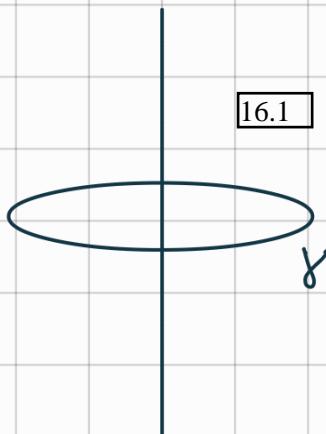


LEGE DI AMPÈRE, PT. 2

la circolazione del campo magnetico, nel caso stazionario, è

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$



16.1

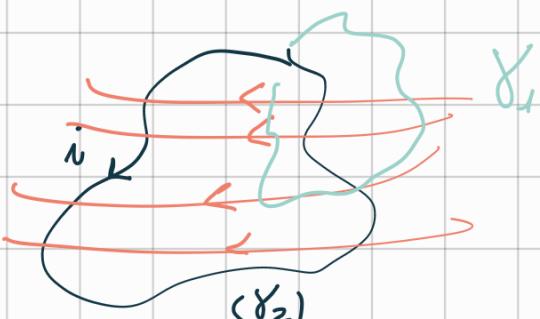
In forma differenziale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

DICHIARAZIONE: FISICA 2 e TEORIA DEI NODI

Una curiosità matematica: potrò fare per un circuito qualunque (e non in filo rettilineo come abbiamo visto)?

16.2



Dovrò calcolare  $\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Potremo trarre  $\gamma_1$  con un angolo  $\varphi_1$ ...

$\gamma_1: \vec{r}(\varphi_1)$

... e il洞o  $(\gamma_2)$  con un angolo  $\varphi_2$ :

$\gamma_2: \vec{r}(\varphi_2)$

Ora:

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{r}(\varphi_1)}{d\varphi_1} d\varphi_1$$

(1)

Per la prima legge di Laplace il campo generato dal circuito è

$$\vec{B}(\vec{z}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\gamma_2} d\vec{s}_2 \times \frac{\vec{z} - \vec{r}(\varphi_2)}{|\vec{z} - \vec{r}(\varphi_2)|^3}$$

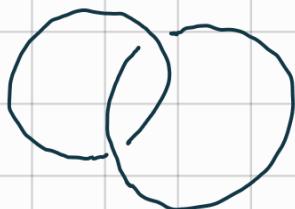
Si ha

$$\Gamma_{\gamma_1}(\vec{B}) = \oint_{\gamma_1} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\gamma_2} d\vec{s}_2 \times \frac{\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)}{|\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)|^3} \cdot d\vec{s}_1$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2 \cdot \frac{\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

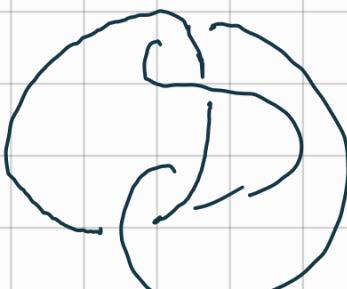
Questo è il **GAUSS LINKING NUMBER**, che indica quante volte due nodi  
- nel senso topologico - si intersecano e come, dato un'orientazione

Es:



$$n = \pm 1$$

16.3



$$n = \pm 2$$

16.4

$$m = \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} d\vec{s}_1 \times \oint_{\gamma_2} d\vec{s}_2 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

E' anche collegato alla **MAPPATURA DI GAUSS**, una mappa da una superficie orientata sulla sfera. In questo caso, la superficie è il toro  $T = S^1 \times S^2$

$$f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \frac{\vec{r}(\varphi_1) - \vec{r}(\varphi_2)}{|\vec{r}(\varphi_1) - \vec{r}(\varphi_2)|}$$

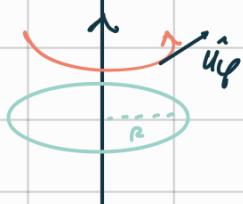
Q non è bimodulo e puo' ricoprire lo sfere piu' volte. L'integrale

④ rappresenta l'area dell'immagine dello mappo di Gauss. Durdeneab

per  $4\pi$  sfirme contando quante volte  $\mathbf{r}$  ricopre  $S^2$ .

