LEZIONE LUN - MAR
MERC - GIOV SETT } SECONDO ANNO MOODLE 25/04 - 01/05 NO LEZIONE
02/05

FISICA 2 - 07/04/22

ONDE

Un esempio tipico di onde è l'onda in una corda tesa, oppure le onde sonore (compressione dell'aria con variazione di pressione)

Soluzioni dell'eq. di Maxwell
sol. dell'eq. della rel. Generale.

Altri esempi di onde particolari: onde elettromagnetiche come la luce, onde gravitazionali (LIGO, VIRGO) che si propagano senza bisogno di un mezzo alla velocità della luce.
↳ Sono entrambi risultati teorici, che però abbiamo ritrovato (più o meno facilmente) in natura

DEF: Un'ONDA è una perturbazione di una situazione di equilibrio che si propaga nel tempo con una certa velocità v.

OSS: Questa perturbazione si propaga, ma NON trasporta materia; si può vedere mettendo una foglia su un laghetto e creando delle onde.
C'è, tuttavia, trasporto di energia e impulso.

Possono essere descritti da

CAMPI SCALARI: temperatura $T(x,y,z,t)$
pressione $P(x,y,z,t)$
densità $\rho(x,y,z,t)$

CAMPI VETTORIALI: campo elettrico $\vec{E}(x,y,z,t)$
campo magnetico $\vec{B}(x,y,z,t)$

sottoforma di perturbazioni $\Delta P(x,y,z,t)$.
Per piccole perturbazioni una grande quantità di fenomeni è descritta dall'eq.

↗ È una qualunque perturbazione

$$\boxed{\Box \xi = 0}$$

dove $\boxed{\Box = \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}$ è il D'ALAMBERTIANO

Questa è un'EDO lineare ed omogenea alle derivate parziali

Es (di EDO non lineari omogenea):
- onde del mare
- corda (?)
- Navier-Stokes.

Studiamone le soluzioni

1-DIM: $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

Una soluzione dell'eq. è della forma

$$\xi(x,t) = \xi(x \pm vt) = \xi(x_\pm) = \xi(x_\pm(x,t))$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x_\pm}\frac{\partial x_\pm}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x_\pm} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial x_\pm}\frac{\partial x_\pm}{\partial t} = \pm \frac{\partial \xi}{\partial x_\pm} v$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\pm^2}\frac{\partial x_\pm}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\pm} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \pm \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\pm^2}\frac{\partial x_\pm}{\partial t} v = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\pm^2}$$

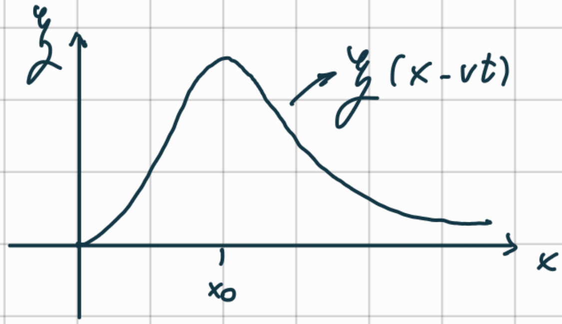
e quindi

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\pm^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\pm^2} - \frac{1}{\cancel{v^2}}\cancel{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\pm^2} = 0$$

La soluzione più in generale è unica e della forma

$$\xi(x,t) = \xi_1(x-vt) + \xi_2(x+vt)$$

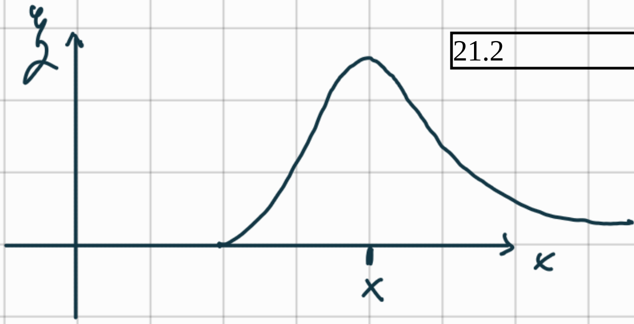
21.1



t_0

La prima parte cosa dice?
Se al tempo t_0 si trova in x_0,
al tempo t sarà in x, che è
una traslazione lineare del punto x_0

21.2



$$x - vt = x_0 - vt_0$$
$$x = x_0 + v(t-t_0) = x_0 + v\Delta t$$

L'evoluzione temporale è una traslazione rigida lungo l'asse x con velocità v.

