

MASSIMO BERTOLOTTI

fatto di sangue

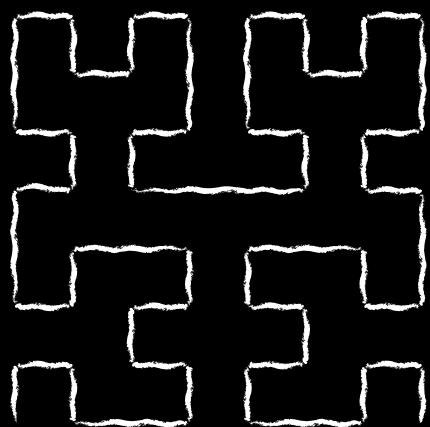
**FRA DUE ANALISTI  
PER CAUSA DI UN INTEGRALE**

si sospettano moventi misurabili



$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Manualozzo™ di Fisica 2

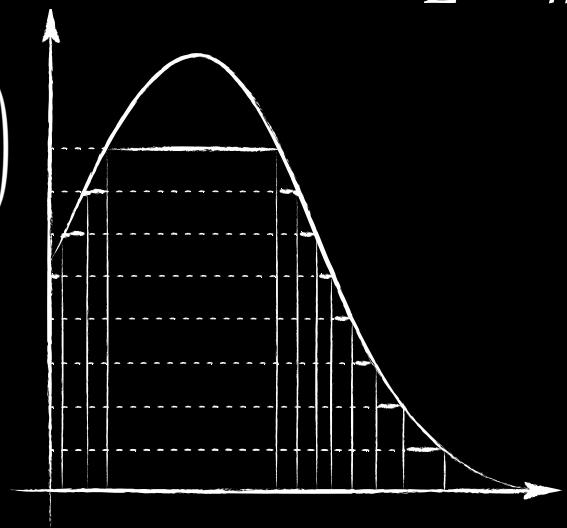


$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$E = mc^2$$

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu (A_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$





# INTRODUZIONE AL MANUALOZZO™

---

*“Sai, per essere un matematico non aveva abbastanza immaginazione; ma ora è diventato un poeta e se la cava davvero bene.”*

*DAVID HILBERT, riferendosi a ~~Marino Badiale~~ all'autore del Manualozzo™.*

Guardando la copertina di questo testo, dei potenziali lettori - sì, parlo con voi - si potrebbero chiedere: “Ma che diamine è un *Manualozzo™*?”

**M**ANUALOZZO™ s. m. [der. di *manuale*, col suff. *-ozzo*]. - Appunti di lezioni universitarie scritti da studenti, senza troppe pretese di formalità e potenzialmente non totalmente corretti, ma sono comunque meglio che niente.<sup>1</sup>

Dunque, quello che state leggendo è il **Manualozzo™ di Fisica 2**, appunti a quattro mani basati sull'omonimo corso tenuto dai docenti Lorenzo Bianchi e Lorenzo Magnea nell'a.a. 2021-2022 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.

Questo testo ripercorre le scoperte scientifiche e le rivoluzioni epistemologiche che caratterizzarono la fisica dell'Ottocento e dei primi del Novecento.

Nella prima parte raggiungeremo l'*apice* della *Fisica classica*, esplorando estensivamente una delle sue teorie più raffinate, l'**elettromagnetismo**; a ciò segue un breve ma fondamentale excursus sulle **onde** (elettromagnetiche).

Invece, nella seconda parte metteremo in *crisi* quanto visto prima: partendo da alcune incongruenze irrisolvibili con la Fisica classica, introdurremo la teoria della **relatività speciale** e alcuni cenni di **fisica quantistica**.

I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di **ANALISI MATEMATICA UNO, DUE e FISICA UNO** - con qualche nozione di **GEOMETRIA 3 e MECCANICA RAZIONALE**.

Ma il *Manualozzo™* non è una mera sbobinatura delle lezioni: in aggiunta agli argomenti trattati nella teoria, potrete trovare a fine libro delle utili *postille* con alcune digressioni interessanti, nonché tabelle ed elenchi riepilogativi dei teoremi, delle definizioni e delle proprietà affrontate - il tutto, ovviamente, in Technicolor™. Purtuttavia, ci duole ammetterlo, gli autori non sono *esseri infallibili*: saranno sicuramente sfuggiti degli errori (o degli *orrori*, la cui causa è solamente degli autori che non hanno studiato bene e assolutamente non dei professori), per cui ogni segnalazione - direttamente agli autori se ancora in vita oppure su <https://maxmaci.github.io> - è ben gradita, in modo da migliorare le future edizioni del *Manualozzo™*.

---

<sup>1</sup>Nota per l'ufficio legale: il ™ in *Manualozzo™* non è legalmente vincolante - per il momento.

Prima edizione, compilato il 16 luglio 2022.



This work is licensed under a Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International.

## NOTE PER GLI ENVIRONMENT

Se alcuni professori sono noti per abusare le notazioni, i Manualozzi sono noti per abusare di *environment* - gli ambienti colorati che vedrete in queste pagine; di seguito ci sono alcune informazioni su di essi.

*Teoremi, proposizioni, lemmi e corollari* possono essere seguiti da una *dimostrazione*, come nell'esempio di seguito...

### TEOREMA 0.0.1. - CARDINALITÀ DEI RAZIONALI.

*Ci sono più numeri razionali che interi.*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione si basa sulla congettura che tutti gli interi siano razionali; mostriamo il teorema per 0, gli altri  $\aleph_0$  casi sono analoghi.

Dato 0, basta prendere  $1/2$ : questo è banalmente un razionale - convincetevi che questo sia vero! In questo modo, abbiamo trovato due razionali di cui uno non intero.  $\square$

... oppure essere forniti *senza* dimostrazione e quindi nell'enunciato troverete alla fine il simbolo  $\square$ :

### COROLARIO 0.0.1. - ULTIMO TEOREMA DI FERMAT.

*Sulla base del teorema precedente vale immediatamente per confronto l'ultimo teorema di Fermat.*  $\square$

Nelle sezioni "Eserciziamoci!" potrete invece trovare esercizi con corrispettive soluzioni: sono simili talvolta a dei risultati teorici, ma tendono ad essere più applicativi.

Alcuni degli *environment* più comuni dopo questi sono le *osservazioni* e gli *esempi*, che sono autoesplicativi. Ci sono anche altri *environment*, meno comuni, fra cui...

**DIGRESSIONE.** Sono argomenti *non prettamente trattati* in questo corso che, tuttavia, hanno un legame con esso: possono *aggiungere informazioni* e punti di vista a qualcosa visto nei corsi precedenti oppure fornire delle *anticipazioni* per dei corsi futuri.

**ATTENZIONE!** Sono delle osservazioni mirate e rivolte spesso a segnalare *errori* frequenti, dovuti principalmente a proprietà che *non* si verificano in quel dato tangente.

**INTUITIVAMENTE...** Sono delle interpretazioni *euristiche* di una definizione difficile o di un risultato ostico che possono aiutare a capire il perché di tale cosa - per quanto non siano sempre valide a livello formale.

## NOTE PER GLI ELENCHI DELLE DEFINIZIONI E DEI TEOREMI

In fondo al Manualozzo si possono trovare degli elenchi con tutte le definizioni, assiomi e risultati teorici visti: ognuno di essi è indicato nel formato **X#.##. TITOLO**, dove X è una *sigla* per indicare il tipo di definizione/risultato, mentre **#.##.** individua il *capitolo*, la *sezione* e il *numero* per quell'oggetto nella sezione. I significati delle sigle sono elencati di seguito:

- **A:** Assioma.
- **D:** Definizione.
- **T:** Teorema.
- **PR:** Proposizione.
- **L:** Lemma.
- **C:** Corollario.
- **PT:** Proprietà.

# INDICE

---

INDICE iv

## I ELETTRICITÀ 1

1	IL CAMPO ELETTROSTATICO	3
1.1	I primi studi sull'elettricità	4
1.2	Legge di Coulomb	7
1.3	Formalismo dei campi vettoriali	9
1.4	Il campo elettrostatico	10
1.5	Il dipolo elettrico	12
1.6	Distribuzioni continua di carica	16
2	IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E LA LEGGE DI GAUSS	25
2.1	Il flusso di un campo vettoriale	25
2.2	Legge di Gauss	26
2.3	Applicazioni della legge di Gauss	31
2.4	Equilibrio in un campo elettrostatico	36
3	LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO, IL POTENZIALE ELETTRICO E LE LEGGI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA	39
3.1	La circuitazione di un campo vettoriale	39
3.2	Forze conservative e campi vettoriali conservativi	39
3.3	Il potenziale elettrico	42
3.4	Discontinuità di campo elettrico tra superfici	47
3.5	Le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica nel vuoto	52
3.6	L'equazione di Poisson e di Laplace	54
4	CONDUTTORI E CONDENSATORI	59
4.1	Conduttori	59
4.2	Capacità di un conduttore	62
4.3	Conduttore cavo	63
4.3.1	Il conduttore cavo con carica	65
4.4	Condensatori	69
4.5	Il lavoro di carica di un condensatore e l'energia immagazzinata nel condensatore	71
4.6	Energia del campo elettrostatico	72
4.7	Pressione elettrostatica	73

<b>5 CORRENTE ELETTRICA E CIRCUITI ELETTRICI</b>	<b>75</b>
5.1 Corrente elettrica	75
5.1.1 Intensità di corrente	77
5.1.2 Conservazione della carica e l'equazione di continuità	79
5.2 Legge di Ohm	81
5.2.1 Legge di Ohm nei conduttori metallici	83
5.3 Potenza dissipata da una resistenza	87
5.4 Forza elettromotrice	88
5.5 Circuiti elettrici	90
5.5.1 Condensatori in serie e in parallelo	92
5.5.2 Resistori in serie e in parallelo	94
5.5.3 Leggi di Kirchhoff	97
5.5.4 Circuiti RC e processo di carica di un condensatore	101
<b>6 PROPRIETÀ ELETTRICHE DELLA MATERIA</b>	<b>107</b>
6.1 Materiale dielettrici e condensatori	107
6.2 Polarizzazione	111
6.2.1 Campo elettrico generato dalla polarizzazione	115
6.3 Le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica nei materiali dielettrici	118

## II MAGNETISMO 121

<b>7 IL CAMPO MAGNETICO</b>	<b>123</b>
7.1 I primi studi sul magnetismo	123
7.2 Legge di Gauss per la magnetostatica	127
7.3 Interazioni con le cariche in moto	129
7.3.1 L'esperimento di Oersted	130
7.3.2 L'esperimento di Ampère	131
7.4 La forza di Lorentz	133
7.4.1 La forza di Lorentz con campo magnetico uniforme: il caso perpendicolare alla velocità	134
7.4.2 La forza di Lorentz con campo magnetico uniforme: il caso generale	135
7.4.3 Applicazioni della forza di Lorentz	135
7.4.4 Unità di misura del campo magnetico	138
7.5 Seconda legge di Laplace	139
7.6 Il momento meccanico di un circuito piano in un campo magnetico	140
7.6.1 Il caso generale	142
<b>8 IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO E LA LEGGE DI BIOT-SAVART</b>	<b>145</b>
8.1 Il flusso del campo magnetico per superfici aperte	145
8.1.1 Un esempio: la spira circolare vicino al magnete cilindrico	148
8.1.2 Unità di misura del flusso del campo magnetico	150
8.2 Prima legge di Laplace o legge di Biot-Savart	150
8.2.1 Campo magnetico generato da cariche puntiformi in moto	151
8.2.2 Campo magnetico generato da un filo: legge di Biot-Savart	152
8.2.3 Campo magnetico generato da un filo rettilineo (in)finito	153
8.2.4 Campo magnetico generato da una spira circolare	155
8.2.5 Solenoide	158

<b>9 LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO, LA LEGGE DI AMPÈRE E LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEL CASO STATICO</b>	<b>161</b>
9.1 La circuitazione del campo magnetico e legge di Ampère	161
9.1.1 Il caso con un filo infinito	161
9.1.2 Il caso con due fili infiniti	162
9.1.3 Il caso generale: legge (della circuitazione) di Ampère	162
9.2 Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica e la magnetostatica	167
9.2.1 Invarianza di gauge nell'elettromagnetostatica	167
<b>10 CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO E LE EQUAZIONI DI MAXWELL</b>	<b>173</b>
10.1 Legge di Faraday-Neumann-Lenz	174
10.2 Legge di induzione di Faraday	178
10.3 Autoflusso, autoinduzione e induttanza	179
10.4 Circuiti RL	181
10.5 Energia del campo magnetico	184
10.6 Legge della circuitazione di Maxwell-Ampère	184
10.6.1 Interpretazione fisica della corrente di spostamento	186
10.7 Equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo classico	188
10.7.1 Invarianza di gauge nell'elettromagnetismo	190
<b>11 OSCILLAZIONI ELETTRICHE E CORRENTI ALTERNATE</b>	<b>193</b>
11.1 Circuiti RLC	193
11.1.1 Circuiti LC	195
11.2 Elettrogeneratori	198
11.2.1 Spira mobile	198
11.2.2 Disco di Barlow	199
11.2.3 Generatori di corrente alternata	201
11.3 Motori	202
11.3.1 Spira mobile	202
11.3.2 ★ Disco di Barlow	203
11.4 Il metodo simbolico	204
11.5 Esempi di circuiti in corrente alternata	207
11.5.1 Resistore R	207
11.5.2 Induttore L	208
11.5.3 Condensatore C	210
11.5.4 Circuito RL in serie	211
11.5.5 Circuito RC in serie	212
11.5.6 Circuito LC in serie	213
11.5.7 Circuito RLC in serie	214
11.5.8 ★ Circuito RL in parallelo	216
11.5.9 ★ Circuito RC in parallelo	217
11.5.10 ★ Circuito LC in parallelo	218
11.5.11 ★ Circuito RLC in parallelo	219
<b>12 PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA</b>	<b>221</b>
12.1 Permeabilità magnetica e suscettività magnetica	221
12.2 Magnetizzazione	222
12.2.1 Campo magnetico generato dalla magnetizzazione	224
12.3 Le equazioni di Maxwell nei materiali	227

12.4 Fenomenologia dei ferromagneti	230
<b>III ONDE</b>	<b>233</b>
13 ONDE	235
<b>IV RACCOLTA DIFFERENZIATA</b>	<b>237</b>
A RACCOLTA DIFFERENZIATA: RICHIAMI DI GEOMETRIA E CALCOLO DIFFERENZIALE	239
A.1 ★ Varietà differenziabile	239
A.2 ★ Metrica	241
A.3 ★ Elemento di linea	243
A.4 ★ Elemento di area	244
A.5 ★ Elemento di volume	245
A.6 ★ Operatore star di Hodge	246
A.7 Operatori differenziali	246
A.7.1 Derivate seconde	249
A.7.2 Operatori differenziali in dimensioni maggiori	250
A.8 Teorema della divergenza e del rotore	251
A.9 Campi conservativi, irrotazionali e solenoidali	252
A.10 ★ Operatori differenziali e forme differenziali	254
A.10.1 Teorema di Stokes per forme differenziali	255
A.11 Coordinate sferiche e cilindriche	255
A.11.1 Coordinate sferiche	255
A.11.2 Coordinate cilindriche	258
B NOTE AGGIUNTIVE	261
B.1 Capitolo 7: magnetostatica	261
B.1.1 Area di una superficie delimitata da una curva piana chiusa	261
B.2 Capitolo 11: oscillazioni elettriche e correnti alternate	262
B.2.1 Fasori	262
C PROPRIETÀ VARIE ED EVENTUALI	265
C.1 Immagine e controimmagine	265
C.2 Modi di convergenza	266
C.3 Passaggio al limite sotto segno di integrale	267
D ELENCHI DELLE DEFINIZIONI E DEI TEOREMI	269
E RINGRAZIAMENTI	273
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>275</b>



I

ELETTRICITÀ



# CAPITOLO 1

## IL CAMPO ELETTROSTATICO

---

"Piper: Non so neanche i concetti base dell'elettricità.

Joel Luschek: Ripeti dopo di me: 'Non prendere la scossa'.

Piper: Non prendere la scossa.

Joel Luschek: Bene, ora hai il concetto base."

*ORANGE IS THE NEW BLACK.*

**L**A MECCANICA ci descrive come funziona un sistema soggetto ad una certa *forza*. Ad oggi, siamo riusciti a ricondurre tutte le forze ad alcune **interazioni fondamentali**; in ordine di magnitudine decrescente:

- (Nucleare) Forte.
- Elettromagnetica.
- (Nucleare) Debole
- Gravitazionale

Wow, sono *davvero poche!* Dov'è la frizione, la forza elastica, le reazioni vincolari, le forze chimiche che legano le particelle, gli urti tra palle del biliardo? Che ci crediate o no, *tutte* queste forze sono elettromagnetiche. E le altre interazioni fondamentali che fine fanno?

Le **interazioni (nucleari) forti** tengono uniti i *quark* che costituiscono neutroni e protoni, nonché legano assieme protoni e neutroni nel *nucleo atomico*, ma agiscono su una scala così piccola che risultano essere completamente impercettibili - pur essendo centinaia di volte più forti delle forze elettromagnetiche!

Le **interazioni (nucleari) deboli**, che riguardano certi procedimenti di decadimenti nucleari, hanno un nome autoesplicativo: sono forze a microscopico raggio d'azione *e* sono più deboli delle forze elettromagnetiche.

Non parliamo poi della **interazione gravitazionale**: essa è terribilmente debole nonostante abbia un *range* d'azione infinito, e la notiamo solamente in presenza di grandi, *enormi* concentrazioni di massa - i pianeti e le stelle. Se al posto delle forze elettriche l'atomo fosse tenuto assieme da forze gravitazionali, un singolo atomo di idrogeno sarebbe più grande dell'intero universo osservabile.

Quindi, non solo le **forze elettromagnetiche** sono quelle dominanti nella vita di tutti i giorni (sono potenti *e* hanno un *range* d'azione infinito), ma sono anche le sole che *al*

*momento* sono completamente spiegate da una teoria. Certo, c'è una teoria gravitazionale classica e relativistica, ma non ne esiste una soddisfacente in campo quantistico; per le forze deboli c'è una teoria popolare, ma ostica, e per le forti si sta facendo strada la *cromodinamica*... eppure, nessuna di queste teorie può vantare una verifica sperimentale definitiva. La cosa curiosa è che tutte queste teorie sperimentali si rifanno al modello perfetto, da emulare, delle *leggi (classiche) dell'elettromagnetismo*.

Anche se le prime osservazioni sui fenomeni elettromagnetici sono attribuite al filosofo greco Talete nel VI secolo a.C., fu grazie alle innumerevoli scoperte di Franklin, Coulomb, Ampère, Faraday, Volta e tanti altri che **James Clerk Maxwell** impacchettò tutto questo bagaglio scientifico in quattro, stupende formule matematiche - che probabilmente avrete visto per la prima volta su una discutibile maglietta di un fan sfegatato della Fisica.

Prima di arrivare a formulare tutte le equazioni di Maxwell, tuttavia, ci conviene fare un tour guidato attraverso la storia di questa disciplina, costruendo passo per passo queste leggi facendo le stesse osservazioni dei più famosi scienziati che lavorarono sull'elettromagnetismo - chiaramente, viste con degli strumenti matematici moderni. In questo capitolo, dopo un'excursus storico dello studio dei fenomeni elettrostatici introdurremo la **legge di Coulomb**; la seconda parte sarà più prettamente matematica e tratterà del **formalismo dei campi vettoriali** - introducendo diversi strumenti particolarmente utili ai nostri scopi.

### 1.1 I PRIMI STUDI SULL'ELETTRICITÀ

Già, ma... che significa il termine “**elettromagnetismo**”? La sua etimologia permette di svelare molte informazioni su come stati osservati in natura questi fenomeni:

- “Elettro” e “elettricità” derivano da *elettricus*, parola latina coniata nel 1600 da **William Gilbert** nel suo trattato *De Magnete*, derivata a sua volta dal termine *elektron*, “ambra” in greco: infatti, le popolazioni attorno al Mediterraneo sapevano che oggetti in ambra, se strofinati con il pelo di gatto o col vello di lana, erano in grado di attrarre oggetti leggeri come piume e pagliuzze.
- “Magnetismo” deriva da *magnētis lithos*, “pietra di Magnesia” in greco: sull’isola egea di Magnesia erano diffuse rocce di *magnetite*, un minerale feroso che in certi casi è capace di attrarre piccoli pezzetti di ferro.

**Elettrizzazione per strofinio** Il già citato Gilbert fu il primo a dare un certo rigore allo studio di questi fenomeni. Sperimentando sistematicamente con vari materiali, egli descrisse gli effetti delle **azioni elettriche per strofinio** - anche noto come **effetto triboelettrico**) - come segue:

- a) Due oggetti della stessa sostanza, dopo essere stati strofinati da un panno, si *respingono* se sono vicini l’un l’altro.
- b) Due oggetti di sostanze diverse possono *attrarsi* o *respingersi*, a seconda dei materiali presi; ad esempio, vetro e ambra si attraggono.
- c) Due oggetti che sono attratti separatamente da un terzo oggetto si respingeranno a vicenda.
- d) Un oggetto è attratto da un materiale e un’altro oggetto è respinto da quel materiale, allora i due oggetti si attraggono tra di loro.



Gilbert sperimentò tante combinazioni di materiali, ma non “pelo di gatto” e “polistirolo da imballaggio”. Immagino non avesse un gatto per farlo.

Da queste osservazioni Gilbert conclude l'esistenza di due tipi diversi di elettrizzazione, attribuite a **cariche elettriche** differenti.

**DEFINIZIONE 1.1.1. - CARICA ELETTRICA POSITIVA E NEGATIVA.**

Convenzionalmente, si dice che:

- Corpi come il vetro acquisiscono carica elettrica **positiva**, indicata con il segno più (+).
- Corpi come l'ambra acquisiscono carica elettrica **negativa**, indicata con il segno meno (-).

Sintetizzando quanto detto:

- Cariche elettriche *dello stesso segno* (+/+, −/−) si **respingono**.
- Cariche elettriche *di segno opposto* (+/−) si **attraggono**.

Il buon vecchio Gilbert si accorse anche che, seppur esistevano materiali (ambra, vetro, ebanite, bachelite...) che venivano elettrizzati per strofinio, altri (metalli, il corpo umano...) non venivano proprio elettrizzati. I primi li chiamò **isolanti**, i secondi **conduttori**.

**La struttura della materia e i fenomeni elettrostatici** Gilbert scrisse per bene tutte queste osservazioni nel suo trattato *De Magnete*, scritto nel 1600: all'epoca non poteva spiegare perché succedeva ciò che aveva descritto, ma noi grazie alla conoscenza della *struttura microscopica della materia* possiamo farlo. Senza perderci in tanti dettagli, la materia è fatta di **atomi**, tutti costituiti da tre particelle: **protoni  $p$** , **neutroni  $n$**  ed **elettroni  $e$** , rispettivamente di massa

- $m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27}$  kg
- $m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27}$  kg
- $m_e = \frac{1}{1840} m_p = 9,1091 \cdot 10^{-31}$  kg

Riprendendo la convenzione precedente, si vede che il protone ha carica *positiva*, mentre l'elettrone ha carica *negativa* e il neutrone non ha carica elettrica; ad oggi non è osservata alcuna carica elettrica più piccola di quella del protone o dell'elettrone - in altre parole, la carica elettrica è una grandezza **quantizzata**<sup>1</sup>. Indicheremo con  $-e$  la carica dell'elettrone  $e$ , in virtù della quantizzazione della carica elettrica, la chiameremo **carica elementare**, mentre con  $+e$  indicheremo la carica del protone.

Il **nucleo**, costituito da protoni e neutroni, sta saldamente assieme grazie all'interazione nucleare forte che sovrasta le azioni repulsive delle cariche positive, che tra l'altro rendono il nucleo *carico positivo*. Attorno al nucleo orbitano, attratte da forze elettriche, gli *elettroni*: queste particelle sono in numero pari al numero di protoni nel nucleo  $e$ , a differenza di essi, sono molto più liberi di muoversi nello spazio circostante il nucleo. Si osserva che l'atomo è, nel suo complesso, *elettricamente neutro*, dato che la carica del protone  $e$  dell'elettrone è uguale in modulo e la carica complessiva. Questo è estremamente importante per la struttura della materia; se non ci fosse questa *cancellazione*<sup>2</sup> della carica, saremmo soggetti a forze estreme: una patata esploderebbe violentemente se ci fosse anche solo una cancellazione imperfetta dell'ordine di una parte su  $10^{10}$ .

Sostanze diverse hanno legami più o meno deboli tra il nucleo e gli elettroni, in particolari quelli periferici. Cosa succede, a livello microscopico, con l'elettrizzazione per strofinio? Il **contatto** tra i due corpi trasferisce *per mezzo meccanico* elettroni dello strato superficiale da un corpo all'altro, dal corpo in cui sono meno fortemente legati verso quello in cui lo sono di più.

<sup>1</sup>La quantizzazione della carica è evidente a livello atomico e subatomico, ma diventa inapprezzabile se la non riescono a misurare variazioni dell'ordine della carica elementare - sperimentalmente si è visto intorno per carica sopra i  $200e$ . Negli esperimenti normali di elettrostatica la carica è di fatto una quantità continua.

<sup>2</sup>Per cancellazione non intendiamo che le carica si annichiliscono fisicamente, ma che i loro effetti si compensano, non producendo alcuna interazione "esterna".

- Negli **isolanti**, le cariche trasferite per strofinio rimangono *localizzate*. Gli isolanti **non** trasportano facilmente la carica.
- Nei **conduttori**, le cariche elettriche negative sono *libere di muoversi* e **non** rimangono localizzate. I conduttori trasportano facilmente la carica.

In altre parole, le forze elettriche sono una manifestazione fondamentale delle particelle atomiche (cariche) che costituiscono la materia, ma si manifestano a livello *macroscopico* quando viene disturbata la simmetria naturale tra cariche positive e negative presenti negli atomi. Possiamo, in particolare, enunciare il seguente principio.

**PRINCIPIO 1.1.1. - PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DELLA CARICA.**

Poiché la *carica totale* di un corpo è data dalla *somma algebrica* di tutte le cariche, in un sistema *elettricamente isolato* la carica totale rimane costante nel tempo, ossia si *conserva*.

**Induzione elettrostatica** L'effetto triboelettrico che abbiamo visto è un caso particolare di **elettrizzazione per contatto**; tuttavia, si possono caricare corpi anche senza alcun contatto diretto, come accade con l'**induzione elettrostatica**

Avviciniamo ad un *conduttore C*, preso elettricamente scarico e sostenuto da un supporto isolante, un corpo carico *D* - ad esempio, carico positivamente. Il corpo carico esercita delle *forze elettriche* sulle cariche microscopiche presenti sul conduttore; gli *elettroni* nel conduttore sono liberi di muoversi sulla superficie e si dispongono nella zona di *C* più vicina al corpo carico, mentre la parte del conduttore più distante da *D* risulterà carica positivamente<sup>3</sup>. La carica complessiva del conduttore è, per conservazione della carica, sempre nulla, ma le cariche sono distribuite in modo non uniforme: convenzionalmente, pur essendo l'eccesso di cariche positive in una parte del conduttore dovuto al moto delle cariche negative, diremo che le cariche positive si sono spostate nella zona di *C* a maggior distanza da *D*.

Se collegassimo il conduttore *C* ad un conduttore *T* molto più esteso di *C*, ad esempio la Terra, di fatto si creerebbe un unico conduttore *C+T* praticamente infinito per i nostri scopi. In questo caso, le cariche positive si allontanerebbero molto da *D*; se interrompessimo il collegamento del conduttore a *T* il conduttore *C* resta carico negativamente - basta allontanare *D* per ottenere *C* negativo con distribuzione uniforme di carica.

**Misura delle cariche elettriche: l'elettroscopio a foglie** Abbiamo detto che la carica elettrica è una grandezza quantizzata... ma non abbiamo ancora parlato di come definirla esattamente, né di come *misurarla!* Al momento, ne diamo una definizione operativa, tramite **l'elettroscopio a foglie**

Dato un contenitore isolante e trasparente si consideri un asta metallica che lo penetra in un foro in modo da rimanere bloccata. All'estremità inferiore, internamente al recipiente, sono appese due sottilissime foglioline metalliche - generalmente d'oro - liberi di ruotare attorno all'asse orizzontale dell'asta. Se l'asta metallica è scarica, le foglioline sono verticali per effetto della gravità.

Toccando l'asta con un corpo carico, essa si carica e parte della corrente posseduta dall'asta si dispone sulle foglioline. Poiché le foglioline sono cariche dello stesso segno, si respingono e divergono dalla verticale di un angolo  $\alpha$  che può opportunamente misurato con una scala graduata: abbiamo creato uno strumento in grado di rilevare la presenza

<sup>3</sup>Chiaramente, se il corpo *D* fosse carico negativamente accaderebbe l'opposto: gli elettroni in *C* sarebbero respinti per l'interazione elettrica e si disporrebbero lontani dal corpo carico, rendendo positiva la zona vicina a *D*.

di cariche elettriche. Possiamo allora dare la seguente definizione *operativa* di carica elettrica.

**DEFINIZIONE 1.1.2. - DEFINIZIONE OPERATIVA DI CARICA ELETTRICA.**

Se due corpi uguali, toccando l'asta di un elettroscopio a foglie inizialmente scarico, fanno ruotare le foglioline di uno stesso angolo  $\alpha$ , allora hanno la stessa carica  $q$ .

Potremmo fornire già in questa maniera un'opportuna unità di misura, ma non è particolarmente utile e non è compatibile con la filosofia di molti sistemi di unità di misura. Tuttavia, per dare una possibile definizione *non* operativa, dobbiamo quanto meno parlare dell'interazione elettrostatica.

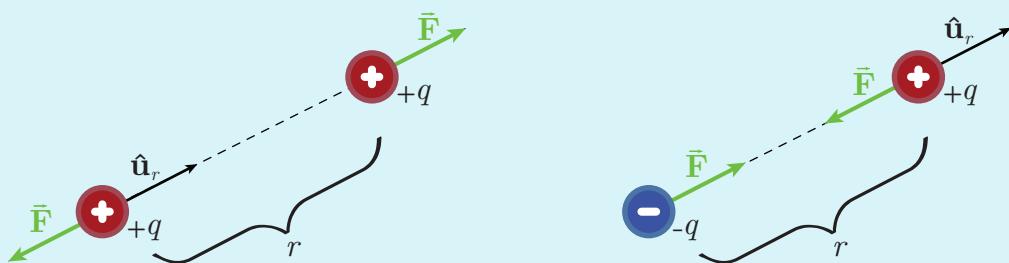
## 1.2 LEGGE DI COULOMB

Corpi carichi si attraggono o si respingono, a qualunque distanza, a seconda della loro carica: più sono vicini e più sono carichi, maggiore è questa attrazione/repulsione. Questa descrizione qualitativa delle forze di natura elettrostatica era già nota da Gilbert, ma per averne una *quantitativa* dobbiamo aspettare quasi duecento anni. Nel 1785, il fisico francese **Charles Augustin de Coulomb** pubblicò la sua memoria *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal*, in cui stabilì, mediante l'uso di una bilancia di torsione analoga a quella di Cavendish per la misura delle forze gravitazionali, una legge matematica per la descrizione dell'interazione elettrostatica.

**DEFINIZIONE 1.2.1. - LEGGE DI COULOMB.**

Date due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$ , poste a distanza  $r$  nel vuoto, interagiscono con una forza  $F$  diretta secondo la loro congiungente data da

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.1)$$



**OSSERVAZIONI.**

- $\vec{F}$  è la forza che  $q_1$  esercita su  $q_2$ ; la forza che  $q_2$  esercita su  $q_1$  è  $-\vec{F}$ .
- $k$  è una costante di proporzionalità detta **costante di Coulomb** che dipende dalle unità di misura.
- $\hat{u}_r$  è il versore del vettore distanza  $\vec{r}$  dalla carica  $q_1$  alla carica  $q_2$ .
- $q_1 q_2$  è il prodotto delle due cariche: se hanno lo stesso segno, la forza è *repulsiva* perché  $\vec{F}$  ha lo stesso verso di  $\hat{u}_r$ , altrimenti se hanno segno opposto è *attrattiva* perché hanno versi discordi.

**Unità di misura della carica elettrica** Non abbiamo ancora dato per bene un'unità di misura della carica elettrica. Potremmo basarci proprio sulla legge di Coulomb e definirla in modo che  $k = 1$  e che la carica unitaria è tale che, se posta a distanza unitaria da un'altra carica unitaria, essa subisce una forza unitaria (come accade nel *sistema centimetro-grammo-secondo o c.g.s.*).

Nonostante alcuni evidenti vantaggi teorici nell'utilizzare il sistema c.g.s., noi utilizzeremo per ragioni anche soprattutto storiche, l'unità di misura della carica elettrica prevista dal **SI**, il **coulomb** (C).

Non è un'unità fondamentale, bensì è definito come A s, ossia come la carica che attraversa in un secondo un conduttore percorso dalla corrente di un ampere. Non sapendo ancora che cosa sia la corrente elettrica, né tanto meno un'ampere, non approfondiremo qui la definizione.

#### UNITÀ DI MISURA.

**CARICA ELETTRICA:** coulomb (C) o ampere per secondi (A s).

**Dimensioni:**  $[q] = [I][s] = \text{IT}$ .

Sta di fatto che è una misura estremamente "sbagliata", quanto meno per i problemi che trattiamo. Ad esempio, la tipica carica da strofinamento è dell'ordine di  $10 \times 10^{-7}$  C - dobbiamo impegnarci molto per fare un Coulomb! Generalmente utilizziamo dei suoi *sottomultipli*, ad esempio:

- *millicoulomb*:  $1 \text{ mC} = 10^{-3} \text{ C}$ .
- *microfarad*:  $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$ .

Nel **SI**, la costante  $k$  della legge di Coulomb viene posta a

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \quad (1.2)$$

dove  $\epsilon_0$  è detta **costante dielettrica del vuoto** e assume il valore

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2 \text{ m}^2}{\text{N}} \quad (1.3)$$

La legge di Coulomb 1.1 assume la forma

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.4)$$

**Legge di Coulomb e legge di gravitazione universale** Come si vede immediatamente, la legge di Coulomb è analoga - a livello di formula - alla **legge di gravitazione universale**:

$$\vec{F} = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.5)$$

dove  $G_N$  è la **costante di gravitazione universale**.

$$G_N = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \quad (1.6)$$

Tuttavia, a livello di forze sono profondamente differenti, come il seguente esempio mette in evidenza.

**ESEMPIO.** La forza di Coulomb tra due cariche uguali per strofinio, poste a distanza di  $r = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$  è, in modulo

$$F = k \frac{q^2}{r^2} \simeq 9 \cdot 10^9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-14} \text{ N} \simeq 0,9 \text{ N}$$

La forza gravitazionale in condizioni simili, prese due masse  $m = 1 \text{ hg} = 10^{-1} \text{ kg}$  alla stessa distanza  $r$  di prima, è

$$F = G_n \frac{m^2}{r^2} \simeq 7 \cdot 10^{-17} \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} \text{ N} \simeq 7 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

La forza di attrazione gravitazionale è molto più debole della forza attrattiva elettrostatica!

**Principio di sovrapposizione per forze** Le forze elettriche agenti su una carica  $q_0$  dovute alle cariche circostanti si comportano come vettori; è immediato supporre che vige un **principio di sovrapposizione**.

**PRINCIPIO 1.2.1. - PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER FORZE ELETTROSTATICHE.**

La forza elettrostatica agente su una carica  $q_0$  da un sistema di cariche è data dalla somma vettoriale delle singole interazioni tra  $q_0$  e ciascuna carica del sistema.

### 1.3 FORMALISMO DEI CAMPI VETTORIALI

Il problema fondamentale che la teoria dell'elettromagnetismo vuole risolvere è il seguente: se ho delle cariche elettriche *qui*, magari muovendoli in giro, cosa succede a delle cariche *lì*?

La trattazione di un problema simile con le sole forze, come si farebbe in un qualunque corso di FISICA I, non è necessariamente la più vantaggiosa: in particolare, quando le cariche cominciano a muoversi, le forze tra di loro cambiano perché cambiano le posizioni nel tempo... e dovremo anche tenere conto degli effetti di magneti sul moto delle cariche!

È necessario un cambio di punto di vista, dove le forze ci sono ancora, ma non consideriamo *soltanto* loro. La soluzione classica ottocentesca assume la forma di una **teoria di campo**. In estrema sintesi, lo spazio attorno ad una carica elettrica è permeata da campi elettrici e magnetici: una seconda carica, in presenza di questi campi, subisce una forza; i campi, in altre parole, trasmettono l'influenza di una carica sull'altra e sono i portatori dell'interazione elettromagnetica. I fenomeni elettromagnetici si modificano in base all'interazione tra i campi, le particelle in movimento e altro.

**DEFINIZIONE 1.3.1. - CAMPO VETTORIALE.**

Un **campo vettoriale**  $\vec{G}$  è una funzione

$$\vec{G} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (G_x(x, y, z), G_y(x, y, z), G_z(x, y, z)) \end{array} \quad (1.7)$$

dove  $(x, y, z)$  sono eventualmente funzioni del tempo.

**NOTAZIONE.** In notazione vorsoriale, un campo vettoriale è

$$\vec{G}(x, y, z) = G_x \hat{\mathbf{u}}_x + G_y \hat{\mathbf{u}}_y + G_z \hat{\mathbf{u}}_z \quad (1.8)$$

**ESEMPI.**

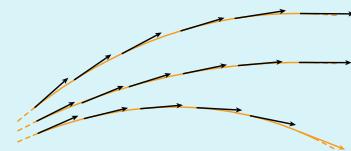
- $\vec{E}$  indica il **campo elettrico**.
- $\vec{B}$  indica il **campo magnetico**.

**Linee di campo** Potremmo rappresentare un campo vettoriale disegnando in ogni punto<sup>4</sup> di  $\mathbb{R}^3$  il vettore ad esso associato da  $\vec{G}$ . In alternativa, possiamo disegnare delle curve dette **linee di campo**.

**DEFINIZIONE 1.3.2. - LINEA DI CAMPO.**

Una linea di campo di  $\vec{G}$  è una curva

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \vec{r}(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$



tale per cui in ogni suo punto il vettore tangente alla curva è il vettore dato da  $\vec{G}$ :

$$\dot{\gamma}(t) = \vec{G}(\gamma(t)), \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

In generale, le linee di campo sono soluzioni  $\vec{r} = (x, y(x), z(x))$  del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{G_y}{G_x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{G_z}{G_x} \end{cases} \quad (1.11)$$

#### 1.4 IL CAMPO ELETROSTATICO

Un campo vettoriale è quindi una mappa che a punti di  $\mathbb{R}^3$  associa vettori tridimensionali. In questo formalismo, la forza di Coulomb si può vedere come il vettore in un certo punto di un campo vettoriale detto **campo elettrostatico**.

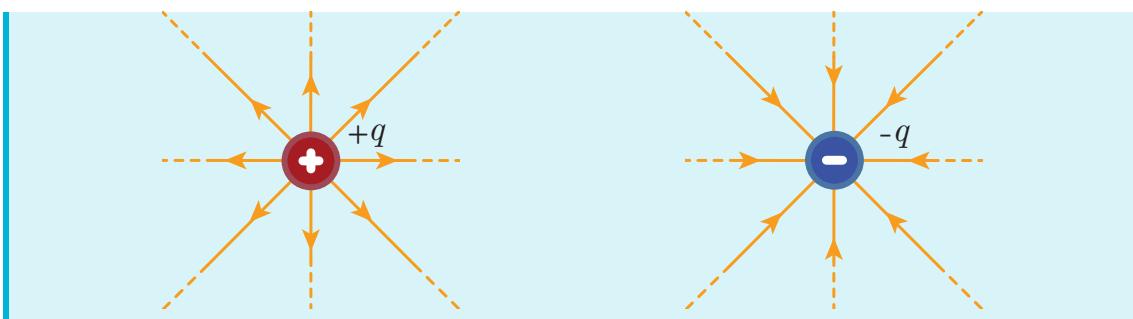
**DEFINIZIONE 1.4.1. - CAMPO ELETROSTATICO.**

Il **campo elettrostatico** generato da un sistema di cariche  $q_i$  ferme associa ad ogni punto dello spazio una forza pari alla forza elettrica che agisce su una **carica di prova**  $q_0$  positiva posta in quel punto, divisa per la carica stessa:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.12)$$

dove  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$  e  $\hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ .

<sup>4</sup>“Disegnando in ogni punto” è un’affermazione iperbolica: oltre che essere impossibile da realizzare fisicamente - ci sono infiniti punti nello spazio! - tale disegno risulterebbe un ammasso indistinguibile di frecce. Chiaramente dobbiamo limitarci ad un *numero decente di vettori* in modo da far comprendere l’andamento del campo, sapendo comunque che anche dove non abbiamo disegnato i vettori esiste il campo.



**Unità di misura** Nel SI l'unità di misura del campo elettrico, essendo il rapporto tra una forza e una carica, è il **newton su coulomb** ( $\frac{N}{C}$ ). Più avanti vedremo un'altra unità di misura usata maggiormente nelle applicazioni pratiche.

#### UNITÀ DI MISURA.

**CAMPO ELETTRICO:** newton su Coulomb ( $\frac{N}{C}$ ).

**Dimensioni:**  $[E] = \frac{[F]}{[q]} = \text{LMT}^{-3}\text{I}^{-1}$ .

**Campo elettrostatico e forza di Coulomb** Si noti che dalla definizione segue ovviamente che la forza che  $q_0$  subisce si può esprimere in funzione del campo elettrostatico da

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (1.13)$$

Nella 1.12 abbiamo fatto uso di un **principio di sovrapposizione** per campi vettoriali.

#### PRINCIPIO 1.4.1. - PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER CAMPI ELETTROSTATICI.

Il campo elettrico generato da un sistema di cariche è data dalla *somma vettoriale* dei campi elettrici generati da ciascuna carica del sistema.

Preso il caso di una singola carica  $Q$  posta nell'origine, il campo elettrico generato da  $Q$  è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

#### ESEMPIO - LINEE DI CAMPO DELLA FORZA DI COULOMB.

Data una carica  $Q$  posta nell'origine del nostro sistema di riferimento, il campo elettrico di Coulomb nel piano è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x, y)$$

Posto

$$dx = \dot{x}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$dy = \dot{y}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \implies \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} \implies \log \frac{x}{x_0} = \log \frac{y}{y_0} \implies y = \frac{y_0}{x_0} x$$

Dalle condizioni al contorno  $(0, 0)$  e  $(x_0, y_0)$  si ricavano le linee di forza del campo coulombiano: è un fascio di rette passanti per l'origine del sistema di riferimento.

**OSSERVAZIONE.** Notiamo che la forza di Coulomb esercitata da una singola carica  $Q$  posta nell'origine presenta un'evidente simmetria radiale; la stessa definizione 1.1 è già di fatto fornita in coordinate sferiche! Allora, il campo elettrostatico in coordinate sferiche è dato da

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

ossia coincide con la componente radiale, dato che  $E_\varphi = E_\theta = 0$ .

## 1.5 IL DIPOLO ELETTRICO

Consideriamo due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$ , rispettivamente fisse in  $\vec{\mathbf{r}}_1 = (0, 0, z_0)$  e  $\vec{\mathbf{r}}_2 = (0, 0, -z_0)$ . I campi elettrici generati dalle singole cariche sono, in un generico punto  $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ ,

$$\vec{\mathbf{E}}_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1|^2}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2|^2}$$

Il campo elettrico complessivo è dato da

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2|^3} \right) \quad (1.14)$$

Dato che

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1 = (x, y, z - z_0) \\ \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2 = (x, y, z + z_0) \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \\ E_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \\ E_z(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_1 \frac{z - z_0}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} + q_2 \frac{z_0}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Se consideriamo  $q_1$  e  $q_2$  di carica uguale a  $q$  e di segno opposto (per esempio,  $q_1 = q$  e  $q_2 = -q$ ) abbiamo a che fare con il sistema detto **dipolo elettrico**.

**Momento di dipolo elettrico** Al dipolo possiamo associare il **momento di dipolo elettrico**.

**DEFINIZIONE 1.5.1. - MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO.**

Il **momento di dipolo elettrico** è una misura della separazione di cariche positive e negative in un sistema. In altre parole, misura la *polarità* di un sistema elettrostatico.

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (1.15)$$

dove  $d$  è il vettore spostamento dalla carica negativa alla carica positiva-

Nel nostro caso, il modulo del momento di dipolo è  $p = 2qz_0$ .

**DIGRESSIONE.** Lo studio del dipolo elettrico è di particolare rilievo: ad esso sono riconducibili le interazioni elettrostatiche più semplici a cui sono soggetti i sistemi *microscopici elettricamente neutri*, come atomi e molecole non ionizzate.

Un esempio di ciò, anche se poco più complesso, è quello della molecola dell'acqua: è detta *polare* in quanto gli elettroni condivisi sono distribuiti in modo non uniforme; c'è una concentrazione di carica negativa nel mezzo, presso l'atomo d'ossigeno, mentre agli estremi è positiva.

Vedremo come il momento di dipolo ha particolare rilievo soprattutto quando la distanza tra le cariche è così piccola che non è facilmente misurabile, oppure quando parleremo di dielettrici.

**Studio del campo di dipolo** Vogliamo descrivere il campo elettrostatico generato tramite vettori e tramite le linee di campo.

**OSSERVAZIONE.** Il sistema ha evidente natura *cilindrica*: ci basterebbe studiare il comportamento su un piano passante per l'asse  $z$  - ad esempio  $y = 0$ ; ciò che succede nello spazio si può capire con un'opportuna rotazione di tale piano.

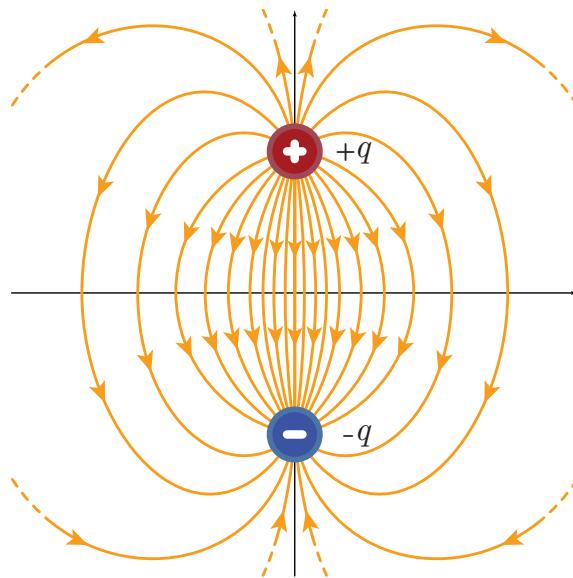
- Consideriamo il piano  $z = 0$ , ortogonale al dipolo e "a metà strada" tra le due cariche. Chiaramente,  $E_x = E_y = 0$ , dato che i denominatori sono uguali e i numeratori uguali, ma di segno opposto. Invece, si ha

$$E_z = \frac{-2qz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

- Consideriamo ora il piano  $z = z_0$  e  $y = 0$ . Si ha

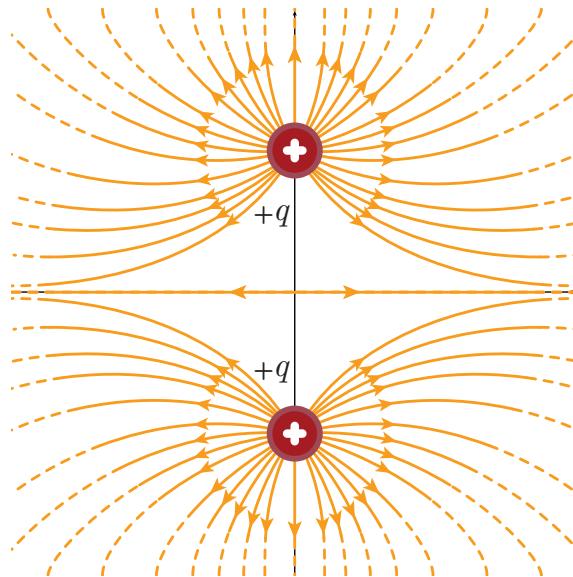
$$E_x = \frac{xq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x|^3} - \frac{1}{(x^2 + 4z_0^2)^{3/2}} \right) \quad E_y = 0 \quad E_z = \frac{-2qz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + 4z_0^2)^{3/2}}$$

Analizzando ulteriori casi si denotano, per il dipolo elettrico, le linee di campo come in figura.



**OSSERVAZIONE.** Dove il campo elettrico è *intenso*, la rappresentazione delle linee di campo è più densa, mentre si fa più rada dove il campo è *meno intenso*.

Se considerassimo  $q_1 = q_2 = +q$ , le linee di campo sarebbero come quelle nella seguente figura.



**OSSERVAZIONE.** Dalle formule di dipolo, si vede che  $\vec{E}$  è l'opposto del gradiente di un opportuno *potenziale*<sup>a</sup>  $V$ :

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right) \quad (1.16)$$

Vedremo nel Capitolo 3 che questo *non* è un caso: il potenziale elettrostatico è *sempre* un campo *conservativo*.

<sup>a</sup>Nelle "XXX", a pagina 247 è possibile trovare la definizione di gradiente e altri operatori differenziali.

**Campo di dipolo lontano** Cosa succede alle forze elettrostatiche e al campo elettrostatico se lo si osserva *a debita distanza* dal dipolo? Se siamo molto lontani dal sistema, diciamo a distanza  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = z_0$ , non ci sono molte distinzione pratiche fra due cariche distinte, opposte e distanti e considerare due cariche distinte, opposte ma *coincidenti*: di fatto, un dipolo da lontano appare come un *dipolo puntiforme* posto nell'origine. Seppur il problema del dipolo sia normalmente a simmetria cilindrica, è evidente che conviene trattare l'approssimazione a grandi distanze con le coordinate sferiche. Si ricordi dalla definizione delle coordinate sferiche che, denotato  $\theta$  come l'angolo polare tra l'asse  $z$  (positivo) e  $\vec{r}$ , si ha  $z = r \cos \theta$ . Allora

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_1| &= \left( x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 \right)^{1/2} = \underbrace{\left( x^2 + y^2 + z^2 + z_0^2 - 2z_0 z \right)^{1/2}}_{=r^2} = \left( r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta \right)^{1/2} \\ |\vec{r} - \vec{r}_2| &= \left( x^2 + y^2 + (z + z_0)^2 \right)^{1/2} = \underbrace{\left( x^2 + y^2 + z^2 + z_0^2 + 2z_0 z \right)^{1/2}}_{=r^2} = \left( r^2 + z_0^2 + 2z_0 r \cos \theta \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Il potenziale è

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( (r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{-1/2} - (r^2 + z_0^2 + 2z_0 r \cos \theta)^{-1/2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} - \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} + \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \right) \boxed{=} \end{aligned}$$

Poiché  $r \gg z_0$ , si può provare sviluppare in serie di Taylor la radice.

**RICORDIAMO...** Lo sviluppo in serie di Taylor della potenza alla  $\alpha$  del binomio  $1 + x$  è

$$(1 + a)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} a^k \quad (1.17)$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; l'uguaglianza vale solo  $\forall a \in (-1, 1)$ .

Possiamo limitarci allo sviluppo al primo ordine: posto  $a = \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r} < 1$ , si ha

$$\left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z_0^2}{r^2} \pm \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right) = 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} \mp \frac{z_0 \cos \theta}{r} + o(a^2)$$

Il potenziale diventa

$$\begin{aligned} \boxed{=} &\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} - \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{z_0^2}{r^2} + \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} + \frac{z_0 \cos \theta}{r} - \left( 1 - \frac{z_0^2}{2r^2} - \frac{z_0 \cos \theta}{r} \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2z_0 \cos \theta}{r} \end{aligned}$$

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{q2z_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (1.18)$$

L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento  $\vec{p}$  e *non*  $q$  e  $z_0$  separatamente: misurando il potenziale potremo ricavare solo informazioni su  $\vec{p}$ , ma non sulla costituzione del sistema!

**ESEMPIO.** Un dipolo costituito da due cariche  $2q$  e  $-2q$  e distanza dall'origine  $z_0/2$  hanno momento di dipolo uguale a quello appena studiato e pertanto anche stesso potenziale e campo elettrico.

Calcoliamo ora il campo elettrostatico usando il gradiente espresso in coordinate sferiche:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}\hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (1.19)$$

**OSSERVAZIONE.** Sommando il contributo di più cariche uniformi il potenziale (e quindi il campo elettrico) può dipendere da relazioni differenti da  $1/r$ .

## 1.6 DISTRIBUZIONI CONTINUA DI CARICA

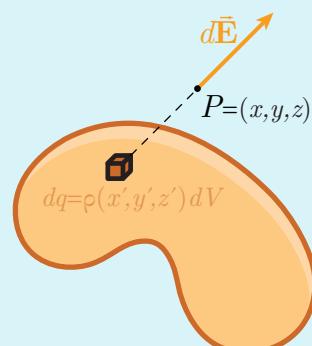
Nella pratica difficilmente avremo a che fare con una, due o qualche carica, bensì di un numero *enorme* di cariche puntiformi. Chiaramente, trattare tutte le cariche una per una e vedere le interazioni con le altre non è benché minimamente consigliato: per fare un esempio, un mm<sup>3</sup> di rame contiene circa  $2,5 \cdot 10^{21}$  elettroni.

Per ovviare a questa difficoltà si assume che le cariche siano così tante che si abbia un continuum di cariche; introduciamo dunque il concetto di **distribuzione continua di carica**, caratterizzata da una **densità di carica**.

### DEFINIZIONE 1.6.1. - DENSITÀ DI CARICA VOLUMICA.

Considerato un oggetto di volume  $V$  carico tale che nell'elemento di volume  $dV(x, y, z) = dx dy dz$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica volumica** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \rho(x, y, z)dV \quad (1.20)$$



### UNITÀ DI MISURA.

**DENSITÀ DI CARICA VOLUMICA:** coulomb su metro cubo  $\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^3}\right)$ .

**Dimensioni:**  $[\rho] = \frac{[Q]}{[V]} = \text{ITL}^{-3}$ .

Essa funziona in modo analogo alla densità di massa volumica; la carica totale sull'oggetto si otterrà integrando sul volume la relazione precedente:

$$q_{tot} = \int_V \rho(x, y, z)dV \quad (1.21)$$

Il campo elettrico generato dall'oggetto, interno o esterno al corpo che sia, si ottiene come semplice generalizzazione della 1.12:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (1.22)$$

dove  $\vec{r} = (x, y, z)$  è il punto nello spazio in cui misurare il campo elettrico,  $\vec{r}' = (x', y', z')$  è un punto del volume  $V$  e  $dV = dx' dy' dz'$ .

Capita spesso che cariche sorgenti, anziché essere poste in una regione spaziale tridimensionale, occupino invece una superficie. In questi casi conviene introdurre la **densità superficiale**.

**DEFINIZIONE 1.6.2. - DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE.**

Considerato una superficie  $\sigma$  carica tale che sull'elemento d'area  $d\Sigma(x, y, z)$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica superficiale** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \sigma(x, y, z) d\Sigma \quad (1.23)$$

**UNITÀ DI MISURA.**

**DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE:** coulomb su metro quadro  $\left(\frac{C}{m^2}\right)$ .

**Dimensioni:**  $[\sigma] = \frac{[Q]}{[A]} = ITL^{-2}$ .

La carica totale e il campo elettrico sono, rispettivamente,

$$q_{tot} = \int_{\Sigma} \sigma(x, y, z) d\Sigma \quad (1.24)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Sigma \quad (1.25)$$

Analogamente, si può fare anche per il caso di una linea, introducendo la **densità lineare**.

**DEFINIZIONE 1.6.3. - DENSITÀ DI CARICA LINEARE.**

Considerato una lineare  $\sigma$  carica tale che sull'elemento di linea  $d\ell$  attorno al punto di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  ci sia una carica infinitesima  $dq$ . La **densità di carica lineare** è un campo scalare definito dalla relazione

$$dq = \lambda(x, y, z) d\ell \quad (1.26)$$

**UNITÀ DI MISURA.**

**DENSITÀ DI CARICA LINEARE:** coulomb su metro  $\left(\frac{C}{m}\right)$ .

**Dimensioni:**  $[\lambda] = \frac{[Q]}{[\ell]} = ITL^{-1}$ .

La carica totale e il campo elettrico sono, rispettivamente,

$$q_{tot} = \int_{\ell} \lambda(x, y, z) d\ell \quad (1.27)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \lambda(x', y', z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell \quad (1.28)$$

**OSSERVAZIONE.** Può capire di avere una densità *non* nulla, ma carica totale nulla.

**Filo carico rettilineo (infinito)** Si consideri un filo rettilineo di lunghezza  $L$  con densità lineare costante  $\lambda$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che il filo carico sia lungo l'asse  $x$ . Si ha

$$q = \int_{\ell} \lambda(x', y', z') d\ell = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} dx' = \lambda L \implies \lambda = \frac{q}{L}$$

Più che concentrarci sulla carica del filo, tuttavia, ci interessa studiare il campo elettrostatico. Per il sistema di riferimento scelto,  $\vec{r}' = (x', 0, 0)$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' \quad (1.29)$$

In componenti cartesiane:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - x'}{((x' - x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx' \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{((x' - x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx' \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{((x' - x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx' \end{cases}$$

Si verifica nuovamente che  $\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}V$ , dove

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + y^2 + z^2}} dx' \quad (1.30)$$

Risolvendo l'integrale<sup>5</sup> troviamo

$$V = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} + x - \frac{L}{2}}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} - x + \frac{L}{2}} \frac{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} + x + \frac{L}{2}}{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2} - x - \frac{L}{2}} \right) \quad (1.31)$$

e il campo in componenti cartesiane diventa:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{y^2 + z^2} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x - \frac{L}{2}}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{y^2 + z^2} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x - \frac{L}{2}}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{cases}$$

<sup>5</sup>Calcolarlo in questo modo non lo consigliamo neanche ai peggiori nemici del Manualozzo™. Per chi volesse comunque provarlo a fare, nelle "XXX", a pagina ?? è possibile trovare lo sviluppo del calcolo.

Il sistema si studia però in modo più semplice sfruttando la simmetria cilindrica e utilizzando, per l'appunto, le coordinate cilindriche, posto l'asse  $x$  come asse relativo all'altezza:

$$\begin{cases} x = x \\ y = R \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

Il potenziale diventa

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + R^2}} dx' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2} + \frac{L}{2} - x}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2} - \frac{L}{2} - x} \right) \quad (1.32)$$

e

$$\begin{cases} E_R(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2} - x + \frac{L}{2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2} - x - \frac{L}{2}} \right) \\ E_\theta(x, y, z) = 0 \\ E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{L}{2})^2 + R^2}} \right) \end{cases}$$

Supponiamo ora che il filo sia infinitamente lungo, ossia  $L \rightarrow +\infty$ ; una primissima osservazione ci dice che, per avere  $\lambda$  costante anche  $q$  deve tendere a  $+\infty$ . Poiché

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(x \pm \frac{L}{2}\right)^2 + R^2} = \lim_{L \rightarrow +\infty} L = +\infty$$

Segue che

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow +\infty} E_x = 0 \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_y = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{L} - \frac{x - \frac{L}{2}}{L} \right) = \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_z = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{L}{2}}{L} - \frac{x - \frac{L}{2}}{L} \right) = \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon(y^2 + z^2)} \end{cases}$$

In coordinate cilindriche, poiché

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2} &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \sqrt{1 + \frac{R^2}{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}} = \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \left( 1 + \frac{R^2}{2\left(x - \frac{L}{2}\right)^2} \right) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{L}{2} \right| \end{aligned}$$

si ha, facendo calcoli lunghi e noiosi, a:

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow +\infty} E_R = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{L} \left( \frac{1}{\left|x - \frac{L}{2}\right| - x + \frac{L}{2}} - \frac{1}{\left|x - \frac{L}{2} - x\right| - \frac{L}{2}} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon R} \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_\theta = 0 \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} E_x = 0 \end{cases}$$

Il campo in coordinate cilindriche risulta

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{u}_R \quad (1.33)$$

**OSSERVAZIONE.** Avremmo potuto vedere che il campo dipendeva soltanto dalla componente radiale direttamente facendo un'analisi dimensionale. Infatti, poiché

$$\lambda = \frac{q}{L} \implies [\lambda] = \frac{[C]}{[L]} = \frac{C}{m},$$

il campo elettrico ha dimensioni

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \kappa \frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \implies [E] = \frac{[\lambda]}{[\epsilon_0]} \frac{1}{[L]}$$

dove  $\kappa$  è una costante numerica e non influisce sulla dimensione. L'unica componente che si deve considerare "libera", perché non è vincolata dalle condizioni del sistema, è una lunghezza: nel nostro caso, andando per intuizione fisica sulla base di simmetrie presenti, la distanza assiale  $R$ .

**Superficie carica infinita** Si consideri una superficie piana  $\Sigma$  con densità superficiale costante  $\sigma$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che la superficie coincida con il piano  $x = 0$ . Si ha

$$q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma = \sigma \int_{\Sigma} d\Sigma = \sigma A \implies \sigma = \frac{q}{A}$$

dove  $A$  è l'area della superficie. Chiaramente, se la superficie è tale che  $A \rightarrow +\infty$ , allora anche  $q \rightarrow +\infty$ .

Più che concentrarci sulla carica del filo, tuttavia, ci interessa studiare il campo elettrostatico. Per il sistema di riferimento scelto,  $\vec{r}' = (0, y', z')$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Sigma \quad (1.34)$$

Poiché stiamo considerando il piano  $xy$ , la parametrizzazione della superficie è

$$\vec{s} = y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \quad (1.35)$$

Pertanto, l'elemento di superficie è

$$d\Sigma = \left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} \right\| dy dz = \|\hat{u}_x\| dy dz = dy dz$$

Si ha, in componenti cartesiane:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma x}{(x^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)^{3/2}} dy' dz' \\ E_y(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(y-y')}{(x^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)^{3/2}} dy' dz' \\ E_z(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(z-z')}{(x^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)^{3/2}} dy' dz' \end{cases}$$

**OSSERVAZIONE.** Poiché il campo è uniforme, spostandosi parallelamente al piano non dovrebbe essere discernibile alcuna differenza, ossia non ci devono essere componenti particolari in alcuna; in altre parole, essendo il sistema invariante per traslazioni, il campo elettrostatico dovrà essere *ortogonale* alla superficie.

Si vede esattamente quanto ipotizzato. Infatti, operando un cambio di variabile

$$\begin{cases} u = y' - y \\ v = z' - z \end{cases}$$

si ricava che

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dudv}{(x^2 + u^2 + vr)^{3/2}} du dv \\ E_y(x, y, z) = 0 \\ E_z(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Operando un ulteriore cambio di variabile, questa volta alle coordinate polari

$$\begin{cases} u = R \cos \theta \\ v = R \sin \theta \end{cases}$$

ricordando che l'elemento d'area diventa  $dydz = RdRd\theta$ , si ha

$$E_x(x, y, z) = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{RdR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left. \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right|_0^\infty = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

In sintesi, il campo elettrico generato da una superficie piana infinita è

$$\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \hat{u}_x \quad (1.36)$$

**OSSERVAZIONE.** In realtà avremmo dovuto aspettarci che il campo non dipendesse dalla distanza  $x$ . Dalla formula del campo elettrico di Coulomb sappiamo che

$$[\epsilon E] = \frac{N}{C}$$

Siccome  $\sigma$  è una densità superficiale, la sua unità di misura è già

$$[\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

si deve avere

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A$$

con  $A$  adimensionale... e in effetti nel nostro caso  $A = \frac{1}{2}$ .

**Sfera uniformemente carica** Si consideri una palla sferica di raggio  $R$  con densità volumica costante  $\rho$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'origine coincida con il centro della sfera. Si ha

$$q = \int_V \rho(x', y', z') dV = \rho \int_V dV = \rho V_s = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (1.37)$$

In questo caso, studiare il campo elettrico esterno ed interno alla sfera per un punto generico diventa particolarmente laborioso; tuttavia, vedremo una legge fisica che ci permetterà di semplificare la trattazione di questo problema. Qui ci limiteremo a considerare il campo elettrostatico agente su un punto degli assi, ad esempio  $\vec{r} = (x, 0, 0)$ .

Notiamo che l'evidente simmetria radiale del problema ci porta a concludere che le componenti  $y$  e  $z$  del campo siano nulle, ossia

$$\begin{cases} E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{x-x'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y')^2+(z')^2}} dx' dy' dz' \\ E_y(x, 0, 0) = 0 \\ E_z(x, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

Trattando di una sfera, ci conviene passare nelle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

ricordando che l'elemento di volume diventa  $dV = dx' dy' dz' = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$ . L'argomento nella radice al denominatore diventa

$$(x' - x)^2 + (y')^2 + (z')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - 2xx' + x^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta.$$

e il numeratore è invece

$$x - x' = x - r \cos \theta$$

Da ciò

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \pi d\theta \frac{x - r \cos \theta}{(r^2 - 2rx \cos \theta + x^2)^{3/2}} r^2 \cos \theta = \\ &= \frac{\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{x - r \cos \theta}{(r^2 - 2rx \cos \theta + x^2)^{3/2}} r^2 \sin \theta \boxed{=} \end{aligned}$$

Cambiamo la variabile  $\theta$  con  $y = \cos \theta$  (a cui è associato  $dy = \sin \theta d\theta$ ), ottenendo

$$\boxed{=} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{x - 2y}{(x^2 - 2rxy + x^2)^{3/2}} r^2$$

Non è immediato, ma si ritrova come già preannunciato un *potenziale*  $V$  tale per cui  $\vec{E} = -\nabla V$ , dove

$$V(x, 0, 0) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rxy + x^2}} \boxed{=}$$

Svolgendo l'integrale rispetto alla variabile  $t$ , si vede che

$$\begin{aligned} \boxed{=} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dy \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rxy + x^2}} &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \left[ -\frac{r}{x} \sqrt{r^2 + x^2 - 2rxy} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \left( -\frac{r}{x} |r - x| + \frac{r}{x} |r + x| \right) \end{aligned}$$

Ora distinguiamo il caso di un punto esterno alla sfera ( $x > R$ ) o di uno interno ad essa ( $x < R$ ).

