FISICA 2 - 31/03/2022

Abbiamo visto che un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico. Maxwell si accorse dell'effetto opposto: un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo elettrico

## CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Dalla legge di Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

in forma differenziale

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Avevamo visto che questo è valida (solo se $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla}\vec{J}$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

La legge di Ampère è consistente solo se la corrente $\vec{J}$ è solenoidale. Ricordiamo che vale anche l'eq. di continuità: se una carica elettrica esce da un volume in cui è contenuta, il flusso è diverso da zero.

$$(*) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Possiamo così correggere la legge di Ampère per tenere conto della variazione temporale.

Noto che $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \dots \Rightarrow \rho = \varepsilon \dots \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

Noto che $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La legge di Ampère si "corregge" nella LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

In questo caso otteniamo, tenendo conto della divergenza

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \vec{E}}{\partial t}$$

ottenendo come dovrebbe essere

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si osserva che $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow$

Per ottenere la formulazione integrale

$$\int_\Sigma \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot\hat{u}_n \, d\Sigma = \mu_0 \int_\Sigma \vec{j}\cdot\hat{u}_n \, d\Sigma + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{u}_n \, d\Sigma$$

|| thm rotore    || def di $i$

$$\Gamma_{\partial\Sigma}(\vec{B}) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi_\Sigma(\vec{E})}{\partial t}$$

Denominiamo

- $i_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_\Sigma(\vec{E})}{\partial t}$ CORRENTE DI SPOSTAMENTO
- $\vec{j}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ DENSITÀ DI CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Potremmo chiamare una densità di corrente totale

$$\vec{J}_{TOT} = \vec{J} + \vec{J}_S$$

tale che

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{TOT}$$

da cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{TOT} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\cancel{TOT}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_S}_{= \frac{\partial \rho}{\partial t}} = 0 \rightsquigarrow$ la corrente Totale sia solenoidale.

PERCHÈ SI CHIAMA COSÌ


18.1

Consideriamo un circuito RC con una superficie $\Sigma_i$ attorno ad una delle piastre, in modo che si possa separare in due sotto superfici con bordo comune

$$\partial \Sigma_1 = \partial \Sigma_2$$

- $\Sigma_1 \supseteq$ armatura, no filo
- $\Sigma_2 \supseteq$ filo, no armatura

Allora si avrebbe

$$\int_{\Sigma_2} \vec{J} \cdot \hat{v}_n \, d\Sigma = i$$

$$\int_{\Sigma_1} \vec{J} \cdot \hat{v}_n \, d\Sigma = 0 \rightsquigarrow \text{strano, perchè...}$$

La corrente $\vec{J}$ da sola non è solenoidale, ma se consideriamo

questa "corrente" $i_S$ si spiega. Bisogna fare attenzione che <u>non</u> è unità vera e propria sarebbe, ma nel senso pratico la intendiamo così

Questa che abbiamo ottenuto è l'ultima legge scoperta, perché il contributo fisico della variazione è molto piccolo a causa del fattore $1/c^2$.

In realtà questo è un grande risultato che si ottiene prima teoricamente per consistenza

EQUAZIONI DI MAXWELL: LE EQ. FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO CLASSICO NEL VUOTO

I (GAUSS): $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

III $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

II: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

IV (MAXWELL AMPÈRE) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

CONSEGUENZE: EQ. DI CONTINUITÀ $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

FORZA DI LORENTZ: $\vec{F} = q(\vec{E} + v \times \vec{B})$

DENSITÀ DI ENERGIA NEI CAMPI: $u = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{B^2}{\mu_0}\right)$

Nel vuoto (inteso come "senza sorgenti $\rho$ e $\vec{j}$")

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ $\quad$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Questa formulazione è fondamentale, perché le sue soluzioni sono onde che si propagano alla velocità della luce: la luce del visibile è solo un caso particolare delle onde elettromagnetiche

## POTENZIALI

Sappiamo che $\vec{B}$ è solenoidale, quindi $\exists \vec{A}$ t.c.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Abbiamo visto come $\vec{E}$ è conservativo nel caso statico, mentre in generale $\exists V$ campo scalare t.c.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

