

MASSIMO BERTOLOTTI

fatto di sangue

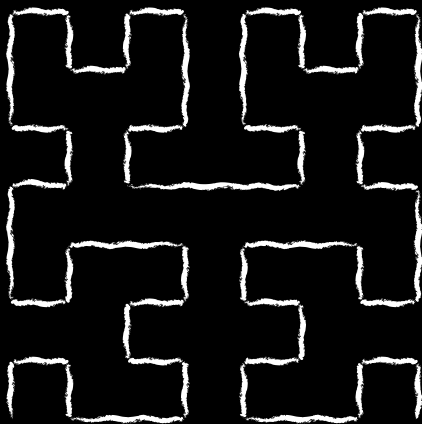
FRA DUE ANALISTI  
PER CAUSA DI UN INTEGRALE

si sospettano moventi misurabili



$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n|}$$

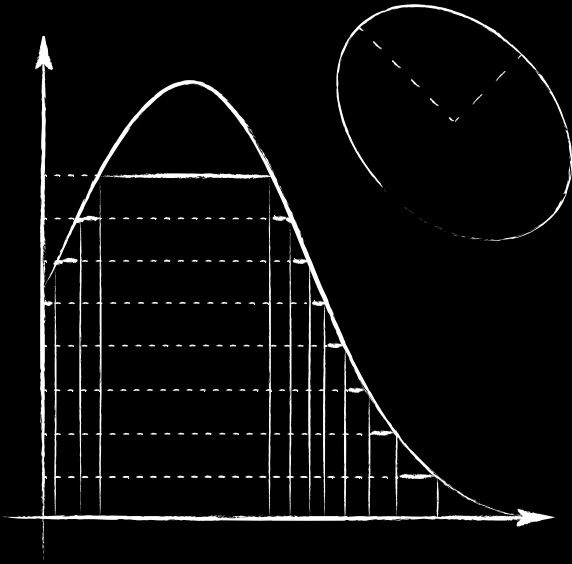
Manualozzo™ di Analisi Matematica 3



$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$





# INTRODUZIONE AL MANUALOZZO™

---

*“Sai, per essere un matematico non aveva abbastanza immaginazione; ma ora è diventato un poeta e se la cava davvero bene.”*

DAVID HILBERT, riferendosi a ~~Marino~~ Badiale all'autore del Manualozzo™.

Guardando la copertina di questo testo, dei potenziali lettori - sì, parlo con voi - si potrebbero chiedere: “Ma che diavole è un *Manualozzo*™?”

**M**ANUALOZZO™ s. m. [der. di *manuale*, col suff. -ozzo]. - Appunti di lezioni universitarie scritti da studenti, senza troppe pretese di formalità e potenzialmente non totalmente corretti, ma sono comunque meglio che niente.<sup>1</sup>

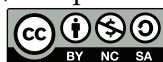
Dunque, quello che state leggendo è il **Manualozzo™ di Analisi Matematica 3**, basato sull'omonimo corso tenuto dai docenti Walter Dambrosio e Davide Zucco nell'a.a. 2021-2022 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.

L'insegnamento - e di conseguenza questo testo - si articola in due macro-temi strettamente correlati tra di loro: lo studio delle **successioni** e delle **serie di funzioni** e la trattazione della **teoria della misura** e dell'**integrazione (secondo Lebesgue)**. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nel corso di ANALISI MATEMATICA UNO - ma non fa male avere anche qualche nozione da CALCOLO DELLE PROBABILITÀ.

Ma il *Manualozzo*™ non è una mera sbobinatura delle lezioni: in aggiunta agli argomenti trattati nella teoria, potrete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate - il tutto, ovviamente, in Technicolor™. Se vi steste chiedendo dove ho trovato il tempo per fare tutto, non lo so neanche io.

Purtroppo, per quanto gli piacerebbe esserlo, l'autore non è un *essere infallibile*: gli saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *errori*, la cui causa è solamente dell'autore che non ha studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui ogni segnalazione - direttamente all'autore se ancora in vita oppure su <https://maxmaci.github.io> - è ben gradita, in modo da migliorare le future edizioni del *Manualozzo*™.

Prima edizione, compilato il 27 marzo 2022.



This work is licensed under a Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International.

---

<sup>1</sup>Nota per l'ufficio legale: il ™ in *Manualozzo*™ non è legalmente vincolante.

## NOTE PER GLI ENVIRONMENT

Se alcuni professori sono noti per abusare le notazioni, i Manualozzi sono noti per abusare di *environment* - gli ambienti colorati che vedrete in queste pagine; di seguito ci sono alcune informazioni su di essi.

*Teoremi, proposizioni, lemmi e corollari* possono essere seguiti da una *dimostrazione*, come nell'esempio di seguito...

**TEOREMA 0.0.1. - CARDINALITÀ DEI RAZIONALI .**

*Ci sono più numeri razionali che interi.*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione si basa sulla congettura che tutti gli interi siano razionali; mostriamo il teorema per 0, gli altri  $\aleph_0$  casi sono analoghi.

Dato 0, basta prendere  $1/2$ : questo è banalmente un razionale - convincetevi che questo sia vero! In questo modo, abbiamo trovato due razionali di cui uno non intero.  $\square$

... oppure essere forniti *senza* dimostrazione e quindi nell'enunciato troverete alla fine il simbolo  $\square$ :

**COROLLARIO 0.0.1. - ULTIMO TEOREMA DI FERMAT .**

*Sulla base del teorema precedente vale immediatamente per confronto l'ultimo teorema di Fermat.*  $\square$

Nelle sezioni "Eserciziamoci!" potrete invece trovare esercizi con corrispettive soluzioni: sono simili talvolta a dei risultati teorici, ma tendono ad essere più applicativi. Alcuni degli *environment* più comuni dopo questi sono le *osservazioni* e gli *esempi*, che sono autoesplicativi. Ci sono anche altri *environment*, meno comuni, fra cui...

**DIGRESSIONE.** Sono argomenti *non prettamente trattati* in questo corso che, tuttavia, hanno un legame con esso: possono *aggiungere informazioni* e punti di vista a qualcosa visto nei corsi precedenti oppure fornire delle *anticipazioni* per dei corsi futuri.

**ATTENZIONE!** Sono delle osservazioni mirate e rivolte spesso a segnalare *errori* frequenti, dovuti principalmente a proprietà che *non* si verificano in quel dato tangente.

**INTUITIVAMENTE...** Sono delle interpretazioni *euristiche* di una definizione difficile o di un risultato ostico che possono aiutare a capire il perché di tale cosa - per quanto non siano sempre valide a livello formale.

## NOTE PER GLI ELENCHI DELLE DEFINIZIONI E DEI TEOREMI

In fondo al Manualozzo si possono trovare degli elenchi con tutte le definizioni, assiomi e risultati teorici visti: ognuno di essi è indicato nel formato **X#.#.#. TITOLO**, dove **X** è una *sigla* per indicare il tipo di definizione/risultato, mentre **#.#.#.** individua il *capitolo*, la *sezione* e il *numero* per quell'oggetto nella sezione. I significati delle sigle sono elencati di seguito:

- |                     |                  |
|---------------------|------------------|
| ■ A: Assioma.       | ■ L: Lemma.      |
| ■ D: Definizione.   | ■ C: Corollario. |
| ■ T: Teorema.       | ■ PT: Proprietà. |
| ■ PR: Proposizione. |                  |

# INDICE

---

INDICE    [iii](#)

## I    ELETTRICITÀ    [1](#)

- 1   DALLA LEGGE DI COULOMB AL FORMALISMO DEI CAMPI VETTORIALI    [3](#)
  - 1.1   I primi studi dell'elettricità    [4](#)
  - 1.2   Legge di Coulomb    [7](#)
  - 1.3   Formalismo dei campi vettoriali    [9](#)
  - 1.4   Campo elettrostatico    [10](#)
  - 1.5   Dipolo elettrico    [11](#)
  - 1.6   Distribuzione continua di carica    [14](#)
- 2   IL FLUSSO DI UN CAMPO    [23](#)
  - 2.1   Flusso di un campo vettoriale    [23](#)
  - 2.2   Legge di Gauss    [24](#)
  - 2.3   Applicazioni della legge di Gauss    [28](#)
  - 2.4   Circuitazione di un campo vettoriale    [28](#)
  - 2.5   Teorema della divergenza    [28](#)
  - 2.6   Teorema del rotore    [29](#)
- 3   SERIE DI FUNZIONI    [31](#)
  - 3.1   Serie in uno spazio normato    [31](#)
  - 3.2   Serie di funzioni    [35](#)
    - 3.2.1   Il criterio di Weierstrass    [36](#)
  - 3.3   Proprietà di regolarità di una serie di funzioni    [37](#)
    - 3.3.1   Limitatezza    [37](#)
    - 3.3.2   Continuità    [38](#)
    - 3.3.3   Integrabilità e scambio tra integrale e serie    [38](#)
    - 3.3.4   Derivabilità    [39](#)
  - 3.4   The Fulfilling World of the Space-Filling Curves    [40](#)

## II   POSTILLE AL NOME DELLA ROSA    [43](#)

- 4   RICHIAMI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE E CALCOLO DIFFERENZIALE    [45](#)
  - 4.1   Varietà differenziabile    [45](#)
  - 4.2   Metrica    [47](#)

4.3	Elemento di linea	48
4.4	Elemento di area	50
4.5	Elemento di volume	51
4.6	Operatore star di Hodge	51
4.7	Operatori differenziali	52
4.7.1	Derivate seconde	55
4.8	Operatori differenziali e forme differenziali	56
4.8.1	Teorema di Stokes per forme differenziali	57
4.9	Coordinate polari e cilindriche	58
4.9.1	Coordinate sferiche	58
4.9.2	Coordinate cilindriche	60

# I

## ELETTRICITÀ





# DALLA LEGGE DI COULOMB AL FORMALISMO DEI CAMPI VETTORIALI

---

*“Per ogni problema c’è una soluzione che è semplice, chiara... e sbagliata.”*

*HENRY LOUIS MENCKEN ad un suo studente che trovò come perimetro dell’ellisse  $\pi ab$ .*

**L**A MECCANICA ci descrive come funziona un sistema soggetto ad una certa *forza*. Ad oggi, siamo riusciti a ricondurre tutte le forze ad alcune **interazioni fondamentali**; in ordine di magnitudine decrescente:

- (Nucleare) Forte.
- Elettromagnetica.
- (Nucleare) Debole
- Gravitazionale

Wow, sono *davvero* poche! Dov’è la frizione, la forza elastica, le reazioni vincolari, le forze chimiche che legano le particelle, gli urti tra palle del biliardo? Che ci crediate o no, *tutte* queste forze sono elettromagnetiche. E le altre interazioni fondamentali che fine fanno?

Le **interazioni (nucleari) forti** tengono uniti i *quark* che costituiscono neutroni e protoni, nonché legano assieme protoni e neutroni nel *nucleo atomico*, ma agiscono su una scala così piccola che risultano essere completamente impercettibili - pur essendo centinaia di volte più forti delle forze elettromagnetiche!

Le **interazioni (nucleari) deboli**, che riguardano certi procedimenti di decadimenti nucleari, hanno un nome autoesplicativo: sono forze a microscopico raggio d’azione e sono più deboli delle forze elettromagnetiche.

Non parliamo poi della **interazione gravitazionale**: essa è terribilmente debole nonostante abbia un *range* d’azione infinito, e la notiamo solamente in presenza di grandi, *enormi* concentrazioni di massa - i pianeti e le stelle. Se al posto delle forze elettriche l’atomo fosse tenuto assieme da forze gravitazionali, un singolo atomo di idrogeno sarebbe più grande dell’intero universo osservabile.

Quindi, non solo le **forze elettromagnetiche** sono quelle dominanti nella vita di tutti i giorni (sono potenti e hanno un *range* d’azione infinito), ma sono anche le sole che *al momento* sono completamente spiegate da una teoria. Certo, c’è una teoria gravitazionale

classica e relativistica, ma non ne esiste una soddisfacente in campo quantistico; per le forze deboli c'è una teoria popolare, ma ostica, e per le forti si sta facendo strada la *cromodinamica*... eppure, nessuna di queste teorie può vantare una verifica sperimentale definitiva. La cosa curiosa è che tutte queste teorie sperimentali si rifanno al modello perfetto, da emulare, delle *leggi (classiche) dell'elettromagnetismo*.

Anche se le prime osservazioni sui fenomeni elettromagnetici sono attribuite al filosofo greco Talete nel VI secolo a.C., fu grazie alle innumerevoli scoperte di Franklin, Coulomb, Ampère, Faraday, Volta e tanti altri che **James Clerk Maxwell** impacchettò tutto questo bagaglio scientifico in quattro, stupende formule matematiche - che probabilmente avrete visto per la prima volta su una discutibile maglietta di un fan sfegatato della Fisica.

Prima di arrivare a formulare tutte le equazioni di Maxwell, tuttavia, ci conviene fare un tour guidato attraverso la storia di questa disciplina, costruendo passo per passo queste leggi facendo le stesse osservazioni dei più famosi scienziati che lavorarono sull'elettromagnetismo - chiaramente, viste con degli strumenti matematici moderni. In questo capitolo, dopo un'excursus storico dello studio dei fenomeni elettrostatici introdurremo la **legge di Coulomb**; la seconda parte sarà più prettamente matematica e tratterà del **formalismo dei campi vettoriali** - introducendo diversi strumenti particolarmente utili ai nostri scopi.

### 1.1 I PRIMI STUDI DELL'ELETTRICITÀ

Già, ma... che significa il termine “**elettromagnetismo**”? La sua etimologia permette di svelare molte informazioni su come stati osservati in natura questi fenomeni:

- “Elettro” e “elettricità” derivano da *electricus*, parola latina coniata nel 1600 da **William Gilbert** nel suo trattato *De Magnete*, derivata a sua volta dal termine *elektron*, “ambra” in greco: infatti, le popolazioni attorno al Mediterraneo sapevano che oggetti in ambra, se strofinati con il pelo di gatto o col vello di lana, erano in grado di attrarre oggetti leggeri come piume e pagliuzze.
- “Magnetismo” deriva da *magnētis lithos*, “pietra di Magnesia” in greco: sull'isola egea di Magnesia erano diffuse rocce di *magnetite*, un minerale ferroso che in certi casi è capace di attrarre piccoli pezzetti di ferro.

**Elettrizzazione per strofinio** Il già citato Gilbert fu il primo a dare un certo rigore allo studio di questi fenomeni. Sperimentando sistematicamente con vari materiali, egli descrisse gli effetti delle **azioni elettriche per strofinio** - anche noto come **effetto triboelettrico** - come segue:

- a) Due oggetti della *stessa sostanza*, dopo essere stati strofinati da un panno, si *respingono* se sono vicini l'un l'altro.
- b) Due oggetti di *sostanze diverse* possono *attrarsi* o *respingersi*, a seconda dei materiali presi; ad esempio, vetro e ambra si attraggono.
- c) Due oggetti che sono attratti separatamente da un terzo oggetto si respingeranno a vicenda.
- d) Un oggetto è attratto da un materiale e un'altro oggetto è respinto da quel materiale, allora i due oggetti si attraggono tra di loro.



Gilbert controllò tante combinazioni di materiali, ma non “pelo di gatto” e “polistirolo da imballaggio”. Immagino non avesse un gatto per farlo.

Da queste osservazioni Gilbert concluse l'esistenza di due tipi diversi di elettrizzazione, attribuite a **cariche elettriche** differenti.

**DEFINIZIONE 1.1.1. - CARICA ELETTRICA POSITIVA E NEGATIVA .**

Convenzionalmente, si dice che:

- Corpi come il vetro acquisiscono carica elettrica **positiva**, indicata con il segno più (+).
- Corpi come l'ambra acquisiscono carica elettrica **negativa**, indicata con il segno meno (-).

Sintetizzando quanto detto:

- Cariche elettriche *dello stesso segno* (+/+, -/-) si **respingono**.
- Cariche elettriche *di segno opposto* (+/-) si **attraggono**.

Il buon vecchio Gilbert si accorse anche che, seppur esistevano materiali (ambra, vetro, ebanite, bachelite...) che venivano elettrizzati per strofinio, altri (metalli, il corpo umano...) non venivano proprio elettrizzati. I primi li chiamò **isolanti**, i secondi **conduttori**.