**Il caso esterno:**  $x > R$

$$E_x(x, 0, 0) = -\partial_x \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{2r^2}{x} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{2}{3} R^3 \partial_x \frac{1}{x} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{x^2}$$

Ricordando che  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , si ha

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad (1.38)$$

**Il caso interno:**  $x < R$

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= -\partial_x \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{r}{x} (r + x - |r - x|) = \\ &= -\partial_x \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^x dr \frac{r}{x} (r + x - x + r) + \int_x^R dr \frac{r}{x} (r + x - r + x) \right] = \\ &= -\partial_x \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( \frac{2}{3}x^2 + R^2 - x \right) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \partial_x \left( R^2 - \frac{1}{3}x^2 \right) = \frac{\rho x}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Ricordando che  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , si ha

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{\rho x}{3\epsilon_0} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1.39)$$

Il grafico del campo elettrostatico, al variare di  $x > 0$ , è il seguente:



# CAPITOLO 2

## IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E LA LEGGE DI GAUSS

*“Ecco una data importante nella storia della scienza: 5 novembre 1955. Fu il giorno in cui inventai il viaggio nel tempo. Me lo ricordo benissimo: stavo in piedi sul water attaccando un orologio, la porcellana era bagnata, sono scivolato e ho battuto la testa sul lavandino. Quando ho ripreso i sensi, ho avuto una rivelazione... una visione... un’immagine scolpita nella mente... un’immagine di questo. Questo rende possibile viaggiare nel tempo: il flusso canalizzatore!”*

*“Doc” EMMETT L. BROWN a Marty McFly, Ritorno al futuro.*

### P<sup>ER</sup>

#### 2.1 IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

##### DEFINIZIONE 2.1.1. - FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE.

Il **flusso** di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata  $\Sigma$ , parametrizzata da una funzione  $\vec{r}(u, v)$ , è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv \quad (2.1)$$



Matematicamente parlando, il flusso non è altro che un tipo di integrale superficiale di un campo vettoriale.

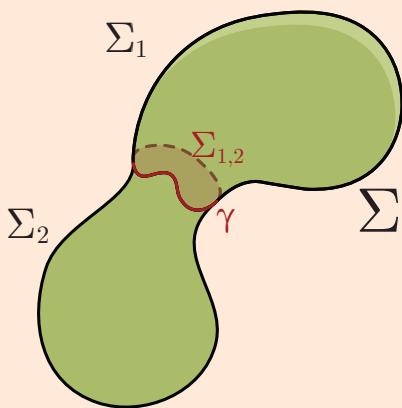
**INTUITIVAMENTE...** Se descriviamo la corrente di un fluido come l’acqua con un campo vettoriale  $\vec{F}$ , il flusso di  $\vec{F}$  rappresenta *quanto fluido* passa *attraverso* una certa superficie per unità di tempo (anche se quest’ultima viene spesso sottintesa). Con questa interpretazione euristica si può capire anche perché l’integrale presenta nella definizione un *prodotto scalare*: se l’acqua scorre perpendicolarmente alla superficie, molta acqua passerà e il flusso sarà dunque grande; al contrario, se il fluido scorre

parallelamente alla superficie l'acqua non l'attraverserà mai e quindi il flusso è nullo. In altre parole, ciò che influisce sul flusso è la componente del flusso perpendicolare alla superficie!

Come abbiamo detto, la superficie deve essere **orientabile**: detto in una maniera suggestiva, intuitiva ma non formale come farebbero i fisici, una superficie con due *facce distinte* e due *orientazioni* possibili che corrispondono alla scelta di un  che punta sempre dalla parte di una delle facce.

In particolare, la superficie deve essere *effettivamente orientata*, ossia si deve scegliere uno dei campi normali in modo da definire quando il flusso è positivo e quando è negativo. Generalmente, per convenzione si impone che il vettore normale alla superficie è orientato verso l'*esterno*: quando la componente perpendicolare del campo vettoriale  $\vec{E}$  e il vettore normale saranno *concordi*, cioè quando  $\vec{E}$  è *uscente* dalla superficie, si ha un flusso *positivo*; se il campo  $\vec{E}$  è *entrante* la superficie, allora si ha un flusso *negativo*.

#### OSSERVAZIONE.



Data una superficie chiusa  $\Sigma$ , tracciamo una curva chiusa  $\gamma$  su di essa; possiamo scindere  $\Sigma$  in due sottosuperfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  che hanno in comune una superficie  $\Sigma_{1,2}$  delimitata da  $\gamma$ . Il flusso per linearità di scinde in

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2}$$

In realtà, il flusso *non* è influenzato da quale sia la superficie  $\Sigma_{1,2}$ : infatti, per uno dei sotoflussi il contributo dato da  $\Sigma_{1,2}$  sarà negativo perché il campo è entrante, ma per l'altro sotoflusso sarà positivo perché il campo è uscente.

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2} = \Phi_{\Sigma_1 - \Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_2 - \Sigma_{1,2}} - \Phi_{\Sigma_{1,2}} = \Phi_{\Sigma_1 - \Sigma_{1,2}} + \Phi_{\Sigma_2 - \Sigma_{1,2}}$$

## 2.2 LEGGE DI GAUSS

#### TEOREMA 2.2.1. - LEGGE DI GAUSS.

*Il flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$  attraverso un superficie chiusa è uguale alla somma algebrica (o nel caso di una distribuzione continua, dell'integrale) delle cariche contenute all'interno della superficie, comunque siano distribuite, divisa per  $\epsilon_0$ .*

- *Caso discreto:*

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{(\sum_i q_i)_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

- *Caso continuo:*

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) dV \quad \text{tale che } \partial V = \Sigma \quad (2.3)$$

Lo dimostreremo per una *singola* carica contenuta nella superficie - dato che il caso per molteplici cariche e per una distribuzione continua seguono praticamente immediatamente

- ma prima di farlo in modo formale, vediamo una derivazione più "fisica".

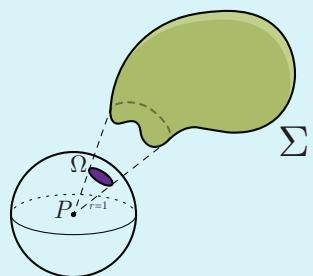
**Angolo solido** Per far ciò, ci servirà la nozione di *angolo solido*.

**DEFINIZIONE 2.2.1. - ANGOLO SOLIDO.**

L'**angolo solido** è una generalizzazione a tre dimensioni dell'angolo piano e misura la parte di spazio compresa entro un fascio di semirette uscenti intorno ad un punto  $P$ .

In termini matematici, esso è definito come l'area sulla *sfera unitaria* intorno a  $P$  individuata dalla superficie (finita)  $\Sigma$ :

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \int \frac{\cos \theta d\Sigma}{r^2} \quad (2.4)$$



dove

- $d\Omega$  è l'angolo solido infinitesimo.
- $d\Sigma_0$  è la *proiezione ortogonale* al raggio  $r$  dell'elemento infinitesimo di superficie  $d\Sigma$ .
- $\theta$  è l'*angolo polare* delle coordinate sferiche.

Poiché  $d\Sigma_0$  è un elemento infinitesimo della calotta sferica, data una parametrizzazione in coordinate sferiche vale

$$d\Sigma_0 = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

da cui segue che

$$d\Sigma = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.5)$$

Integrando  $\theta$  da 0 a  $\pi$  e  $\varphi$  da 0 a  $2\pi$ , si ottiene l'angolo solido sotto cui dal centro  $P$  è vista tutta la superficie:

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = 4\pi \quad (2.6)$$

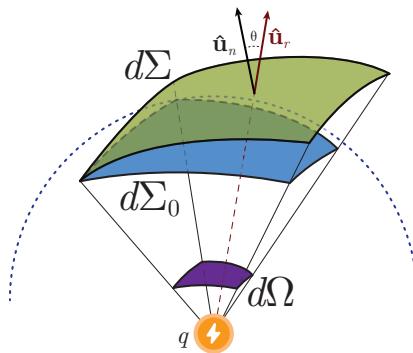
Questo risultato è valido per una qualunque superficie *chiusa* che racchiuda  $P$  - e ne corrisponde al valore massimo dell'angolo solido.

**UNITÀ DI MISURA.**

**ANGOLO SOLIDO:** Steradiane (sr).

Dimensioni:  $[\Omega] = 1$ .

**Derivazione fisica della legge di Gauss** Dato il campo di Coulomb  $\vec{E}$  generato dalla carica  $q$ , vogliamo determinare l'elemento di flusso infinitesimo  $d\Phi(\vec{E})$ , ossia il flusso tramite l'elemento d'area infinitesimo  $d\Sigma$ .



Innanzitutto, si noti che l'angolo tra il versore radiale  $\hat{\mathbf{u}}_r$  uscente dalla carica  $q$  e il versore normale  $\hat{\mathbf{u}}_n$  alla superficie coincide con un possibile angolo polare  $\theta$  che parametrizza un punto della calotta sferica unitaria centrata in  $q$ .

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \cos \theta$$

Il flusso infinitesimo diventa

$$d\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_n}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

**OSSERVAZIONE.** Il flusso del campo  $\vec{\mathbf{E}}$  generato da una carica puntiforme dipende solo dall'angolo solido e *non* dalla superficie o dalla distanza dalla carica: il flusso è lo stesso per qualunque superficie il cui bordo si appoggia sul cono individuato dall'angolo solido. Questo è una *diretta* conseguenza che il campo di Coulomb presenta un fattore  $1/r^2$ ; se la relazione fosse stata anche solo leggermente diversa non varrebbe tale dipendenza.

Per una superficie (finita) e chiusa che racchiude la carica  $q$  si ha

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

### Dimostrazione formale della legge di Gauss

**DIMOストRAZIONE.** Consideriamo inizialmente il caso con una carica sola. Per semplicità, poniamo l'origine del nostro sistema di riferimento dove è situata la carica. Data la simmetria di carattere radiale fornita dal campo elettrostatico di Coulomb, ci conviene utilizzare le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Parametrizziamo la superficie  $\Sigma$  con l'angolo *polare*  $\theta$  e l'angolo *azimutale*  $\varphi$  delle coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}(\theta, \varphi) &= x(\theta, \varphi) \vec{\mathbf{u}}_x + y(\theta, \varphi) \vec{\mathbf{u}}_y + z(\theta, \varphi) \vec{\mathbf{u}}_z = \\ &= r(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi \vec{\mathbf{u}}_x + r(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi \vec{\mathbf{u}}_y + r(\theta, \varphi) \cos \theta \vec{\mathbf{u}}_z \end{aligned}$$

Osserviamo che per descrivere una superficie con le coordinate sferiche è necessario fornire la *distanza*  $r(\theta, \varphi)$  dall'origine nella direzione indicata dagli angoli  $\theta$  e  $\varphi$ . Anzi,

la parametrizzazione può essere espressa totalmente in termini *radiali!* Infatti, il versore radiale è dato da

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{|\hat{\mathbf{e}}_r|} = \frac{\frac{\partial x^i}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_i}{1} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_z$$

Raccogliendo  $r(\theta, \varphi)$  dalla parametrizzazione scritta prima si ottiene quindi

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{u}}_r$$

Per definizione, il flusso è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \left| \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right| d\theta d\varphi \quad [=]$$

Poiché il versore normale è

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right|}$$

il flusso si può calcolare come

$$[=] \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{1}{r(\theta, \varphi)^2} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi$$

Per semplificare quel prodotto misto, dobbiamo prima analizzare i termini che partecipano al prodotto vettoriale.

In un generico punto<sup>a</sup>  $(\theta, \varphi)$  della superficie, i vettori della base del piano tangente alla superficie in tal punto sono

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta, \varphi) \vec{\mathbf{u}}_r) = \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_r + r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (r(\theta, \varphi) \vec{\mathbf{u}}_r) = \frac{\partial r(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_r + r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Si nota subito che le componenti parallele a  $\hat{\mathbf{u}}_r$  non influiscono al flusso. Al netto di costanti moltiplicative, il contributo di tali componenti è un  $\hat{\mathbf{u}}_r$  nel prodotto vettoriale del prodotto misto, ma valendo

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \times \vec{\mathbf{a}} = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \vec{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{u}}_r = 0 \end{cases}, \quad \forall \vec{\mathbf{a}} \text{ vettore}$$

tali componenti non cambieranno in alcun modo il flusso; ciò che invece lo cambia sono le derivate dei versori radiali. Sviluppando, l'espressione del flusso si ha

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{1}{r(\theta, \varphi)^2} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{1}{r(\theta, \varphi)^2} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \left( r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} \times r(\theta, \varphi) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} \right) d\theta d\varphi = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y - \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_z \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_y \end{cases}$$

e

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \sin \theta$$

segue che

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (2.7)$$

dove  $\Sigma$  è l'angolo solido sull'intera superficie.

Se la superficie (finita) è chiusa si ha  $\Omega = 4\pi$ , ottenendo quindi il risultato desiderato. Il caso per cariche multiple segue dal *principio di sovrapposizione* dei campi elettrici:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \left( \sum_i \vec{\mathbf{E}}_i \right) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \sum_i \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Da questa si ottiene, passando al continuo, la relazione (2.3).  $\square$

<sup>a</sup>Qui indicato tramite le coordinate ad esso associate dalla parametrizzazione.

**OSSERVAZIONE.** La (2.7) descrive il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie **qualsiasi**. La legge di Gauss si potrebbe vedere come un *caso specifico* di questa relazione.

**DIGRESSIONE.** La dimostrazione della legge di Gauss si basa sul fatto fondamentale che la legge di Coulomb, che descrive l'interazione tra cariche elettriche, è *inversamente proporzionale* a  $r^2$ . È dunque possibile adattare la legge di Gauss in altri contesti non elettrici, se consideriamo una forza tra due enti inversamente proporzionale a  $r^2$ .

Ad esempio, esiste una formulazione della legge di Gauss per la *forza di gravitazione* completamente equivalente alla legge di gravitazione universale di Newton: il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è pari alla massa inclusa in essa, moltiplicata per  $-4\pi G$ .

■ **Caso discreto:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{G}}) = -4\pi G \sum_i m_i \quad (2.8)$$

■ **Caso continuo:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{G}}) = -4\pi G \int_V \rho(x, y, z) dV \quad \text{tale che } \partial V = \Sigma \quad (2.9)$$

Si noti, tra l'altro, che non è particolarmente differente dal caso elettrico dato che la legge di Gauss per il campo elettrico si può anche scrivere così:

■ **Caso discreto:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = 4\pi k \sum_i q_i$$

■ **Caso continuo:**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = 4\pi k \int_V \rho(x, y, z) dV \quad \text{tale che } \partial V = \Sigma \quad (2.10)$$

**Flusso tramite una superficie chiusa per una carica esterna** La legge di Gauss descrive il flusso tramite una superficie chiusa tenendo conto delle cariche *interne* ad essa... e si ci fossero delle cariche *esterne*?

Limitiamoci all'inizio al caso di una singola carica esterna: il campo di Coulomb entra nella superficie chiusa, attraversa lo spazio contenuto da essa e poi esce dall'altro lato. In termini di angolo solido, il cono elementare che sottende l'angolo solido infinitesimo  $d\Sigma$  determina sulla superficie chiusa due elementi  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ . Per la convenzione sul segno del flusso:

- $\vec{\mathbf{E}}$  entra in  $d\Sigma_1$ :  $\vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma_1 < 0$ .
- $\vec{\mathbf{E}}$  esce da  $d\Sigma_2$ :  $\vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma_2 > 0$ .

I flussi infinitesimi che otteniamo<sup>1</sup> sono

$$\begin{cases} d\Phi_{\Sigma_1}(\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ d\Phi_{\Sigma_2}(\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{cases}$$

Integrando sull'intera superficie chiusa otteniamo

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0 \quad (2.11)$$

Il flusso tramite una superficie *chiusa* dipende solo dalle cariche interne ad essa.

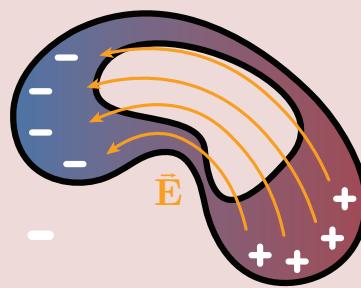
**OSSERVAZIONE.** Cosa cambia dal caso della carica interna? Il campo elettrico in quella situazione risulta essere *entrante* (se la carica è positiva) o *uscente* (se la carica è negativa) da ogni elemento infinitesimo; il flusso avrà quindi sempre lo stesso segno oppure essere nullo, ma sulla superficie intera questo si ha solo se questa è parallela al campo.

### 2.3 APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI GAUSS

La legge di Gauss, in linea di principio, ci descrive solo il flusso tramite una superficie chiusa. Tuttavia, in situazioni di *evidenti simmetrie*, confrontando la definizione di flusso con quello ottenuto dalla legge di Gauss possiamo sorprendentemente calcolare in modo abbastanza facile il campo elettrostatico che genera il flusso.

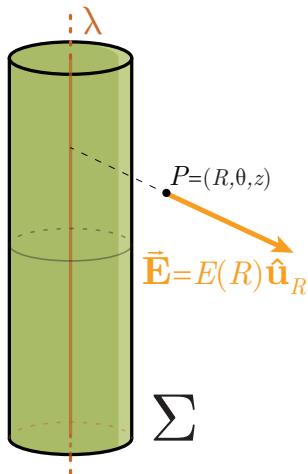
**ATTENZIONE!** Bisogna fare attenzione ad utilizzare la legge di Gauss in *assenza di simmetrie*. Ad esempio, consideriamo una situazione come in figura.

<sup>1</sup>Il procedimento è analogo a quello con cui si ottiene l'equazione (2.7).



Qui il flusso attraverso la superficie interna è nullo perché ciò che entra esce, ma il campo elettrico *non* è nullo!

**Filo carico rettilineo (infinito)** Si consideri un filo rettilineo infinito con densità lineare costante  $\lambda$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che il filo carico sia lungo l'asse  $z$ . Poniamo un cilindro attorno al filo in modo che il filo passi per l'asse del cilindro.



Data l'evidente simmetria cilindrica del sistema usiamo, per motivi che dovrebbero essere oramai chiari, le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Oltre ad essere un sistema di riferimento, fissato  $R$  abbiamo una parametrizzazione del cilindro di raggio  $R$ . Ora, ci è già noto che in questo sistema di riferimento il campo elettrostatico dipende esclusivamente dalla *coordinata radiale* e ha direzione radiale, ossia  $\vec{E} = E(R)\hat{u}_R$ .

Per come abbiamo posto il cilindro  $\Sigma$ , il versore normale alla superficie laterale coincide con quello radiale delle coordinate cilindriche, pertanto

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_R d\Sigma = \int_{\Sigma} E(R)\hat{u}_R \cdot \hat{u}_R d\Sigma = E(R) \int_{\Sigma} d\Sigma \quad \boxed{=}$$

dove l'ultimo passaggio è lecito in quanto sulla superficie del cilindro il raggio è fissato e quindi anche  $E(R)$  è costante.

Dato che l'elemento di area è dato da  $d\Sigma = d\Phi dz$ , si ha

$$\boxed{=} \lim_{L \rightarrow +\infty} 2\pi R L E(R)$$

Per la legge di Gauss,

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

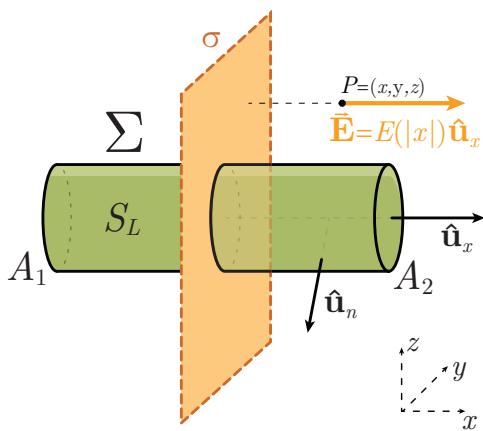
dove  $\lambda$  è la densità lineare di carica; per ottenere il flusso per il filo infinito ci basterebbe mandare  $L$  all'infinito. Egualando i due flussi ottenuti si ricava che

$$2\pi R L E(R) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

e quindi

$$\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (2.12)$$

**Superficie piana carica infinita** Si consideri una superficie piana  $\Sigma$  con densità superficiale costante  $\sigma$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che la superficie coincida con il piano  $x = 0$ . Come per il caso del filo carico rettilineo, consideriamo un cilindro, questa volta che interseca la superficie ortogonalmente e posto in maniera che le basi siano alla stessa distanza dal piano.



Ci è già noto che il campo elettrostatico dipende esclusivamente dalla coordinata perpendicolare al piano, cioè  $x$ , e ha direzione  $\hat{u}_x$ . In particolare, si osservi che da facce opposte del piano il versore normale  $u_n = u_x$  cambia verso e quindi cambia verso anche il campo elettrostatico:

$$\vec{E} = \begin{cases} E(|x|)\hat{u}_x & \text{se } x > 0 \\ -E(|x|)\hat{u}_x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il flusso tramite il cilindro  $\Sigma$  si può scindere in tre componenti: i due flussi  $\Phi_{A_1}$  e  $\Phi_{A_2}$  attraverso le basi e il flusso  $\Phi_{S_L}$  attraverso la superficie laterale.

Tuttavia, poiché la superficie laterale è sempre ortogonale al campo, quest'ultima componente è nulla; inoltre, si ha che il campo esce sempre dalle basi, pertanto i flussi saranno positivi e, per questioni di simmetria, coincidono:

$$\Phi_{A_1} = \Phi_{A_2} \quad (2.13)$$

Pertanto,

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 2 \int_A E(|x|) d\Sigma = 2E(|x|) \int_{A_1} d\Sigma = 2E(|x|) A_1$$

Ricordando che la densità di carica superficiale  $\sigma$  è costante, la carica interna al cilindro è data da

$$q = \sigma A_1$$

Per la legge di Gauss si ha

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{\sigma A_1}{\epsilon_0}$$

Eguagliando i due flussi ottenuti si ricava che

$$2A_1 E(|x|) = \frac{\sigma A_1}{\epsilon_0}$$

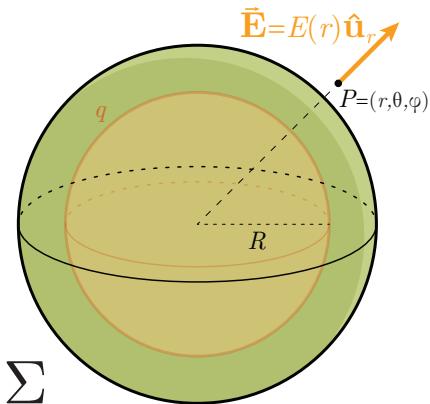
e quindi

$$\vec{E}(|x|) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x \quad (2.14)$$

**Sfera uniformemente carica** Si consideri una palla sferica di raggio  $R$  con densità volumica costante  $\rho$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'origine coincida con il centro della sfera. Come superficie  $\Sigma$  per calcolare il flusso scelgo una sfera di raggio  $r$  centrata anch'essa nell'origine. Ci è già noto che il campo elettrostatico

dipende esclusivamente dalla coordinata radiale e ha direzione radiale, ossia  $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$ . Il versore normale alla superficie  $\Sigma$  è  $\hat{u}_n = \hat{u}_r$ . A questo punto distinguiamo il calcolo quando la superficie sferica ha raggio maggiore della palla ( $r > R$ ) o quando ha raggio minore ( $r < R$ ).

### Il caso esterno: $r > R$



In questo caso la superficie sferica *contiene* la sfera uniformemente carica. Il flusso dunque è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int E(r)d\Sigma = E(r)4\pi r^2$$

dato che  $E(r)$  è costante sulla sfera di raggio  $r$ . La superficie sferica contiene *tutta* la carica della palla al suo interno, quindi per la legge di Gauss

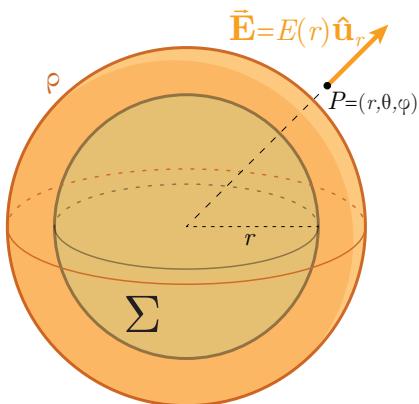
$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

e quindi

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \quad (2.15)$$

**OSSERVAZIONE.** Una qualunque distribuzione di carica a simmetria sferica dipendente dalla distanza radiale, ossia  $\rho(x, y, z) = \rho(r)$ , genera al suo esterno un campo uguale a quello di una carica puntiforme.

### Il caso interno: $r < R$



In questo caso la superficie sferica contiene al suo interno solo *una parte* della carica complessiva:

$$q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Se il flusso, calcolato secondo la definizione, non cambia espressione (ma valore sì!)...

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E(r)4\pi r^2$$

... quello per la legge di Gauss diventa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

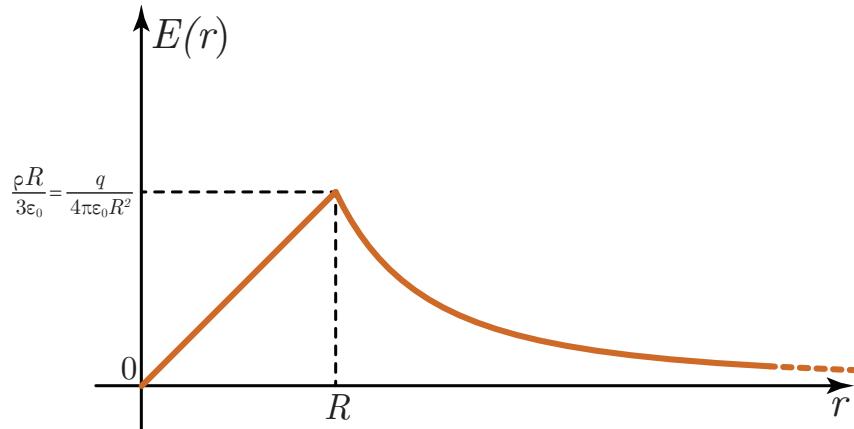
e quindi

$$\vec{E}(r) = \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r \quad (2.16)$$

Riassumendo, il campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica di raggio  $R$  a

distanza  $r$  dall'origine è

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r & \text{se } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r & \text{se } r > R \end{cases} \quad (2.17)$$



Come già detto, esiste un *potenziale*  $V$  tale per cui  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Poiché il campo dipende esclusivamente dalla coordinata radiale, tale relazione si trasforma in

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

da cui

$$V(r) = - \int E(r) dr + A$$

dove  $A$  è una costante che dipende dalle *condizioni al contorno* di natura fisica. Lasciando tempo alle opportune spiegazioni, per ora ci basti sapere che il *limite all'infinito* del potenziale si pone in generale *nullo*<sup>2</sup> e che il potenziale è un campo scalare *continuo*<sup>3</sup>. Integrando le equazioni di campo ottenute ricaviamo

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + A & \text{se } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + B = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + B & \text{se } r > R \end{cases}$$

con  $A$  e  $B$  opportune costanti. Imponiamo nella seconda equazione il potenziale all'infinito ( $r \rightarrow +\infty$ ) nullo - dato che è quella riguardante il sistema a grandi distanze; è immediato trovare che  $B = 0$ . Dalla condizione di continuità invece, il potenziale sul bordo della sfera deve essere uguale "visto" dall'*interno* e dall'*esterno*, ossia

$$\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + A$$

Con pochi passi algebrici troviamo

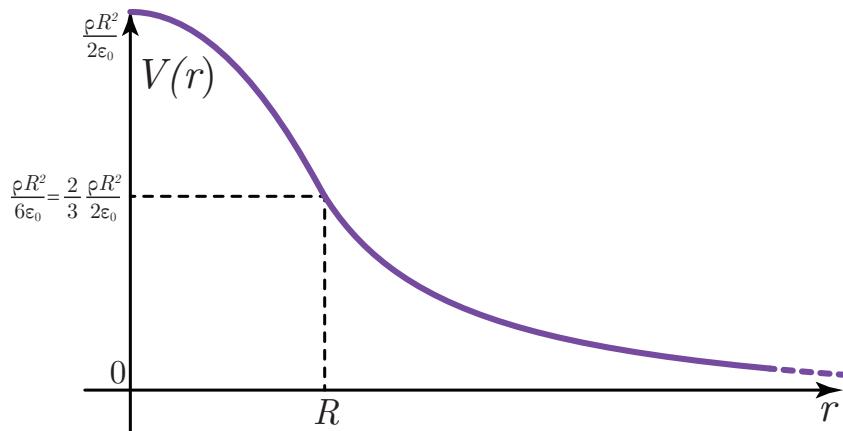
$$A = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

<sup>2</sup>Nel Capitolo 3, a pag. 43 si può trovare la motivazione di ciò.

<sup>3</sup>Nel Capitolo 3, a pag. 43 si può trovare la motivazione di ciò.

Riassumendo, il potenziale del campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica di raggio  $R$  a distanza  $r$  dall'origine è

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} & \text{se } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + B = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + B & \text{se } r > R \end{cases} \quad (2.18)$$



**OSSERVAZIONE.** Poiché il sistema ha una dimensione radiale *finita*, si ha come conseguenza la *diminuzione continua* del campo fino all'*annullamento nel campo* nel centro della distribuzione: in questo modo si evita la divergenza all'infinito che si ha con il campo della *carica puntiforme*, oggetto che *fisicamente è irrealizzabile* nella teoria classica dell'elettromagnetismo.

#### 2.4 EQUILIBRIO IN UN CAMPO ELETTROSTATICO

##### DEFINIZIONE 2.4.1. - EQUILIBRIO STABILE.

Un punto  $P$  è di **equilibrio stabile** per un corpo puntiforme se per un qualsiasi spostamento, piccolo a piacere, da tale posizione esistono forze che riportano l'oggetto nella posizione originale.

##### DEFINIZIONE 2.4.2. - EQUILIBRIO INSTABILE.

Un punto  $P$  è di **equilibrio instabile** per un corpo puntiforme se esistono spostamenti, piccolo a piacere, da tale posizione esistono forze che riportano l'oggetto nella posizione originale.

Consideriamo delle *sorgenti* fisse (continue o discrete che siano, *non cambia*) nel vuoto e sia  $\vec{E}(\vec{r})$  il campo elettrico generato da queste cariche. Esistono dei punti tali per cui, se poniamo una carica  $q$  lì, essa rimarrà in equilibrio stabile?

La risposta è **no** e ce lo dice il **teorema di Earnshaw**.

##### TEOREMA 2.4.1. - TEOREMA DI EARNSHAW.

Una collezione di cariche puntuali non possono essere mantenute in una configurazione di equilibrio stabile soltanto dall'interazione elettrostatica delle cariche con un campo elettrico.

In questa dimostrazione assumiamo che la carica sia positiva ( $q > 0$ ), ma la dimostrazione è *mutatis mutandis* la stessa per  $q < 0$ .

**OSSERVAZIONE.** La carica nella dimostrazione si suppone essere una **carica di prova**, e quindi il campo generato dalla carica  $q$  è trascurabile.

**DIMOStrAZIONE.** Supponiamo che la carica, immersa nel campo elettrico e non soggetta ad altre forze, è in equilibrio stabile in  $P = \vec{r}$ ; ciò significa che:

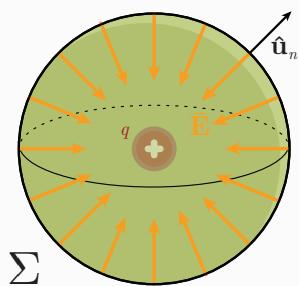
1. La carica di per sé è ferma; la forza totale agente sulla carica è dunque nulla, e dato che le uniche forze sulla carica in  $\vec{r}$  sono le forze di Coulomb si ha

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = 0 \underset{q \neq 0}{\implies} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

2. Per un (piccolo) spostamento  $\delta\vec{r}$  attorno a  $\vec{r}$ , la forza riporta la carica verso il punto  $\vec{r}$ , cioè la forza

$$\vec{F}(\vec{r} + \delta\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r} + \delta\vec{r})$$

deve puntare verso  $\vec{r}$ .



Consideriamo una superficie chiusa (arbitrariamente piccola) attorno alla carica. Per quanto abbiamo detto, in un qualunque suo punto la forza di Coulomb in tal punto deve essere diretta verso  $P = \vec{r}$ . Pertanto, se il campo è entrante la superficie, il flusso tramite la superficie è negativo...

$$\Phi \Sigma(\vec{E}) < 0 \quad (2.19)$$

... ma possiamo applicare la legge di Gauss per ricavare il valore del flusso tramite tale superficie, tuttavia si avrebbe

$$\Phi \Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} < 0 \implies q < 0$$

il che è un assurdo! Segue che non ci può essere equilibrio elettrostatico stabile.  $\square$

L'unica possibilità di avere una carica in equilibrio stabile è se si trovasse esattamente nello stesso punto di un'altra carica  $Q$  di segno opposto e quantità di carica maggiore. Infatti, in tal caso qualunque superficie, piccolo a piacere, scegliamo attorno al punto di equilibrio si avrà sempre flusso pari a

$$\Phi \Sigma(\vec{E}) = \frac{q + Q}{\epsilon_0}$$

per la legge di Gauss; questa volta non si ha alcun assurdo, dato che il campo elettrico è entrante e quindi il flusso è negativo e, se  $|Q| > |q|$ , allora anche il flusso secondo Gauss è negativo.

**DIGRESSIONE.** Da quanto detto, un sistema di cariche libere *dello stesso segno* non potrà ai restare in equilibrio stabile spontaneamente, ma necessariamente occorrono altre forze per vincolare le cariche.

Una conseguenza di ciò è che il modello dell'atomo di Rutherford *non* è stabile, essendo basato su una distribuzione fissata di cariche: nel *nucleo atomico* non ci potrebbe essere più di un protone senza compromettere la stabilità del nucleo! È grazie

all'interazione *nucleare forte* che, essendo particolarmente forte a distanze microscopiche, i protoni superano la repulsione elettrostatica tra di loro e permettono la stabilità dell'atomo.

CAPITOLO 3

# LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO, IL POTENZIALE ELETTRICO E LE LEGGI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA

*“Una volta che ti pompano 200 volt nel corpo, hai la tendenza a passare il resto della vita in un posacenere.”*

WOODY ALLEN, elettricista con la carriera andata in fumo.

## P<sup>ER</sup>

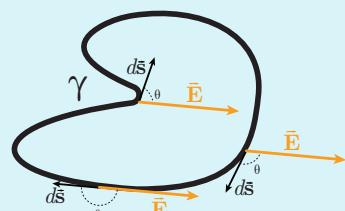
### 3.1 LA CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE

#### DEFINIZIONE 3.1.1. - CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE.

La circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva chiusa  $\gamma$ , parametrizzata da una funzione

$$\vec{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (3.1)$$



### 3.2 FORZE CONSERVATIVE E CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

**Dalle forze conservative...** La circuitazione ha particolare rilevanza in ambito fisico; la sua prima applicazione che vedremo è in una caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi. Prima però, riguardiamo rapidamente il concetto di lavoro e del suo ruolo per quelle forze dette forze conservatrici, trattato nel corso di FISICA I.

**DEFINIZIONE 3.2.1. - LAVORO.**

Dati due punti  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$ , il **lavoro** di una forza  $\vec{F}$  lungo una curva  $\gamma$  tra i due punti è definito come

$$W_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (3.2)$$

In generale, il lavoro dipende dal *percorso effettuato*: il lavoro compiuto da una stessa forza lungo due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  è differente. Per un caso particolare di forze, tuttavia, il lavoro dipende esclusivamente dagli estremi e non dal percorso effettuato.

**DEFINIZIONE 3.2.2. - FORZA CONSERVATIVA.**

Una forza  $\vec{F}$  è detta **conservativa** se per qualunque curva  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  tra due punti  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$  il lavoro è

$$W_{\gamma_1} = W_{\gamma_2} \quad (3.3)$$

In altre parole,  $\vec{F}$  è conservativa se il lavoro dipende *solo* dai punti iniziali e finali e non quale sia la curva lungo la quale si calcola.

**PROPOSIZIONE 3.2.1. - CARATTERIZZAZIONE DELLE FORZE CONSERVATIVE.**

Se una forza  $\vec{F}$  è conservativa, allora esiste una funzione  $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  detta **energia potenziale** tale che<sup>a</sup>

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (3.4)$$

e tale per cui

$$W = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = -\Delta U \quad (3.5)$$

In altri termini:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (3.6)$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{\nabla}U \cdot d\vec{s} \quad (3.7)$$

---

<sup>a</sup>Il meno è presente per motivi storici.

**OSSERVAZIONE.** Questo non è altro che la “versione fisica” del **teorema del gradiente**. Nelle “XXX”, a pag. 248 è possibile trovare l’enunciato *matematico* del teorema, dato che la dimostrazione è *mutatis mutandis* quella che segue.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo una curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [t_1, t_2]$$

Posto

$$\begin{cases} \vec{r}(t_A) = \vec{r}_A \\ \vec{r}(t_B) = \vec{r}_B \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_A}^{t_B} \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} dt = - \int_{t_A}^{t_B} \vec{\nabla}U \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} dt = - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} U(\vec{\mathbf{r}}(t)) dt = \\ &= - (U(\vec{\mathbf{r}}(t_B)) - U(\vec{\mathbf{r}}(t_A))) = U(\vec{\mathbf{r}}_A) - U(\vec{\mathbf{r}}_B) \end{aligned}$$

Infatti,

$$\frac{d}{dt} U(\vec{\mathbf{r}}(t)) = \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \vec{\nabla}U \cdot \frac{\partial r}{\partial t}. \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Il potenziale è sempre definito a meno di costante additiva. Infatti, se considero due potenziali  $U$  e  $U' = U + U_0$  dove  $U_0$  è una costante reale, si ha che

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}U' = -\vec{\nabla}(U + U_0) = -\vec{\nabla}U - \underbrace{\vec{\nabla}U_0}_{=0} = -\vec{\nabla}U$$

**...ai campi vettoriali conservativi** In modo analogo a come abbiamo fatto per le forze conservative, possiamo facilmente definire un *campo vettoriale conservativo*.

**DEFINIZIONE 3.2.3. - CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO.**

Una campo vettoriale  $\vec{\mathbf{G}}$  è detto **conservativo** se per qualunque curva  $\gamma_1, \gamma_2$  tra due punti  $\vec{\mathbf{r}}_A$  e  $\vec{\mathbf{r}}_B$  si ha

$$\int_{\gamma_1} \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{s} \quad (3.8)$$

**PROPOSIZIONE 3.2.2. - CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI.**

Se un campo vettoriale  $\vec{\mathbf{G}}$  è conservativo, allora esiste un campo scalare  $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  detto **potenziale** tale per cui<sup>a</sup>

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{G}} = -\vec{\nabla}\phi \\ \Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{G}}) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

per ogni curva chiusa  $\gamma$ .

<sup>a</sup>Il meno è presente per motivi storici.

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 3.2.1. Per ottenere il risultato come enunciato nella tesi - ossia come circuitazione - si noti che, avendo

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{\mathbf{r}}_B) - \phi(\vec{\mathbf{r}}_A),$$

allora, poiché si ha  $\vec{\mathbf{r}}_a = \vec{\mathbf{r}}_B$ , vale

$$\Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{G}}) = \oint_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Il potenziale è sempre definito a meno di costante additiva. Infatti, se considero due potenziale  $\phi$  e  $\phi' = \phi + \phi_0$  dove  $\phi_0$  è una costante reale, si ha che

$$\vec{G} = -\vec{\nabla}\phi' = -\vec{\nabla}(\phi + \phi_0) = -\vec{\nabla}\phi - \underbrace{\vec{\nabla}\phi_0}_{=0} = -\vec{\nabla}\phi$$

### 3.3 IL POTENZIALE ELETTRICO

Nei diversi esempi di campi elettrostatici visti nel Capitolo 1 a pagina 3 abbiamo sempre trovato un potenziale che ci permetteva di semplificare notevolmente la trattazione del problema. Come preannunciato, questo non è un caso: infatti, il *campo elettrostatico* è sempre conservativo.

#### TEOREMA 3.3.1. - IL CAMPO ELETROSTATICO È CONSERVATIVO.

Il campo elettrostatico  $\vec{E}$  è conservativo, ossia è il gradiente (cambiato di segno) di un opportuno campo scalare  $V$ .

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (3.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamolo inizialmente per il campo elettrostatico generato da una carica puntiforme. Il campo di Coulomb è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

Ricordiamo che l'operatore nabla in coordinate sferiche diventa

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \hat{u}_\varphi$$

Si verifica facilmente che

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + A \quad (3.11)$$

è il potenziale del campo di Coulomb, dove  $A$  è una costante opportuna:

$$-\vec{\nabla}V = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + A \right) \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \vec{E}$$

Si osservi che per i campi elettrostatici generati da un sistema di cariche  $q_i$  vale il principio di sovrapposizione; noto che ciascuno di questi campi sono conservativi e

$$\vec{E}_i = -\vec{\nabla}V_i$$

allora anche il campo complessivo generato dal sistema di cariche è conservativo e il potenziale è la somma dei potenziali:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = -\vec{\nabla}V \quad (3.12)$$

dove

$$V = \sum_i V_i \quad (3.13)$$

Il caso di una distribuzione continua di carica segue da queste relazioni, passando al continuo.  $\square$

La costante  $A$  nella equazione (3.11) dipende dalle *condizioni al contorno* della situazione che stiamo studiando. Tuttavia, il fatto che la forza tra due cariche *decresca* con la distanza ci suggerisce che tra *cariche molto lontane* tra loro la forza sia *trascurabile*. Una condizione al contorno molto comune è quella quindi di supporre che

$$E(+\infty) = 0 \quad F(+\infty) = V(+\infty) \quad (3.14)$$

il che ci porta a dire che  $A = 0$ . Nel caso in cui ci sia tale condizione al contorno possiamo avere i seguenti potenziali:

- Per una singola carica  $q$ , centrata nell'origine, il potenziale in  $\vec{r}$  è:

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.15)$$

- Per un sistema di cariche  $q_i$ , ciascuna posta in  $\vec{r}_i$ , il potenziale in  $\vec{r}$  è

$$V(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (3.16)$$

- Per una distribuzione continua di cariche in un volume  $V$  è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' \quad (3.17)$$

- Per una distribuzione continua di cariche su una superficie  $\Sigma$  è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Sigma \quad (3.18)$$

- Per una distribuzione continua di cariche su una curva  $\gamma$  è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\lambda(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds \quad (3.19)$$

**OSSERVAZIONE.** il potenziale si considera a tutti gli effetti un campo scalare *continuo*: se così non fosse, le derivate spaziali sarebbero infinite nelle discontinuità e quindi avremmo in certi punti del dominio di definizione del potenziale un campo elettrostatico infinito, che nella pratica non è possibile avere.

**ATTENZIONE!** Come potremo vedere più avanti, in generale il campo *elettrico* può dipendere dal tempo; tuttavia, in tal caso il campo **non** è conservativo e dunque non esiste un potenziale. Solo il campo elettrostatico, cioè un campo elettrico che *non varia nel tempo*, ammette un potenziale.

Una conseguenza immediata del fatto che il campo elettrostatico è conservativo è il seguente.

**COROLARIO 3.3.1. - LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETROSTATICO È NULLA.**

*Su ogni curva chiusa  $\gamma$  nello spazio, la circuitazione del campo elettrostatico è nulla.*

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = 0 \quad (3.20)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il campo elettrostatico è conservativo, dunque per la caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi<sup>a</sup> segue la tesi.  $\square$

<sup>a</sup>Si veda la proposizione 3.2.2 a pag. 41.

**Energia potenziale e potenziale elettrico** La forza di Coulomb è conservativa e ammette un'**energia potenziale**  $U$  tale che  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ , mentre abbiamo dimostrato poc' anzi che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Dalla legge  $\vec{F} = q\vec{E}$  che lega campo elettrostatico e forza di Coulomb si ha immediatamente una relazione tra l'energia potenziale e il potenziale elettrico:

$$U = qV \quad (3.21)$$

**ESEMPIO.** Per un carica puntiforme  $Q$  si ha potenziale

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.22)$$

e l'energia potenziale che un'altra carica  $q$  posta in  $r$  ha, se soggetta al campo elettrostatico generato da  $Q$  è

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.23)$$

Dalla relazione (3.21) è evidente che anche l'energia si pone nulla quando la distanza della carica  $q$  dalla sorgente di campo è molto elevata:

$$U(+\infty) = 0$$

**Unità di misura** Dalla relazione (3.21) si definisce l'unità di misura del potenziale, il **volt**.

$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

**UNITÀ DI MISURA.**

**POTENZIALE:** volt (V) o joule su coulomb ( $\frac{\text{J}}{\text{C}}$ ).

**Dimensioni:**  $[V] = \frac{[J]}{[C]} = \text{ML}^2\text{T}^{-3}\text{I}^{-1}$

Abbiamo già visto che il campo elettrico, dalla formula  $\vec{F} = q\vec{E}$ , ha unità di misura il newton su coulomb ( $\frac{\text{N}}{\text{C}}$ ). Tuttavia, grazie al fatto che  $\vec{E}$  è conservativo ed è quindi un *gradiente* rispetto ad una variabile che ha dimensioni di una lunghezza, può essere definito anche come **volt su metro** ( $\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ).

**UNITÀ DI MISURA.**

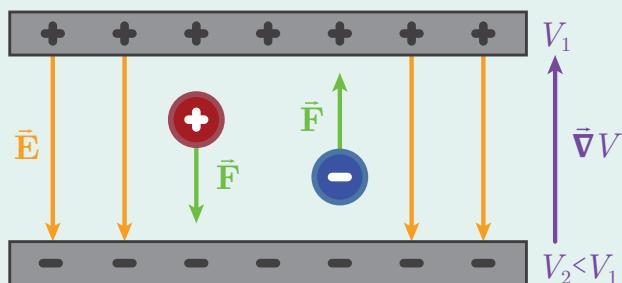
**CAMPPO ELETTRICO:** volt su metro ( $\frac{V}{m}$ ) o newton su coulomb ( $\frac{N}{C}$ ).

$$\text{Dimensioni: } [E] = \frac{[F]}{[q]} = \text{LMT}^{-3}\text{I}^{-1}.$$

**OSSERVAZIONE.** Come già detto, il potenziale è definito a meno di una costante additiva. Generalmente si pone il sistema di riferimento in modo che il potenziale all'infinito (o ai bordi del dominio di definizione) sia una costante, generalmente zero per  $V \rightarrow \infty$ . Poiché non si può considerare un sistema di questo genere, l'unica condizione misurabile realmente (ed operativamente) è la **differenza di potenziale**.

**Potenziale e attrattività delle cariche****ESEMPIO - ARMATURE ELETTRICHE.**

Consideriamo due *piastre elettrostatiche* di segno opposto, come in figura.



Il funzionamento di tale sistema non è dissimile, a livello puramente qualitativo, da un dipolo elettrico: tra le due piastre il campo è sostanzialmente analogo a quello sull'asse verticale congiungente i dipoli e quindi è diretto dalla piastra positiva a quella negativa. Poiché  $\vec{F} = q\vec{E}$ , le cariche positive saranno attratte verso la parte negativa, quelle negative verso la piastra positiva.

Essendo  $\vec{\nabla}V = -\vec{E}$ , all'interno delle piastre il *gradiente del potenziale* è un campo vettoriale diretto dalla *piastra negativa a quella positiva*. Per avere tale direzione, è necessario passare da un potenziale *minore* ad uno *maggior*, ossia  $V_2 < V_1$ .

Questo ragionamento si può anche generalizzare in altri contesti, osservando dunque che il campo elettrico è diretto dal **potenziale maggiore al potenziale minore**, e quindi

- cariche **positive** si muovono verso la zona di **minor** potenziale.
- cariche **negative** si muovono verso la zona di **maggior** potenziale.

Ricordando inoltre che l'energia potenziale è  $U = qV$ , si può notare che le cariche vanno *sempre, indistintamente* dal loro segno, verso un'**energia potenziale minore**.

**Superfici equipotenziali****DEFINIZIONE 3.3.1. - SUPERFICI EQUIPOTENZIALI.**

Data un sistema in cui si ha una certa funzione di potenziale  $V$ , le **superfici equipotenziali** sono gli insiemi descritti dall'equazione

$$V(\vec{r}) = \text{const} \quad (3.24)$$

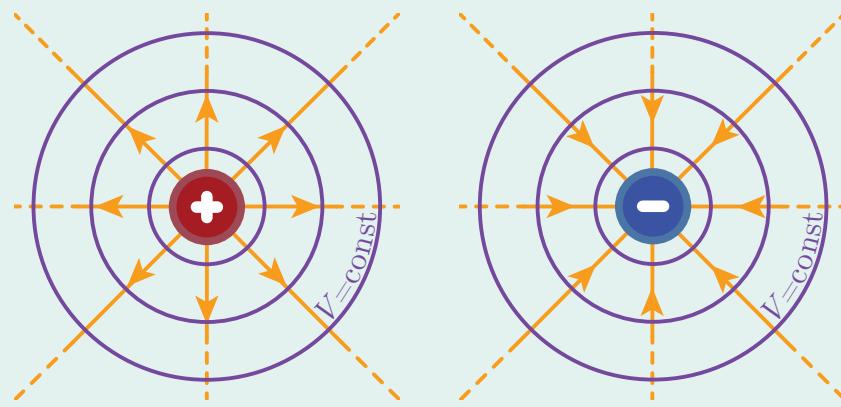
Le superfici equipotenziali sono sempre ortogonali, punto per punto, a  $\vec{\nabla}V$  e quindi anche al campo vettoriale elettrostatico  $\vec{E}$ .

**ESEMPI.**

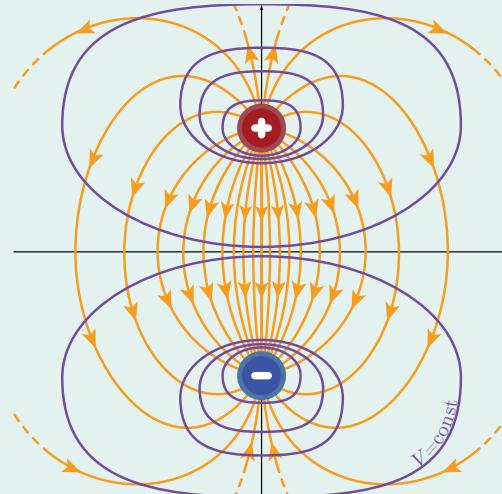
- Per il potenziale della carica puntiforme,

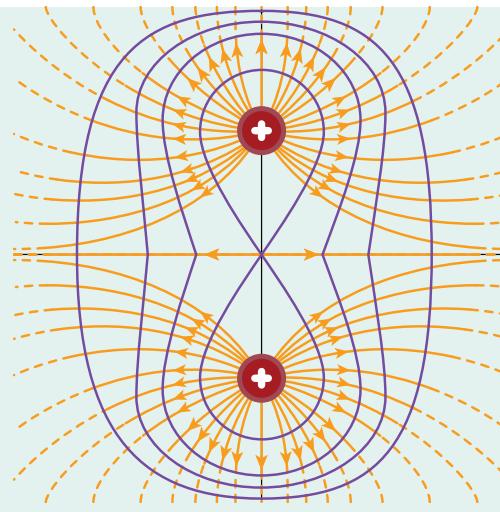
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const} \implies r = \text{const}$$

le superfici equipotenziali sono circonferenze concentriche di raggio  $r$ , al variare di  $r$ :



- Per il dipolo elettrico  $+/-$  e quello  $++$





### 3.4 DISCONTINUITÀ DI CAMPO ELETTRICO TRA SUPERFICI

Precedentemente abbiamo ricavato il campo elettrostatico e il potenziale di volumi uniformemente carichi, come una sfera. Ci chiediamo ora quale sia il campo elettrostatico e di conseguenza il potenziale di una **superficie cava** uniformemente carica, come ad esempio una superficie sferica o un cilindro.

**Superficie sferica uniformemente carica** Si consideri una superficie sferica di raggio  $R$  con densità superficiale costante  $\sigma$ . Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'origine coincida con il centro della sfera. La carica totale sulla superficie è

$$q = 4\pi R^2 \sigma \quad (3.25)$$

Distinguiamo, come al solito, due casi: il campo elettrico interno ( $r < R$ ) e quello esterno ( $r > R$ ) alla sfera.

- $r < R$ . Utilizziamo la *legge di Gauss* su una superficie  $\Sigma$  di raggio  $r < R$  centrata nell'origine. Dalla definizione di flusso abbiamo che

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int E(r)d\Sigma = 4\pi r^2 E_r(r)$$

dato che  $E(r)$  è costante su  $\Sigma$ . Tuttavia, poiché la carica è concentrata tutta sulla sfera di raggio  $R$ , la superficie  $\Sigma$  non contiene alcuna carica; pertanto, per la *legge di Gauss*

$$4\pi r^2 E_r(r) = \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

da cui segue che

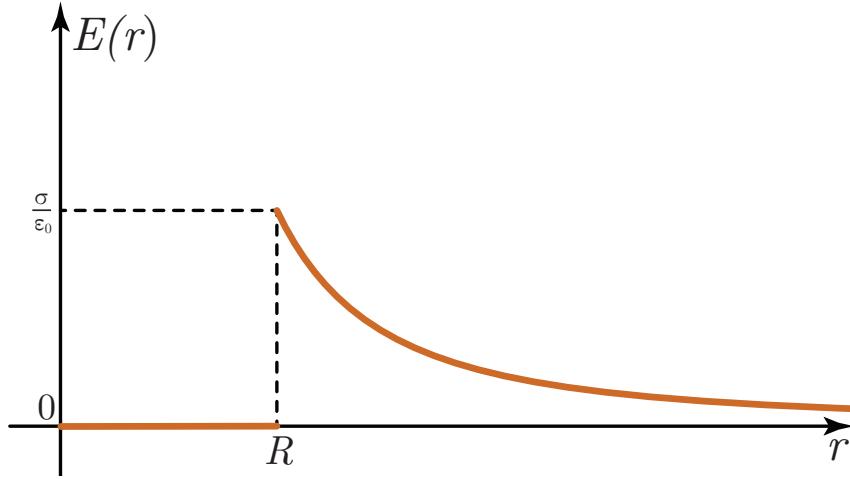
$$\vec{E}(r) = 0 \quad (3.26)$$

- $r > R$ . Sulla base di osservazioni precedenti, il comportamento esterno è analogo a quello di una carica puntiforme nell'origine.

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \quad (3.27)$$

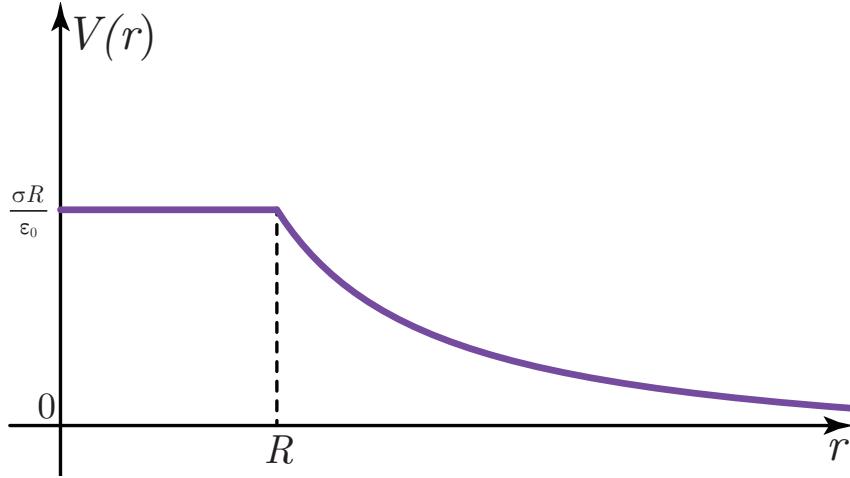
Il campo elettrico, pertanto, è *discontinuo* e vale

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r & \text{se } r > R \end{cases} \quad (3.28)$$



Si osserva una discontinuità pari a  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  tra il campo elettrico interno ed esterno alla superficie. Data la dipendenza di  $\vec{E}$  dalla sola coordinata radiale, per ottenere il potenziale è sufficiente integrare il campo elettrico rispetto ad  $r$  e imporre le ben note condizioni di contorno ( $V(+\infty) = 0$  e continuità in  $R$ ):

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{se } r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{se } r > R \end{cases} \quad (3.29)$$



**Superficie cilindrica uniformemente carica** Si consideri una superficie cilindrica infinita e di raggio  $R_0$  con densità superficiale costante  $\sigma$ , dove le cariche sono disposte sulla faccia laterale. Per semplicità, poniamo il sistema di riferimento in modo che l'asse  $z$  passi per l'asse del cilindro. La carica totale sulla superficie è infinita, in quanto

$$q = A_{\text{laterale}}\sigma = 2\pi R_0 L\sigma \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad (3.30)$$

Distinguiamo due casi: il campo elettrico interno ( $R < R_0$ ) e quello esterno ( $R > R_0$ ) al cilindro.

- $R < R_0$ . Utilizziamo la legge di Gauss su un cilindro  $\Sigma$  di raggio  $R < R_0$  con asse sull'asse  $z$ . Dalla definizione di flusso abbiamo che

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int E(R)d\Sigma = 2\pi R L E_R(R)$$

dato che  $E(R)$  è costante su  $\Sigma$ . Tuttavia, poiché la carica è concentrata tutta sul cilindro di raggio  $R_0$ , la superficie  $\Sigma$  non contiene alcuna carica; pertanto, per la legge di Gauss

$$2\pi R L E_R(R) = \Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

da cui segue che

$$\vec{\mathbf{E}}(R) = 0 \quad (3.31)$$

- $R > R_0$ . Come il campo esterno alla sfera (piena/cava) è simile al campo di Coulomb, il comportamento *esterno* del cilindro cavo è analogo a quello di un filo infinito carico. Infatti, posto

$$\lambda = \frac{q}{L} = 2\pi R_0 \sigma$$

applichiamo la legge di Gauss su un cilindro  $\Sigma$  di raggio  $R > R_0$  con asse sull'asse  $z$ :

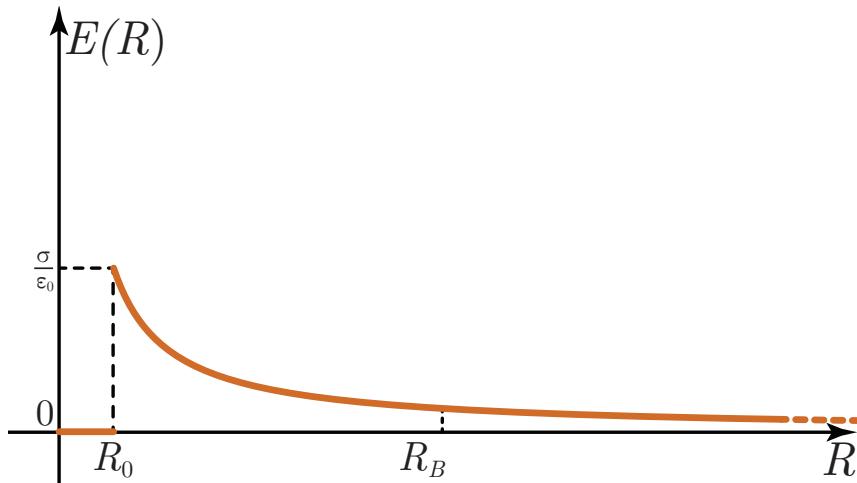
$$2\pi R L E_R(R) = \Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} = \frac{2\pi R_0 L \sigma}{\epsilon_0}$$

segue

$$\vec{\mathbf{E}}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 R} \hat{\mathbf{u}}_R \quad (3.32)$$

Il campo elettrico, pertanto, è discontinuo e vale

$$\vec{\mathbf{E}}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } R < R_0 \\ \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{u}}_R & \text{se } R > R_0 \end{cases} \quad (3.33)$$



Si osserva una discontinuità pari a  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  tra il campo elettrico interno ed esterno alla superficie. Per calcolare il potenziale, notiamo che il campo dipende esclusivamente dalla coordinata radiale delle coordinate cilindriche e quindi la relazione  $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V$  si trasforma in

$$E(R) = -\frac{\partial V}{\partial R}$$

da cui

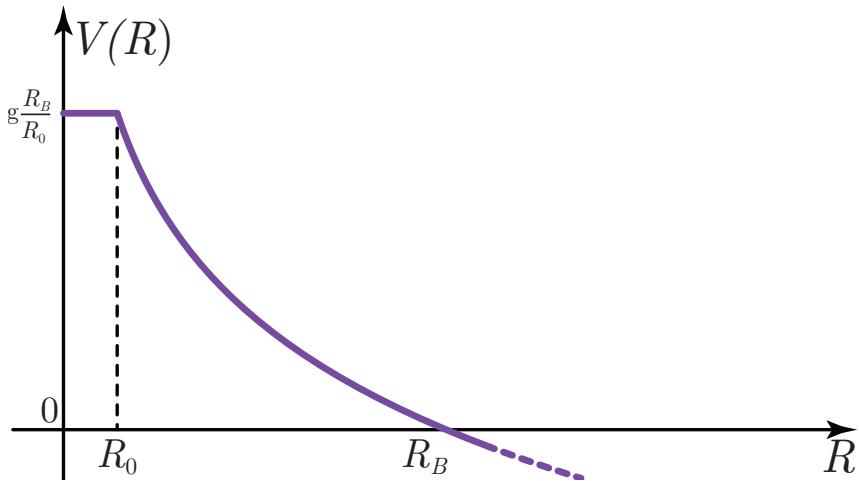
$$V(R) = - \int E(R) dR + A$$

con  $A$  costante determinate dalle condizioni al contorno. Integrando, otteniamo

$$V(R) = \begin{cases} A & \text{se } R < R_0 \\ -\frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \log R + B = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log R + B & \text{se } R > R_0 \end{cases}$$

con  $A$  e  $B$  costanti. Tuttavia, incappiamo in un apparente *problema*: se prendiamo come punto per il potenziale nullo l'infinito, il potenziale *diverge*! Non c'è da meravigliarsi di ciò, dato che questa è una situazione fisica irrealizzabile nella realtà: avendo preso un cilindro di lunghezza infinita, la distribuzione di carica si estende anche all'infinito. Ricordiamo che il potenziale è determinato soltanto a meno di costanti: una scelta migliore, in questi casi, è di impostare il punto di potenziale nullo in un posto a nostra scelta. Ad esempio, prendiamo una distanza radiale *arbitraria*  $R_B$  e fissiamo  $V(R_B) = 0$ : imponendo questa condizione novella e la solita continuità in  $R = R_0$ , otteniamo il potenziale continuo

$$V(R) = \begin{cases} \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \log \frac{R_B}{R_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{R_B}{R_0} & \text{se } R < R_0 \\ \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \log \frac{R_B}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{R_B}{R} & \text{se } R > R_0 \end{cases} \quad (3.34)$$



Chiaramente rimarrà la divergenza del potenziale a grandi distanze, ma la *scelta* effettuata garantisce almeno un punto in cui il potenziale si *annulla*.

**Il caso generale** Sebbene l'andamento del campo elettrico nei due esempi precedenti è leggermente diverso, per entrambi i casi la discontinuità tra campo elettrico interno ed esterno in uno stesso punto è pari al valore  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Non è una coincidenza fortuita, bensì possiamo mostrare che questo è *sempre* così.

**PROPOSIZIONE 3.4.1. - DISCONTINUITÀ DI CAMPO ELETTRICO TRA SUPERFICI.**

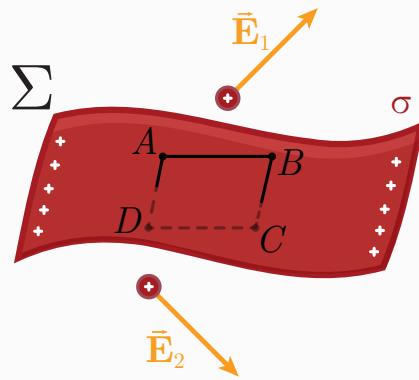
*La differenza di campo elettrico tra due lati di una superficie carica è, punto per punto, pari a*

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo tale proprietà per un foglio carico (supponiamo positivamente), dato che la superficie si può considerare almeno localmente come un foglio carico.

Posta una carica positiva su una faccia del foglio, ci aspettiamo che si allontani da esso "dallo stesso lato del foglio" a causa di un campo elettrico  $\vec{E}_1$ ; viceversa, mettendo

una particella positiva dall'altra faccia è prevedibile che la particella sarà respinta dalla superficie da quello stesso lato dalla forza generata dal campo elettrico  $\vec{E}_2$ , ossia dal verso opposto di  $\vec{E}_1$ : ci dovrà essere necessariamente una discontinuità di campo elettrico per avere questo cambio drastico di verso.



