoriale  $\vec{G} = E^i(\vec{r})\hat{u}_i$  su  $\mathbb{R}^3$ , l'isomorfismo musicale del bemolle definisce la sua 1-forma associata

$$\underline{E} = (\vec{G})^b = G_i(\vec{r})dx^i$$

Il suo duale di Hodge è la 2-forma

$$*\underline{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} E^i dx^j \wedge dx^k$$

dove  $\varepsilon_{ijk}$  è un simbolo di Levi-Civita.  
La derivata esterna di  $\underline{E}$  è la 3-forma

$$d * \underline{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_l E^i dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k$$

Il suo duale di Hodge è un campo scalare e coincide con la divergenza di  $\vec{G}$

$$\vec{V} \cdot \vec{G} = * d * \underline{E} = \partial_i E^i \quad (8.50)$$

### 8.9.1 Teorema di Stokes per forme differenziali

#### TEOREMA 8.9.1. - TEOREMA DI STOKES PER FORME DIFFERENZIALI .

Se  $\omega$  è una  $n$ -forma liscia con supporto compatto sulla varietà differenziabile e orientabile  $M$  di dimensione  $n + 1$ , dotata - sulla base dell'orientazione indotta da  $M$  - di un bordo pari ad una varietà differenziabile  $\partial M$  di dimensione  $n$ , allora

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

dove nel secondo integrale si intende, con un abuso di notazione, la restrizione sul bordo  $\partial M$  di  $\omega$  (o equivalentemente, è pari al pullback  $i^* \omega$  dove  $i \hookrightarrow \partial M$  è l'inclusione del bordo nella varietà).  $\square$

Da questo importante teorema si possono ricavare diversi risultati già noti, applicati tuttavia al mondo delle forme differenziali.

**Teorema del rotore per forme differenziali** Si può osservare che  $\vec{V} \times \vec{G} \cdot \hat{u}_n dA$  è una 2-forma che è pari a

$$\vec{V} \times \vec{G} \cdot \hat{u}_n dA = * (\vec{V} \times \vec{G})^b = d\vec{G}^b$$

Allora, il teorema del rotore per le forme differenziali diventa

$$\int_{\Sigma} d\underline{E} = \int_{\partial \Sigma} \underline{E} \quad (8.51)$$

**Teorema della divergenza per forme differenziali** Si può osservare che  $\vec{V} \cdot \vec{G} dV$  è una 3-forma che è pari a

$$\vec{V} \cdot \vec{G} dV = d * \underline{E}$$

Allora, il teorema del rotore per le forme differenziali diventa

$$\int_V * d * \underline{E} = \int_{\partial V} a s t d\underline{E} \quad (8.52)$$

### 8.10 COORDINATE SFERICHE E CILINDRICHE

In molti casi dove sono presenti evidenti simmetrie, le coordinate cartesiane possono complicare la trattazione del fenomeno fisico. A questo scopo introduciamo due sistemi di coordinate di frequente utilizzo: le **coordinate sferiche** e le **coordinate cilindriche**.

## 8.10.1 Coordinate sferiche

**DEFINIZIONE 8.10.1. - COORDINATE SFERICHE .**

Le **coordinate sferiche** sono un sistema di coordinate per  $\mathbb{R}^3$  dove la posizione  $\vec{r}$  di un punto è specificato da tre numeri:

- La **distanza radiale**  $r$  dall'origine.
- L'**angolo polare** (latitudine)  $\theta$  tra la direzione verticale dello *zenith* - l'asse  $z$  positivo - e il vettore radiale.
- L'**angolo azimutale** (longitudine)  $\varphi$  - definito tra l'asse  $x$  positivo e la proiezione del vettore radiale sul piano  $xy$ , in senso antiorario.

Utilizzando i radianti, si pone  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$

La legge di trasformazione dalle coordinate sferiche alle coordinate cartesiane è

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (8.53)$$

Viceversa, si ha

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (8.54)$$

**Basi e componenti vettoriali**

**RICORDIAMO...** Dato un cambiamento di coordinate  $q^\lambda = q^\lambda(x^i)$ , la matrice del cambiamento di base è la matrice che ha sulle colonne i vettori della nuova base espressi in funzione della seconda. In *notazione di Einstein* essa è della forma

$$M = \left( \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \right) \quad (8.55)$$

dove  $i$  è l'indice di riga e  $\lambda$  quello di colonna.