**La struttura della materia e i fenomeni elettrostatici** Gilbert scrisse per bene tutte queste osservazioni nel suo trattato *De Magnete*, scritto nel 1600: all'epoca non poteva spiegare *perché* succedeva ciò che aveva descritto, ma noi grazie alla conoscenza della *struttura microscopica della materia* possiamo farlo. Senza perderci in tanti dettagli, la materia è fatta di **atomi**, tutti costituiti da tre particelle: **protoni** *p*, **neutroni** *n* ed **elettroni** *e*, rispettivamente di massa

- $m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27}$
- $m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27}$
- $m_e = \frac{1}{1840} m_p = 9,1091 \cdot 10^{-31}$

Riprendendo la convenzione precedente, si vede che il protone ha carica *positiva*, mentre l'elettrone ha carica *negativa* e il neutrone non ha carica elettrica; ad oggi non è osservata alcuna carica elettrica più piccola di quella del protone o dell'elettrone - in altre parole, la carica elettrica è una grandezza **quantizzata**<sup>1</sup>. Indicheremo con  $-e$  la carica dell'elettrone e, in virtù della quantizzazione della carica elettrica, la chiameremo **carica elementare**, mentre con  $+e$  indicheremo la carica del protone.

Il **nucleo**, costituito da protoni e neutroni, sta saldamente assieme grazie all'interazione nucleare forte che sovrasta le azioni repulsive delle cariche positive, che tra l'altro rendono il nucleo *carico positivo*. Attorno al nucleo orbitano, attratte da forze elettriche, gli *elettroni*: queste particelle sono in numero pari al numero di protoni nel nucleo e, a differenza di essi, sono molto più liberi di muoversi nello spazio circostante il nucleo. Si osserva che l'atomo è, nel suo complesso, *eletticamente neutro*, dato che la carica del protone e dell'elettrone è uguale in modulo e la carica complessiva. Questo è estremamente importante per la struttura della materia; se non ci fosse questa *cancellazione*<sup>2</sup> della carica, saremmo soggetti a forze estreme: una patata esploderebbe violentemente se ci fosse anche solo una cancellazione imperfetta dell'ordine di una parte su  $10^{10}$ .

Sostanze diverse hanno legami più o meno deboli tra il nucleo e gli elettroni, in particolari quelli periferici. Cosa succede, a livello microscopico, con l'elettrizzazione per strofinio? Il **contatto** tra i due corpi trasferisce *per mezzo meccanico* elettroni dello strato superficiale da un corpo all'altro, dal corpo in cui sono meno fortemente legati verso quello in cui lo sono di più.

<sup>1</sup>La quantizzazione della carica è evidente a livello atomico e subatomico, ma diventa inapprezzabile se la non riescono a misurare variazioni dell'ordine della carica elementare - sperimentalmente si è visto intorno per carica sopra i  $200e$ . Negli esperimenti normali di elettrostatica la carica è di fatto una quantità continua.

<sup>2</sup>Per cancellazione non intendiamo che le cariche si annichiliscono fisicamente, ma che i loro effetti si compensano, non producendo alcuna interazione "esterna".

- Negli **isolanti**, le cariche trasferite per strofinio rimangono *localizzate*. Gli isolanti **non** trasportano facilmente la carica.
- Nei **conduttori**, le cariche elettriche negative sono *libere di muoversi* e **non** rimangono localizzate. I conduttori trasportano facilmente la carica.

In altre parole, le forze elettriche sono una manifestazione fondamentale delle particelle atomiche (cariche) che costituiscono la materia, ma si manifestano a livello *macroscopico* quando viene disturbata la simmetria naturale tra cariche positive e negative presenti negli atomi. Possiamo, in particolare, enunciare il seguente principio.

**PRINCIPIO 1.1.1. - PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DELLA CARICA .**

Poiché la *carica totale* di un corpo è data dalla *somma algebrica* di tutte le cariche, in un sistema *eletticamente isolato* la carica totale rimane costante nel tempo, ossia si *conserva*.

**Induzione elettrostatica** L'effetto triboelettrico che abbiamo visto è un caso particolare di **elettizzazione per contatto**; tuttavia, si possono caricare corpi anche senza alcun contatto diretto, come accade con l'**induzione elettrostatica**

Avviciniamo ad un *conduttore*  $C$ , preso elettricamente scarico e sostenuto da un supporto isolante, un corpo carico  $D$  - ad esempio, carico positivamente. Il corpo carico esercita delle *forze elettriche* sulle cariche microscopiche presenti sul conduttore; gli *elettroni* nel conduttore sono liberi di muoversi sulla superficie e si dispongono nella zona di  $C$  *più vicina* al corpo carico, mentre la parte del conduttore più distante da  $D$  risulterà carica positivamente<sup>3</sup>. La carica complessiva del conduttore è, per conservazione della carica, sempre nulla, ma le cariche sono distribuite in modo non uniforme: convenzionalmente, pur essendo l'eccesso di cariche positive in una parte del conduttore dovuto al moto delle cariche negative, diremo che le cariche positive si sono spostate nella zona di  $C$  a maggior distanza da  $D$ .

Se collegassimo il conduttore  $C$  ad un conduttore  $T$  molto più esteso di  $C$ , ad esempio la Terra, di fatto si creerebbe un unico conduttore  $C + T$  praticamente infinito per i nostri scopi. In questo caso, le cariche positive si allontanerebbero molto da  $D$ ; se interrompessimo il collegamento del conduttore a  $T$  il conduttore  $C$  resta carico negativamente - basta allontanare  $D$  per ottenere  $C$  negativo con distribuzione uniforme di carica.

**Misura delle cariche elettriche: l'elettroscopio a foglie** Abbiamo detto che la carica elettrica è una grandezza quantizzata... ma non abbiamo ancora parlato di come definirla esattamente, né di come *misurarla*! Al momento, ne diamo una definizione operativa, tramite l'**elettroscopio a foglie**

Dato un contenitore isolante e trasparente si consideri un asta metallica che lo penetra in un foro in modo da rimanere bloccata. All'estremità inferiore, internamente al recipiente, sono appese due sottilissime foglioline metalliche - generalmente d'oro - liberi di ruotare attorno all'asse orizzontale dell'asta. Se l'asta metallica è scarica, le foglioline sono verticali per effetto della gravità.

Toccando l'asta con un corpo carico, essa si carica e parte della corrente posseduta dall'asta si dispone sulle foglioline. Poiché le foglioline sono cariche dello stesso segno, si respingono e divergono dalla verticale di un angolo  $\alpha$  che può opportunamente misurato con una scala graduata: abbiamo creato uno strumento in grado di rilevare la presenza

<sup>3</sup>Chiaramente, se il corpo  $D$  fosse carico negativamente accaderebbe l'opposto: gli elettroni in  $C$  sarebbero respinti per l'interazione elettrica e si disporrebbero lontani dal corpo carico, rendendo positiva la zona vicina a  $D$ .

di cariche elettriche. Possiamo allora dare la seguente definizione *operativa* di carica elettrica.

**DEFINIZIONE 1.1.2. - DEFINIZIONE OPERATIVA DI CARICA ELETTRICA .**

Se due corpi uguali, toccando l'asta di un elettroscopio a foglie inizialmente scarico, fanno ruotare le foglioline di uno stesso angolo  $\alpha$ , allora hanno la stessa carica  $q$ .

Potremmo fornire già in questa maniera un'opportuna unità di misura, ma non è particolarmente utile e non è compatibile con la filosofia di molti sistemi di unità di misura. Tuttavia, per dare una possibile definizione *non operativa*, dobbiamo quanto meno parlare dell'interazione elettrostatica.

## 1.2 LEGGE DI COULOMB

Corpi carichi si attraggono o si respingono, a qualunque distanza, a seconda della loro carica: più sono vicini e più sono carichi, maggiore è questa attrazione/repulsione. Questa descrizione qualitativa delle forze di natura elettrostatica era già nota da Gilbert, ma per averne una *quantitativa* dobbiamo aspettare quasi duecento anni. Nel 1785, il fisico francese **Charles Augustin de Coulomb** pubblicò la sua memoria *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de metal*, in cui stabilì, mediante l'uso di una bilancia di torsione analoga a quella di *Cavendish* per la misura delle forze gravitazionali, una legge matematica per la descrizione dell'interazione elettrostatica.

**DEFINIZIONE 1.2.1. - LEGGE DI COULOMB .**

Date due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$ , poste a distanza  $r$  nel vuoto, interagiscono con una forza  $F$  diretta secondo la loro congiungente data da

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.1)$$

**OSSERVAZIONI.**

- $\vec{F}$  è la forza che  $q_1$  esercita su  $q_2$ ; la forza che  $q_2$  esercita su  $q_1$  è  $-\vec{F}$ .
- $k$  è una costante di proporzionalità detta **costante di Coulomb** che dipende dalle unità di misura.
- $\hat{u}_r$  è il versore del vettore distanza  $\vec{r}$  dalla carica  $q_1$  alla carica  $q_2$ .
- $q_1 q_2$  è il prodotto delle due cariche: se hanno lo stesso segno, la forza è repulsiva perché  $\vec{F}$  ha lo stesso verso di  $\hat{u}_r$ , altrimenti se hanno segno opposto è attrattiva perché hanno versi discordi.

Non abbiamo ancora dato per bene un'unità di misura della carica elettrica. Potremmo basarci proprio sulla legge di Coulomb e definirla in modo che  $k = 1$  e che la carica unitaria è tale che, se posta a distanza unitaria da un'altra carica unitaria, essa subisce una forza unitaria (come accade nel *sistema centimetro-grammo-secondo o c.g.s.*).

Nonostante alcuni evidenti vantaggi teorici nell'utilizzare il sistema c.g.s., noi utilizzeremo per ragioni anche soprattutto storiche, l'unità di misura della carica elettrica prevista dal **SI**, il **coulomb** (C). Non è un'unità fondamentale, bensì è definito come  $1\text{ C} = 1\text{ A} \cdot 1\text{ s}$ , ossia come la carica che attraversa in un secondo un conduttore percorso dalla corrente di un ampere. Non sapendo ancora che cosa sia la corrente elettrica, né tanto meno un'ampere, non approfondiremo qui la definizione.

Sta di fatto che è una misura estremamente “sbagliata”, quanto meno per i problemi che trattiamo. Ad esempio, la tipica carica da strofinamento è dell'ordine di  $10^{-7}$  - dobbiamo impegnarci molto per fare un Coulomb! Generalmente utilizziamo i microcoulomb ( ) o, al più, i millicoulomb ( ).

Nel **SI**, la costante  $k$  della legge di Coulomb viene posta a

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \quad (1.2)$$

dove  $\epsilon_0$  è detta **costante dielettrica del vuoto** e assume il valore

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \quad (1.3)$$

La legge di Coulomb 1.1 assume la forma

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.4)$$

**Legge di Coulomb e legge di gravitazione universale** Come si vede immediatamente, la legge di Coulomb è analoga - a livello di formula - alla **legge di gravitazione universale**:

$$\vec{F} = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.5)$$

dove  $G_N$  è la **costante di gravitazione universale**.

$$G_N = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \quad (1.6)$$

Tuttavia, a livello di forze sono profondamente differenti, come il seguente esempio mette in evidenza.

**ESEMPIO.** La forza di Coulomb tra due cariche uguali per strofinio, poste a distanza di  $r = 1 \text{ m} = 10^{-2}$  è, in modulo

$$F = k \frac{q^2}{r^2} \simeq 9 \cdot 10^9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-14} \simeq 0,9$$

La forza gravitazionale in condizioni simili, prese due masse  $m = 1 \text{ kg} = 10^{-1}$  alla stessa distanza  $r$  di prima, è

$$F = G_N \frac{m^2}{r^2} \simeq 7 \cdot 10^{-17} \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} \simeq 7 \cdot 10^{-9}$$

La forza di attrazione gravitazionale è molto più debole della forza attrattiva elettrostatica!

**Principio di sovrapposizione per forze** Le forze elettriche agenti su una carica  $q_0$  dovute alle cariche circostanti si comportano come vettori; è immediato supporre che vige un **principio di sovrapposizione**.

**PRINCIPIO 1.2.1. - PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER FORZE ELETTROSTATICHE .**

La forza elettrostatica agente su una carica  $q_0$  da un sistema di cariche è data dalla somma vettoriale delle singole interazioni tra  $q_0$  e ciascuna carica del sistema.

## 1.3 FORMALISMO DEI CAMPI VETTORIALI

Il problema fondamentale che la teoria dell'elettromagnetismo vuole risolvere è il seguente: se ho delle cariche elettriche *qui*, magari muovendoli in giro, cosa succede a delle cariche *lì*?

La trattazione di un problema simile con le sole forze, come si farebbe in un qualunque corso di Fisica I, non è necessariamente la più vantaggiosa: in particolare, quando le cariche cominciano a muoversi, le forze tra di loro cambiano perché cambiano le posizioni nel tempo... e dovremo anche tenere conto degli effetti di magneti sul moto delle cariche!

È necessario un cambio di punto di vista, dove le forze ci sono ancora, ma non consideriamo *soltanto* loro. La soluzione classica ottocentesca assume la forma di una **teoria di campo**. In estrema sintesi, lo spazio attorno ad una carica elettrica è permeata da campi elettrici e magnetici: una seconda carica, in presenza di questi campi, subisce una forza; i campi, in altre parole, trasmettono l'influenza di una carica sull'altra e sono i portatori dell'interazione elettromagnetica. I fenomeni elettromagnetici si modificano in base all'interazione tra i campi, le particelle in movimento e altro.

**DEFINIZIONE 1.3.1. - CAMPO VETTORIALE .**

Un **campo vettoriale**  $\vec{E}$  è una funzione

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z)) \quad (1.7)$$

dove  $(x, y, z)$  sono eventualmente funzioni del tempo.

**NOTAZIONE.** In notazione versoriale, un campo vettoriale è

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z \quad (1.8)$$

**OSSERVAZIONE.** Con  $\vec{E}$  indichiamo il **campo elettrico**, mentre indichiamo con  $\vec{B}$  il **campo magnetico**.

**Linee di campo** Potremmo rappresentare il campo disegnando ad ogni punto di  $\mathbb{R}^3$  il vettore ad esso associato da  $\vec{E}$ .

In alternativa, possiamo disegnare delle curve dette **linee di campo**.

**DEFINIZIONE 1.3.2. - LINEA DI CAMPO .**

Una linea di campo di  $\vec{E}$  è una curva

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto \vec{r}(t) \quad (1.9)$$

tale per cui in ogni suo punto il vettore tangente alla curva è il vettore dato da  $\vec{E}$ :

$$\dot{\gamma}(t) = \vec{E}(\gamma(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$



In generale, le linee di campo sono soluzioni  $\vec{r} = (x, y(x), z(x))$  del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x} \end{cases} \quad (1.11)$$

#### 1.4 CAMPO ELETTROSTATICO

Un campo vettoriale è quindi una mappa che a punti di  $\mathbb{R}^3$  associa vettori tridimensionali. In questo formalismo, la forza di Coulomb si può vedere come il vettore in un certo punto di un campo vettoriale detto **campo elettrostatico**.

##### DEFINIZIONE 1.4.1. - CAMPO ELETTROSTATICO .

Il **campo elettrostatico** generato da un sistema di cariche  $q_i$  ferme associa ad ogni punto dello spazio una forza pari alla forza elettrica che agisce su una **carica di prova**  $q_0$  positiva posta in quel punto, divisa per la carica stessa:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.12)$$

dove  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$  e  $\hat{u}_i = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ .

Nel SI l'unità di misura del campo elettrico, essendo il rapporto tra una forza e una carica, è il newton su coulomb ( / ). Più avanti vedremo un'altra unità di misura usata maggiormente nelle applicazioni pratiche.

Si noti che dalla definizione segue ovviamente che la forza che  $q_0$  subisce si può esprimere in funzione del campo elettrostatico da

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (1.13)$$

Nella 1.12 abbiamo fatto uso di un **principio di sovrapposizione** per campi vettoriali.

##### PRINCIPIO 1.4.1. - PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER CAMPI ELETTROSTATICI .

Il campo elettrico generato da un sistema di cariche è data dalla somma vettoriale dei campi elettrici generati da ciascuna carica del sistema.