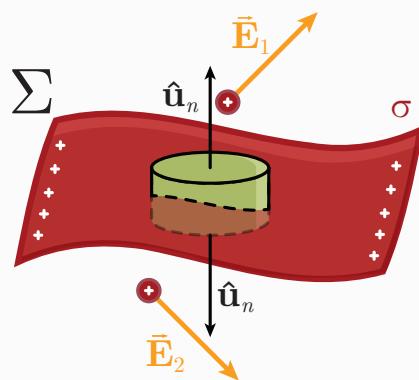
Disegniamo un circuito rettangolare  $\gamma = [ABCD]$  che interseca il campo e che sia sufficientemente piccolo in modo da considerare  $\vec{E}$  costante sul circuito. Dato che la circuitazione lungo  $\gamma$  è influenzata solo dalle componenti tangenziali  $E_{i,t}$  e non dalle componenti perpendicolari  $E_{i,n}$  al circuito, si ha

$$0 = \Gamma_\gamma(\vec{E}) = E_{1,t} d_{AB} - E_{2,t} d_{CD} = (E_{2,t} - E_{1,t}) d_{AB}$$

Da cui segue che

$$E_{2,t} = E_{1,t},$$

ossia che le componenti tangenziali devono essere uguali.



Consideriamo lo stesso foglio, questa volta intersecandolo con una superficie cilindrica con altezza sufficientemente piccola in modo che il campo elettrico è considerabile costante lungo la superficie di base. Calcolando il flusso e confrontandolo con quello ottenuto dalla legge di Gauss, ricordiamo che lungo la superficie laterale esso è nullo:

$$\frac{q_{A_{base}}}{\epsilon_0} = \Phi_\Sigma(\vec{E}) = E_{1,n} A_{base} - E_{2,n} A_{base}$$

Da cui segue invece

$$E_{1,n} - E_{2,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Allora, facendo la differenza punto per punto, si ha

$$\Delta \vec{E} = \underbrace{(E_{1,t} - E_{2,t})}_{=0} \hat{u}_t + \underbrace{(E_{1,n} - E_{2,n})}_{=\frac{\sigma}{\epsilon_0}} \hat{u}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n \quad \square$$

### 3.5 LE EQUAZIONI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA NEL VUOTO

A questo punto siamo arrivati ad avere tutti gli strumenti e i risultati necessari per enunciare le **equazioni di Maxwell relative all'elettrostatica**.c Tuttavia, prima di far ciò è importante riprendere in mano alcuni risultati matematici e fisici che ci serviranno a tal scopo.

#### RICORDIAMO...

- 1a **Teorema della divergenza:** si consideri un volume  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  compatto con bordo liscio  $\partial V$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \int_{\partial V} \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

o, equivalentemente,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \Phi_{\Sigma}(\vec{G})$$

- 2a **Legge di Gauss:** il flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$  attraverso un'area *chiusa* è eguale alla quantità di carica contenuta all'interno della superficie, comunque siano distribuite, divisa per  $\epsilon_0$ .

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

dove  $V$  è uno spazio delimitato da  $\Sigma$ , ossia tale che  $\partial V = \Sigma$ .

- 1b **Teorema del rotore:** si consideri una curva  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  semplice - ossia senza intersezioni con sé stessa, chiusa e liscia a tratti; si consideri inoltre una superficie  $\Sigma$  liscia tale che  $\partial \Sigma = \gamma$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

o, equivalentemente,

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\nabla} \times \vec{G}) = \Gamma_{\gamma}(\vec{G})$$

- 2b **Circuitazione del campo elettrico nulla:** su ogni curva chiusa  $\gamma$  nello spazio, la circuitazione del campo elettrostatico è nulla.

$$\Gamma_{\gamma}(\vec{E}) = 0$$

**TEOREMA 3.5.1. - EQUAZIONI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA NEL VUOTO.**

Dato il campo elettrostatico  $\vec{E}$  e una densità di carica  $\rho$ , valgono le seguenti relazioni:

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{E}) = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Legge dell'induzione di Faraday	$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

**DIMOSTRAZIONE.** Per ottenere la prima legge, partiamo dalla legge di Gauss

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

scritta nella sua formulazione integrale:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Applichiamo il teorema della divergenza al primo membro:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Poiché questa relazione è vera per un qualunque volume  $V$  arbitrario, si deve necessariamente avere uguaglianza degli integrandi, ottenendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Per ottenere la seconda legge, partiamo dalla circuitazione nulla del campo elettrostatico

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = 0$$

scritta nella sua formulazione integrale:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Applicando il teorema del rotore al membro non nullo:

$$\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0$$

Poiché questa relazione è vera per una qualunque superficie  $\Sigma$  arbitraria, si deve necessariamente avere che l'unico termine non dipendente dalla superficie sia sempre nullo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

□

**OSSERVAZIONE.** Mentre la prima equazione vale in generale, la seconda vale solo in elettrostatica, considerando un campo elettrico statico e in assenza di campo magnetico. Nel caso generale, vedremo che il rotore del campo elettrico dipende dalla variazione temporale del campo magnetico. Quando studieremo i fenomeni magnetici dipendenti dal tempo spiegheremo anche che cos'è l'*induzione* e il motivo per cui dà il nome alla legge omonima.

#### ESEMPIO - SFERA UNIFORMEMENTE CARICA.

Verifichiamo che vale la prima equazione dell'elettrostatica nel caso del campo generato da una sfera carica uniformemente:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \hat{u}_r & \text{se } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_r & \text{se } r > R \end{cases}$$

Data la divergenza di un campo in coordinate sferiche<sup>a</sup>, che ricordiamo essere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}$$

allora si ha, per un punto *esterno* alla sfera (in cui non c'è alcuna densità di corrente) vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) = 0 \quad (3.35)$$

mentre per un punto *interno* alla sfera (in cui si ha una densità di corrente  $\rho$ ) vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\rho R}{3\epsilon_0 R^2} \hat{u}_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\rho R}{3\epsilon_0 R^2} \right) = \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial r^2}{\partial r}} \cancel{\frac{\rho}{\epsilon_0}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

---

<sup>a</sup>Nelle "XXX", a pag. 258 è possibile trovare a grandi linee il procedimento per ricavare la divergenza in coordinate sferiche.

### 3.6 L'EQUAZIONE DI POISSON E DI LAPLACE

L'irrotazionalità del campo elettrostatico garantita dalla *legge di induzione di Faraday* ci dice che, almeno localmente, è anche conservativo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \iff \exists V : \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Sostituendo nella *legge di Gauss*, otteniamo

$$\vec{\nabla}E = \frac{\rho}{\epsilon} \implies \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

che è un'equazione alle derivate parziali detta **equazione di Poisson**.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.36)$$

Questa equazione differenziale ci descrive il potenziale in una regione dove è presente una sorgente di densità di carica  $\rho$ .

In una regione priva di cariche si ha  $\rho \equiv 0$ ; l'**equazione di Laplace** descrive il potenziale in tale regione.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.37)$$

Imponendo delle opportune *condizioni di contorno*, che siano di natura *fisica* o imposte come tali per *convenzione*, potremmo idealmente ricavare le soluzioni di queste equazioni e determinare in modo prettamente matematico il potenziale - e di conseguenza anche il campo elettrostatico. Il problema principale è che *non sempre* è possibile trovare facilmente una soluzione; tuttavia, per alcuni specifici casi, ad esempio campi che presentano delle *simmetrie* interessanti, possiamo calcolare senza troppi problemi il potenziale.

**L'equazioni di Poisson e di Laplace con simmetria sferica** Consideriamo un campo a simmetria sferica, ossia dipendente esclusivamente dalla distanza radiale:

$$V(\vec{r}) = V(r)\hat{\mathbf{u}}_r$$

Dato che il laplaciano in coordinate sferiche è

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

allora in un punto dello spazio dove *non c'è* densità di carica si ha potenziale dato dalla soluzione dell'*equazione di Laplace*

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) = 0$$

Facendo gli opportuni calcoli...

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) &= 0 \\ r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= A \\ \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= \frac{A}{r^2} \end{aligned}$$

... otteniamo il potenziale

$$V(r) = -\frac{A}{r} + B \quad (3.38)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti date dalle condizioni al contorno.

In un punto dello spazio dove c'è densità di carica  $\rho$  si ha potenziale dato dalla soluzione dell'*equazione di Poisson*

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Consideriamo il caso di  $\rho$  costante, per semplicità. Facendo gli opportuni calcoli...

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \\ r^2 \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r^3 + C \\ \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{C}{r^2} \end{aligned}$$

... otteniamo il potenziale

$$V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 - \frac{C}{r} + D \quad (3.39)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti date dalle condizioni al contorno.

**ESEMPIO - SFERA UNIFORMEMENTE CARICA.**

Il campo elettrostatico della sfera uniformemente carica di raggio  $R$  è un campo a simmetria radiale, pertanto il potenziale soddisfa, all'interno e all'esterno della sfera, le equazioni di Poisson e Laplace trovate prima.

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{6\epsilon_0}r^2 - \frac{C}{r} + D & \text{se } r < R \\ -\frac{A}{r} + B & \text{se } r > R \end{cases} \quad (3.40)$$

Ci basta ora impostare le condizioni al contorno.

- Per convenzione, si suppone che il potenziale per  $r \rightarrow \infty$  tenda a 0, dato che il campo elettrico si considera trascurabili a enormi distanze.<sup>a</sup>

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$$

Imponendo ciò, si trova

$$B = 0$$

- Quando siamo a grandi distanze, la sfera carica uniformemente è assimilabile ad una carica puntiforme, pertanto l'altra condizione al limite è che il campo elettrico della sfera all'esterno sia quello della sfera; da ciò è necessario impostare

$$A = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

- Sulla base della continuità del potenziale, sul dominio del campo elettrico il potenziale si considera *finito*, pertanto poniamo

$$C = 0$$

in modo da togliere il termine  $\frac{1}{r}$ , che renderebbe il potenziale infinito in  $r = 0$ .

- Per garantire la continuità del potenziale si deve impostare

$$V_{interno}(R) = V_{esterno}(R)$$

Risolvendo l'equazione

$$-\frac{\rho}{6\epsilon_0}R^2 + D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \implies D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\rho}{6\epsilon_0}R^2$$

Il potenziale complessivo è unico ed è

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{6\epsilon_0} [R^2 - r^2] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} [R^2 - r^2] + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} & \text{se } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{se } r > R \end{cases} \quad (3.41)$$

<sup>a</sup>Questo è lecito farlo perché lo **zero del potenziale** è arbitrario, grazie al fatto che il potenziale stesso è definito a meno di costanti: sostanzialmente, come decido di misurare il potenziale è una scelta di chi studia il sistema, anche se generalmente ci sono motivi fisici (come in questo caso) o geometrici per fare una certa scelta. Ciò non significa, tuttavia, che tale scelta è *insignificante*, dato che *ogni* valore del potenziale deve essere misurato tenendo conto di tale zero.

**L'equazione di Laplace con simmetria cilindrica** Consideriamo un campo a simmetria cilindrica, ossia dipendente esclusivamente dalla distanza assiale:

$$V(\vec{r}) = V(R)\hat{\mathbf{u}}_R$$

Dato che il laplaciano in coordinate cilindriche è

$$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

allora in un punto dello spazio dove non c'è densità di carica si ha potenziale dato dalla soluzione dell'*equazione di Laplace*

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) = 0$$

Facendo gli opportuni calcoli...

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right) &= 0 \\ r \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= A \\ \frac{\partial}{\partial r} V(r) &= \frac{A}{r} \end{aligned}$$

... otteniamo il potenziale

$$V(r) = A \log r + B \quad (3.42)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti date dalle condizioni al contorno.



CAPITOLO **4**

# CONDUTTORI E CONDENSATORI

---

*“Sono un esperto di elettricità. Mio padre ha occupato la cattedra di elettricità applicata nella prigione di stato.”*

*W.C. FIELDS, dopo aver finito le citazioni.*

## N<sup>EL</sup>

### 4.1 CONDUTTORI

#### DEFINIZIONE 4.1.1. - CONDUTTORE.

Un **conduttore** è un materiale in cui alcune delle cariche elettriche che li costituiscono sono libere di muoversi.

Per caricare un conduttore possiamo utilizzare diversi metodi, ad esempio con dell’induzione elettrostatica, ma per mantenerlo carico abbiamo bisogno di tenerlo *isolato* da qualunque altro conduttore.

In presenza di un campo elettrico  $\vec{E}$ , le cariche libere all’interno possono muoversi in modo ordinato e dare vita ad una *corrente elettrica*, ma di questo ci occuperemo nel Capitolo 5. Dato che stiamo studiando i fenomeni elettrostatici, le cariche sono in equilibrio se non abbiamo un *moto di cariche*. Ciò si ha, in termini di condizione media macroscopica, se all’interno del materiale si ha

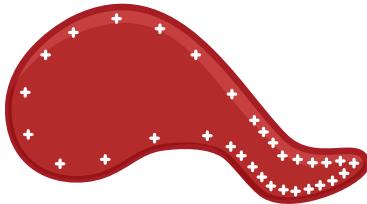
$$\vec{E} = 0 \tag{4.1}$$

Poiché il campo elettrico è nullo, qualunque superficie si consideri *all’interno* del conduttore avrà flusso nullo; per la legge di Gauss, questo significa che *strettamente all’interno* del conduttore *non ci sono cariche!*

Con ciò non intendiamo che il corpo *non* è carico - sennò che stiamo a studiarlo? - bensì che non c’è un eccesso di carica di un segno o dell’altro, ma questo eccesso può stare *solo* sulla superficie del conduttore, con distribuzione di carica superficiale

$$\sigma = \mathcal{P}q\Sigma$$

Per di più, questa distribuzione di carica *non* è generalmente uniforme, bensì si concentrano maggiormente dove il **raggio di curvatura** è minore.



**I conduttori come superfici equipotenziali** Un'altra conseguenza fondamentale è che il potenziale deve essere *costante* in ogni punto del conduttore; in particolare ciò è vero sui punti della superficie: la superficie di un conduttore è sempre una *superficie equipotenziale*. In quanto tale, in un punto esterno vicino al conduttore il gradiente del potenziale e quindi il campo elettrico sono ortogonali alla superficie del conduttore, indipendentemente da quale sia la sua forma. Vale pertanto il cosiddetto **teorema di Coulomb**.

#### TEOREMA 4.1.1. - TEOREMA DI COULOMB.

Il campo elettrico all'esterno di un conduttore con densità superficiale di carica  $\sigma$  è

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n \quad (4.2) \quad \square$$

Il verso è *uscente* il conduttore se la densità di carica è positiva, *entrante* se è negativa.

**Conduttori connessi e potenziale** Ponendo a contatto due o più conduttori tramite un filo conduttore (trascurabile), si ottiene un *unico corpo conduttore*: all'equilibrio deve valere la condizione  $\vec{E} = 0$  e  $V = \text{const}$ , ossia il potenziale - che inizialmente poteva essere differenze su ciascun conduttore - deve diventare uguale su tutti i corpi.

**ESEMPIO.** Consideriamo due sfere di carica  $q_i$ , densità di carica  $\sigma_1$  costante e raggio  $R_i$ , per  $i = 1, 2$ . Dato che il campo elettrico esterno è  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$ , per continuità del potenziale esse hanno potenziali pari a

$$V_1 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \quad V_2 = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

Se le collegiamo con un filo conduttore trascurabile, all'equilibrio il potenziale diventa unico e pari a  $V'_1 = V'_2 = V$  costante, con  $V'_i$  il potenziale su ciascuna sfera dopo averle collegate. Da questa relazione si ottiene come si distribuisce la carica totale

$$q_{tot} = q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$$

sulle sfere. Infatti, se  $\sigma'_i$  sono le densità di corrente sulle sfere *dopo* averle collegate, si ha

$$\begin{aligned} V'_1 &= V'_2 \\ \frac{\sigma'_1 R_1}{\cancel{\epsilon_0}} &= \frac{\sigma'_2 R_2}{\cancel{\epsilon_0}} \end{aligned}$$

$$\frac{q'_1 R_1}{A\pi R_1^2} = \frac{q'_2 R_2}{A\pi R_2^2}$$

$$\frac{q'_1}{R_1} = \frac{q'_2}{R_2}$$

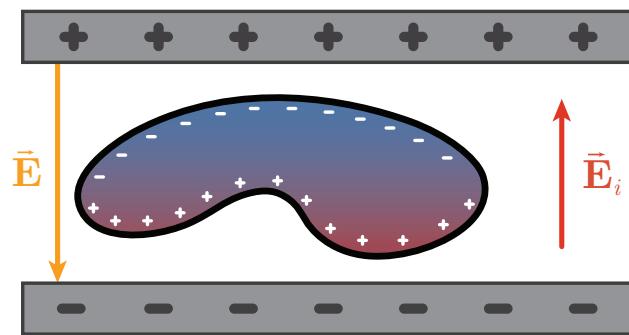
Questa relazione trovata è una riconferma di quanto affermato in precedenza sui raggi di curvatura: più piccolo è il *raggio di curvatura*, maggiore sarà la *carica* in quei punti (e quindi anche maggiore sarà la densità di carica). Esplicitamente, come si distribuisce la carica tra le due sfere si ricava così:

$$q_{tot} = q'_1 + q'_2 = q'_1 + \frac{R_2}{R_1} q'_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} q'_1 \implies q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q_{tot}$$

$$q_{tot} = q'_1 + q'_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q_{tot} + q'_2 \implies q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q_{tot}$$

**Il campo elettrico indotto** Per quanto osservato, si può notare come in un conduttore in equilibrio elettrostatico la carica debba avere lo *stesso segno dappertutto* per mantenere  $\vec{E} = 0$ . Questo, tuttavia, non è più vero nel momento in cui il conduttore è *immerso* in un campo elettrico esterno.

Ad esempio, consideriamo due *piastre* cariche di segno opposto in modo che tra di esse si forma un campo elettrico *uniforme*  $\vec{E}$ , diretto dall'armatura positiva a quella negativa. Ponendo un conduttore carico in mezzo alle due piastre, le cariche sono soggette ad una forza di Coulomb dovuta alle due piastre e si spostano nel conduttore: le cariche negative si spostano verso la piastra positiva, mentre le positive verso la piastra negativa, come in figura.



La differenza tra le cariche interne al conduttore crea un **campo elettrico indotto**  $\vec{E}_i$ ; se lo consideriamo all'equilibrio, esso ha stessa direzione e intensità di  $\vec{E}$ , ma ha verso opposto in modo da avere all'interno del conduttore la condizione di equilibrio elettrico.

$$\vec{E}_i = -\vec{E} \tag{4.3}$$

Questo accade in generale anche se il conduttore è immerso in un generico campo elettrico, non necessariamente uniforme o generato da delle armature caricate: per avere l'equilibrio nel conduttore le cariche si devono disporre in modo che la differenza di carica all'interno di esso generi un campo elettrico indotto uguale e opposto a quello del campo elettrico in cui il conduttore è immerso.

## 4.2 CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE

Come abbiamo ribadito più volte, parte delle cariche in un conduttore sono libere di muoversi. Se carichiamo un conduttore e poi lo *isoliamo*, possiamo *conservare* della carica elettrica al suo interno - e quindi dell'energia elettrica - che potrà eventualmente essere utilizzata successivamente per altri scopi. Ci interessa dunque *caratterizzare* i conduttori in base alla loro capacità di caricarsi.

**OSSERVAZIONE.** Per studiare un conduttore carico all'equilibrio, dalle osservazioni precedenti ci basta considerarlo come fosse una superficie carica  $\Sigma$  con densità di carica  $\sigma$ . La carica nel conduttore è

$$q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma$$

mentre il potenziale in un qualunque punto del conduttore è

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(x', y', z')}{|\vec{r}'|} d\Sigma$$

dove supponiamo, sempre per le osservazioni precedenti, di considerare l'*origine* del sistema di riferimento scelto all'interno del conduttore e di misurare il potenziale in tale punto - dopotutto, il potenziale è *costante* in tutto il conduttore.

Ora, osserviamo che se aumentassimo la carica sul conduttore da  $q$  a  $mq$ , si avrebbe un aumento sia della densità di carica di un fattore  $m$ , sia del potenziale sempre di un fattore  $m$ . Il loro rapporto, pertanto, rimane costante ed è indipendente da come aumenta la carica e il potenziale: pertanto, esso rappresenta quanto aumenta il potenziale del conduttore all'aumentare della carica.

### DEFINIZIONE 4.2.1. - CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE.

La **capacità** di un conduttore è la misura di quanta carica elettrica bisogna fornire ad un conduttore isolato per aumentare il suo potenziale di un'unità.

$$C = \frac{q}{V} \quad (4.4)$$

Il potenziale in questa definizione è misurato rispetto ad un sistema di riferimento dove lo zero è posto sulla *terra*, considerato un conduttore di dimensioni *infinite* rispetto all'altro e tale per cui se collegassimo il conduttore carico alla terra la carica si disperdesse e il potenziale complessivo è nullo.

### ESEMPIO - SFERA CONDUTTRICE DI RAGGIO $R$ .

In una sfera conduttrice di raggio  $R$ , all'equilibrio la carica è distribuita uniformemente sulla superficie con densità  $\sigma$ . Si ha

$$\begin{aligned} q &= \int_{\Sigma} \sigma d\Sigma = \sigma \int_{\Sigma} d\Sigma = \sigma A_{sfera} = 4\pi R^2 \sigma \\ V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma}{|\vec{r}'|} d\Sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{R} \int_{\Sigma} d\Sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

La capacità del conduttore è

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (4.5)$$

Osserviamo che la capacità della sfera non dipende dal materiale, ma solo dal raggio. Questo non è un caso: la capacità è solamente una funzione della *geometria* del conduttore, ma non del materiale con cui è fatto, dalla carica che c'è sopra o dal potenziale in esso (o meglio, differenza di potenziale).

**ESEMPIO.** Riprendendo il caso delle due sfere conduttrici collegate da un filo trascurabile, come cambia la capacità? La carica complessiva  $q_{tot}$  è data dalla somma delle cariche  $q_1$  e  $q_2$  sulle due sfere, mentre il nuovo potenziale  $V$  del sistema è costante e uguale su entrambe le sfere. Segue allora

$$C = \frac{q_1 + q_2}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} = 4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2) = C_1 + C_2 \quad (4.6)$$

ossia la capacità del sistema di due conduttori collegati da un filo è dato dalla somma delle due capacità dei singoli condensatori.

### Unità di misura

#### UNITÀ DI MISURA.

**CARICA ELETTRICA:** farad (F) o coulomb su volt ( $\frac{C}{V}$ ).

**Dimensioni:**  $[C] = \frac{[q]}{[V]} = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$ .

Come per la maggior parte delle unità di misura che si affrontano nell'elettromagnetismo, le capacità utilizzate in ambito pratico sono generalmente di molti ordini di magnitudine minori del farad, cioè siamo praticamente obbligati ad utilizzare sempre dei *sottomultipli* del farad, ad esempio:

- *millifarad*:  $1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$ .
- *microfarad*:  $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ .
- *nanofarad*:  $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ .
- *picofarad*:  $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ .

**OSSERVAZIONE.** Si osservi che

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2 m^2}{N} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

**ESEMPIO.** Una sfera di rame di raggio

- $R = 0,1 \text{ m}$  ha capacità  $C = 11 \text{ pF}$ .
- $R = 6,7 \cdot 10^6 \text{ m}$ , cioè una sfera con raggio quello terrestre, ha capacità  $C = 0,74 \text{ mF}$ .

### 4.3 CONDUTTORE CAVO

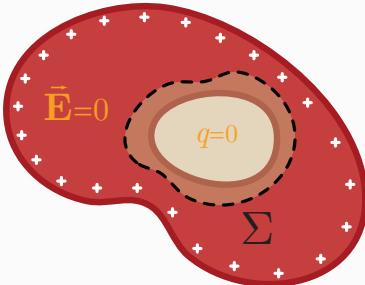
Consideriamo un conduttore volumico che non sia pieno, ma che presenta al suo interno una *cavità* senza cariche al suo interno: tale conduttore presenta ora due superfici, una *esterna* e una *interna*. Nel caso del conduttore pieno sappiamo che, all'equilibrio, le cariche si distribuiscono sulla superficie esterna.

Sorprendentemente, ciò succede anche nel caso del conduttore cavo: non ci sono cariche nella superficie interna e si distribuiscono *esattamente* come nel caso senza cavità.

**PROPOSIZIONE 4.3.1. - UN CONDUTTORE CAVO HA CAMPO ELETTRICO NULLO AL SUO INTERNO.**

*Un conduttore cavo che non presenta cariche all'interno delle cavità si comporta come un conduttore pieno con la stessa geometria. In particolare, le cariche elettriche all'equilibrio si distribuiscono solamente sulla superficie esterna,*

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che, quando consideriamo l'equilibrio elettrostatico, il campo interno al conduttore deve essere nullo.



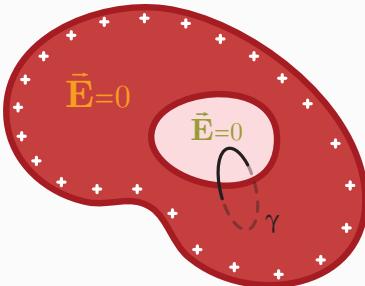
Prendiamo una superficie  $\Sigma$  che circonda completamente la cavità, ma giace interamente all'interno del materiale conduttore. Il flusso tramite tale superficie è nullo in quanto il campo elettrico nei punti della superficie è nullo.

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0$$

Applicando la *legge di Gauss*, segue che la carica *complessiva* interna a  $\Sigma$  deve essere nulla.

$$q_{tot,\Sigma \text{ interna}} = 0 \quad (4.7)$$

Ciò nonostante, questo non preclude ancora la possibilità che ci sia una quantità uguale di cariche positive e negative nella superficie interna del conduttore in modo che  $q_{tot,\Sigma \text{ interna}}$  sia nulla.



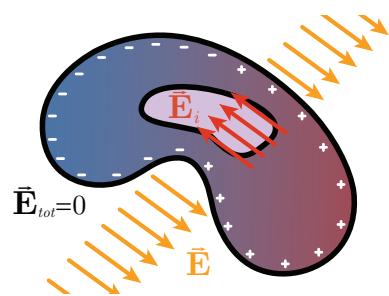
Per escludere tale possibilità, consideriamo un circuito chiuso  $\gamma$  arbitrario che interseca la superficie interna. Sappiamo che la *circuitazione* lungo  $\gamma$  del campo elettrico è nulla, tuttavia:

- l'integrale di linea lungo la parte di  $\gamma$  contenuta nella cavità *non* sarebbe nullo se, per assurdo, ci fossero cariche sulla superficie, dato che ci sarebbe un campo elettrico *non* nullo.
- l'integrale di linea lungo la parte di  $\gamma$  contenuta nel conduttore sarebbe nullo perché  $\vec{E} = 0$  dentro il conduttore.

Pertanto *non* ci possono essere cariche sulla superficie interna e pertanto anche *dentro* la cavità il campo elettrico deve essere nullo.  $\square$

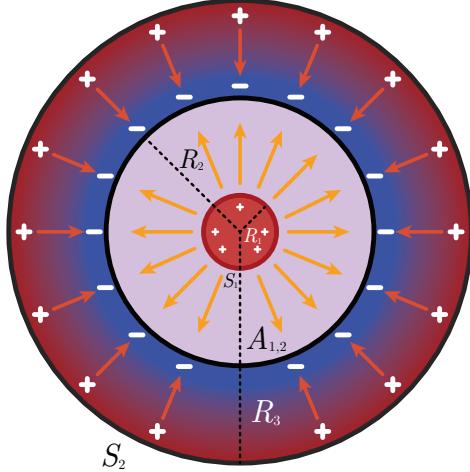
Questo è vero anche in presenza di un *campo elettrico esterno*  $\vec{E}$ . In tal caso, come succede nel conduttore, all'interno della cavità si viene a formare un campo indotto  $\vec{E}_i$  dalla separazione delle cariche che controbilancia quello esterno in modo che il campo complessivo all'interno sia nullo.

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E} + \vec{E}_i = 0$$



### 4.3.1 Il conduttore cavo con carica

#### Conduttore cavo con carica interna



Consideriamo, all'equilibrio, una sfera conduttrice cava (inizialmente non carica) di raggio  $R_3$  e raggio della cavità  $R_2$ ; al suo interno prendiamo un'ulteriore sfera conduttrice di raggio  $R_1 < R_2$ , e supponiamo che quest'ultima abbia una carica  $Q$  positiva.

Sappiamo che nella sfera interna il campo elettrico è nullo; la stessa cosa succede sulla *sfera esterna*, ma è meno ovvio. La sfera carica genera un campo elettrico radiale che, all'esterno di essa, *non* è nullo e attraversa la sfera esterna: le cariche nel conduttore esterno si dispongono come se fosse attraversati da un *campo elettrico esterno*.

In particolare, le cariche *negative* si posizionano lungo la superficie *interna*, mentre quelle *positive* sono respinte sulla superficie esterna in modo che le cariche sulla superficie interna  $q_{int}$  controbilancino quelle sulla superficie esterna  $q_{ext}$ . Diremo che questo tipo di campo elettrico è un caso di **induzione totale**.

#### DEFINIZIONE 4.3.1. - INDUZIONE COMPLETA.

Diciamo che si ha **induzione completa** se le linee di campo elettrico generato da un conduttore terminano completamente in un altro conduttore e, pertanto, il conduttore induce totalmente la sua carica al secondo.

Ora, consideriamo una superficie ipotetica  $\Sigma$  che è contenuta nella sfera esterna e che contiene la cavità. Perché siamo all'equilibrio si ha  $\vec{E} = 0$ , il flusso è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0$$

Ma per la legge di Gauss la carica complessiva è  $q_{tot} = 0$ . Necessariamente, sulla superficie interna deve affacciarsi una carica  $q_{int} = -Q$ , da cui si ha che  $q_{ext} = Q$ . Il campo elettrico indotto dovuto dalla disposizione di cariche *controbilancia* quello della sfera interna quindi all'interno del conduttore esterno *non* c'è campo elettrico. Invece, al di fuori del conduttore esterno si verifica nuovamente il campo elettrico dovuto alla sfera carica interna.

La situazione è quindi la seguente, al variare della distanza radiale  $r$ :

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases} \quad V(r) = \begin{cases} k_1 & r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + k_2 & R_1 < r < R_2 \\ k_3 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + k_4 & r > R_3 \end{cases}$$

Troviamo le costanti del potenziale imponendo le condizioni al contorno e la continuità:

$$V(\infty) = \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0 \implies k_4 = 0$$

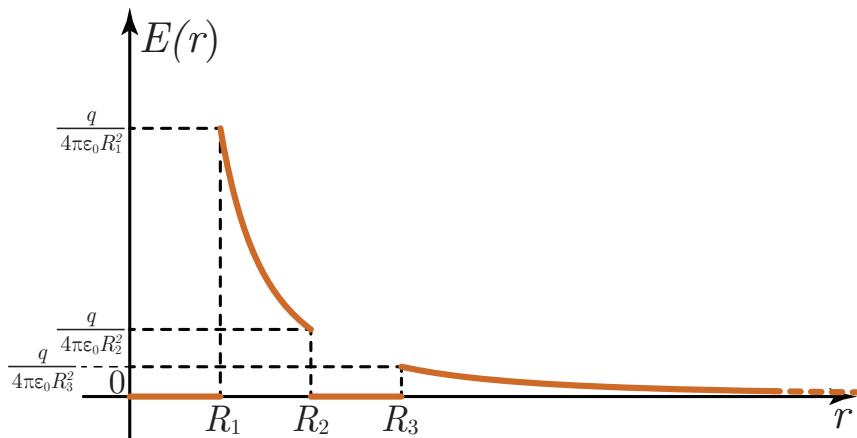
$$V_{ext}(R_3) = V_{S_2}(R_3) \implies k_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$V_{S_2}(R_2) = V_{A_{1,2}}(R_2) \implies k_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$$

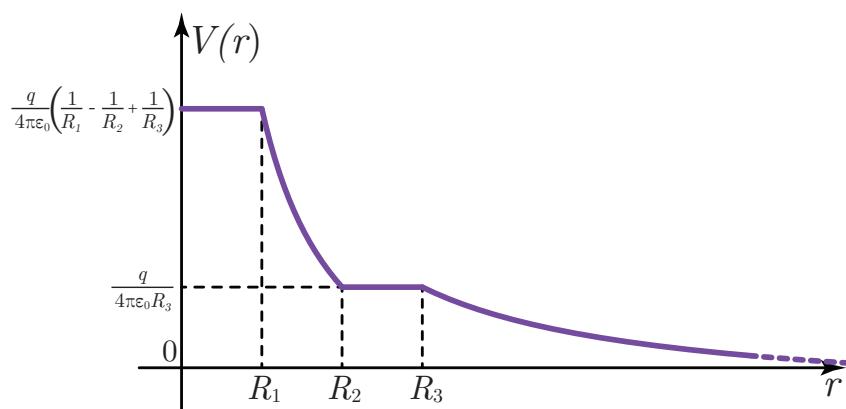
$$V_{A_{1,2}}(R_1) = V_{S_1}(R_1) \implies k_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Ricapitolando:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R_3 \end{cases}$$

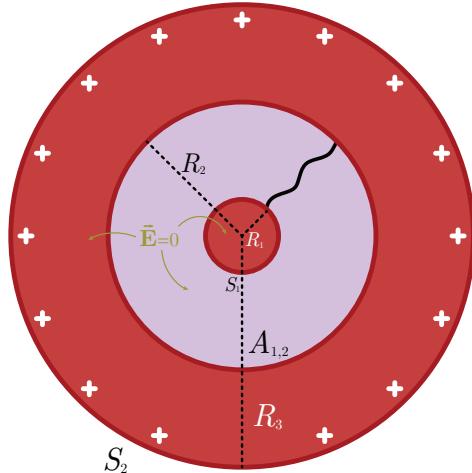


$$V(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) & R_1 < r < R_2 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} & R_2 < r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R_3 \end{cases}$$



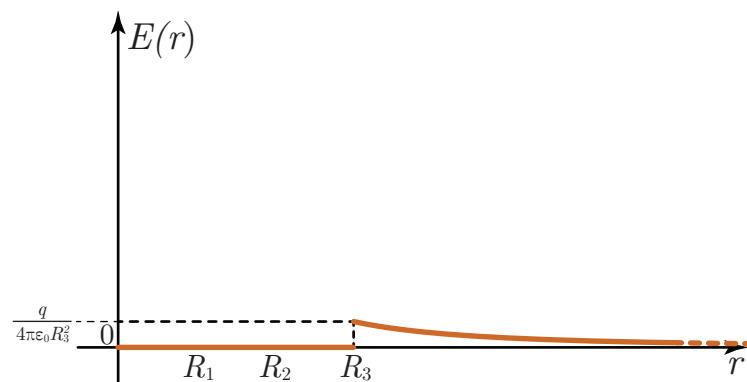
In presenza di un campo elettrico *esterno* si può trovare che, sebbene all'esterno della sfera conduttrice il campo esterno è modificato da quello generato dalla sfera interna, all'interno della cavità è presente *al più* quello dato dalla carica interna.

### Conduttore cavo collegato alla carica interna

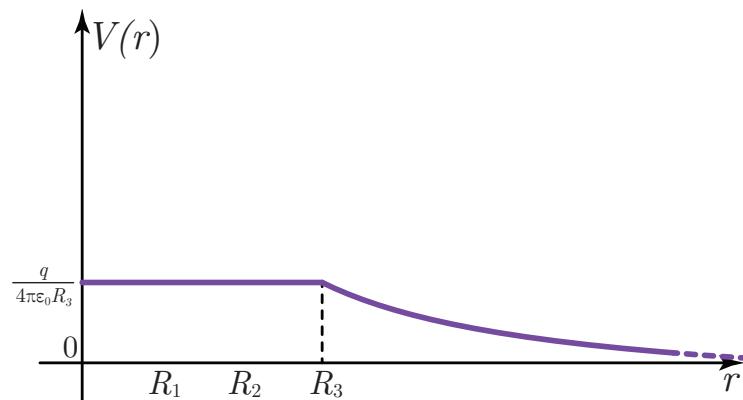


Colleghiamo le due sfere con un filo conduttore trascurabile. I due conduttori sono ora allo stesso potenziale e quindi le cariche su  $S_2$ s si dispongono sulla superficie della sfera esterna: funzionalmente otteniamo in tutto e per tutto un conduttore cavo senza alcun oggetto carico nell'ambiente interno.  
Ricapitolando:

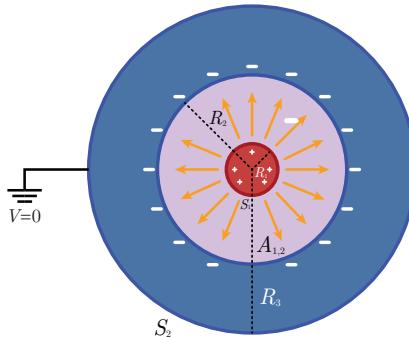
$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$



$$V(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} & r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R_3 \end{cases}$$



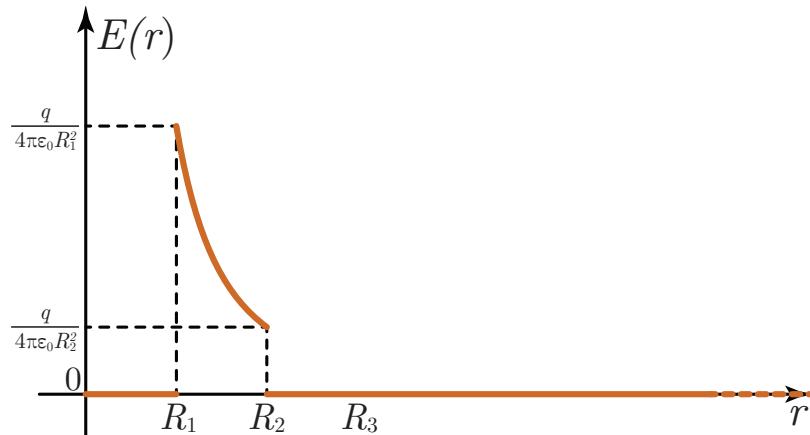
### Conduttore cavo collegato alla terra



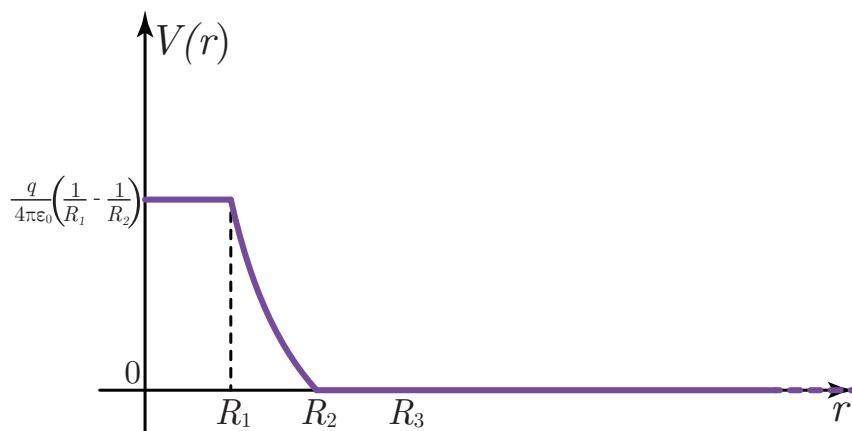
Supponiamo di riprendere il sistema originale e di collegare il conduttore esterno alla *terra*: in questo modo, le cariche esterne si disperdono nella Terra, dato che la sfera esterna collegata alla terra è come se fosse un unico conduttore di dimensioni *infinite*. Il campo elettrico anche *all'esterno* è *nullo* e, necessariamente, anche il potenziale è *nullo*, dato che il conduttore è allo stesso potenziale della terra, che per convenzione si fissa a 0.

Le *uniche* cariche presenti sulla superficie esterna sono le *cariche negative* che si dispongono sulla superficie interna per contrastare il campo elettrico generato dalla carica nella cavità. Ricapitolando:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$



$$V(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} & r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$



**Lo schermo elettrostatico** Tutti questi esempi ricadono nel fenomeno dello **schermo elettrostatico**, detto anche **schermo di Faraday**.

**DEFINIZIONE 4.3.2. - SCHERMO ELETTROSTATICO O SCHERMO DI FARADAY.**

Uno **schermo elettrostatico**, detto anche **schermo di Faraday**, è un sistema costituito da un contenitore - non necessariamente continuo - di materiale conduttore in modo da isolare l'ambiente interno da un campo elettrostatico esterno.

**DIGRESSIONE - GABBIA DI FARADAY.**

Una **gabbia di Faraday** è uno schermo di Faraday che presenta delle aperture e, di conseguenza, sono più complesse da analizzare.

Anticipando che i campi elettromagnetici si propagano come onde, uno schermo continuo come il *conduttore cavo* attenua essenzialmente tutte le lunghezze d'onda più corte dello spessore della pelle, i buchi nella gabbia possono permettere alle lunghezze d'onda più corte di attraversarli. Più corta è la lunghezza d'onda, più facilmente passa attraverso una maglia di determinate dimensioni. Così, per lavorare bene con lunghezze d'onda brevi, cioè ad alte frequenze, i fori nella gabbia devono essere *più piccoli* della lunghezza d'onda dell'onda incidente.

**4.4 CONDENSATORI****DEFINIZIONE 4.4.1. - CONDENSATORE.**

Un **condensatore** è un sistema di conduttori, i quali sono separati da una differenza di potenziale  $\Delta V$  e tra i quali c'è induzione completa.

**NOTAZIONE.** Spesso abbrevieremo la differenza di potenziale con d.d.p.

La maggior parte dei condensatori sono costituite da due o più conduttori elettrici nella forma di piastre metalliche o superfici separate dal vuoto o da un *materiale dielettrico*<sup>1</sup>, dette **armature**.

Dalla legge di Coulomb una carica su un'armatura eserciterà una *forza* sulle cariche dell'altro conduttore, attraiendo cariche del segno opposto e respingendo cariche uguali. Per quanto visto con i conduttori cavi, la carica totale  $q$  su un'armatura deve essere uguale ma opposte a quella sull'armatura che le sta di fronte, creando un campo elettrico tra i due conduttori.

Lo scopo principale dei condensatori non è solo quello di *deposito* di cariche elettriche nelle armature, ma anche di immagazzinare **energia elettrica** nel campo elettrico; possiamo crearlo se applichiamo una d.d.p. tra le armature. Per misurare questa proprietà di immagazzinare carica, ci interessa definire, in modo analogo a come abbiamo fatto per i conduttori, una **capacità** dei condensatori.

**DEFINIZIONE 4.4.2. - CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE.**

La **capacità** di un condensatore è la misura di quanta carica elettrica bisogna fornire ad un'armatura del condensatore per aumentare di un'unità la d.d.p. tra le armature.

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>Nel Capitolo 6, sezione 6.2, pag. 113, vedremo la definizione di materiale dielettrico.

Come era per i conduttori, anche la capacità dei condensatori è dipendente esclusivamente dalla *geometria* del conduttore, ma non del materiale con cui è fatto, dalla carica che c'è sopra o dal potenziale in esso (o meglio, differenza di potenziale).

**OSSERVAZIONE.** Generalmente, si presuppone di costruire dei condensatori la cui distanza tra le armature sia *molto più piccola* dello spessore delle armature - in modo che sostanzialmente i condensatori considerati siano praticamente uguali anche in termini di dimensioni - e di studiare la differenza di potenziale a debita distanza dal *bordo* in modo da evitare eventuali effetti non graditi.

**Condensatore piano** Un **condensatore piano** è costituito da due armature piane, distanti  $d = x_2 - x_1$ . Supponiamo che tale distanza sia molto più piccola della larghezza e altezza media delle armature; per dare un confronto dimensionalmente coerente, potremmo dire

$$d^2 \ll \Sigma \quad (4.9)$$

dove  $\Sigma$  è l'area della superficie.

Il campo elettrico tra due armature piane, lontano dai bordi, è

$$E(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\Sigma \epsilon_0}$$

La differenza di potenziale tra le armature è quindi

$$\Delta V = V(x_1) - V(x_2) = \left( - \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_2} \right) E(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{q}{\Sigma \epsilon_0} dx = \frac{qd}{\Sigma \epsilon_0}$$

e quindi la capacità del condensatore piano è

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \quad (4.10)$$

**Condensatore cilindrico** Un **condensatore cilindrico** è costituito da due armature cilindriche: l'armatura interna ha raggio  $R_1$ , l'esterna ha raggi  $R_2$  e  $R_3$ . In modo analogo a come abbiamo trovato che il campo elettrico di un cilindro uniformemente carico, il campo elettrico nella cavità è

$$E(R) = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L r}, \quad \text{se } R_1 < R < R_2$$

e la d.d.p. è

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E_R(R) dR = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L} \log \frac{R_2}{R_1}$$

Se consideriamo la distanza tra le armature *molto più piccola* dei raggi, possiamo considerare le armature come se fossero due cilindri di raggio molto vicino ad  $R = R_1$ :

$$d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2, R_3 \implies R_1 \sim R_2 \sim R_3 \sim R$$

Supponiamo, inoltre, di studiare il campo elettrico (e quindi il potenziale) *lontano dai bordi*, onde evitare effetti di bordo non desiderati e difficili da descrivere quantitativamente.

$$d \ll L$$

Fissato ciò, si può sviluppare il logaritmo in *serie di Taylor* per ottenere

$$\log \frac{R_2}{R_1} = \log \left( 1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) \simeq \frac{d}{R_1} \simeq \frac{d}{R}$$

da cui

$$\Delta V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{d}{R}$$

e quindi la capacità del condensatore cilindrico è

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 RL}{d} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \quad (4.11)$$

dove  $\Sigma = 2\pi RL$  è la superficie dell'armatura cilindrica.

**Condensatore sferico** Un **condensatore sferico** è costituito da due armature sferico: l'armatura interna ha raggio  $R_1$ , l'esterna ha raggi  $R_2$  e  $R_3$ . Abbiamo trovato che il campo elettrico e il potenziale nella cavità sono

$$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right), \quad \text{se } R_1 < r < R_2$$

e quindi la d.d.p. tra le armature è

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E_r(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

Se consideriamo la distanza tra le armature *molto più piccola* dei raggi, possiamo considerare le armature come se fossero due sfere di raggio molto vicino ad  $R = R_1$ :

$$d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2, R_3 \implies R_1 \sim R_2 \sim R_3 \sim R$$

Fissato ciò, si ha

$$\Delta V \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{d}{R^2} \right)$$

e quindi la capacità del condensatore sferico è

$$C \simeq 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{R^2}{d} \right) = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \quad (4.12)$$

dove  $\Sigma = 4\pi R^2$  è la superficie dell'armatura sferica.

#### 4.5 IL LAVORO DI CARICA DI UN CONDENSATORE E L'ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL CONDENSATORE

Per creare una separazione di carica  $q$  nel condensatore, ossia portare la carica  $Q$  dalla piastra negativa alla piastra positiva (dal potenziale minore a quello maggiore), una fonte di energia esterna deve compiere un certo **lavoro** per opporre tale spostamento alla forza del campo elettrico, che la riporterebbe alla piastra originale. L'*energia*  $U$  che viene fornita

sotto forma di lavoro  $W$  incrementa il potenziale da 0 fino ad avere una differenza di potenziale  $\Delta V$ , cioè corrisponde all'energia necessaria per creare partendo da armature scariche il *campo elettrico*.

Posto  $\Delta V = V(q) - V(0) = V$  e dunque  $V = \frac{q}{C}$ , si ha

$$W = U = \int_0^q dU = \int_0^q dV = \int_0^q V(Q)dQ = \int_0^q \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Big|_0^q = \frac{q^2}{2C}$$

$$W = U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \quad (4.13)$$

Questa energia è immagazzinata fondamentalmente nel campo elettrico.

#### ESEMPIO - CONDENSATORE AD ARMATURE PIANE.

Se consideriamo un condensatore ad armature piane di superficie  $\Sigma$  a distanza  $d$ ; il suo campo elettrico tra le armature è

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\Sigma \epsilon_0}$$

e la sua capacità è

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d}$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{E^2 \Sigma \epsilon_0 d}{2 \cancel{\epsilon_0}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma d$$

Osserviamo come  $\Sigma d$  corrisponde al volume  $V$  occupato dal campo elettrico tra le facce del condensatore. Se definiamo la **densità di energia elettrostatica per unità di volume**

$$\mu_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.14)$$

l'energia immagazzinata nel condensatore è questa densità moltiplicata per il volume  $V$  occupato dal campo elettrico, confermando che l'energia del condensatore non è conservata nelle piastre, ma nel *campo elettrico!*

**OSSERVAZIONE.** Per caricare dei condensatori e immagazzinare nel loro campo elettrico dell'energia possiamo fornire cariche ad una delle armature tramite un collegamento conduttivo esterno, come dei *fili metallici*, e poi scaricare le cariche dall'altra armatura con un altro filo. La quantità di carica che si va a depositare sulle armature è *proporzionale* alla d.d.p. tra le armature - che possiamo controllare collegando ai capi delle armature una batteria o un generatore con dei fili. Quello che abbiamo descritto non è altro che un semplice **circuito elettrico**, di cui parleremo meglio nel Capitolo 5

## 4.6 ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

In generale, il campo elettrico immagazzina *sempre* dell'energia nel campo stesso, dato che è l'energia necessaria a separare le cariche richieste per generare il campo elettrico. Tale

energia, in un certo volume  $V$ , è pari a

$$U = \int_V \mu_E dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\vec{\mathbf{E}}(r)|^2 dV \quad (4.15)$$

dove  $\mu_E$  è la densità di energia elettrostatica, definita come nell'equazione (4.14).

#### 4.7 PRESSIONE ELETTROSTATICA

In un condensatore le piastre sono caricate con segno opposto: questo comporta l'esistenza di una forza che tende a farle *attrarre*. Questa forza è

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}U \quad (4.16)$$

dove  $U$ , nel caso di un condensatore ad armature piane, è

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\epsilon_0 \Sigma}$$

In modulo, tale forza è

$$F = \left| \frac{\partial U}{\partial d} \right| = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} \quad (4.17)$$

La **pressione elettrostatica** percepita dalle piastre è

$$P = \frac{F}{\Sigma} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (4.18)$$



# CORRENTE ELETTRICA E CIRCUITI ELETTRICI

*“L'uomo qualunque non capisce come l'elettricità viaggia all'interno dei cavi, ma crede nella sua esistenza soltanto perché la compagnia elettrica continua a inviargli le bollette.”*

*DAVE BARRY, poco prima di essere bocciato all'esame di Fisica II.*

**N**EI capitoli precedenti abbiamo esplorato i fenomeni elettrostatici.

## 5.1 CORRENTE ELETTRICA

I conduttori *metallici* sono costituiti, a livello microscopico, da un *reticolo spaziale* i cui vertici sono *ioni positivi*, cioè atomi che hanno perso uno o più elettroni, e al cui interno si muovono gli *elettroni liberi*, gli unici portatori di carica nei metalli. Ciascuno di questi elettroni è libero di muoversi in una sua direzione e con una propria velocità, dovute alla situazione termica dell'oggetto. Non è evidentemente fattibile studiare il moto di *ogni* singolo elettrone, dato che il numero di elettroni liberi in un conduttore è estremamente elevato.

### ESEMPIO - ELETTRONI LIBERI IN DIVERSI MATERIALI.

Ricordiamo che la **costante di Avogadro** è definito come il numero di particelle per mole di un qualunque materiale:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

In questo caso, dato che per ogni atomo di metallo c'è generalmente un elettrone libero, questo numero corrisponde al numero di *elettroni liberi* in una mole di un certo elemento chimico.

Definiamo  $\rho$  la densità del materiale e  $A$  il numero di massa, cioè quanti grammi pesa una mole del materiale; possiamo calcolare la **densità di carica** in diversi materiali.

■ **Rame (Cu)**

$$n_{\text{Cu}} = \frac{N_A \cdot \rho_{\text{Cu}}}{A_{\text{Cu}}} = \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{63,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ el/m}^3$$

■ **Argento (Ag)**

$$n_{\text{Ag}} = \frac{N_A \cdot \rho_{\text{Ag}}}{A_{\text{Ag}}} = \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 10,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{107,87 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ el/m}^3$$

L'ordine di grandezza è lo stesso per tutti i conduttori metallici.

Ci conviene studiare il moto medio degli  $N$  elettroni nel materiale. Tuttavia, in assenza di un campo elettrico non percepiamo alcun movimento preferenziale degli elettroni: ogni elettrone si muove in modo del tutto *casuale* e dunque la somma dei loro moti, e di conseguenza la velocità media, sarà *nulla*:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad (5.1)$$

Consideriamo invece la seguente situazione: prendiamo un conduttore con potenziale  $V_1$  e lo collegiamo ad un altro conduttore con potenziale  $V_2 < V_1$  tramite un filo trascurabile. Sappiamo che il campo elettrico tra i conduttori è opposto al gradiente del potenziale e quindi è diretto dal potenziale maggiore al minore; gli elettroni - portatori di carica *negativi* - andranno dal secondo conduttore verso il primo tramite il filo che li collega. Il tempo di percorrenza ha un limite inferiore dell'ordine di

$$t \sim \frac{d}{c},$$

dove  $d$  è la lunghezza del filo e  $c$  la *velocità della luce*. Questo moto *ordinata* di elettroni continua fino a quando non si raggiunge l'equilibrio dei potenziali in tutto il conduttore; in tal momento finisce anche il campo elettrico dovuto alla d.d.p. .

$$V'_1 = V'_2 = V$$

Siamo in presenza del fenomeno di **conduzione elettrica**.

**DEFINIZIONE 5.1.1. - CORRENTE ELETTRICA.**

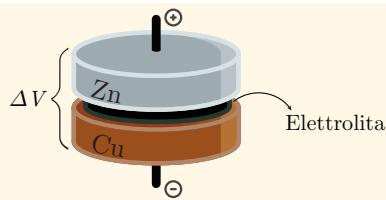
Un moto *ordinato* di elettroni liberi di un conduttore in una certa direzione è detto una **corrente elettrica**.

Dato che la velocità della luce è estremamente elevata ( $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ), l'equilibrio è raggiunto quasi istantaneamente e la corrente elettrica è di breve vita. Per poter indurre un moto consistente e duraturo di cariche dobbiamo *Mantenere* una differenza di potenziale.

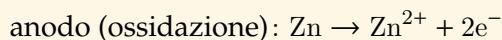
Per far ciò, ci serve un **generatore di forza elettromotrice** (f.e.m.), un marchingegno che trasforma energia *non* elettrica in energia elettrica tale da mantenere, ai capi del generatore, una differenza di potenziale  $f = \Delta V$ , indipendentemente da cosa ci si collega.

**DIGRESSIONE - PILA DI VOLTA.**

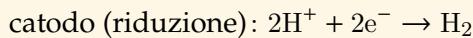
Il primo generatore di questo tipo fu la **pila di Volta**. Tale generatore consisteva, nella sua forma più semplice costituita da una singola *cella*, in un disco di *zinc* (lo chiameremo **anodo**) e uno di *rame* (il **catodo**), separate da una stoffa imbevuta di una soluzione elettrolitica come acqua e acido solforico.



Lo zinco sulla superficie dell'anodo è ossidato dalla soluzione elettrolitica e si dissolve nell'elettrolita come ioni carichi positiva, lasciando due elettroni liberi nel metallo.



Quando lo zinco entra nell'elettrolite, due atomi positivi di idrogeno dell'elettrolite accettano due elettroni dalla superficie dal catodo di rame, riducendoci ad una molecola di idrogeno non carica.



Gli elettroni usati nel rame per formare le molecole di ossigeno provengono da un filo esterno che lo collega al disco di zinco; l'idrogeno prodotto nella riduzione si disperde in forma gassosa.

Misurando la d.d.p. tra i dischi si osserva un valore fisso di circa 0,76 V; se impilassimo più celle la differenza di potenziale aumenterebbe. Il valore della d.d.p. misurata dipende dalla coppia di metalli scelti.

### 5.1.1 Intensità di corrente

#### DEFINIZIONE 5.1.2. - INTENSITÀ DI CORRENTE.

L'intensità di corrente elettrica è definita come la rapidità con cui fluiscono delle cariche attraverso una certa superficie  $\Sigma$ :

$$I = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (5.2)$$

**ATTENZIONE!** La corrente viene studiata per ragioni storiche supponendo che a muoversi siano *cariche positive*, anche se nella maggior parte dei materiali che conducono corrente elettrica (ad esempio, i metalli) la corrente è portata da *cariche negative*.

#### DEFINIZIONE 5.1.3. - VELOCITÀ DI DERIVA.

La velocità di deriva è la *velocità media* che hanno  $N$  particelle cariche in un materiale a causa di un campo elettrico  $\vec{E}$ :

$$\vec{v}_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad (5.3)$$

La velocità di deriva ha la stessa direzione del campo elettrico.

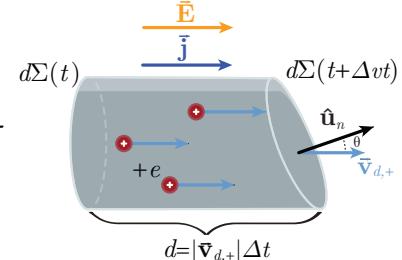
I concetti di *velocità di deriva* e *intensità di corrente*, come possiamo facilmente immaginare, sono strettamente correlati.

Consideriamo un filo conduttore percorso da portatori di carica positiva  $+e$ : essendo in presenza di una forza elettromotrice - e quindi di un campo elettrico - le cariche si muovono mediamente con velocità di deriva  $\vec{v}_d$  e percorreranno, in un intervallo infinitesimo di tempo  $\Delta t$ , un tratto di filo

$$d = |\vec{v}_d| \Delta t$$

La carica complessiva che passa attraverso una superficie infinitesima  $d\Sigma$  in un tempo  $\Delta t$  è quella contenuta in  $\Delta V$ , che corrisponde al volume di un cilindro infinitesimo di basi  $d\Sigma \vec{u}_n \cdot \hat{u}_d$  e altezza  $d$ , dove  $\vec{u}_n$  è il versore normale alle superficie e  $\hat{u}_d$  è il versore nella direzione e verso della velocità di deriva:

$$\begin{aligned} dV &= d\Sigma \vec{u}_n \cdot \hat{u}_d d = \\ &= d\Sigma \vec{u}_n \cdot \hat{u}_d |\vec{v}_d| \Delta t \\ &= d\Sigma \vec{u}_n \cdot \vec{v}_d \Delta t = \\ &= d\Sigma \cos \theta |\vec{v}_d| \Delta t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta q &= n_+ e dV = n_+ e d\Sigma \vec{u}_n \cdot \vec{v}_d \Delta t = \\ &= n_+ e d\Sigma \cos \theta |\vec{v}_d| \Delta t \end{aligned}$$

Qui  $\theta$  è l'angolo tra i due versori,  $n_+$  la densità di cariche positive liberi per unità di volume ed  $e$  la carica delle particelle libere. La carica di corrente infinitesima è dunque

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\Delta q}{\Delta t} = n_+ e dV = n_+ e d\Sigma \vec{u}_n \cdot \vec{v}_d = \\ &= n_+ e d\Sigma \cos \theta |\vec{v}_d| \end{aligned}$$

Semplifichiamo questa notazione introducendo il concetto di **densità di corrente**.

#### DEFINIZIONE 5.1.4. - DENSITÀ DI CORRENTE.

La **densità di corrente** è il campo vettoriale che ad ogni punto in un conduttore associa un vettore, la cui direzione è la velocità di deriva delle cariche *positive* in tal punto e il cui modulo è pari alla quantità di carica che attraversa in un unità di tempo un'unità di area della sezione perpendicolare del conduttore in tal punto. In altre parole,

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d \quad (5.4)$$

Riscrivendo,

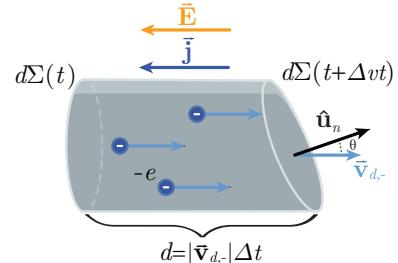
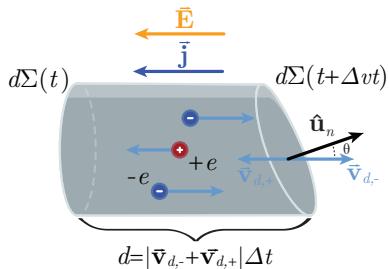
$$dI = \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

da cui si ottiene che l'intensità di corrente attraverso una superficie finita  $\Sigma$  è

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \Phi_{\Sigma}(\vec{j}) \quad (5.5)$$

Se, come nei conduttori metallici, i portatori di carica (con carica  $-e$ ) sono negativi, la velocità di deriva  $\vec{v}_{d,-}$  ha stessa direzione del campo elettrico ma verso *opposto*; la densità di corrente è invece nella stessa direzione del campo elettrico perché la carica è *negativa*:

$$\vec{j} = -n_- e \vec{v}_{d,-} \quad (5.6)$$



Se consideriamo invece *fluidi ionizzati, soluzioni elettrolitiche o semiconduttori*, i portatori di carica sono di *segno misto* e possono avere velocità di deriva differenti  $\vec{v}_{d,+}$  e  $\vec{v}_{d,-}$ . La densità è ottenuta come una somma vettoriale di due quantità concordi che hanno lo stesso verso del campo elettrico:

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_{d,+} - n_- e \vec{v}_{d,-} \quad (5.7)$$

## Unità di misura

### UNITÀ DI MISURA.

**CORRENTE ELETTRICA:** ampere (A).

**Dimensioni:**  $[I] = \text{A}$

L'**ampere** - e non il *coulomb*, come ci si potrebbe aspettare - è l'unica unità di misura fondamentale del SI che introdurremo in questa trattazione. Come precedentemente detto, 1 C è definito come la carica che una corrente da 1 A attraversa una data superficie in 1 s. Nella pratica sono utilizzati i suoi *sottomultipli*, ad esempio: *sottomultipli*, ad esempio:

- *milliampere*:  $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$ .
- *microampere*:  $1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$ .
- *nanoampere*:  $1 \text{ nA} = 10^{-9} \text{ A}$ .

### UNITÀ DI MISURA.

**DENSITÀ DI CORRENTE:** ampere su metro quadro  $\left(\frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right)$ .

**Dimensioni:**  $[j] = \frac{[I]}{[\Sigma]} = \text{A m}^{-2}$

## 5.1.2 Conservazione della carica e l'equazione di continuità

Data una densità  $\vec{j}$ , abbiamo trovato che la carica totale che passa nell'unità di tempo attraverso un volume  $V$  è data dal flusso della densità tramite il bordo della  $\Sigma$ :

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

Sulla superficie, l'integrandi  $\vec{j} \cdot \hat{u}_n$  non ha necessariamente segno costante: dato che la direzione di  $\vec{j}$  dipende dalla carica di deriva, segni diversi corrispondono a due situazioni differenti.

- $\vec{j} \cdot \hat{u}_n < 0$ : le cariche *negative entrano* la superficie o le cariche *positive escono*.
- $\vec{j} \cdot \hat{u}_n > 0$ : le cariche *negative escono* dalla superficie o le cariche *positive entrano*.

Dal *principio di conservazione della carica* nessuna carica nel conduttore (isolato) si può annullare e sparire, e quindi la carica complessiva deve rimanere *costante*. Se la carica

interna  $q_{int}$  alla superficie diminuisce, tale carica deve essere uscita dalla superficie e quindi è cambiata l'intensità di corrente  $I$  che l'attraversa; in particolare, essa dovrà corrispondere alla *variazione temporale della carica interna*

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} \quad (5.8)$$

Il *meno* nell'espressione è dato dal fatto che se l'integrale è complessivamente positivo, ciò corrisponde ad una *diminuzione* della carica interna - che ricordiamo si considera rispetto a quella positiva - e pertanto ha derivata negativa.

Se  $V$  è il volume racchiuso da una superficie chiusa  $\Sigma$ , la carica interna è ovviamente

$$q_{int} = \int_V \rho dV$$

Possiamo derivare temporalmente entrambi i termini e scambiare integrale e derivata<sup>1</sup> in quanto il volume è *temporalmente invariante*.

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dt = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Usando il *teorema della divergenza* si ha dunque che

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Poiché tale relazione è vera per ogni volume  $V$  si ha l'uguaglianza delle integrande, ottenendo così l'**equazione di continuità**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.9)$$

**DIGRESSIONE.** Questa relazione vale in generale per descrivere il *trasporto di una certa quantità conservata*, come l'energia e quantità di moto. Nello specifico,  $\rho$  è l'ammontare della quantità per unità di volume (una *densità*), mentre  $\vec{j}$  è il flusso della quantità. Se la quantità *non* si conserva, la legge si generalizza come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \quad (5.10)$$

dove  $\sigma$  rappresenta quanta quantità viene *generata* (se positiva) o *rimossa* (se negativa) per unità di volume e di tempo.