Per passare dalla base riferita alle  $x^i$  alla nuova base riferita alle  $q^\lambda$  la formula è quindi

$$\vec{e}_\lambda = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \vec{G}_i \quad (8.56)$$

Invece, per cambiare le componenti dei vettori dobbiamo operare in modo controvariante e utilizzare la *matrice inversa* del cambiamento di base:

$$v^\lambda = \frac{\partial q^\lambda}{\partial x^i} V_i \quad (8.57)$$

Poniamo qui  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $q^1 = r$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = \varphi$ . Il vettore posizione in cartesiane è

$$\vec{r} = x^i \hat{u}_i = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z$$

Allora, il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  alla base sferica  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$  è

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \frac{\partial x^i}{\partial r} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z \\ \hat{e}_\theta = \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \hat{u}_x + r \cos \theta \sin \varphi \hat{u}_y - r \sin \theta \hat{u}_z \\ \hat{e}_\varphi = \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_x + r \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_y \end{cases} \quad (8.58)$$

Poiché

$$|\hat{\mathbf{e}}_r| = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} \right| = 1 \quad |\hat{\mathbf{e}}_\theta| = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \right| = r \quad |\hat{\mathbf{e}}_\varphi| = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta, \quad (8.59)$$

il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$  alla base *ortonormale* sferica  $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_\varphi)$  è

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{|\hat{\mathbf{e}}_r|} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_z \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{|\hat{\mathbf{e}}_\theta|} = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y - \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_z \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{|\hat{\mathbf{e}}_\varphi|} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_y \end{cases} \quad (8.60)$$

La matrice del cambiamento di base ortonormale  $M$  è una rotazione nelle tre dimensioni attorno all'origine, e la relazione di cui sopra si può scrivere matricialmente come

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_r \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

Si osservi in particolare che  $M$  è *ortogonale*, quindi  $M^{-1} = M^T$ . Pertanto, il cambiamento delle componenti di un campo vettoriale  $\vec{\mathbf{G}}$  dalle cartesiane alle sferiche è

$$(G_r \ G_\theta \ G_\varphi) = (G_x \ G_y \ G_z) M^{-1} = (G_x \ G_y \ G_z) M^T \quad (8.62)$$

**Elemento di linea** Lo spostamento infinitesimo da  $\vec{\mathbf{r}} = (r, \theta, \varphi)$  a  $\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}} = (r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  è

$$d\vec{\mathbf{s}} = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial q^i} \right| dq^i \hat{\mathbf{u}}_i = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} \right| dr \hat{\mathbf{u}}_r + \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \right| d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \right| d\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi = dr \hat{\mathbf{u}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (8.63)$$

Essendo la metrica associata alle coordinate sferiche ortogonale, l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8.64)$$

### Operatore nabla

**RICORDIAMO...** L'operatore nabla, scritto in notazione versoriale cartesiana, è

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_x \hat{\mathbf{u}}_x + \vec{\nabla}_y \hat{\mathbf{u}}_y + \vec{\nabla}_z \hat{\mathbf{u}}_z = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z$$

Le componenti dell'operatore dalle sferiche alle cartesiane sono:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_x = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{\nabla}_y = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{\nabla}_z = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (8.65)$$

Sostituendo in 7.32 i versori e le componenti dell'operatore nabla in coordinate sferiche, si ricava, dopo raccoglimenti e calcoli noiosi,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (8.66)$$

In modo alternativo, possiamo ricavare l'espressione 7.66 dalla definizione intrinseca di gradiente. Presa una funzione  $V$  arbitraria, inserendo lo spostamento infinitesimo 7.63 nella 7.36 si ricava

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi = \vec{\nabla}_r V dr + \vec{\nabla}_\theta V r d\theta + \vec{\nabla}_\varphi V r \sin \theta d\varphi,$$

da cui

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (8.67)$$

e quindi l'espressione dell'operatore nabla è quanto scritto nella 7.66.