Ciao Marcio ♡
Ti voglio bene!

La funzione ξ_2 è analoga, ma è semplicemente uno spostamento con velocità v verso l'asse x negativo.

Bianchi e' piu difficolto

IN 3DIM:

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $\xi(u_\pm)$ dove

$$u_\pm = \vec{k}\cdot\vec{x} \pm \omega t \qquad \text{per} \qquad \frac{\omega}{|\vec{k}|} = v$$

$= \vec{\nabla}(\vec{k}\cdot\vec{x})$ $\qquad \partial_x(k_x x + k_y y + k_z z) = k_x$

$$\vec{\nabla}\xi = \frac{\partial \xi}{\partial u_\pm}\vec{\nabla}u_\pm = \frac{\partial \xi}{\partial u_\pm}\vec{k}$$

$$\nabla^2\xi = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_\pm}\right)\cdot\vec{k} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_\pm^2}\vec{\nabla}u_\pm\cdot\vec{k} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_\pm^2}|\vec{k}|^2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm \frac{\partial \psi}{\partial u_\pm}\,\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \pm \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_\pm^2}\,\omega\,\frac{\partial u_\pm}{\partial t} = \omega^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_\pm^2}$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_\pm^2}|\vec{k}|^2 - \frac{1}{v^2}\,\omega^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_\pm^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_\pm^2}\left(|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)$$

$$u_\pm = \vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t = \vec{k}\cdot\left(\vec{r} \pm \frac{\vec{k}\,\omega}{|\vec{k}|^2}\,t\right) = \vec{k}\left(\vec{r} \pm \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\,v t\right)$$

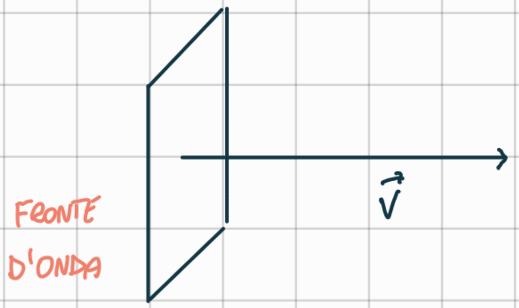
$$u_\pm = \vec{k}\cdot(\vec{r} \pm \vec{v}\,t)$$

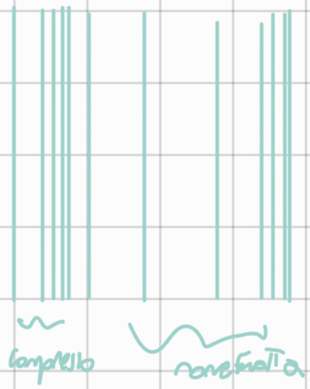
vettore di modulo $v = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ e verso $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$

Se scelgo $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$, allora

$$u_\pm = k_x x \pm \omega t = k_x\left(x \pm \frac{\omega}{k_x} t\right) = k_x (x \pm v t)$$

cioè ci riconduciamo al caso unidimensionale!