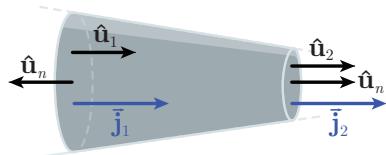
**Il caso stazionario** Consideriamo il *caso stazionario* dell'equazione di continuità, ossia quando la densità di carica  $\rho$  risulta essere costante nel tempo. Dall'equazione di continuità segue che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

ossia la densità di corrente è un **campo solenoidale**<sup>2</sup>. Consideriamo una porzione tubolare di conduttore come in figura.

<sup>1</sup>Non motiveremo *rigorosamente* perché si può fare questo scambio. Gli analisti che stanno leggendo questo testo si mettano il cuore in pace.

<sup>2</sup>Nelle "XXX", a pagina A.9 è possibile trovare la definizione di campo solenoidale e altre proprietà.



Sappiamo che il flusso sulla superficie che delimita questa porzione è nullo, ma esso è determinato completamente dai flussi sulle sezioni perpendicolari del conduttore<sup>3</sup>

$$0 = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2$$

Definiamo  $\vec{u}_i$  come il versore che indica la direzione del moto delle cariche tramite la superficie  $\Sigma_i$ . Se consideriamo le intensità di corrente lungo le sezioni...

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_1 d\Sigma_1 = - \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 \\ I_2 &:= \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_2 d\Sigma_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 \end{aligned}$$

...allora segue che  $0 = I_1 - I_2$ , ossia

$$I_1 = I_2 \quad (5.11)$$

Nel caso stazionario, l'intensità di corrente è **sempre costante**.

**INTUITIVAMENTE...** Riprendendo l'analogia con la fluidodinamica tra intensità di corrente e portata, la portata è costante nei fluidi incomprensibili, cioè quelli la cui densità di massa è  $\rho = \text{const.}$

## 5.2 LEGGE DI OHM

Ad inizio del capitolo, abbiamo descritto brevemente come sono costituiti i conduttori metallici. Tale descrizione, in realtà, corrisponde al **modello di Drude-Lorentz** della *conduzione elettrica* proposto dal fisico tedesco **Paul Drude** (1863 – 1906) nel 1900 ed espanso nel 1905 dall'olandese **Hendrick Antoon Lorentz** (1853 – 1928).

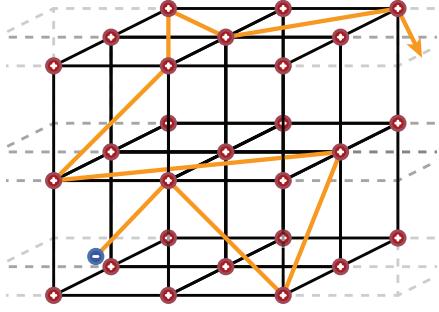
Il modello permette di spiegare, nell'ambito della teoria classica dell'elettromagnetismo, le proprietà di trasporto degli elettroni nei materiali - in particolare i metalli - tramite la teoria cinetica: gli elettroni si comportano, secondo questa interpretazione, in modo molto simile ad un *flipper*<sup>4</sup>, in cui elettroni rimbalzanti *urtano* continuamente contro un reticolo cristallino di ioni fissi.

**DIGRESSIONE.** Tale modello fu integrato nel 1933 da **Arnold Sommerfeld** (1868 – 1951) e **Hans Bethe** (1906 – 2005) con i risultati della teoria quantistica nel **modello di Drude-Sommerfeld**.

Una differenza, ad esempio, è che il modello *non parla* esplicitamente di ioni o di reticolni cristallini: tale assenza viene giustificata in termini quantistici.

<sup>3</sup>La densità di corrente sulla superficie laterale del tubo è tangente e quindi il suo flusso è nullo.

<sup>4</sup>Per gli amici d'oltreoceano o per coloro che si divertivano ai giochi di Windows XP™, un *pinball*.



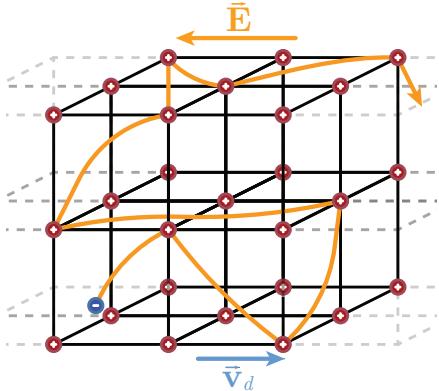
Approfondiamo meglio questo modello. Gli elettroni liberi si muovono attraverso il reticolo cristallino in modo *completamente disordinato*; nel loro moto, gli elettronni si vanno a scontrare continuamente con gli ioni in interazioni che chiamiamo *urti*. Tra un urto e il successivo il moto è libero e in *traiettoria rettilinea*, cosicché il moto degli elettronni si possa rappresentare come un *spezzata* di segmenti con direzione e verso variabili. Senza campo elettrico *non c'è* una direzione privilegiata e quindi una corrente.

Si può definire

- un **tempo medio di percorrenza**  $\tau$ .
  - un **cammino libero medio**  $\ell$  tra due urti successivi
- che sono legati tra di loro dalla velocità media  $v$  degli elettroni nel metallo.

$$\ell = v\tau \quad (5.12)$$

Da queste supposizioni microscopiche possiamo derivare una *legge macroscopica*.



All'applicazione di un campo elettrico  $\vec{E}$  non si muoverà più di moto rettilineo uniforme, ma subisce un *accelerazione*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}$$

dove  $m_e$  è la massa dell'elettrone. Alla distribuzione casuale delle velocità si sovrappone quindi una velocità data da questa accelerazione; poiché è più piccola rispetto a quella che l'elettrone possiede di per sé, il tempo medio  $\tau$  non cambia in modo significativo.

Se  $\vec{v}_i$  è la velocità dopo un urto, la velocità subito prima l'urto successivo sarà

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i - \frac{e}{m_e} \vec{E} \tau$$

Calcoliamo la velocità media su  $N$  elettroni, con  $N$  molto grande, in modo da definire la *velocità di deriva* indotta dal campo elettrico:

$$\vec{v}_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{i+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i - \frac{e}{m_e \tau} \vec{E} = \langle \vec{v} \rangle - \frac{e}{m_e \tau} \vec{E}$$

La media delle velocità dopo l'urto è casuale e perciò è nulla; la velocità di deriva è quindi

$$\vec{v}_d = -\frac{e \tau}{m_e} \vec{E} \quad (5.13)$$

Se  $n_-$  la densità di elettroni liberi per unità di volume, la densità di corrente che consegue a questo modo ordinato è

$$\vec{j} = -n_- e \vec{v}_d = \frac{n_- e^2 \tau}{m_e} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (5.14)$$

dove

$$\sigma = \frac{n_- e^2 \tau}{m_e}$$

è una grandezza caratteristica del materiale nota come **conduttività**. L'equazione

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5.15)$$

è nota come **legge di Ohm della conduzione elettrica**, dal fisico tedesco Georg **Ohm** che nel 1827 introdusse un caso specifico di tale equazione per spiegare dei risultati sperimentali da lui studiati. La legge si può scrivere anche nella forma

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (5.16)$$

dove

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

è detta **resistività**.

#### DEFINIZIONE 5.2.1. - CONDUTTIVITÀ E RESISTIVITÀ.

La **conduttività** è una grandezza associata ai conduttori definita come

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \quad (5.17)$$

che rappresenta la difficoltà della corrente a muoversi nel conduttore ed è caratteristica del *materiale* con cui è fatto.

Il valore

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (5.18)$$

viene detto **resistività** e rappresenta la difficoltà della corrente a muoversi nel conduttore.

*Non tutti i conduttori rispettano questa legge, ma soltanto quelli che sono detti **conduttori ohmici**.*

#### ESEMPI - ESEMPI DI CONDUTTORI OHMICI E NON OHMICI.

- **Ohmici:** fili conduttori di metalli come rame, o argento, resistenze ideali.
- **Non ohmici:** filamento di tungsteno delle lampade a incandescenza, diodi, semiconduttori.

#### 5.2.1 Legge di Ohm nei conduttori metallici

Consideriamo un conduttore metallico cilindrico di lunghezza  $d = \overline{AB}$  e sezione  $\Sigma$ . Ai capi del conduttore è applicata, con un generatore di f.e.m. , una d.d.p. pari a

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ed > 0$$

Il campo elettrico è costante (con modulo  $|\vec{E}| = E$ ) e diretto, parallelo all'asse del cilindro, da  $A$  verso  $B$ ; in regime stazionario, anche la densità di corrente  $\vec{j}$  è costante (con modulo

$|\vec{j}| = j$ ) e scorre nella stessa direzione<sup>5</sup>. Allora, dalla legge di Ohm, segue che

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = j\Sigma = \sigma E\Sigma = \frac{V}{d} \sigma \Sigma = V \frac{\Sigma}{\rho d}$$

Definita la **resistenza** come

$$R = \frac{\rho d}{\Sigma}$$

si ottiene la **legge di Ohm** nella forma amata dagli elettrotecnicici:

$$V = IR \quad (5.19)$$

La legge si può scrivere anche nella forma

$$I = GV \quad (5.20)$$

dove

$$G = \frac{1}{R}$$

è detta **conduttanza**.

#### DEFINIZIONE 5.2.2. - RESISTENZA E CONDUTTANZA.

La **resistenza** è una grandezza associata ai conduttori metallici di lunghezza  $d$  e sezione  $\Sigma$ , definita come

$$R = \frac{\rho d}{\Sigma}$$

che rappresenta la *difficoltà* della corrente a muoversi nel conduttore. Il termine  $\rho$  è la *resistività* del conduttore e dipende dal materiale.

Il valore

$$G = \frac{1}{R} \quad (5.21)$$

viene detto **conduttanza** e rappresenta la facilità della corrente a muoversi nel conduttore.

### Unità di misura

#### UNITÀ DI MISURA.

**RESISTENZA ELETTRICA:** ohm ( $\Omega$ ) o volt su ampere ( $\frac{V}{A}$ ).

**Dimensioni:**  $[R] = \frac{[V]}{[I]} = ML^2T^{-3}I^{-2}$

#### UNITÀ DI MISURA.

**CONDUTTANZA ELETTRICA:** siemens ( $S$ ), mho ( $\mathcal{U}$ ) o ampere su volt ( $\frac{A}{V}$ ).

<sup>5</sup>Ciò è dovuto alla scelta storica di orientare la densità di corrente con le cariche positive. Gli elettroni, invece, percorrono il conduttore da  $B$  verso  $A$ .

$$\text{Dimensioni: } [G] = \frac{[I]}{[V]} = \text{I}^2 \text{T}^3 \text{M}^{-1} \text{L}^{-2}$$

#### DIGRESSIONE - E MHO IL SIEMENS? TRAGICOMMEDIA IN TRE ATTI SULLA CONDUTTANZA.

Nei libri di testo contemporanei l'unità di misura associata alla conduttanza è il *siemens*; tuttavia, in alcuni un po' datati è possibile trovare l'alquanto buffo *mho*. Inoltre, se scartabellassimo libri ancora più vecchi troveremmo sì il *siemens*, ma per indicare la resistenza! Che pasticcio hanno combinato i fisici con questa grandezza?

Facciamo un po' d'ordine e torniamo indietro al 1860. L'ingegnere Werner Siemens era tra i proprietari di un'azienda che costruiva telegrafi in Germania, Russia e Regno Unito; per migliorare il loro funzionamento aveva bisogno di studiare a livello pratico la resistenza dei conduttori al passaggio della corrente, ma una buona unità di misura di tale grandezza, che sia riproducibile, non esisteva. Siemens propose lui stesso negli *Annalen der Physik und Chemie* quella che diventerà nota come *l'unità di mercurio del Dr. Siemens*: essa corrispondeva alla resistenza elettrica presente in una colonna di mercurio con lunghezza di un metro e sezione uniforme di  $1 \text{ mm}^2$  mantenuta alla temperatura di zero gradi Celsius.

Tale unità — il cui nome completo ha quel non so che di cinema espressionista tedesco e potrebbe figurare bene come pellicola accanto a *Il gabinetto del dottor Caligari* — verrà semplicemente chiamata *siemens*, nome che non causerà assolutamente alcuna confusione in futuro.

Seppur sia simile, almeno concettualmente, ad altre unità basate sul mercurio come *l'atmosfera*, in realtà si rivelò problematica proprio nel suo tentativo di essere riproducibile: per definire questa colonna di mercurio erano necessari dei tubi di vetro, i quali però non avevano sezioni costanti. Altri fattori come pressione dell'aria, umidità... potevano influenzare questa misurazione. Inoltre, non era coerente con altre unità di misura preesistenti! Nonostante questi problemi, fu comunque utilizzata per diversi anni.

La ricerca di un'unità di misura migliore proseguì. L'anno successivo, il 1861, Latimer Clark e Sir Charles Bright presentarono un articolo all'*Associazione Britannica per l'Avanzamento della Scienza*, suggerendo di creare uno standard per la resistenza e di chiamarla in onore del fisico tedesco Georg Ohm... chiamandola *ohma*. Si stabilì subito una commissione, a cui parteciparono fisici dal calibro di James Clark Maxwell e Lord Kelvin, per inventare un'unità che fosse coerente con il sistema metrico francese e pratica da utilizzare - a differenza di quella di Siemens. Nel terzo verbale della commissione, nel 1864, si ripropose di chiamarla in onore di Ohm e dunque si riferirono all'unità di misura come... *ohmad*. A volte mi chiedo se i fisici ci sono o ci fanno. Solo nel 1867 il termine *ohm* si userà in modo diffuso.

A dir la verità, l'*ohm* definito dall'*Associazione Britannica* non era neanche così differente da quello di Siemens, dato che cambiava soltanto la lunghezza della colonna di mercurio da 100 cm a 104,7 cm. Ciò nonostante, dato che avere due unità di misura differenti per una stessa grandezza era ridicolo, nel 1881 al *Congresso Internazionale degli Elettricisti* si decise di compiere una scelta definitiva tra le due: l'unità di misura della resistenza non doveva essere il *siemens*, ma l'*ohm*... anche se nel frattempo la colonna di mercurio si allungò a 104,9 cm.

Come ricordò Maxwell al convegno, "le dimensioni contano<sup>[Senza fonte]"</sup> e negli anni l'unità di misura rimase la stessa, ma la colonnina di mercurio cambiò lunghezza più e più volte per adattarsi a studi sempre più analitici - stranamente non cambio lo spessore, ma evidentemente quello non contava più di tanto. La colonna di mercurio puro rimase lo standard fino alla *Conferenza Generale sui Pesi e le Misure del 1948*, dove l'*ohm* fu ridefinito in termini assoluti. Attualmente, il *siemens* di Siemens vale circa  $0,9537 \Omega$  moderni.

Il povero Siemens, nonostante l'unità della resistenza non prese il suo nome, non si perse d'animo e continuò a sperimentare con l'elettromagnetismo: nel 1867 brevettò una delle prime dinamo industriali — casualmente lo stesso giorno in cui Sir Charles Wheatstone brevettò una sua personale versione della dinamo. Successivamente, nel 1888 divenne nobile, trasformando il suo cognome in *von Siemens*, e negli anni a seguire la sua azienda si espansero fino a diventare l'odierna multinazionale *Siemens AG*.

La resistenza elettrica aveva finalmente ottenuto un'unità di misura, ma ne mancava ancora una per la *conduttanza*. O meglio, siccome tale grandezza era il reciproco della resistenza, mancava soltanto il nome dell'unità di misura: dopotutto, se i reciproci dei *secondi* si chiamano *hertz*, anche il reciproco della resistenza merita un nome, che diamine!

Il primo ad accorgersi di cotale mancanza fu Lord Kelvin. Basandosi su alcune idee fornitegli dai suoi studenti, nel 1883 Lord Kelvin propose al grande pubblico di utilizzare il termine *mho*. Se non ve ne foste accorti, *mho* è letteralmente *ohm* letto al contrario - perché un *mho* è il reciproco di un *ohm*.

Non fu l'unica proposta avanzata in quell'incontro: Kelvin propose entusiasta - sempre su un'idea di origine studentesca - che la corretta pronuncia di *mho* si dovesse ottenere prendendo una registrazione di *ohm* con il fonografo di Edison e ascoltandola al contrario.

Non si sa se Kelvin non si accorse di essere stato preso in giro dagli studenti o Kelvin stava cercando di prendersi gioco del suo pubblico, ma sta di fatto che *mho* prese inesplicabilmente piede come nome per la conduttanza; anche il simbolo del *mho* fu ottenuto ribaltando la Omega maiuscola dell'*ohm*.

La cosa peculiare è che la malsana idea venne riproposta in elettrotecnica in altri due contesti.

- l'ingegnere Arthur E. Kennelly scelse il *daraf* per descrivere l'*elastanza elettrica*, in quanto essa è il reciproco della conduttanza e la conduttanza usa i *farad*. In questo caso mi turba di più il nome dell'inverso della conduttanza che non il *daraf*.
- l'ingegnere Vladimir Karapetoff propose nel 1911 di usare gli *yrneh* come reciproco dell'unità di misura dell'induttanza, l'*henry*; la pronuncia, tra l'altro, doveva essere "earney". Non dormo la notte cercando di capire come mai quella sia la pronuncia di *yrneh*.

Saltiamo molti anni e nella *Conferenza Generale sui Pesi e le Misure 1971* si decise che questo scherzo era durato abbastanza: l'unità di misura della conduttanza verrà chiamato *siemens*... aspettate, *di nuovo siemens*?

Eh sì, gli scienziati lì riuniti volevano dedicare un'unità di misura a Siemens — non hanno neanche specificato se a Werner von Siemens o al fratello Sir William Siemens — senza tener conto che in passato è stata usata un'unità di misura dallo stesso nome per tutt'altri scopi. Non si curarono di questo e il *siemens* fu approvato: da allora, usare

il *mho* per la conduttanza è considerato un nome non accettabile (e non consono) per un'unità di misura del SI e pertanto deve essere rigorosamente evitato.

### 5.3 POTENZA DISSIPATA DA UNA RESISTENZA

In un conduttore elettrico in cui scorre una corrente elettrica, la **potenza** necessaria per spostare una carica è data da

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = \vec{F} \cdot \vec{v}_d = e \vec{E} \cdot \vec{v}_d \quad (5.22)$$

Questa energia viene dispersa nell'ambiente sotto forma di *calore*.

Se  $n$  è il numero di cariche per unità di volume, la **densità di potenza**, ossia la potenza per unità di volume, è

$$P_V = n e \vec{E} \cdot \vec{v}_d = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (5.23)$$

con  $\vec{j}$  la densità di corrente. La potenza totale dissipata segue facilmente da

$$P = \int_V P_V dV \quad (5.24)$$

Consideriamo il caso particolare di un conduttore ohmico cilindrico di lunghezza  $d$  e di superficie  $\Sigma$  in situazione di corrente stazionaria. La densità di corrente e il campo elettrico sono costanti e paralleli, dunque densità di potenza è costante e pari a

$$P_V = j E \quad (5.25)$$

quindi la potenza totale è data da

$$P = \int_V P_V dV = P_V \mathcal{V} \sigma \ell = j E \Sigma d = \underbrace{\Sigma j}_{=I} \cdot \underbrace{E d}_{=V} = IV$$

dove  $V$  è il calo di potenziale ai capi del conduttore. In sostanza, in presenza di un calo di potenziale si ha una dispersione di energia sotto forma di calore: maggiore è la corrente nel conduttore, maggiore sarà l'energia dispersa.

Cosa succede, a livello microscopico? La d.d.p. ai capi del conduttore generano un campo elettrico che induce una velocità di deriva nei portatori di carica, fornendo a loro un'energia cinetica. Quando le particelle urtano gli ioni del reticolo cristallino, nell'urto (elastico) viene ceduta energia cinetica dagli elettroni agli ioni, i quali tuttavia sono immobili e quindi *vibrano*, trasformando quella energia sotto forma di calore. Quanta energia viene dispersa dipende dal materiale e dalla geometria del conduttore: questa informazione fisico-empirica è presentata matematicamente nella resistività  $\rho$  e, di conseguenza, dalla resistenza.

Questo è quello che viene chiamato **effetto Joule**; nella sua forma più basica questo si esprime dalla legge

$$P = IV \quad (5.26)$$

Se assumiamo che il conduttore trasforma completamente l'energia in calore, allora

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (5.27)$$

**ESEMPIO.** Qualunque elettrodomestico o oggetto che produce calore, in una forma o nell'altra, a partire da corrente elettrica si basa sull'effetto Joule, come lampadine, fon, fornì...

**OSSERVAZIONE.** La legge dell'effetto Joule si può utilizzare per descrivere il legame tra la potenza generata da un generatore di f.e.m. e la corrente in un conduttore: se  $\mathcal{E}$  è la forza elettromotrice generata e  $P$  la potenza prodotta dal generatore, il generatore produrrà una corrente di intensità

$$I = \frac{P}{\mathcal{E}} \quad (5.28)$$

**Lavoro compiuto dal campo elettrico** Per ottenere l'energia dispersa in un periodo di tempo  $t$ , ossia il lavoro compiuto dal campo elettrico nel conduttore per spostare le cariche, ci basta integrare rispetto al tempo la potenza:

$$U = W = \int_0^t P dt = \int_0^t IV dt \quad (5.29)$$

Se la corrente è stazionaria, si ha

$$U = W = \frac{I^2 V}{2} = \frac{I^3 R}{2} = \frac{V^3}{2R^2} \quad (5.30)$$

#### 5.4 FORZA ELETTROMOTRICE

A pagina 76 abbiamo accennato ai **generatori di forza elettromotrice** (f.e.m.), dispositivi che trasforma energia *non* elettrica in energia elettrica tale da mantenere, ai capi del generatore, una differenza di potenziale  $\Delta V$ , *indipendentemente* da cosa ci si collega.

Come abbiamo visto, il passaggio di corrente implica un trasferimento di energia dalla corrente circolante ad altre forme - ad esempio, calore per *effetto Joule*, oppure sotto forma di energia meccanica, ecc... Di conseguenza, il generatore è l'elemento che deve rifornire con continuità tale energia, a mano a mano che essa viene dissipata o trasformata.

Preso un generatore di f.e.m. con dei fili attaccati, in essi possiamo incontrare le cariche elettriche in due situazioni differenti: alcune sono in movimento, creando così una corrente elettrica, altre sono accumulate ai capi del generatore. Sono quest'ultime che effettivamente causano la differenza di potenziale e sono sorgente di un campo elettrostatico  $\vec{E}_s$  che mantiene la corrente stazionaria. Le cariche accumulate non sono sempre le stesse, bensì le cariche libere *provengono* da esse: il generatore, pertanto, deve continuamente ripristinarle in qualche maniera per mantenere un flusso costante su tutto il filo.

Se supponiamo di prendere un filo conduttore che collega entrambi i capi del generatore di f.e.m., il flusso di cariche è *costante* su tutto il *circuito*  $\gamma$  e sull'intero filo deve esserci un campo elettrico  $\vec{E}$  adeguato per produrre il movimento di cariche. Poiché lungo il circuito l'energia delle cariche viene trasformata in parte in altre forme di energia, il lavoro fornito dal campo elettrico *totale*  $\vec{E}$  agente sui portatori di carica lungo l'intero filo deve essere diverso da zero - in caso contrario, non si potrebbe mantenere costante l'intensità di corrente!

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

È evidente che  $\vec{E}$  non può essere conservativo. Poiché  $\vec{E}_s$ , causato dagli accumuli di carica, è conservativo, è necessario immaginare la presenza di un campo elettrico *non* conservativo

$\vec{E}_f$  prodotto all'interno del generatore e che si oppose a  $\vec{E}_s$ . Tale campo, che chiameremo **campo elettromotore**, separa le cariche ai capi del generatore e le spinge ai capi opposti -  $\vec{E}_f$  ha verso opposto a  $\vec{E}_s$ .

**DIGRESSIONE.** In realtà,  $\vec{E}_f$  è la manifestazione esterna di azioni di natura *non elettrostatiche* che tuttavia intervengono sulle cariche del generatore.

Possiamo ora associare al generatore la **forza elettromotrice**.

**DEFINIZIONE 5.4.1. - FORZA ELETTROMOTRICE.**

La forza elettromotrice (f.e.m.) del generatore è la quantità

$$f = \int_{\gamma} \vec{E}_f \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}_f \cdot d\vec{s} \quad (5.31)$$

dove  $\gamma$  è un cammino *interno* al generatore dal capo negativo  $B$  al capo positivo  $A$ .

La forza elettromotrice rappresenta dunque il lavoro eseguito dal campo elettromotore per portare una carica negativa da un capo all'altro del generatore, al suo interno.

**OSSERVAZIONE.** A discapito del nome, la forza elettromotrice *non* è una forza, bensì è un *lavoro per unità di carica*:

$$[f] = [E][\gamma] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cancel{\text{m}} = \text{V}$$

**La forza elettromotrice come differenza di potenziale** Nella pratica non è possibile calcolare la forza elettromotrice con la definizione che abbiamo fornito. Tuttavia, possiamo ricondurci alla f.e.m. espressa come differenza di potenziale ai capi del generatore.

Possiamo supporre che nella fase iniziale di funzionamento del generatore, il campo elettromotore  $\vec{E}_f$  cerchi lui stesso di accumulare cariche ai capi del generatore; in questo modo, esso genera al contempo un campo elettrostatico  $\vec{E}_s$  ad esso contrario, via via crescente fino alla situazione di equilibrio per cui, all'interno del generatore, si ha  $\vec{E}_f = -\vec{E}_s$ . Ne segue che

$$f = \int_B^A \vec{E}_f \cdot d\vec{s} = \int_B^A (-\vec{E}_s) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-\vec{\nabla}V) \cdot d\vec{s} = -V \Big|_A^B = V_A - V_B$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che  $\vec{E}_s$  è conservativo.

La precedente definizione di forza elettromotrice può essere generalizzata all'intero circuito se non è possibile circoscrivere in una delimitata zona il **campo elettromotore**:

$$f = \oint \vec{E}_f \cdot d\vec{s} \quad (5.32)$$

La (5.32) si riduce alla (5.31) se  $\vec{E}_f$  è localizzato solo lungo un certo tratto  $\gamma$  del circuito. Ancor più in generale vale per il campo elettrico *totale*  $\vec{E}$  la legge

$$f = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (5.33)$$

dato che il contributo di  $\vec{E}_s$  al lavoro di  $\vec{E}$  è nullo essendo conservativo.

## 5.5 CIRCUITI ELETTRICI

Nel Capitolo 4 a pagina 59 abbiamo introdotto brevemente i *circuiti elettrici*, limitandoci a studiare come si comportano dei condensatori collegati in serie e in parallelo. Ora riprendiamo e approfondiamo ciò che abbiamo detto, alla luce delle nostre nuove conoscenze sulla corrente elettrica.

### DEFINIZIONE 5.5.1. - CIRCUITO ELETTRICO.

Un **circuito elettrico** è un insieme interconnesso di componenti elettrici, sono connessi da fili conduttori in un percorso chiuso in modo che la corrente elettrica possa fluire con continuità.

### DEFINIZIONE 5.5.2. - COMPONENTE, NODO, RAMO, MAGLIA, INTERRUTTORE.

In un circuito elettrico,

- un **componente elettrico** è un congegno con due o più terminali da cui la corrente può entrare o uscire allo scopo di modificare il comportamento degli elettronni o dei campi elettromagnetici. Esse si distinguono in
  - ◊ componenti **attive**: dette anche **sorgenti** o *generatori*, producono energia elettrica in quanto indicano una corrente o una d.d.p. per mezzi non elettrici; ad esempio, sono componenti attive i generatori di tensore e di corrente.
  - ◊ componenti **passive**: non producono energia, bensì la ricevono per utilizzarla in altri scopi; ad esempio, sono componenti passive i condensatori, i resistori e gli induttori.
- un **nodo** è il punto di incontro di tre o più fili.
- un **ramo** è un filo con e/o componenti che collegano due nodi
- una **maglia** è un insieme di rami all'interno di un circuito che forma un circuito chiuso senza auto-intersezioni.
- un **interruttore** permette di chiudere o aprire un circuito, lasciando rispettivamente passare o fermando la corrente elettrica.

Lo scopo dell'**analisi dei circuiti elettrici** è quella di *risolvere* i circuiti, ossia trovare le differenze di potenziali e le correnti per ciascuna componente del circuito. Ovviamente, noi studieremo soltanto un *modello* dei circuiti elettrici reali, supponendo che:

- La corrente si suppone *stazionaria* nel circuito.
- La carica rimane *costante* a meno di incontrare un nodo o una componente.
- I fili conduttori e i generatori di f.e.m. *non* possiedono di per sé una resistenza (o al più è trascurabile).
- Il circuito può essere rappresentato secondo una *rappresentazione schematica piana*.
- Le relazioni che caratterizzano le componenti *passive* sono lineari.

## Collegamenti in serie e in parallelo

### DEFINIZIONE 5.5.3. - COLLEGAMENTO IN SERIE E IN PARALLELO.

- Due o più componenti sono collegate **in serie** se tutte sono collegate lungo un unico “percorso elettrico”, in cui ogni componente è collegata direttamente ad una sola altra componente.
- Due o più componenti sono collegate **in parallelo** se le componenti sono connesse su *rami* separati del “percorso elettrico”.

Si possono già fare alcune osservazioni:

- In un collegamento *in serie*, la *carica totale*  $q$  rimane costante lungo il percorso e ogni oggetto riceve la *stessa*<sup>6</sup>; di conseguenza, anche la *corrente* risulta essere sempre la *stessa* in ogni componente.
- In un collegamento *in parallelo*, la carica si *distribuisce* nei vari rami in modo proporzionale alle caratteristiche delle componenti, e lo stesso fa la corrente elettrica. La carica e la corrente complessiva in un collegamento in parallelo è quindi la *somma* di quella nei vari fili.
- In un collegamento *in serie*, la differenza di potenziale diminuisce per ogni componente che è presente nel filo. Pertanto, la d.d.p. in un collegamento in serie è la somma di quella tra tutte i capi delle componenti.
- In un collegamento *in parallelo*, la differenza di potenziale è la stessa ai capi di ogni componente, perché metà delle estremità sono attaccate allo stesso filo e l'altra metà ad un altro filo.

L'idea cardine dello studio dei circuiti elettrici è di *semplificarli* il più possibile, riducendo il numero di componenti: se abbiamo diversi oggetti elettrici collegati nel circuito caratterizzati da delle quantità particolari  $Z_i$ , ci immaginiamo di sostituire diversi elementi dello stesso tipo (collegati in serie e in parallelo) con un'unica componente **equivalente** caratterizzata da una quantità  $Z_{eq}$  che deriva da quelle delle componenti singole.

**Resistori** Prima di descrivere altro, definiamo un componente elettrico molto utile, il **resistore**.

### DEFINIZIONE 5.5.4. - RESISTORE.

Un **resistore** è un componente elettrico che implementa gli effetti di una resistenza elettrica all'interno di un circuito.

Nei circuiti elettronici, i resistori sono utilizzati per ridurre l'intensità di corrente e voltaggi, oltre ad altri usi.

**Alcuni simboli elettronici** I modelli di circuiti elettrici che andiamo a studiare sono rappresentabili in diagrammi in cui fili e componenti sono stilizzati sotto forma di pittogrammi che permetto di vedere a colpo d'occhio il funzionamento di un circuito. Di seguito sono elencate i pittogrammi di alcune componenti elettriche che abbiamo incontrato finora.

- **Filo conduttore.**

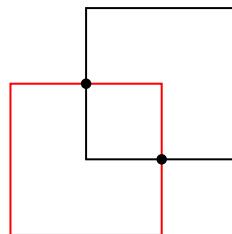
---

<sup>6</sup>Non necessariamente sono le stesse cariche nell'intero circuito: ad esempio, nel caso dei condensatori le cariche che partono dall'altra piastra collegata *non* sono le stesse che sono arrivate sull'altra, bensì sono cariche respinte da quelle presenti nell'altra armatura. In ogni caso, ciò che non cambia è la *quantità* di carica totale.

■ **Nodo e rami.**



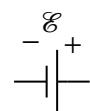
■ **Maglia.** (*quella in rosso è una possibile maglia del circuito*)



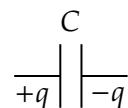
■ **Interruttore.**



■ **Generatore di forza elettromagnetica (continua) o batteria.**



■ **Condensatore.**

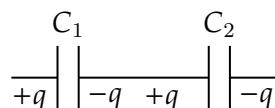


■ **Resistore.**



### 5.5.1 Condensatori in serie e in parallelo

**Condensatori in serie** Consideriamo due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  collegati in serie; se fossero piani, potremmo supporre che la piastra inferiore del primo è collegata alla superiore della seconda.



Per quanto osservato, la carica complessiva è la stessa in ogni componente:

$$q_1 = q_2 = q_{tot}$$

Al contrario, il potenziale diminuisce ad ogni nuovo condensatore che si incontra lungo il filo e in particolare la d.d.p. ai capi dell'intero sistema è la somma delle d.d.p. ai capi delle singole componenti.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Allora, se

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V_1} = \frac{q_{tot}}{\Delta V_1} \quad C_2 = \frac{q_2}{\Delta V_2} = \frac{q_{tot}}{\Delta V_2}$$

si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un condensatore di capacità

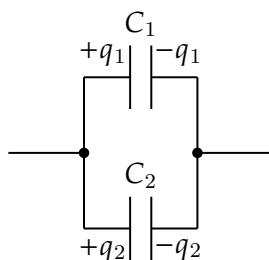
$$C_{eq} = \frac{q_{tot}}{\Delta V} = \frac{q_{tot}}{\Delta V_1 + \Delta V_2} \implies \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\frac{\Delta V_1}{q_{tot}}} + \frac{1}{\frac{\Delta V_2}{q_{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (5.34)$$

Nel caso generale di  $n$  condensatori in serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (5.35)$$

**Condensatori in parallelo** Consideriamo due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  collegati in parallelo; se fossero piani, potremmo che le piastre superiori siano collegate ad uno stesso filo e, in modo analogo, le piastre inferiori siano collegate entrambe ad un altro filo.



Per quanto osservato, la carica complessiva si distribuirà nei due fili:

$$q_{tot} = q_1 + q_2$$

Poiché le piastre superiori sono collegate dallo stesso filo, essendo questo un unico conduttore equipotenziale, si ha in entrambe le armature in alto lo stesso potenziale  $V_1$ . Lo stesso vale per le armature inferiori, che sono collegate da uno stesso filo e quindi hanno potenziale  $V_2$ . Segue che la d.d.p.  $\Delta V_1$  tra le piastre del primo condensatore di capacità  $C_1$  e la d.d.p.  $\Delta V_2$  tra le piastre del secondo condensatore di capacità  $C_2$  è la stessa:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

Allora, se

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V_1} = \frac{q_1}{\Delta V} \quad C_2 = \frac{q_2}{\Delta V_2} = \frac{q_2}{\Delta V}$$

si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un condensatore di capacità

$$C_{eq} = \frac{q_{tot}}{\Delta V} = \frac{q_1 + q_2}{\Delta V} = \frac{q_1}{\Delta V} + \frac{q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (5.36)$$

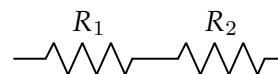
Nel caso generale di  $n$  condensatori in parallelo:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (5.37)$$

Qui riprendiamo solamente i risultati, per come ricavarli rimandiamo a pag. 92, Capitolo 4.

### 5.5.2 Resistori in serie e in parallelo

**Resistori in serie** Consideriamo due resistori  $R_1$  e  $R_2$ , collegati in serie.



Per quanto osservato, la corrente stazionaria che li attraversa è la stessa:

$$I_1 = I_2 = I$$

Invece, ciascun resistore presenta una d.d.p. ai suoi capi: il potenziale diminuisce ad ogni nuovo resistore che si incontra lungo il filo e in particolare la d.d.p. ai capi dell'intero sistema è la somma delle d.d.p. ai capi delle singole componenti.

$$V = V_1 + V_2$$

Per la *legge di Ohm*, se

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1}{I} \quad R_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_2}{I}$$

si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un resistore di capacità

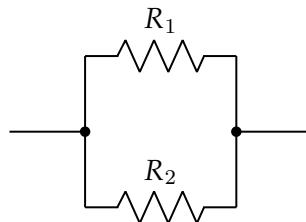
$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{V_1 + V_2}{I} = \frac{V_1}{I} + \frac{V_2}{I} = R_1 + R_2$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (5.38)$$

Nel caso generale di  $n$  resistori in serie:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (5.39)$$

**Resistori in parallelo** Consideriamo due resistori  $R_1$  e  $R_2$ , collegati in parallelo.



Per quanto osservato, la corrente stazionaria che li attraversa si distribuirà nei due fili:

$$I = I_1 + I_2$$

Invece, i terminali d'arrivo dei due resistori sono collegati dallo stesso filo e quindi si ha lo stesso potenziale. Lo stesso vale per i terminali d'uscita, che sono collegati da uno stesso filo e quindi hanno ugual potenziale. La d.d.p. ai capi delle due resistenze è pertanto la stessa:

$$V_1 = V_2 = V$$

Per la legge di Ohm, se

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V}{I_1} \quad R_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{V}{I_2}$$

si ha che, complessivamente, il sistema corrisponde ad un resistore di capacità

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{I_1 + I_2}{V} = \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

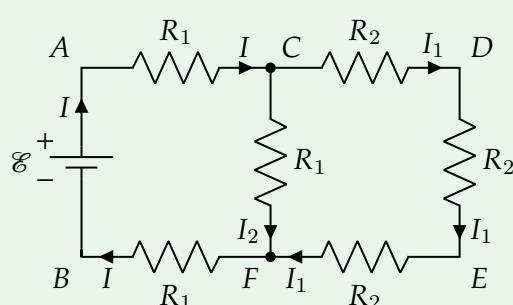
$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (5.40)$$

Nel caso generale di  $n$  resistori in parallelo:

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad (5.41)$$

### 5.5.2.1 Eserciziamoci! Resistori in serie e in parallelo

**ESERCIZIO.** Si consideri il seguente circuito.



Noto che

$$\mathcal{E} = 17,4 \text{ V} \quad R_1 = 3 \Omega \quad R_2 = 9 \Omega$$

si calcoli:

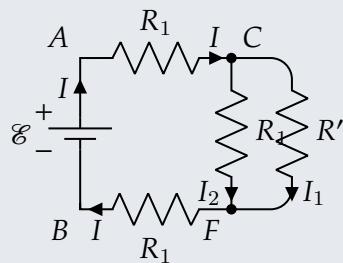
- La corrente elettrica  $I$  generata dal generatore di f.e.m. .
- La d.d.p. tra i nodi  $C$  e  $F$ .
- Calcolare  $I_1$  e  $I_2$ .
- Calcolare la potenza dissipata dai resistori del circuito.

**SOLUZIONE.** Sappiamo che la differenza di potenziale tra i capi  $A$  e  $B$  coincide con la d.d.p.  $\mathcal{E}$  del generatore di f.e.m. che mantiene separate cariche positive e negative.

$$V_A - V_B = \mathcal{E}$$

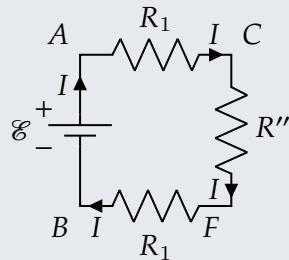
Data la disposizione del circuito possiamo ottenere una resistenza equivalente a quelle presenti che ha ai suoi capi come d.d.p. proprio  $\mathcal{E}$ ; grazie ad essa e alla legge di Ohm potremo poi ricavare la corrente  $I$  prodotta dal generatore.

- **Passo 1:** semplifichiamo il ramo  $\overrightarrow{CDEF}$ , sostituendo i tre resistori in serie con uno equivalente.



$$R' = R_2 + R_2 + R_2 = 3R_2 = 3 \cdot 9\Omega = 27\Omega$$

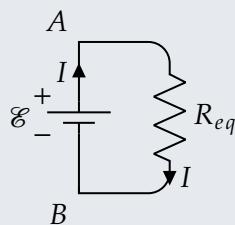
- **Passo 2:** semplifichiamo i rami paralleli collegati ai nodi  $C$  e  $F$ .



$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'} \implies R'' = \frac{R_1 R'}{R_1 + R'} = \frac{3 \cdot 27}{3 + 27} \Omega = 2,7 \Omega$$

Si osservi che a questo passo la corrente che scorre in ogni tratto del circuito è  $I$ .

- **Passo 3:** semplifichiamo i tre resistori in serie rimasti con un resistore equivalente.



$$R_{eq} = R_1 + R_{eq} + R_1 = 2R_1 + R_{eq} = 2 \cdot 3\Omega + 2,7\Omega = 8,7\Omega$$

Possiamo ora ricavare la corrente  $I$  poiché è la corrente che passa nel resistore equivalente:

$$I = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{17,4\text{ V}}{8,7\Omega} = 2\text{ A}$$

Per calcolare la d.d.p. tra  $C$  e  $F$  non possiamo utilizzare il passo 3: in tale semplificazione i punti  $C$  e  $F$  *non* esistono in più avendo semplificato i resistori che li precedono o li seguono, rispettivamente. Invece, ai passi 2 e 3 tali punti esistono ancora.

Potremmo porci al passo 1 per calcolare  $V_F - V_C$ , ma avremmo da sommare la differenza di potenziale dei singoli rami - e quindi ci sarebbe bisogno di calcolare prima le correnti  $I_1$  e  $I_2$ . Per semplificare i calcoli, possiamo applicare la legge di Ohm al passo 2 dato che la corrente in tal caso è soltanto  $I$ :

$$V_C - V_F = IR'' = 2 \cdot 2,7\text{ V} = 5,4\text{ V}$$

Per calcolare  $I_1$  e  $I_2$ , sappiamo che ai capi di  $R_1$  e  $R'$  nel condotto parallelo si ha come d.d.p.  $V_C - V_F$  in entrambi i casi.

$$I_2 = \frac{V_C - V_F}{R_1} = \frac{5,4\text{ V}}{3\Omega} = 1,8\text{ A}$$

$$I_1 = I - I_2 = 2 - 1,8\text{ A} = 0,2\text{ A}$$

In modo analogo a  $I_2$ , si poteva calcolare  $I_1$  usando  $R'$ :

$$I_2 = \frac{V_C - V_F}{R'} = \frac{5,4\text{ V}}{27\Omega} = 0,2\text{ A}$$

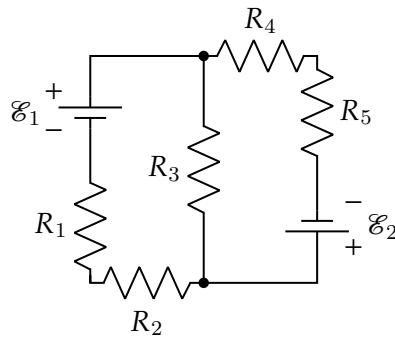
La potenza dissipata dal circuito, data dalla somma di tutte le potenze dissipate dai singoli resistori, è pari alla potenza dissipata dal circuito equivalente e il suo resistore:

$$P = I^2 R_{eq} = 4 \cdot 8,7\text{ W} = 34,8\text{ W}$$

Il circuito disperde come calore 34,8 J al secondo.

### 5.5.3 Leggi di Kirchhoff

Abbiamo visto che ci conviene studiare i circuiti elettrici semplificandoli, se possibile, ad un solo generatore di f.e.m. e con una componente singola equivalente alle altre dello stesso tipo presenti (un resistore equivalente e/o condensatore equivalente e/o ...). Il problema è che *non* sempre è possibile analizzare i circuiti usando le tecniche di semplificazione per componenti in serie e/o paralleli, in particolare se sono presenti nodi e multiple sorgenti. Ad esempio, nel seguente circuito potremmo ridurre  $R_1$  con  $R_2$  in serie e analogamente  $R_4$  e  $R_5$ , ma dopo come facciamo con i due generatori?



In nostro aiuto vengono due “regole” dell’analisi dei circuiti, dette **leggi di Kirchhoff**, chiamate così in onore del loro inventore Gustav **Kirchhoff**.

### Prima legge di Kirchhoff

#### TEOREMA 5.5.1. - PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF O LEGGE DEI NODI.

La somma algebrica di tutte le correnti che entrano un nodo è pari alla somma algebrica di tutte le correnti che escono dal nodo o, equivalentemente, la somma algebrica di tutte le correnti che attraversano un nodo del circuito deve essere pari a zero:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (5.42)$$

$I_k$  è una corrente con segno che attraversa il nodo dal ramo  $k$ -esimo, mentre  $n$  è il numero di rami connessi al nodo.  $\square$

Il segno della corrente è fissato arbitrariamente per indicare se la corrente è entrante oppure uscente<sup>7</sup>.

In casi più complessi non è però possibile determinare quale sia il verso di percorrenza della corrente, soprattutto in presenza di più generatori di f.e.m.. In tal caso, si può ipotizzare un verso di percorrenza della corrente nei rami in cui esso sia *ignoto* e applicare poi le leggi di Kirchhoff. Supponendo di poter risolvere il circuito, il vero verso della corrente si deduce in base al segno della corrente:

- Il valore della corrente ottenuta ha segno *positivo*; in tal caso, il verso ipotizzato è quello *reale*.
- Il valore della corrente ottenuta ha segno *negativo*; in tal caso, il verso ipotizzato è *errato* e va *invertito*.

### Seconda legge di Kirchhoff

#### TEOREMA 5.5.2. - SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF O LEGGE DELLE MAGLIE.

La somma algebrica di tutte le differenze di potenziale attorno una maglia è zero:

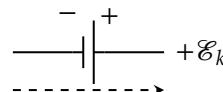
$$\sum_{k=1}^n V_k = 0 \quad (5.43)$$

<sup>7</sup>In generale, si pone + per la corrente entrante in un nodo e – per la corrente uscente.

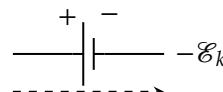
$V_k$  è un voltaggio con segno, mentre  $n$  è il numero di componenti e generatori che causano un voltaggio.  $\square$

Per determinare il segno, fissiamo prima dei versi ipotetici in cui scorre la corrente nei vari rami della maglia<sup>8</sup> e scegliamo un verso di percorrenza della maglia; attribuiamo ad ogni d.d.p. il segno nella seguente maniera:

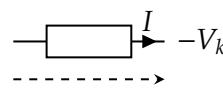
- Per un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_k$ , se il verso di percorrenza passa dal – al + (quindi dal potenziale minore a quello maggiore), poniamo un segno *positivo*:



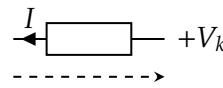
- Per un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_k$ , se il verso di percorrenza passa dal + al – (quindi dal potenziale maggiore a quello minore), poniamo un segno *negativo*:



- Per una componente con voltaggio  $V_k$ , se il verso di percorrenza è concorde con il verso (ipotetico) della corrente che lo attraversa poniamo un segno *negativo*:

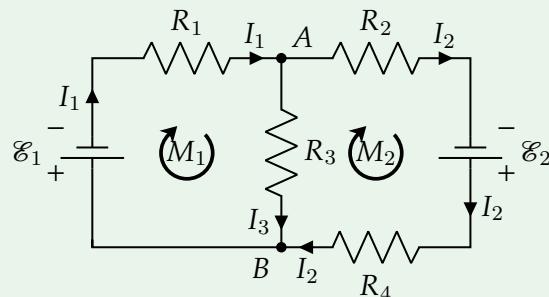


- Per una componente con voltaggio  $V_k$ , se il verso di percorrenza è opposto con il verso (ipotetico) della corrente che lo attraversa poniamo un segno *positivo*:



### 5.5.3.1 Eserciziamoci! Leggi di Kirchhoff

**ESERCIZIO.** Si consideri il seguente circuito.



Noto che

$$\mathcal{E}_1 = 5 \text{ V} \quad \mathcal{E}_2 = 2 \text{ V} \quad R_1 = 1 \Omega \quad R_2 = 2 \Omega \quad R_3 = 4 \Omega \quad R_4 = 3 \Omega$$

Si calcoli la corrente elettrica nei rami.

<sup>8</sup>O quanto meno nei rami in cui il verso *non* è noto!

**SOLUZIONE.** Data la presenza di due generatori, potrebbe non essere chiaro quale sia il verso della corrente. In questo caso i versi che *ipotizziamo* sono quelli indicati nel diagramma.

Applichiamo innanzitutto la prima legge di Kirchhoff al nodo  $A$ , con la convenzione + per la corrente entrante, - per quella uscente:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

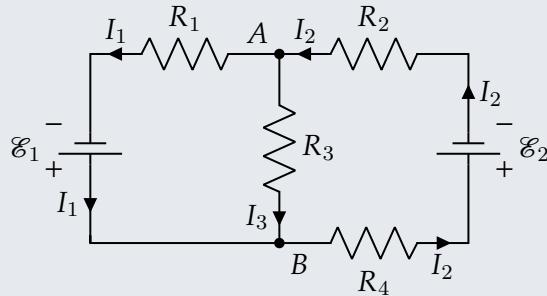
Utilizziamo la seconda legge sulle due maglie piccole  $M_1$  e  $M_2$  del circuito, seguendo il verso di percorrenza orario come indicato in figura. In entrambi i casi, partiamo dal generatore nella maglia.

$$\begin{cases} M_1: & -\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \\ M_2: & \mathcal{E}_2 - R_4 I_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare le correnti, risolviamo il sistema con tutte e tre le equazioni ottenute:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ \mathcal{E}_1 + R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) = 0 \\ \mathcal{E}_2 - R_4 I_2 + R_3 (I_1 - I_2) - R_2 I_2 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ (R_1 + R_3) I_1 + R_3 I_2 = -\mathcal{E}_1 \\ (R_3 - R_4 - R_2) I_2 + R_3 I_1 = -\mathcal{E}_2 \end{cases} \\ &\begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} \\ (R_3 - R_4 - R_2) I_2 + R_3 \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} = -\mathcal{E}_2 \end{cases} \\ &\begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} \\ \left( R_3 - R_4 - R_2 - \frac{R_3^2}{R_1 + R_3} \right) I_2 = -\mathcal{E}_2 + \frac{\mathcal{E}_1 R_3}{R_1 + R_3} \end{cases} \\ &\begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} \\ [R_1 R_3 - (R_2 + R_4)(R_1 + R_3)] I_2 = -\mathcal{E}_2 (R_1 + R_3) + \mathcal{E}_1 R_3 \end{cases} \\ &\begin{cases} I_2 = \frac{-\mathcal{E}_2 (R_1 + R_3) + \mathcal{E}_1 R_3}{R_1 R_3 - (R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} = \frac{-2 \cdot (1+4) + 5 \cdot 4}{1 \cdot 4 - (2+3) \cdot (1+4)} A = \frac{10}{-16} A = -0,625 A \\ I_1 = \frac{-\mathcal{E}_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_3} = \frac{-4 - 4 \cdot (-0,625)}{1+4} A = \frac{-1,5}{5} A = -0,3 A \\ I_3 = I_1 - I_2 = -0,3 + 0,625 A = 0,325 A \end{cases} \end{aligned}$$

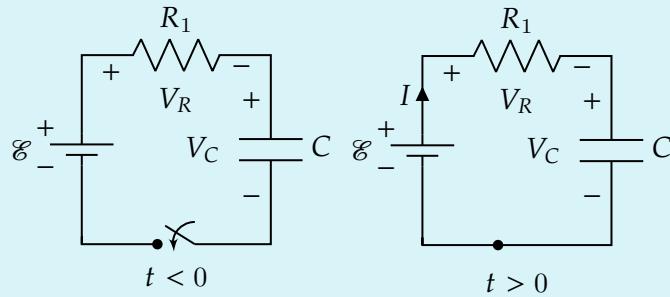
In questo caso, i versi delle correnti  $I_1$  e  $I_2$  sono errati, mentre è corretto il verso di  $I_3$ . Il circuito con i versi corretti è il seguente:



#### 5.5.4 Circuiti RC e processo di carica di un condensatore

##### DEFINIZIONE 5.5.5. - CIRCUITO RC.

Un **circuito RC** è un circuito che presenta solo *resistori* e *condensatori*.



Consideriamo il caso semplice di un circuito RC con un resistore e un condensatore dotato di un interruttore, inizialmente aperto. Al tempo  $t = 0$  viene chiuso l'interruttore: poiché si verifica la separazione di cariche da parte del generatore di f.e.m., la corrente può circolare nel circuito per caricare il condensatore, inizialmente *scarico*.

- Al tempo  $t < 0$  la d.d.p.  $V_C$  ai capi del condensatore è *nulla*, dato che non si hanno cariche sul condensatore, e anche la differenza  $V_R$  ai capi della resistenza lo è perché non scorre corrente.

$$q(t) = 0 \quad I(t) = 0 \quad V_R(t) = 0 \quad V_C(t) = 0$$

- Appena il circuito è *chiuso* ( $t = 0$ ) scorre subito una corrente  $I_0 = I(0)$ : essa attraversa il resistore e raggiunge il condensatore, il quale inizierà subito a caricarsi. Ai capi del resistore si ha una d.d.p. pari a  $V_R(0) = I_0 R$ , mentre l'assenza di cariche sul condensatore fa sì che in questo istante  $V_C(0) = 0$ . Ci si potrà aspettare da ciò che la corrente iniziale, per la legge di Ohm, sia  $\mathcal{E}/R$ .

$$q(0) = 0 \quad I(0) = I_0 \quad V_R(0) = I_0 R \quad V_C(0) = 0$$

- Man mano che passa il tempo il condensatore si *carica* e la carica  $q$  sul condensatore *aumenta*; per questo motivo, *meno cariche sono libere* di muoversi e la corrente  $I$  che scorre nel circuito *decrese*. Di conseguenza, il voltaggio del resistore *diminuirà*, ma al contempo *aumenterà* quello relativo al condensatore.

$$q(t) = 0 \quad I(t) = \frac{dq}{dt} \quad V_R(t) = I(t)R \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

- In un *tempo infinito* ( $t = +\infty$ ) il condensatore sarà completamente carico e *non* scorrerà più corrente nel circuito: poiché nel resistore non scorre corrente, non

si ha una d.d.p. in sua corrispondenza ( $V_R(+\infty) = 0$ ), mentre quella ai capi del condensatore coincide con quello del generatore ( $V_C(+\infty) = \mathcal{E}$ ). La carica accumulata è  $q(+\infty) = q_\infty = V_C \mathcal{E}$ .

$$q(+\infty) = q_\infty = V_C \mathcal{E} \quad I(+\infty) = 0 \quad V_R(+\infty) = 0 \quad V_C(0) = \mathcal{E}$$

**OSSERVAZIONE.** Per fare questi ragionamenti abbiamo immaginato che in *tutto* il circuito scorresse una corrente di intensità variabile  $I(t)$ , ma è *leita* tale supposizione? In altre parole, *la corrente passa attraverso un condensatore in un circuito?* La risposta a ciò è *teoricamente no, ma di fatto sì*.

Quando una corrente giunge ad una delle armature del condensatore le cariche *non* possono attraversare il vuoto o il materiale tra le piastre. Ciò nonostante, le particelle cariche che raggiungono l'armatura *respingono* nell'armatura opposta una quantità di cariche dello *stesso segno* pari a quella arrivata sul condensatore, creando così nei fili collegati una nuova corrente di *pari intensità*.

In altre parole, le correnti alle due estremità dell'armatura non sono costituite dagli stessi *elettroni* perché questi non possono attraversare lo spazio interno al condensatore, ma l'*intensità* è la stessa per effetti di repulsione delle cariche sull'armatura di arrivo: le due correnti sono virtualmente *indistinguibili* l'una dall'altra.

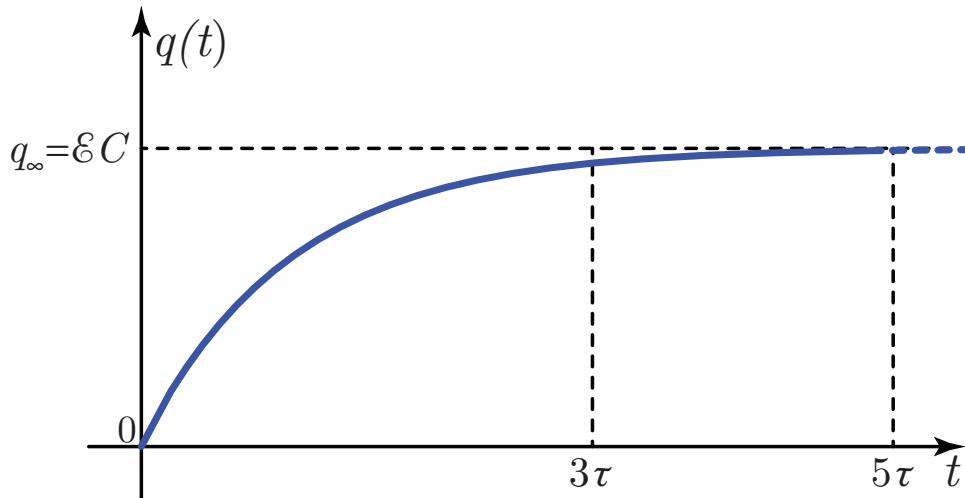
Formalizziamo questo discorso empirico usando la *legge di Kirchhoff* delle maglie. Fissato come verso di percorrenza della maglia quello della corrente  $I$ , la somma delle d.d.p. è

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - V_R - V_C &= 0 \\ \mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} &= 0 \\ \mathcal{E} - \frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C} &= 0 \end{aligned}$$

Risolviamo questa *equazione differenziale del prim'ordine* per descrivere la carica  $q = q(t)$  del condensatore:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\mathcal{E}C - q}{RC} \\ \int_0^{q(t)} \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\ \log q - \mathcal{E}C \Big|_0^{q(t)} &= -\frac{1}{RC} t \Big|_0^t \\ \log \frac{q(t) - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} &= -\frac{t}{RC} \\ \frac{q(t) - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} &= e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

$$q(t) = \mathcal{E}C \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \mathcal{E}C \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5.44)$$



**Tempo caratteristico del circuito RC** L'andamento temporale della carica è dettato dal **tempo caratteristico del circuito RC**:

$$\tau = RC \quad (5.45)$$

Essa è una costante dimensionalmente pari ad una quantità temporale e quindi nel SI si misura in *secondi*:

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = M L^2 T^{-3} I^{-2} \cdot M^{-1} L^{-2} T^4 I^2 = T$$

Come previsto, la carica dopo un tempo di carica *infinito* è

$$q_\infty = EC \quad (5.46)$$

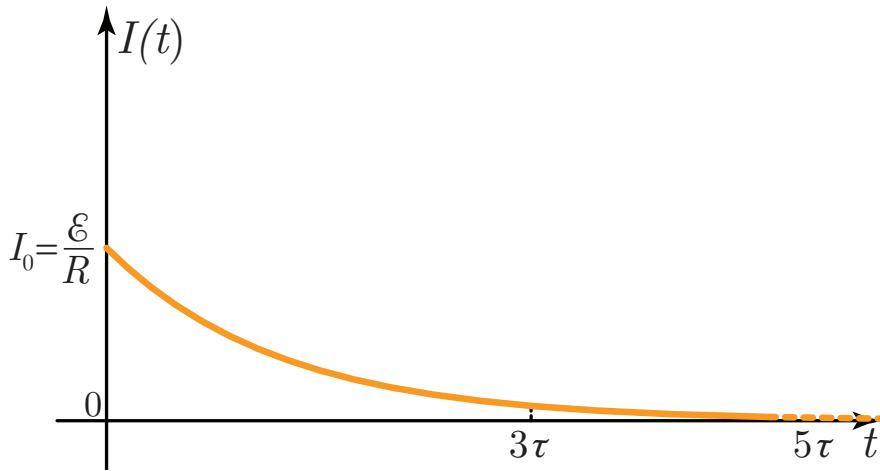
Per un *matematico*, ciò significherebbe che il condensatore non può mai caricarsi completamente; invece, per un *fisico* questo si realizza - approssimando, chiaramente! - per un tempo tra  $3\tau = 3RC$  e  $5\tau = 5RC$ . Infatti, si ha

$$\begin{aligned} q(3\tau) &= EC \left(1 - e^{-3/\tau}\right) = 0,950 \cdot EC \\ q(5\tau) &= EC \left(1 - e^{-5/\tau}\right) = 0,993 \cdot EC \end{aligned}$$

i quali sono valori *molto* vicini al valore asintotico  $q_\infty$  e che nella pratica possiamo assimilare ad esso.

**Corrente nel circuito RC** Per ottenere la corrente che attraversa il circuito ci basta considerare il flusso di corrente attraverso il condensatore - in poche parole, basta derivare  $q(t)$  rispetto al tempo:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.47)$$



Come previsto, la corrente che percorre inizialmente il circuito è  $\frac{\mathcal{E}}{R}$ , mentre asintoticamente tende a zero.

**Differenze di potenziali nel circuito RC** Noto carica e corrente, i valori delle d.d.p. ai capi del resistore e del condensatore sono facili da ricavare:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (5.48)$$

$$V_R(t) = RI(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.49)$$

Riprendendo quanto già detto, il voltaggio del condensatore aumenta al crescere del tempo di carica, mentre quello del resistore diminuisce.

**Potenze ed energia nel circuito RC** La *potenza* erogata dal generatore è ovviamente dipendente dal tempo e vale

$$P_{gen}(t) = \mathcal{E}I(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.50)$$

mentre quella dissipata del resistore è, in base all'effetto Joule,

$$P_R(t) = I^2(t)R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (5.51)$$

Il lavoro per caricare il condensatore è  $W = \frac{1}{2}V_C q$ ; la potenza elementare relativa è la sua derivata temporale<sup>9</sup>, ossia

$$P_C(t) = V_C(t)I(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}} = P_{gen} - P_R \quad (5.52)$$

Ciò è coerente col *principio di conservazione dell'energia*: l'energia immagazzinata (per unità di tempo) dal condensatore è ciò che *rimane* dell'energia prodotta dal generatore dopo che parte di essa è stata dissipata sotto forma di calore dal resistore.

Sul lungo termine, l'energia prodotta dal generatore complessivamente è

$$W_{gen} = \int_0^{+\infty} P_{gen}(t)dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{\mathcal{E}^2}{R} \cancel{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Big|_0^{+\infty} = \mathcal{E}^2 C$$

$$W_{gen} = \mathcal{E}^2 C$$

(5.53)

mentre quella dissipata dal resistore è

$$W_R = \int_0^{+\infty} P_R(t)dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}^2}{R} \cancel{RC} e^{-\frac{2t}{RC}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C$$

$$W_R = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C$$

(5.54)

**OSSERVAZIONE.** L'energia dissipata complessivamente dal resistore è indipendente dal valore della resistenza, ma è sempre la *metà* di quanto produce il generatore di f.e.m..

Per il *principio di conservazione dell'energia*, il lavoro di carica del condensatore è pari a

$$W_{gen} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C \quad (5.55)$$

---

<sup>9</sup>Si vede, infatti che

$$P_C = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} V_C q \right) = \frac{1}{2} \left( q \frac{dV_C}{dt} + V_C \frac{dq}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left( q \frac{dV_C}{dt} + V_C I \right)$$

ed essendo  $V_C = \frac{q}{C}$ , allora  $\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{C}$  e quindi

$$P_C = \frac{1}{2} \left( q \frac{I}{C} + V_C I \right) = \frac{1}{2} (V_C I + V_C I) = V_C I$$



# CAPITOLO 6

## PROPRIETÀ ELETTRICHE DELLA MATERIA

---

“BEEP BOOP”

*LOLLO BIANCOBOT, dopo aver finito le citazioni.*

### D<sup>OPO</sup>

#### 6.1 MATERIALE DIELETTRICI E CONDENSATORI

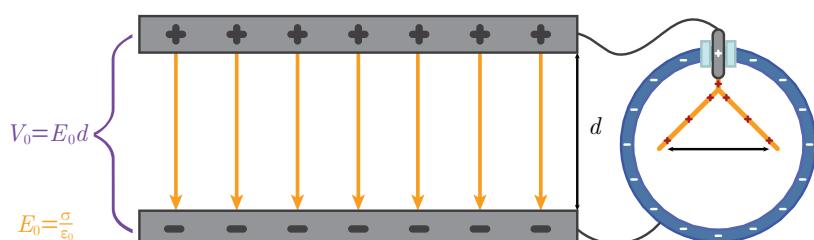
Consideriamo un *condensatore* alle cui armature è collegato un *elettroscopio*: anche lo abbiamo introdotto come strumento per misurare la carica, può essere usato (e qui lo useremo in questo secondo modo) anche per misurare la differenza di potenziale e/o il campo elettrico. Ricordiamo che il campo elettrico interno ad un condensatore piano con armature distanti  $d$  e densità di carica uniforme  $\sigma$  è, in modulo, pari a

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

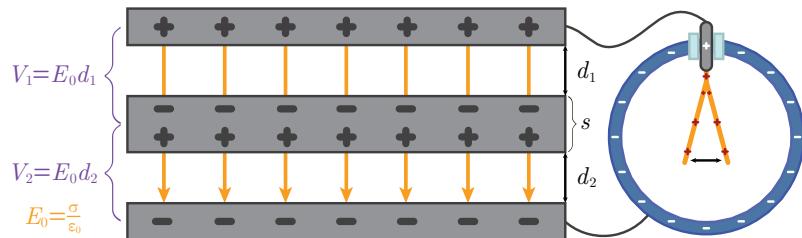
e la differenza di potenziale è

$$V_0 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = E_0 d$$

Se collegiamo (in parallelo) l'elettroscopio, tale differenza di potenziale corrisponde ad un certo angolo di separazione delle foglioline d'oro.