**Divergenza** Calcoliamo la divergenza in coordinate sferiche applicando l'operatore nabla in coordinate sferiche al campo vettoriale come fosse un prodotto scalare, tenendo conto che i versori stessi sono funzioni delle coordinate e che le derivate devono essere applicate *prima* del prodotto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \right) \cdot (G_r \vec{\mathbf{u}}_r + G_\theta \vec{\mathbf{u}}_\theta + G_\varphi \vec{\mathbf{u}}_\varphi) = \\ &= \vec{\mathbf{u}}_r \left[ \frac{\partial}{\partial r} (G_r \hat{\mathbf{u}}_r) + \frac{\partial}{\partial r} (G_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial r} (G_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi) \right] + \\ &\quad + \frac{\vec{\mathbf{u}}_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (G_r \hat{\mathbf{u}}_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi) \right] + \\ &\quad + \frac{\vec{\mathbf{u}}_\varphi}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (G_r \hat{\mathbf{u}}_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (G_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (G_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi) \right] \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti con la *regola di Leibniz* otteniamo, in ogni parentesi, sei termini di cui 3 che sono derivate dei versori. Facendo solo calcoli noiosi ci calcoliamo queste derivate...

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r = 0 & \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta = 0 & \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta = -\hat{\mathbf{u}}_r & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_r = \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\theta = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi = \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_r - \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{array}$$

...e sostituendo nell'espressione della divergenza otteniamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi} \quad (8.68)$$

**Laplaciano** Essendo il laplaciano la divergenza del gradiente, per ottenerlo applichiamo con un prodotto scalare l'operatore nabla in coordinate sferiche alle componenti del gradiente:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (8.69)$$

### 8.10.2 Coordinate cilindriche

#### DEFINIZIONE 8.10.2. - COORDINATE CILINDRICHE .

Le **coordinate cilindriche** sono un sistema di coordinate per  $\mathbb{R}^3$  dove la posizione  $\vec{\mathbf{r}}$  di un punto è specificato da tre numeri:

- La **distanza assiale**  $R$  tra l'asse verticale - asse  $z$  - e il punto  $\vec{\mathbf{r}}$

- **L'angolo azimutale** (longitudine)  $\theta$  - definito tra l'asse  $x$  positivo e la linea sul piano  $xy$  dall'origine alla proiezione del punto  $\vec{r}$ , in senso antiorario.

- **L'altezza**  $z$  in segno tra il piano  $xy$  e il punto  $\vec{r}$ :

Utilizzando i radianti, si pone  $R \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $z \in \mathbb{R}$

La legge di trasformazione dalle coordinate sferiche alle coordinate cartesiane è

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ y = R \cos \theta \\ z = z \end{cases} \quad (8.70)$$

Viceversa, si ha

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \quad (8.71)$$

**Basi e componenti vettoriali** Poniamo qui  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $q^1 = R$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = z$ . Il vettore posizione in cartesiane è

$$\vec{r} = x^i \hat{u}_i = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z$$

Allora, il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  alla base cilindrica  $(\hat{e}_R, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$  è

$$\begin{cases} \hat{e}_R = \frac{\partial x^i}{\partial R} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} = \cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y \\ \hat{e}_\theta = \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -R \sin \theta \hat{u}_x + R \cos \theta \hat{u}_y \\ \hat{e}_z = \frac{\partial x^i}{\partial z} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{u}_z \end{cases} \quad (8.72)$$

Poiché

$$|\hat{e}_R| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} \right| = 1 \quad |\hat{e}_\theta| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = R \quad |\hat{e}_z| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1, \quad (8.73)$$

il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  alla base *ortonormale* cilindrica  $(\hat{u}_R, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z)$  è

$$\begin{cases} \hat{u}_R = \frac{\hat{e}_R}{|\hat{e}_R|} = \cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y \\ \hat{u}_\theta = \frac{\hat{e}_\theta}{|\hat{e}_\theta|} = -\sin \theta \hat{u}_x + \cos \theta \hat{u}_y \\ \hat{u}_\varphi = \frac{\hat{e}_\varphi}{|\hat{e}_\varphi|} = \hat{u}_z \end{cases} \quad (8.74)$$