### ES (FILO RETTILINEO INFINTO)

16.5



Per simmetria abbiamo dipendenza solo dal raggio  
e con direzione tangente tangente o circonferenze  
centrate nel filo.

Pose le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}$$

si ha

$$\vec{B} = B(R) \hat{u}_\varphi$$

Parametrizzi su un cerchio in cui  $\vec{B}$  è costante, ad esempio cerchi  
circonferenze di raggio  $R$ . In questo caso

$$d\vec{s} = R d\varphi$$

Allora, usiamo la legge di Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n$$



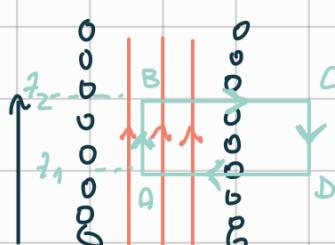
$$\vec{B}(r) R \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 i$$



$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Riotteniamo la legge di Biot-Savart!

Ese: (Solenoido infinito)



16.6

Consideriamo lo spazio lungo il quale siamo interessati come in figura.

Sappiamo che, per ragioni di simmetria

$$\vec{B} = B(r) \hat{u}_z$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left( \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \right) \vec{B} \cdot dr = \int_A^B \vec{B} \cdot dr$$

perpendicolare      esterno      perpendicolare  
 $\Rightarrow = 0$        $\Rightarrow = 0$        $\Rightarrow = 0$   
 non vi è  
 campo!

$$= \int_{z_1}^{z_2} B(R) dz = B(R) (z_2 - z_1)$$

Per la legge di Ampère

$$B(R) (z_2 - z_1) = \mu_0 i_N$$

dove  $i_g$  e' la corrente che ottenere lo amo  $\mathcal{S}$ , dipendente dal numero di spine contenute all'interno di  $\mathcal{S}$ .

$$N = \int_{z_1}^{z_2} M dz = M(z_2 - z_1)$$

L'escita si trova  
 se supponiamo  
 costante

$$\Rightarrow i_g = N i = M(z_2 - z_1) i$$

corrente in una singola spina.

Allora

$$\cancel{B(R)(z_2 - z_1) = \mu_0 i_g = \mu_0 M(z_2 - z_1) i}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(R) = \mu_0 M i}$$

- EQUIVALENZI ELETTROSTATICI:
- filo  $\rightsquigarrow$  sfere
  - piastre  $\rightsquigarrow$  solenoide

**EQUAZIONI DI MAXWELL DELL'ELETROSTATICA**  $\Leftrightarrow$  **ELETTROSTATICA**  $\Leftrightarrow$  **MAGNETOSTATICA**

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Ossi Sono indipendenti! Questo e' vero solo nel caso statico-stazionario.

Poiché  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ,  $\exists V$  campo sbarre t.c.  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$   
 Inservendolo nello primo otteniamo (o LEGGE DI POISSON):

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

Poiché  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\exists \vec{A}$  campo vettoriale t.c.  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$   
Inserendolo nella pma otteniamo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

che, sviluppando, risulta

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Oss:  $V$  è sempre definito o meno di costanti, e l'unico quantitativo rimovibile è la differenza  $\vec{A}$  potenziale. In termini di classi di equivalenza

$$V \sim V + \alpha$$

Nel caso del vettore potenziale c'è una cosa analogia. Dato una funzione  $\phi$ ,  $\vec{A}$  è definito o meno di quadrati

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$$

Infatti,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Questo è un caso di **INVARIANZA SI GAUSS**.

Posto funzione  $\phi$  in modo che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  fosse diverso  $\vec{A}'$  t.c.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \quad \text{t.c.} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$$

Ci sono combinazioni si summe l'one

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Fatto questo **SCELTA DI GAUSS**, ovvero la magnetostatica si riduce ad un'equazione di Poisson: dato  $\phi$   $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla}^2 A_x = \mu_0 j_x$$

$$\vec{\nabla}^2 A_y = \mu_0 j_y$$

$$\vec{\nabla}^2 A_z = \mu_0 j_z$$

+

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La elettromagnetostatica è determinata da queste 4 equazioni.