**Potenziale e capacità di un condensatore con conduttore all'interno** Se introduciamo una *lastra conduttrice* di spessore  $s$  nello spazio tra le due piastre, osservando l'elettroscopio ci accorgiamo che l'angolo tra le foglioline è minore rispetto al caso precedente. Effettivamente avviene un calo di potenziale, ma perché?



Il campo elettrico del condensatore induce una separazione di carica nella lastra conduttrice, formando una distribuzione superficie di carica positiva da un lato e negativa dall'altra. Ciò induce un campo elettrico di verso opposto a quello già presente, in modo che all'interno della lastra *non* ci sia campo elettrico, ma questo comporta una diminuzione del campo elettrico. In termini di potenziali, si noti che la d.d.p.

- tra la prima piastra e il conduttore è  $V_1 = E_0 d_1$ .
  - tra il conduttore e la seconda piastra è  $V_2 = E_0 d_2$ .
- dove  $d_i$  è la distanza tra la piastra  $i$ -esima e il conduttore; poiché  $d_1 + d_2 = d - s$ , la differenza di potenziale complessiva è

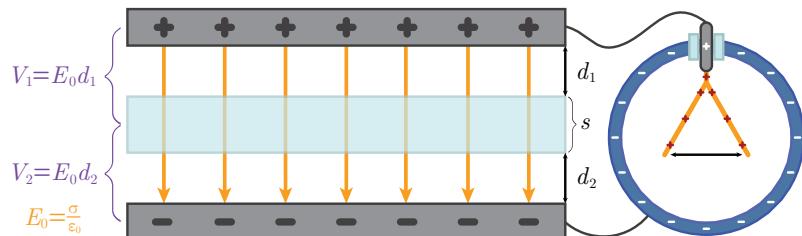
$$V_C = V_1 + V_2 = E_0 (d - s) = V_0 - V_{lastra} < V_0$$

In altre parole, la d.d.p. *diminuisce* di un fattore  $E_0 s$ . Se occupassi l'intera intercapedine con un materiale conduttore, è evidente che si avrebbe  $V = 0$ : il condensatore diventerebbe un unico conduttore e le cariche si disporrebbero sulla superficie esterna.

Al contrario, la capacità *aumenta*. Se chiamiamo la nuova capacità  $C_C$ , noto che  $V_C = \frac{q_0}{C_C}$ , si ha

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{q}{C_C} = E_0 (d - s) = \frac{q}{\Sigma \epsilon_0} (d - s) \implies \frac{1}{C_C} = \frac{d - s}{\Sigma \epsilon_0} C_0 = \frac{\Sigma \epsilon_0}{d - s} > \frac{\Sigma \epsilon_0}{d} = C_0 \\ C_C &= \frac{\Sigma \epsilon_0}{d - s} > C_0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

**Potenziale di un condensatore con isolante all'interno** Ripetiamo l'esperimento con una lastra di *materiale isolante*<sup>1</sup>.



<sup>1</sup>In realtà quello che affrontiamo in questo paragrafo è vero solo alcuni tipi di isolanti, i cosiddetti **dielettrici (lineari)**; nella sezione XXX approfondiremo la differenza tra i due.

Come prima, ci accorgiamo che la differenza di potenziale  $V$  (e quindi il campo elettrico) è minore del caso col vuoto nell'intercapedine; tuttavia, a parità dello spessore della lastra  $s$  tale d.d.p. è invece maggiore del caso con il materiale conduttore.

$$V_C < V < V_0$$

Se riempissimo tutto lo spazio intermedio con una lastra di isolante, si avrebbe  $V_\kappa \neq 0$ . In particolare, si osserva che il potenziale tra le piastre in presenza di un isolante di spessore  $s$  è

$$V(s) = (V_\kappa - V_0) \frac{s}{d} + V_0$$

dove  $V_\kappa$  indica il potenziale per  $s = d$  (condensatore pieno di isolante) e  $V_0$  quello per  $s = 0$  (condensatore vuoto).

**Costante dielettrica relativa** Sperimentalmente, si trova che il rapporto tra la d.d.p.  $V_0$  misurata con il condensatore vuoto e quella  $V_\kappa$  con il condensatore riempito di isolante è caratteristico del tipo di materiale, ma non dipende dalla geometria o dalla carica delle armature.

**DEFINIZIONE 6.1.1. - COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA E SUSCETTIBILITÀ ELETTRICA DEL DIELETTRICO.**

La **costante dielettrica relativa** è il rapporto adimensionale

$$\kappa = \frac{V_0}{V_\kappa} > 1 \quad (6.2)$$

La grandezza

$$\chi = \kappa - 1 > 0 \quad (6.3)$$

viene detta **suscettibilità elettrica del dielettrico**.

Maggiore è  $\kappa$ , maggiori sono le capacità conduttrive del materiale: formalmente, un materiale è un *conduttore perfetto* se  $\kappa = +\infty$ , ossia se  $V_\kappa = V_C = 0$ .

La seguente tabella presenta alcuni materiali e le loro costanti dielettriche relative.

Materiale	Costante dielettrica relativa $\kappa$
Aria	1,000 59
Acqua	80
Alcool etilico	28
Ambra	2,5
Bachelite	4,9
Carta	3,7
Polistirolo	2,6
Porcellana	6,5

**Capacità di un condensatore con isolante all'interno** Come per il caso del conduttore, la capacità aumenta:

$$C_\kappa = \frac{q}{V_\kappa} = \frac{q\kappa}{V_0} = \kappa C_0$$

$$C_\kappa = \kappa C_0 > C_0 \quad (6.4)$$

**Campo elettrico nel condensatore con isolante all'interno** Se il potenziale del condensatore completamente riempito di isolante è minore, anche il campo elettrico è ridotto rispetto al caso senza isolante; si vede, infatti, che

$$E_\kappa = \frac{V_k}{d} = \frac{V_0}{\kappa d} = \frac{E_0}{\kappa} \leq E_0$$

La variazione del campo elettrico dovuta alla presenza del materiale è

$$E_0 - E_\kappa = \frac{V_0}{d} - \frac{V_0}{\kappa d} = \frac{V_0}{d} \frac{\kappa - 1}{\kappa} = E_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

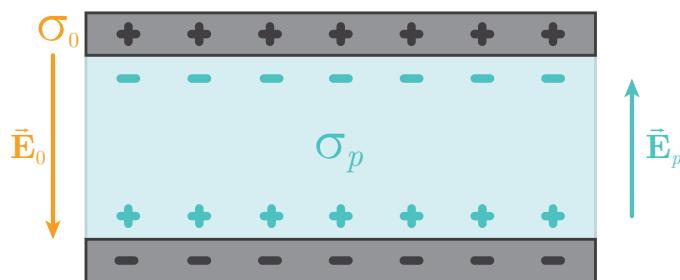
Se la densità di carica è  $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ , si osserva che

$$E_\kappa = E_0 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (6.5)$$

dove

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0 < \sigma_0 \quad (6.6)$$

La (6.5) mostra come il campo elettrico all'interno del dielettrico si possa vedere come la *sovraposizione* di due campi elettrici nel vuoto, uno  $E_0$  dovuto dalle cariche libere (distribuzione di carica  $\sigma$ ) sulle armature, l'altro  $E_p$  di intensità minore e generato da una distribuzione di carica  $\sigma_p$ . Le cariche che generano quest'ultimo si possono *immaginare* come depositate sulle facce della *lastra dielettrica*, con segno opposto a quello della carica libera sull'armatura continua - in modo per certi versi simile a quanto succede con i conduttori, ma in maniera ridotta.



**Costante dielettrica assoluta** Nel Capitolo 1 abbiamo definito la *costante dielettrica del vuoto*  $\epsilon_0$ . Come era prevedibile dal nome, non è l'unica costante dielettrica: per trattare dei fenomeni elettromagnetici nei materiali ci conviene definire delle costanti, basate su  $\epsilon_0$ , che incorporano l'informazione sulla conducibilità elettrica data dalla costante dielettrica relativa  $\kappa$ .

#### DEFINIZIONE 6.1.2. - COSTANTE DIELETTRICA ASSOLUTA.

La **costante dielettrica assoluta** è definita come

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 \quad (6.7)$$

Le formule che descrivono fenomeni elettrici nei materiali<sup>2</sup> possono essere ottenute facilmente dal caso nel vuoto sostituendo a  $\epsilon_0$  la costante assoluta  $\epsilon$ .

<sup>2</sup>Come già detto, questo vale solo per i dielettrici (lineari), che approfondiremo nella sezione XXX.

**ESEMPIO.** Per un condensatore piano nel vuoto si ha

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d}$$

Per un condensatore con un isolante (dielettrico) all'interno si ha

$$C_\kappa = \kappa C_0 = \frac{\kappa \epsilon_0 \Sigma}{d} = \frac{\epsilon \Sigma}{d}$$

**OSSERVAZIONE.** In generale, si può calcolare la costante dielettrica *relativa* misurando la costante dielettrica *assoluta* del materiale con un qualche *esperimento opportuno* e dividendo per la costante dielettrica nel vuoto.

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (6.8)$$

## 6.2 POLARIZZAZIONE

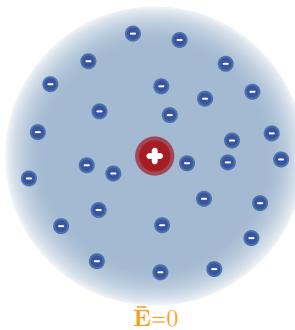
È noto che gli isolanti sono caratterizzati da una scarsa presenza di cariche libere, a differenza dei conduttori. Ciò farebbe presupporre che le cariche sulle facce che abbiamo immaginato nella sezione precedente come potenziale spiegazione del campo  $E_p$  siano, per l'appunto, un frutto della *fervida immaginazione* di un fisico.

In realtà tali cariche non sono per nulla fittizie, ma allo stesso tempo non sono come cariche *libere* presenti nei conduttori: esse sono il risultato macroscopico di *processi microscopici*, alla cui base stanno i fenomeni di *polarizzazione*.

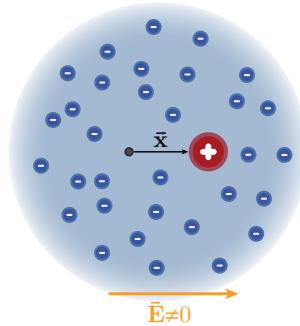
Negli isolanti, come appena detto, le cariche non sono particolarmente libere: quasi tutti gli elettroni sono legati agli atomi e non possono allontanarsi spontaneamente. Si può comunque, con l'azione di *agenti esterni*, separare *localmente* cariche positive e negative all'interno degli atomi - senza romperne quindi i legami - in modo da indurre una separazione di carica.

Il fenomeno della **polarizzazione** consiste proprio in questo: molto brevemente, esso consiste nel far acquisire alle particelle della materia un momento di dipolo proporzionale all'effetto di un campo elettrico esterno, in modo da causare il comportamento osservato in precedenza nei dielettrici. Non esiste un *unico* modo di polarizzare atomi o molecole; noi ci occuperemo della *polarizzazione elettronica* e della *polarizzazione per orientamento*.

**Polarizzazione elettronica** Approfondiamo ora il primo tipo. Un atomo, secondo il modello *non quantistico*, consiste in un *nucleo* positivo immerso in una *nube* di elettroni negativi. In assenza di un campo elettrico esterno, il nucleo è neutro e la distribuzione degli elettroni attorno al nucleo è mediamente simmetrica, in modo che il centro di massa della nube coincide con la posizione del nucleo.



Introducendo il campo elettrico, la nube negativa subisce uno spostamento *contro* il campo elettrico, mentre il nucleo positivo si sposta in senso *concorde* al campo fino a raggiungere una nuova posizione di equilibrio in cui il campo elettrico è *controbilanciato* dall'attrazione di *dipolo* tra cariche di segno opposto.



All'equilibrio, tra i due centri di cariche c'è una distanza  $\vec{x}$ , con cui definiamo il **momento di dipolo elettrico** della configurazione ottenuta.

$$\vec{p}_a = q\vec{x} = Ze\vec{x} \quad (6.9)$$

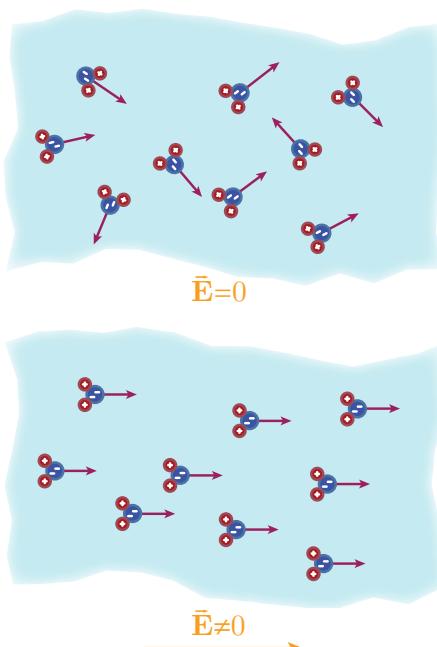
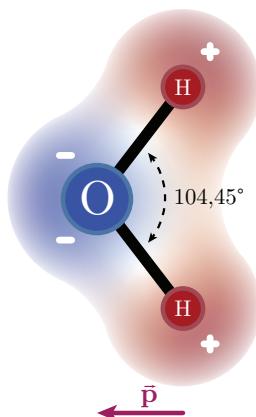
dove  $Z$  è il numero di cariche nell'atomo e  $\vec{x}$  va dal centro di carica negativa a quello positiva - ossia nella direzione del campo elettrico.

**OSSERVAZIONE.** Si noti che nel singolo atomo tale spostamento è dell'ordine di  $10 \times 10^{-15}$ , pari circa alle dimensioni del nucleo e quindi il momento di dipolo è *davvero piccolo*. Tuttavia, poiché gli atomi per unità di volume sono un numero estremamente elevato, l'effetto complessivo in un materiale è invece *misurabile*.

La **polarizzazione per elettrizzazione** funziona sinteticamente così: un atomo soggetto ad un campo elettrico esterno  $\vec{E}$  acquista un momento di dipolo  $\vec{p}_a$  elettrico microscopico, parallelo e concorde al campo  $\vec{E}$ .

**OSSERVAZIONE.** Per creare e mantenere questa distanza tra i centri di carica è necessaria dell'energia, fornita dal campo elettrico e che viene immagazzinata nel dipolo.

**Polarizzazione per orientamento** Sebbene abbiamo visto come polarizzare degli atomi, ci sono alcune sostanze le cui molecole presentano già un *momento di dipolo intrinseco*: questo avviene nel caso di certe molecole poliatomiche come l'*acqua* ( $\text{H}_2\text{O}$ ) o l'*anidride carbonica* ( $\text{CO}_2$ ) in cui la distribuzione delle cariche - dovuta ai legami elettrostatici - è tale che il centro delle cariche negative *non coincide* con quello positivo. Tali molecole, non sorprendentemente, sono dette **polari**.



Tuttavia, in *assenza* di campo elettrico esterno i momenti di dipoli molecolari sono puramente *casuali* a causa dell'agitazione termica che distrugge eventuali configurazioni ordinate con urti; il momento di dipolo medio è nullo.

$$\langle \vec{p} \rangle = 0$$

In *presenza* di un campo elettrico  $\vec{E}$  esterno, i momenti di dipoli si allineano con il campo a causa del momento delle forze, facendo sì che il momento di dipolo medio risulti non nullo.

$$\langle \vec{p} \rangle \neq 0$$

Ciò nonostante, l'orientamento delle molecole è soltanto *parziale* perché disturbato dall'agitazione termica: se la temperatura è bassa e il campo è intenso allora *aumentano* le molecole allineate.

La **polarizzazione per orientamento** è quindi una polarizzazione basata sul fatto che le molecole polari sono *intrinsecamente* dei dipoli.

**Dielettrici e isolanti** Prima di spiegare come queste due polarizzazioni agiscono a livello macroscopico nei materiali dielettrici, dobbiamo effettivamente spiegare cosa sia un *materiale dielettrico*.

Fino ad ora abbiamo utilizzato abbastanza interscambiabilmente il termine "isolante" e "dielettrico", ma *non* sono sinonimi.

- Gli **isolanti** non hanno (molti) elettroni liberi che si muovono spontaneamente. Di conseguenza, sono materiali che hanno un'alta *resistività* e non scorre praticamente alcuna corrente se soggetto ad un campo esterno. Inoltre, la costante dielettrica è minore per gli isolanti.
- I **dielettrici** sono materiali isolanti le cui particelle (atomi, molecole) sono facilmente soggette a fenomeni di polarizzazione. Pertanto, immagazzinano facilmente energia nei dipoli formati.

Nei fatti, sebbene tutti i dielettrici sono isolanti, *non* tutti gli isolanti sono dielettrici. Se non specificato differentemente, quando parliamo di isolanti consideriamo sempre *isolanti dielettrici*.

**Polarizzazione del dielettrico** I momenti dipoli dei singoli atomi o molecole sono *microscopici*. Tuttavia, l'elevato numero di particelle per unità di volume e l'alta suscettibilità alla polarizzazione fa sì che nei dielettrici questi effetti si *sovrappongono* e si abbia un risultato misurabile a livello *macroscopico*.

In termini esplicativi, in presenza di un campo elettrico esterno  $\vec{E}$  ciascun atomo o particella in un volumetto  $\Delta V$  intorno ad un punto  $Q$  del dielettrico acquista un momento di dipolo  $\langle \vec{p} \rangle$ , parallelo e concorde con  $\vec{E}$ .

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Qui  $N$  è il numero di particelle nel volume  $\Delta V$ . La **densità di polarizzazione** è quindi

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = n \langle \vec{p} \rangle \quad (6.10)$$

dove

$$n = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N}{\Delta V}$$

è la densità di particelle nell'intorno di  $Q$ . Il vettore  $\vec{P}$  è anche detto **vettore polarizzazione del dielettrico** e caratterizza l'effetto di formazione dei momenti di dipolo indotti dal campo esterno.

La maggior parte dei *dielettrici* soddisfano una legge di proporzionalità lineare tra la densità di dipolo e il campo elettrico:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (6.11)$$

I dielettrici che seguono tale legge sono detti **lineari**: sono sostanze *amorfe* con simmetria spaziale in tutte le direzioni (**isotropia spaziale**); in altre parole, *non* ci sono direzioni preferenziali dovute *a priori* dal materiale.

#### DIGRESSIONE - DIELETTRICI NON LINEARI.

I *cristalli* sono un classico esempio di dielettrici *non lineari*, dato che sono **anisotropi**:  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$  non sono necessariamente paralleli, ma seguono delle direzioni particolari dette *assi*

*cristallografici*. La suscettibilità elettrica, di conseguenza, non potrà essere rappresentata da un semplice numero, ma sarà rappresentata da un *tensore*.

**OSSERVAZIONE.** Ecco spiegato il perché del termine “suscettibilità elettrica”: un materiale come l’acqua e l’alcol etilico hanno alta suscettibilità elettrica e sono proni a polarizzarsi fortemente, mentre altri come la carta o il polistirolo che hanno bassa suscettibilità tendono a polarizzarsi di meno.

**ESEMPIO.** Ricordiamo che nel caso del condensatore si aveva

$$E_\kappa = \frac{E_0}{\kappa} \text{ con } E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Allora, la densità di polarizzazione, in modulo, è

$$P = \epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0 = \sigma_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \sigma_p \quad (6.12)$$

Il vettore polarizzazione corrisponde alla densità (vettoriale) di cariche “fittizia” definita precedentemente.

### 6.2.1 Campo elettrico generato dalla polarizzazione

Dopo aver visto come il vettore di polarizzazione sia legato ad un campo elettrico esterno, ci interessa capire come funziona il campo *generato dal dielettrico polarizzato* e quale sia il legame con il vettore di polarizzazione.

**Il caso uniforme** Consideriamo nuovamente il caso del condensatore piano con all’interno un dielettrico *polarizzato uniformemente*, ossia tale per cui  $\vec{P} = \text{const}$ : possiamo suddividere la lastra di dielettrico in prismi infinitesimi di base  $d\Sigma$ , altezza  $dh$  e volume  $dV = d\Sigma dh$ . Ciascuno di essi contiene un certo numero di particelle orientate, per cui ad ogni prisma infinitesimo è associato un suo momento di dipolo complessivo

$$d\vec{p} = \vec{P} dV = \left| \vec{P} \right| d\Sigma d\vec{h}$$

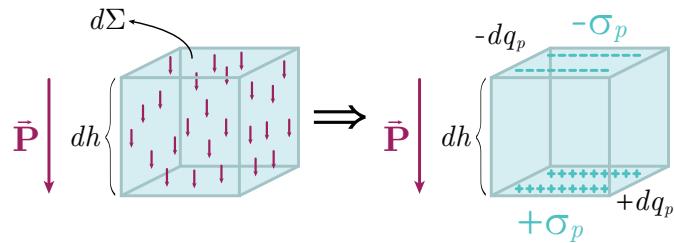
dove  $d\vec{h}$  è concorde con la densità di polarizzazione  $\vec{P}$ . Ricordiamo che *distribuzioni di cariche differenti* ma con stesso *momento di dipolo* sono esternamente *indistinguibili* l’una dall’altra; è dunque perfettamente *equivalente* rimpiazzare l’effetto di moltissimi dipoli microscopici interni al prisma  $dV$  con un sistema costituito da due distribuzioni di cariche

$$\pm dq_p = \pm \left| \vec{P} \right| d\Sigma$$

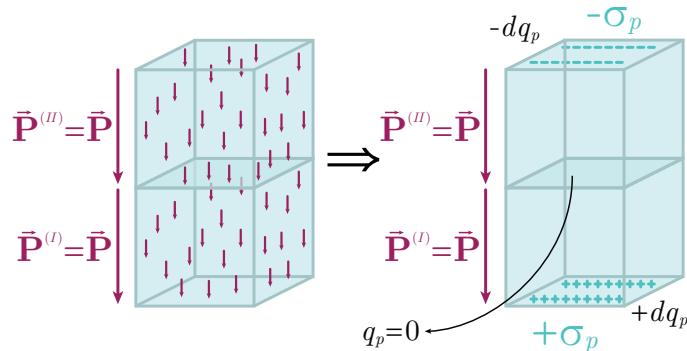
poste *nel vuoto*, distanti  $dh$  e distribuite sulle basi del prisma con densità

$$\pm \sigma_p = \frac{\pm dq_p}{d\Sigma} = \pm \frac{\left| \vec{P} \right| d\Sigma}{d\Sigma} = \pm \left| \vec{P} \right|$$

dove  $q_p$  è la carica “fittizia” sulle due basi.



Siccome supponiamo  $\vec{P}$  uniforme su tutto il dielettrico, il vettore di polarizzazione è lo stesso per due prismi *contigui*; di conseguenza, sulle superfici di contatto le cariche sono *uguali e contrarie*. Se ripetiamo questo ragionamento con altri prismi contigui alle basi, le uniche cariche rimanenti che *non* sono compensate sono solo quelle sulle basi dei primi che *appartengono* alla superficie del dielettrico.



Quello che stiamo facendo è supporre che le cariche nel dielettrico, spostate *localmente* dalle posizioni di equilibrio in quanto il materiale è *polarizzato uniformemente*, si compensino all'interno ma *non* all'esterno dato che la superficie di bordo non permette ulteriori compensazioni. Generalizzando ad un dielettrico di *forma qualunque*, le cariche si distribuiscono sulla superficie con densità

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \quad (6.13)$$

dove  $\hat{\mathbf{u}}_n$  è il versore normale alla superficie  $\Sigma$  del materiale.

**ATTENZIONE!** Sebbene a tratti ciò possa ricordare il comportamento dei conduttori, il funzionamento è *fondamentalmente* differente. Le **cariche di polarizzazione** *non* sono libere come nei conduttori e quelle che notiamo sulla superficie non sono elettroni che si sono raccolti lì da altre parti del materiale, ma sono gli elettroni già *presenti superficialmente*: li notiamo solo in virtù degli *spostamenti locali* negli atomi e nelle molecole.

Questo è il motivo per cui non possiamo *asportare un pezzo* di dielettrico e misurare le cariche superficiali, come potremmo fare ad esempio con un conduttore - il funzionamento è più vicino a quello che studieremo dei *magnete*, da questo punto di vista.

La carica - che avevamo erroneamente definito "fittizia" - in una particolare porzione di superficie  $\Sigma_0$  è

$$q = \int_{\Sigma_0} \sigma_p d\Sigma = \int_{\Sigma_0} \vec{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma \quad (6.14)$$

**OSSERVAZIONE.** Se la polarizzazione è *uniforme* non si manifestano cariche all'interno del dielettrico, quindi la carica totale sulla superficie *dove* essere nulla:

$$0 = \int_{\Sigma} \sigma_p d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene che

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = 0 \quad (6.15)$$

**Il caso *non uniforme*** Se il vettore di polarizzazione *non* è uniforme, la carica di polarizzazione *non* si distribuisce solo sulla superficie. Consideriamo sempre la suddivisione in prismi infinitesimi, in modo che in ogni prisma il vettore di polarizzazione ha un valore costante. Studiamo il valore della carica sulla *base comune* a due prismi contigui, con asse parallelo all'asse  $z$  e area di base  $d\Sigma = dx dy$ : a carica su una superficie infinitesima essa è

$$dq(z) = \sigma_p d\Sigma = \vec{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

La carica infinitesima sulla base è data dalla carica complessiva, sommando con segno quella presente sulla faccia inferiore (*I*) e superiore (*II*):

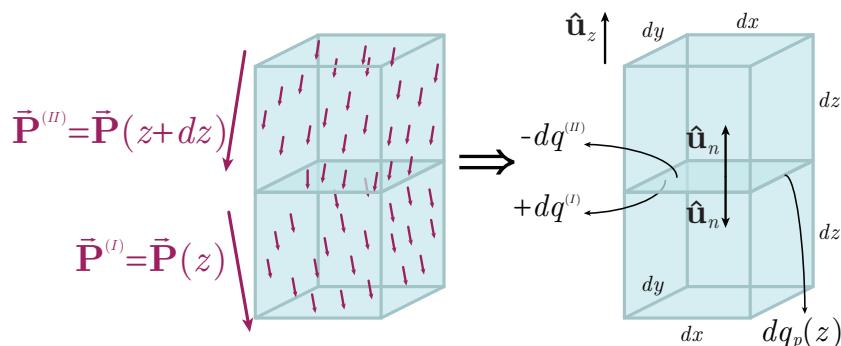
$$dq_p(z) = dq^{(I)}(z) - dq^{(II)}(z) = dq(z) - dq(z + dz)$$

Ricordiamo che il versore  $\hat{\mathbf{u}}_n$  è preso orientato verso l'esterno della superficie; nel nostro caso,

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_z & \text{per la faccia (I)} \\ -\hat{\mathbf{u}}_z & \text{per la faccia (II)} \end{cases}$$

Se sul lato (*I*) si ha il vettore di polarizzazione  $\vec{P}^{(I)} = \vec{P}(z)$ , mentre su quello (*II*) si ha  $\vec{P}^{(II)} = \vec{P}(z + dz)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} -dq^{(II)} &= \vec{P}^{(II)} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = -P_z^{(II)} dx dy \\ dq^{(I)} &= \vec{P}^{(I)} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = P_z^{(I)} dx dy \\ dq_p &= dq^{(I)} - dq^{(II)} = -\left(P_z^{(II)} - P_z^{(I)}\right) dx dy \end{aligned}$$



Poiché stiamo considerando una variazione infinitesima di  $P_z$  - l'unica componente variabile di  $\vec{P}$  - da un lato all'altro della superficie, questo equivale a considerar la *derivata direzionale* per l'elemento infinitesimo di spessore, dato che<sup>3</sup>

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{P(z + dz) - P(z)}{dz} = \frac{P_z^{(II)} - P_z^{(I)}}{dz}$$

da cui segue

$$dq_p(z) = -\frac{\partial P_z}{\partial z} dx dy dz$$

Se  $\vec{P}$  varia lungo l'asse  $z$  allora *non avviene* la compensazione di cariche e le cariche di polarizzazioni appaiono anche *all'interno* del dielettrico.

In generale, dentro ad un volumetto  $dV = dx dy dz$  c'è una carica di polarizzazione pari a

$$dq_p = \left( -\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dx dy dz = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

distribuita con densità volumica

$$\rho_p = \frac{dq_p}{dV} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (6.16)$$

Anche in questo caso la carica totale di polarizzazione deve essere nulla...

$$\int_V \rho_p dV + \int_{\partial V} \sigma_p d\Sigma = 0 \quad (6.17)$$

... ma tale relazione ci riporta al *teorema della divergenza*:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \int_{\partial V} \vec{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma \quad (6.18)$$

**ATTENZIONE!** Le distribuzioni di cariche *superficiali* e *spaziali* si compensano *globalmente*, non localmente!

### 6.3 LE EQUAZIONI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA NEI MATERIALI DIELETTRICI

Siamo ora in grado di formulare le equazioni dell'elettrostatica nei materiali dielettrici: dovremo modificare quelle leggi che presentano al loro interno informazioni riguardo le sorgenti di campo.

Consideriamo un campo elettrostatico  $\vec{E}$ . Mentre il rotore del campo elettrico rimane nullo...

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (6.19)$$

---

<sup>3</sup>Ricordiamo che  $dz$  è un infinitesimo e per sua definizione è una quantità tendente a zero: ai nostri fini pratici la derivata così scritta è la stessa che si incontra nei corsi di Matematica... sebbene sia ovviamente una formulazione poco rigorosa.

... la sua divergenza risulta pari alla densità di carica complessiva  $\rho_{tot}$  nel materiale, diviso per  $\epsilon_0$  - ma tale densità è pari alla somma della densità  $\rho$  già presente e della carica da polarizzazione  $\rho_p$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \implies \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

Definito il **campo elettrostatico di induzione dielettrica**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.20)$$

otteniamo la legge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (6.21)$$

Ci sembrerebbe di aver fatto "sparire" le cariche di polarizzazioni riscrivendo la *legge di Gauss* in questa maniera, ma in realtà le abbiamo soltanto nascoste sotto il tappeto!<sup>4</sup> I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  sono legati ancora dalla densità di polarizzazione  $\vec{P}$  - che incorpora in essa le informazioni della carica di polarizzazione. Per poter risolvere *definitivamente*  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  ci un'**equazione di stato del mezzo dielettrico** che leggi esplicitamente  $\vec{E}$  e  $\vec{P}$  o, equivalentemente,  $\vec{D}$  e  $\vec{P}$ .

Nel caso dei *dielettrici lineari*, tale legge l'abbiamo già incontrata:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\kappa - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Da essa ricaviamo

$$\vec{D} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (6.22)$$

e la (6.21) si può riscrivere come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (6.23)$$

**OSSERVAZIONE.** Come abbiamo osservato in altri casi lavorando con i dielettrici *lineari*, l'ultima legge è pari all'analogia equazione dell'elettrostatica nel vuoto a cui abbiamo sostituito a  $\epsilon_0$  la costante assoluta  $\epsilon$ .

Ricapitolando, si hanno le seguenti leggi nel caso di un dielettrico qualunque...

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{D}) = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = q_{int} = \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
Legge dell'induzione di Faraday	$\Gamma_{\gamma}(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

dove

$$\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P}$$

<sup>4</sup>Con grande gioia di chi dovrà lavarlo.

... e le seguenti per un dielettrico lineare con *costante dielettrica assoluta*  $\epsilon = \kappa \epsilon_0$ .

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
<b>Legge di Gauss per l'elettricità</b>	$\Phi_{\partial V}(\vec{E}) = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$
<b>Legge dell'induzione di Faraday</b>	$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

# II

## MAGNETISMO



## IL CAMPO MAGNETICO

*“Il magnetismo è una forza che fa sì che certi oggetti siano attratti ai frigoriferi.”*

*DAVE BARRY, poco prima di essere bocciato al secondo appello.*

### C<sup>ON</sup>

#### 7.1 I PRIMI STUDI SUL MAGNETISMO

Come già detto nel Capitolo 1, il termine magnetismo deriva da *magnētis lithos*, “pietra di Magnesia” in greco: sull’isola egea di Magnesia erano diffuse rocce di *magnetite*, un minerale feroso che in certi casi è capace di attrarre piccoli pezzetti di ferro - che a loro volta diventavano magnetici. Il fatto che la magnetite può attrarre il ferro fu osservato non solo in Grecia, ma in diverse aree geografiche: in India, ad esempio, la magnetite veniva usata per rimuovere le frecce infilzate nel corpo di una persona.

**La bussola** Un altro luogo fondamentale per la storia del magnetismo fu la Cina. Durante la *dinastia Han* (202 a.C – 220 d.C.) furono inventate le prime (rudimentali) **bussole**: esse consistevano in un ago di *magnetite naturalmente magnetica* che, se lasciato libero di ruotare, indicava sempre verso una particolare direzione terrestre: il *nord* o il *sud*.

Tuttavia, i primi utilizzi della bussola erano di natura *divinatoria*: le proprietà “indirizzanti” di tale strumento furono usate per trovare il luogo dove costruire case, piantare le coltivazioni e cercare gemme rare.<sup>1</sup> Per l’utilizzo nella *navigazione* bisogna aspettare diversi secoli: la prima fonte certa a riguardo è di Zhu Yu, datata tra il 1111 e il 1117. Qualche decennio più tardi la bussola da navigazione si era diffusa anche in Europa e nel mondo arabo.

L’invenzione della bussola permise di osservare ulteriori proprietà dei magneti. Ad esempio, si notò che avvicinando una bussola ad un oggetto magnetico essa *non* indicava

<sup>1</sup>Shen Kuo, scienziato della dinastia Song (960 – 1279) descrisse dettagliatamente come gli esperti di *feng shui*, un arte divinatoria geomantica, magnetizzavano la punta di ago con magnetite magnetica e lo appendevano con un singolo filo di seta per mezzo di un pochino di cera al centro dell’ago. Shen Kuo riportò inoltre che l’ago preparato in questo modo ogni tanto puntava verso sud, ogni tanto verso nord.

più la direzione nord della terra, bensì puntava *verso l'oggetto*.

In particolare, il "polo nord della bussola" - ossia il capo dell'ago che normalmente punta verso il nord terrestre - puntava verso una parte specifica dell'oggetto, mentre era respinto dal resto.

D'altro canto, il "polo sud della bussola" - ossia il capo dell'ago che normalmente punta verso il sud terrestre - funzionava al contrario: era attratto dalla parte che *respingeva* il polo nord della bussola e, viceversa, era *respinto* dalla parte che attraeva il polo nord della bussola. In altre parole, si dedusse che come i *poli terrestri* attraevano la bussola nella direzione nord-sud, anche i magneti dovevano avere sempre due **poli magnetici**, a cui la bussola punta se vicina al magnete.

I poli dei magneti sono quindi tradizionalmente indicati come *nord* e *sud*, in analogia con quelli terrestri.



#### **DIGRESSIONE - UNA MONTAGNA DA WATUSSI. UNA BREVE STORIA SULLA BUSSOLA E I POLI MAGNETICI TERRESTRI NELL'ETÀ DELLE GRANDI SCOPERTE.**

Sebbene i marinai utilizzassero le bussole da diversi secoli, molti studiosi tra la fine del Medioevo e l'inizio dell'Età Moderna si chiesero *come mai* le bussole, in condizioni normali, puntavano verso una *direzione cardinale* come il nord o il sud.

Con gli occhi del *fisico moderno* sappiamo perché e lo approfondiremo in questi capitoli: l'ago magnetico della bussola si allinea *parallelamente alle linee di forza* del campo magnetico terrestre - anche se non necessariamente punta ad uno dei due poli.

Tuttavia, per molti secoli il funzionamento di tale strumento rimase particolarmente oscuro - come del resto gran parte del magnetismo. Per un filosofo naturale il concetto di  era semplicemente ignoto, e la miglior ipotesi dell'epoca era che la fonte dell'attrazione magnetica notata dalle bussole dovesse essere sempre e comunque *localizzata* in un particolare punto.

Inizialmente, si suppose che la sorgente attrattiva fosse in cielo, ad esempio la Stella Polare o i poli celesti. Tale ipotesi fu presto sostituita da un'alternativa "terrena", come una roccia o una montagna. Nelle cartine europee del XVI secolo si possono spesso notare tali *montagne magnetiche*, come nelle mappe di **Gerardo Mercatore** (1512 - 1594). Il cartografo fiammingo era solito piazzarla in posizione *arbitraria*, ma nel 1546 pensò bene di diventare un cartografo rigoroso e di trovare il luogo in cui era situata sulla base di precisi osservazioni della bussola in varie zone europee: chiaramente, se tracciassimo una linea immaginaria diretta come l'ago della bussola, si dovrebbe trovare un unico punto di incontro corrispondente al luogo della *montagna magnetica*!

Eppure, tale tentativo andò male: non c'era un unico punto di incontro di queste linee. Amareggiato ma non scoraggiato, fece ulteriori misurazioni per *oltre due decenni*, senza successo: ogni volta otteneva due stime completamente contraddittorie per il potenziale polo. Solo poco prima della sua morte Mercatore decise di tagliare la testa al toro e di piazzare due montagne e due poli... ma tali poli *non coincidevano* con le fantomatiche montagne!

Nella cartina "Septentrionalium Terrarum descriptio. Per Gerardum Mercatorem Cum Privilegio", pubblicata postuma, possiamo notare due montagne: una "*rupes nigra et altissima*" (*montagna nera e altissima*) posta nei pressi del *Polo Nord geografico*, non era magnetica, mentre l'altra sì e corrispondeva al "*Polus magnetis respectu insularum capitinis*

*Viridis*" (polo magnetico rispetto all'arcipelago di Capo Verde).

Il secondo polo magnetico, "Polus magnetis respectu Corui insule" (polo magnetico rispetto alle isole del Corvo<sup>a</sup>) lo pose invece in mezzo al mar Artico, tra la Siberia e la California.



Sebbene noto per l'omononima proiezione cartografica, Mercatore fu anche il primo cartografo a creare una mappa dell'Artico, di cui riportiamo un particolare di una versione a colori del 1623. Oltre alle due *montagne* e ai due *poli*, si notano il Polo Nord *quadruplicato* in isole separate da fiumi, di cui una abitata da *pigmei*, e la *California spagnola*, erroneamente posta alle stesse latitudini della Kamchatka.

Fu solo nel 1600 che **William Gilbert** (1544 - 1603) popolarizzò, nel suo "De Magnete", un approccio sperimentale per dedurre che la Terra stessa fosse un magnete. Con questo sperimento, Gilbert provò che il motivo per cui le bussole erano attratte dai poli terrestri è perché in loro prossimità c'erano dei *poli magnetici* da cui, per dirla in termini moderni, uscivano e entravano le linee di flusso a cui le bussole si allineano. Successivamente, si notò anche che il campo magnetico terrestre non è costante nel tempo, ma varia e con esso variano anche le posizioni dei poli magnetici, da cui spiegato il perché il polo sembrava non essere univoco.

La scelta di Mercatore di porre un polo magnetico senza una montagna ad esso associato

- probabilmente dettata dalla disperazione dopo anni e anni di misurazioni fallimentari
- in fondo non fu così peregrina: dopotutto, non c'era alcun bisogno di una montagna alta e di colore per far funzionare la bussola.

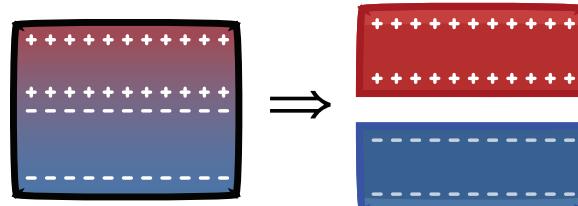
<sup>a</sup>Probabilmente da intendersi come le isole del gruppo occidentali dell'*arcipelago delle Azzorre*, tra cui l'omonima *isola del Corvo*.

**La forza magnetica e l'assenza dei monopoli** Per avere degli studi quantitativi dei fenomeni magnetici bisognerà aspettare il francese **Charles Coulomb** (1736-1806), il quale osservò che tra due magneti si presentava un *forza*, di diversa natura a seconda di come erano orientati i magneti:

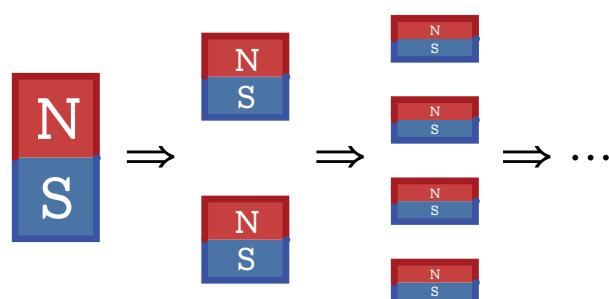
- Si aveva una *attrattiva* se si avvicinavano tra di loro i poli opposti (nord - sud).
- Si aveva invece una forza *repulsiva* se si avvicinavano tra di loro due poli uguali (nord - nord o sud - sud).

Tale forza era direttamente proporzionale al prodotto delle "intensità" dei magneti e inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $r$  tra i due magneti, mentre sembrava - in modo analogo alla *forza elettrica di Coulomb* che era diretta da una carica all'altra - diretta da un polo all'altro.

La situazione potrebbe sembrare simile al caso della *forza elettrica* - ed in parte è così, dato che entrambe sono proporzionali a  $1/r^2$  - ma i due casi sono notevolmente distinti dal fatto che non si sono mai osservati (né allora, né oggi) dei **monopoli magnetici**. Ricordiamo che nel caso elettrico, un *dipolo elettrico* può essere separato in due *monopoli elettrici*.

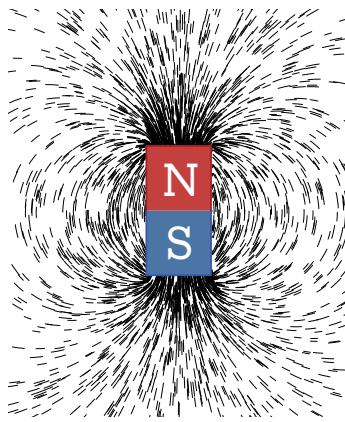


Un dipolo magnetico, invece, si separa sempre in altri dipoli! Ad esempio, se un magnete a barra viene tagliato a metà, non si avrà una metà con il polo nord e l'altra con il polo sud, ma *ciascun pezzo* avrà un suo polo nord e polo sud.



**OSSERVAZIONE.** Per analogia con il dipolo elettrico, si usa indicare il *polo nord* di un magnete con il segno + e il *polo sud* con il segno -.

**Le linee di forza** Se ad oggi parliamo di campi vettoriali nell'elettromagnetismo, probabilmente parte del merito lo dobbiamo allo scienziato inglese **Michael Faraday** (1791 - 1867). Durante i suoi esperimenti sul magnetismo, circa intorno al 1831, egli notò la maniera peculiare con cui della *limatura di ferro* si disponeva su un cartoncino o una lastra di vetro in presenza di un magnete: essa sembrava disporsi naturalmente lungo delle *linee* che si estendevano da un *polo* all'altro del magnete. Faraday ipotizzò quindi che i magneti esercitava delle forze lungo queste "linee di forza", che secondo Faraday dovevano esistere in qualche modo *fisicamente*.

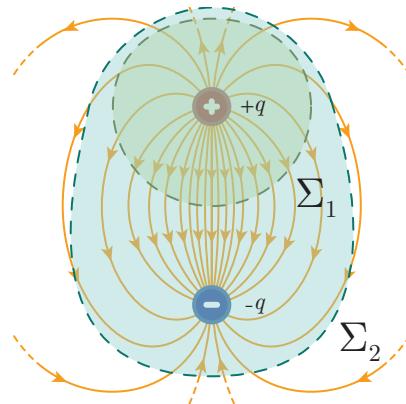


Le osservazioni di Faraday anticipano la descrizione moderna dei fenomeni magnetici: come è stato per quelli elettrici, la descrizione del magnetismo passa per il *formalismo dei campi vettoriali*: in questo caso, le forze sono l'applicazione in un punto del **campo magnetico**  $\vec{B}$  generato, ad esempio, da magneti; le linee di forza sono, ovviamente, le curve tali per cui in ogni loro punto il vettore tangente alla curva è il vettore dato da  $\vec{B}$ .

## 7.2 LEGGE DI GAUSS PER LA MAGNETOSTATICA

Le linee di campo svolgono un ruolo fondamentale per capire la prima, grossa differenza tra il campo magnetico e quello elettrico: il flusso attraverso una superficie chiusa.

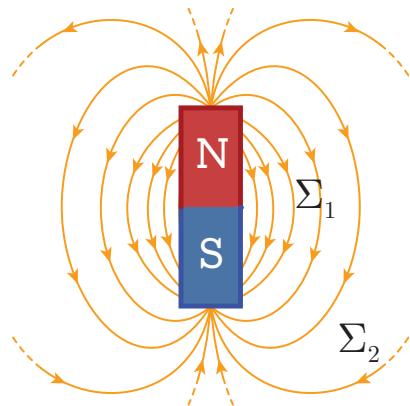
Analizziamo la questione dal punto di vista matematico, confrontandola con una situazione a noi familiare. Ricordiamo che, nel *dipolo elettrico*, le linee di campo si sviluppano come in figura.



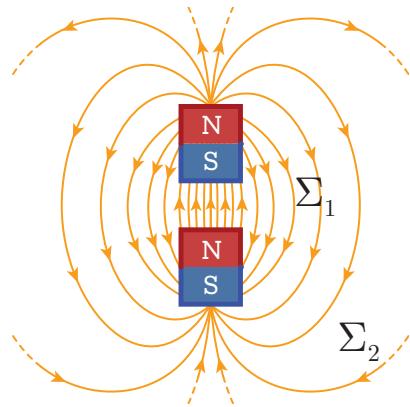
Prese due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , la prima contenente la *carica positiva* e la seconda *entrambe*, si ha

$$\Phi_{\Sigma_1}(\vec{G}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = \frac{q - q}{\epsilon_0} = 0$$

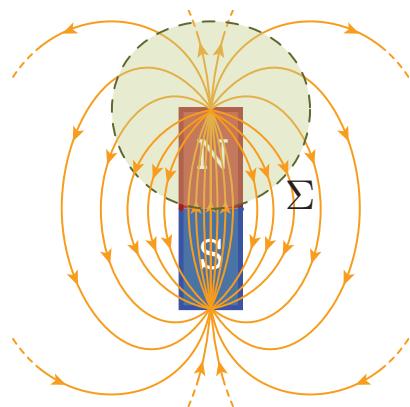
Con un dipolo magnetico ci ritroviamo una situazione simile.



Come osservò Faraday con la limatura di ferro, le linee di forza che visualizziamo *attorno* al magnete sono uguali a quelle *esterne* del dipolo elettrico. Ci possiamo però chiedere cosa succede all'*interno* del magnete. Se proviamo a spezzare a metà il magnete, si creano delle linee di forze "interne" tra i due magnetini ma, a differenza del dipolo elettrico, sono rivolte verso l'alto e non verso il basso - di fatto, sembra che le linee di forza delle curve orientate chiuse!



Se continuiamo a *dividere* i magneti, le linee di forza che si vengono a formare tra di essi continuano ad essere in tale maniera. Pertanto, dobbiamo aspettarci che le linee di forza all'esterno proseguano all'interno e formino delle *curve orientate chiuse*.



Osserviamo che la forza di interazione magnetostatica di Coulomb è inversamente proporzionale a  $r^2$ , pertanto potremmo applicare una versione "magnetica" della legge

di Gauss<sup>2</sup>. Tuttavia, per quanto osservato sperimentalmente, non sappiamo costruire o produrre dei *monopoli magnetici*, pertanto dobbiamo sempre considerare un dipolo magnetico. Si noti che, se applichiamo la legge di Gauss ad una superficie contenente un *dipolo elettrico*, il flusso sarà nullo. La situazione è analoga per il caso magnetico: non possiamo individuare dei monopoli, certo, ma dal polo nord esce un numero di linee di flusso pari a quelle che entrano dal polo sud - non può esistere una "carica magnetica" totale differente da zero. Di conseguenza, abbiamo mostrato empiricamente la

**TEOREMA 7.2.1. - LEGGE DI GAUSS PER LA MAGNETOSTATICA.**

Il flusso del campo magnetostatico  $\vec{B}$  attraverso un'superficie chiusa è nullo.

■ *Forma integrale:*

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0 \quad (7.1)$$

■ *Forma differenziale:*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.2)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Deriviamo la forma differenziale. Per il teorema della divergenza si ha

$$0 = \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

dove  $V$  è il volume racchiuso da  $\Sigma$ , ossia  $\partial V = \Sigma$ . Poiché tale relazione è vera per ogni volume  $V$ , si ha l'uguaglianza delle integrande:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

□

Tale legge è una delle due *equazioni di Maxwell per la magnetostatica*.

Una conseguenza immediata della legge di Gauss per il magnetismo è che il campo magnetostatico è un **campo solenoidale**<sup>3</sup>, a differenza del campo elettrostatico che è *conservativo*.

**DIGRESSIONE.** Se, in futuro, si dovessero scoprire i monopoli magnetici, la legge di Gauss per il magnetismo sarebbe del tutto analoga a quella per l'elettricità: il flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla *carica magnetica* in essa racchiusa o, in forma differenziale, la divergenza di  $\vec{B}$  è proporzionale ad un'apposita *densità di carica magnetica*  $\rho_m$ . La forma originale della legge di Gauss si avrebbe soltanto in presenza di una densità di carica magnetica *nulla*.

### 7.3 INTERAZIONI CON LE CARICHE IN MOTO

Come si è potuto notare, gli studi dei fenomeni magnetici erano inizialmente separati da quelli sull'elettricità, dato che i due fenomeni risultavano scorrelati. Ed effettivamente con le nostre conoscenze moderne sappiamo perché: le leggi che descrivono i fenomeni *magnetostatici* sono *indipendenti* da aspetti di natura *elettrica*. Purtuttavia, per diversi secoli

<sup>2</sup>In modo analogo a come abbiamo fatto nell'osservazione a pag. 30, Capitolo 2.

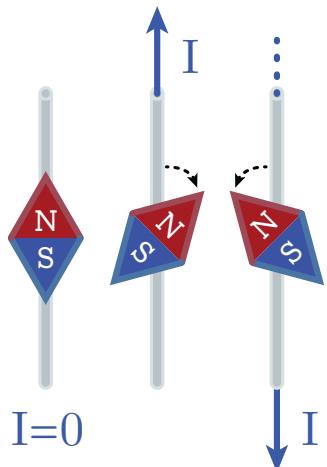
<sup>3</sup>Nelle "XXX", a pagina A.9 è possibile trovare la definizione di campo solenoidale e altre proprietà.

aleggiò il sospetto che ci fosse un legame tra elettricità e magnetismo, ma per avere dei risultati concreti si dovette aspettare gli studi con la *corrente elettrica*.

### 7.3.1 L'esperimento di Oersted

Il primo ad identificare un legame tra l'elettricità e il magnetismo fu il fisico danese **Hans Christian Oersted** (1777-1851), che il 21 Luglio 1820 pubblicò le sue scoperte in un libricino di quattro pagine scritto in latino.

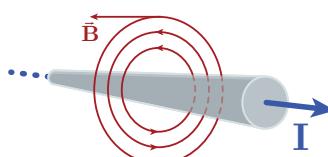
Qualche mese prima, il 21 Aprile 1820, nel preparare una lezione serale all'Università di Copenhagen, Oersted notò che la corrente in un filo spostava (seppur molto debolmente) l'ago di una bussola ad posta lì vicino. Per studiare meglio tale effetto, Oersted costruì un apparato apposito: preso un filo nella direzione nord-sud, fissò sotto di esso un ago di bussola, parallelo ad esso. Facendo passare un'intensità di corrente elevata, notò che l'ago tendeva a *deviare* la propria direzione allontanandosi dal nord magnetico, a cui normalmente puntava, per porsi *perpendicolarmente* al filo. Inoltre, notò che:



- La *deflessione* era inversamente proporzionale alla *distanza* dell'ago dal filo.
- Se il filo veniva posto sotto l'ago, invece che sopra, l'ago si muoveva nella direzione *opposta*; la stessa cosa accadeva invertendo la direzione della corrente, ma mantenendo fissa la posizione della bussola.
- La deflessione non dipendeva dal materiale del filo.
- Una deflessione avveniva anche in presenza di materiali come legno, vetro, resina, metalli e acqua tra l'ago e il filo.

Pur non avendo alcun idea del *perché*<sup>4</sup>, il fisico danese concluse che la “*forza magnetica*”, che in termini moderni interpretiamo come *campo magnetico*, doveva soddisfare le seguenti proprietà:

- Le linee di campo magnetico circondano il filo in cui passa la corrente, formando delle circonferenze.
- Le linee di campo magnetico sono situate su un *piano perpendicolare al filo*. In altre parole, il campo magnetico non ha componenti lungo il filo ed è tangente alle circonferenze.
- Se la direzione della corrente è invertita, il verso della forza è invertita.
- Il campo magnetico generato dal filo non dipende dal suo materiale.



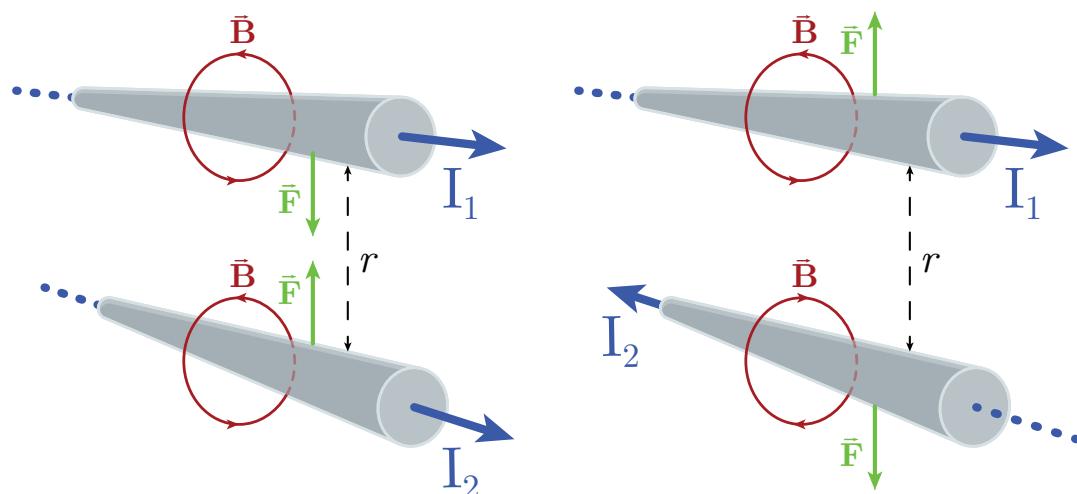
**DIGRESSIONE.** Ancor più di scoprire che la corrente agisse su un ago magnetico, fu una sorpresa considerevole per gli scienziati dell'epoca il fatto che la direzione della “*forza magnetica*” (in termini moderni, del campo magnetico) fosse *perpendicolare* ad un piano passante per il filo e l'ago.

<sup>4</sup>Oersted cercò di spiegarlo come la conseguenza di un “*conflictus electricus*” (*conflitto elettrico*), il cui significato è da ritrovarsi nella filosofia di Oersted e di conseguenza tralascieremo bellamente in quanto del tutto irrilevante ai nostri scopi.

Infatti, dato che la *legge di Coulomb* delle interazioni dei corpi carichi e dei corpi magnetizzati alla fine non era altro che una variante della *legge di gravitazione universale di Newton*, la quale afferma che l'attrazione gravitazionale agisce lungo le linee che collegano i corpi massivi, ci si aspettava che valesse una legge simile anche per le interazioni tra un corpo percorso da corrente e un corpo magnetico.

### 7.3.2 L'esperimento di Ampère

Anche il francese **Andre Marie Ampère** (1775-1836), che abbiamo incontrato in precedenza nel trattare la corrente elettrica, propose un esperimento analogo nel 1823. Ampère osservò che due fili paralleli nei quali le corrente scorre nella stessa *direzione* sono *attratti* tra di loro, mentre se la corrente è percorsa in *sensō opposto* i fili tendono ad *allontanarsi*. In entrambi i casi, la forza su un filo è *uguale e contraria* a quella esercitata sull'altro.



Sperimentalmente, si trovò che la *densità lineare* di forza era descritta dalla **legge (della forza) di Ampère**

$$\frac{F}{\ell} = k \frac{I_1 I_2}{r} \quad (7.3)$$

dove  $\ell$  è la lunghezza dei fili,  $r$  la distanza tra i due e  $I_1, I_2$  le correnti che scorrono in essi e  $k$  un'opportuna costante; nel sistema SI si pone pari a

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad (7.4)$$

dove  $\mu_0$  è detta **permeabilità magnetica del vuoto** ed è definita esattamente come

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad (7.5)$$

È facile immaginare che nell'esperimento di Ampère le correnti fungono da "cariche magnetiche". La legge che descrive tale fenomeno è quindi l'equivalente per la magnetostatica della *legge di Coulomb per l'elettrostatica*.

**Una (obsoleta) definizione dell'ampere** Nel Capitolo 5 abbiamo parlato dell'*ampere*, l'unica unità fondamentale che introdurremo in questo testo. Dato che è una delle unità base da cui poter derivare tutte le altre, dobbiamo chiaramente *definirlo*.

La prima definizione dell'ampere pre-SI - detto "*Ampere Internazionale*" - era definito elettro-chimicamente come la corrente necessaria per depositare 1,118 mg di argento al secondo da una soluzione di nitrato d'argento. Nel 1939 si propose una definizione migliore - ma tecnicamente diversa, dato che fra le due unità c'era una differenza del 0.015% - che utilizzava proprio l'esperimento di Ampère:

**DEFINIZIONE 7.3.1. - AMPERE (1960).**

L'**ampere** è quella corrente costante che, se mantenuta in due conduttori paralleli rettilinei, di lunghezza infinita e sezione circolare trascurabile, posti a un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra questi una forza pari a  $2 \times 10^{-7}$  N per ogni metro di lunghezza.

La conseguenza di tale definizione fu che la permeabilità magnetica del vuoto era una *costante* ben precisa, pari a

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

...o almeno, questo era vero fino al 2019. Dalla sua introduzione nel 1960 fino a tale anno, il SI era basato su sette *unità base*, su cui le altre derivano. Per quanto coerente ed efficace, erano evidenti alcuni problemi:

- il chilogrammo era ancora pari al peso del campione fisico del 1889 depositato al *Ufficio internazionale dei pesi e delle misure*, il quale era però prone a piccoli ma rilevanti variazioni nell'arco degli anni - considerati inaccettabili per la crescente precisione richiesta negli esperimenti.
- Altre unità, come il kelvin e l'ampere, erano basati su misure difficilmente realizzabili con precisione in un laboratorio.

Si decise quindi di cambiare il focus: il sistema non partiva direttamente dalle sette unità in sè, bensì avrebbe fissato con estrema precisione il valore di sette *costanti fondamentali*, da cui poter ricavare la misura delle unità di base e poi delle derivate in modo consistente e ripetibile in laboratorio. Per tale motivo, quattro delle sette unità fondamentali - il chilogrammo, il kelvin, la mole e, ultimo ma non per importanza, l'ampere - vennero ridefinite. L'ampere, nello specifico, venne definito fissando il valore in ampere per secondo (ossia in coulomb) della carica elementare:

**DEFINIZIONE 7.3.2. - AMPERE (2019).**

L'**ampere**, simbolo  $A$ , è l'unità del SI della corrente elettrica. È definito considerando il valore numerico costante della carica elementare pari a  $1.602176634 \cdot 10^{-19}$  quando espresso nell'unità C, che equivale a A s, dove il secondo è definito in termini di  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Dove  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  è il valore fissato della frequenza della radiazione emessa dall'atomo di Cesio 133 nella transizione tra due livelli iperfini ( $F=4, M=0$ ) e ( $F=3, M=0$ ) dello stato fondamentale  ${}^2(1/2)$ ." Parole complesse per dire sostanzialmente che anche il secondo s è basato su una costante fisica definita.

Una conseguenza di ciò è che la permeabilità magnetica del vuoto non è più fissata esattamente, ma deve essere ricavata sperimentalmente - anche se il valore di  $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$  è una buona approssimazione per i calcoli più teorici. In questo testo considereremo la situazione pre-2019, anche solo per una mera questione di semplificazione dei calcoli.

## 7.4 LA FORZA DI LORENTZ

Dagli esperimenti di Oersted e Ampère sappiamo che si devono necessariamente considerare gli effetti della corrente elettrica nello studio del magnetismo; tuttavia, ci manca ancora una descrizione *qualitativa* delle leggi che descrivono ciò.

All'inizio, si ipotizzò che la forza che agiva in questi fenomeni dovesse essere dipendente dalla *distanza* tra gli oggetti, ma tale approccio si rivelò inconclusivo. Fu solo dopo la *teoria delle linee di forza* di Faraday e la loro descrizione matematica da parte di **Lord Kelvin** (1850-1925) e **James Clark Maxwell** (1831-1879) che si parlò di tale forza in termini di campo elettrico e magnetico.

Nonostante con gli occhi moderni una formulazione differenziale di tale forza è già visibile nelle famose equazioni di Maxwell, al tempo di Maxwell non era evidente come tali leggi fossero collegate con le forze che muovono gli oggetti carichi. La legge che vediamo fu prima formulata da **J. J. Thomson** (1824-1907), sebbene con un fattore errato a causa di qualche errore di calcolo, derivandola dalle leggi di Maxwell; fu poi nel 1895 l'olandese **Hendrik Lorentz** (1853-1928) a derivare - tramite il formalismo vettoriale introdotto da **Oliver Heaviside** (1850-1925) - la legge che tuttora porta il suo nome<sup>5</sup>.

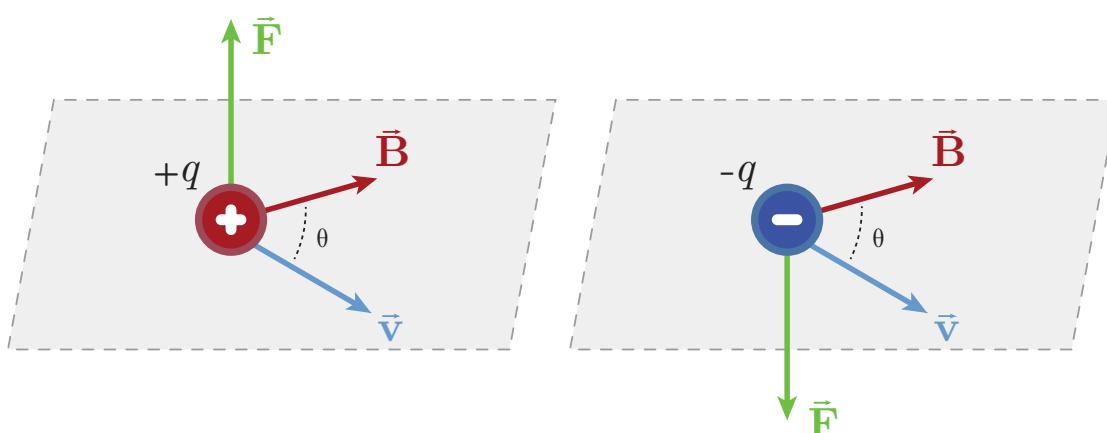
### DEFINIZIONE 7.4.1. - FORZA DI LORENTZ.

La **forza di Lorentz**  $\vec{F}$  esercitata su una carica elettrica  $q$  in movimento con velocità  $\vec{v}$ , in un certo punto e ad un certo istante, dal campo elettrico  $\vec{E}$  e dal campo magnetico  $\vec{B}$  è

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.6)$$

Spesso si parla di forza di Lorentz anche per indicare la sola componente della forza elettromagnetica che è legata al campo magnetico, ossia

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.7)$$



Da qui in poi ci riferiremo, se non specificato diversamente, a questa seconda interpretazione della *legge di Lorentz*.

<sup>5</sup>Nulla da togliere a Lorentz, ma J. J. Thomson fece buona parte del lavoro. Almeno un ringraziamento poteva concederglielo, suvvia.

**Il lavoro della forza di Lorentz** Il lavoro della forza di Lorentz è nullo. Infatti,

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int q\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.8)$$

dato che lo spostamento infinitesimo è *parallelo* alla velocità della particella e quindi il prodotto scalare risulta nullo. Di conseguenza, la variazione di energia cinetica è nulla.

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 \implies v_1^2 = v_f^2$$

La forza di Lorentz *non* modifica il modulo della velocità della particella.

#### 7.4.1 La forza di Lorentz con campo magnetico uniforme: il caso perpendicolare alla velocità

Essendo un prodotto vettoriale, nel caso di un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  si ha la forza massima se  $\vec{v}$  è perpendicolare al campo - in tal caso il modulo della forza è

$$F = qvB$$

La direzione è data dalla regola della mano destra, mentre il verso dipende dal segno di  $q$ .

**OSSERVAZIONE.** Un campo magnetico uniforme *non* produce un'accelerazione tangenziale, ma solo una *centripeta* per l'ortogonalità di  $\vec{F}$  rispetto alla velocità  $\vec{v}$ . Il moto è quindi *circolare uniforme*.

**Raggio di curvatura** Da

$$\vec{F} = m\vec{a} \implies q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a},$$

noto che  $\vec{a}$  è solo quella centripeta, si ha

$$qvB = ma_C = m\frac{v^2}{r}$$

da cui segue l'espressione del **raggio di curvatura**:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (7.9)$$

Il raggio di curvatura è inversamente proporzionale all'intensità del campo e alla carica, mentre è direttamente proporzionale alla quantità di moto.