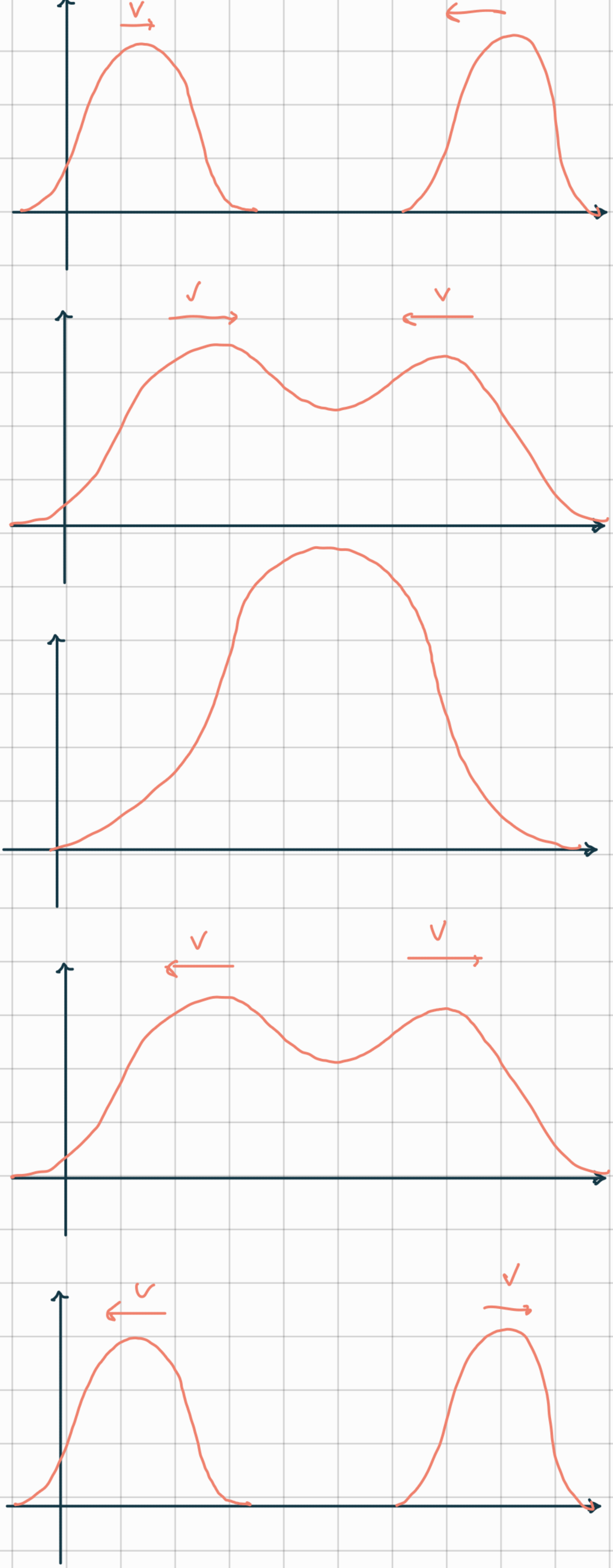


21.3

Un'onda unidimensionale è detta ONDA PIANA.
Se il fronte d'onda è un piano ortogonale alla velocità di propagazione.

Tutte le onde complicate, viste da lontano, sono piane.

Una conseguenza delle soluzioni dell'eq. di D'Alembert è il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE



21.4

pensavo magari di fare le due onde con due colori diversi, così si capisce meglio che si scambiano

ONDE PIANE ARMONICHE

può anche essere così

PULSAZIONE (o "FREQUENZA")

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)}$$

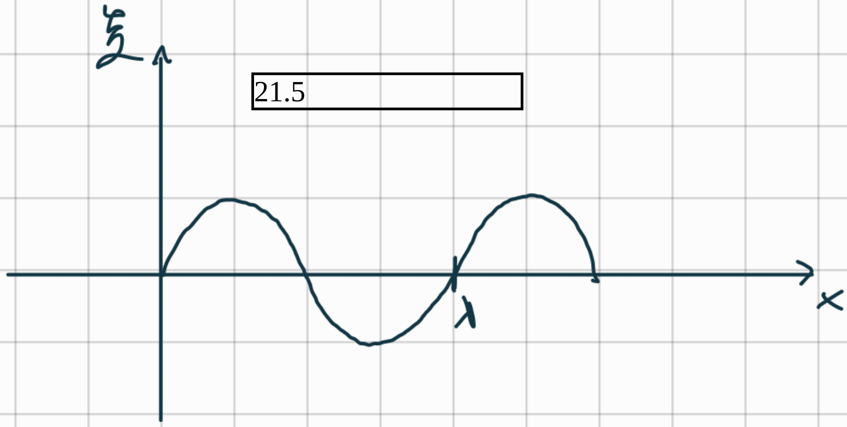
NUMERO D'ONDA

può anche avere una fase.