Preso il caso di una singola carica  $Q$  posta nell'origine, il campo elettrico generato da  $Q$  è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

##### ESEMPIO - LINEE DI CAMPO DELLA FORZA DI COULOMB .

Data una carica  $Q$  posta nell'origine del nostro sistema di riferimento, il campo elettrico di Coulomb nel piano è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x, y)$$

Posto

$$dx = \dot{x}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$



$$dy = \dot{y}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Da cui otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{x}{y} \\ \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} &= \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} \Rightarrow \log \frac{x}{x_0} = \log \frac{y}{y_0} \Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} x \end{aligned}$$

Dalle condizioni al contorno  $(0, 0)$  e  $(x_0, y_0)$  si ricavano le linee di forza del campo coulombiano: è un fascio di rette passanti per l'origine del sistema di riferimento.

**OSSERVAZIONE.** Notiamo che la forza di Coulomb esercitata da una singola carica  $Q$  posta nell'origine presenta un'evidente simmetria radiale; la stessa definizione 1.1 è già di fatto fornita in coordinate sferiche! Allora, il campo elettrostatico in coordinate sferiche è dato da

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r$$

ossia coincide con la componente radiale, dato che  $E_\varphi = E_\theta = 0$ .

## 1.5 DIPOLO ELETTRICO

Consideriamo due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$ , rispettivamente fisse in  $\vec{r}_1 = (0, 0, z_0)$  e  $\vec{r}_2 = (0, 0, -z_0)$ . I campi elettrici generati dalle singole cariche sono, in un generico punto  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \\ \vec{E}_2(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \end{aligned}$$

Il campo elettrico complessivo è dato da

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right) \quad (1.14)$$

Dato che

$$\begin{cases} \vec{r} - \vec{r}_1 = (x, y, z - z_0) \\ \vec{r} - \vec{r}_2 = (x, y, z + z_0) \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \\ E_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \\ E_z(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{z - z_0}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{z_0}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Se consideriamo  $q_1$  e  $q_2$  di carica uguale a  $q$  e di segno opposto (per esempio,  $q_1 = q$  e  $q_2 = -q$ ) abbiamo a che fare con il sistema detto **dipolo elettrico**.

**Momento di dipolo elettrico** Al dipolo possiamo associare il **momento di dipolo elettrico**.

**DEFINIZIONE 1.5.1. - MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO .**

Il **momento di dipolo elettrico** è una misura della separazione di cariche positive e negative in un sistema. In altre parole, misura la *polarità* di un sistema elettrostatico.

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (1.15)$$

dove  $d$  è il vettore spostamento dalla carica negativa alla carica positiva-

Nel nostro caso, il modulo del momento di dipolo è  $p = 2qz_0$ .

**DIGRESSIONE.** Lo studio del dipolo elettrico è di particolare rilievo: ad esso sono riconducibili le interazioni elettrostatiche più semplici a cui sono soggetti i sistemi *microscopici elettricamente neutri*, come atomi e molecole non ionizzate.

Un esempio di ciò, anche se poco più complesso, è quello della molecola dell'acqua: è detta *polare* in quanto gli elettroni condivisi sono distribuiti in modo non uniforme; c'è una concentrazione di carica negativa nel mezzo, presso l'atomo d'ossigeno, mentre agli estremi è positiva.

Vedremo come il momento di dipolo ha particolare rilievo soprattutto quando la distanza tra le cariche è così piccola che non è facilmente misurabile, oppure quando parleremo di dielettrici.

**Studio del campo di dipolo** Vogliamo descrivere il campo elettrostatico generato tramite vettori e tramite le linee di campo.

**OSSERVAZIONE.** Il sistema ha evidente natura *cilindrica*: ci basterebbe studiare il comportamento su un piano passante per l'asse  $z$  - ad esempio  $y = 0$ ; ciò che succede nello spazio si può capire con un'opportuna rotazione di tale piano.

- Consideriamo il piano  $z = 0$ , ortogonale al dipolo e "a metà strada" tra le due cariche. Chiaramente,  $E_x = E_y = 0$ , dato che i denominatori sono uguali e i numeratori uguali, ma di segno opposto. Invece, si ha

$$E_z = \frac{-2qz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

- Consideriamo ora il piano  $z = z_0$  e  $y = 0$ . Si ha

$$E_x = \frac{xq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x|^3} - \frac{1}{(x^2 + 4z_0^2)^{3/2}} \right)$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = \frac{-2qz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + 4z_0^2)^{3/2}}$$

Analizzando ulteriori casi si denotano, per il dipolo elettrico, le linee di campo come in figura.

**OSSERVAZIONE.** Dove il campo elettrico è *intenso*, la rappresentazione delle linee di campo è più densa, mentre si fa più rada dove il campo è *meno intenso*.

Se considerassimo  $q_1 = q_2 = q$ , le linee di campo sarebbero come quelle nella seguente figura.

**OSSERVAZIONE.** Dalle formule di dipolo, si vede che  $\vec{E}$  è l'opposto del gradiente di un opportuno *potenziale*<sup>a</sup>  $V$ :

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right) \quad (1.16)$$

Vedremo che questo *non* è un caso: il potenziale elettrostatico è *sempre* un campo *conservativo*.

<sup>a</sup>Nelle "XXX", a pagina 53 è possibile trovare la definizione di gradiente e altri operatori differenziali.

**Campo di dipolo lontano** Cosa succede alle forze elettrostatiche e al campo elettrostatico se lo si osserva a *debita distanza* dal dipolo? Se siamo molto lontani dal sistema, diciamo a distanza  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = z_0$ , non ci sono molte distinzioni pratiche fra due cariche distinte, opposte e distanti e considerare due cariche distinte, opposte ma *coincidenti*: di fatto, un dipolo da lontano appare come un *dipolo puntiforme* posto nell'origine. Seppur il problema del dipolo sia normalmente a simmetria cilindrica, è evidente che conviene trattare l'approssimazione a grandi distanze con le coordinate sferiche. Si ricordi dalla definizione delle coordinate sferiche che, denotato  $\theta$  come l'angolo polare tra l'asse  $z$  (positivo) e  $\vec{r}$ , si ha  $z = r \cos \theta$ . Allora

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \left( x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 \right)^{1/2} = \left( \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=r^2} + z_0^2 - 2z_0z \right)^{1/2} = \left( r^2 + z_0^2 - 2z_0r \cos \theta \right)^{1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_2| = \left( x^2 + y^2 + (z + z_0)^2 \right)^{1/2} = \left( \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=r^2} + z_0^2 + 2z_0z \right)^{1/2} = \left( r^2 + z_0^2 + 2z_0r \cos \theta \right)^{1/2}$$

Il potenziale è

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( (r^2 + z_0^2 - 2z_0r \cos \theta)^{-1/2} - (r^2 + z_0^2 + 2z_0r \cos \theta)^{-1/2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} - \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} + \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \right) \equiv \end{aligned}$$

Poiché  $r \gg z_0$ , si può provare sviluppare in serie di Taylor la radice.

**RICORDIAMO...** Lo sviluppo in serie di Taylor della potenza alla  $\alpha$  del binomio  $1 + x$  è

$$(1 + a)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} a^k \quad (1.17)$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; l'uguaglianza vale solo  $\forall a \in (-1, 1)$ .

Possiamo limitarci allo sviluppo al primo ordine: posto  $a = \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r} < 1$ , si ha

$$\left(1 + \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r}\right)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r}\right) = 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} \mp \frac{z_0 \cos \theta}{r} + o(a^2)$$

Il potenziale diventa

$$\begin{aligned} \square & \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left(1 + \frac{z_0^2}{r^2} - \frac{2z_0 \cos \theta}{r}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{z_0^2}{r^2} + \frac{2z_0 \cos \theta}{r}\right)^{-1/2} \right) \simeq \\ & \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} + \frac{z_0 \cos \theta}{r} - \left(1 - \frac{z_0^2}{2r^2} - \frac{z_0 \cos \theta}{r}\right) \right) \\ & = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \\ V(r, \theta, \varphi) & = \frac{q2z_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento  $\vec{p}$  e non  $q$  e  $z_0$  separatamente: misurando il potenziale potremo ricavare solo informazioni su  $\vec{p}$ , ma non sulla costituzione del sistema!

**ESEMPIO.** Un dipolo costituito da due cariche  $2q$  e  $-2q$  e distanza dall'origine  $z_0/2$  hanno momento di dipolo uguale a quello appena studiato e pertanto anche stesso potenziale e campo elettrico.

Calcoliamo ora il campo elettrostatico usando il gradiente espresso in coordinate sferiche:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{u}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{u}_\varphi = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{u}_\theta \quad (1.19)$$

**OSSERVAZIONE.** Sommando il contributo di più cariche uniformi il potenziale (e quindi il campo elettrico) può dipendere da relazioni differenti da  $1/r$ .

**Metodi alternativi al campo di dipolo lontano** Ci sono altri modi equivalenti per ottenere il potenziale di cui sopra. Uno di questi passa tramite il teorema del coseno.

**RICORDIAMO...** Dati un triangolo di angoli  $\alpha, \beta, \gamma$ , rispettivamente opposti ai lati  $a, b, c$ , vale per il **teorema dei coseni**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (1.20)$$

La distanza di  $\vec{r}$  si può

## 1.6 DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

Nella pratica difficilmente avremo a che fare con una, due o qualche carica, bensì di un numero *enorme* di cariche puntiformi. Chiaramente, trattare tutte le cariche una per una e vedere le interazioni con le altre non è benché minimamente consigliato: per fare un esempio, un  $mm^3$  di rame contiene circa  $2,5 \cdot 10^{21}$  elettroni.

Per ovviare a questa difficoltà si assume che le cariche siano così tante che si abbia un *continuum* di cariche; introduciamo dunque il concetto di **distribuzione continua di carica**, caratterizzata da una **densità di carica**.

**DEFINIZIONE 1.6.1. - DENSITÀ DI CARICA VOLUMICA .**

Considerato un oggetto di volume  $V$  carico tale che nell'elemento di volume  $dV(x, y, z) = dxdydz$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica volumica** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \rho(x, y, z)dV \quad (1.21)$$

L'unità di misura è il Coulomb su metro cubo:

$$[\rho] = - \quad (1.22)$$

Essa funzione in modo analogo alla densità di massa volumica; la carica totale sull'oggetto si otterrà integrando sul volume la relazione precedente:

$$q_{tot} = \int_V \rho(x, y, z)dV \quad (1.23)$$

Il campo elettrico generato dall'oggetto, interno o esterno al corpo che sia, si ottiene come semplice generalizzazione della 1.12:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (1.24)$$

dove  $\vec{r} = (x, y, z)$  è il punto nello spazio in cui misurare il campo elettrico,  $\vec{r}' = (x', y', z')$  è un punto del volume  $V$  e  $dV = dx'dy'dz'$ .

Capita spesso che cariche sorgenti, anziché essere poste in una regione spaziale tridimensionale, occupino invece una superficie. In questi casi conviene introdurre la **densità superficiale**.

**DEFINIZIONE 1.6.2. - DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE .**

Considerato una superficie  $\sigma$  carica tale che sull'elemento d'area  $d\Sigma(x, y, z)$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica superficiale** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \sigma(x, y, z)d\Sigma \quad (1.25)$$

L'unità di misura è il Coulomb su metro quadro:

$$[\sigma] = - \quad (1.26)$$

La carica totale e il campo elettrico sono, rispettivamente,

$$q_{tot} = \int_{\Sigma} \sigma(x, y, z)d\Sigma \quad (1.27)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Sigma \quad (1.28)$$

Analogamente, si può fare anche per il caso di una linea, introducendo la **densità lineare**.

**DEFINIZIONE 1.6.3. - DENSITÀ DI CARICA LINEARE .**

Considerato una lineare  $\sigma$  carica tale che sull'elemento di linea  $d\ell$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica lineare** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \lambda(x, y, z)d\ell \quad (1.29)$$

L'unità di misura è il Coulomb su metro:

$$[\lambda] = - \quad (1.30)$$

La carica totale e il campo elettrico sono, rispettivamente,

$$q_{tot} = \int_{\ell} \lambda(x, y, z)d\ell \quad (1.31)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \lambda(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell \quad (1.32)$$

**OSSERVAZIONE.** Può capire di avere una densità di carica *non* nulla, ma carica totale nulla.

**Filo carico rettilineo (infinito)** Si consideri un filo rettilineo di lunghezza  $L$  con densità lineare costante  $\lambda$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che il filo carico sia lungo l'asse  $x$  Si ha

$$q = \int_{\ell} \lambda(x', y', z')d\ell = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} dx' = \lambda L \implies \lambda = \frac{q}{L}$$

Più che concentrarci sulla carica del filo, tuttavia, ci interessa studiare il campo elettrostatico. Per il sistema di riferimento scelto,  $\vec{r}' = (x', 0, 0)$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' \quad (1.33)$$

In componenti cartesiane:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{x-x'}{((x'-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx' \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y}{((x'-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx' \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{z}{((x'-x)^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx' \end{cases}$$

Si verifica nuovamente che  $\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}V$ , dove

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+y^2+z^2}} dx' \quad (1.34)$$

Risolvendo l'integrale<sup>4</sup> troviamo

$$V = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} + x - \frac{L}{2}}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} - x + \frac{L}{2}} \frac{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} + x + \frac{L}{2}}{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} - x - \frac{L}{2}} \right) \quad (1.35)$$

<sup>4</sup>Calcolarlo in questo modo non lo consigliamo neanche ai peggiori nemici del Manualozzo™. Per chi volesse comunque provarlo a fare, nelle "XXX", a pagina ?? è possibile trovare lo sviluppo del calcolo.

e il campo in componenti cartesiane diventa:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{y^2 + z^2} \left( \frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{y^2 + z^2} \left( \frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{cases}$$

Il sistema si studia però in modo più semplice sfruttando la simmetria cilindrica e utilizzando, per l'appunto, le coordinate cilindriche, posto l'asse  $x$  come asse relativo all'altezza:

$$\begin{cases} x = x \\ y = R \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

Il potenziale diventa

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + R^2}} dx' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2} + \frac{L}{2} - x}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2} - \frac{L}{2} - x} \right) \quad (1.36)$$

e

$$\begin{cases} E_R(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2 - x + \frac{L}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2 - x - \frac{L}{2}}} \right) \\ E_\theta(x, y, z) = 0 \\ E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + R^2}} \right) \end{cases}$$

Supponiamo ora che il filo sia infinitamente lungo, ossia  $L \rightarrow +\infty$ ; una primissima osservazione ci dice che, per avere  $\lambda$  costante anche  $q$  deve tendere a  $+\infty$ . Poiché

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(x \pm \frac{L}{2}\right)^2 + R^2} = \lim_{L \rightarrow +\infty} L = +\infty$$

Segue che

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow +\infty} E_x = 0 \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_y = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon (y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{L} - \frac{x - \frac{L}{2}}{L} \right) = \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon (y^2 + z^2)} \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_z = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon (y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{L} - \frac{x - \frac{L}{2}}{L} \right) = \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon (y^2 + z^2)} \end{cases}$$

In coordinate cilindriche, poiché

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \sqrt{1 + \frac{R^2}{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \left( 1 + \frac{R^2}{2 \left( x - \frac{L}{2} \right)^2} \right) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right|$$

si ha, facendo calcoli lunghi e noiosi, a:

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow +\infty} E_R = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{L} \left( \frac{1}{\left| x - \frac{L}{2} \right| - x + \frac{L}{2}} - \frac{1}{\left| x - \frac{L}{2} - x \right| - \frac{L}{2}} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon R} \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_\theta = 0 \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_x = 0 \end{cases}$$

Il campo in coordinate cilindriche risulta

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{u}_R \quad (1.37)$$

**OSSERVAZIONE.** Avremmo potuto vedere che il campo dipendeva soltanto dalla componente radiale direttamente facendo un'analisi dimensionale. Infatti, poiché

$$\lambda = \frac{q}{L} \implies [\lambda] = \frac{[C]}{[L]} = \frac{C}{m},$$

il campo elettrico ha dimensioni

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \kappa \frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \implies [E] = \frac{[\lambda]}{[\epsilon_0]} \frac{1}{[L]}$$

dove  $\kappa$  è una costante numerica e non influisce sulla dimensione. L'unica componente che si deve considerare "libera", perché non è vincolata dalle condizioni del sistema, è una lunghezza: nel nostro caso, andando per intuizione fisica sulla base di simmetrie presenti, la distanza assiale  $R$ .