**Velocità angolare** La velocità angolare è, in modulo,

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (7.10)$$

mentre vettorialmente è

$$\vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m} \quad (7.11)$$

dato che  $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ .

**Periodo del moto** Il periodo del moto è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (7.12)$$

#### 7.4.2 La forza di Lorentz con campo magnetico uniforme: il caso generale

In generale, il modulo della forza di Lorentz risulta

$$F = qvB \sin \theta = qv_n B$$

dove  $\theta$  è l'angolo compresa tra la velocità  $v$  e il campo  $\vec{B}$ . Se consideriamo l'asse  $z$  allineato con il campo  $\vec{B}$ , la velocità della particella può essere scissa in due: la velocità normale  $v_n$  e la velocità  $v_z$  parallela all'asse  $z$ .

La forza di Lorentz influenza la velocità normale e non quella parallela. Perpendicolarmente al campo  $\vec{B}$ , la particella è nella stessa situazione studiata nella sezione precedente: in particolare, la particella subisce un'accelerazione centripeta con moto circolare uniforme, il cui raggio di curvatura è

$$r = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad (7.13)$$

Lungo l'asse  $z$ , la velocità  $v_z$  risulta costante. Il moto descritto dalla particella è complessivamente un *moto elicoidale*, la cui accelerazione costante è perpendicolare sia alla velocità  $\vec{v}$ , sia al campo magnetico  $\vec{B}$ .

#### Passo dell'elica

##### DEFINIZIONE 7.4.2. - PASSO DELL'ELICA.

Il **passo** di un moto elicoidale è lo spazio percorso dalla particella lungo l'asse dell'elica dopo un avvolgimento completo, ossia dopo un periodo:

$$p = v_z T \quad (7.14)$$

Nel caso dell'elica dovuta alla forza di Lorentz:

$$p = v_z T = \frac{2\pi}{qB} v_z = \frac{2\pi}{qB} v \cos \theta \quad (7.15)$$

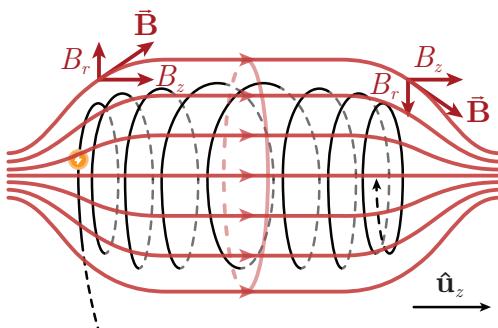
#### 7.4.3 Applicazioni della forza di Lorentz

##### Bottiglia magnetica

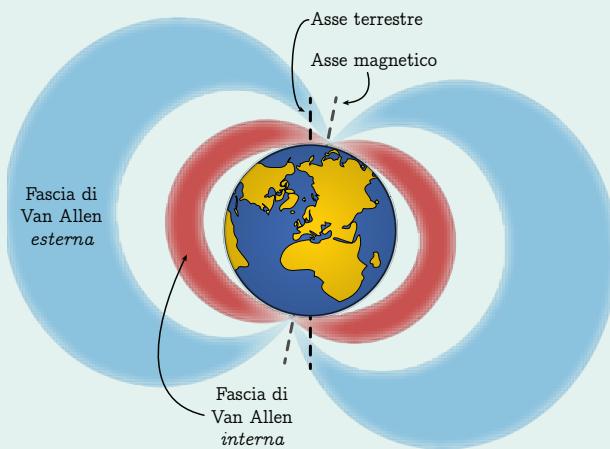
##### DEFINIZIONE 7.4.3. - BOTTIGLIA MAGNETICA.

Una bottiglia magnetica è una configurazione particolare del campo magnetico in cui l'intensità del campo cambia muovendosi parallelamente: ai lati e negli estremi della bottiglia c'è un campo magnetico molto più intenso della parte centrale.

Se una particella entra nel campo magnetico della bottiglia, può succedere che la particella venga intrappolata all'interno della bottiglia. Infatti, la particella subisce ai lati una forza di Lorentz così intensa da far cambiare direzione alla velocità.



**ESEMPIO.** Nel campo magnetico terrestre - più di preciso nella *magnetosfera* che circonda la Terra - ci sono due zone toroidali, dette **fascie di Van Allen<sup>a</sup>**, che fungono da bottiglie magnetiche per le particelle cariche che si spostano nello spazio.



Nella fascia di Van Allen *interna*, il campo magnetico è particolarmente elevato e contiene alte concentrazioni di elettroni e protoni, con energia rispettivamente nell'ordine delle centinaia di keV e maggiori di 100 MeV.

Nella fascia di Van Allen *esterna*, il campo magnetico è più debole e contiene principalmente elettroni ad alta energia (tra 0,1 e 100 MeV).

<sup>a</sup>Da non confondere con le *fascie di van Halen*, accessori del chitarrista olandese Eddie van Halen.

### Spettrometro di massa

#### DEFINIZIONE 7.4.4. - SPETTROMETRO DI MASSA.

Uno **spettrometro di massa** è uno strumento che, avvalendosi di campi elettrici e magnetici, permette di misurare la massa di particelle atomiche.

Nel tipico spettrometro di massa una sorgente, ad esempio di ioni, emette delle particelle in un campo elettrico dovuto a delle armature. Esse vengono quindi accelerate dal campo elettrico lì presente, per poi entrare in un campo magnetico uniforme uscente dal piano in cui le particelle si muovono: esse vengono deflesse dal campo e, curvando la loro traiettoria, colpiscono un rilevatore di velocità. Tra la fine delle armature e l'inizio del

campo magnetico, l'energia cinetica della particella è dovuta esclusivamente dall'energia potenziale fornita dal campo:

$$E_C = E_P \implies \frac{1}{2}mv^2 = qV \implies v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

Qui  $V$  è il potenziale del campo elettrico. Il raggio di curvatura del campo magnetico diventa allora

$$r = \frac{mv}{qB} = \sqrt{\frac{2mV}{q}} \frac{1}{B}$$

ed è evidente che particelle con egual carica ma massa diversa avranno raggi di curvatura diversi.

In particolare, lo spettrometro è utilizzato per distinguere la massa degli **isotopi** di uno stesso elemento chimico, ossia atomi che presentano lo stesso *numero atomico* (ugual numero di *protioni* e di *elettroni* all'atomo standard), ma diversa massa atomica a causa di un numero differente di *neutroni*. se  $A_1$  e  $A_2$  sono le masse atomiche di tali isotopi, allora

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

misurando la posizione sul rilevatore ci permette quindi di distinguere la massa e di rapportarla tra di loro.

**Effetto Hall** Consideriamo un conduttore, ad esempio a forma di parallelepipedo, messo in un campo magnetico diretto verso  $x$ . In esso, le cariche si muovono con una certa velocità di deriva  $\vec{v}_d$ , dove

$$\vec{j} = ne\vec{v}_d$$

- Se a muoversi sono le cariche *positive*, si pone  $e > 0$ .
- Se a muoversi sono le cariche *negative*, si pone  $e < 0$ .

Il campo magnetico esercita su ciascuna delle particelle in moto nel conduttore una *forza di Lorentz*

$$\vec{F} = e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

che, per la regola della mano destra, ha direzione l'asse  $z$  e verso dipendente dal segno della carica:

- se  $e > 0$ ,  $\vec{F}$  va verso l'alto.
- se  $e < 0$ ,  $\vec{F}$  va verso il basso.

Si verifica quindi una separazione di cariche positive e negative, creando una differenza di potenziale e di conseguenza un campo elettrico all'interno del conduttore, che chiameremo **campo di Hall**

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}}{e} = \vec{v}_d \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{ne} \times \vec{B} \quad (7.16)$$

Quando le cariche si separano si viene a formare una nuova situazione di equilibrio: il campo elettrico  $\vec{E}_H$  causato dal campo magnetico deve essere compensato da un campo uguale ed opposto, che per separazione di cariche è dato da

$$\vec{E} = -\vec{E}_H = \Delta V b \hat{z} \quad (7.17)$$

dove  $b$  è l'altezza del parallelepipedo. La presenza di un campo magnetico crea una d.d.p. tra le due pareti del conduttore.

$$\Delta V = \int \vec{E}_H \cdot d\vec{z} = \pm vBb$$

Il valore di  $\vec{E}_H$  non dipende quindi dalla carica in sé (e quindi da  $\vec{j}$ ), ma dalla sua velocità. Invece, ciò che dipende dai portatori di carica è il segno, dato che dipende dalla direzione verso della corrente e quindi dalla carica:

- Se le cariche sono *positive*, il segno è positivo.
- Se le cariche sono *negative*, il segno è negativo.

È possibile dunque distinguere in due conduttori con stessa corrente  $\vec{j}$  se i portatori di carica sono positivi e negativi misurando il segno del potenziale, il quale dipende esclusivamente dal segno delle cariche.

**ESEMPIO.** Grazie all'effetto Hall si è potuto osservare che nei *conduttori metallici* la carica che si muove è *negativa*.

**DIGRESSIONE.** Per la natura stessa dell'atomo, è molto più facile avere elettroni liberi - e quindi cariche negative che si spostano - rispetto ad avere nuclei liberi da elettroni (o addirittura protoni!) e quindi carica positiva che si sposta.

Ciò non significa che non capita mai di avere corrente portata da cariche positive: capita in certi tipi di *semiconduttori*, ma la spiegazione di tali moti si riconduce ai *moti di lacune*, la cui spiegazione rientra in quei meandri della *meccanica quantistica* che - per nostra fortuna - non approfondiremo.

**Selettore di velocità** Consideriamo la situazione in figura: due piastre cariche creano un campo elettrico  $\vec{E}$  tra di esse; al contempo è presente tra le armature un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  perpendicolare al campo elettrico. Prendiamo un fascio di particelle di carica  $q$  che entrano dentro le piastre con velocità  $\vec{v}$  perpendicolare sia al campo elettrico, sia al campo magnetico: esse sono soggette sia alla *forza di Lorentz*  $\vec{F}_L$  in quanto particelle in movimento, ma sono soggette anche ad un *forza di Coulomb*  $\vec{F}_C$  data dal campo magnetico delle piastre.

$$F_L = qvB \quad F_C = qE$$

Alla fine del conduttore prendiamo una parete con una sottilissima apertura che fa passare solo le particelle non deviate, cioè tali per cui la loro velocità sia tale da equilibrare le due forze.

$$\begin{aligned} F_L &= F_C \implies qvB = qE \\ v &= \frac{E}{B} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Cambiando l'intensità del campo elettrico  $\vec{E}$  e del campo magnetico  $\vec{B}$  è possibile selezionare solo le particelle che hanno velocità data dal rapporto dei due campi.

#### 7.4.4 Unità di misura del campo magnetico

Dalla forza di Lorentz si definisce l'unità di misura del campo magnetico, il **tesla**.

$$[B] = \frac{[F]}{[q][V]} = \frac{\text{N}}{\text{C m}} = \frac{\text{kg}}{\text{Cs}} = \frac{\text{kg}}{\text{As}^2}$$

**UNITÀ DI MISURA.****CAMPO MAGNETICO:** tesla (T).

$$\text{Dimensioni: } [\vec{B}] = \frac{[F]}{[q][V]} = \text{MT}^{-2}\text{I}^{-1}$$

**ESEMPI.**

- Il campo magnetico terrestre è dell'ordine di  $10^{-5}$  T.
- Il campo magnetico di un tipico magnete da frigo è di  $5 \cdot 10^{-3}$  T.
- Il campo magnetico sulla superficie di un magnete al neodimio è di 1,25 T.
- Il campo magnetico all'interno del *Large Hadron Collider* al CERN è 8 T.
- Il campo magnetico più forte mai realizzato da un magnete fu di 97,4 T.

Come molte altre unità che abbiamo incontrato, i tesla sono ordini di grandezza *molto più elevati* rispetto ai campi magnetici che si usano sperimentalmente; per questo si fa spesso uso dei *sottomultipli* del tesla, come ad esempio il **gauss** (G), pari a

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} \quad (7.19)$$

## 7.5 SECONDA LEGGE DI LAPLACE

La forza di Lorentz ci permette di quantificare l'interazione tra una particella in movimento e il campo magnetico. Per quanto sia un importantissimo risultato teorico e abbia anche delle immediate applicazioni pratiche (ad esempio per spiegare il funzionamento dei tubi a raggi catodici), ha un problema: generalmente non studiamo singole cariche in movimento, bensì un numero estremamente elevato sotto forma di *corrente elettrica*. La **seconda legge di Laplace**, che descrive l'interazione magnetica dovuta ad una corrente elettrica costante, fu inizialmente scoperta *ancor prima* della forza di Lorentz con metodi *sperimentali*; noi la deriveremo in via teorica per mezzo della forza di Lorentz.

Ricordiamo che la corrente elettrica che attraversa una porzione di filo è

$$\vec{j} = ne\vec{v}_d = j\hat{\mathbf{u}}_x$$

dove  $n$  è il numero di cariche per unità di volume e  $\vec{v}_d$  la velocità di deriva. Su ogni singola carica  $e$  la forza di Lorentz *media* sarebbe

$$\vec{F} = e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

La forza per volume infinitesimo è

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = ne\vec{v}_d \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Complessivamente, su un volume di filo  $V$  si ha

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B} dV = \int dx j\hat{\mathbf{u}}_x \times \vec{B} \underbrace{\int_{\Sigma} dy dz}_{=\Sigma} = \int dx j\Sigma \hat{\mathbf{u}}_x \times \vec{B} \boxed{=} \quad (7.20)$$

Ricordando che l'intensità di corrente nel filo è definita come il flusso di corrente

$$I = \Phi_{\Sigma} (\vec{j}) = j\Sigma$$

si ha

$$\boxed{=} \int I\hat{\mathbf{u}}_x \times \vec{B} dx$$

**DEFINIZIONE 7.5.1. - SECONDA LEGGE DI LAPLACE.**

La **seconda legge di Laplace** afferma che la forza magnetica (detta **forza di Laplace**) esercitata su un filo carico di corrente da un campo magnetico  $\vec{B}$  è pari a

$$\vec{F} = \int I d\vec{s} \times \vec{B} \quad \text{dove } d\vec{s} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt \quad (7.21)$$

**ESEMPIO.** Supponiamo di avere un campo magnetico uniforme in cui è immerso un filo con corrente stazionario. Dato che si può portar fuori dall'integrale il campo, si ha

$$\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B} = I (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{B} \quad (7.22)$$

In particolare, se il circuito è chiuso,

$$\vec{F} = I \oint d\vec{s} \times \vec{B} = 0 \quad (7.23)$$

**ESEMPIO.** Consideriamo un lungo circuito elettrico posto su un piano verticale. Una sua parte è immersa in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  uscente dal piano, in modo da formare una sezione a ferro di cavallo come in figura, di larghezza  $d$ . Se il valore di  $d$  è noto, posso misurare la forza magnetica all'equilibrio utilizzando una bilancia.

## 7.6 IL MOMENTO MECCANICO DI UN CIRCUITO PIANO IN UN CAMPO MAGNETICO

Consideriamo una *spira* rettangolare di lati  $a$  e  $b$  percorsa da una corrente  $I$ , immersa in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme. Chiamiamo  $\theta$  l'angolo compreso tra  $\vec{B}$  e il versore normale  $\hat{\mathbf{u}}_n$  alla superficie racchiusa dalla spira; il verso di  $\hat{\mathbf{u}}_n$  è dettato dalla **regola della vite**.

**DEFINIZIONE 7.6.1. - REGOLA DELLA VITE.**

Data una curva orientata, il verso del versore normale  $\hat{\mathbf{u}}_n$  alla superficie delimitata da tale curva è definito nella seguente maniera: curvando le dita della mano in modo che le dita della mano in modo che seguano l'orientazione della corrente, il pollice retto punta nel verso di  $\hat{\mathbf{u}}_n$ .

Le forze magnetiche  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  sui lati *orizzontali* sono uguali e contrarie e hanno la stessa retta di azione, dato che sono applicate nel centro del lato. Una situazione simile si verifica con le forze  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  sui lati *verticali*: le forze sono uguali e contrarie, di valore massimo  $IaB$ . Infatti,

$$|\vec{F}| = I |d\vec{s}| |\vec{B}| = IaB$$

in quanto  $|d\vec{s}| = a$  e  $\vec{B}$  è ortogonale ai lati.

Di conseguenza, sulla spira la risultante delle forze è nulla e non si ha un *movimento traslatorio*. Tuttavia, c'è una differenza sostanziale dal primo caso: la coppia di forze laterali *non* hanno la stessa retta di azione! Come si può facilmente vedere guardando la spira dall'alto, tale coppia di forze generano sulla spira un *momento di coppia* attorno all'asse verticale del centro di massa e dunque una *rotazione*.

**ATTENZIONE!** Il momento di una forza e il momento di una coppia di forze sono strettamente correlati ma con differenze fondamentali.

- Il **momento  $\vec{M}$  di una forza  $\vec{F}$**  rispetto ad un punto  $O$  è definito come il prodotto vettoriale tra la forza  $\vec{F}$  e il vettore distanza tra  $O$  e il punto di applicazione di  $\vec{F}$ .

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.24)$$

Esso *dipende* dal punto  $O$ , cambia se cambiamo il punto  $O$  ed è l'equivalente rotazionale di una forza lineare nel caso in cui l'oggetto a cui la forza è applicata sia libero di ruotare attorno ad un perno.

- Il **momento  $\vec{M}$  di una coppia di forze<sup>a</sup>  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$**  è definito come il prodotto vettoriale tra il vettore distanza  $\vec{d}$  tra i punti di applicazione delle forze e  $\vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.25)$$

Esso *non* dipende da alcun punto di riferimento, a differenza del momento di una forza, ed è pertanto un vettore "libero". Il momento di una coppia di forze è la *somma vettoriale* dei momenti di ciascuna forza rispetto ad un punto scelto  $O$ ; di conseguenza, è un caso *particolare* del momento di una forza.

Si può generalizzare il momento di coppia se abbiamo un sistema di più forze la cui risultante è nulla.

<sup>a</sup>In alcuni testi lo si distingue dal momento di una forza  $\vec{M}$  usando la nomenclatura  $\vec{\tau}$ ; noi, ahimè, per adeguarci ad una convenzione malsana non faremo ciò.

Calcoliamo tale momento di coppia. Possiamo calcolarlo in due modi: come somma dei momenti delle singole forze o come momento di una coppia. Sebbene sia nettamente più rapido procedere con il secondo metodo, per completezza<sup>6</sup> presentiamo anche il primo.

- **Somma dei momenti.** Consideriamo come punto di applicazione il centro della spira: le distanze  $\vec{r}_i$  dal centro ai punti di applicazione delle forze  $\vec{F}_i$  sono uguali ed opposte, con modulo  $\frac{b}{2}$ . Segue quindi che il momento di coppia ha modulo pari a due volte il momento di una delle forze (ad esempio, a  $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F}$ ). Notiamo che tra  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$  c'è per ragioni geometriche un angolo pari a  $\theta$ ; denotata la direzione del momento con il versore  $\hat{\mathbf{u}}_M$ , si ha

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 2\vec{r} \times \vec{F} = 2|\vec{r}||\vec{F}| \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_M = 2 \frac{b}{2} I a B \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_M = I a b B \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_M = \\ &= I \Sigma B \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_M \end{aligned}$$

dove  $\Sigma = ab$  è l'area della spira.

- **Momento di coppia.** La distanza vettoriale  $\vec{d}$  tra i punti di applicazione ha modulo pari a  $b$  e si noti che, per ragioni geometriche, l'angolo tra  $\vec{d}$  e una delle forze  $\vec{F}$  è  $\theta$ . Si ha

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = |\vec{d}||\vec{F}| B \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_M = I a b B \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_M = I \Sigma B \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_M$$

Si noti che il versore  $\hat{\mathbf{u}}_M$  è ottenibile anche come prodotto vettoriale (normalizzato!) di  $\vec{B}$  con  $\hat{\mathbf{u}}_n$ :

$$\hat{\mathbf{u}}_M = \frac{\hat{\mathbf{u}}_n \times \vec{B}}{|\hat{\mathbf{u}}_n \times \vec{B}|} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_n \times \vec{B}}{B \sin \theta} \quad (7.26)$$

<sup>6</sup>Ma soprattutto perché è il metodo presentato per qualche motivo non ben specificato durante il corso.

Riscriviamo  $\vec{M}$  con questo prodotto vettoriale:

$$\vec{M} = I \cancel{B} \sum \sin \theta \frac{\hat{u}_n \times \vec{B}}{B \sin \theta} = I \sum \hat{u}_n \times \vec{B}$$

Introduciamo ora la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 7.6.2. - MOMENTO MAGNETICO DELLA SPIRA.**

Data una spira di area  $\Sigma$  percorsa da una corrente  $I$ , chiamiamo il **momento magnetico della spira** la quantità vettoriale

$$\vec{m} = I \sum \hat{u}_n \quad (7.27)$$

Otteniamo che il momento meccanico della spira rettangolare è

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (7.28)$$

#### 7.6.1 Il caso generale

Nel caso di una spira generica immersa in un campo magnetico uniforme sappiamo già che la risultante delle forze è nulla<sup>7</sup>, quindi non abbiamo alcun moto traslatorio. Tuttavia, a meno di casi specifici, c'è un momento meccanico - il cui punto di applicazione è arbitrario, che porta ad una rotazione della spira.

**TEOREMA 7.6.1. - MOMENTO MECCANICO DI UNA SPIRA.**

Una spira generica, da intendersi come un circuito piano chiuso di area  $\Sigma$ , percorsa da corrente costante  $I$  e immersa in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  subisce un momento meccanico pari a

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (7.29)$$

dove

$$\vec{m} = I \sum \hat{u}_n \quad (7.30)$$

è il momento magnetico associato ad essa.

**OSSERVAZIONE.** Nelle "XXX", a pagina ?? è possibile trovare una dimostrazione alternativa più "fisica", basata sui risultati ottenuti con la spira rettangolare.

**DIMOSTRAZIONE.** Dato che in questo contesto abbiamo a che fare con un corpo continuo, il momento deve essere formulato per mezzo di un *integrale*. Fissato un punto di riferimento arbitrario da cui misurare il vettore posizione  $\vec{r}$ , se

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

è la forza per unità di lunghezza, il momento meccanico per unità di lunghezza è

$$d\vec{M} = I \vec{r} \times d\vec{F}$$

<sup>7</sup>Si veda l'esempio a pag. 140.

Il momento meccanico complessivo si ottiene integrando lungo  $\gamma$ :

$$\vec{M} = \oint_{\gamma} d\vec{M} = \oint_{\gamma} \vec{r} \times d\vec{F} = I \oint_{\gamma} \vec{r} \times (d\vec{s} \times \vec{B})$$

Poniamo come parametrizzazione della curva  $\gamma$  la funzione  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ ,  $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ . Ricordiamo che lo spostamento infinitesimo è

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \dot{\vec{r}} dt$$

Segue che

$$\vec{M} = \oint_{\gamma} \vec{r} \times (d\vec{s} \times \vec{B}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) dt \blacksquare$$

Ricordiamo l'*identità di Jacobi* del triplo prodotto vettoriale

$$\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{B} \times \dot{\vec{r}}) + \dot{\vec{r}} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = 0$$

All'ultimo termine applichiamo la regola di Leibniz al contrario:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \times (\vec{B} \times \vec{r}) &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r})) - \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{B} \times \vec{r}) = \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r})) - \vec{r} \times (\vec{B} \times \dot{\vec{r}}) = \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r})) + \vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'identità di Jacobi, otteniamo

$$2\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{d}{dt} (\vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r})) = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} \blacksquare &- \frac{I}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} (\vec{r} \times (\vec{B} \times \dot{\vec{r}})) - \vec{B} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \right] dt \\ &= \underbrace{\frac{I}{2} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{r})}_{=0 *} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{I}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{B} dt = \frac{I}{2} \left( \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dt \right) \times \vec{B} \blacksquare \end{aligned}$$

Possiamo dimostrare<sup>a</sup> che

$$\Sigma \hat{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dt$$

pertanto,

$$\blacksquare I \Sigma \hat{\mathbf{u}}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \square$$

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 261, è possibile trovare tale dimostrazione.

**Condizione di equilibrio** Dato che il momento risultante è ottenibile come un prodotto vettoriale tra il momento magnetico  $\vec{m}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$ , la spira risulta essere in equilibrio se  $\vec{m}$  è parallelo a  $\vec{B}$ . Se  $\theta$  è l'angolo tra il campo e la normale alla spira, allora

- $\theta = 0$ : equilibrio stabile.
- $\theta = \pi$  equilibrio instabile.

Consideriamo un asse di rotazione parallelo a  $\vec{M}$  e sia  $I$  il momento d'inerzia della spira attorno a tale asse. Ricordiamo che il *momento angolare* si può esprimere in funzione dell'*accelerazione angolare*:

$$M = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7.31)$$

Per piccole oscillazioni, si ha che  $\sin \theta \sim \theta$  e quindi

$$-I\Sigma B\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{dove } \omega^2 = \frac{I\Sigma B}{I} = \frac{mB}{I} \quad (7.32)$$

Il comportamento delle piccole oscillazioni ricorda quello di un *oscillatore armonico*.

**Energia potenziale** L'energia potenziale del moto angolare è

$$U_P = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -I\Sigma B \cos \theta \quad (7.33)$$

Allora

$$|\vec{M}| = \frac{dU_P}{d\theta} = I\Sigma B \sin \theta \quad (7.34)$$

**Il principio di equivalenza di Ampère** Si può osservare come un *ago magnetico* immerso in un campo magnetico si comporta, per piccole oscillazioni, in modo analogo a quanto visto con la spira percorsa da corrente - ma un ago magnetico non è altro che un dipolo magnetico! Ciò ci porta ad affermare quello che chiamiamo **principio di equivalenza di Ampere**.

#### PRINCIPIO 7.6.1. - PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE.

Un circuito elettrico piano di area  $d\Sigma$  percorsa da una corrente  $I$  equivale agli effetti di un dipolo elementare di momento magnetico

$$d\vec{m} = Id\Sigma \hat{u}_n \quad (7.35)$$

perpendicolare al piano della spira e orientata rispetto al verso della corrente secondo la *regola della vite*.

Chiaramente, parlando di un'equivalenza il ragionamento è bilaterale: ogni qual volta incontriamo un dipolo magnetico possiamo immaginarlo come se fosse una spira percorsa corrente.

# 8

CAPITOLO

## IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO E LA LEGGE DI BIOT-SAVART

---

*“L'elettricità e il magnetismo sono quelle forze della natura grazie alle quali le persone che non sanno nulla di elettricità e magnetismo possono spiegare tutto.”*

*Egon Friedell, cercando di spiegare nulla.*

### P<sup>ER</sup>

#### 8.1 IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO PER SUPERFICI APERTE

Come già detto, il campo magnetico è *solenoidale*, ossia che la divergenza di esso è nulla:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Ne consegue che, almeno *localmente*, esiste un vettore  $\vec{A}$  detto **potenziale vettore**  $\vec{A}$  tale per cui il campo magnetico è il gradiente di  $\vec{A}$ .

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{8.1}$$

Questo ci viene in aiuto se vogliamo calcolare il flusso di  $\vec{B}$  attraverso una superficie *aperta*  $\Sigma$  - per quelle chiuse sappiamo già che è nullo. Supponiamo che il bordo  $\partial\Sigma$  sia una curva chiusa; allora

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) &= \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = && (\vec{B} \text{ solenoidale}) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \Gamma_{\Sigma}(\vec{A}) && (\text{teorema di Stokes}) \end{aligned}$$

Quanto trovato è valido in generale per un qualunque campo solenoidale: il flusso tramite una superficie aperta dipende esclusivamente dal *bordo* e *non* dalla superficie in sé. Se prendessi due superfici aperte differenti, ma con lo stesso bordo, avremmo lo stesso flusso.

Noto ciò, vorremmo ora *generalizzare* ancora di più quanto visto nelle sezioni precedenti: dato un circuito qualunque percorso da corrente e immerso in un campo magnetico, vorremo esprimere la forza che agisce, l'energia potenziale, il lavoro del campo magnetico e quant'altro in termini di *flusso*, in modo da utilizzare poi la dipendenza del flusso nei confronti del bordo.

Dato un circuito chiuso  $\gamma$ , scegliamo una superficie  $\Sigma$  arbitraria con bordo  $\partial\Sigma = \gamma$ . Vorremo calcolare il gradiente del flusso:

$$\vec{\nabla}\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \vec{\nabla}\Gamma_{\partial\Sigma}(\vec{A})$$

Invece che calcolare il gradiente della circuitazione vera e propria di  $\vec{A}$ , ossia

$$\vec{\nabla}\Gamma_{\partial\Sigma}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \int_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (8.2)$$

ci conviene prima calcolare il gradiente della circuitazione *infinitesima*  $\vec{A} \cdot d\vec{s}$  per poi integrare lungo  $\partial\Sigma$ . Si osservi che per il gradiente di un prodotto scalare tra vettori vale la formula per nulla immediata

$$\vec{\nabla}\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (8.3)$$

Se consideriamo nel nostro caso come vettori  $\vec{A}$  e lo spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$  della curva  $\partial\Sigma$ , otteniamo

$$\vec{\nabla}\vec{A} \cdot d\vec{s} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})d\vec{s} + (d\vec{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times d\vec{s}) + d\vec{s} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Posta  $\vec{r}$  la parametrizzazione di  $\partial\Sigma$ , si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial y}d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial z}d\vec{s} = 0$$

Noto che lo spostamento infinitesimo della curva  $\partial\Sigma$  è

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt,$$

vale

$$\frac{\partial}{\partial q^i}d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}dt = 0$$

dove  $q^1 = x$ ,  $q^2 = y$ ,  $q^3 = z$ . Di conseguenza,

$$\begin{cases} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})d\vec{s} = A_x \frac{\partial}{\partial x}d\vec{s} + A_y \frac{\partial}{\partial y}d\vec{s} + A_z \frac{\partial}{\partial z}d\vec{s} = 0 \\ \vec{\nabla} \times d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

Ci interessano solo le derivate applicate al vettore potenziale  $\vec{A}$ :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot d\vec{s}) = (d\vec{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + d\vec{s} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Calcoliamo la circuitazione di  $\vec{A}$  facendo l'integrale curvilineo lungo il circuito  $\partial\Sigma$ : +

$$\oint \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot d\vec{s}) = \oint (d\vec{s} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \oint d\vec{s} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (8.4)$$

Osserviamo che, data una funzione scalare arbitraria  $\phi$ , vale

$$(d\vec{s} \cdot \vec{\nabla}) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} dt = \frac{d}{dt} (\phi(\vec{r}(t)))$$

e dunque

$$d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \right) dt \quad (8.5)$$

Di conseguenza,  $d\vec{s} \cdot \vec{\nabla}$  agisce su ciascuna componente di  $\vec{A}$  come *derivata totale* e di conseguenza, integrando su una curva chiusa, l'integrale risulta nullo; segue che il primo termine è nullo. Ricaviamo quindi

$$\vec{\nabla} \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \Gamma_{\partial\Sigma}(\vec{A}) = \oint d\vec{s} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \oint d\vec{s} \times \vec{B}$$

Ma quella che abbiamo ottenuta è la forza di Laplace divisa per l'intensità di corrente  $I$  stazionaria. Nella condizione in cui  $I$  sia stazionaria, allora

$$\vec{B} = I \int_{\gamma} d\vec{s} \times \vec{B} = I \vec{\nabla} \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) \quad (8.6)$$

**Energia potenziale** Poiché la forza è espressa come *gradiente* di una quantità scalare, l'energia potenziale è l'opposta di tale quantità:

$$U_P = -I \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) \quad (8.7)$$

In sintesi:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_P \quad (8.8)$$

$$U_P = -I \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) \quad (8.9)$$

In particolare, se il campo magnetico  $\vec{B}$  è uniforme, allora

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) &= \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \Sigma \\ \implies U_P &= I \Sigma \hat{\mathbf{u}}_n \cdot \vec{B} = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

che, effettivamente, coincide con quanto abbiamo visto a pagina 144.

**Lavoro per spostare il circuito** Il circuito percorso da corrente, essendo soggetto alla forze di Laplace, si muove e si deforma. Ci si aspetterebbe di incontrare degli attriti, ma così non è, come mai?

Supponiamo che il campo magnetico  $\vec{B}$  sposti un circuito lungo un percorso  $\eta$  dallo stato  $A$  allo stato  $B$ , deformandolo al contempo. Allo stato  $A$  il circuito corrisponde alla curva  $\gamma_A$ , mentre allo stato  $B$  alla curva  $\gamma_B$ . Il lavoro compiuto dal campo magnetico per spostare il circuito è

$$W = \int_{\eta} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\eta} \vec{\nabla} U_P \cdot d\vec{s} =$$

$$= -\Delta U_P) = U_P(A) - U_P(B) \quad (\text{teorema del gradiente})$$

dove  $U_P(A)$  è il potenziale allo stato iniziale  $A$  e  $U_P(B)$  quello allo stato finale  $B$ . Oltre a non avere alcun attrito, dato che il lavoro è una differenza di energia potenziale senza dispersione, si ha anche che

$$W = I(\Phi_{\Sigma_B}(\vec{\mathbf{B}}) - \Phi_{\Sigma_A}(\vec{\mathbf{B}})) = I(\Gamma_{\gamma_B}(\vec{\mathbf{A}}) - \Gamma_{\gamma_A}(\vec{\mathbf{A}})) \quad (8.10)$$

dove  $\Sigma_A, \Sigma_B$  sono superficie arbitrarie con bordo i circuiti  $\gamma_A, \gamma_B$ , rispettivamente.

Di fatto, il circuito elettrico è l'equivalente per il lavoro magnetostatico a quello che la particella elettrica fa nel lavoro elettromagnetico: alla carica corrisponde l'intensità di corrente, mentre alla differenza di potenziale corrisponde la differenza di circuitazione del potenziale vettore.

Per un campo magnetico uniforme sappiamo che la forza di Laplace su un circuito chiuso è *nulla*, quindi anche il lavoro compiuto è *nullo*.

### 8.1.1 Un esempio: la spira circolare vicino al magnete cilindrico

Consideriamo un *magnete cilindrico* con asse lungo l'asse  $z$ ; poniamo nello spazio una spira circolare  $\gamma$ , percorsa da corrente, in modo da essere parallela alla faccia orizzontale del magnete e tale per cui il centro della spira stia sull'asse  $z$ . Per ovvi motivi, poniamoci nelle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ y = R \cos \theta \\ z = z \end{cases}$$

Possiamo parametrizzare la spira di raggio  $R = R_0$  e quota  $z = z_0$  (inizialmente) fissati con

$$\vec{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) = (R_0 \cos \varphi, R_0 \sin \varphi, z_0) =$$

Uno spostamento infinitesimo in coordinate cilindriche sarebbe<sup>1</sup>

$$d\vec{s} = dR \hat{\mathbf{u}}_R + Rd\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + dz \hat{\mathbf{u}}_z \quad (8.11)$$

Nel nostro caso, poiché  $R = R_0$  e  $z = z_0$  sono inizialmente fissi, si ha solo la variazione infinitesima  $d\theta$  e quindi

$$d\vec{s} = Rd\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (8.12)$$

Il campo magnetico  $\vec{\mathbf{B}}$  ha simmetria assiale rispetto all'asse  $z$  e si può scomporre come

$$\vec{\mathbf{B}} = B \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_z + B \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_r \quad (8.13)$$

dove  $\varphi$  è l'angolo tra l'asse  $z$  e il campo. Calcoliamoci la forza: per la seconda legge di Laplace

$$\vec{\mathbf{F}} = I \int d\vec{s} \times \vec{\mathbf{B}}$$

Per la regola della mano destra avremo come direzione e verso della forza quello in figura, ortogonale sia a  $d\vec{s}$  che a  $\vec{\mathbf{B}}$ . Ci si aspetta che sul piano orizzontale della spira le forze si compensino, mentre che le altre forze siano dirette verso il basso e a causa di esse la spira venga quindi "risucchiata" verso il basso. Facendo i dovuti calcoli,

$$\vec{\mathbf{F}} = I \int d\vec{s} \times \vec{\mathbf{B}} = IR \int \hat{\mathbf{u}}_\theta \times (B \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_z + B \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_r) d\theta \boxed{=} \quad$$

<sup>1</sup>Nelle "XXX", a pagina 259 è possibile trovare come si calcola.

Poiché

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta \times \hat{\mathbf{u}}_z = \hat{\mathbf{u}}_R \quad \hat{\mathbf{u}}_\theta \times \hat{\mathbf{u}}_R = \hat{\mathbf{u}}_z$$

si ha

$$[=] IR \int (B \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_R - B \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_z) d\theta [=]$$

Osserviamo che per simmetria cilindrica lungo la spira  $B$  e  $\varphi$  devono essere costanti, dunque anche  $\cos \varphi$  e  $\sin \varphi$  lo sono:

$$[=] IRB \cos \varphi \int \hat{\mathbf{u}}_R d\theta - B \sin \varphi \int \hat{\mathbf{u}}_z d\theta$$

Si osservi che

- $\int \hat{\mathbf{u}}_R d\theta = 0$ . Ci sono due modi per convincersi che sia così: o per ragioni di simmetria, dato che ogni versore ha un versore opposto e quindi integrando su un giro completo dell'angolo  $\theta$  si annullano tutti, oppure integrando il versore rispetto a  $\theta$ , noto che  $\hat{\mathbf{u}}_R = (\cos \theta, \sin \theta)$ .
- $\int \hat{\mathbf{u}}_z d\theta = \hat{\mathbf{u}}_z \int d\theta = 2\pi \hat{\mathbf{u}}_z$ , dato che  $\hat{\mathbf{u}}_z$  è costante.

Segue quindi che la forza subita dalla spira è diretta verso il basso, come previsto:

$$\vec{\mathbf{F}} = -2\pi RIB \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_z \quad (8.14)$$

Vorremmo ora calcolare questa  $\vec{\mathbf{F}}$  come

$$\vec{\mathbf{F}} = I \vec{\nabla} \Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}})$$

Per farlo, usiamo un trucco: consideriamo, in aggiunta alla spira circolare, un'altra spira *immaginaria* posta ad altezza  $\Delta z$ ; sfrutteremo che il flusso tramite questa superficie cilindrica individuata dalle spire è nullo. Indichiamo con

- $\Sigma$  la superficie individuata dalla spira originale (base inferiore del cilindro).
- $\Sigma'$  la superficie individuata dalla spira immaginaria (la base superiore del cilindro).
- $\sigma$  la superficie laterale del cilindro.

Sceglieremo un'orientazione di  $\hat{\mathbf{u}}_n$  in modo che sia uscente dal cilindro. In questo caso, poniamo il versore normale di  $\Sigma'$  nella direzione positiva dell'asse  $z$  e quello di  $\Sigma$  uguale e contrario. Allora

$$\Phi_{\Sigma+\Sigma'+\sigma}(\vec{\mathbf{B}}) = \Phi_{\Sigma'}(\vec{\mathbf{B}}) - \Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}}) + \Phi_\sigma(\vec{\mathbf{B}}) = 0$$

Il flusso relativo alle basi si può vedere una funzione della quota  $z$ :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \Phi(z) = \Phi_{\Sigma(z)}(\vec{\mathbf{B}}) \end{aligned}$$

dove  $\Sigma(z)$  è l'area contenuta in una spira circolare di raggio  $R_0$  a quota  $z$ . Allora:

$$\Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}}) = \Phi(z) \quad \Phi_{\Sigma'}(\vec{\mathbf{B}}) = \Phi(z + \Delta z)$$

Calcoliamo la derivata di tale funzione:

$$\frac{\partial \Phi_\Sigma}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\Sigma'}(\vec{\mathbf{B}}) - \Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}})}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-\Phi_\sigma(\vec{\mathbf{B}})}{\Delta z} [=]$$

Si osservi che

$$\begin{aligned}
 \Phi_\sigma(\vec{\mathbf{B}}) &= \int_{\sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\sigma = \\
 &= \int_{\sigma} B \cdot \hat{\mathbf{u}}_R d\sigma && \text{(versore della sup. laterale)} \\
 &= \int_{\sigma} (B \cos \varphi \hat{\mathbf{z}} + B \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_R) \cdot \hat{\mathbf{u}}_R d\sigma = \\
 &= \int_{\sigma} B \sin \varphi d\sigma = \\
 &= B \sin \varphi \int_{\sigma} d\sigma = && (B \sin \varphi \text{ costante su } \sigma \text{ per } \Delta z \rightarrow 0) \\
 &= 2\pi R \Delta z B \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Si ottiene infine

$$\boxed{=} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-2\pi R \cancel{\Delta z} B \sin \varphi}{\cancel{\Delta z}} = -2\pi R B \sin \varphi$$

ossia

$$\vec{\mathbf{F}} = -2\pi I R B \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_z = I \frac{\partial \Phi_\Sigma}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (8.15)$$

**OSSERVAZIONE.** Abbiamo calcolato la forza tramite il flusso *traverso*, cioè quello della superficie laterale, senza calcolare in realtà il flusso del cilindro.

### 8.1.2 Unità di misura del flusso del campo magnetico

L'unità di misura del flusso del campo magnetico si può derivare in diversi modi. Dalla definizione di flusso stesso, si ha

$$[\Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}})] = [\vec{\mathbf{B}}] [\Sigma] = \text{T m}^2$$

Alternativamente, poiché il flusso è legato all'energia potenziale dalla legge

$$U_p = -I \Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}})$$

si ha anche

$$[\Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}})] = \frac{[U_p]}{[I]} = \frac{\text{J}}{\text{A}}$$

#### UNITÀ DI MISURA.

**FLUSSO MAGNETICO:** weber (Wb).

**Dimensioni:**  $[\Phi_\Sigma(\vec{\mathbf{B}})] = [\vec{\mathbf{B}}] [\Sigma] = \text{ML}^2 \text{T}^{-2} \text{I}^{-1}$

## 8.2 PRIMA LEGGE DI LAPLACE O LEGGE DI BIOT-SAVART

L'esperimento di Ampère<sup>2</sup> ci mostrò che due fili percorsi da corrente venivano attratti - o respinti - da forze di natura magnetica. Grazie alla forza di Lorentz ora sappiamo

<sup>2</sup>Si veda la sezione 7.3.2, pag. 131.

come questi fili potevano muoversi: la corrente che percorre ciascun filo genera un campo magnetico che agisce sulle cariche in movimento dell'altro filo, le quali subiscono delle forze che, di conseguenza, permettono di spostarlo. Ci rimane un tassello di questo puzzle: qual è il campo magnetico *generato dal filo*?

### 8.2.1 Campo magnetico generato da cariche puntiformi in moto

Procediamo con calma. Innanzitutto, sebbene sia difficilmente osservabile, anche una singola carica in movimento con velocità  $\vec{v}$  è in grado generare un campo magnetico. Tale campo  $\vec{B}$  soddisfa, nel suo piccolo, alcune proprietà incontrate nell'esperimento di Ampère:

- Se la carica non è in movimento, non si ha alcun campo; dobbiamo supporre che  $\vec{B}$  debba dipendere dalla velocità.
- Se il campo agisce su un'altra carica in movimento, la cui velocità ha direzione parallela a  $\vec{v}$ , la forza di Lorentz che ne consegue deve essere tale da risultare attrattiva se i versi delle velocità sono concordi e repulsiva se sono discordi.

Inolt

Fu **Oliver Heaviside** nel 1888 a derivare, dalle leggi di Maxwell, la legge matematica che descrive il campo magnetico generato da una singola carica in movimento:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \quad (8.16)$$

La prima cosa che notiamo è che a tutti gli effetti tale legge soddisfa quanto supposto ed osservato: il campo magnetico *dipende* dalla velocità, mentre il prodotto vettoriale garantisce la seconda osservazione.

**ESEMPIO.** Per capire meglio la presenza del prodotto vettoriale consideriamo la seguente situazione: due particelle 1 e 2 in moto, entrambe con velocità  $\vec{v}$  concorde e parallele, sono attratte l'un l'altra da forze di Lorentz uguali e contrarie. La forza che subisce la particella 2 è dovuta all'azione del campo magnetico  $\vec{B}_1$  generato dalla prima:

$$\vec{F}_{2,1} = q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1$$

Supponendo che le cariche siano negative, per avere che  $\vec{F}_{2,1}$  sia attrattiva (cioè diretta verso la particella 1), per la regola della mano destra  $\vec{B}_1$  deve essere entrante il piano dove viaggiano le particelle. Allora, il prodotto vettoriale di  $\vec{v}$  per il versore  $\hat{\mathbf{u}}_r$ , diretto da 1 a 2 permette a  $vbaB_1$  di avere verso entrante.

**OSSERVAZIONE.** Una carica in movimento genera sia un campo elettrico, sia un campo magnetico. In particolare, il campo elettrico si distribuisce *radialmente* con centro la carica, mentre quello magnetico è *tangenziale* a circonferenze *perpendicolari* alla velocità e con centro sulla retta su cui essa giace.

Si noti che l'espressione del campo magnetico

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

e quella del campo elettrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

generati della particella sono così simili da essere collegati tra di loro dalla relazione

$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E} \quad (8.17)$$

Poiché, dimensionalmente parlando, si ha

$$[\varepsilon_0] = \frac{1}{4\pi [F]} \frac{[q]^2}{[r]^2} = \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}}$$

e

$$[\mu_0] = \frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2},$$

il loro prodotto ha dimensioni

$$[\varepsilon_0 \mu_0] = \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2},$$

pari a quelle di un inverso di un quadrato di una velocità. Ma non stiamo parlando di una velocità qualunque, bensì della *velocità della luce!* Infatti,

$$c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

La relazione di cui sopra tra campo elettrico  $\vec{E}$  e campo magnetico  $\vec{B}$  di una particella carica in moto a velocità  $\vec{v}$  si riscrive quindi come

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (8.18)$$

Perché però compare la velocità della luce? Facendo un piccolissimo spoiler, i fenomeni elettromagnetici sono legati a fenomeni di natura ondulatoria con velocità di propagazione pari a quelli della luce.

### 8.2.2 Campo magnetico generato da un filo: legge di Biot-Savart

Sebbene abbiamo visto cosa succede per una particella, una singola carica in movimento non fa una corrente stazionaria - ma tante sì. Supponiamo di avere un elemento di filo infinitesimo percorso da corrente stazionaria di intensità  $I$ ; le cariche si spostano con velocità di deriva  $\vec{v}_d$ . Per ciascuna singola carica il campo magnetico generato è

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \vec{v}_d \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \quad (8.19)$$

Se nel volumetto ci sono  $N$  cariche, si ha una densità di cariche pari a

$$n = \frac{dN}{dV}$$

Se sommiamo - con continuità - rispetto a tutte le cariche nel volumetto, il campo magnetico complessivo sarà dato da

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{e \vec{v}_d \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} dN = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{n e \vec{v}_d \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} dV$$

Ricordando che  $\vec{j} = n e \vec{v}_d$ , allora

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} dV$$

Consideriamo il caso di un filo rettilineo  $\ell$ : un suo volumetto infinitesimo ha spessore costante  $d\Sigma$  e lunghezza  $ds$ . Se poniamo il filo lungo l'asse  $x$  senza perdita di generalità, la densità di corrente è anch'essa parallela all'asse  $x$ , ossia

$$\vec{j} = j\hat{\mathbf{u}}_x$$

Il campo magnetico sarà

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} d\Sigma ds = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\ell} j \Sigma \frac{\hat{\mathbf{u}}_x \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\ell} I \frac{\hat{\mathbf{u}}_x \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} ds$$

Osserviamo che in questo caso  $d\vec{s} = ds\hat{\mathbf{u}}_x$ . Generalizziamo quanto trovato.

**DEFINIZIONE 8.2.1. - SECONDA LEGGE DI LAPLACE.**

La **legge di Biot-Savart**, detta anche **prima legge di Laplace**, afferma che il campo magnetico indotto da una corrente stazionaria  $I$  che percorre un filo descritto dalla curva  $\gamma$  è

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{d\vec{s} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \quad (8.20)$$

dove  $d\vec{s}$  è lo spostamento infinitesimo lungo la curva  $\gamma$ .

**OSSERVAZIONE.** Per sapere il verso di  $\vec{\mathbf{B}}$  si può applicare la regola della vite destra: indicando con il pollice destro il verso della corrente, le dita della mano curvano seguendo le linee di campo del campo magnetico  $\vec{\mathbf{B}}$ .

### 8.2.3 Campo magnetico generato da un filo rettilineo (in)finito

Consideriamo un filo rettilineo di lunghezza  $2a$ , posto lungo l'asse  $z$  in modo che il suo punto medio coincida con l'origine. La parametrizzazione di tale filo è data da

$$\vec{\mathbf{r}}' = (0, 0, z')$$

da cui segue lo spostamento infinitesimo

$$d\vec{s} = dz'\hat{\mathbf{u}}_z$$

Il versore  $\hat{\mathbf{u}}_r$  da un generico punto sul filo verso un punto generico  $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$  è

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \frac{(x, y, z - z')}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}$$

Calcoliamo

$$d\vec{s} \times \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & dz' \\ x & y & z - z' \\ \hat{\mathbf{u}}_x & \hat{\mathbf{u}}_y & \hat{\mathbf{u}}_z \end{vmatrix} = \frac{x\hat{\mathbf{u}}_y - y\hat{\mathbf{u}}_x}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} dz'$$

Il campo magnetico, per la legge di Biot-Savart, sarà

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x\hat{\mathbf{u}}_y - y\hat{\mathbf{u}}_x}{\left(x^2 + y^2 + (z - z')^2\right)^{3/2}} dz' \quad (8.21)$$

Osserviamo però che il problema presentava un'evidente simmetria cilindrica. Passando alle coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ y = R \cos \theta \\ z = z \end{cases}$$

si ha

$$x\hat{\mathbf{u}}_y - y\hat{\mathbf{u}}_x = R(\sin \theta, \cos \theta) = R\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

e noto che  $x^2 + y^2 = R^2$ , riscriviamo

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R\hat{\mathbf{u}}_\theta \int_{-a}^a \frac{dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Per semplicità, consideriamo un punto  $\vec{r}$  con quota prossima a 0 (cioè  $z \rightarrow 0$ ). Allora

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R\hat{\mathbf{u}}_\theta \int_{-a}^a \frac{dz'}{(R^2 + (z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R\hat{\mathbf{u}}_\theta \int_{-a}^a \frac{dz'}{R^3 (1 + (\frac{z'}{R})^2)^{3/2}} \boxed{=} \quad (8.21)$$

Imponendo la sostituzione  $b = \frac{z'}{R}$ , il differenziale risulta  $db = \frac{1}{R} dz'$  e gli estremi diventano  $\pm \frac{a}{R}$ ; quindi

$$\begin{aligned} \boxed{=} & \frac{\mu_0 I}{4\pi} R\hat{\mathbf{u}}_\theta \int_{-a/R}^{a/R} \frac{R db}{R^3 (1 + b^2)^{3/2}} = \\ & = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{\mathbf{u}}_\theta \left. \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} \right|_{-a/R}^{a/R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left. \frac{a/R}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{R^2}}} \right. \hat{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

Se facessimo tendere il valore di  $a$  a  $+\infty$ , e cioè nel caso in cui filo fosse di *lunghezza infinita*, il campo magnetico sarebbe descritta da quella che è la *legge di Biot-Savart per un filo infinito*:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (8.22)$$

Grazie a ciò siamo in grado di derivare per via teorica (e non più soltanto empirica) la legge di Ampère. Prendiamo i nostri due fili paralleli di lunghezza infinita. Il campo generato dal filo 1 in un punto sul secondo filo, posto a distanza  $d$ , è

$$\vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

La forza che agisce sul filo 2 su un tratto  $\gamma_2$  di lunghezza  $L$  è, per la seconda legge di Laplace, data da

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = I_2 \int_{\gamma_2} d\vec{s} \times \vec{\mathbf{B}}_1 = I_2 \left( \int_{\gamma_2} d\vec{s} \right) \times \vec{\mathbf{B}}_1 = I_2 \left( \int_0^L dz \right) \hat{\mathbf{u}}_z \times \vec{\mathbf{B}}_1 = I_2 L \hat{\mathbf{u}}_z \times \vec{\mathbf{B}}_1$$

Da ciò concludiamo che

$$\frac{\vec{\mathbf{F}}_2}{L} = I_2 \hat{\mathbf{u}}_z \times \vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{\mathbf{u}}_z \times \hat{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \hat{\mathbf{u}}_d$$

Per simmetria, lo stesso risultato si ottiene considerando la forza che agisce sul filo 1 con il campo magnetico generato da 2, quindi

$$\frac{\vec{\mathbf{F}}}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \hat{\mathbf{u}}_d \quad (8.23)$$

### 8.2.4 Campo magnetico generato da una spira circolare

Consideriamo un circuito circolare in cui circola corrente. Per la legge di Biot-Savart, è presente un campo magnetico tangenziale a circonference perpendicolari alla corrente e centrate lungo il circuito, il cui verso è dato dalla legge della mano destra. Di conseguenza, ci aspettiamo un campo a simmetria cilindrica come in figura. Geometricamente parlando, la spira di raggio  $R_0$  e posta nel piano  $xy$  è una curva parametrizzabile da un angolo  $\varphi$ :

$$\vec{r}'(\varphi) = (R_0 \cos \varphi, R_0 \sin \varphi, 0)$$

Lo spostamento infinitesimo lungo il circuito è quindi

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{r}'(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = (-R_0 \sin \varphi, R_0 \cos \varphi, 0)$$

Il versore  $\hat{\mathbf{u}}_r$  da un generico punto sul filo verso un punto  $\vec{r} = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$  nello spazio è

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\vec{r} - \vec{r}'(\varphi)}{|\vec{r} - \vec{r}'(\varphi)|} = \frac{(R \cos \theta - R_0 \cos \varphi, R \sin \theta - R_0 \sin \varphi, z)}{\sqrt{R^2 + z^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \varphi)}}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} d\vec{s} \times \hat{\mathbf{u}}_r &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \varphi)}} \begin{vmatrix} -R_0 \sin \varphi & R_0 \cos \varphi & 0 \\ R \cos \theta - R_0 \cos \varphi & R \sin \theta - R_0 \sin \varphi & z \\ \hat{\mathbf{u}}_x & \hat{\mathbf{u}}_y & \hat{\mathbf{u}}_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{z R_0 \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + z R_0 \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y + (R_0^2 - RR_0 \cos(\theta - \varphi)) \hat{\mathbf{u}}_z}{\sqrt{R^2 + z^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \varphi)}} \end{aligned}$$

Il campo di induzione magnetica descritto dalla legge di Biot-Savart è

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{d\vec{s} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\gamma} |\vec{r} - \vec{r}'(\varphi)| = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{z R_0 \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + z R_0 \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y + (R_0^2 - RR_0 \cos(\theta - \varphi)) \hat{\mathbf{u}}_z}{(R^2 + z^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \varphi))^{3/2}} \end{aligned}$$

Operando un cambio di variabile  $\varphi' = \varphi - \theta$ , osserviamo che

$$\begin{aligned} \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y &= \cos(\varphi' + \theta) \hat{\mathbf{u}}_x + \sin(\varphi' + \theta) \hat{\mathbf{u}}_y = \\ &= (\cos \theta \cos \varphi' - \sin \theta \sin \varphi') \hat{\mathbf{u}}_x + (\cos \theta \sin \varphi' + \sin \theta \cos \varphi') \hat{\mathbf{u}}_y = \\ &= \cos \varphi' (\cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_y) + \sin \varphi' (-\sin \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_y) \quad \square \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_R = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = -\sin \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_y \end{cases}$$

si ha

$$\square \cos \varphi' \hat{\mathbf{u}}_R + \sin \varphi' \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Allora il campo si può riscrivere come

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{z R_0 (\cos \varphi' \hat{\mathbf{u}}_R + \sin \varphi' \hat{\mathbf{u}}_\theta) + (R_0^2 - RR_0 \cos \varphi') \hat{\mathbf{u}}_z}{(R^2 + z^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \varphi')^{3/2}}$$

Poniamo per compattezza di scrittura  $A := R^2 + z^2 + R_0^2$ . Spezziamo il campo rispetto alle direzioni dell coordinate cilindriche:

- Rispetto a  $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ :

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{zR_0 \sin \varphi'}{(A - 2RR_0 \cos \varphi')^{3/2}} = 0$$

Questo vale perché l'integrandina è dispari e stiamo integrando su un suo periodo; si può vedere anche più approfonditamente per sostituzione.

- Rispetto a  $\hat{\mathbf{u}}_R$ :

$$B_R = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{zR_0 \varphi'}{(A - 2RR_0 \cos \varphi')^{3/2}} = 0$$

Questo invece è un'integrale ellittico e non è elementarmente integrabile.

- Rispetto a  $\hat{\mathbf{u}}_z$ : segue una situazione analoga a  $\hat{\mathbf{u}}_R$ .

Data l'evidente difficoltà della situazione in cui siamo incappati, vediamo solamente dei casi specifici di ciò.

- **Asse della spira.** In questo caso  $R = 0$ .

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{zR_0 \cos \varphi' \hat{\mathbf{u}}_R + R_0^2 \hat{\mathbf{u}}_z}{(z^2 + R_0^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi (z^2 + R_0^2)^{3/2}} \left[ \hat{\mathbf{u}}_R \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi' zR_0 \cos \varphi'}_{=0} + \hat{\mathbf{u}}_z \int_0^{2\pi} d\varphi' R_0^2 d\varphi' \right] = \\ &= \frac{\mu_0 I R_0^2}{2 (z^2 + R_0^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{u}}_z \end{aligned} \quad (8.24)$$

Il campo magnetico è verticale. In particolare, ha il suo massimo nel centro della spira ( $z = 0$ ), dove è pari a

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I R_0^2}{2 (z^2 + R_0^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (8.25)$$

**OSSERVAZIONE.** Per capire il verso del campo magnetico lungo l'asse della spira vale un'altra versione **legge della vite destra**: curvando le dita della mano lungo la direzione della corrente, il pollice indicherà il verso del campo magnetico.

Ad esempio, se la spira è percorsa in senso antiorario dalla corrente, allora il campo sarà diretto verso l'alto; viceversa se il circuito è percorso in senso orario.

- $R_0 \ll r$ . I casi sono due: o la spira è molto molto piccola, oppure stiamo osservando il campo a debita distanza da essa. In ogni caso la spira è assimilabile ad un *punto*; per questo, passiamo dalle coordinate cilindriche alle coordinate sferiche. Se  $r$  è la distanza dalla spira e  $\theta$  l'angolo polare<sup>3</sup>, allora

$$\begin{cases} R = r \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

<sup>3</sup>Piccola ripetizione (qualcheduno direbbe *abuso*) di notazione: abbiamo già usato  $\theta$  in precedenza per l'angolo azimutale delle cilindriche, ma dato che in precedenza abbiamo fatto una sostituzione con  $\varphi'$  tale angolo non si ripresenta qui.

Possiamo anche esprimere i versori  $\hat{\mathbf{u}}_R$  e  $\hat{\mathbf{u}}_z$  delle coordinate cilindriche in funzione di quelli sferici  $\hat{\mathbf{u}}_\theta$  e  $\hat{\mathbf{u}}_r$  tramite una rotazione di essi (in senso orario) rispetto all'angolo polare:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_R = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_z \\ \hat{\mathbf{u}}_z = -\sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases}$$

Allora, facendo le opportune sostituzioni - e raccogliendo un fattore  $r^2$  - otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{R_0 r \cos \theta \cos \varphi' \hat{\mathbf{u}}_R + (R_0^2 - R_0 r \sin \theta \cos \varphi') \hat{\mathbf{u}}_z}{(r^2 + R_0^2 - 2R_0 r \sin \theta \cos \varphi')^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\frac{R_0}{r} \cos \varphi' \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{R_0^2}{r^2} (\cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{\left(1 - 2\frac{R_0}{r} \sin \theta \cos \varphi' + \frac{R_0^2}{r^2}\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

Poiché  $R_0 \ll r$ , approssimiamo in serie di Taylor rispetto a  $\frac{R_0}{r}$  il denominatore fino all'ordine quadratrico.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{R_0}{r} \cos \varphi' \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{R_0^2}{r} (\cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + 3 \cos^2 \varphi' \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta)}_{=0} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left( 2 \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r - 2 \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + 3 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos^2 \varphi' \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I R_0^2}{4\pi r^3} (2\pi \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r - 2\pi \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + 3\pi \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) = \\ &= \frac{\mu_0 I R_0^2 \pi}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) \end{aligned}$$

Ricordiamo che il momento di dipolo magnetico è

$$\vec{\mathbf{m}} = I\Sigma \hat{\mathbf{u}}_n$$

dove  $\Sigma$  è l'area della spira e  $\hat{\mathbf{u}}_n$  il versore normale ad essa. Nel nostro caso

$$\vec{\mathbf{m}} = IR_0^2 \pi \hat{\mathbf{u}}_z$$

Allora il campo magnetico, a debita distanza, è approssimabile da

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) \quad (8.26)$$

**ESEMPIO.** Sul piano della spira, il campo magnetico lontano dalla spira punta verso il basso.

Si può anche scrivere come

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \hat{\mathbf{u}}_z - \vec{\mathbf{m}}) \quad (8.27)$$

### Confronto con il dipolo elettrico

Dipolo elettrico	Spira circolare
<b>Momento</b>	
$\vec{p} = q\vec{a}$ A grandi distanze non si distingue la <i>distanza</i> dalla <i>carica</i> , ma si può sapere solo il loro <i>prodotto</i> .	$\vec{m} = I\Sigma\hat{\mathbf{u}}_n$ A grandi distanze non si distingue la <i>superficie</i> dall' <i>intensità di corrente</i> , ma si può sapere solo il loro <i>prodotto</i> .
<b>Campo generato</b>	
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \hat{\mathbf{u}}_z - \vec{p})$ Decade di un fattore $1/r^3$ .	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \hat{\mathbf{u}}_z - \vec{m})$ Decade di un fattore $1/r^3$ .
<b>Momento subito torcente</b>	
$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
<b>Energia potenziale</b>	
$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
<b>Posso separare le "cariche"?</b>	
Sì.	No.

**OSSERVAZIONE.** Ci potrebbe capitare di dover studiare un campo elettrico senza sapere di preciso *cosa* lo ha generato - se fosse una carica singola, oppure un dipolo, o un tripolo... Per capire meglio, si può sviluppare in serie di Taylor rispetto a  $\frac{1}{r}$  il campo elettrico, in modo da ottenere una scrittura del genere

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots + o\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

A grandi distanze ( $r \rightarrow +\infty$ ), prevale sempre il *campo di monopolio* - che altro non è che quello di Coulomb. Tuttavia, se *non* abbiamo una carica - ad esempio nel caso del dipolo in cui le cariche si compensano tra di loro - allora prevale il secondo termine, il *campo di dipolo*; se non abbiamo neanche un momento di dipolo prevarrà *quello di tripolo* e così via.

Si può fare una cosa analoga nel caso del campo magnetico. La differenza sostanziale, tuttavia, è che per quanto abbiamo visto *non c'è* il termine di monopolio perché non esiste la carica magnetica.

#### 8.2.5 Solenoide

##### DEFINIZIONE 8.2.2. - SOLENOIDE.

Un **solenoido** è una bobina elicoidale di filo, la cui lunghezza è nettamente maggiore del suo diametro.

Di solito, i solenoidi che andremo a studiare si possono considerare come una *serie di spire circolari* molto, molto vicine tra di loro ma realizzate tutte con un unico filo di materiale conduttore.

In sezione, la corrente percorre il solenoide come in figura: Nel caso qui raffigurato la corrente gira in senso antiorario. Per la regola della mano destra il campo prodotto da ciascuna spira del solenoide lungo l'asse è ortogonale e diretto verso l'alto; ci aspettiamo una sovrapposizione di tutti i campi vettoriali, intensificando il campo magnetico *interno*

complessivo.

Il campo magnetico generato da una spira a quota  $z_i$  in un punto lungo l'asse verticale a quota  $z$  è, in modulo,

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 I R_0^2}{2 \left( R_0^2 + (z - z_i)^2 \right)^{3/2}} \hat{u}_z$$

Il campo magnetico di un solenoide con  $N$  spire è quindi

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i$$

In molti casi, però, il numero di spire è talmente elevato che è molto più maneggevole passare al *continuo*. Introducendo una densità *lineare*  $n$  di spire, ossia il numero di spire per unità di lunghezza, su un solenoide di lunghezza  $2a$  si hanno

$$N = \int_{-a}^a n dz$$

spire. Il campo magnetico infinitesimo ad altezza  $z'$  si ottiene tenendo conto di quante spire ci sono nell'elemento di lunghezza  $dz'$ , ossia moltiplicando per la densità  $n$  il campo magnetico infinitesimo che si avrebbe con una sola spira:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I R_0^2 n}{2 \left( R_0^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} \hat{u}_z dz'$$

Il campo magnetico complessivo si ottiene integrando lungo la lunghezza del solenoide. Supponendo che la densità di spire sia costante,

$$B = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 I R_0^2 n}{2 \left( R_0^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} \hat{u}_z dz' = \frac{\mu_0 I n}{2 R_0} \int_{-a}^a \frac{dz'}{\left( 1 + \frac{(z-z')^2}{R_0^2} \right)^{3/2}} \quad \boxed{=} \quad (8.27)$$

Operando il campo di variabile  $\eta = \frac{z' - z}{R_0}$ , il differenziale diventa  $d\eta = \frac{dz'}{R_0}$  mentre gli estremi di integrazione sono  $\frac{\pm a - z}{R_0}$ . Allora

$$\begin{aligned} & \boxed{=} \frac{\mu_0 I n}{2 R_0} \int_{\frac{-a-z}{R_0}}^{\frac{a-z}{R_0}} \frac{\eta}{(1\eta^2)^{3/2}} d\eta = \frac{\mu_0 I n}{2} \left. \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \right|_{\frac{-a-z}{R_0}}^{\frac{a-z}{R_0}} = \\ & = \frac{\mu_0 I n}{2} \left( \frac{\frac{a-z}{R_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{a-z}{R_0}\right)^2}} - \frac{\frac{a+z}{R_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{a+z}{R_0}\right)^2}} \right) = \frac{\mu_0 I n}{2} \left( \frac{a-z}{\sqrt{R_0^2+(a-z)^2}} + \frac{a+z}{\sqrt{R_0^2+(a+z)^2}} \right) \end{aligned}$$

■ **In mezzo al solenoide ( $z = 0$ ):**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I n a}{\sqrt{R_0^2 + a^2}} \hat{u}_z \quad (8.28)$$

- **Ad un estremo del solenoide ( $z = \pm a$ ):**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I n a}{\sqrt{R_0^2 + 4a^2}} \hat{u}_z \quad (8.29)$$

- **Solenoide infinito ( $a \rightarrow +\infty$ ):** il campo magnetico è omogeneo all'interno, pari a

$$\vec{B} = \mu_0 I n \hat{u}_z \quad (8.30)$$

e nullo all'esterno.