La matrice del cambiamento di base ortonormale  $M$  è una rotazione assiale attorno all'asse  $z$  in senso antiorario, e la relazione di cui sopra si può scrivere matricialmente come

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} \quad (8.75)$$

Si osservi in particolare che  $M$  è *ortogonale*, quindi  $M^{-1} = M^T$ . Pertanto, il cambiamento delle componenti di un campo vettoriale  $\vec{G}$  dalle cartesiane alle cilindriche è

$$(G_r \ G_\theta \ G_\varphi) = (G_x \ G_y \ G_z) M^{-1} = (G_x \ G_y \ G_z) M^T \quad (8.76)$$



**Elemento di linea** Lo spostamento infinitesimo da  $\vec{r} = (r, \theta, z)$  a  $\vec{r} + d\vec{r} = (r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$  è

$$d\vec{s} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \right| dq^i \hat{u}_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} \right| dR \hat{u}_R + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| d\theta \hat{u}_\theta + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| dz \hat{u}_z = dR \hat{u}_R + R d\theta \hat{u}_\theta + dz \hat{u}_z \quad (8.77)$$

Essendo la metrica associata alle coordinate cilindriche ortogonale, l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (8.78)$$

**Operatore nabla** Ricaviamo, per semplicità, l'espressione dell'operatore nabla dalla definizione intrinseca di gradiente. Presa una funzione  $V$  arbitraria, inserendo lo spostamento infinitesimo 7.77 nella 7.36 si ricava

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla}_R V dR + \vec{\nabla}_\theta V R d\theta + \vec{\nabla}_z V dz,$$

da cui

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial R} \hat{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{u}_z \quad (8.79)$$

e quindi l'espressione dell'operatore nabla è

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R} \hat{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \quad (8.80)$$

**Divergenza** Calcoliamo la divergenza in coordinate cilindriche applicando l'operatore nabla in coordinate sferiche al campo vettoriale come fosse un prodotto scalare, tenendo conto che i versori stessi sono funzioni delle coordinate e che le derivate devono essere applicate *prima* del prodotto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{G} &= \left( \frac{\partial}{\partial R} \hat{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \right) \cdot (G_R \vec{u}_R + G_\theta \vec{u}_\theta + G_z \vec{u}_z) = \\ &= \vec{u}_R \left[ \frac{\partial}{\partial R} (G_R \hat{u}_R) + \frac{\partial}{\partial R} (G_\theta \hat{u}_\theta) + \frac{\partial}{\partial R} (G_z \hat{u}_z) \right] + \\ &\quad + \frac{\vec{u}_\theta}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (G_R \hat{u}_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \hat{u}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (G_z \hat{u}_z) \right] + \\ &\quad + \vec{u}_z \left[ \frac{\partial}{\partial z} (G_R \hat{u}_R) + \frac{\partial}{\partial z} (G_\theta \hat{u}_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (G_z \hat{u}_z) \right] \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti con la *regola di Leibniz* otteniamo, in ogni parentesi, sei termini di cui 3 che sono derivate dei versori. Facendo solo calcoli noiosi ci calcoliamo queste derivate...

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial R} \hat{u}_R = 0 & \frac{\partial}{\partial R} \hat{u}_\theta = 0 & \frac{\partial}{\partial R} \hat{u}_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_R = \hat{u}_\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta = -\hat{u}_r & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_R = 0 & \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_\theta = 0 & \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z = 0 \end{array}$$

...e sostituendo nell'espressione della divergenza otteniamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (G_R R) + \frac{1}{R} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \quad (8.81)$$

**Laplaciano** Essendo il laplaciano la divergenza del gradiente, per ottenerlo applichiamo con un prodotto scalare l'operatore nabla in coordinate cilindriche alle componenti del gradiente:

$$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.82)$$