**Superficie carica infinita** Si consideri una superficie piana  $\Sigma$  con densità superficiale costante  $\sigma$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che la superficie coincida con il piano  $x = 0$ . Si ha

$$q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma = \sigma \int_{\Sigma} d\Sigma = \sigma A \implies \sigma = \frac{q}{A}$$

dove  $A$  è l'area della superficie. Chiaramente, se la superficie è tale che  $A \rightarrow +\infty$ , allora anche  $q \rightarrow +\infty$ .

Più che concentrarci sulla carica del filo, tuttavia, ci interessa studiare il campo elettrostatico. Per il sistema di riferimento scelto,  $\vec{r}' = (0, y', z')$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Sigma \quad (1.38)$$

Poiché stiamo considerando il piano  $xy$ , la parametrizzazione della superficie è

$$\vec{s} = y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \quad (1.39)$$



Pertanto, l'elemento di superficie è

$$d\Sigma = \left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} \right\| dy dz = \|\hat{\mathbf{u}}_x\| dy dz = dy dz$$

Si ha, in componenti cartesiane:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma x}{(x^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)^{3/2}} dy' dz' \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(y-y')}{(x^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)^{3/2}} dy' dz' \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(z-z')}{(x^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)^{3/2}} dy' dz' \end{cases}$$

**OSSERVAZIONE.** Poiché il campo è uniforme, spostandosi parallelamente al piano non dovrebbe essere discernibile alcuna differenza, ossia non ci devono essere componenti particolari in alcuna; in altre parole, essendo il sistema invariante per traslazioni, il campo elettrostatico dovrà essere *ortogonale* alla superficie.

Si vede esattamente quanto ipotizzato. Infatti, operando un cambio di variabile

$$\begin{cases} u = y' - y \\ v = z' - z \end{cases}$$

si ricava che

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du dv}{(x^2 + u^2 + v^2)^{3/2}} du dv \\ E_y(x, y, z) = 0 \\ E_z(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Operando un ulteriore cambio di variabile, questa volta alle coordinate polari

$$\begin{cases} u = R \cos \theta \\ v = R \sin \theta \end{cases}$$

ricordando che l'elemento d'area diventa  $dy dz = R dR d\theta$ , si ha

$$E_x(x, y, z) = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{R dR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

In sintesi, il campo elettrico generato da una superficie piana infinita è

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}}_x \quad (1.40)$$

**OSSERVAZIONE.** In realtà avremmo dovuto aspettarci che il campo non dipendesse dalla distanza  $x$ . Dalla formula del campo elettrico di Coulomb sappiamo che

$$[\epsilon E] = -$$

Siccome  $\sigma$  è una densità superficiale, la sua unità di misura è già

$$[\sigma] = -$$

si deve avere

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} A$$

con  $A$  adimensionale... e in effetti nel nostro caso  $A = \frac{1}{2}$ .

**Sfera uniformemente carica** Si consideri una sfera di raggio  $R$  con densità volumica costante  $\rho$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'origine coincida con il centro della sfera. Si ha

$$\begin{aligned} q &= \int_V \rho(x', y', z') dV = \rho \int_V dV = \rho V_s = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\ q &= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \end{aligned} \quad (1.41)$$

In questo caso, studiare il campo elettrico esterno ed interno alla sfera per un punto generico diventa particolarmente laborioso; tuttavia, vedremo una legge fisica che ci permetterà di semplificare la trattazione di questo problema. Qui ci limiteremo a considerare il campo elettrostatico agente su un punto degli assi, ad esempio  $\vec{r} = (x, 0, 0)$ .

Notiamo che l'evidente simmetria radiale del problema ci porta a concludere che le componenti  $y$  e  $z$  del campo siano nulle, ossia

$$\begin{cases} E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{x - x'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y')^2 + (z')^2}} dx' dy' dz' \\ E_y(x, 0, 0) = 0 \\ E_z(x, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

Trattando di una sfera, ci conviene passare nelle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

ricordando che l'elemento di volume diventa  $dV = dx' dy' dz' = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$ . L'argomento nella radice al denominatore diventa

$$(x' - x)^2 + (y')^2 + (z')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - 2xx' + x^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta.$$

e il numeratore è invece

$$x - x' = x - r \cos \theta$$

Da ciò

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{x - r \cos \theta}{(r^2 - 2rx \cos \theta + x^2)^{3/2}} r^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{x - r \cos \theta}{(r^2 - 2rx \cos \theta + x^2)^{3/2}} r^2 \sin \theta d\theta \quad \square \end{aligned}$$

Cambiamo la variabile  $\theta$  con  $y = \cos \theta$  (a cui è associato  $dy = -\sin \theta d\theta$ ), ottenendo

$$\square \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{x - 2y}{(x^2 - 2rxy + r^2)^{3/2}} r^2$$

Non è immediato, ma si può trovare che anche in questo caso specifico  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , dove

$$V(x, 0, 0) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rxy + x^2}} \quad \square$$

Svolgendo l'integrale rispetto alla variabile  $t$ , si vede che

$$\begin{aligned} \square & \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rxy + x^2}} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \left[ -\frac{r}{x} \sqrt{r^2 + x^2 - 2rxy} \right]_{-1}^1 = \\ & = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \left( -\frac{r}{x} |r - x| + \frac{r}{x} |r + x| \right) \end{aligned}$$

A questo punto distinguiamo il caso di un punto esterno alla sfera ( $x > R$ ) o di uno interno ad essa ( $x < R$ ).

**Il caso esterno:**  $x > R$

$$E_x(x, 0, 0) = -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \frac{2r^2}{x} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{2}{3} R^3 \partial_x \frac{1}{x} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{x^2}$$

Ricordando che  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , si ha

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \quad (1.42)$$

**Il caso interno:**  $x < R$

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr \frac{r}{x} (r + x - |r - x|) = \\ &= -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[ \int_0^x dr \frac{r}{x} (r + x - x + r) + \int_x^R dr \frac{r}{x} (r + x - r + x) \right] = \\ &= -\partial_x \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left( \frac{2}{3} x^2 + R^2 - x \right) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \partial_x \left( R^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Ricordando che  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , si ha

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (1.43)$$

Il grafico del campo elettrostatico, al variare di  $x > 0$ , è il seguente:



# IL FLUSSO DI UN CAMPO

*“La situazione si complica. Ora, ce ne sono due di loro!”*

*NUTE GUNRAY, scoprendo la convergenza puntuale dopo quella uniforme.*

**P<sup>ER</sup>**

## 2.1 FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

### DEFINIZIONE 2.1.1. - FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE .

Il **flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata**  $\Sigma$ , parametrizzata da una funzione  $\vec{r}(u, v)$ , è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv \quad (2.1)$$

**INTUITIVAMENTE...** Se descriviamo la corrente di un fluido come l’acqua con un campo vettoriale  $\vec{F}$ , il flusso di  $\vec{F}$  rappresenta *quanto fluido* passa *attraverso* una certa superficie per unità di tempo (anche se quest’ultima viene spesso sottointesa).

Con questa interpretazione euristica si può capire anche perché l’integrale presenta nella definizione un *prodotto scalare*: se l’acqua scorre perpendicolarmente alla superficie, molta acqua passerà e il flusso sarà dunque grande; al contrario, se il fluido scorre parallelamente alla superficie l’acqua non l’attraverserà mai e quindi il flusso è nullo. In altre parole, ciò che influisce sul flusso è la componente del flusso perpendicolare alla superficie!

Matematicamente parlando, il flusso non è altro che un tipo di integrale superficiale di un campo vettoriale.

Come abbiamo detto, la superficie deve essere **orientabile**: detto in una maniera suggestiva, intuitiva ma non formale come farebbero i fisici, una superficie con due *facce distinte* e due *orientazioni* possibili che corrispondono alla scelta di un *campo normale* che punta sempre dalla parte di una delle facce.

In particolare, la superficie deve essere effettivamente orientata, ossia si deve scegliere uno

dei campi normali in modo da definire quando il flusso è positivo e quando è negativo. Generalmente, per convenzione si impone che il **flusso positivo esce dalla superficie** e che il flusso negativo entra nella superficie; in altre parole, è convenzione prendere il vettore normale orientato verso l'esterno: il flusso positivo si avrà quando la componente perpendicolare del campo vettoriale  $\vec{E}$  e il vettore normale saranno *concordi* e quindi quando  $\vec{E}$  è anch'esso uscente.

**OSSERVAZIONE.** Data una superficie chiusa  $\Sigma$ , tracciamo una curva chiusa  $\gamma$  su di essa; possiamo scindere  $\Sigma$  in due sottosuperfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  che hanno in comune una superficie  $\Sigma_{1,2}$  delimitata da  $\gamma$ . Il flusso per linearità di scinde in

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2}$$

In realtà, il flusso non è influenzato da quale sia la superficie  $\Sigma_{1,2}$ : infatti, per uno dei sottoflussi il contributo dato da  $\Sigma_{1,2}$  sarà negativo perché il campo è entrante, ma per l'altro sottoflusso sarà positivo perché il campo è uscente.

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2} = \Phi_{\Sigma_1 - \Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_2 - \Sigma_{1,2}} - \Phi_{\Sigma_{1,2}} = \Phi_{\Sigma_1 - \Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_2 - \Sigma_{1,2}}$$

## 2.2 LEGGE DI GAUSS

### TEOREMA 2.2.1. - .

Il flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$  attraverso una superficie chiusa è eguale alla somma algebrica (o nel caso di una distribuzione continua, dell'integrale) delle cariche contenute all'interno della superficie, comunque siano distribuite, divisa per  $\epsilon_0$ .

■ **Caso discreto:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{(\sum_i q_i)_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

■ **Caso continuo:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) dV \quad \text{tale che } \partial V = \Sigma \quad (2.3)$$

Lo dimostreremo per una *singola* carica contenuta nella superficie - dato che il caso per molteplici cariche e per una distribuzione continua seguono praticamente immediatamente - ma prima di farlo in modo formale, vediamo una derivazione più "fisica".

**Angolo solido** Per far ciò, ci servirà la nozione di *angolo solido*.

### DEFINIZIONE 2.2.1. - ANGOLO SOLIDO .

L'**angolo solido** è una generalizzazione a tre dimensioni dell'angolo piano e dà una misura della parte di spazio compresa entro un fascio di semirette uscenti intorno ad un punto  $P$ . In termini matematici, esso è definito come l'area sulla sfera unitaria intorno a  $P$  individuata dalla superficie (finita)  $\Sigma$ :

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \int \frac{\cos\theta d\Sigma}{r^2} \quad (2.4)$$

dove

- $d\Omega$  è l'angolo solido infinitesimo.

- $d\Sigma : 0$  è la *proiezione ortogonale* al raggio dell'elemento infinitesimo di superficie  $d\Sigma$ .
- $\theta$  è l'*angolo polare* delle coordinate sferiche.

Poiché  $d\Sigma_0$  è un elemento infinitesimo della calotta sferica, data una parametrizzazione in coordinate sferiche vale

$$d\Sigma_0 = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

da cui segue che

$$d\Sigma = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.5)$$

Integrando  $\theta$  da 0 a  $\pi$  e  $\varphi$  da 0 a  $2\pi$ , si ottiene l'angolo solido sotto cui dal centro  $P$  è vista tutta la superficie:

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = 4\pi \quad (2.6)$$

Questo risultato è valido per una qualunque superficie *chiusa* che racchiuda  $P$  - e ne corrisponde al valore massimo dell'angolo solido.

L'unità di misura dell'angolo solido è lo **steradiano** ( ).

**Derivazione fisica della legge di Gauss** Dato il campo di Coulomb  $\vec{E}$  generato dalla carica  $q$ , vogliamo determinare l'elemento di flusso infinitesimo  $d\Phi(\vec{E})$ , ossia il flusso tramite l'elemento d'area infinitesimo  $d\Sigma$ .

Innanzitutto, si noti che l'angolo tra il versore radiale  $\hat{u}_r$  uscente dalla carica  $q$  e il versore normale  $\hat{u}_n$  alla superficie coincide con un possibile angolo polare  $\theta$  che parametrizza un punto della calotta sferica unitaria centrata in  $q$ .

$$\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n = \cos \theta$$

Il flusso infinitesimo diventa

$$d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

**OSSERVAZIONE.** Il flusso del campo  $\vec{E}$  generato da una carica puntiforme dipende solo dall'angolo solido e *non* dalla superficie o dalla distanza dalla carica: il flusso è lo stesso per qualunque superficie il cui bordo si appoggi sul cono individuato dall'angolo solido. Questo è una *diretta* conseguenza che il campo di Coulomb presenta un fattore  $1/r^2$ ; se la relazione fosse stata anche solo leggermente diversa non varrebbe tale dipendenza.

Per una superficie (finita) e chiusa che racchiude la carica  $q$  si ha

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Dimostrazione formale della legge di Gauss**

**DIMOSTRAZIONE.** Per semplicità, poniamo l'origine del nostro sistema di riferimento dove è situata la carica. Data la simmetria di carattere radiale fornita dal campo

elettrostatico di Coulomb, ci conviene utilizzare le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Parametrizziamo la superficie  $\Sigma$  con l'angolo *polare*  $\theta$  e l'angolo *azimutale*  $\varphi$  delle coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta, \varphi) &= x(\theta, \varphi)\vec{u}_x + y(\theta, \varphi)\vec{u}_y + z(\theta, \varphi)\vec{u}_z = \\ &= r(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + r(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + r(\theta, \varphi) \cos \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

Osserviamo che per descrivere una superficie con le coordinate sferiche è necessario fornire la *distanza*  $r(\theta, \varphi)$  dall'origine nella direzione indicata dagli angoli  $\theta$  e  $\varphi$ . Anzi, la parametrizzazione può essere espressa totalmente in termini *radiali*! Infatti, il versore radiale è dato da

$$\hat{u}_r = \frac{\hat{e}_r}{|\hat{e}_r|} = \frac{\frac{\partial x^i}{\partial r} \hat{u}_i}{1} = \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z$$

Raccogliendo  $r(\theta, \varphi)$  dalla parametrizzazione scritta prima si ottiene quindi

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \hat{u}_r$$

Per definizione, il flusso è

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \left| \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right| d\theta d\varphi \quad \square$$

Poiché il versore normale è

$$\hat{u}_n = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right|}$$

il flusso si può calcolare come

$$\square \int_\Sigma \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{1}{r(\theta, \varphi)^2} \hat{u}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi$$

Per semplificare quel prodotto misto, dobbiamo prima analizzare i termini che partecipano al prodotto vettoriale.

In un generico punto<sup>a</sup>  $(\theta, \varphi)$  della superficie, i vettori della base del piano tangente alla superficie in tal punto sono

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta, \varphi) \vec{u}_r) = \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \hat{u}_r + r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (r(\theta, \varphi) \vec{u}_r) = \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{u}_r + r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} \end{cases}$$



Si nota subito che le componenti parallele a  $\hat{\mathbf{u}}_r$  *non* influiscono al flusso. Al netto di costanti moltiplicative, il contributo di tali componenti è un  $\hat{\mathbf{u}}_r$  nel prodotto vettoriale del prodotto misto, ma valendo

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \times \vec{\mathbf{a}} = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \vec{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{u}}_r = 0 \end{cases}, \quad \forall \vec{\mathbf{a}} \text{ vettore}$$

tali componenti non cambieranno in alcun modo il flusso; ciò che invece lo cambia sono le derivate dei versori radiali. Sviluppando, l'espressione del flusso si ha

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{1}{r(\theta, \varphi)} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{1}{\cancel{r(\theta, \varphi)^2}} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \left( \cancel{r(\theta, \varphi)} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} \times \cancel{r(\theta, \varphi)} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} \right) d\theta d\varphi = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y - \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_z \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_y \end{cases}$$

e

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \sin \theta$$

segue che

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (2.7)$$

dove  $\Sigma$  è l'angolo solido sull'intera superficie.

Se la superficie (finita) è chiusa si ha  $\Omega = 4\pi$ , ottenendo quindi il risultato desiderato.  $\square$

<sup>a</sup>Qui indicato tramite le coordinate ad esso associate dalla parametrizzazione.

**OSSERVAZIONE.** La 2.7 descrive il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie **qualunque**. La legge di Gauss si potrebbe vedere come un *caso specifico* di questa relazione.