**Osservazione.** Un solenoide infinito - nella pratica, un solenoide molto lungo - è un modo concreto per produrre un campo magnetico uniforme, costante e diretto verso l'alto.

CAPITOLO **9**

# LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO, LA LEGGE DI AMPÈRE E LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEL CASO STATICO

---

*“La matematica confronta i più disparati fenomeni e scopre le analogie segrete che li uniscono.”*

*JOSEPH FOURIER, cercando disperatamente di motivare ai suoi genitori la scelta di studiare matematica.*

## S<sup>I</sup>

### 9.1 LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO E LEGGE DI AMPÈRE

Per concludere la trattazione della magnetostatica ci rimane da descrivere la *circuitazione* del campo magnetico.

#### 9.1.1 Il caso con un filo infinito

Per capire meglio come si calcola, partiamo da un caso particolare: consideriamo un filo infinito percorso da corrente  $I$  e una curva  $\gamma$  che gira attorno al filo. Tale curva è parametrizzabile in coordinate cilindriche da

$$\vec{r}'(\varphi) = (R(\varphi) \cos \varphi, R(\varphi) \sin \varphi, z(\varphi))$$

con spostamento infinitesimo lungo la curva pari a

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \frac{d\vec{r}'(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \\ &= [(R'(\varphi) \cos \varphi - R(\varphi) \sin \varphi) \hat{\mathbf{u}}_x + (R'(\varphi) \sin \varphi + R(\varphi) \cos \varphi) \hat{\mathbf{u}}_y + z'(\varphi) \hat{\mathbf{u}}_z] d\varphi = \end{aligned}$$

$$= (R'(\varphi)\hat{\mathbf{u}}_R + R(\varphi)\hat{\mathbf{u}}_\theta + z'(\varphi)\hat{\mathbf{u}}_z) d\varphi$$

Per la legge di Biot-Savart, in un punto a distanza  $R(\varphi)$  dal filo il campo magnetico è

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R(\varphi)} \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Osserviamo che nel prodotto scalare  $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s}$  si ha

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}_R = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}_z = 0 \end{cases}$$

La circuitazione del campo magnetico, in questo caso, è

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{B}}) &= \int_\gamma \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu I \\ \Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{B}}) &= \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \end{aligned} \quad (9.1)$$

### 9.1.2 Il caso con due fili infiniti

Supponiamo ora di avere, all'interno della stessa curva di prima, due fili rettilinei infiniti invece che uno. Per descrivere la circuitazione in questo caso introduciamo un segmento immaginario orientato  $\eta$  tra i due fili che collega due punti del circuito, in modo da dividere la curva  $\gamma$  in due sotto-curve  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Allora, possiamo definire due curve chiuse

$$\gamma_1 = \xi_1 \cup (-\eta) \qquad \qquad \qquad \gamma_2 = \xi_2 \cup \eta$$

dove  $-\eta$  è il segmento  $\eta$  percorso nel verso opposto. Si osservi che

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 = \xi_1 \cup (-\eta) \cup \xi_2 \cup \eta = \xi_1 \cup \xi_2 = \gamma$$

dato che i segmenti orientati si elidono a vicenda. Allora, dato nell'interno dell'area delimitata dalle curve  $\gamma_i$  passa un solo filo, vale il caso precedente e quindi

$$\Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{B}}) = \Gamma_{\gamma_1}(\vec{\mathbf{B}}) + \Gamma_{\gamma_2}(\vec{\mathbf{B}}) = \mu_0 I_1 + \mu_0 I_2 \quad (9.2)$$

dove  $I_j$  sono presi con segno: se si fissa un segno di percorrenza, il verso di percorrenza ha segno opposto - ad esempio, se la corrente è antioraria il segno è positivo, negativo se oraria.

### 9.1.3 Il caso generale: legge (della circuitazione) di Ampère

#### TEOREMA 9.1.1. - LEGGE (DELLA CIRCUITAZIONE) DI AMPÈRE.

Dato un campo magnetico  $\vec{\mathbf{B}}$  generato da una corrente  $I$ , la circuitazione del  $\vec{\mathbf{B}}$  lungo una curva chiusa  $\gamma$  è proporzionale alla porzione di corrente  $I_{int}$  che attraversa una qualunque superficie  $\Sigma$  con bordo la curva (cioè tale per cui  $\gamma = \partial\Sigma$ ).

- **Forma integrale:**

$$\Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{B}}) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \mu_0 I_{int} \quad (9.3)$$

■ **Forma differenziale:**

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (9.4)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Deriviamo la forma differenziale. Per il teorema del rotore vale

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \Phi_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Ma allora, valendo l'uguaglianza

$$\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \mu_0 \int_\Sigma \vec{j} \cdot \hat{u}_n$$

per una qualunque superficie  $\Sigma$  arbitraria, si ha l'identità delle integrande:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

□

Questa non è altro che l'ultima *equazione di Maxwell* (su quattro) che ci mancava per i fenomeni elettromagnetici non dipendenti dal tempo, sebbene nella meno elegante forma integrale. Si osservi che la legge appena trovata è valida soltanto se la corrente è *stazionaria*, ossia se è *costante* nel tempo.

Per capire perché, ricordiamo che la *divergenza di un rotore* è sempre nulla:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

Se la nostra legge fosse corretta, si avrebbe

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso dell'*equazione di continuità*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Di conseguenza, si avrebbe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ma ciò è vero soltanto per una corrente stazionaria!

Da ciò capiamo la legge di Ampère per la circuitazione *non è sempre corretta* nella forma di cui sopra; sarà necessario integrarla con un altro termine che tiene conto della *variazione temporale* della corrente - ma questa è una storia per un altro capitolo.

★ **Tra astratto e concreto: teoria dei nodi nella legge di Ampère** Ci sono aspetti della Matematica che per un fisico risultano spesso astrusi, *astratti* e lontani dalla realtà; eppure, in alcuni casi il passo tra il mondo concreto e la Matematica teorica è più *breve* di quel che sembra. Possiamo vedere un esempio di ciò nella *dimostrazione della legge di Ampère* nella sua forma generale.

Vogliamo calcolare la circuitazione del campo magnetico  $\vec{B}$  generato da un circuito chiuso qualunque  $\gamma_2$

$$\Gamma_{\gamma_1}(\vec{B}) = \oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Parametrizziamo le due curve  $\gamma_i$  con angoli  $\varphi_i$ :

$$\gamma_1: \vec{r}_1 = \vec{r}_1(\varphi_1) \quad \gamma_2: \vec{r}_2 = \vec{r}_2(\varphi_2)$$

Lo spostamento infinitesimo lungo la curva  $\gamma_i$  è

$$d\vec{s}_i = \frac{d\vec{r}_i(\varphi_i)}{d\varphi_i} d\varphi_i$$

Per la prima legge di Laplace il campo generato dal circuito  $\gamma_2$  è

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma_2} d\vec{s}_2 \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_2(\varphi_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2(\varphi_2)|^3}$$

La circuitazione  $\vec{B}$  lungo la curva  $\gamma_2$  si calcola tenendo conto che  $\vec{B}$  deve essere valutato sull'altra curva, ossia prendendo  $B(r(\varphi_1))$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma_1}(\vec{B}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \left( d\vec{s}_2 \times \frac{\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)}{|\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)|^3} \right) \cdot d\vec{s}_1 = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)}{|\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)|^3} \cdot (d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2) \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la proprietà del prodotto misto

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

La cosa peculiare è il doppio integrale curvilineo che abbiamo trovato, diviso per  $4\pi$ , è pari al **linking number di Gauss** (in italiano *numero di concatenamento*), un *invariante numerico* rilevante con teoria dei nodi.

Matematicamente parlando, una curva chiusa nello spazio tridimensionale è quello che definiamo come **nodo**.

#### DEFINIZIONE 9.1.1. - NODO.

Un **nodo** è un'inclusione topologica  $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  della circonferenza  $S^1$  in  $\mathbb{R}^3$ , cioè se  $f : S^1 \longrightarrow f(S^1)$  è un omeomorfismo.

I nodi possono essere proiettati su un piano  $\mathbb{R}^2$ ; tale proiezione è quasi sempre **regolare**, ossia che è iniettiva sempre tolto al più un numero finito di incroci, proiezione di soli due punti del nodo.

#### DEFINIZIONE 9.1.2. - MAPPA DI GAUSS.

Dati due nodi differenziabili  $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , la **mappa di Gauss** è la funzione

$$\begin{aligned} G(\varphi_1, \varphi_2) : S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^2 \\ (\varphi_1, \varphi_2) &\longmapsto \frac{\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)}{|\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)|} \end{aligned} \tag{9.5}$$

Dato che la mappa non è biunivoca, la mappa può ricoprire la sfera più volte.

**DEFINIZIONE 9.1.3. - LINKING NUMBER DI GAUSS.**

Il **linking number di Gauss** è un numero intero che conta quante volte due nodi si avvolgono tra di loro - senza intersecarsi direttamente. Il segno di tale numero dipende dall'orientazione scelta delle due curve.

Formalmente, esso corrisponde a quante volte con segno l'immagine di  $G$  ricopre la sfera  $S^2$ :

$$\text{lk}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)}{|\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)|^3} \cdot (d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2) \quad (9.6)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{S^1 \times S^1} \frac{\det(\dot{\vec{r}}_1(\varphi_1), \dot{\vec{r}}_2(\varphi_2), \vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2))}{|\vec{r}_1(\varphi_1) - \vec{r}_2(\varphi_2)|} d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (9.7)$$

Il doppio integrale curvilineo qui scritto è l'area totale con segno dell'immagine di  $G$ , che va diviso per l'area della sfera unitaria.

**ESEMPIO.**

- $\text{lk}(\gamma_1, \gamma_2) = \pm 1$
- $\text{lk}(\gamma_1, \gamma_2) = \pm 2$

La circuitazione del campo magnetico lungo una curva si può quindi scrivere in funzione del linking number della curva lungo cui si calcola e del circuito che genera il campo:

$$\Gamma_{\gamma_1}(\vec{B}) = \mu_0 I \text{ lk}(\gamma_1, \gamma_2)$$

A seconda di quante volte il circuito e la curva si avvolgono, la corrente interna alla curva  $I_{int}$  non è necessariamente  $I$ : essa può essere pari a multipli interi (con segno) della corrente  $I$ . Tale valore, per l'appunto, lo otteniamo con il linking number, ottenendo così la legge di Ampére nel caso generale.

**Applicazioni della legge di Ampère** Adesso useremo la legge di Ampére per ricavare il campo magnetico, in modo analogo a come si può ricavare in casi di particolari simmetrie il campo elettrico con la legge di Gauss.

**ESEMPIO - LEGGE DI BIOT-SAVART PER UN FILO RETTILINEO INFINTO.**

Consideriamo un filo rettilineo infinito. Per simmetria il campo magnetico è dipendente solo dalla distanza assiale dal filo  $d$  è diretto lungo  $\hat{u}_\theta$ , tangenziale a delle circonference centrate lungo il filo. Poste le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

si ha

$$\vec{B} = B(R) \hat{u}_\theta$$

Poniamoci lungo una curva immaginaria su cui  $\vec{B}$  è costante, ad esempio una circonferenza  $\gamma$  di raggio  $R$  centrata nel filo. In questo caso lo spostamento infinitesimo lungo tale curva è

$$d\vec{s} = R \hat{u}_\theta d\theta$$

Allora, usando la legge di Ampère, si ha

$$\mu_0 I = \Gamma_\gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B(R) R \hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_\theta d\theta = B(R) R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R B(R)$$

da cui

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (9.8)$$

#### ESEMPIO - SOLENOIDE INFINITO.

Consideriamo un solenoide di lunghezza infinita, posto lungo l'asse verticale  $z$ . Per calcolare il campo magnetico all'interno (all'esterno è nullo), prendiamo una curva  $\gamma = \overrightarrow{ABCD}$  rettangolare e calcolo la circuitazione lungo essa. Tale curva è costituita da quattro tratti:

- $\overrightarrow{AB}$  è un segmento verticale *interno* al solenoide, diretto verso l'alto.
- $\overrightarrow{BC}$  è un segmento orizzontale, intersecante il solenoide e diretto verso l'esterno.
- $\overrightarrow{CD}$  è un segmento verticale *esterno* al solenoide, diretto verso il basso.
- $\overrightarrow{DA}$  è un segmento orizzontale, intersecante il solenoide e diretto verso l'interno.

La circuitazione lungo la curva  $\gamma$  sarà

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma(\vec{B}) &= \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \left( \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \right) \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = \\ &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{z_1}^{z_2} B(R) dz = B(R)(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

dove  $z_1$  è la quota di  $A$  e  $z_2$  quella di  $B$ . Infatti, tutti gli altri contributi sono nulli:

- I contributi della circuitazione lungo  $\overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{DA}$  sono nulli perché perpendicolari al campo.
- Il contributo della circuitazione lungo  $\overrightarrow{CD}$  è nullo perché all'esterno del solenoide non c'è campo.

Per la legge di Ampère

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_\gamma$$

dove  $I_\gamma$  è corrente che attraversa la curva  $\gamma$ , che dipende dal numero di spire  $N$  contenute all'interno di  $\gamma$ :

$$N = \int_{z_1}^{z_2} n dz = n(z_2 - z_1)$$

dove  $n$  è la densità lineare di spire, che supponiamo costante. Allora

$$I_\gamma = NI = n(z_2 - z_1)I$$

dove  $I$  è la corrente in una singola spira. Concludiamo che

$$B(R)(z_2 - z_1) = \Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_\gamma = n(z_2 - z_1)I$$

$$B(R) = \mu_0 n I \quad (9.9)$$

Come già osservato il campo del solenoide non dipende dalla distanza assiale, ma è uniforme in *tutto* il solenoide.

## 9.2 EQUAZIONI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA E LA MAGNETOSTATICA

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{E}) = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Legge di Gauss per il magnetismo	$\Phi_{\partial V}(\vec{B}) = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge dell'induzione di Faraday	$\Gamma_{\partial \Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
Legge della circuitazione di Ampère	$\Gamma_{\partial \Sigma}(\vec{B}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n = \mu_0 I_{int}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

**OSSERVAZIONE.** Sebbene le *leggi di Gauss* per l'*elettricità* e per il *magnetismo* siano valide anche se i campi elettrici e magnetici sono variabili nel tempo, lo stesso non si può dire per le *leggi di Faraday* e di *Ampère*: dovremo aggiungere a ciascuna un opportuno termine *dipendente dal tempo*.

Una conseguenza di ciò che esploreremo meglio successivamente è che il campo elettrico dipendente dal tempo *non* è più conservativo; il campo magnetico, invece, resta sempre solenoidale.

### 9.2.1 Invarianza di gauge nell'elettromagnetostatica

Nel Capitolo 3, sezione 3.6, abbiamo parlato delle equazioni di Poisson e di Laplace:

- **Equazione di Poisson** (caso non omogeneo,  $\rho \neq 0$ ):

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.10)$$

- **Equazione di Laplace** (caso omogeneo,  $\rho = 0$ ):

$$\nabla^2 V = 0 \quad (9.11)$$

Qui  $V$  è il *potenziale scalare* del campo elettrostatico  $\vec{E}$  tale per cui  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , mentre  $\rho$  è la densità di carica.

Un'equazione differenziale simile si può scrivere per il campo magnetico. Siccome la divergenza del campo magnetico è nulla per la legge di Gauss, allora esiste un potenziale vettore  $\vec{A}$  tale che  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Sostituendo questa equazione nella *legge di Ampère* otteniamo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

che, sviluppando, risulta

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Ci è oramai ben noto che il potenziale scalare  $V$  è sempre definito a *meno di costante*. Infatti, quello che conta - anche dal punto di vista fisico - è la *differenza di potenziale*. In termini

più rigorosi, quando parliamo del potenziale quello che stiamo facendo è prendere un opportuno *rappresentante* dalla classe di equivalenza  $[V]$ , ottenuta dalla relazione

$$V \sim V + a \quad \text{dove } a \in \mathbb{R}$$

Nel caso del vettore potenziale si verifica una situazione analoga. Data una *funzione scalare*  $\phi$ ,  $\vec{A}$  è definito *a meno di gradiente*. In termini di classi di equivalenza,  $\vec{A}$  è il rappresentante della classe  $[\vec{A}]$  data dalla relazione

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \quad \text{dove } \phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Infatti, si vede che il campo magnetico resta invariato:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

In particolare ciò succede perché il rotore del gradiente è nullo.

In sostanza, abbiamo descritto un caso di **invarianza di gauge**.

#### DEFINIZIONE 9.2.1. - INVARIANZA DI GAUGE.

Consideriamo una configurazione elettromagnetica  $(\vec{E}, \vec{B})$  e supponiamo che essa sia descritta dai campi potenziali  $(V, \vec{A})$ . Allora esiste una trasformazione arbitraria  $\Lambda =$ , detta **trasformazione (locale) di gauge**, tale da ottenere una *nuova* coppia di campi potenziali  $(V', \vec{A}')$ ...

$$V \xrightarrow{\Lambda} V' = V + c$$

$$\vec{A} \xrightarrow{\Lambda} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$$

... che descrive la *stessa* configurazione  $(\vec{E}', \vec{B}') = (\vec{E}, \vec{B})$ . i campi elettrici e magnetici sono *invarianti di Gauge*.

Questo distingue profondamente ciò che è effettivamente osservabile da ciò che non lo è, almeno direttamente. I campi elettrici e magnetici sono *osservabili* direttamente e hanno un particolare valore. I campi *potenziali* elettrici e magnetici sono meglio descrivibili come *classi di equivalenza*; dato che non possiamo parlare di un rappresentante preferito, a priori non è possibile osservarli direttamente senza fare una scelta particolare del rappresentante. Tale scelta è detta **scelta di gauge**

**INTUITIVAMENTE...** Guardando un asta perfettamente cilindrica è possibile dire se è attorcigliata o no? A priori no: ciascuna sezione ortogonale del cilindro è uguale - o per meglio dire *invariante* - rispetto ad ogni potenziale simmetria circolare del cilindro. Tuttavia, se lungo l'asta disegnassimo una linea dritta, allora potremmo determinare se il cilindro è contorto o no, dato che basta guardare com'è la linea.

In modo analogo, l'asta corrisponde al campo elettromagnetico e lo status di "essere attorcigliata" ai campo potenziali: la linea dritta corrisponde ad una scelta di gauge, dato che le sezioni ortogonali non sono invarianti per le simmetrie circolari.

Fare una scelta certamente rovina l'invarianza di gauge, ma ci permette spesso di ricondurci ad una situazione molto più facile da studiare.

Ad esempio, supponiamo di avere un campo potenziale magnetico  $\vec{A}$  tale per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$ . Possiamo effettuare una *scelta di gauge* imponendo che la trasformazione descritta dal campo scalare  $\phi$ , ossia

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi,$$

sia tale per cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ . Questa condizione si scrive come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0 \implies \nabla^2\phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

In questo modo  $\phi$  sarà determinato da un'equazione differenziale del secondo ordine.

Preso allora  $\vec{A}$  con la scelta di gauge qui sopra, dato che  $\vec{\nabla} \cdot A = 0$  si ha  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot A) = 0$ , da cui segue

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j} \implies \nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Previa una scelta di gauge opportuna, l'intera elettromagnetostatica può essere descritta da quattro equazioni di Laplace - una con il potenziale scalare per l'elettrostatica, e tre con il potenziale vettoriale per la magnetostatica.

$$\nabla^2 A_x = \mu_0 j_x \quad (9.12)$$

$$\nabla^2 A_y = \mu_0 j_y \quad (9.13)$$

$$\nabla^2 A_z = \mu_0 j_z \quad (9.14)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.15)$$

La soluzione più generale di queste equazioni differenziali, date le *condizioni al contorno* di natura fisica

$$V, \vec{A} \xrightarrow[\vec{r} \rightarrow \infty]{} 0$$

è data da

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (9.16)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (9.17)$$

dove  $dV' = dx'dy'dz'$ . Noti dunque  $\rho$  e  $\vec{j}$  siamo in grado descrivere completamente una configurazione (statica) di natura elettromagnetica - modulo saper calcolare l'integrale, che non è per nulla scontato.

#### ESEMPIO - SFERA CARICA UNIFORMEMENTE.

Ricalcoliamo<sup>a</sup> il campo elettrico interno ed esterno ad una sfera di raggio  $r_0$  carica uniformemente con densità di carica

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} = \rho \xi_{[0, r_0]}$$

Prese le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

L'elemento di volume risulta

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

mentre la differenza di coordinate tra un punto generico  $\vec{r}$  e il vettore posizione d'integrazione  $\vec{r}'$  è

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'}$$

Il dominio di integrazione della variabile  $r$  sarebbe definito fra 0 e  $+\infty$ , ma siccome  $\rho$  è *non* nullo solo all'interno della sfera ci limitiamo, come indicato dalla funzione indicatrice  $\xi_{[0,r_0]}$ , tra 0 e  $r_0$ . Inoltre, supponendo  $\rho$  si può portar fuori dall'integrale ottenendo

$$V(r) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{(r')^2 \sin \theta'}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'}} \boxed{=}$$

Operiamo il cambio di variabile  $u = \cos \theta'$ : il differenziale diventa  $du = -\sin \theta' d\theta'$  e gli estremi di integrazione rispetto a  $u$  sono  $\pm 1$ .

$$\begin{aligned} & \boxed{=} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} dr' \int_{-1}^1 du \frac{-(r')^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'u}} = \\ & = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} dr' \left. \frac{-(r')^2}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'u} \right|_{-1}^1 = \\ & = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^{r_0} dr' \left. -r' \left( \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + (r')^2 + 2rr'} \right) \right. = \\ & = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^{r_0} dr' r' \left. \left( \sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right) \right. = \\ & = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^{r_0} dr' r' (|r+r'| - |r-r'|) = \\ & = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^{r_0} dr' r' (r+r'+|r-r'|) \end{aligned}$$

Adesso distinguiamo il caso *esterno* ed *interno* alla sfera.

- **Fuori dalla sfera** ( $r > r_0$ ). Dato che  $0 < r' < r_0$  per gli estremi di integrazione, consideriamo  $r > r'$ ; segue che  $|r-r'| = r-r'$  e dunque

$$V(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^{r_0} \cancel{2}(r')^2 dr' = \frac{\rho r_0^3}{3\epsilon_0 r} \boxed{=}$$

Siccome  $\rho$  è la densità di carica della sfera, cioè

$$\rho = \frac{q}{V_S} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

dove  $q$  è la carica distribuita sul volume della sfera  $V_S$ , sostituendo troviamo il solito potenziale di Coulomb:

$$\boxed{= \frac{\frac{qr_0^3}{\cancel{4}\cancel{\pi}r_0^3r}}{\cancel{\frac{4}{3}\cancel{\pi}r_0^3r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

$$V(r) = \frac{\rho r_0^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.18)$$

Il campo elettrico associato è

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \quad (9.19)$$

- **Dentro la sfera** ( $r < r_0$ ). Dobbiamo spezzare l'integrale in due a seconda del segno del modulo: in  $[0, r]$  e in  $[r, r_0]$ .

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( \int_0^r dr' (2r')^2 + \int_r^{r_0} dr' 2rr' \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( \frac{2}{3} r^3 + r(r_0^2 - r^2) \right) \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r_0^2 - \frac{r^2}{3} \right) \\ V(r) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r_0^2 - \frac{r^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (9.20)$$

Il campo elettrico associato è

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r \quad (9.21)$$

Notiamo che il potenziale è continuo per  $r = r_0$  ed è continua anche la sua derivata prima; graficamente non ci sono cuspidi.

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r_0^2 - \frac{r^2}{3} \right) & r < r_0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > r_0 \end{cases}$$

Invece, il campo elettrico è continuo, ma la derivata prima no: infatti, esso è lineare fino ad  $R$  e poi decade come  $1/r^2$ .

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & r < r_0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > r_0 \end{cases}$$

---

<sup>a</sup>Avevamo calcolato il potenziale eletrostatico in presenza di simmetria radiale direttamente a partire dalle equazioni di Poisson e Laplace nella sezione 3.6, pag. 55, Capitolo 3; per ottenerne nello specifico il caso della sfera carica avevamo imposto le condizioni al contorno solo successivamente. Il procedimento qui scelto risulta utilizzando invece la soluzione scritta poc'anzi - ma di fatto l'origine è anch'essa dalle equazioni di Laplace e Poisson



# CAPITOLO 10

## CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO E LE EQUAZIONI DI MAXWELL

---

*"Sono un esperto di Elettricità. Mio padre ha occupato la cattedra di Elettricità Applicata nella prigione di stato."*

*W.C. FIELDS, perito (R.I.P.) elettrotecnico e famoso esperto nel campo.*

**N**EL capitolo precedente abbiamo finalmente raggiunto un primo, grande risultato: abbiamo enunciato le quattro *equazioni di Maxwell*, le leggi fondamentali che descrivono i fenomeni elettrici e magnetici statici - ossia *costanti nel tempo*:

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array}$$

Possiamo suddividere le equazioni in due coppie: due di queste leggi riguardano il campo elettrico  $\vec{E}$ , mentre le altre due il campo magnetico di induzione  $\vec{B}$ . All'apparenza queste due coppie sono completamente separate e potrebbero essere risolte senza che una soluzione influenzi l'altra.

Tuttavia, già in questa situazione statica non sono completamente indipendenti: le cariche elettriche (nelle equazioni di Maxwell rappresentate dalla densità di carica  $\rho$ ) sono le sorgenti di  $\vec{E}$ , ma quando sono in movimento danno luogo ad una densità di corrente e quindi diventano *anche* sorgente di  $\vec{B}$ ... ma essere o meno in moto è un fatto *relativo* che dipende dal sistema di riferimento! Un campo elettrico per un sistema di riferimento può apparire come campo magnetico in un altro sistema (o viceversa). È intuitivo che  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  devono essere la manifestazione di un unico ente fisico, il *campo elettromagnetico*. Oltre modo, non possiamo escludere che tale ente dipenda anche dal tempo.

Inizieremo a raccogliere prove di questa nostra intuizione studiando i fenomeni elettrici e magnetici *non stazionari*. In questo capitolo partiremo da osservazioni sperimentali per

formulare la **legge di induzione di Faraday** e le sue applicazioni - autoflusso, **induttanza**, induttori e **circuiti RL**. Successivamente, parleremo delle correzioni da apporre alla **legge della circuitazione di Ampère** e la loro interpretazione fisica come **corrente di spostamento**, concludendo finalmente il principale obiettivo intrapreso all'inizio di questo testo: formulare le **equazioni di Maxwell nel vuoto**.

### 10.1 LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ

Le osservazioni sperimentali sul fenomeno dell'induzione elettromagnetica di **Michael Faraday** (1791-1867) in Inghilterra e, separatamente, di **Joseph Henry** (1807 - 1915) in America misero in evidenza che un campo magnetico *variabile nel tempo* genera un campo elettrico *non conservativo*. Rivediamo assieme alcuni di questi esperimenti.

- **Esempio #1.** Consideriamo una spira collegata ad un circuito - che *non* presenta alcun generatore - dotato di un *amperometro*, cioè di un *misuratore di corrente*. Avvicinando un magnete all'interno della spira si *produce* una corrente elettrica. Se *allontaniamo* lo stesso magnete alla stessa velocità con cui l'abbiamo avvinato, notiamo ch la corrente che circola ha *cambiato verso di percorrenza*.
- **Esempio #2.** Consideriamo una spira a cui colleghiamo un generatore di f.e.m. In quanto percorsa da corrente, la spira produce un campo magnetico. Se avviciniamo tale apparato ad un'altra spira scarica e collegata ad un amperometro, lo strumento della seconda spira inizia a misurare una corrente. Se la allontaniamo, la corrente nella seconda spira girerà in senso opposto.
- **Esempio #3 (esperimento di Faraday).** Consideriamo un solenoide con al suo interno un'anima di ferro - un cilindretto metallico; il solenoide è collegato ad un circuito dotato di interruttore e generatore di f.e.m. Quando l'interruttore è aperto non circola corrente e dunque non si ha alcun campo.

Poniamo ora la solita spira scarica collegata ad un amperometro. Alla chiusura dell'interruttore il solenoide, essendo percorso da corrente, genera un campo magnetico crescente fino a stabilizzarsi. Al contempo, nella spira inizialmente scarica lo strumento segna per qualche istante un passaggio di corrente in una certa direzione, per poi sparire. Appena riapriamo il campo magnetico l'interruttore osserviamo una corrente. Quando il campo magnetico si stabilizza e non varia più nel tempo allora non osserviamo più corrente.

Riaprendo l'interruttore il campo magnetico gradualmente sparisce; nella spira, invece, per un istante osserviamo una corrente diretta nella direzione opposta a quella precedente.

Da questi esperimenti<sup>1</sup> possiamo ricavare diverse informazioni importanti:

- a) *Spostare una sorgente* di un campo magnetico nei pressi di una spira genera una f.e.m.
- b) Il moto della sorgente rispetto alla spira influenza il *verso di percorrenza* della corrente lungo di essa.
- c) *Spostare una spira* nei pressi di un campo magnetico stazionario genera una f.e.m. in quel circuito.
- d) *Deformare una spira* nei pressi di un campo magnetico stazionario genera una f.e.m. in quel circuito.
- e) Come viene mossa o deformata la spira influenza il *verso di percorrenza* della corrente lungo di essa.

---

<sup>1</sup>E tante altre varianti di essi che non vedremo perché questo è un Manualozzo™ di Fisica, non un testo monografico su Faraday e i suoi passatempi perversi.

- f) È sufficiente che ci sia una *variazione temporale di un campo magnetico* fisso per causare una f.e.m. in una spira anch'essa fissa.
- g) Come varia temporalmente il campo magnetico fisso influenza il verso di percorrenza della corrente lungo di essa.
- h) Se il campo magnetico non varia più nel tempo - perché si è stabilizzato oppure perché non c'è più la sorgente del campo - non circola più corrente nella spira.

La forza elettromotrice dipende dunque da diversi fattori: la *posizione* e l'*intensità* del campo magnetico, la *posizione* e la *forma della spira*, ma soprattutto la *variazione nel tempo* di tutti questi elementi qui citati. Il concetto matematico che permette di descrivere contemporaneamente un campo vettoriale e come si relaziona con una superficie è quello del *flusso*; per tenere conto degli effetti temporali si deduce che la forza elettromotrice deve dipendere dalla *derivata temporale* dal flusso del  $\vec{B}$ . Abbiamo descritto quella che è nota come **legge di Faraday**.

**TEOREMA 10.1.1. - LEGGE DELL'INDUZIONE DI FARADAY O LEGGE DI FARADAY-NEUMANN LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ.**

Dato un campo magnetico  $\vec{B}$  e un circuito chiuso  $\gamma$ , dove  $\gamma$  è il bordo di una superficie  $\Sigma$  arbitraria, la **forza elettromotrice indotta** da  $\vec{B}$  in  $\gamma$  è pari a

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt} \quad (10.1)$$

Grazie alla *legge di Ohm* è immediato ricavare la corrente elettrica prodotta dalla f.e.m. indotta per un circuito con resistenza  $R$ :

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt} \quad (10.2)$$

**OSSERVAZIONE.** Nel Capitolo 5, sezione 5.4, abbiamo descritto come la forza elettromotrice è prodotta da un campo elettrico *non conservativo*. Nel caso particolare dell'*induzione magnetica*, il campo magnetico *causa* lungo circuito un campo elettromotore indotto  $\vec{E}_i$ , non necessariamente localizzato in alcun tratto specifico; l'espressione della forza elettromotrice sarà dunque

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$$

È immediato poter riscrivere la legge di Faraday come

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt} \quad (10.3)$$

**Legge di Lenz** Nella legge di induzione troviamo, curiosamente, un meno. Non è un refuso tipografico, ma è una considerazione di natura qualitativa che va sotto il nome di **legge di Lenz**.

**COROLLARIO 10.1.1. - LEGGE DI LENZ.**

La **forza elettromotrice indotta** - e di conseguenza la **corrente indotta** - è tale da opporsi alla causa che l'ha generata e da esercitare una **forza meccanica** che si oppone al moto.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Torniamo all'esperimento # 2 visto precedentemente. La spira percorsa da corrente  $I_1$  viene avvicinata alla spira scarica, crea una variazione nel flusso del campo magnetico  $\vec{B}_1$  generato da  $I_1$ . Nella spira scarica inizia a circolare una corrente  $I_2$ , ma nella direzione opposta a  $I_1$ , in modo da generare a sua volta un campo magnetico opposto  $\vec{B}_2$  per opporsi a  $\vec{B}_1$ .

Per citare il fisico-divulgatore americano **D.J. Griffiths** (1942), la legge di Lenz si può sintetizzare come “*la Natura aberra un cambio di flusso*”.

**Com'è bello variar un flusso da Faraday in giù** Abbiamo capito che la f.e.m. indotta  $\mathcal{E}$  è data da una variazione *temporale* di flusso. Ma come possiamo farlo? Noto che il flusso è dato da

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

e ricordando le osservazioni di pag. 174, possiamo cambiarlo in diversi modi.

- *Spostando rigidamente* il circuito in un campo magnetico, purché non sia soltanto traslatorio in un campo uniforme; infatti, in tal caso non varia mai l'angolo tra la normale del circuito e il campo magnetico, il cui coseno è  $\vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$ , e dunque non varia neanche il flusso.  
Invece, se il campo magnetico *non* è uniforme o se il moto è *rotatorio*, allora il flusso varia: nel primo caso varia al variare della posizione del circuito nello spazio, mentre nel secondo caso cambia perché cambia l'orientazione del circuito rispetto al campo magnetico.
- *Deformando la forma* del circuito nel tempo. Per il *teorema di Stokes*, il flusso del campo magnetico (uniforme o no) dipende solo dal bordo e non da quale superficie  $\Sigma$  si sceglie per calcolarlo, dunque cambiare la forma del circuito cambia la necessariamente le potenziali superfici  $\Sigma$  e dunque anche il flusso. Se consideriamo un circuito piano di area interna  $\Sigma$ , questo metodo corrisponde a far variare il valore di  $\Sigma$  nel tempo.
- *Spostando la sorgente del campo magnetico*, mantenendo allo stesso tempo il circuito fisso.
- *Muovendo un mezzo ferromagnetico magnetizzato* nel campo magnetico (uniforme o no), mantenendo allo stesso tempo il circuito fisso e le sorgenti fisse. Senza andare nei dettagli ora<sup>2</sup>, il movimento di tale mezzo ridistribuisce le linee del campo  $\vec{B}$ .
- In assenza di *qualsiasi moto relativo tra circuito e campo*, il varia se varia  $\vec{B}$  (uniforme o no) *nel tempo*.

In realtà la forza elettromotrice prodotta per mezzo di tutti i modi eccetto l'ultima è causata dalla *sola* forza di Lorentz - e quindi già prevista in realtà dalle leggi della magnetostatica. Quello che *non* era previsto è la produzione di corrente da parte di una variazione del campo magnetico  $\vec{B}$  nel tempo.

**Dimostrazione della legge di Faraday-Neumann-Lenz: i casi stazionari** Dimostriamo di seguito la legge di induzione di Faraday nel caso particolare di uno spostamento rigido in un campo magnetico *non necessariamente* uniforme, ma costante nel tempo: vogliamo provare che la f.e.m. indotta è soltanto una conseguenza alla forza di Lorentz.

---

<sup>2</sup>Nelle “XXX”, a pagina ?? è possibile trovare maggiori informazioni sui materiali ferromagnetici e le loro proprietà.

**DIMOSTRAZIONE.** Immaginiamo di spostare un circuito in un campo magnetico  $\vec{B}$  non uniforme, ma costante nel tempo. Lo spostamento infinitesimo della spira è

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità di spostamento rigido. Ciascuna carica libera presente nella spira subisce una forza di Lorentz pari a

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

Il campo elettrico indotto non conservativo su ogni carica è

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

e tende a far girare le cariche. La forza elettromotrice nella spira è il lavoro prodotto lungo la spira  $\gamma$  per spostare le cariche:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \Gamma_\gamma(\vec{E}_i) = \oint_\gamma \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \oint_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint_\gamma (d\vec{s} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} = \oint_\gamma \left( d\vec{s} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \vec{B} = \\ &= \frac{d}{dt} \oint_\gamma (d\vec{s} \times d\vec{r}) \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Lo spostamento infinitesimo del circuito individua un cilindro sbilenco: il lato è individuato da  $d\vec{r}$ , mentre i bordi delle basi sono il circuito  $\gamma$  e  $\gamma$  stesso, preso dopo lo spostamento infinitesimo. Osserviamo che il prodotto vettoriale  $d\vec{s} \times d\vec{r}$  è ortogonale alla superficie laterale ed è in modulo l'elemento di area:

$$d\vec{s} \times d\vec{r} = d\Sigma_\ell \hat{\mathbf{u}}_n$$

Allora

$$\boxed{\frac{d}{dt} \oint_\gamma (d\Sigma_\ell \hat{\mathbf{u}}_n) \cdot \vec{B} = \frac{d}{dt} \oint_\gamma \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma_\ell = \frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma_\ell}(\vec{B})}$$

Abbiamo trovato che la forza elettromotrice è la variazione temporale del flusso tagliato, ossia del flusso tramite la superficie laterale di questo cilindro. Se definiamo

$$\frac{d\Phi_\Sigma}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}) - \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B})}{\Delta t}$$

dove

- $\Sigma_1$  è una superficie con bordo il circuito  $\gamma$  prima dello spostamento.
- $\Sigma_2$  è una superficie con bordo il circuito  $\gamma$  dopo lo spostamento.

Poiché il cilindro è una superficie chiusa, per la legge di Gauss per il magnetismo

$$0 = \Phi_\Sigma(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}) - \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) + \Phi_{\Sigma_\ell}(\vec{B})$$

Esplicitiamo rispetto al flusso tagliato e dividiamo per l'intervallo di tempo  $\Delta t$ :

$$\frac{1}{\Delta t} \Phi_{\Sigma_\ell}(\vec{\mathbf{B}}) = \frac{\Phi_{\Sigma_2}(\vec{\mathbf{B}}) - \Phi_{\Sigma_1}(\vec{\mathbf{B}})}{\Delta t}$$

Passando al limite, si ha

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{B}})$$

dove  $\Sigma$  è una superficie arbitraria che finisce sul circuito.  $\square$

In modi analoghi possiamo provare che la f.e.m. indotta dalla variazione di forma e di angolo sono conseguenze soltanto della forza di Lorentz.

## 10.2 LEGGE DI INDUZIONE DI FARADAY

Abbiamo capito che il fatto che la forza elettromotrice prodotta da un campo magnetico *variabile nel tempo* non è prevedibile dalle leggi di Maxwell già note. Per poter descrivere i fenomeni dipendenti dal tempo dobbiamo necessariamente *correggerle*; fra le equazioni di Maxwell che possiamo correggere, la prima è proprio quella che avevamo chiamato senza un ben preciso motivo *legge di induzione di Faraday*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

Se il nome vi è *familiare*, è proprio perché è la *stessa* legge di cui abbiamo parlato fino ad ora! La formulazione corretta di questa legge la possiamo dunque ricavare dalla legge (sperimentale) di Faraday.

### TEOREMA 10.2.1. - LEGGE DI INDUZIONE DI FARADAY.

Dato il campo elettrico  $\vec{\mathbf{E}}$  e quello magnetico  $\vec{\mathbf{B}}$ , presa una superficie  $\Sigma$  con bordo  $\gamma = \partial\Sigma$  si hanno le seguenti relazioni:

- **Forma integrale:**

$$\Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{E}}) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma \quad (10.4)$$

- **Forma differenziale:**

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (10.5)$$

In altri termini, un campo magnetico variabile nel tempo è accompagnato da un campo elettrico non conservativo variante nello spazio e potenzialmente anche nel tempo, e viceversa.

**DIMOSTRAZIONE.** Partiamo dalla legge di Faraday nota supponendo che  $\vec{\mathbf{B}}$  sia dipendente anche dal tempo

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{B}}) \implies \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

Qui abbiamo considerato il campo elettrico *totale* lungo il circuito, cioè la somma del campo elettostatico  $\vec{\mathbf{E}}_s$  e di quello elettromotore *non conservativo*  $\vec{\mathbf{E}}_i$  - ricordiamo che il contributo lungo il circuito chiuso di  $\vec{\mathbf{E}}_s$  è nullo. Ora, portando dentro all'integrale

superficiale la derivata temporale e applicando il teorema del rotore all'integrale curvilineo otteniamo la *forma integrale* della legge di induzione magnetica di Faraday:

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

Poiché la relazione rimane invariata qualunque siano i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e qualunque sia la superficie  $\Sigma$ , vale l'identità tra le integrande. Abbiamo ottenuto così la *forma differenziale* della legge di induzione magnetica di Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \square$$

**Requiem per il potenziale elettrostatico** La conseguenza più grande di questa equazione di Maxwell corretta è che il *campo elettrico non è più conservativo* - almeno in generale. Ci chiediamo però se sia comunque possibile esprimere in termini di opportuni campi potenziali.

Dalla *legge di Gauss per il magnetismo* sappiamo che il campo magnetico è *solenoidale* e quindi esiste localmente un campo potenziale vettoriale  $\vec{A}$  tale per cui

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Per la legge di induzione di Maxwell si ha

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \implies \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Osserviamo che quest'ultima quantità, essendo irrotazionale e quindi conservativa, ammette un campo potenziale scalare  $V$  tale che

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\nabla} V$$

Il campo elettrico è esprimibile quindi come

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \quad (10.6)$$

Come si può notare, se siamo nel *caso stazionario* e il campo magnetico  $\vec{B}$  non varia nel tempo, allora anche  $\vec{A}$  è costante temporalmente e quindi si ritorna al caso del campo elettrico *conservativo* - il fu campo *elettrostatico*.

### 10.3 AUTOFLUSSO, AUTOINDUZIONE E INDUTTANZA

Sappiamo che una spira  $\gamma$  percorsa da una corrente di intensità  $I$  genera un campo magnetico dato dalle leggi di Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Tale campo produce un flusso *non* nullo attraverso la superficie stessa, detto **autoflusso**:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Sigma} \oint_{\gamma} \frac{(\vec{ds} \times \hat{\mathbf{u}}_r) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n}{r^2} d\Sigma \quad (10.7)$$

Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz sappiamo inoltre che nella spira si genererà una f.e.m.  $\mathcal{E}_i$  e dunque un'altra corrente  $I'$ , il cui verso per la legge di Lenz è tale da opporsi al cambio di corrente; in particolare, la corrente  $I'$  percorre la corrente nel verso opposto a  $I$ . Questo fenomeno prende il nome di **autoinduttanza**:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = -\frac{d}{dt} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Sigma} \oint_{\gamma} \frac{(\vec{ds} \times \hat{\mathbf{u}}_r) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n}{r^2} d\Sigma$$

Osserviamo che il doppio integrale superficiale-curvilineo dipende esclusivamente dalla *geometria* della spira e rimane costante nel tempo. Come abbiamo fatto per il condensatore, possiamo definire una quantità *caratteristica* dei circuiti chiusi che quantifica sia l'informazione geometrica della spira sia, dal punto di vista della legge di Faraday, quella relativa all'opposizione al cambiamento di corrente.

#### DEFINIZIONE 10.3.1. - INDUTTANZA.

L'**induttanza** di una spira  $\gamma$  è la tendenza della spira ad opporsi ad un cambiamento nella corrente che scorre in esso. Matematicamente, dipende solo dalla natura geometrica del circuito ed è definita da

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma} \oint_{\gamma} \frac{(\vec{ds} \times \hat{\mathbf{u}}_r) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n}{r^2} d\Sigma \quad (10.8)$$

#### DEFINIZIONE 10.3.2. - AUTOFLUSSO.

L'**autoflusso** di una spira  $\gamma$  percorsa da corrente  $I$  è il flusso del campo magnetico generato dalla corrente tramite la superficie delimitata dalla spira stessa:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = LI \quad (10.9)$$

dove  $L$  è l'*induttanza* della spira.

La f.e.m. autoindotta si può dunque esprimere come

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = -\frac{d}{dt} (LI) = -L \frac{dI}{dt} \\ \mathcal{E}_i &= -L \frac{dI}{dt} \end{aligned} \quad (10.10)$$

**ESEMPIO.** Supponiamo di avere un *solenoido infinito*, che nella pratica è un solenoide di lunghezza  $d$  molto maggiore del suo raggio  $R$  in modo da escludere qualunque effetto di bordo. Il campo magnetico è, in modulo,

$$B = \mu_0 In$$

con  $n$  la densità lineare di spire. Se nel solenoide ci sono  $N$  spire, l'autoflusso è dato

dalla somma degli autoflussi delle singole spire:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \Sigma BN = \pi R^2 \cdot \mu_0 In \cdot nd = \mu_0 I n^2 \Sigma d \quad (10.11)$$

L'induttanza è quindi

$$L = \mu_0 n^2 \Sigma d \quad (10.12)$$

dove  $\Sigma$  è l'area di una spira del solenoide.

## Unità di misura

### UNITÀ DI MISURA.

**INDUTTANZA:** henry (H) o weber su ampere ( $\frac{\text{Wb}}{\text{A}}$ ) o volt per secondo su ampere ( $\frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ ) o ohm per secondo ( $\Omega \text{s}$ ).

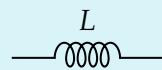
Dimensioni:  $[L] = \frac{[\Phi_{\Sigma}(\vec{B})]}{[I]} = \text{ML}^2\text{T}^{-2}\text{I}^{-2}$ .

## 10.4 CIRCUITI RL

Torniamo in ambito elettrotecnico. Per poter aggiungere dell'induttanza ad un circuito si può far uso di un componente elettrico detto **induttore**.

### DEFINIZIONE 10.4.1. - INDUTTORE.

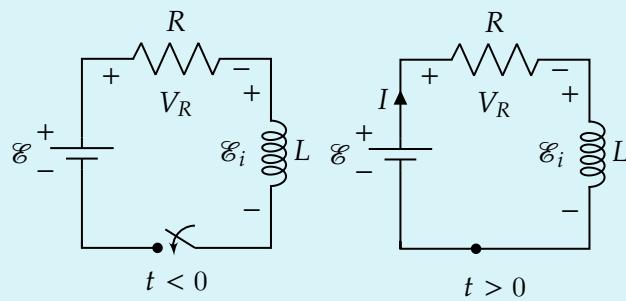
Un **induttore** è un componente elettrico che implementa gli effetti di un'induttanza all'interno di un circuito, in modo da aumentare il flusso magnetico.



**ESEMPIO.** Un classico esempio di induttore è l'origine del simbolo elettrico associato agli induttori è il *solenoid*.

### DEFINIZIONE 10.4.2. - CIRCUITO RL.

Un **circuito RL** è un circuito che presenta solo *resistori* e *induttori*.



Consideriamo il caso semplice di un circuito RL, dotato di un interruttore inizialmente aperto, con un resistore e un induttore. Al tempo  $t = 0$  viene chiuso l'interruttore: poiché si verifica la separazione di cariche da parte del generatore di f.e.m., la corrente può circolare nel circuito e attraversa l'induttore, generando una forza elettromotrice autoindotta

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$$

che si oppone a quella  $\mathcal{E}$  del generatore.

**OSSERVAZIONE.** Inizialmente, la corrente passa lentamente attraverso l'induttore: come per la resistenza, l'induttanza funge da *ostacolo* alla corrente.

Dalla seconda legge di Kirchhoff, fissato come verso di percorrenza quello della corrente  $I$ , la somma delle d.d.p. è

$$\begin{aligned}\mathcal{E} + \mathcal{E}_i - V_R &= 0 \\ \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} - RI &= 0\end{aligned}$$

Risolviamo questa equazione differenziale per descrivere la corrente  $I = I(t)$  che attraversa l'induttore.

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{\mathcal{E} - RI}{L} \\ \int_0^{I(t)} \frac{dI}{\mathcal{E} - RI} &= \frac{1}{L} \int_0^t dt \\ -\frac{1}{R} \log |\mathcal{E} - RI| &\Big|_0^{I(t)} = -\frac{1}{L} t \Big|_0^t \\ -\frac{1}{R} \log \frac{\mathcal{E} - RI(t)}{\mathcal{E}} &= \frac{t}{L} \\ \mathcal{E} - RI(t) &= \mathcal{E} e^{-\frac{Rt}{L}} \\ I(t) &= \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)\end{aligned}\tag{10.13}$$

L'andamento temporale della corrente è dettato dal **tempo caratteristico del circuito RL**:

$$\tau = \frac{L}{R}\tag{10.14}$$

Essa è una costante dimensionalmente pari ad una quantità temporale e quindi nel SI si misura in secondi:

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = M L^2 T^{-2} I^{-2} \cdot M^{-1} L^{-2} T^3 I^2 = T$$

La corrente dopo un tempo di carica *infinito* è

$$I_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R}\tag{10.15}$$

ossia a regime l'induttanza smette di fatto di opporsi al generatore e il circuito è equivalente ad un circuito resistore classico.

Per un *matematico* questa situazione non si potrebbe mai realizzare; invece, per un *fisico* questo si realizza - approssimando, neh! - per un tempo tra  $3\tau = 3RC$  e  $5\tau = 5RC$ . Infatti, si ha

$$\begin{aligned}I(3\tau) &= \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-3\frac{R}{L}} \right) = 0,950 \cdot \frac{\mathcal{E}}{R} \\ I(5\tau) &= \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-5\frac{R}{L}} \right) = 0,993 \cdot \frac{\mathcal{E}}{R}\end{aligned}$$

i quali sono valori *molto* vicini al valore asintotico  $I_\infty$  e che nella pratica possiamo assimilare ad esso.

Per ottenere la f.e.m. autoindotta ci basta derivare  $I(t)$  rispetto al tempo:

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI(t)}{dt} = -\mathcal{E} e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (10.16)$$

All'inizio  $\mathcal{E}_i$  si oppone *fortemente* al cambio di corrente e quindi al passaggio della stessa dato che è pari alla f.e.m. del generatore  $\mathcal{E}$ ; in seguito diminuisce fino a tendere asintoticamente a zero.

**Potenze ed energia nel circuito RL** Come il *condensatore* immagazzinava energia nel , l'*induttore* lo immagazzina nel *campo magnetico* generato da esso.

Prima di determinare tale energia, parliamo delle potenze in gioco nel circuito. La potenza erogata dal generatore è

$$P_{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}I(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad (10.17)$$

mentre quella dissipata dalla resistenza e quella associata all'induttore sono

$$P_R(t) = RI^2(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)^2 \quad (10.18)$$

$$P_L(t) = \mathcal{E}_i I(t) = -LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad (10.19)$$

Si noti che se la d.d.p. ai capi del generatore è

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (10.20)$$

si ha

$$\mathcal{E}(t)I(t) = RI^2(t) + LI \frac{dI(t)}{dt} \implies P_{\mathcal{E}}(t) = P_R(t) + P_L(t)$$

Sul lungo termine, l'energia prodotta dall'induttore complessivamente è

$$\begin{aligned} U_L &= \int_0^{+\infty} P_L dt = \int_0^{+\infty} LI(t) \frac{dI(t)}{dt} dt = \int_{I(0)}^{I(+\infty)} LI dI = \frac{1}{2} L I \Big|_{I(0)}^{I(+\infty)} = \frac{1}{2} L I_\infty^2 \\ U_L &= \frac{1}{2} L I_\infty^2 = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} \end{aligned} \quad (10.21)$$

#### ESEMPIO - SOLENOIDE.

Se l'induttore è un solenoide, l'induttanza è

$$L = \mu_0 \Sigma n^2 d$$

L'energia immagazzinata nel campo magnetico del solenoide è

$$U_L = \frac{1}{2} \mu_0 \Sigma n^2 d I^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \Sigma d \quad (10.22)$$

Osserviamo come  $\Sigma d$  corrisponde al volume  $V$  occupato dal campo magnetico all'interno del solenoide. Se definiamo la **densità di energia magnetica per unità di volume**

$$\mu_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (10.23)$$

l'energia immagazzinata nell'induttore è questa densità moltiplicata per il volume  $V$  occupato dal campo magnetico. Dal punto

### 10.5 ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

In generale, il campo magnetico immagazzina *sempre* dell'energia nel campo stesso. Tale energia, in un certo volume  $V$ , è pari a

$$U = \int_V \mu_B dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V |\vec{B}(r)|^2 dV \quad (10.24)$$

dove  $\mu_E$  è la densità di energia magnetica, definita come nell'equazione (10.23).

#### Confronto tra energia elettrica e magnetica

Caso elettrico	Caso magnetico
<b>Energia in un conduttore</b>	
$U_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{qV}{2} = \frac{CV^2}{2}$	$U_L = \frac{LI^2}{2}$
<b>Densità di energia</b>	
$\mu_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$	$\mu_E = \frac{1}{2\mu_0} B^2$
<b>Energia in un volume del campo elettrico</b>	
$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$	$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV$

Nel caso in cui in un certo volume siano presenti sia il campo elettrico, sia il campo magnetico, le densità di energia si sommano punto per punto:

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (10.25)$$

L'energia complessiva sarà quindi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} dV = U_E + U_B \quad (10.26)$$

### 10.6 LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE DI MAXWELL-AMPÈRE

Nel Capitolo 9, sezione 9.1.3 a pag. 163, abbiamo osservato la *non validità* della legge di Ampère

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \mu_0 I_{int} \quad (\text{forma integrale})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{forma differenziale})$$

in *condizioni non stazionarie*. Infatti, applicando la divergenza ad entrambi i membri della forma differenziale della legge ottenevamo che essa era consistente soltanto se la *densità di corrente risultasse solenoidale*,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (10.27)$$

fatto che se la densità di carica varia nel tempo non è più vero sulla base dell'equazione di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La correzione di questa legge deve garantire la validità dell'equazione di continuità. Dalla *legge di Gauss per l'elettricità* sappiamo che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Derivando entrambi i membri temporalmente otteniamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.28)$$

Ora, sostituendo (10.28) nell'equazione di continuità, vediamo che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (10.29)$$

Nel caso non stazione, quello che è sempre un vettore *solenoidale* è il vettore

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Introduciamo le seguenti definizioni.

**DEFINIZIONE 10.6.1. - CORRENTE DI SPOSTAMENTO E DENSITÀ DI CORRENTE DI SPOSTAMENTO.**  
La **densità di corrente di spostamento** è la quantità vettoriale

$$\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.30)$$

L'intensità di **corrente di spostamento** è il suo flusso attraverso una superficie  $\Sigma$ :

$$I_s = \int_{\Sigma} \vec{j}_s \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \epsilon_0 \int_{\Sigma} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\vec{E})}{\partial t} \quad (10.31)$$

Dimensionalmente parlando, queste due quantità hanno rispettivamente le stesse dimensioni di una densità di corrente elettrica e un'intensità di corrente elettrica, come i nomi giustamente suggeriscono. Non approfondiamo adesso la spiegazione fisica di cosa effettivamente rappresentano - ma lo faremo tra poco; per ora torniamo alla legge di Ampère.

Posta questa nomenclatura, l'idea è di modificare la legge di Ampère sostituendo alla densità di corrente  $\vec{j}$  la **densità totale**

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \vec{j}_s = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Otteniamo quindi la

**TEOREMA 10.6.1. - LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE DI MAXWELL-AMPÈRE.**

Dato il campo elettrico  $\vec{E}$  e quello magnetico  $\vec{B}$ , presa una superficie  $\Sigma$  con bordo  $\gamma = \partial\Sigma$  si hanno le seguenti relazioni:

- *Forma integrale:*

$$\begin{aligned}\Gamma_\gamma(\vec{B}) &= \oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( \int_\Sigma \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma \right) = \\ &= \mu_0 I_{int} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_\Sigma(\vec{E})}{\partial t} = \mu_0 (I + I_s) \quad (10.32)\end{aligned}$$

- *Forma differenziale:*

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \vec{j} + \vec{j}_s \right) = \mu_0 \vec{j}_{tot} \quad (10.33)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Verifichiamo rapidamente che la riformulazione della legge di Ampère è *consistente* con l'equazione di continuità.

Applicando la divergenza ad entrambi i membri della (10.33), si ha

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \cancel{\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} + \cancel{\mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (10.34)$$

Sostituendo la (10.28), trovata precedentemente, dentro la (10.34) otteniamo l'equazione di continuità come richiesto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

□

### 10.6.1 Interpretazione fisica della corrente di spostamento

Oltre ai motivi di *natura matematica* che abbiamo affrontato, la non validità della legge di Ampère e la necessità di introdurre una “corrente di spostamento” si può constatare anche dal punto di vista *fisico* in diversi esperimenti, in cui notiamo una *discrepanza* tra i risultati teorici previsti e quelli osservati.

Uno dei più esemplificativi è quello del *processo di carica di un condensatore* per mezzo di un circuito RC, di cui abbiamo parlato nel Capitolo 5, sezione 5.5.4, pag. 101.

Ricordiamo che, come detto nell'osservazione di pag. 102, all'interno del condensatore *non* ci sono cariche e dunque neanche una *corrente di conduzione*, ma ai capi del condensatore si ha virtualmente la stessa corrente per repulsione delle cariche. Consideriamo ora un cilindro immaginario  $\Sigma$  coassiale al filo e calcoliamo l'intensità di corrente tramite esso in due situazioni differenti:

- Se il cilindro  $\Sigma$  racchiude al suo interno *entrambe* le armature del condensatore, il flusso netto è nullo. Infatti, a patto di non avere variazioni troppo brusche della carica sulle piastre la densità di carica  $\vec{j}$  è la stessa ad entrambi i capi e quindi “tutto ciò che entra esce”

$$i = \frac{dq}{dt} = \int_\Sigma \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0$$

- Se il cilindro  $\Sigma$  contiene *soltanto una* delle due armature - non è fondamentale quale - il flusso di  $\vec{j}$  *non* è nullo perché c'è una carica entrante o uscente la superficie,

ma essa non è controbilanciata da altre cariche uscenti o entranti dal resto della superficie, in quanto nello spazio tra le armature *non* passano particelle libere!

Nel secondo caso, suddividiamo la superficie  $\Sigma$  in due sottosuperfici  $\Sigma_i$  di bordo comune  $\partial\Sigma$ :

- $\Sigma_1$  è la base del cilindro, che interseca il filo ma *non* lo spazio in mezzo alle armature.
- $\Sigma_2$  è il resto del cilindro, che interseca lo spazio in mezzo alle armature ma *non* il filo.

Per la prima superficie  $\vec{j}$  lì esiste e quindi l'integrale non è nullo...

$$\int_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = I = \frac{dq}{dt}$$

... d'altro canto la seconda superficie, non incontrando il filo, *non* presenta alcuna corrente e quindi

$$\int_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = 0$$

Sappiamo inoltre che il filo percorso da corrente genera un campo magnetico  $\vec{B}$  e il valore della circuitazione di esso lungo  $\partial\Sigma$  *non* è nullo; per la legge di Ampère nella formulazione elettrostatica ci porterebbe a dire che

$$I = \int_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d = \int_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = 0$$

il che è decisamente assurdo. Inoltre, nel caso considerato  $\vec{j}$  non sarebbe solenoidale come previsto invece dalla legge di Ampère.

Sembrerebbe dunque che oltre al campo magnetico dato dal filo percorso da corrente ci sia un *altro* campo magnetico generato da qualcosa interno alle piastre; per la *legge di Biot-Savart*, quel *qualcosa* dovrebbe essere una *corrente*... ma che sappiamo non esistere! Maxwell propone come ipotesi per risolvere questo *impasse* proprio quella di supporre l'esistenza di una corrente *fittizia*

$$\vec{j}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

e di intensità

$$I_s = \varepsilon_0 \int_{\Sigma} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$$

che *scorre tra le piastre* nella stessa direzione della corrente di conduzione  $\vec{j}$  - come se spostasse *virtualmente* le cariche da una piastra all'altra. Lungo l'intero circuito (spazio tra le armature comprese) possiamo quindi considerare una *densità di carica totale*

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \vec{j}_s$$

dove  $\vec{j}$  esiste *solo* lungo i fili e  $\vec{j}_s$  esiste *solo* tra le armature del condensatore. Le considerazioni matematiche precedenti ci hanno confermato che, almeno in linea teorica, sostituire nella legge di Ampère a  $\vec{j}$  il vettore  $\vec{j}_{tot}$  garantisce l'equazione di continuità e di avere una densità di carica (totale) solenoidale.

Ripercorriamo il ragionamento precedente con la densità di carica totale, osservando che per la prima superficie  $\vec{j}_{tot} = \vec{j}$ ...

$$\int_{\Sigma_1} \vec{j}_{tot} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \int_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = I = \frac{dq}{dt}$$

... e per la seconda superficie  $\vec{j}_{tot} = \vec{j}_s$ , osservando che il campo elettrico generato dalle cariche che stanno sulle armature è diverso da zero:

$$\int_{\Sigma_2} \vec{j}_{tot} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \int_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \varepsilon_0 \int_{\Sigma_2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = I_s$$

Dato che  $\vec{j}_{tot}$  è solenoidale, i due flussi ottenuti devono essere uguali.

$$I = \int_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \int_{\Sigma_1} \vec{j}_{tot} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d = \int_{\Sigma_2} \vec{j}_{tot} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \int_{\Sigma_2} \vec{j}_s \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = I_s$$

$$I = I_s \quad (10.35)$$

La *corrente totale* ha lo stesso valore lungo l'intero circuito: coincide con  $I$  nei cavi di collegamento e  $I_s$  all'interno del condensatore.

**ATTENZIONE!** Nonostante il nome suggestivo, con la corrente di spostamento *non avviene alcun moto fisico* di cariche!

**DIGRESSIONE.** Fra le equazioni di Maxwell, questa è l'*ultima* ad essere stata scoperta. Il contributo al campo magnetico fornito dalla variazione del campo elettrico è molto piccolo a causa del fattore  $1/c^2$ ; per questo motivo, fu ipotizzata *prima* dal punto di vista teorico e solo *successivamente* comprovata *empiricamente*, quando lo sviluppo di strumenti sufficientemente precisi permisero di misurare con certezza tale contributo.

## 10.7 EQUAZIONI DI MAXWELL DELL'ELETTROMAGNETISMO CLASSICO

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
<b>Legge di Gauss per l'elettricità</b>	$\Phi_{\partial V}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_{\partial V} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
<b>Legge di Gauss per il magnetismo</b>	$\Phi_{\partial V}(\vec{\mathbf{B}}) = \int_{\partial V} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$
<b>Legge dell'induzione di Faraday</b>	$\Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{E}}) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$	$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$
<b>Legge della circuitazione di Ampère-Maxwell</b>	$\Gamma_\gamma(\vec{\mathbf{B}}) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma \right) = \mu_0 I_{int} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{E}})}{\partial t} = \mu_0 (I + I_s)$	$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s) = \mu_0 \vec{j}_{tot}$

In assenza di sorgenti<sup>3</sup> di campi elettrici, rappresentate dalla densità di carica  $\rho$ , e di campi magnetici, rappresentate dalla densità di corrente  $\vec{j}$ , allora

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{E}) = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
Legge di Gauss per il magnetismo	$\Phi_{\partial V}(\vec{B}) = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge dell'induzione di Faraday	$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Legge della circuitazione di Ampère-Maxwell	$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\vec{E})}{\partial t} = \mu_0 I_s$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}_s$

**Maxwell... è tutto quello che c'è** Abbiamo finalmente ottenuto le equazioni di Maxwell. In realtà, non dobbiamo pensare che le equazioni di Maxwell siano una conseguenza di tutti i risultati e gli esperimenti visti fin'ora, ma semmai il *contrario*: sono le equazioni di Maxwell ad essere quelle *fondamentali*!

Da esse possiamo quindi ricavare tutte le leggi viste in precedenza, come ad esempio:

- **Equazione di continuità.**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (10.36)$$

- **Forza di Lorentz.**

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (10.37)$$

- **Densità di energia nei campi.**

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (10.38)$$

Volendo, si poteva trattare l'elettromagnetismo enunciando le equazioni di Maxwell e solo successivamente *declinare* i risultati particolari da quelle; in questo testo si è deciso di fare l'esatto opposto per seguire grossomodo l'*approccio storico* alla faccenda.