è soluzione perché $kx - \omega t = k\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)$ e $\boxed{v = \frac{\omega}{k}}$

Considerando un istante fissato t_0

21.5

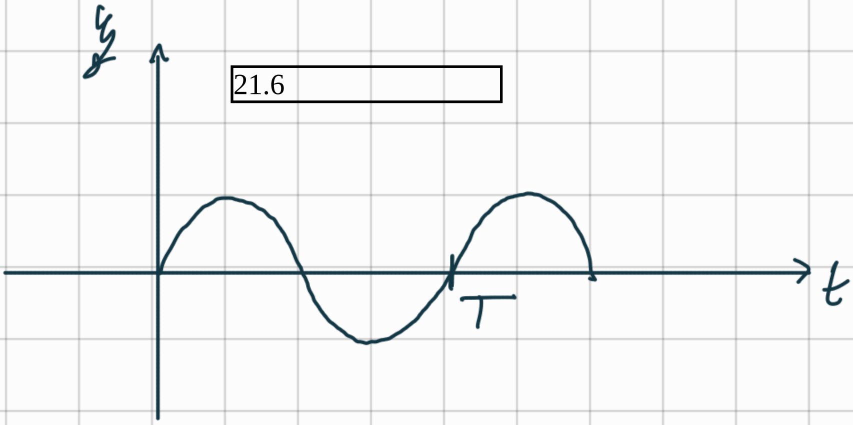


La LUNGHEZZA D'ONDA è

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Anche rispetto ad un punto fissato la posizione fissato si muove di moto armonico

21.6



Il PERIODO è

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

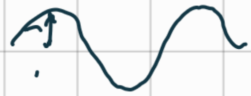
(È utile per l'analisi di Fourier: si può descrivere una funzione periodica come somma di onde piane armoniche)

La velocità si può allora scrivere come $\boxed{v = \frac{\lambda}{T}}$

POLARIZZAZIONE

Fino ad ora siamo stati molto vaghi su cos'è ξ.

- Per una corda, ξ è la variazione dall'equilibrio



- Per una molla colpita per il lungo, ξ è uno spostamento Δx dall'equilibrio nella direzione di come è stato colpito la molla.

Il primo caso è detto POLARIZZAZIONE TRASVERSALE,
il secondo " LONGITUDINALE

Posso pensare a ξ come un vettore $\vec{\xi}$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$\vec{\xi}_0 \rightarrow$ VETTORE POLARIZZAZIONE

Es: • $\vec{\xi}_0 = (\xi_0, 0, 0)$ è polarizzazione longitudinale

$\vec{\xi}_0 = (0, \xi_{0y}, \xi_{0z})$ è polarizzazione trasversale

Oss: Con la pol. trasversa l'oscillazione è ortogonale alla propagazione.

DEF: Il FRONTE D'ONDA è il punto che dista un periodo dal fronte d'onda precedente.

Es: $\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t)$ $\quad \xi_z = \xi_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta)$

Se $\delta = 0$: $\xi_y \sin(kx - \omega t)$ $\quad \xi_z = \xi_{0z} \sin(kx - \omega t)$

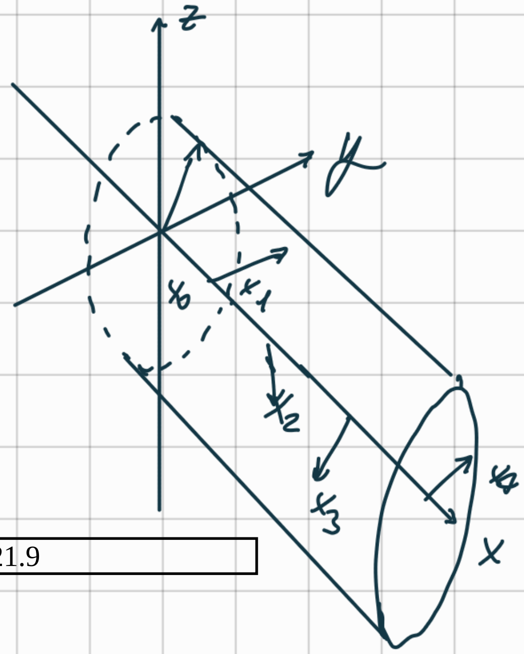
Le onde sono in fase: l'onda si propaga sul piano inclinato, dove $\theta = tg \frac{\xi_{0y}}{\xi_{0x}}$