Il caso per cariche multiple segue dal *principio di sovrapposizione* dei campi elettrici:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \left( \sum_i \vec{\mathbf{E}}_i \right) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \sum_i \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Da questa si ottiene, passando al continuo, la relazione 2.3.

**Flusso tramite una superficie chiusa per una carica esterna** La legge di Gauss descrive il flusso tramite una superficie chiusa tenendo conto delle cariche *interne* ad essa... e si ci fossero delle cariche *esterne*?

Limitiamoci all'inizio al caso di una singola carica esterna: il campo di Coulomb entra nella superficie chiusa, attraversa lo spazio contenuto da essa e poi esce dall'altro lato. In termini di angolo solido, il cono elementare che sottende l'angolo solido infinitesimo  $d\Sigma$

determina sulla superficie chiusa due elementi  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ . Per la convenzione sul segno del flusso:

- $\vec{E}$  entra in  $d\Sigma_1$ :  $\vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 < 0$ .
- $\vec{E}$  esce da  $d\Sigma_2$ :  $\vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 > 0$ .

I flussi infinitesimi che otteniamo<sup>1</sup> sono

$$\begin{cases} d\Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ d\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{cases}$$

Integrando sull'intera superficie chiusa otteniamo

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0 \quad (2.8)$$

Il flusso tramite una superficie *chiusa* dipende *solo* dalle cariche interne ad essa.

**OSSERVAZIONE.** Cosa cambia dal caso della carica interna? Il campo elettrico in quella situazione risulta essere *entrante* (se la carica è positiva) o *uscente* (se la carica è negativa) da ogni elemento infinitesimo; il flusso avrà quindi sempre lo stesso segno oppure essere nullo, ma sulla superficie intera questo si ha solo se questa è parallela al campo.

### 2.3 APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI GAUSS

La legge di Gauss, in linea di principio, ci descrive solo il flusso tramite una superficie chiusa. Tuttavia, in situazioni di *evidenti simmetrie*, confrontando la definizione di flusso con quello ottenuto dalla legge di Gauss possiamo sorprendentemente calcolare in modo abbastanza facile il campo elettrostatico che genera il flusso.

**Filo carico rettilineo (infinito)**

**Superficie carica infinita**

**Sfera uniformemente carica**

### 2.4 CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE

**DEFINIZIONE 2.4.1. - CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE .**

Il **circuitazione di un campo vettoriale lungo la curva chiusa  $\gamma$** , parametrizzata da una funzione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , è

$$\Gamma_{\gamma}(\vec{E}) = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (2.9)$$

### 2.5 TEOREMA DELLA DIVERGENZA

<sup>1</sup>Il procedimento è analogo a quello con cui si ottiene l'equazione 2.7.

**TEOREMA 2.5.1. - TEOREMA DELLA DIVERGENZA .**

Si consideri un volume  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  compatto con bordo liscio  $\partial V$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{E}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \quad (2.10)$$

□

Utilizzando la notazione fisica, la 2.10 si scrive come

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \Phi_\Sigma(\vec{E}) \quad (2.11)$$

**2.6 TEOREMA DEL ROTORE****TEOREMA 2.6.1. - TEOREMA DEL ROTORE .**

Si consideri una curva  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  semplice - ossia senza intersezioni con sé stessa, chiusa e liscia a tratti; si consideri inoltre una superficie  $\Sigma$  liscia tale che  $\partial\Sigma = \gamma$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{E}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_\Sigma \vec{\nabla} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.12)$$

□

Utilizzando la notazione fisica, la 2.10 si scrive come

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \Phi_\Sigma(\vec{E}) \quad (2.13)$$

Utilizzando la notazione fisica, la 2.10 si scrive come

$$\Phi_\Sigma(\vec{\nabla} \vec{E}) = \Gamma_\gamma(\vec{E}) \quad (2.14)$$

**OSSERVAZIONE.** Ci sono infinite superfici con bordo  $\gamma$ , ma il flusso del rotore è sempre uguale.



# SERIE DI FUNZIONI

“Sai fare le Addizioni?» chiese la Regina Bianca. «Che cosa fa uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno?»  
«Non lo so» rispose Alice. «Ho perso il conto»”

ATTRAVERSO LO SPECCHIO E QUEL CHE ALICE VI TROVÒ.

**L'**IDEA delle **serie di funzioni** sorge naturalmente quando lavoriamo con i polinomi di Taylor. Per funzioni "classiche" - diciamo quanto meno non patologiche - incrementare il grado del polinomio aumenta la qualità dell'approssimazione, quindi sembra che se potessimo creare un polinomio di Taylor *infinito*, otterremmo precisamente la funzione originale... ma un polinomio infinito non è altro che una serie di potenze! Come vedremo, questa idea può effettivamente funzionare, ma richiede un po' di accorgimenti, in particolare per vedere come si trasmettono le proprietà della successione alla somma della serie. In questo capitolo introduciamo la trattazione del tema per generiche funzioni, con lo scopo di studiare proprio le proprietà di regolarità delle serie di funzioni.

### 3.1 SERIE IN UNO SPAZIO NORMATO

Prima di far ciò, ricordiamo le definizioni di serie a valori reali e di convergenza (assoluta) di una serie a valore reali.

### DEFINIZIONE 3.1.1. - SERIE A VALORI REALI E CONVERGENZA DI UNA SERIE .

Data una successione  $x_n \in \mathbb{R}, n \geq 0$ , la **serie**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \quad (3.1)$$

è la somma di tutti gli elementi della successione.

Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**,

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k, \quad \forall n \geq 0 \quad (3.2)$$

si dice che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

**converge** se converge la successione  $s_n$ ; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad (3.3)$$

**DEFINIZIONE 3.1.2. - CONVERGENZA ASSOLUTA .**

Sia  $x_n$  una successione a valori reali. La serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

**converge assolutamente** in  $\mathbb{R}$  se converge la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| \quad (3.4)$$

**TEOREMA 3.1.1. - CONVERGENZA ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE .**

*Ogni serie di numeri reali assolutamente convergente è anche semplicemente convergente. Inoltre, vale*

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| \quad (3.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

converge, per il *Criterio di Cauchy per le serie*<sup>a</sup> è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

Per ipotesi la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$$

converge: per il Criterio di Cauchy, si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \\ \left| |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| \right| = |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon$$

D'altra parte, dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$$

Dalle ultime due relazioni si deduce immediatamente la prima relazione e dunque la prima tesi. La disuguaglianza segue dal fatto che essa è vera per ogni somma parziale.  $\square$

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina ?? è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di Cauchy.

**OSSERVAZIONE.** Il teorema appena dimostrato è una conseguenza della **completezza** di  $\mathbb{R}$ . Infatti, abbiamo usato il *criterio di Cauchy*, che si basa sul fatto che le successioni di Cauchy convergono sempre in  $\mathbb{R}$  e quindi proprio per la completezza dei reali. Se lo spazio *non* è completo si ottiene solo che la successione delle ridotte è di Cauchy, e senza la completezza dello spazio non possiamo affermare che convergono.

Il viceversa del teorema appena dimostrato non è valido, come segue dal seguente controesempio.

**ESEMPIO - CONVERGENZA SEMPLICE NON IMPLICA CONVERGENZA ASSOLUTA .**

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Essa non converge assolutamente in quanto la serie dei moduli diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che, essendo la **serie armonica**<sup>a</sup>, non converge. Tuttavia, la serie semplice è una serie a segni *alterni* e poiché

- $\frac{1}{n}$  è decrescente  $\forall n \geq 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

per il *criterio di Leibniz* la serie semplice converge. Pertanto, la convergenza semplice *non* implica la convergenza assoluta.

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pagina ?? è possibile trovare maggiori dettagli sulle serie notevoli.

Prendiamo ora  $x_n \in X$ , con  $X$  un insieme *generico*. Per generalizzare la definizione di serie convergente abbiamo bisogno che su  $X$  si possano compiere i seguenti passaggi:

- Poter definire  $s_n$ , cioè è necessario *sommare* elementi di  $X$ .
- Poter definire la *convergenza* in  $X$ .

Se dotiamo l'insieme  $X$  di una struttura di **spazio normato** possiamo generalizzare ad una serie generale le definizioni precedentemente enunciate per le serie a valori reali: infatti, se  $X$  è spazio normato gode sia dell'essere uno *spazio metrico* (e quindi è spazio topologico

di Hausdorff, il che permette di definire univocamente la convergenza della successione) sia dell'essere *spazio vettoriale* (che permette la somma di elementi).

**DEFINIZIONE 3.1.3. - SERIE E CONVERGENZA DI UNA SERIE .**

Data una successione  $x_n \in X$  in uno spazio *normato*,  $n \geq 0$ , la **serie**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

è la somma di tutti gli elementi della successione.

Considerata la *somma parziale*, o altresì detta **ridotta**,

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k \quad \forall n \geq 0 \quad (3.6)$$

si dice che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

**converge** se converge la successione  $s_n$ ; si pone in tal caso

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad (3.7)$$

**DEFINIZIONE 3.1.4. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA .**

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  spazio normato e  $x_n$  una successione in  $X$ . La serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

**converge totalmente o assolutamente** in  $X$  se converge la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$$

Dall'osservazione a pag. 33 il teorema 3.1.1 necessita della *completezza* dei reali. Per generalizzarlo ci basta lavorare in *spazi normati completi*.

**TEOREMA 3.1.2. - CONVERGENZA TOTALE O ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA SEMPLICE .**

Ogni serie in  $X$  spazio normato completo *totalmente convergente* è anche *semplicemente convergente*. Inoltre, vale

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\| \quad (3.8)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è analoga a quella affrontata nel teorema 3.1.1: è sufficiente sostituire al valore assoluto  $|\cdot|$  la norma  $\|\cdot\|$ .  $\square$



In generale, il problema della convergenza in spazi normati è *inesplorato*, ma se lo spazio è *completo* possiamo passare per la *convergenza totale* e studiare una serie a valori reali tramite i *criteri di convergenza*<sup>1</sup> noti dall'ANALISI MATEMATICA UNO.

### 3.2 SERIE DI FUNZIONI

Consideriamo lo spazio  $X = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}) = \mathcal{C}([a, b])$  delle funzioni continue su un intervallo compatto con la *metrica lagrangiana*:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

In questo spazio, una serie convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ ent}$$

si può scrivere, per definizione, come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

dove  $S_n$  è una successione di funzioni. Allora la condizione di convergenza di serie in  $X$  si può formulare come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathcal{C}([a, b]) \iff S_n \text{ converge con metrica lagrangiana in } \mathcal{C}([a, b])$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge in } \mathcal{C}([a, b]) \iff S_n \text{ converge uniformemente in } \mathcal{C}([a, b])$$

Per la stessa osservazione fatte a pag. ??, per parlare di convergenza uniforme non sono necessarie né la *compattezza* di  $[a, b]$ , né la *continuità* delle funzioni.

Possiamo *estendere* la definizione di convergenza di una serie di funzioni per

$$f_n \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$$

con  $A$  insieme contenuto nei reali o, ancora più in generale, per funzioni del tipo

$$f_n \longrightarrow XY$$

dove  $X$  è un *insieme qualunque* e  $Y$  è uno **spazio normato completo**.

Studieremo quindi in questo capitolo le **serie di funzioni**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

per studiare la *convergenza* di tali serie applicheremo le convergenze viste in precedenza alla *successione delle ridotte*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

<sup>1</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. ?? è possibile trovare maggiori dettagli sui criteri di convergenza delle serie a valori reali.

**DEFINIZIONE 3.2.1. - CONVERGENZA DI UNA SERIE DI FUNZIONI .**

In queste definizioni la convergenza delle ridotte si trasferisce sulla convergenza della serie:

- **(CP)** La serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  **converge puntualmente** in  $x \in A$  se  $S_n(x)$  converge puntualmente in  $x \in A$ .
- **(CU)** La serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  **converge uniformemente** in  $x \in A$  se  $S_n(x)$  converge uniformemente su  $A$ .

**3.2.1 Il criterio di Weierstrass**

Per motivi che saranno chiari nel Capitolo ?? dedicato alle *serie di potenze*, in questa sottosezione lavoreremo nel *campo dei complessi*  $\mathbb{C}$ .

Abbiamo dato la definizione di convergenza uniforme di una serie di funzione, ma essa non è di facile applicazione operativa. Infatti, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente su  $A \subseteq \mathbb{C}$  se e solo se, definita  $S(z)$  la funzione limite delle ridotte

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$$

essa vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{z \in A} |S_n(z) - S(z)| \right) = 0$$

Tuttavia, questa funzione richiede la conoscenza della *somma*  $S(z)$ , cosa che in generale *non* avviene. Usare direttamente il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme è sicuramente più conveniente, ma non è sempre semplice da verificare. Esiste tuttavia una condizione *sufficiente* che consente di provare la convergenza uniforme senza la conoscenza della somma limite.

**PROPOSIZIONE 3.2.1. - CRITERIO DI WEIERSTRASS .**

Siano  $f_n \longrightarrow A \subseteq \mathbb{C}\mathbb{C}$  tale che

- a.  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n \in \mathbb{R}: |f_n(z)| \leq c_n, \forall z \in A.$
- b.  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  converge (come serie numerica).

Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente in  $A$ .

□

**OSSERVAZIONE.** La dimostrazione utilizza il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.

**OSSERVAZIONE - SIGNIFICATO DEL CRITERIO .**

Le ipotesi 1) e 2) implicano immediatamente la convergenza puntuale (assoluta) della serie di potenze in ogni  $z \in A$ . Infatti, fissato  $z$  ho la relazione  $|f_n(z)| \leq c_n$ ; da questo vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

e, poiché la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

converge, allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)|$$

converge per criterio del confronto e quindi la serie di funzioni converge puntualmente. Quello che osserviamo nello specifico è che l'ipotesi 1) funge da *maggiorazione uniforme* della serie di funzioni su  $A$ , da cui possiamo ricavare, anche a partire dalla convergenza puntuale della serie, la convergenza uniforme su  $A$ .  $\times$

## 3.3 PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DI UNA SERIE DI FUNZIONI

Ci poniamo ora il problema di studiare come si modificano i teoremi di *limitatezza*, *continuità*, *integrabilità*, *integrabilità* e *derivabilità* visti nel Capitolo 2 nel caso delle *serie di funzioni*.

## 3.3.1 Limitatezza

**TEOREMA 3.3.1. - TEOREMA DI LIMITATEZZA PER SERIE .**

Siano  $f_n \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

- $f_n$  limitata su  $A$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$ .

Allora, posto

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in A,$$

$S(x)$  è limitata su  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La strategia è passare per la successione delle ridotte. Posto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad \forall x \in A,$$

si ha:

- $S_n$  limitata su  $A$ , poiché le  $f_k$  lo sono.
- $S_n$  convergente uniformemente a  $S$  su  $A$ .

Per il teorema di limitatezza per le successioni,  $S$  è limitata su  $A$ .  $\square$

### 3.3.2 Continuità

Notiamo immediatamente che il *teorema di continuità per le serie* è del tutto analogo al *teorema di limitatezza* appena dimostrato.

**TEOREMA 3.3.2. - TEOREMA DI CONTINUITÀ PER SERIE .**

Siano  $f_n \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

- a.  $f_n$  continua su  $A$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- b.  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$ .

Allora, posto

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in A,$$

$S(x)$  è continua su  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La strategia è passare per la successione delle ridotte. Posto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad \forall x \in A,$$

si ha:

- $S_n$  continua su  $A$ , poiché le  $f_k$  lo sono.
- $S_n$  convergente uniformemente a  $S$  su  $A$ .

Per il teorema di continuità per le successioni,  $S$  è continua su  $A$ . □

### 3.3.3 Integrabilità e scambio tra integrale e serie

**TEOREMA 3.3.3. - TEOREMA DI INTEGRABILITÀ PER SERIE, SCAMBIO TRA INTEGRALE E SERIE .**

Siano  $f_n, f \longrightarrow [a, b]\mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  tali che

- a.  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- b.  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $[a, b]$ .

Allora, posto

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

si ha:

1.  $S \in \mathcal{R}([a, b])$ .
2. Vale lo **scambio tra integrale e serie**:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx \quad (3.9)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Posto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

si ha:

- $S_n \in \mathcal{R}([a, b])$ , poiché le  $f_k$  lo sono.
- $S_n$  convergente *uniformemente* a  $S$  su  $[a, b]$ .