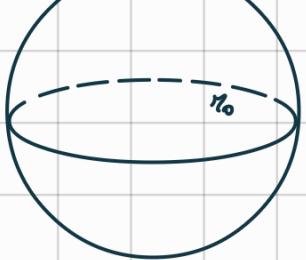
La soluzione più generale, date le condizioni di simmetria del motivo fissato ( $V, \vec{A} \rightarrow 0$  per  $\vec{r} \rightarrow \infty$ ), è ottenuta da

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{dove } dV' = dx' dy' dz'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Ossia: noti  $\rho$  e  $j$  saremo in grado di determinare completamente la situazione - modulo calcolare l'integrale, that is.

ESEMPIO: SFERA CARICA UNIFORMEMENTE



$$\vec{p}(\vec{r}) = \begin{cases} p & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

Potenzial in coordinate sferiche...

16.7

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$dV' = (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'}$$

... e calcoliamo l'integrale dato dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2 V(r) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{(r')^2 \sin \theta'}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'}} \quad (\square)$$

Operiamo in cambi di variabile

$$\begin{cases} u = \cos \theta' \\ du = -\sin \theta' d\theta' \end{cases}$$

$$\square \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} dr' \int_{-1}^1 du \frac{-(r')^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' u}}$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} dr' \frac{(r')^2}{2} \left. \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' u}} \right|_{-1}^1$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^{r_0} dr' \frac{1}{2} (r'^2 - r^2) \left( (r' - r)(r' + r) \right)$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^r dz' r' (r+r'-|r-r'|)$$

Distinguiamo il caso dentro e fuori lo sfere:

$r > r_0$ : si ha che  $r > r'$  perciò  $r_0 > r'$

$$V(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^r 2(r')^2 dr' = \frac{\rho r_0^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$\rho = q/V_s = q/(4/3\pi r_0^3)$

"Due lavori puoi ricavare lo stesso risultato in varie"

Il campo all'estero è

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

•  $r < r_0$ : devo saperne l'integrale quando  $r' < r$  e  $r' > r$

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( \int_0^r dz' (2r')^2 + \int_r^{r_0} dz' 2rr' \right)$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \left( \frac{2}{3} r^3 + \cancel{r} (r_0^2 - r^2) \right)$$

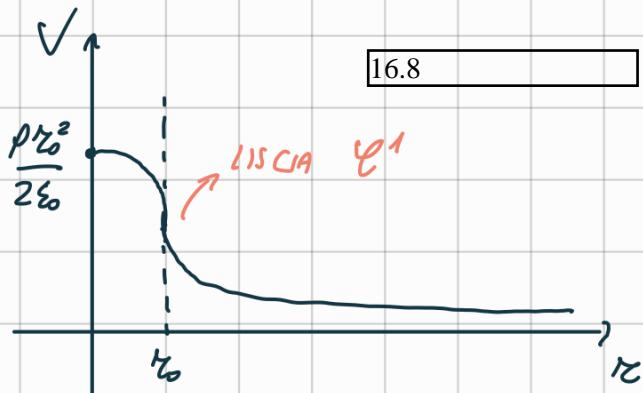
$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (r_0^2 - \frac{r^2}{3})$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r$$

In sintesi:

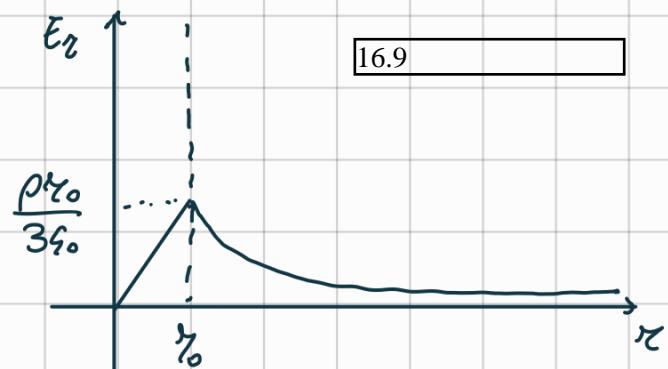
$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} (r_0^2 - r^2/3) & r < r_0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > r_0 \end{cases}$$

16.8



$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & r < r_0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > r_0 \end{cases}$$

16.9



## CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO

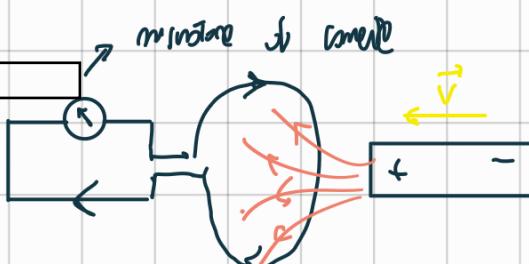
Portiamo delle osservazioni sperimentali:

• FARADAY (UK), HENRY (USA) : INDUZIONE ELETROMAGNETICA (risolvere)

a cui segue la Formulazione Teorica di Maxwell, che per coniugarsi  
osserva che un campo magnetico variabile genera un campo elettrico.