Oss: Il vettore potenziale è definito a meno di gradiente

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$$

ma se $\phi$ dipendesse dal tempo, si avrebbe

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \underbrace{- \vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} V}_{\vec{\nabla} V' \text{ dove } V' = V + \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

Per far sì che sia consistente, ci basta considerare come costante additiva del potenziale $V$ il termine $-\frac{\partial \phi}{\partial t}$. La classe di equivalenza sarà quindi, contemporaneamente

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \wedge V \sim V - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Questa è l'INVARIANZA DI GAUGE. Uso l'invarianza di gauge per fissare

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

Se $D=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\neq 0$, definito $\begin{cases}\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\phi \\ V'=V-\frac{\partial\phi}{\partial t}\end{cases}$ sostituisco

$$\vec{\nabla}\cdot A'-\nabla^2\phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V'}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=D$$

Fisso il valore di $\phi$ in modo che $\boxed{\vec{\nabla}\cdot A'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V'}{\partial t}=0}$ : facciamo la SCELTA DI GAUGE con l'eq.

$$\boxed{\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-D}$$

Posto $\Box=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ l'OPERATORE DI D'ALAMBERT O BOX

l'eq. diventa $\boxed{\Box\phi=-D}$

Ora, se $\begin{cases}\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}V\end{cases}$

si ha

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

inserendo nella IV eq. di Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}\Rightarrow\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}=\mu_0\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec\nabla\underbrace{\left(\vec\nabla\cdot\vec A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)}_{\text{FISSATO } = 0 \text{ per scelta di Gauge}} - \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec A = -\mu_0 \vec J$$

Otteniamo la seguente equazione che caratterizza $\vec A$

$$\boxed{\Box \vec A = -\mu_0 \vec J}$$

Calcoliamo la divergenza di $\vec E$

I eq. di Maxwell

$$\vec\nabla\cdot\vec E = \vec\nabla\cdot\left(-\frac{\partial \vec A}{\partial t} - \vec\nabla V\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\cdot\vec A - \nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Poiché per la scelta di Gauge

$$\vec\nabla\cdot\vec A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

si ha

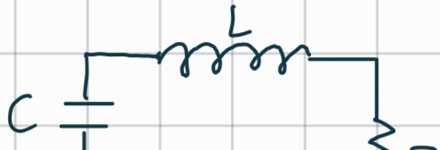
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Box V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Queste sono dette EQUAZIONI DEL MOTO DELLA DINAMICA CLASSICA

## CIRCUITO RLC

Possono essere studiati anche senza un generatore!




Supponiamo che al tempo $t=0$ il condensatore sia carico.


18.2

Alla chiusura dell'interruttore, le cariche girano e e si ha una corrente legata alla d.d.p. ai capi del condensatore.

L'induttore creerà una corrente opposta che fa oscillare la corrente come una molla.

Ciao Massimo

Ricordandoci che $i = -\frac{dq}{dt}$

$V_C = q/C$ $\qquad$ $V_L = -L\frac{di}{dt}$

$V = V_C + V_L = Ri \Rightarrow \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = Ri$

Deriviamo rispetto a $t$:

$$\frac{i}{C} - L\frac{d^2i}{dt^2} = R\frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0}$$

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

- CASO $R=0$: È un circuito LC, raro che accada nella pratica.

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ FREQUENZA CARATTERISTICA

condizioni iniziali

$$\boxed{i(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)}$$

Poiché $V_C = L\frac{di}{dt} = -V_L$

$$V_C(t) = AL\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Se a $t=0$ $\quad i(0)=0 \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$