Per il teorema di integrabilità per le successioni:

- $S \in \mathcal{R}([a, b])$  perché somma di funzioni integrabili.
- Vale il *passaggio al limite sotto segno di integrale* per la successione delle ridotte, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$$

Poiché l'integrale di una somma finita è uguale ad una somma finita di integrali, il primo membro dell'equazione può essere riscritto come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

e poiché

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx$$

otteniamo la tesi:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

□

### 3.3.4 Derivabilità

#### TEOREMA 3.3.4. - DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE .

Siano  $f_n \longrightarrow (a, b)\mathbb{R}$  tale che

- a.  $f_n$  derivabile su  $(a, b)$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- b.  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$  converge
- c.  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  converge uniformemente su  $(a, b)$ .

Allora:

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente su  $(a, b)$

Inoltre, detta  $f$  la funzione somma:

2.  $f$  è derivabile su  $(a, b)$
3. Vale la **derivazione termine a termine**:

$$f'(x) = D \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in (a, b) \quad (3.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si applica il teorema di derivazione alla successione delle ridotte

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall n \geq 1$$

Verifichiamo le ipotesi:

1.  $S_n$  è derivabile su  $(a, b)$ ,  $\forall n \geq 1$ , perché lo sono le  $f_k$  su  $(a, b)$ ,  $\forall k \geq 1$ .
2.  $S_n(c)$  converge perché  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$  converge per ipotesi.
3.  $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$  converge uniformemente su  $(a, b)$  per ipotesi.

Allora per il teorema di derivazione per le successioni si ha che

$$S_n(x) \text{ converge uniformemente su } (a, b)$$

ossia, per definizione, che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente su } (a, b)$$

Inoltre, definita la somma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x), \quad \forall x \in (a, b),$$

si ha che  $f$  è derivabile su  $(a, b)$  e per il teorema di derivazione

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(x), \quad \forall x \in (a, b) \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** La derivazione termine a termine si può interpretare anche come “la derivata della serie è la serie delle derivate”, estendendo così la regola delle somma *finita* delle derivate.

### 3.4 THE FULFILLING WORLD OF THE SPACE-FILLING CURVES

in questa sezione, il cui nome è in inglese per il puro scopo di fare un pessimo gioco di parole, è un piccolo approfondimento sulle cosiddette curve **space-filling** (traducibile in italiano come *curve riempi-spazio*).

Intuitivamente, quando pensiamo ad una curva, ci immaginiamo la traiettoria di un punto in movimento, o comunque un qualcosa *unidimensionale* nello spazio che sia estremamente *sottile*, senza *spessore*. Dato che questo concetto è un po' troppo vago per poterci lavorare matematicamente, Camille **Jordan** (1838-1992) nel 1887 la definì nel seguente modo:

#### DEFINIZIONE 3.4.1. - CURVA .

Una **curva** è una funzione continua il cui dominio è l'intervallo unitario  $[0, 1]$ .

Questa definizione, per quanto innocua essa sia, comporta una conseguenza importante:

dato che non ci sono condizioni sul *codominio* di tale funzione, esso di fatto può essere uno spazio topologico *arbitrario*!

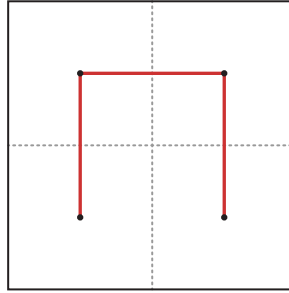
E infatti, nel 1890, il matematico torinese Giuseppe **Peano** (1858-1932) scoprì il primo caso di una curva continua che passa in *tutti* i punti del quadrato unitario  $[0, 1]^2$ . Questa curva, che ora viene chiamata in suo onore **curva di Peano**, è altamente controintuitiva, essendo un'oggetto che non ha spessore ma che può comunque *riempire* il quadrato - da qui il nome **curva space-filling**.

**DEFINIZIONE 3.4.2. - CURVA SPACE-FILLING .**

Una **curva space-filling** è una curva il cui codominio contenga il quadrato unitario o, più genericamente, il plurintervallo  $n$ -dimensionale unitario  $[0, 1]^n$ .

L'anno successivo a Peano, David **Hilbert** (1862-1943) semplificò notevolmente l'idea di Peano e fornì la prima costruzione geometrica (e induttiva) di una curva space-filling; noi descriveremo quest'ultima. Costruiamo una sequenza  $\gamma_n$  di curve piane, che fungeranno da iterazioni della curva di Hilbert.

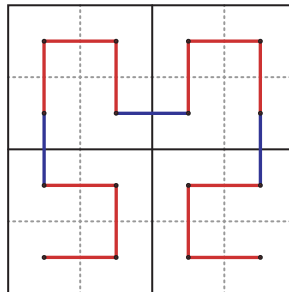
- **La curva  $\gamma_1$ :** consiste dei tre segmenti che connettono i vertici  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$  e  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$



- **La curva  $\gamma_2$ :** dividiamo il quadrato  $[0, 1]^2$  in quattro quadrati identici:

$$Q_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad Q_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad Q_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad Q_4 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

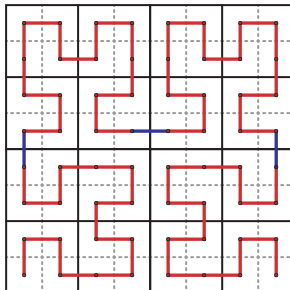
In ogni quadrato mettiamo la prima curva  $\gamma_1$  ridimensionata di un fattore  $1/2$  e la ruotiamo come in figura.



Nel primo quadrato è ruotata di  $90^\circ$  in senso orario, nel secondo e terzo quadrante rimane nella posizione originale, mentre nel quarto quadrato è ruotata  $90^\circ$  in senso antiorario. Per concludere, colleghiamo l'estremo finale della curva in  $Q_1$  con quello iniziale della curva  $Q_2$ ; ripetiamo il processo per le curve in  $Q_2$  e  $Q_3$  e per le curve in  $Q_3$  e  $Q_4$ .

I vertici della curva sono diventati  $16 = 4^2$  e si possono scrivere come  $(\frac{n}{2^3}, \frac{m}{2^3})$ , dove  $n, m = 1, 3, 5, 7$ .

- **La curva  $\gamma_3$ :** si ripete la stessa costruzione vista al passo 2.



I vertici della curva sono diventati  $64 = 4^3$  e si possono scrivere come  $\left(\frac{n}{2^4}, \frac{m}{2^4}\right)$ , dove  $n$  e  $m$  sono i numeri dispari da 1 a  $2^4 - 1$ .

Questa successione di curve si può mostrare essere uniformemente convergente ad una curva limite  $\gamma$  - la vera e propria curva di Hilbert; per mostrare che  $\gamma$  è space-filling si può osservare che l'immagine della curva è un compatto chiuso in  $[0, 1]^2$  e che l'insieme dei punti  $\left(\frac{n}{2^k}, \frac{m}{2^k}\right)$  - dove  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n$  e  $m$  numeri dispari da 1 a  $2^k - 1$  - è denso in  $[0, 1]^2$ . Per costruzione della sequenza  $\gamma_n$  lo stesso si può dire dell'immagine di  $\gamma$ ; essa, essendo un sottoinsieme chiuso e denso nel quadrato, allora deve riempirlo.

Pur non avendo scritto esplicitamente l'espressione di  $\gamma_n$  e  $\gamma$ , preferendo mostrare l'approccio *geometrico* alla questione, è immediato capire che essere possono essere scritte come *somma* e *serie* di opportune funzioni: più in generale, un gran numero di curve space-filling sono esprimibili come serie di funzioni!



# II

POSTILLE AL NOME DELLA ROSA



# RICHIAMI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE E CALCOLO DIFFERENZIALE

*“Non c’è niente nel mondo il cui significato non sia quello di un qualche massimo o minimo.”*

*LEONHARD EULER, dimenticandosi del concetto di estremo inferiore e superiore.*

## N<sup>ON</sup>

### 4.1 VARIETÀ DIFFERENZIABILE

#### DEFINIZIONE 4.1.1. - CARTA, COORDINATE LAGRANGIANE, PARAMETRIZZAZIONE LOCALE.

Dato un insieme di punti  $M$  non vuoto, una **carta** è una coppia  $(U, \varphi)$  dove

- $U$  è un insieme<sup>a</sup> contenuto in  $M$  detto **dominio della carta**.
- $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  è una funzione *iniettiva*<sup>b</sup>, con  $\varphi(U)$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

La funzione  $\varphi$  associa ad ogni punto  $p \in U \subseteq M$  un  $m$ -upla  $(q^\lambda)$  (con  $\lambda = 1, \dots, m$ ) dette **coordinate** di  $p$  rispetto alla carta  $(U, \varphi)$ .

$$\varphi(p) = (q^1(p), \dots, q^n(p)) \quad (4.1)$$

La funzione  $\varphi$  è suriettiva è quindi invertibile: l’inversa  $\varphi^{-1}$ , detta **parametrizzazione locale**, associa alle coordinate  $q^\lambda$  il punto  $p \in U \subseteq M$  con quelle coordinate.

<sup>a</sup>A seconda delle definizioni,  $U$  si impone per definizione essere aperto per una topologia innata su  $M$  oppure risulta aperto per una topologia indotta dall’atlante e nella definizione non è richiesto specificarlo. Le due definizioni sono equivalenti.

<sup>b</sup>A seconda delle definizioni,  $\varphi$  si impone per definizione essere un omeomorfismo - i.e. mappa continua con inversa continua - oppure risulta un omeomorfismo in seguito alla topologia indotta dall’atlante stesso. Le due definizioni sono equivalenti.

**DEFINIZIONE 4.1.2. - FUNZIONE DI TRANSIZIONE .**

Date due carte  $(U_1, \varphi_1)$ ,  $(U_2, \varphi_2)$  su  $M$  con  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , la **funzione di transizione** dalla carta  $(U_1, \varphi_1)$  alla carta  $(U_2, \varphi_2)$  è la funzione

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

Essendo definita tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  si possono definire le sue *derivate*.

Se due carte hanno una funzione di transizione *differenziabile*, di solito  $\mathcal{C}^\infty$  o più raramente  $\mathcal{C}^k$ , le carte sono dette **compatibili**.

**DEFINIZIONE 4.1.3. - ATLANTE .**

Un **atlante** è una collezione di carte  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  che copre tutto l'insieme  $M$ , cioè per qualunque punto  $p \in M$  esiste almeno una carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per un certo  $\alpha \in I$ , tale che  $p \in U_\alpha$ .

Se le funzioni di transizione dell'atlante sono  $\mathcal{C}^k$ , allora l'atlante si chiama **atlante  $\mathcal{C}^k$** .

Se l'**atlante** è  $\mathcal{C}^\infty$ , la funzione di transizione è un **diffeomorfismo**, in quanto è una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  con inversa  $\mathcal{C}^\infty$ .

**DEFINIZIONE 4.1.4. - ATLANTE MASSIMALE .**

Dato un atlante  $\mathcal{A}$ , l'**atlante massimale** è l'atlante contenente tutte le carte compatibili con l'atlante originale  $\mathcal{A}$ .

**DEFINIZIONE 4.1.5. - TOPOLOGIA INDOTTA DALL'ATLANTE .**

Un atlante definisce sempre una topologia sull'insieme  $M$ , detta

$A \subseteq M$  aperto se  $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  con la topologia Euclidea.

Secondo questa topologia:

1.  $U_\alpha$  è aperto in  $M$ .
2.  $\varphi_\alpha$  manda aperti in aperti, quindi è aperta ed, essendo biettiva, è un omeomorfismo tra  $U_\alpha$  e  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ .

**DEFINIZIONE 4.1.6. - VARIETÀ DIFFERENZIABILE .**

Una **varietà differenziabile** (altresì detta **varietà differenziale**) di classe  $\mathcal{C}^k$  e **dimensione**  $n$  è un insieme di punti  $M$  non vuoto che può essere coperto da un atlante  $\mathcal{C}^k \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ , che di solito supponiamo massimale, dove  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \alpha \in I$ . Inoltre, lo spazio topologico<sup>a</sup>  $M$  si suppone spesso essere Hausdorff e a base numerabile.

<sup>a</sup>Con la topologia su  $M$  con cui si sono definite le carte o con la topologia indotta dall'atlante.

In sintesi, una **varietà differenziabile** è una varietà topologica con una struttura differenziabile globale: l'esistenza dell'atlante soddisfa le condizioni di varietà topologica, mentre la struttura differenziabile è indotta dalle condizioni di compatibilità delle carte dell'atlante.

Per semplicità considereremo, se non specificato, le varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e quindi tralasciamo il termine "di classe  $\mathcal{C}^k$ ".

**ESEMPLI.**

- Gli spazi affini  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n$  con coordinate cartesiane, polari, sferiche,

cilindriche...

- Le sfere  $S^n$  di dimensione  $n$ .
- Le superfici regolari in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzate da

$$\begin{aligned} \vec{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

## 4.2 METRICA

### DEFINIZIONE 4.2.1. - METRICA .

Una **metrica** (o anche detto  **tensore metrico**) su una varietà differenziabile  $M$  è una mappa bilineare simmetrica - ossia un campo tensoriale simmetrico doppiamente contravariante - non degenerare

$$\begin{aligned} g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto X \cdot Y = \langle X, Y \rangle = g(X, Y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

che ad una coppia di campi vettoriali sopra  $M$  associa un campo scalare su  $M$ . Essa soddisfa le proprietà di un **prodotto interno**:

- **Bilinearità**, ossia lineare separatamente in entrambi gli argomenti:

$$g(f\vec{X} + h\vec{Y}, \vec{Z}) = fg(\vec{X}, \vec{Z}) + hg(\vec{Y}, \vec{Z}), \quad \forall f, h \in \mathcal{F}(M), \quad \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathcal{X}(M) \quad (4.4)$$

$$g(\vec{X}, f\vec{Y} + h\vec{Z}) = fg(\vec{X}, \vec{Y}) + hg(\vec{X}, \vec{Z}), \quad \forall f, h \in \mathcal{F}(M), \quad \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathcal{X}(M) \quad (4.5)$$

- **Simmetria**:

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{Y}, \vec{X}), \quad \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathcal{X}(M) \quad (4.6)$$

- **Non degenerare**: per ogni campo vettoriale  $\vec{X} \neq 0$

$$\exists \vec{Y} : g(\vec{X}, \vec{Y}) \neq 0 \quad (4.7)$$

La metrica generalizza molte delle proprietà del *prodotto scalare* di vettori negli spazio Euclidei.

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$  e dati i campi  $\vec{X} = X^\lambda \vec{e}_\lambda$ ,  $\vec{Y} = Y^\lambda \vec{e}_\lambda \in \mathcal{X}(M)$  si ha

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(X^\lambda \vec{e}_\lambda, Y^\mu \vec{e}_\mu) = X^\lambda Y^\mu g(\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\mu) = X^\lambda Y^\mu g_{\lambda\mu}$$

dove

$$g_{\lambda\mu} = g(\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\mu) \quad (4.8)$$

sono le componenti di  $g$  nelle coordinate scelte.

### DEFINIZIONE 4.2.2. - COORDINATE ORTOGONALI .

Data  $M$  varietà differenziabile e  $(q^\lambda)$  coordinate su  $M$ , le coordinate sono **ortogonali** rispetto ad una metrica  $g$  se  $g_{\mu\nu} = 0$ ,  $\forall \mu \neq \nu$ .

### DEFINIZIONE 4.2.3. - VARIETÀ RIEMANNIANE .

Una varietà **Riemanniana**  $(M, g)$  è una varietà differenziabile  $M$  a cui è associata una metrica  $g$ .

**Metrica e 1-forme** La metrica si può descrivere da una matrice invertibile. Invertendola, otteniamo la matrice associata ad un campo tensoriale simmetrico doppiamente covariante, ossia una mappa bilineare che a due 1-forme sulla varietà differenziabile  $M$  associa un campo scalare.

$$\begin{aligned} g : \Omega(M) \times \Omega(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle = [g^{-1}](\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pertanto,  $g^{-1}$  definisce un prodotto interno sulle 1-forme.

**OSSERVAZIONE.** Vale anche il ragionamento contrario: da un campo tensoriale  $(2, 0)$  simmetrico che definisce un prodotto interno sulla varietà si può considerare il campo tensoriale  $(0, 2)$  associato alla matrice inversa, il quale è una metrica sulla stessa varietà e un prodotto interno per le 1-forme.