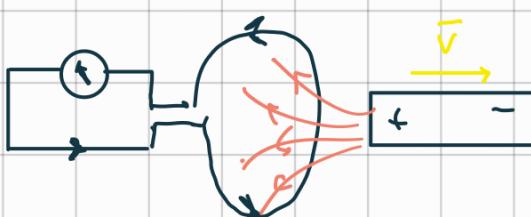
### ESPERIMENTO 1:

16.10



Avvicinando un magnete ad una spina  
si produce uno scatto nella spina.

16.11



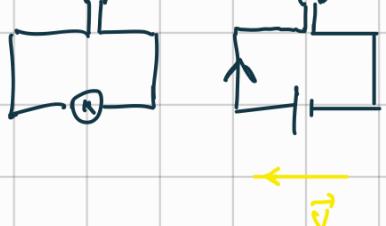
Se allontaniamo il magnete la corrente  
comincia verso.

### ESPERIMENTO 2:

16.12



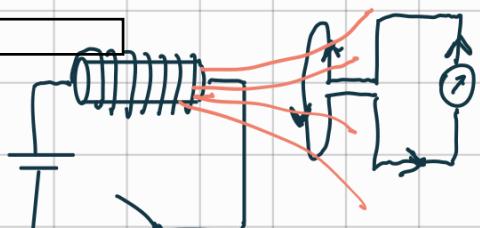
Se avviciniamo una spina vicino da



commece ad un'altro spira scarica, in  
esso smette di circolare la corrente

### ESPERIMENTO 3: (FARADAY)

16.13



Si analogo in solenide ad un'ansa in ferro.

Appena chiude l'interruttore scorre in campo magnetico generato dal solenide e scorre verso il ferro in uno spira (ma inoltre spira) per poco tempo, prima di fermare.

Se apro l'interruttore il campo magnetico s'annulla fino ad essere zero; nello spira si genera una corrente con verso opposto fino a che non s'annula.

Maxwell, sulla base di questi esperimenti, formulò la **LEONE DI FARADAY**

In campo magnetico  $\vec{B}$ , il cui flusso attraverso una superficie  $\Sigma$  delimitata da circuito varia nel tempo, genera una forza elettromotrice

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d \oint \Sigma (\vec{B})}{dt}$$

la corrente generata in un circuito con resistenza  $R$  è, dalla legge di Ohm,

$$i = \frac{1}{R} \frac{d \oint \Sigma (\vec{B})}{dt}$$

ossi Una forza elettromotrice f.e.m è prodotta da un campo elettrico non conservativo.

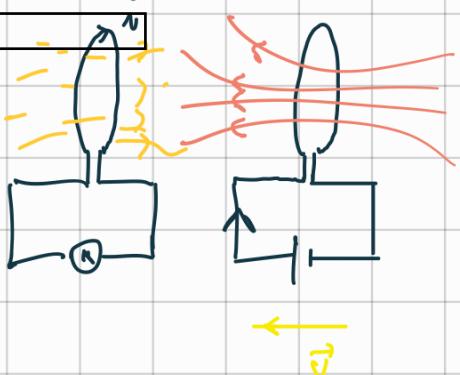
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Il meno nelle formule è dovuto dalla **LEGE DI LENZ**

"la f.e.m. indotta è tale da opporsi alla causa che l'ha generata"

16.14



Infatti, lo stesso prodotto nello spazio non causa risultante e' tale da produrre un campo magnetico opposto che si oppone al campo magnetico iniziale.

Come faccio a generare una f.e.m. indotta? Ricordiamo che il flusso è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Pollo:

- Cambio  $\vec{B}$  nel tempo
- Cambio  $\vec{B} \cdot \hat{n}$  (l'angolo fra  $\vec{B}$  e la superficie) nel tempo
- Cambio  $\Sigma$