$V_C(0) = V_0$

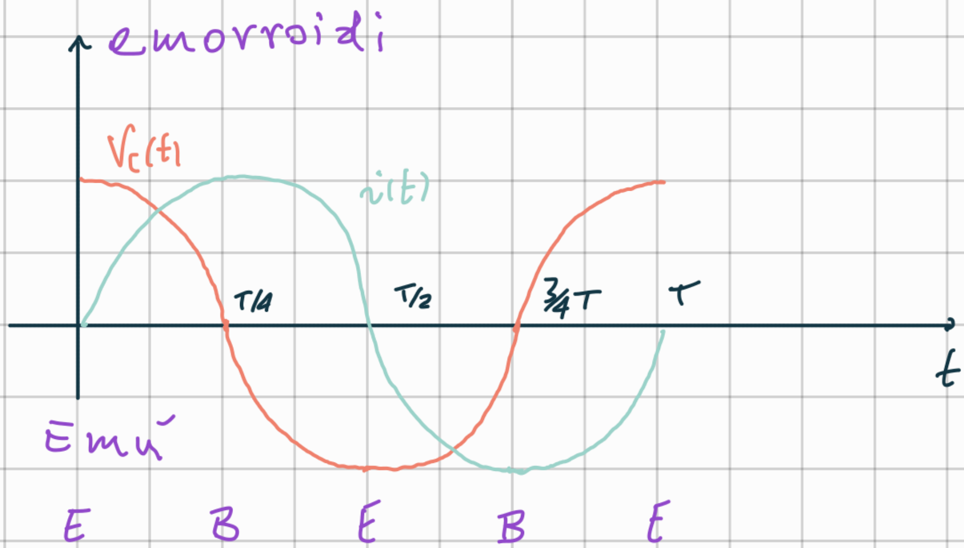
$v_C(0) = V_0$ $\quad \frac{di}{dt}\Big|_{t=0}$ $\quad L$

Allora, imponendo il passaggio con le eq.

$$i_0(0) = A\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$$
$$V_C(0) = A L \omega_0 \cos\phi = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{L\omega_0}$$

$i$ e $V_C$ sono in QUADRATURA DI FASE

18.3




In sostanza oscilla l'energia tra il campo elettrico e campo magnetico. Ai picchi di $V_C(t)$ corrisponde l'energia del campo elettrico (potenziale alto) ma no campo magnetico (perché $i=0$); al picco di $i(t)$ non c'è campo elettrico!

Per conservazione dell'energia, l'energia totale è quella nel condensatore all'inizio

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} C V_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} L \frac{V_0^2}{L^2 \omega_0^2}$$

• CASO $R \neq 0$:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

ricorda l'eq. della molla

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{2\gamma \frac{dx}{dt}}_{\text{termine di smorzamento/attrito viscoso}} + \omega^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt} = 0$$

Nel caso elettrico

$$\gamma = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

La resistenza funge da qualcosa che si oppone al moto delle cariche e agisce come

la sol. è

$$\boxed{i(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}}$$

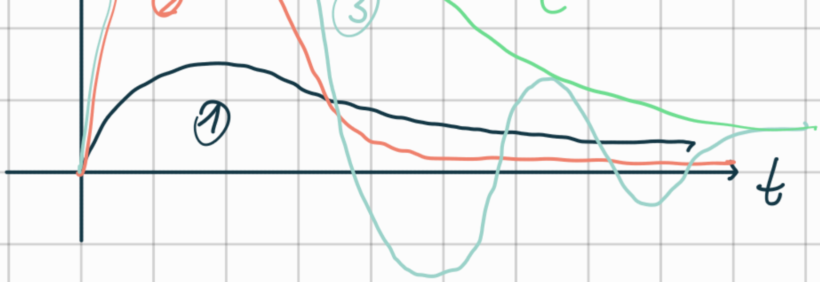
dove $\alpha + 2\gamma + \omega_0^2 = 0$

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$
$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

① SMORZAMENTO FORTE: $\gamma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow R^2 > 4L$

$$i(t) = Ae^{-\gamma t + t\sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}} + Be^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}}$$

$$= e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2+\omega_0^2}} + Be^{t\sqrt{\gamma^2+\omega_0^2}}\right.$$




18.4

Si può definire la RESISTENZA CRITICA dopo la quale vale lo smorzamento forte.

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

② SMORZAMENTO CRITICO $R = R_c$, $\gamma^2 = \omega_0^2$ $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$

$$i(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

Se $v(0) = 0$ $\quad i(t) = Bt\, e^{-\gamma t}$

③ SMORZAMENTO DEBOLE: $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$i(t) = D \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{fattore smorzante}} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$$