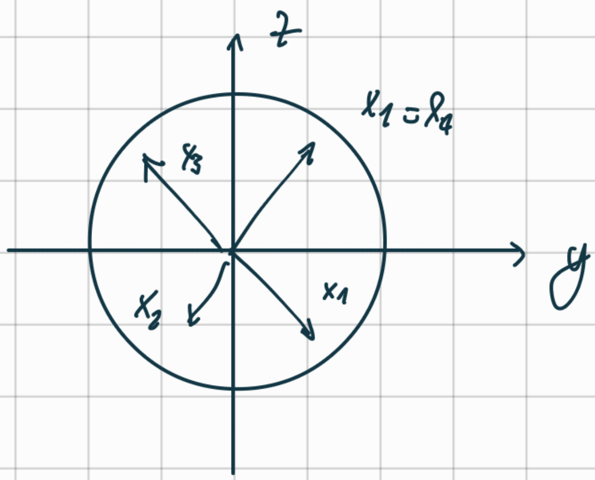
21.8

Se $\delta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t) \quad \xi_z = \xi_{0z} \cos(kx - \omega t)$

Questo è un caso in cui la polarizzazione è ELLITTICA, perché

$$\frac{\xi_y^2}{\xi_{0y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0z}^2} = 1$$





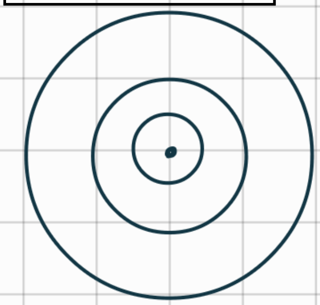
21.9

Se $\xi_{0y} = \xi_{0z}$ si ha POLARIZZAZIONE CIRCOLARE.

ONDE SFERICHE

Il caso classico di fronte d'onda non è piano, ma sfera

21.10



Cerchiamo una soluzione dell'eq. di D'Alembert con simmetria sferica.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\xi = 0 \qquad \xi(r, t)$$

Il laplaciano è $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \frac{2r}{r^2}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\underbrace{\left(2\frac{\partial y}{\partial r} + r\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\right)}_{=\frac{\partial^2 (r y)}{\partial r^2}}$$

$$\frac{\partial^2 (r y)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(y + r\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r} + r\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 2\frac{\partial y}{\partial r} + r\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Allora $\frac{1}{r}\frac{\partial^2(y r)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2(y r)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r y)}$

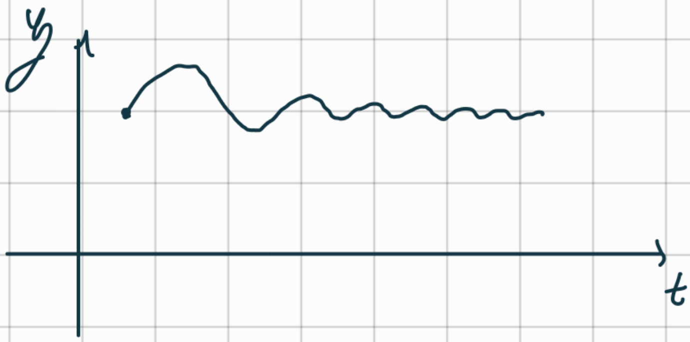
È il caso lineare, ma la soluzione è

$$r y = y_1(r - vt) + y_2(r + vt)$$

Le onde armoniche sferiche sono

$$y = \frac{y_0}{r}\sin(kr - \omega t)$$

È un'onda che si smorza al crescere del raggio, che si disperde



21.11