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$  e dati le 1-forme  $\underline{\alpha} = \alpha_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda$ ,  $\underline{\beta} = \beta_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda \in \Omega^1(M)$  si ha

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\alpha_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda, \beta_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda) = \alpha_\lambda \beta_\lambda g(\underline{\epsilon}^\lambda, \underline{\epsilon}^\lambda) = \alpha_\lambda \beta_\lambda g^{\lambda\mu}$$

dove

$$g^{\lambda\mu} = g(\underline{\epsilon}^\lambda, \underline{\epsilon}^\mu) \quad (4.10)$$

**Isomorfismi musicali** Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su una varietà Riemanniana  $(M, g)$ , possiamo considerare due isomorfismi mutualmente inversi tra fibrati vettoriali:

- **Bemolle:** dato un campo vettoriale  $X = X^\lambda \vec{e}_\lambda$  su  $M$ , il **bemolle**  $X^b$  è una 1-forma su  $M$  ottenuta **abbassando un indice**:

$$\begin{aligned} b : TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto X^b = g_{\mu\lambda} X^\mu \underline{\epsilon}^\lambda = X_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizzando il prodotto interno definito da  $g$ , si ha per qualunque campo vettoriale  $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$X^b(Y) = g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

- **Diesis:** dato una 1-forma  $\varphi = \varphi_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda$  su  $M$ , il **diesis**  $\varphi^\sharp$  è un campo vettoriale su  $M$  ottenuto **alzando un indice**:

$$\begin{aligned} b : T^*M &\longrightarrow TM \\ \varphi &\longmapsto \varphi^\sharp = g^{\mu\lambda} \varphi_\mu \vec{e}_\lambda = \varphi^\lambda \vec{e}_\lambda \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove  $g^{\mu\lambda}$  sono componenti della matrice inversa associata alla metrica  $g$ .

Utilizzando il prodotto interno definito da  $g$ , si ha per qualunque campo vettoriale  $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\langle \varphi^\sharp, Y \rangle = g(\varphi^\sharp, Y) = \varphi(Y)$$

### 4.3 ELEMENTO DI LINEA

#### DEFINIZIONE 4.3.1. - SPOSTAMENTO INFINITESIMO.

Il vettore **spostamento infinitesimo** è la variazione infinitesima del vettore posizione  $\vec{r}$ .

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$ ,

$$d\vec{s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} dq^\lambda = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right| \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right|} dq^\lambda = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right| dq^\lambda \hat{u}_\lambda \quad (4.13)$$

Lo spostamento infinitesimo si calcola ricavando, per ogni direzione  $\hat{u}_\lambda$ , la variazione della corrispondente coordinata *tenendo costanti* le altre.

**DEFINIZIONE 4.3.2. - ELEMENTO DI LINEA .**

L'**elemento di linea** è il quadrato della lunghezza di uno spostamento infinitesimo. Se  $g$  è il tensore metrico della varietà  $n$ -dimensionale, allora

$$ds^2 = g(d\vec{s}, d\vec{s}) \quad (4.14)$$

**NOTAZIONE.** Talvolta si indica lo spostamento infinitesimo e l'elemento di linea, in maniera alternativa a  $d\vec{s}$  e  $ds$ , come  $d\vec{\ell}$  e  $d\ell$

Poiché lo spostamento infinitesimo è arbitrario,  $ds^2$  definisce completamente la metrica; in notazione suggestiva ma non corretta dal punto di vista tensoriale

$$ds^2 = g \quad (4.15)$$

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$ , si ha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \quad (4.16)$$

Se la metrica è ortogonale, l'elemento di linea è della forma

$$ds^2 = g_{11} (dq^1)^2 + \dots + g_{nn} (dq^n)^2 \quad (4.17)$$

**Applicazioni** Preso un vettore  $\vec{r}$  parametrizzante una curva, il vettore spostamento  $d\vec{s}$  rappresenta una sua parte infinitesima tale da sembrare lineare. Per questo motivo il parente stretto del vettore spostamento, l'elemento di linea permette il calcolo dell'arcolunghezza e degli integrali curvilinei, oltre che definire la metrica.

**DEFINIZIONE 4.3.3. - ARCOLUNGHEZZA .**

L'**arcolunghezza** è la distanza tra due punti lungo una sezione di una curva  $\vec{r}(\tau)$

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{|ds^2|} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dr^\mu}{d\tau} \frac{dr^\nu}{d\tau}} \quad (4.18)$$

**DEFINIZIONE 4.3.4. - INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE .**

Un **integrale curvilineo di prima specie** è un integrale dove un campo scalare

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

viene valutato lungo una curva  $\gamma$  di parametrizzazione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow U$ :

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\vec{r}(\tau)) |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (4.19)$$

In particolare, la lunghezza della curva  $\gamma$  è

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (4.20)$$

**DEFINIZIONE 4.3.5. - INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE .**

Un **integrale curvilineo di seconda specie** è un integrale dove un campo vettoriale  $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  viene valutato lungo una curva  $\gamma$  di parametrizzazione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow U$ :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(\tau)) \cdot |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (4.21)$$

Gli integrali curvilineo di seconda specie sono indipendenti dalla parametrizzazione, ma dipendono invece dall'*orientazione*: nella fattispecie, invertire l'orientazione della parametrizzazione cambia il segno dell'integrale curvilineo.

#### 4.4 ELEMENTO DI AREA

**DEFINIZIONE 4.4.1. -**

Data una superficie  $\Sigma$  a due dimensioni immersa in  $\mathbb{R}^3$ , l'**elemento di superficie** è una sua porzione infinitesima. In termini matematici, scelte una parametrizzazione  $\vec{r}(u, v)$  di  $\Sigma$  e dunque una scelta di coordinate  $(u, v)$ , allora l'elemento di superficie è una 2-forma data da

$$d\Sigma = \sqrt{\det g} du dv = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (4.22)$$

dove  $g$  è la metrica associata alla superficie con la parametrizzazione scelta.

**Applicazioni** Come si può facilmente immaginare, l'elemento di superficie permette il calcolo degli integrali superficiali.

**DEFINIZIONE 4.4.2. - INTEGRALE SUPERFICIALE PER CAMPI SCALARI .**

Un **integrale superficiali per campi scalari** è un integrale dove un campo scalare  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  viene valutato su una superficie di parametrizzazione  $\vec{r} : T \longrightarrow U$ :

$$\int_{\Sigma} f d\Sigma = \int_T f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{\det g} du dv = \int_T f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (4.23)$$

In particolare, l'area di  $\Sigma$  è

$$A = \int_{\Sigma} 1 d\Sigma = \int_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (4.24)$$

Un integrale superficiale per campi vettoriali può essere definito in due modi differenti:



- Integrando il campo *componente per componente* utilizzando l'integrale superficiale per campi scalari; il risultato in tal caso è un vettore.
- Integrando la *componente normale* del campo tramite la superficie con l'integrale superficiale per campi scalari; il risultato in tal caso è uno scalare ed è il **flusso** del campo vettoriale tramite la superficie considerata.

## 4.5 ELEMENTO DI VOLUME

**DEFINIZIONE 4.5.1. - ELEMENTO DI VOLUME .**

Fissate delle coordinate  $(x^i)$ , un **elemento di volume** su una varietà Riemanniana *orientabile* di dimensione  $n$  è una  $n$ -forma data da

$$dV = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (4.25)$$

dove  $g$  è la metrica associata alla varietà.

Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , si può fisicamente vedere come una porzione infinitesima di volume - anche se in termini matematici rimane una 3-forma su  $\mathbb{R}^3$ . Date le coordinate  $(u, v, s)$  su  $\mathbb{R}^3$  e la metrica  $g$  ad esse associata, si esprime per convenzione come

$$dV = \sqrt{\det g} du dv ds \quad (4.26)$$

**Cambio di coordinate** Nelle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  la forma di volume è

$$dV = dx dy dz$$

Operando un cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = x(u, v, s) \\ y = y(u, v, s) \\ z = z(u, v, s) \end{cases}$$

la forma di volume cambia con il determinante della Jacobiana del cambiamento:

$$dV = \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, s)} \right| du dv ds$$

**Applicazioni** L'elemento di volume permette di definire l'integrale (di Lebesgue) di una funzione su una varietà differenziabile. Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , la forma di volume permette il calcolo degli **integrali tripli**.

In particolare, il volume di un dominio  $V$  è dato da

$$V = \int_V 1 dV = \int_V dV$$

## 4.6 OPERATORE STAR DI HODGE

**DEFINIZIONE 4.6.1. - SIMBOLO DI LEVI-CIVITA .**

Il **simbolo di Levi-Civita** è definito come

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ è una permutazione pari di } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{se } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ è una permutazione dispari di } (1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.27)$$

**DEFINIZIONE 4.6.2. - OPERATORE STAR DI HODGE .**

Data una varietà Riemanniana *orientata*  $M$  di dimensione  $n$ , lo **star di Hodge** è una funzione lineare

$$* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

che associa alla  $k$ -forma  $\beta$  un'unica  $(n-k)$ -forma  $*\beta$ , detta **duale di Hodge** definita dall'identità

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV \quad (4.28)$$

dove  $dV \in \omega^n(X)$  è la forma di volume indotta da  $g$ .

Fissate delle componenti  $(q^\lambda)$ , una  $k$ -forma ha una scrittura canonica data da

$$\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} \underline{\varepsilon}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underline{\varepsilon}^{i_k} \quad (4.29)$$

dove  $\alpha_{i_1 \dots i_k}$  sono funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  sulla varietà. Allora, il duale di Hodge è definito come

$$*\alpha = \frac{1}{k!(n-k)!} \sqrt{|g|} \alpha_{j_1 \dots j_k} g^{j_1 i_1} \dots g^{j_k i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \underline{\varepsilon}^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \underline{\varepsilon}^{i_n} = \frac{1}{k!(n-k)!} \sqrt{|g|} \alpha^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \underline{\varepsilon}^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \underline{\varepsilon}^{i_n}$$

dove  $g$  è la metrica su  $M$  e

$$\alpha^{i_1 \dots i_k} = \alpha_{j_1 \dots j_k} g^{j_1 i_1} \dots g^{j_k i_k}$$

**PROPRIETÀ 4.6.1. - .** Data una varietà Riemanniana  $(M, g)$  di dimensione  $n$  e sia  $\alpha \in \Omega^k(M)$ . Allora valgono le seguenti:

- Il duale di Hodge della funzione/0-forma identicamente unitaria  $1$  è

$$*1 = dV \quad (4.30)$$

- Il duale del duale di Hodge di una  $k$ -forma è

$$*(*\alpha) = (-1)^{k(n+1)} \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha \quad (4.31)$$

## 4.7 OPERATORI DIFFERENZIALI

In questa sezione ci limitiamo a considerare lo spazio affine  $\mathbb{R}^3$  - dotato delle proprietà di varietà differenziale - ove non specificato diversamente.

**DEFINIZIONE 4.7.1. - OPERATORE NABLA .**

L'operatore **nabla** è una notazione matematica che semplifica la scrittura di diverse equazioni. In coordinate cartesiane su  $\mathbb{R}^3$ , si può immaginare un vettore puramente formale che contiene gli operatori delle derivate parziali nelle tre direzioni spaziali

(cartesiane):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \quad (4.32)$$

**ATTENZIONE!** L'operatore nabra assume significato soltanto quando viene *applicato*, come ad un campo scalare o ad un campo vettoriale. Ad esempio, una scrittura del tipo  $\vec{\nabla} + \vec{v}$  non ha alcun senso né fisico, né matematico.

L'operatore nabra ha tre possibili applicazioni, a seconda se viene moltiplicato per un campo scalare, oppure se moltiplicato con un campo vettoriale per mezzo del prodotto scalare o quello vettoriale.

**Cambio di coordinate** Anche se lo scriviamo come vettore formale,  $\vec{\nabla}$  si può anche vedere come *covettore* - un nome carino per dire le *forme lineari*. In particolare, le componenti di  $\vec{\nabla}$  cambiano come i covettori, cioè dobbiamo operare in modo covariante e utilizzare la *matrice* del cambiamento di base:

$$\frac{\partial}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.33)$$

## Gradiente

### DEFINIZIONE 4.7.2. - CAMPO SCALARE .

Un **campo scalare**  $\varphi$  è una funzione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \varphi(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.34)$$

dove  $(x, y, z)$  sono eventualmente funzioni del tempo.

Un campo scalare è quindi una mappa che a punti di  $\mathbb{R}^3$  associa valori scalari.

### DEFINIZIONE 4.7.3. - GRADIENTE .

Dato un campo scalare  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ , il **gradiente** è il campo vettoriale dato dall'applicazione della nabra tramite moltiplicazione per uno scalare a  $\varphi$ :

$$\vec{\nabla} \varphi = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi) \quad (4.35)$$

### ESEMPI.

- Se  $\varphi$  rappresenta l'*altitudine*,  $\vec{\nabla} \varphi$  è la discesa.
- Se  $\varphi$  rappresenta la *pressione* o la *temperatura*,  $\vec{\nabla} \varphi$  è la direzione in cui essa varia più rapidamente.

### DEFINIZIONE 4.7.4. - CAMPO CONSERVATIVO E POTENZIALE .

Dato un campo vettoriale  $\vec{E}$ , se esiste un campo scalare  $\varphi$  tale che  $\vec{E} = \vec{\nabla} \varphi$ , allora  $\vec{E}$  viene detto **conservativo** e la funzione  $\varphi$  è detta **potenziale**.

**OSSERVAZIONE.** Dato un campo scalare, esistono delle **superfici equipotenziali** tali per cui  $\varphi = \text{costante}$  sulla superficie. Il gradiente di  $\varphi$  è, punto per punto, ortogonale alla superficie equipotenziale.

**Spostamento infinitesimo e gradiente** Diamo una definizione alternativa del gradiente che ci tornerà più utile avanti. Si noti che il modulo, direzione e verso del gradiente è indipendente dal sistema di coordinate, in virtù della sua natura vettoriale. Fissati due punti infinitamente vicini, possiamo considerare il gradiente del campo scalare  $\varphi$  come il vettore tale che il prodotto scalare per il vettore spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$  dà la variazione di  $\varphi$  per tale spostamento.

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s} \quad (4.36)$$

dove  $d\varphi$  è matematicamente una 1-forma e si calcola tramite la derivata esterna, in coordinate:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx^i} dx^i \quad (4.37)$$

Questa definizione è *intrinseca* e non richiede alcun sistema di coordinate, e può essere utilizzato per ricavare anche l'espressione dell'operatore nabla in altre coordinate.

Per questioni operative conviene comunque servirsi di un sistema di coordinate e calcolare le componenti del gradiente in tale sistema.

## Divergenza

### DEFINIZIONE 4.7.5. - DIVERGENZA .

Dato un campo vettoriale  $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , la **divergenza** è il campo scalare dato dall'applicazione della nabla tramite prodotto scalare ad  $\vec{E}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z \quad (4.38)$$

**ESEMPIO.** Se  $\vec{E}$  rappresenta la velocità dell'aria in una certa regione di spazio,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  rappresenta quanta più aria sta "uscendo" da quella regione rispetto a quanta ne sta "entrando". Se scaldiamo l'aria, essa si espande, i vettori puntano verso l'esterno della regione e la divergenza è positiva; se raffreddiamo l'aria, l'aria si contrae e la divergenza ha un valore negativo.

## Rotore

### DEFINIZIONE 4.7.6. - ROTORE .

Dato un campo vettoriale  $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , il **rotore** è il campo vettoriale dato dall'applicazione della nabla tramite prodotto vettoriale ad  $\vec{E}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x) \quad (4.39)$$

Si definisce anche come il determinante formale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{vmatrix} \quad (4.40)$$

**ESEMPIO.** Supponiamo che  $\vec{E}$  rappresenta la velocità di un flusso d'acqua in una certa regione di spazio e di porre una pallina ruvida nel fluido, in modo che non si può spostare da tale punto. Anche se non si sposta da lì, il fluido fa comunque ruotare la pallina: l'asse di rotazione è nella direzione di  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  applicato al centro della palla, mentre la velocità angolare dipende dal modulo del rotore in tale punto. In altre parole, è una misura di come un fluido potrebbe ruotare (o meglio, far ruotare qualcosa a livello microscopico)

**DEFINIZIONE 4.7.7. - CAMPO IRROTAZIONALE .**

Un campo vettoriale  $\vec{E}$  viene detto **irrotazionale** se  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .

#### 4.7.1 Derivate seconde

Dato che dopo aver applicato l'operatore nabla otteniamo campi scalari o vettoriali, possiamo riapplicare l'operatore nabla come in precedenza per ottenere delle derivate seconde; alcune hanno particolare rilevanza perché sono importanti dal punto di vista matematico oppure perché sono costantemente nulle.

- i)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi = \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi$ , noto come **laplaciano**.
- ii)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$
- iii)  $\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$
- iv)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \varphi = 0$
- v)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
- vi)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \nabla^2 \vec{E}$ , dove  $\nabla^2 \vec{E} = (\nabla^2 \partial_x E, \nabla^2 \partial_y E, \nabla^2 \partial_z E)$  è il **laplaciano vettoriale**

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo ii) e iv).

ii)

$$\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{vmatrix} = (\partial_y \partial_z \varphi - \partial_z \partial_y \varphi) \hat{u}_x + (\partial_z \partial_x \varphi - \partial_x \partial_z \varphi) \hat{u}_y + (\partial_x \partial_y \varphi - \partial_y \partial_x \varphi) \hat{u}_z = 0$$

iv)

$$\begin{aligned} & (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\partial_y E_x - \partial_x E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x) = \\ & = \partial_x \partial_y E_z - \partial_x \partial_z E_y + \partial_y \partial_z E_x - \partial_y \partial_x E_z + \partial_z \partial_x E_y - \partial_z \partial_y E_x = 0 \end{aligned}$$

□

Definite le nostre derivate seconde, otteniamo una conseguenza quasi immediata.

**PROPOSIZIONE 4.7.1. - OGNI CAMPO CONSERVATIVO È IRROTAZIONALE .**

Ogni campo conservativo  $\vec{E}$  è irrotazionale.

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi$  per un opportuno potenziale  $\varphi$  definito a meno di costanti, allora si ha che

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 \quad \square$$

Concludiamo la discussione con alcuni teoremi non banali (e forniti senza dimostrazione) che seguono dalle derivate seconde qui definite

**TEOREMA 4.7.1. - OGNI CAMPO IRROTAZIONALE È CONSERVATIVO .**

Ogni campo irrotazionale  $\vec{E}$  è (localmente) conservativo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \implies \exists \varphi: \vec{E} = \vec{\nabla}\varphi \quad \square$$

**TEOREMA 4.7.2. - OGNI CAMPO CON DIVERGENZA NULLA È ROTORE .**

Ogni campo  $\vec{E}$  con divergenza nulla è pari al rotore di un opportuno campo vettoriale  $\vec{A}$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies \exists \vec{A}: \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \square$$

#### 4.8 OPERATORI DIFFERENZIALI E FORME DIFFERENZIALI

Consideriamo  $\mathbb{R}^n$  in coordinate cartesiane: questa è una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  con metrica l'identità, ossia  $g = \mathbb{I}$ .

**Gradiente** Dato un campo scalare  $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , il **gradiente** di  $\varphi$  è definito come il campo vettoriale  $\vec{\nabla}\varphi$  associato tramite l'isomorfismo musicale del diesis alla 1-forma  $d\varphi$ ,

$$\vec{\nabla}\varphi = (d\varphi)^\sharp \in \Omega^1(M), \quad (4.41)$$

dove  $d\varphi$  è il differenziale (o derivata esterna) della funzione  $\varphi$ .

**Paragraph** Il **rotore** di un campo vettoriale  $\vec{E}$  su  $\mathbb{R}^n$  è definito come la  $(n-2)$ -forma  $\text{rot}\vec{E}$  seguente:

$$\text{rot}\vec{E} = * \left( d[\underline{E}]^b \right) = * \left( d\underline{E} \right)$$

Questa è una generalizzazione del concetto del rotore ad  $n$  dimensioni. Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , il rotore è una 1-forma; pertanto il rotore vettoriale a noi noto è semplicemente il campo vettoriale che otteniamo applicando l'isomorfismo musicale del diesis a  $\text{rot}\vec{E}$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left( \text{rot}\vec{E} \right)^\sharp \quad (4.42)$$

**Divergenza** La **divergenza** di  $\vec{E}$  è definito come il campo scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{tr} \left\{ d\underline{E} \right\} \quad (4.43)$$

dove  $d\vec{E}$  è il differenziale della funzione.

Possiamo definire la divergenza in termini di operatore *star di Hodge*. Dato un campo vettoriale  $\vec{E} = E^i(\vec{r})\hat{u}_i$  su  $\mathbb{R}^3$ , l'isomorfismo musicale del bemolle definisce la sua 1-forma associata

$$\underline{E} = (\vec{E})^\flat = E_i(\vec{r})dx^i$$

Il suo duale di Hodge è la 2-forma

$$*\underline{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}E^i dx^j \wedge dx^k$$

dove  $\varepsilon_{ijk}$  è un simbolo di Levi-Civita.

La derivata esterna di  $*\underline{E}$  è la 3-forma

$$d*\underline{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_l E^i dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k$$

Il suo duale di Hodge è un campo scalare e coincide con la divergenza di  $\vec{E}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = *d*\underline{E} = \partial_i E^i \quad (4.44)$$

#### 4.8.1 Teorema di Stokes per forme differenziali

##### TEOREMA 4.8.1. - TEOREMA DI STOKES PER FORME DIFFERENZIALI .

Se  $\omega$  è una  $n$ -forma liscia con supporto compatto sulla varietà differenziabile e orientabile  $M$  di dimensione  $n + 1$ , dotata - sulla base dell'orientazione indotta da  $M$  - di un bordo pari ad una varietà differenziabile  $\partial M$  di dimensione  $n$ , allora

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

dove nel secondo integrale si intende, con un abuso di notazione, la restrizione sul bordo  $\partial M$  di  $\omega$  (o equivalentemente, è pari al pullback  $i^*\omega$  dove  $i: \partial M \hookrightarrow M$  è l'inclusione del bordo nella varietà).  $\square$

Da questo importante teorema si possono ricavare diversi risultati già noti, applicati tuttavia al mondo delle forme differenziali.

**Teorema del rotore per forme differenziali** Si può osservare che  $\vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{u}_n dA$  è una 2-forma che è pari a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{u}_n dA = *(\vec{\nabla} \times \vec{E})^\flat = d\vec{E}^\flat$$

Allora, il teorema del rotore per le forme differenziali diventa

$$\int_\Sigma d\vec{E}^\flat = \int_{\partial\Sigma} \vec{E}^\flat \quad (4.45)$$

**Teorema della divergenza per forme differenziali** Si può osservare che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$  è una 3-forma che è pari a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = d*\underline{E}$$

Allora, il teorema del rotore per le forme differenziali diventa

$$\int_V *d*\underline{E} = \int_{\partial V} \underline{E} \quad (4.46)$$

#### 4.9 COORDINATE POLARI E CILINDRICHE

In molti casi dove sono presenti evidenti simmetrie, le coordinate cartesiane possono complicare la trattazione del fenomeno fisico. A questo scopo introduciamo due sistemi di coordinate di frequente utilizzo: le **coordinate sferiche** e le **coordinate cilindriche**.

##### 4.9.1 Coordinate sferiche

###### DEFINIZIONE 4.9.1. - COORDINATE SFERICHE.

Le **coordinate sferiche** sono un sistema di coordinate per  $\mathbb{R}^3$  dove la posizione  $\vec{r}$  di un punto è specificato da tre numeri:

- La **distanza radiale**  $r$  dall'origine.
- L'**angolo polare** (latitudine)  $\theta$  tra la direzione verticale dello *zenith* - l'asse  $z$  positivo - e il vettore radiale.
- L'**angolo azimutale** (longitudine)  $\varphi$  - definito tra l'asse  $x$  positivo e la proiezione del vettore radiale sul piano  $xy$ , in senso antiorario.

Utilizzando i radianti, si pone  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$

La legge di trasformazione dalle coordinate sferiche alle coordinate cartesiane è

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (4.47)$$

Viceversa, si ha

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (4.48)$$

#### Basi e componenti vettoriali

**RICORDIAMO...** Dato un cambiamento di coordinate  $q^\lambda = q^\lambda(x^i)$ , la matrice del cambiamento di base è la matrice che ha sulle colonne i vettori della nuova base espressi in funzione della seconda. In *notazione di Einstein* essa è della forma

$$M = \left( \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \right) \quad (4.49)$$

dove  $i$  è l'indice di riga e  $\lambda$  quello di colonna.

Per passare dalla base riferita alle  $x^i$  alla nuova base riferita alle  $q^\lambda$  la formula è quindi

$$\vec{e}_\lambda = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \vec{E}_i \quad (4.50)$$

Invece, per cambiare le componenti dei vettori dobbiamo operare in modo controvariante e utilizzare la *matrice inversa* del cambiamento di base:

$$v^\lambda = \frac{\partial q^\lambda}{\partial x^i} V_i \quad (4.51)$$



Poniamo qui  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $q^1 = r$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = \varphi$ . Il vettore posizione in cartesiane è

$$\vec{r} = x^i \hat{u}_i = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z$$

Allora, il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  alla base sferica  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$  è

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \frac{\partial x^i}{\partial r} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z \\ \hat{e}_\theta = \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \hat{u}_x + r \cos \theta \sin \varphi \hat{u}_y - r \sin \theta \hat{u}_z \\ \hat{e}_\varphi = \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_x + r \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_y \end{cases} \quad (4.52)$$

Poiché

$$|\hat{e}_r| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 \quad |\hat{e}_\theta| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r \quad |\hat{e}_\varphi| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta, \quad (4.53)$$

il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  alla base *ortonormale* sferica  $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi)$  è

$$\begin{cases} \hat{u}_r = \frac{\hat{e}_r}{|\hat{e}_r|} = \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z \\ \hat{u}_\theta = \frac{\hat{e}_\theta}{|\hat{e}_\theta|} = \cos \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{u}_y - \sin \theta \hat{u}_z \\ \hat{u}_\varphi = \frac{\hat{e}_\varphi}{|\hat{e}_\varphi|} = -\sin \varphi \hat{u}_x + \cos \varphi \hat{u}_y \end{cases} \quad (4.54)$$

La matrice del cambiamento di base ortonormale  $M$  è una rotazione nelle tre dimensioni attorno all'origine, e la relazione di cui sopra si può scrivere matricialmente come

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Si osservi in particolare che  $M$  è *ortogonale*, quindi  $M^{-1} = M^T$ . Pertanto, il cambiamento delle componenti di un campo vettoriale  $\vec{E}$  dalle cartesiane alle sferiche è

$$(E_r \ E_\theta \ E_\varphi) = (E_x \ E_y \ E_z) M^{-1} = (E_x \ E_y \ E_z) M^T \quad (4.56)$$

**Elemento di linea** Lo spostamento infinitesimo da  $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$  a  $\vec{r} + d\vec{r} = (r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  è

$$d\vec{s} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \right| dq^i \hat{u}_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| dr \hat{u}_r + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| d\theta \hat{u}_\theta + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| d\varphi \hat{u}_\varphi = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{u}_\varphi \quad (4.57)$$

Essendo la metrica associata alle coordinate sferiche ortogonale, l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.58)$$

**Operatore nabla** L'operatore nabla, scritto in notazione versoriale cartesiana, è

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_x \hat{u}_x + \vec{\nabla}_y \hat{u}_y + \vec{\nabla}_z \hat{u}_z = \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \quad (4.59)$$

Le componenti dell'operatore dalle sferiche alle cartesiane sono:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_x = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{\nabla}_y = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{\nabla}_z = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (4.60)$$

Sostituendo in 4.59 i versori e le componenti dell'operatore nabla in coordinate sferiche, si ricava, dopo raccoglimenti e calcoli noiosi,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (4.61)$$

In modo alternativo, possiamo ricavare l'espressione 4.61 dalla definizione intrinseca di gradiente. Presa una funzione  $V$  arbitraria, inserendo lo spostamento infinitesimo 4.57 nella 4.36 si ricava

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi = \vec{\nabla}_r V dr + \vec{\nabla}_\theta V r d\theta + \vec{\nabla}_\varphi V r \sin \theta d\varphi,$$

da cui

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (4.62)$$

e quindi l'espressione dell'operatore nabla è quanto scritto nella 4.61.

#### 4.9.2 Coordinate cilindriche

##### DEFINIZIONE 4.9.2. - COORDINATE CILINDRICHE .

Le **coordinate cilindriche** sono un sistema di coordinate per  $\mathbb{R}^3$  dove la posizione  $\vec{\mathbf{r}}$  di un punto è specificato da tre numeri:

- La **distanza assiale**  $R$  tra l'asse verticale - asse  $z$  - e il punto  $\vec{\mathbf{r}}$
- L'**angolo azimutale** (longitudine)  $\varphi$  - definito tra l'asse  $x$  positivo e la linea sul piano  $xy$  dall'origine alla proiezione del punto  $\vec{\mathbf{r}}$ , in senso antiorario.
- L'**altezza**  $z$  in segno tra il piano  $xy$  e il punto  $\vec{\mathbf{r}}$ :

Utilizzando i radianti, si pone  $R \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $z \in \mathbb{R}$

La legge di trasformazione dalle coordinate sferiche alle coordinate cartesiane è

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ y = R \cos \theta \\ z = z \end{cases} \quad (4.63)$$

Viceversa, si ha

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \quad (4.64)$$

**Basi e componenti vettoriali** Poniamo qui  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $q^1 = R$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = z$ . Il vettore posizione in cartesiane è

$$\vec{\mathbf{r}} = x^i \hat{\mathbf{u}}_i = x \hat{\mathbf{u}}_x + y \hat{\mathbf{u}}_y + z \hat{\mathbf{u}}_z$$

Allora, il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$  alla base cilindrica  $(\hat{\mathbf{e}}_R, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z)$  è

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_R = \frac{\partial x^i}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial R} = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -R \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_x + R \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\partial x^i}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial z} = \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases} \quad (4.65)$$

Poiché

$$|\hat{\mathbf{e}}_R| = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial R} \right| = 1 \quad |\hat{\mathbf{e}}_\theta| = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \right| = R \quad |\hat{\mathbf{e}}_z| = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial z} \right| = 1, \quad (4.66)$$

il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$  alla base *ortonormale* cilindrica  $(\hat{\mathbf{u}}_R, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_z)$  è

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_R = \frac{\hat{\mathbf{e}}_R}{|\hat{\mathbf{e}}_R|} = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{|\hat{\mathbf{e}}_\theta|} = -\sin \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{|\hat{\mathbf{e}}_\varphi|} = \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases} \quad (4.67)$$

La matrice del cambiamento di base ortonormale  $M$  è una rotazione assiale attorno all'asse  $z$  in senso antiorario, e la relazione di cui sopra si può scrivere matricialmente come

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_R \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Si osservi in particolare che  $M$  è *ortogonale*, quindi  $M^{-1} = M^T$ . Pertanto, il cambiamento delle componenti di un campo vettoriale  $\vec{\mathbf{E}}$  dalle cartesiane alle cilindriche è

$$(E_r \ E_\theta \ E_\varphi) = (E_x \ E_y \ E_z) M^{-1} = (E_x \ E_y \ E_z) M^T \quad (4.69)$$

**Elemento di linea** Lo spostamento infinitesimo da  $\vec{\mathbf{r}} = (r, \theta, z)$  a  $\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}} = (r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$  è

$$d\vec{\mathbf{s}} = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial q^i} \right| dq^i \hat{\mathbf{u}}_i = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial R} \right| dR \hat{\mathbf{u}}_R + \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \right| d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial z} \right| dz \hat{\mathbf{u}}_z = dR \hat{\mathbf{u}}_R + R d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + dz \hat{\mathbf{u}}_z \quad (4.70)$$

Essendo la metrica associata alle coordinate cilindriche ortogonale, l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (4.71)$$

**Operatore nabla** Ricaviamo, per semplicità, l'espressione dell'operatore nabla dalla definizione intrinseca di gradiente. Presa una funzione  $V$  arbitraria, inserendo lo spostamento infinitesimo 4.70 nella 4.36 si ricava

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla}_R V dR + \vec{\nabla}_\theta V R d\theta + \vec{\nabla}_z V dz,$$

da cui

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (4.72)$$

e quindi l'espressione dell'operatore nabla è

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (4.73)$$