---

<sup>3</sup>In diversi testi tale condizione viene detta "nel vuoto" e le relative equazioni di Maxwell "equazioni di Maxwell nel vuoto". Tale nomenclatura non deve trarre in inganno: sebbene tali equazioni siano valide nel vuoto inteso come *assenza di materia*, non sono corrette se sono presenti sorgenti. Per evitare ulteriori confusioni, in questo testo non utilizzeremo tale nomenclatura fuorviante.

### 10.7.1 Invarianza di gauge nell'elettromagnetismo

Sappiamo, dalla *legge di Gauss del magnetismo* che  $\vec{B}$  è solenoidale, dunque esiste un campo potenziale vettoriale  $\vec{A}$  tale che

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Abbiamo inoltre visto come  $\vec{E}$  è *conservativo* nel caso stazionario, mentre in generale non lo è; in ogni caso, esiste un campo potenziale scalare  $V$  tale che

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

In particolare, se  $\vec{B}$  dipende dal tempo, allora anche il vettore potenziale  $\vec{A}$  è sempre definito *a meno di gradiente*. In termini di classi di equivalenza,  $\vec{A}$  è il rappresentante della classe  $[\vec{A}]$  data dalla relazione

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi \quad \text{dove } \varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Tuttavia,  $\varphi$  può dipendere anche dal tempo. Una conseguenza di ciò è che la formulazione del campo elettrico in termini dei campi potenziali *non* sarebbe consistente con quella del campo elettrostatico, dato che

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

Per ovviare a ciò ricordiamo che il potenziale è definito a meno di costante. Pertanto, ci basta ridefinire la relazione di equivalenza che definisce la classe di equivalenza  $[V]$ , in modo che

$$V \sim V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{dove } \varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Quindi, i campi potenziali dei campi elettrici e magnetici sono rappresentanti delle classi di equivalenza  $[V]$  e  $[\vec{A}]$  dati dalle relazioni

$$V \sim V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \vec{A} \sim \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi$$

dove  $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$  è una funzione delle tre coordinate spaziali  $(x, y, z)$  e del tempo  $t$ . In questo modo abbiamo generalizzato al caso non stazionario l'invarianza di gauge osservata per i campi elettromagnetostatica nel ??, sezione 9.2.1.

Consideriamo dei campi potenziali  $\vec{A}$  e  $V$  tali per cui

$$D := \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$$

Possiamo operare una scelta di gauge: imponiamo che la trasformazione di gauge descritta dal campo scalare  $\varphi$ , ossia

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi \quad V \mapsto V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

sia tale che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = 0 \quad (10.39)$$

La condizione per la scelta di  $\phi$  si ottiene sostituendo le trasformazioni dei campi potenziali all'interno della (10.39):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{A}' - \nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= D \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi &= D \end{aligned} \quad (10.40)$$

Se utilizziamo l'operatore di D'alambert<sup>4</sup>, l'equazione che descrive  $\phi$  in modo da garantire la scelta di gauge precedente è

$$\square \phi = D \quad (10.41)$$

**Equazioni del moto della dinamica classica** Fatta la scelta di gauge, vogliamo ora trovare delle relazioni tra i campi potenziali e le sorgenti dei campi elettromagnetici. Ricordiamo che

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

Per proprietà delle derivate seconde degli operatori differenziali, vale la relazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (10.42)$$

Sostituendo la (10.42) nella legge di circuitazione di Ampère:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \right) &= \mu_0 \vec{j} \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j} \\ \underbrace{\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}_{=0 \text{ per la scelta di gauge}} + \underbrace{\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A}}_{=\square} &= \mu_0 \vec{j} \\ \square \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (10.43)$$

Per trovare la relazione del campo potenziale  $V$ , partiamo calcolando la divergenza del campo elettrico con la legge di Gauss:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 V \quad (10.44)$$

Derivando temporalmente la scelta di gauge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

---

<sup>4</sup>Nelle "XXX", a pagina 251 è possibile trovare maggiori informazioni su tale operatore.

otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (10.45)$$

Ricavando da (10.45) il termine  $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square V &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (10.46)$$

# CAPITOLO 11

## OSCILLAZIONI ELETTRICHE E CORRENTI ALTERNATE

---

*“Fantasticare con la corrente alternata è solo una perdita di tempo. Nessuno la userà, mai.”*

*THOMAS ALVA EDISON, lievemente passivo-aggressivo nei confronti del rivale George Westinghouse.*

### COME INIZIANO LE ONDE?

#### 11.1 CIRCUITI RLC

**OSSERVAZIONE.** Sia per il circuito  $RC$ , sia per il circuito  $RL$ , l'equazione che descrive la corrente nel *processo di scarica* è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti della forma

$$\frac{dI}{dt} = -kI$$

dove  $K$  dipende dalla componente del circuito:

- Se il circuito è  $RC$ , allora  $k = \frac{1}{RC}$ .
- Se il circuito è  $RL$ , allora  $k = \frac{R}{L}$

La soluzione generale è

$$I(t) = Ae^{-kt} \quad (11.1)$$

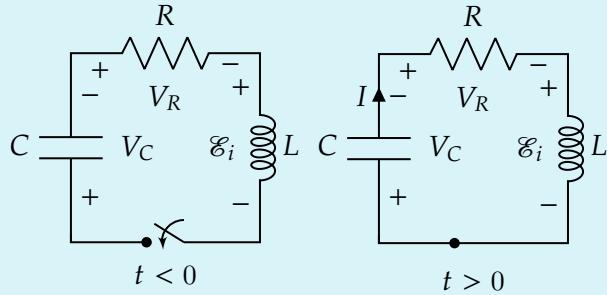
dove  $A$  è determinata dalla condizione iniziale. Si osservi che, in entrambi i casi, la costante  $k$  è l'inverso del tempo caratteristico del circuito

$$\tau = \frac{1}{k} \quad (11.2)$$

e quindi è dimensionalmente una frequenza.

**DEFINIZIONE 11.1.1. - CIRCUITO RLC.**

Un circuito RLC è un circuito che presenta *resistori, induttori e condensatori*.



La peculiarità di un circuito RLC è che può funzionare da solo *senza la presenza di un generatore!*

Consideriamo il caso semplice di un circuito RLC in serie, dotato di un interruttore *inizialmente aperto*, un resistore, un induttore e un condensatore carico. Al tempo  $t = 0$  viene chiuso l'interruttore: la differenza di potenziale ai capi del conduttore permette a della corrente di percorrere il circuito e attraversare l'induttore, generando una forza elettromotrice autoindotta

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$$

che si opposte a quella  $V_C$  del condensatore. Inoltre la corrente, attraversando il resistore, genera un calo di potenziale. Dalla seconda legge di Kirchhoff, fissato come verso di percorrenza quello della corrente  $I$ , la somma delle d.d.p. è

$$\begin{aligned} V_C + V_L - V_R &= 0 \\ \frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} - RI &= 0 \end{aligned}$$

Derivando rispetto a  $t$ , noto che  $I = -\frac{dq}{dt}$ , si ha

$$\frac{I}{C} - L \frac{d^2I}{dt^2} - R \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

Se nei *processi di scarica* dei circuiti RC e RL la corrente si otteneva come soluzione di un equazione differenziale del prim'ordine, la corrente che scorre nel circuito RLC in serie è invece la soluzione di un'*equazione differenziale lineare del secondo ordine*. Se denotiamo i coefficienti costanti dell'equazione differenziali

$$\gamma := \frac{R}{2L} \quad \omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.3)$$

detti rispettivamente **coefficiente di smorzamento** e **pulsazione propria**, la legge (11.1) si scrive come

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0 \quad (11.4)$$

Si tratta della stessa equazione dell'*oscillatore armonico smorzato*.

**La soluzione generale** La soluzione generale della (11.4) è

$$I(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t} \quad (11.5)$$

dove  $A, B$  sono determinate dalle condizioni iniziali, mentre  $\lambda_{1,2}$  sono le soluzioni dell'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (11.6)$$

ossia

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (11.7)$$

A seconda del valore del discriminante  $\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$  ci riconduciamo a tre andamenti temporali differenti per la corrente.

- **Smorzamento forte.**  $\Delta > 0$ , ossia  $\gamma^2 > \omega_0^2$  e quindi

$$R^2 > 4\frac{L}{C}$$

La corrente ha un andamento *esponenziale decrescente*:

$$I(t) = e^{-\gamma t} \left( Ae^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right) \quad (11.8)$$

dove  $A, B$  sono determinate dalle condizioni iniziali.

- **Smorzamento critico.**  $\Delta = 0$ , ossia  $\gamma^2 = \omega_0^2$  e quindi

$$R^2 = 4\frac{L}{C}$$

La corrente ha un andamento *esponenziale decrescente*:

$$I(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt) \quad (11.9)$$

dove  $A, B$  sono determinate dalle condizioni iniziali.

- **Smorzamento debole.**  $\Delta < 0$ , ossia  $\gamma^2 < \omega_0^2$  e quindi

$$R^2 < 4\frac{L}{C}$$

La corrente ha un andamento *oscillante smorzato*:

$$I(t) = De^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{dove } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (11.10)$$

dove  $D, \phi$  sono determinate dalle condizioni iniziali.

#### DEFINIZIONE 11.1.2. - RESISTENZA CRITICA.

La **resistenza critica** è la resistenza massima sopra la quale un circuito *RLC* sarebbe criticamente smorzato.

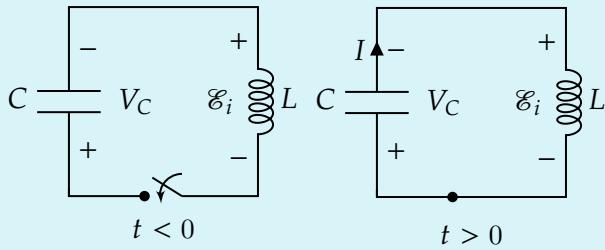
$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.11)$$

Equivalentemente, è la soglia per cui un circuito *RLC* risulta essere smorzato debolmente.

In tutti i tre i casi il passaggio di corrente è dunque soltanto temporaneo, dato che il *fattore di smorzamento*  $e^{-\gamma t}$  è prevalente.

**DEFINIZIONE 11.1.3. - CIRCUITO LC.**

Un **circuito LC** è un circuito che presenta solo *induttori* e *condensatori*.



Sebbene sia una situazione praticamente soltanto teorica (è sostanzialmente impossibile realizzare un circuito di resistenza  $R$  nulla!), anche un circuito  $LC$  può funzionare *senza la presenza di un generatore*. Dalla seconda legge di Kirchhoff avremmo che

$$\begin{aligned} V_C + V_L &= 0 \\ \frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

L'equazione differenziale che descrive la corrente è

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0 \quad (11.12)$$

dove  $\omega_0$  è la frequenza caratteristica definita precedentemente. In questo caso particolare ci siamo ricondotti all'equazione di un oscillatore armonico *non smorzato*, la cui soluzione è

$$I(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (11.13)$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore è la stessa di quella ai capit della induttanza; si ricava facilmente dalla legge di Kirchhoff che essa è  $L$  volte la derivata temporale della corrente:

$$V_C(t) = V_L(t) = AL\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Determiniamo le costanti di contesto. Sappiamo che la corrente inizia a scorrere soltanto alla chiusura dell'interruttore al tempo  $t = 0$ , mentre la d.d.p. ai capi del condensatore denotiamola come  $V_0 = \frac{q}{C}$ . Allora

$$\begin{aligned} 0 &= I(0) = A \sin(\omega_0 0 + \phi) = A \sin(\phi) \implies \phi = 0 \\ V_0 &= V_C(0) = AL\omega_0 \cos(\omega_0 0 + \phi) = AL\omega_0 \cos(\phi) = AL\omega_0 \implies A = \frac{V_0}{L\omega_0} \end{aligned}$$

Le equazioni diventano dunque

$$I(t) = \frac{V_0}{L\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (11.14)$$

$$V_C(t) = V_L(t) = V_0 \cos(\omega_0 t) \quad (11.15)$$

**Corrente continua e alternata** Fino ad ora avevamo incontrato circuiti dotati di generatori che chiamiamo a corrente *continua*: come le batterie o altri di natura elettrochimica, essi producono una corrente potenzialmente variabile nel tempo, ma che non cambia mai direzione nel conduttore.

**DEFINIZIONE 11.1.4. - CORRENTE CONTINUA.**

La corrente elettrica è detta **continua** (DC) se la sua direzione è costante; la sua intensità può essere anch'essa costante oppure può variare d'intensità nel tempo.

Con il circuito *LC* siamo di fronte ad una situazione nuova: la d.d.p. del circuito e la corrente non solo variano nel tempo, ma hanno un comportamento *sinusoidale*. Chiamiamo tale tipo di corrente *alternata*.

In Fisica, parliamo di *grandezze alternate* se sono periodiche e hanno un valor medio nullo in un periodo; nell'uso comune il termine è riservato soltanto alle variazioni sinusoidali.

**DEFINIZIONE 11.1.5. - CORRENTE ALTERNATA.**

La corrente elettrica è detta **alternata** (AC) se è una grandezza alternata: il valor medio della corrente è nullo e varia intensità e direzione periodicamente.

**L'andamento periodico** Sia  $T$  il periodo dell'oscillazione; cosa succede nel circuito in tale periodo?

- La corrente parte nulla ( $I(t = 0) = 0$ ), mentre la d.d.p. ai capi del condensatore è massima ( $V_C(t = 0) = V_0$ ).
- Man mano che il condensatore si *scarica*, la corrente aumenta fino a raggiungere il valore massimo ( $I(t = T/4) = I_{max}$ ) e la d.d.p. ad annullarsi ( $V_C(t = T/4) = 0$ ). Allo stesso tempo la variazione di corrente induce sia l'induttore a produrre una corrente di verso opposto, sia ad immagazzinare energia magnetica. Ad un quarto del periodo il condensatore è scarico, mentre l'induttore è completamente carico.
- Superato  $t = T/4$ , il condensatore inizia a ricaricarsi e la d.d.p. ai capi del condensatore si inverte di segno. Dopo mezzo periodo, il condensatore è tornato carico mentre l'induttore non ha più energia; in particolare, la corrente è di nuovo nulla ( $I(t = T/2) = 0$ ) e la d.d.p. è massima, ma di segno opposto ( $V_C(t = T/2) = -V_0$ )
- Superato  $t = T/2$ , riparte il processo di scarica del condensatore e di carica dell'induttore; questa volta, la corrente percorre il verso opposto di quello di partenza e incrementa la sua intensità fino a raggiungere il massimo negativo per tre quarti del periodo ( $I(t = 3T/4) = -I_{max}$ ). La d.d.p. desce fino ad annullarsi.
- Nell'ultimo quarto di periodo il condensatore si carica, l'induttore si scarica e la situazione torna quella di partenza.

Da quanto osservato, possiamo affermare che  $I$  e  $V_C$  sono in **quadratura di fase**: quando la corrente è massima  $V_C$  è nulla e viceversa.

**Energia del circuito RLC** Si può notare che l'andamento della corrente e della differenza di potenziale comporta un'oscillazione tra l'*energia del campo elettrico*, immagazzinata nel *condensatore*...

$$U_C(t) = \frac{CV_C(t)^2}{2}$$

... e l'*energia del campo magnetico*, immagazzinata nell'*induttore*.

$$U_L(t) = \frac{LI(t)^2}{2}$$

Sono anch'esse in *quadratura di fase!* Quando la corrente è massima (e la d.d.p. nulla) l'energia del circuito è soltanto magnetica (perché quella elettrica è zero) e viceversa. In ogni caso, per *conservazione dell'energia*, l'energia totale è quella del condensatore alla

chiusura dell'interrutore a  $t = 0$  o a quella dell'induttore a metà periodo:

$$E_{tot} = \frac{CV_C(t)^2}{2} + \frac{LI(t)^2}{2} = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \quad (11.16)$$

## 11.2 ELETTROGENERATORI

### DEFINIZIONE 11.2.1. - ELETTROGENERATORE.

Un **elettrogeneratore** è un dispositivo elettrotecnico che converte *energia meccanica* in *energia elettrica*.

#### 11.2.1 Spira mobile

Un esempio facile - ma di scarsa rilevanza pratica - di *elettrogeneratore* è quello di una **spira mobile**. Consideriamo un circuito a forma di U aperto e di altezza  $h$ , come in figura. Esso è fisso e immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme e perpendicolare ad esso. Sui rami laterali, nel punto  $x$  è posto una *sbarra conduttrice rigida* di lunghezza  $h$ ; essa è libera di muoversi lungo i rami - la posizione è  $x = x(t)$ . Il circuito assieme alla sbarra formano una spira chiusa  $\Sigma$ .

Inizialmente nel circuito non è presente una corrente, ma appena muoviamo la sbarra con velocità  $\vec{v}$ , dovuta ad un'azione esterna, l'area  $\Sigma$  della spira *cambia* e di conseguenza cambia il flusso del campo magnetico attraverso di essa. Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz la f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt}$$

Poiché l'area della spira è

$$\Sigma(t) = hx(t)$$

il flusso è, data la perpendicolarità del campo magnetico alla spira, pari a

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = B\Sigma = Bhx(t)$$

La variazione della posizione  $x(t)$  nel tempo è la velocità  $\vec{v}$  con cui viene sposta la spira, pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt} = -B\frac{d\Sigma(t)}{dt} = -Bh\frac{dx(t)}{dt} = -Bhv \\ \mathcal{E}_i &= -Bhv \end{aligned} \quad (11.17)$$

**OSSERVAZIONE.** Come abbiamo affermato nel Capitolo 10, sezione 10.1, 176, la creazione di una f.e.m. indotta in questo caso (deformazione di una spira) si poteva anche ricavare nota la *sola* forza di Lorentz.

Muovendo la filo, le cariche libere in esso si muovono solidali alla sbarra e quindi subiscono una forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B}$$

e di conseguenza generano un campo elettrico indotto

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

La f.e.m. indotta si ricava dalla definizione di forza elettromotrice come circuitazione:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -Bv \int_A^B ds = -Bhv$$

Supponendo che la parte fissa abbia una resistenza  $R$ , dalla *legge di Ohm* la corrente che circola nel circuito è

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{Bhv}{R} \quad (11.18)$$

**OSSERVAZIONE.** La corrente indotta, per la legge di Lenz, deve opporsi al cambio di flusso. Per determinare il verso, possiamo operare diversi metodi, tra cui:

- Dato che la corrente indotta percorrendo la sbarra genera una forza di Laplace  $\vec{F}_B$ , il verso della corrente deve essere tale che  $\vec{F}_B$  si oppone al moto.
- Dato che la corrente indotta percorrendo la spira chiusa genera un campo magnetico  $\vec{B}_i$ , il verso della corrente deve essere tale che  $\vec{B}_i$  si oppone a  $\vec{B}$ .

Applicandoli entrambi al caso in questione, la corrente dovrà percorrere la spira in *senso orario*.

**Attrito elettromagnetico** Purtroppo, il moto della spira mobile *non* è privo di attriti. Infatti, il filo percorso dalla corrente autoindotta è soggetto, per la *seconda legge di Laplace*, ad una **forza di attrito elettromagnetico**

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= I \int_B^A d\vec{s} \times \vec{B} = -IBh\hat{\mathbf{u}}_x = -\frac{h^2B^2}{R}\vec{v} \\ \vec{F}_B &= -\frac{h^2B^2}{R}\vec{v} \end{aligned} \quad (11.19)$$

che, naturalmente, si oppone al moto.

**OSSERVAZIONE.** La forza di attrito assume la forma di un *attrito viscoso*, in quanto è proporzionale alla velocità.

Per mantenere una velocità costante  $\vec{v}$  dobbiamo applicare alla sbarra una *forza esterna* uguale e contraria a quella dell'*attrito elettromagnetico*.

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_B$$

È necessario compiere un *lavoro* per mantenere tale equilibrio o, in altri termini, devo produrre un'opportuna *potenza meccanica* da sopperire alla *potenza elettrica* dissipata dalla resistenza per avere la corrente elettrica nel circuito. Nel caso della spira mobile, essa è

$$P = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = \frac{h^2B^2v}{R} = I^2R \quad (11.20)$$

### 11.2.2 Disco di Barlow

Come generatore, la spira mobile non è particolarmente funzionale: per continuare a produrre corrente dovrei avere delle *rotarie infinite* su cui far scorrere la sbarra.

Per produrre una corrente è nettamente più efficace ricorrere a sistemi che utilizzano energia meccanica di natura *rotazionale*; la **ruota di Barlow** o **disco di Barlow** è uno dei primi.

Esso consiste in un disco di materiale conduttore che ruota attorno al suo asse con velocità costante  $\vec{\omega}$ , dovuta ad un'azione esterna. Il disco è perpendicolare ad un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme. Sia l'asse (punto  $A$ ), sia la superficie del disco (punto  $B$ ) sono a contatto di due elementi strisciati collegati ad un elemento di resistenza  $R$  - di fatto rendendo il disco funzionalmente una spira.

La variazione della velocità del disco va a creare una variazione del flusso del campo magnetico e dunque una d.d.p. indotta ai capi  $A$  e  $B$  del circuito. Ricordiamo che possiamo descrivere la posizione di un punto sul disco in coordinate polari

$$\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

dove  $r$  è la distanza dall'asse e  $\varphi$  l'angolo di rotazione rispetto all'asse  $x$  di un sistema di riferimento cartesiano opportunamente scelto. La velocità di tale punto è data da

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi) = \dot{r} (\cos \varphi, \sin \varphi) + \dot{\varphi} r (-\sin \varphi, \cos \varphi) = \dot{r} \hat{u}_r + \dot{\varphi} r \hat{u}_\varphi$$

Se consideriamo una carica libera nel disco a distanza  $r$  dall'asse, essa ruota solidale con il disco alla stessa velocità angolare  $\vec{\omega}$  e si muove dunque su traiettorie circolari; poiché non varia il raggio  $r$ , si ha  $\dot{r} = 0$  e la velocità subita è soltanto una tangenziale e non radiale.

$$\vec{v} = \dot{\varphi} r \hat{u}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} r \hat{u}_\varphi = \omega r \hat{u}_\varphi$$

Il campo elettrico indotto a distanza  $r$  dall'asse è quindi

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} = \frac{d\varphi}{dt} r \hat{u}_\varphi \times \vec{B} = \omega r \hat{u}_\varphi \times \vec{B} = -\omega r B \hat{u}_r$$

Allora la forza elettromotrice è, dalla definizione come circuitazione,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_B^A \omega r' B \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = \omega B \int_0^r r' dr' = \frac{1}{2} \omega B r^2 \\ \mathcal{E}_i &= \frac{1}{2} \omega B r^2 \end{aligned} \quad (11.21)$$

e la corrente è

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B r^2}{2R} \quad (11.22)$$

**Attrito elettromagnetico torcente** Sull'elemento radiale infinitesimo  $d\vec{r}'$  a distanza  $r'$  dal centro, percorso da corrente  $I$ , agisce una forza (infinitesima) di Laplace

$$d\vec{F}_B = Id\vec{r}' \times \vec{B} = \frac{\omega B r^2}{2R} d\vec{r}' \times \vec{B} = \frac{\omega B^2 r^2}{2R} r' \hat{u}_\varphi$$

che, rispetto all'asse, ha momento (infinitesimo)

$$d\vec{M}_B = \vec{r} \times d\vec{F}_B = I\vec{r} \times (d\vec{r}' \times \vec{B}) = \frac{\omega B^2 r^2}{2R} r' \vec{r} \times \hat{u}_\varphi = -\frac{B^2 r^2}{2R} r' dr' \vec{\omega}$$

Il disco è soggetto dunque ad un *momento magnetico* ortogonale e opposto a  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{M}_B = \int_B^A d\vec{M}_B = I \int_B^A \vec{r} \times (d\vec{r}' \times \vec{B}) = -\frac{B^2 r^2}{2R} \int_0^r r' dr' \vec{\omega} = -\frac{B^2 r^4}{4R} \vec{\omega}$$

$$\vec{M}_B = -\frac{IBr^2}{2} \vec{\omega} = -\frac{B^2 r^4}{4R} \vec{\omega} = \quad (11.23)$$

Questo momento risulta essere un *attrito torcente* che si oppone alla velocità angolare. Per mantenere  $\omega$  costante bisogna applicare al disco un *momento esterno* uguale e contrario a questo **attrito elettromagnetico torcente**.

$$\vec{M}_{ext} = -\vec{M}_B$$

La *potenza meccanica* per mantenere l'equilibrio e sopperire alla *potenza elettrica* dissipata dalla resistenza è

$$P = \vec{M}_{ext} \cdot \vec{\omega} = \frac{B^2 r^4 \omega^2}{4R} = I^2 R \quad (11.24)$$

### 11.2.3 Generatori di corrente alternata

Consideriamo una *spira piana* immersa in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme. La spira ruota con velocità angolare  $\omega$  uniforme attorno al suo asse verticale in senso orario; pertanto, il flusso del campo magnetico tramite essa varia e, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, varia anche la f.e.m. indotta:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt}$$

La variazione di flusso dipende dall'angolo  $\alpha$  tra  $\vec{B}$  e la normale alla spira:

$$\cos \alpha = \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$$

Poiché la spira ruota con velocità angolare uniforme, significa che

$$\alpha(t) = \omega t + \phi$$

dove  $\phi$  dipende dalle condizioni iniziali. Si ha

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \Sigma = \Sigma B \cos(\omega t + \phi)$$

da cui segue

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt} = \Sigma B \omega \sin(\omega t + \phi) \quad (11.25)$$

Notiamo che la f.e.m. varia *sinusoidalmente nel tempo*, con valore massimo assunto

$$\mathcal{E}_{max} = \Sigma B \omega \quad (11.26)$$

La corrente elettrica che scorre nel circuito è

$$I(t) = \frac{\Sigma B \omega}{R} \sin(\omega t + \phi) \quad (11.27)$$

e, come la f.e.m. che la genera, varia *sinusoidalmente nel tempo*, con valore massimo

$$I_{max} = \frac{\Sigma B \omega}{R} \quad (11.28)$$

La corrente elettrica risulta cambiare verso periodicamente ed è quindi una *corrente alternata*.

Anche la *potenza elettrica* varia periodicamente nel tempo, rimanendo però per ovvi motivi sempre una quantità positiva:

$$P(t) = \mathcal{E}_i I = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = \frac{B^2 \Sigma^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t = M \omega \quad (11.29)$$

dove  $M$  è il momento magnetico della spira. Il valore massimo è

$$P_{max} = \mathcal{E}_{max} I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}^2}{R} = \frac{B^2 \Sigma^2 \omega^2}{R} \quad (11.30)$$

**Potenza e f.e.m. efficace** Nella pratica, tuttavia, il periodo dell'elettrogeneratore è *talmente breve* che i valori della potenza e della f.e.m. oscillano così furiosamente da rendere impraticabile uno studio dei loro valori al variare del tempo. Ci interessa quindi approssimare un generatore AC ad uno a corrente continua sostanzialmente equivalente. Dato che lo scopo principale dei generatori è quello di convertire un'energia meccanica in energia elettrica, possiamo cercare un elettrogeneratore DC che produca una potenza uguale a quella che, *mediamente*, il generatore AC produce. Tale potenza elettrica deve valere

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{B^2 \Sigma^2 \omega^2}{R} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{B^2 \Sigma^2 \omega^2}{2R} = \frac{P_{max}}{2} = \frac{\mathcal{E}_{max}^2}{2R} \quad (11.31)$$

Il generatore DC sostitutivo deve quindi produrre una f.e.m.  $\mathcal{E}_{eff}$ , detta **forza elettromotrice efficace**, tale per cui

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{eff}^2}{R} \quad (11.32)$$

ossia

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{max}^2}{2R} &= \text{frac} \mathcal{E}_{eff}^2 R \\ \mathcal{E}_{eff} &= \frac{\mathcal{E}_{max}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (11.33)$$

### 11.3 MOTORI

#### DEFINIZIONE 11.3.1. - MOTORE.

Un **motore** è un dispositivo elettrotecnico che converte *energia elettrica* in *energia meccanica*.

##### 11.3.1 Spira mobile

Consideriamo la stessa spira vista a 198, ma invece di immergerla in un campo magnetico supponiamo di porre nel circuito un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_0$ : esso genera una corrente che circola nella spira e, in particolare, sulla sbarra scorrevole. Per la *seconda legge di Laplace*, su di essa agisce una forza

$$\vec{F}_B = I \left( \int_A^B d\vec{s} \right) \times \vec{B} = IBh\hat{u}_x$$

che fa spostare la barra con una velocità  $\vec{v}(t)$ . Poiché essa si muove, il flusso del campo magnetico tramite la superficie varia e produce per la legge di Faraday-Neumann-Lenz una f.e.m. indotta nella spira

$$\mathcal{E}_i = -vhB$$

che si contrappone a quella di  $\mathcal{E}_0$ . Siamo dunque in presenza di un fenomeno di *autoinduzione*: nella spira circola complessivamente una corrente

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mathcal{E}_0 - vhB}{R}$$

Supponiamo inoltre che sia presente una *forza*  $\vec{F}_{opp}$  opposta al moto  $\vec{v}$ , rappresentante ad esempio un corpo da sollevare attaccato all'asta. La forza complessiva sulla sbarra è

$$\vec{F} = \vec{F}_B - \vec{F}_{opp} = (IhB - F_{opp}) \hat{u}_x = \left( \frac{\mathcal{E}_0 - vhB}{R} hB - F_{opp} \right) \hat{u}_x$$

**OSSERVAZIONE.** Nella forza indotta  $\vec{F}_i$  è presente una componente resistiva simile all'*attrito elettrostatico*:

$$\vec{F}_A = -\frac{h^2 B^2}{R} \vec{v}$$

Dalla legge di Newton abbiamo che

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \left( \frac{\mathcal{E}_0 - vhB}{R} hB - F_{opp} \right) \hat{u}_x &= m \frac{dv}{dt} \hat{u}_x \end{aligned}$$

Da cui, riordinando i termini, otteniamo un'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dv}{dt} + \frac{h^2 B^2}{mR} v + \left( \frac{F_{opp}}{m} - \frac{\mathcal{E}_0}{mR} \right) = 0$$

la cui soluzione è

$$v(t) = \left( \frac{\mathcal{E}_0}{hB} - \frac{RF_{opp}}{h^2 B^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{h^2 B^2}{mR} t} \right) \quad (11.34)$$

L'andamento temporale della velocità è dettato dal *tempo caratteristico*:

$$\tau = \frac{mR}{B^2 h^2} \quad (11.35)$$

Essa è una costante dimensionalmente pari ad una quantità temporale e quindi nel SI si misura in secondi:

$$[\tau] = \frac{[m][R]}{[B]^2 [h]^2} = M \cdot M L^2 T^{-3} I^{-2} \cdot M^{-2} I^2 T^4 \cdot L^{-2} = T$$

La velocità della sbarra dopo un tempo *infinito* (ossia a *regime*) è costante in quanto  $F_B = F_{opp}$  ed è pari a

$$v_\infty = \frac{\mathcal{E}_0}{hB} - \frac{RF_{opp}}{h^2 B^2} \quad (11.36)$$

da cui segue che la f.e.m., la corrente e la potenza di regime sono

$$\mathcal{E}_i = -\mathcal{E}_0 + \frac{RF_{opp}}{hB} \quad (11.37)$$

$$I_\infty = \frac{F_{opp}}{hB} P_\infty = RI_\infty^2 + F_{opp} v_\infty \quad (11.38)$$

Il primo termine della potenza di regime è la potenza dissipata dalla resistenza, mentre il secondo è la potenza meccanica necessaria a vincere la forza resistente  $\vec{F}_{opp}$

### 11.3.2 ★ Disco di Barlow

In modo analogo a quanto visto con la spira mobile, consideriamo un disco di Barlow in cui al posto del resistore è posto un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_0$  che deve vincere un momento meccanico esterno  $M_{opp}$ , che può rappresentare ad esempio una fune che sostiene una massa. Il passaggio di corrente nel disco produce il momento magnetico

$$\vec{M}_B = -\frac{IBr^2}{2} \vec{\omega}$$

che mette in moto il disco. Tale rotazione produce una f.e.m. indotta

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} \omega B r^2$$

tale per cui nel sistema circola una corrente complessiva

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mathcal{E}_0 - \frac{1}{2} \omega B r^2}{R}$$

Dal teorema del momento angolare otteniamo l'equazione differenziale ordinaria che descrive il moto:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_B - M_{opp} \frac{IBr^2}{2} - M_{opp}$$

con  $I$  il momento di inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione.

L'andamento temporale della velocità è dettato dal *tempo caratteristico*:

$$\tau = \frac{4IR}{B^2} \quad (11.39)$$

che, come tutti i tempi caratteristici visti finora, si vede essere dimensionalmente (poco) sorprendentemente pari ad una quantità temporale - quindi nel SI si misura in secondi. La velocità angolare della sbarra dopo un tempo *infinito* (ossia a *regime*) è costante in quanto  $M_B = M_{opp}$  ed è pari a

$$\omega_\infty = \frac{2}{Br^2} \left( \mathcal{E}_0 - \frac{2RM_{opp}}{Br^2} \right) \quad (11.40)$$

da cui segue che la f.e.m., la corrente e la potenza di regime sono

$$\mathcal{E}_i = -\mathcal{E}_0 + \frac{2RM_{opp}}{Br^2} \quad (11.41)$$

$$I_\infty = \frac{2M_{opp}}{Br^2} P_\infty = RI_\infty^2 + M_{opp}\omega_\infty \quad (11.42)$$

#### 11.4 IL METODO SIMBOLICO

Finché ci limitiamo a *circuiti semplici*, costituiti solo da un generatore AC e un componente elettrico, determinare tutte le grandezze in gioco non è particolarmente difficile. Tuttavia, in presenza di *molte componenti* risulta particolarmente complicato - dato che stiamo operando con grandezze sinusoidali!

In aiuto ci viene il **metodo simbolico**, un approccio di analisi dei circuiti che consente di risolvere le reti in corrente alternata sinusoidale in modo formalmente analogo alle reti in corrente continua grazie ai *fasori*<sup>1</sup>. L'idea di fondo è di associare all'intensità di corrente

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I) \quad (11.43)$$

un'**intensità di corrente complessa**, ossia il fasore

$$\hat{I}(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I) + i I_0 \sin(\omega t + \phi_I) = I_0 e^{i(\omega t + \phi_I)} = I_0 e^{i\omega t} e^{i\phi_I} \quad (11.44)$$

in modo che la parte reale della corrente complessa sia la corrente vera e propria

$$\operatorname{Re} \hat{I}(t) = I(t) \quad (11.45)$$

---

<sup>1</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 262, è possibile trovare maggiori dettagli e risultati sui fasori.

In modo analogo, alla differenza di potenziale ai capi di una componente elettrica (resistore, induttore, condensatore)

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_V) \quad (11.46)$$

si può definire il fasore associato

$$\hat{V}(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_V) + iV_0 \sin(\omega t + \phi_V) = V_0 e^{i(\omega t + \phi_V)} = I_0 e^{i\omega t} e^{i\phi_V} \quad (11.47)$$

**Impedenza e ammettenza** Il rapporto tra due fasori qui definiti è una quantità complessa (ma *non* un fasore!) detta **impedenza elettrica**.

#### DEFINIZIONE 11.4.1. - IMPEDENZA E AMMETTENZA.

L'**impedenza elettrica** è una quantità complessa indipendente dal tempo che rappresenta un ostacolo al passaggio della corrente alternata in un circuito, causando una differenza di potenziale al passaggio di corrente. Essa combina assieme gli effetti di eventuali *resistori, induttori e condensatori*. La legge che lega l'intensità di corrente e la d.d.p. è la **legge di Ohm generalizzata**:

$$\hat{V}(t) = Z \hat{I}(t) \quad (11.48)$$

Un'espressione dell'impedenza è quindi

$$Z = \frac{V_0}{I_0} e^{i(\phi_V - \phi_I)} = \frac{V_0}{I_0} e^{i\theta} \quad (11.49)$$

Il reciproco dell'impedenza è detta **ammettenza elettrica**.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{Z} \quad (11.50)$$

**ATTENZIONE!** Alcuni testi ambiguumamente usano il termine “*impedenza*” per indicare il valore reale dato dal *modulo* dell'impedenza (complessa) qui definita. Per evitare inutili confusioni in questo testo ci riferiremo soltanto all'impedenza complessa

Dato un componente elettrico attraversato da una corrente complessa

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} e^{i\phi}$$

e dotato di un impedenza

$$Z = Z_0 e^{i\theta} = |Z| e^{i\theta} \quad (11.51)$$

dalla legge di Ohm generalizzata e dalla regola di moltiplicazione di un fasore per uno scalare complesso segue che il voltaggio complesso applicato ai capi dell'impedenza è

$$\hat{V}(t) = Z_0 I_0 e^{i\omega t} e^{i(\theta + \phi)} \quad (11.52)$$

Prendendo la parte reale si ottiene la seguente versione della legge di Ohm:

$$V(t) = Z_0 I_0 \cos(\omega t + (\theta + \phi)) \quad (11.53)$$

Il valore massimo  $V_0$  è legato al valore massimo  $I_0$  dalla relazione lineare

$$V_0 = Z_0 I_0 \quad (11.54)$$

I valori massimi non sono (generalmente) raggiunti nello stesso istante, in quanto  $V$  e  $I$  possono essere sfasate.

**OSSERVAZIONE.** L'impedenza *non* è una costante caratteristica del circuito in quanto dipende dalla pulsazione  $\omega$ .

**Unità di misura** L'unità di misura dell'impedenza è la stessa della resistenza, l'*ohm*; segue chiaramente che l'ammettenza si misura in *siemens*.

#### UNITÀ DI MISURA.

**IMPEDENZA ELETTRICA:** ohm ( $\Omega$ ) o volt su ampere ( $\frac{V}{A}$ ).

$$\text{Dimensioni: } [Z] = \frac{[V]}{[I]} = ML^2T^{-3}I^{-2}$$

#### UNITÀ DI MISURA.

**AMMETTENZA ELETTRICA:** siemens (S), mho ( $\mathcal{U}$ ) o ampere su volt ( $\frac{A}{V}$ ).

$$\text{Dimensioni: } [\mathcal{A}] = \frac{[I]}{[V]} = I^2T^3M^{-1}L^{-2}$$

★ **Resistenza e reattanza** In forma cartesiana, l'impedenza prende la forma

$$Z = R + iX \quad (11.55)$$

Mentre la parte reale coincide la resistenza del componente...

$$R = \operatorname{Re} Z \quad (11.56)$$

... la parte immaginaria è una quantità detta **reattanza**.

#### DEFINIZIONE 11.4.2. - REATTANZA.

La **reattanza elettrica** è una quantità che rappresenta un ostacolo al passaggio della corrente alternata in un circuito da parte di induttori o condensatori, causando una differenza di potenziale al passaggio di corrente. Essa è la parte immaginaria dell'impedenza.

$$X = \operatorname{Im} Z \quad (11.57)$$

Il reciproco della reattanza è detta **suscettanza elettrica**.

$$B = \frac{1}{X} \quad (11.58)$$

L'unità di misura della reattanza è ovviamente la stessa della resistenza, l'*ohm* e quella della suscettanza si misura in *siemens*.

#### UNITÀ DI MISURA.

**REATTANZA ELETTRICA:** ohm ( $\Omega$ ) o volt su ampere ( $\frac{V}{A}$ ).

$$\text{Dimensioni: } [X] = ML^2T^{-3}I^{-2}$$

#### UNITÀ DI MISURA.

**AMMETTENZA ELETTRICA:** siemens (S), mho ( $\mathcal{U}$ ) o ampere su volt ( $\frac{A}{V}$ ).

$$\text{Dimensioni: } [B] = I^2T^3M^{-1}L^{-2}$$

La resistenza e la reattanza all'apparenza sembrano simili: entrambe sono grandezze con le stesse dimensioni e per entrambe si ha che maggiore è la resistenza/reattanza, minore è la corrente che passa a parità di voltaggio. Inoltre, un circuito dotato di elementi che

hanno soltanto una reattanza (induttori, condensatori) si possono studiare come se tutte le componenti fossero dei resistori.

Ci sono però delle differenze fondamentali tra le due. In primis, la reattanza *cambia la fase della corrente* di un quarto di periodo relativamente alla fase della d.d.p. applicata dai capi della resistenza. Inoltre, per le componenti dotate di reattanza la potenza elettrica *non viene dissipata* come succede con i resistori, bensì *viene immagazzinata* sotto forma di energia del campo magnetico (induttore) o del campo elettrico (condensatori). Infine, ma non meno importante, la reattanza *dipende* dalla pulsazione e quindi dalla frequenza della corrente elettromagnetica.

**Induttanze in serie e in parallelo** Il principale vantaggio è che le induttanze equivalenti dei circuiti in serie e dei in parallelo seguono la stessa legge per calcolare la resistenza equivalente di resistori in serie e in parallelo:

- Impedenze in serie:

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (11.59)$$

- Impedenze in parallelo:

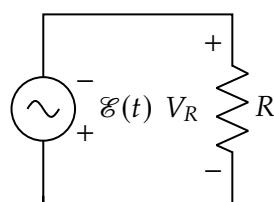
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i} \quad (11.60)$$

## Risoluzione dei

### 11.5 ESEMPI DI CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

Nella trattazione che faremo supponiamo senza perdita di generalità che se è nota inizialmente la corrente  $I$ , la sua fase sia  $\phi_I = 0$  - in modo che per  $t = 0$  si abbia subito il valore massimo della corrente; in modo analogo, se è nota la d.d.p.  $V$ , la sua fase sia  $\phi_V = 0$ .

#### 11.5.1 Resistore $R$



Applicando ai capi del resistore  $R$  una f.e.m.

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

per la *legge di Ohm* si ha un passaggio di corrente alternata

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (11.61)$$

La f.e.m. e la corrente sono *in fase* ( $\psi_R = 0$ ), con relazione tra i valori massimi dati da

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad (11.62)$$

Invece, se un resistore  $R$  è attraversato da corrente alternata

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

la d.d.p. ai capi è

$$V_R(t) = RI(t) = RI_0 \cos(\omega t) = V_{R,0} \cos(\omega t) \quad (11.63)$$

La d.d.p. e la corrente sono *in fase* ( $\phi_R = 0$ ), con relazione tra i valori massimi dati da

$$V_{R,0} = RI_0 \quad (11.64)$$

**OSSERVAZIONE.** Il comportamento di un resistore in regime alternato *non* dipende dal valore della pulsazione  $\omega$ .

### Metodo simbolico

#### PROPOSIZIONE 11.5.1. - IMPEDENZA DEL RESISTORE.

L'impedenza di un resistore  $R$  percorso da corrente alternata  $I(t) = I_0 \cos \omega t$  è

$$Z_R = R \quad (11.65)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Definiamo il fasore della corrente elettrica

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} = I_0 \cos(\omega t) + iI_0 \sin(\omega t)$$

e quello della d.d.p. ai capi del resistore  $R$

$$\hat{V}_R(t) = V_{R,0} e^{i(\omega t + \varphi_R)} = V_{R,0} \cos(\omega t + \varphi_R) + iV_{R,0} \sin(\omega t + \varphi_R)$$

Dalla legge di Ohm ricaviamo  $\varphi_R$  e  $V_{R,0}$ :

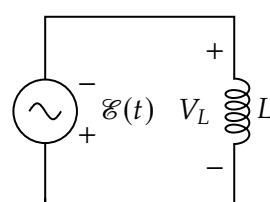
$$V_R(t) = V_{R,0} \cos(\omega t + \varphi_R) = RI_0 \cos(\omega t) \implies \begin{cases} \varphi_R = 0 \\ V_{R,0} = R \end{cases}$$

Di conseguenza, dalla definizione di impedenza segue

$$Z_R = \frac{V_{R,0}}{I_0} e^{i\varphi_R} = \frac{V_{R,0}}{I_0} = R$$

□

### 11.5.2 Induttore $L$



la corrente che attraversa l'induttore è la soluzione all'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) - L \frac{dI}{dt} &= 0 \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\mathcal{E}(t)}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t)\end{aligned}$$

da cui otteniamo la legge

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (11.66)$$

La f.e.m. e la corrente *non* sono in fase, bensì sono sfasate di un fattore  $\psi_L = -\pi/2$ . Invece, se un resistore  $R$  è attraversato da corrente alternata

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

la d.d.p. ai capi è

$$V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = -\omega L I_0 \sin(\omega t) = V_{L,0} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (11.67)$$

La d.d.p. e la corrente *non* sono in fase, bensì sono sfasate di un fattore  $\phi_L = \pi/2$ .

### Metodo simbolico

#### PROPOSIZIONE 11.5.2. - IMPEDENZA DELL'INDUTTORE.

L'impedenza di un induttore  $L$  percorso da corrente alternata  $I(t) = I_0 \cos \omega t$  è

$$Z_R = i\omega L \quad (11.68)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Definiamo il fasore della corrente elettrica

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} = I_0 \cos(\omega t) + iI_0 \sin(\omega t)$$

e quello della d.d.p. ai capi dell'induttore  $L$

$$\hat{V}_L(t) = V_{L,0} e^{i(\omega t + \varphi_L)} = V_{L,0} \cos(\omega t + \varphi_L) + iV_{L,0} \sin(\omega t + \varphi_L)$$

Dalla relazione

$$V_L(t) = L \frac{d}{dt} I(t)$$

ricaviamo  $\varphi_L$  e  $V_{L,0}$ :

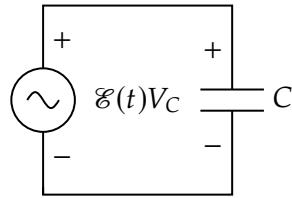
$$V_L(t) = V_{L,0} \cos(\omega t + \varphi_L) = -\omega L I_0 \sin(\omega t) = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \implies \begin{cases} \varphi_L = \frac{\pi}{2} \\ V_{L,0} = \omega L I_0 \end{cases}$$

Di conseguenza, dalla definizione di impedenza segue

$$Z_L = \frac{V_{L,0}}{I_0} e^{i\varphi_L} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega L$$

□

### 11.5.3 Condensatore $C$



Applicando ai capi del condensatore  $C$  una f.e.m.

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

la carica che si deposita sulle armature del condensatore è data da

$$\mathcal{E}(t) = V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$q(t) = C\mathcal{E}(t) = C\mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad (11.69)$$

La corrente che attraversa l'induttore si ottiene derivando la precedente relazione

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$$

da cui otteniamo la legge

$$I(t) = \mathcal{E}_0 \omega C \sin(\omega t) = \mathcal{E}_0 \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (11.70)$$

La f.e.m. e la corrente *non* sono in fase, bensì sono sfasate di un fattore  $\psi_C = \pi/2$ .

Invece, se un resistore  $R$  è attraversato da corrente alternata

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

la d.d.p. ai capi è data dalla legge

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

o, equivalentemente, integrando la seguente:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} dv q(t) t = \frac{I(t)}{C} = \frac{I_0}{C} \cos(\omega t)$$

$$V_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V_{C,0} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (11.71)$$

La d.d.p. e la corrente *non* sono in fase, bensì sono sfasate di un fattore  $\phi_C = -\pi/2$ .

### Metodo simbolico

#### PROPOSIZIONE 11.5.3. - IMPEDENZA DEL CONDENSATORE.

L'impedenza di un condensatore  $L$  percorso da corrente alternata  $I(t) = I_0 \cos \omega t$  è

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (11.72)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Definiamo il fasore della corrente elettrica

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} = I_0 \cos(\omega t) + iI_0 \sin(\omega t)$$

e quello della d.d.p. ai capi del condensatore  $C$

$$\hat{V}_C(t) = V_{C,0} e^{i(\omega t + \varphi_C)} = V_{C,0} \cos(\omega t + \varphi_C) + iV_{C,0} \sin(\omega t + \varphi_C)$$

Integrando

$$\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} dVq(t)t = \frac{I(t)}{C} = \frac{I_0}{C} \cos(\omega t)$$

ricaviamo  $\varphi_C$  e  $V_{C,0}$ :

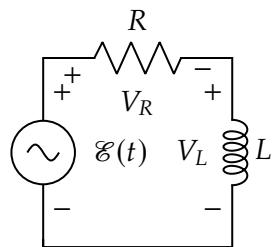
$$V_C(t) = V_{C,0} \cos(\omega t + \varphi_C) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \implies \begin{cases} \varphi_C = -\frac{\pi}{2} \\ V_{C,0} = \frac{I_0}{\omega C} \end{cases}$$

Di conseguenza, dalla definizione di impedenza segue

$$Z_C = \frac{V_{C,0}}{I_0} e^{i\phi_C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i\omega C}$$

□

#### 11.5.4 Circuito RL in serie



Se nel circuito circola una corrente alternata di intensità

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

le differenze ai capi del resistore e dell'induttore sono

$$V_R(t) = V_{R,0} \cos(\omega t + \phi_R) = |Z_R| I_0 \cos(\omega t + \phi_R)$$

$$V_L(t) = V_{L,0} \cos(\omega t + \phi_L) = |Z_L| I_0 \cos(\omega t + \phi_L) = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'impedenza complessiva è la somma delle impedenze dei singoli componenti:

$$Z_{RL} = Z_R + Z_L = R + i\omega L \quad (11.73)$$

$$|Z_{RL}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (11.74)$$

La d.d.p. complessiva è data dalla somma di  $V_R(t)$  e  $V_L(t)$ , che possiamo ottenere sia come somma di fasori, sia tramite la rappresentazione vettoriale.

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) = V_{RL,0} \cos(\omega t + \phi_{RL})$$

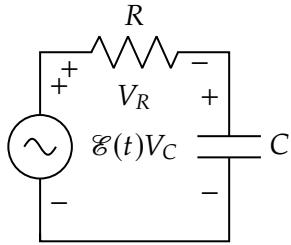
dove

$$V_{RL,0} = \sqrt{V_{R,0}^2 + V_{L,0}^2 + V_{R,0} V_{L,0} \cos(\phi_R - \phi_L)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(RI_0)^2 + (\omega LI_0)^2 + 2(RI_0)(\omega LI_0) \cos(0 - \frac{\pi}{2})} = \\
 &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0 = \sqrt{Z_R^2 + Z_L^2} I_0 = |Z_{RL}| I_0
 \end{aligned}$$

$$\tan \phi_{RL} = \frac{V_{R,0} \sin \phi_R + V_{L,0} \sin \phi_L}{V_{R,0} \cos \phi_R + V_{L,0} \cos \phi_L} = \frac{RI_0 \sin 0 + \omega LI_0 \sin \frac{\pi}{2}}{RI_0 \cos 0 + \omega LI_0 \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{\omega LI_0}{RI_0} = \frac{|Z_L|}{|Z_R|}$$

### 11.5.5 Circuito RC in serie



Se nel circuito circola una corrente alternata di intensità

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

le differenze ai capi del resistore e del condensatore sono

$$V_R(t) = V_{R,0} \cos(\omega t + \phi_R) = |Z_R| I_0 \cos(\omega t + \phi_R) = RI_0 \cos(\omega t)$$

$$V_C(t) = V_{C,0} \cos(\omega t + \phi_C) = |Z_C| I_0 \cos(\omega t + \phi_C) = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

L'impedenza complessiva è la somma delle impedenze dei singoli componenti:

$$Z_{RC} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i \frac{1}{\omega C} \quad (11.75)$$

$$|Z_{RC}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (11.76)$$

La d.d.p. complessiva è data dalla somma di  $V_R(t)$  e  $V_C(t)$ , che possiamo ottenere sia come somma di fasori, sia tramite la rappresentazione vettoriale.

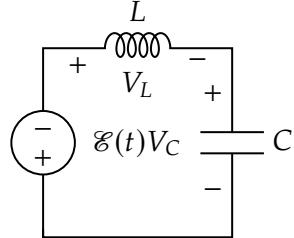
$$V(t) = V_R(t) + V_C(t) = V_{RC,0} \cos(\omega t + \phi_{RC})$$

dove

$$\begin{aligned}
 V_{RC,0} &= \sqrt{V_{R,0}^2 + V_{C,0}^2 + V_{R,0} V_{C,0} \cos(\phi_R - \phi_C)} = \\
 &= \sqrt{(RI_0)^2 + \left(\frac{I_0}{i\omega C}\right)^2 + 2(RI_0)\left(\frac{I_0}{i\omega C}\right) \cos(0 + \frac{\pi}{2})} = \\
 &= \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} I_0 = \sqrt{Z_R^2 + Z_C^2} I_0 = |Z_{RC}| I_0
 \end{aligned}$$

$$\tan \phi_{RC} = \frac{V_{R,0} \sin \phi_R + V_{C,0} \sin \phi_C}{V_{R,0} \cos \phi_R + V_{C,0} \cos \phi_C} = \frac{RI_0 \sin 0 + \frac{I_0}{\omega C} \sin(-\frac{\pi}{2})}{RI_0 \cos 0 + \frac{I_0}{\omega C} \cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{\frac{I_0}{\omega C}}{RI_0} = \frac{1}{\omega RC} = -\frac{|Z_C|}{|Z_R|}$$

### 11.5.6 Circuito LC in serie



Se nel circuito circola una corrente alternata di intensità

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

le differenze ai capi dell'induttore e del condensatore sono

$$\begin{aligned} V_L(t) &= V_{L,0} \cos(\omega t + \phi_L) = |Z_L| I_0 \cos(\omega t + \phi_L) = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ V_C(t) &= V_{C,0} \cos(\omega t + \phi_C) = |Z_C| I_0 \cos(\omega t + \phi_C) = \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

L'impedenza complessiva è la somma delle impedenze dei singoli componenti:

$$Z_{LC} = Z_L + Z_C = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (11.77)$$

$$|Z_{LC}| = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| \quad (11.78)$$

La d.d.p. complessiva è data dalla somma di  $V_L(t)$  e  $V_C(t)$ , che possiamo ottenere sia come somma di fasori, sia tramite la rappresentazione vettoriale.

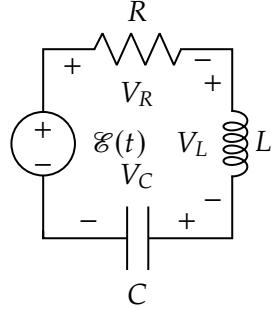
$$V(t) = V_L(t) + V_C(t) = V_{LC,0} \cos(\omega t + \phi_{LC})$$

dove

$$\begin{aligned} V_{LC,0} &= \sqrt{V_{L,0}^2 + V_{C,0}^2 + V_{L,0}V_{C,0} \cos(\phi_L - \phi_C)} = \\ &= \sqrt{(\omega L I_0)^2 + \left(\frac{I_0}{\omega C}\right)^2 + 2(\omega L I_0)\left(\frac{I_0}{\omega C}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{(\omega L I_0)^2 + \left(\frac{I_0}{\omega C}\right)^2 - 2(\omega L I_0)\left(\frac{I_0}{\omega C}\right) I_0} = \left| \omega L I_0 - \frac{I_0}{\omega C} \right| I_0 = \\ &= |Z_L - Z_C| I_0 = |Z_{LC}| I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{LC} &= \operatorname{sgn}(V_{L,0} \cos \phi_L + V_{C,0} \cos \phi_C) \frac{\pi}{2} = \operatorname{sgn}\left(\omega L I_0 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{\pi}{2} = \\ &= \operatorname{sgn}\left(\omega L I_0 - \frac{I_0}{\omega C}\right) \frac{\pi}{2} = \operatorname{sgn}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \frac{\pi}{2} = \operatorname{sgn}(Z_L - Z_C) \frac{\pi}{2} = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & Z_L > Z_C \\ -\frac{\pi}{2} & Z_L < Z_C \end{cases} \end{aligned}$$

## 11.5.7 Circuito RLC in serie



Se nel circuito circola una corrente alternata di intensità

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

le differenze ai capi dei componenti elettrici sono

$$\begin{aligned} V_R(t) &= V_{R,0} \cos(\omega t + \phi_R) = |Z_R|I_0 \cos(\omega t + \phi_R) = RI_0 \cos(\omega t) \\ V_L(t) &= V_{L,0} \cos(\omega t + \phi_L) = |Z_L|I_0 \cos(\omega t + \phi_L) = \omega LI_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ V_C(t) &= V_{C,0} \cos(\omega t + \phi_C) = |Z_C|I_0 \cos(\omega t + \phi_C) = \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

L'impedenza complessiva è la somma delle impedenze dei singoli componenti:

$$Z_{RLC} = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (11.79)$$

$$|Z_{RLC}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (11.80)$$

In forma esponenziale, essa è

$$Z_{RLC} = |Z_{RLC}|e^{i\theta}$$

dove

$$\tan \theta = \frac{\text{Im} Z_{RLC}}{\text{Re} Z_{RLC}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Preso la corrente complessa

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

la d.d.p. complessa totale risulta

$$\hat{V}(t) = Z_{RLC} \hat{I}(t) = |Z_{RLC}| I_0 e^{i\omega t} e^{i\theta} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_0 e^{i\omega t} e^{i\theta}$$

In termini non complessi il voltaggio è pari a

$$V(t) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_0 \cos(\omega t + \theta)$$

### 11.5.7.1 Selezionatore di frequenze

La relazione tra la corrente massima  $I_0$  e la d.d.p. massima  $V_0$  c'è la relazione

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (11.81)$$

Fissata la differenza di potenziale  $V_0$  ai capi delle componenti e i loro valori  $L$ ,  $C$  ed  $R$ , la corrente  $I_0$  risulta dipendere esclusivamente dalla pulsazione  $\omega$  - a cui corrisponde una particolare frequenza  $v$  tale per cui

$$\omega = 2\pi v \quad (11.82)$$

Fra tutte le frequenze ammissibili, ce n'è una di particolare rilevanza

#### DEFINIZIONE 11.5.1. - FREQUENZA DI RISONANZA.

La **frequenza di risonanza** di un circuito AC in serie è la frequenza tale per cui l'impedenza del circuito è minima e la fase è nulla.

Dalla (11.81) è evidente che se l'impedenza è minima, la corrente che scorre nel circuito è massima. Nel caso del circuito  $RLC$  in serie, osserviamo come dal punto di vista fasoriale/vettoriale le impedenze  $Z_L$  e  $Z_C$  hanno la stessa direzione, ma versi opposti e moduli che dipendono dalla frequenza, mentre l'impedenza del resistore  $Z_R$  non dipende dalla frequenza ed è ortogonale alle altre. Di conseguenza, è immediato realizzare che la *condizione di risonanza* si ha quando la *reattanza* è nulla.

$$0 = X_{RLC} = \text{Im}Z_{RLC} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}$$

da cui segue facilmente che

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

I circuiti risonanti sono utilizzati per rispondere *selettivamente* a segnali di una certa frequenza, trascurando segnali di frequenze diverse: scelta la frequenza di risonanza  $\omega_0$ , l'intensità di corrente che scorre nel circuito presenta un picco in sua corrispondenza.

Se consideriamo la larghezza  $\Delta\omega$  della curva di risonanza a metà del massimo, possiamo introdurre un **fattore di qualità**

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (11.83)$$

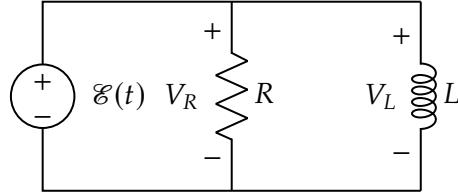
Maggiore è  $Q$ , più evidente sarà il massimo assunto dalla corrente e minore la corrente che scorre nel circuito a frequenze differenti. Si può osservare che

$$\Delta\omega \sim \frac{R}{L} \quad (11.84)$$

Facendo tendere  $\frac{R}{L}$  a zero segue che anche  $\Delta\omega$  tende a zero e quindi il fattore  $Q$  diventa molto elevato: la curva di risonanza risulta essere praticamente nulla per tutte le frequenze eccetto quella di risonanza. Di conseguenza, di fatto non scorre corrente nel circuito a meno di essere in presenza della frequenza di risonanza.

Quello che abbiamo descritto è sostanzialmente il funzionamento dei radioricevitori per le *radio AM*: la selettività della sintonizzazione deve essere tale da escludere le stazioni radio sopra e sotto la *frequenza portante* - quella che vogliamo ascoltare - ma non così elevata da escludere le *bande laterali*, causate dalla modulazione d'ampiezza del segnale.

### 11.5.8 ★ Circuito $RL$ in parallelo



Se ai capi dei rami i paralleli c'è una d.d.p. alternata

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

le correnti che attraversano il resistore e l'induttore sono

$$\begin{aligned} I_R(t) &= I_{R,0} \cos(\omega t + \phi_R) = \frac{V_0}{|Z_R|} \cos(\omega t + \phi_R) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) \\ I_L(t) &= I_{L,0} \cos(\omega t + \phi_L) = \frac{V_0}{|Z_L|} \cos(\omega t + \phi_L) = \frac{V_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

L'ammettenza complessiva è la somma delle ammettenze dei singoli componenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{RL}} &= \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{R} - i\frac{1}{\omega L} \\ Z_{RL} &= \frac{1}{\frac{1}{R} - i\frac{1}{\omega L}} = \frac{\omega LR}{\omega L - iR} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ |Z_{RL}| &= \sqrt{\frac{\omega^4 L^4 R^2 + \omega^2 L^2 R^4}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\omega^2 L^2 R^2)(R^2 + \omega^2 L^2)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \end{aligned}$$

$$Z_{RL} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (11.85)$$

$$|Z_{RL}| = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (11.86)$$

In forma esponenziale, essa è

$$Z_{RL} = |Z_{RL}|e^{i\theta}$$

dove

$$\tan \theta = \frac{\Im Z_{RL}}{\Re Z_{RL}} = \frac{R}{\omega L}$$

Preso la d.d.p. complessa

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

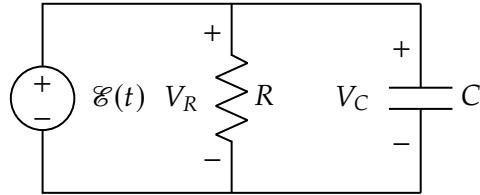
la corrente complessa totale risulta

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{Z_{RL}} \hat{V}(t) = \frac{1}{|Z_{RL}|} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega LR} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta}$$

In termini non complessi il voltaggio è pari a

$$V(t) = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega LR} V_0 \cos(\omega t - \theta)$$

## 11.5.9 ★ Circuito RC in parallelo



Se ai capi dei rami i paralleli c'è una d.d.p. alternata

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

le correnti che attraversano il resistore e l'induttore sono

$$\begin{aligned} I_R(t) &= I_{R,0} \cos(\omega t + \phi_R) = \frac{V_0}{|Z_R|} \cos(\omega t + \phi_R) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) \\ I_C(t) &= I_{C,0} \cos(\omega t + \phi_C) = \frac{V_0}{|Z_C|} \cos(\omega t + \phi_C) = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

L'ammettenza complessiva è la somma delle ammettenze dei singoli componenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{RC}} &= \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + i\omega C \\ Z_{RC} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C} = \frac{R}{1 + i\omega CR} = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - i \frac{\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \\ |Z_{RC}| &= \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 C^2 R^4}{(1 + \omega^2 C^2 R^2)^2}} = \sqrt{\frac{R^2 (1 + \cancel{\omega^2 C^2 R^2})}{(1 + \omega^2 C^2 R^2)^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \end{aligned}$$

$$Z_{RC} = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - i \frac{\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \quad (11.87)$$

$$|Z_{RC}| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \quad (11.88)$$

In forma esponenziale, essa è

$$Z_{RC} = |Z_{RC}| e^{i\theta}$$

dove

$$\tan \theta = \frac{\text{Im } Z_{RC}}{\text{Re } Z_{RC}} = -\omega CR$$

Preso la d.d.p. complessa

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

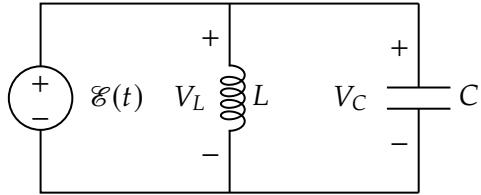
la corrente complessa totale risulta

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{Z_{RC}} \hat{V}(t) = \frac{1}{|Z_{RC}|} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta}$$

In termini non complessi il voltaggio è pari a

$$V(t) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} V_0 \cos(\omega t - \theta)$$

## 11.5.10 ★ Circuito LC in parallelo



Se ai capi dei rami i paralleli c'è una d.d.p. alternata

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

le correnti che attraversano il resistore e l'induttore sono

$$\begin{aligned} I_L(t) &= I_{L,0} \cos(\omega t + \phi_L) = \frac{V_0}{|Z_L|} \cos(\omega t + \phi_L) = \frac{V_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ I_C(t) &= I_{C,0} \cos(\omega t + \phi_C) = \frac{V_0}{|Z_C|} \cos(\omega t + \phi_C) = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

L'ammettenza complessiva è la somma delle ammettenze dei singoli componenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{LC}} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\ Z_{RC} &= \frac{1}{i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = -i\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \\ |Z_{LC}| &= \left| \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \right| = \frac{\omega L}{|\omega^2 LC - 1|} \end{aligned}$$

$$Z_{LC} = -i\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \quad (11.89)$$

$$|Z_{LC}| = \frac{\omega L}{|\omega^2 LC - 1|} \quad (11.90)$$

In forma esponenziale, essa è

$$Z_{LC} = |Z_{LC}|e^{i\theta}$$

dove

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{sgn}(1 - \omega^2 LC) \frac{\pi}{2} = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \frac{\pi}{2} = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{|Z_L|} - \frac{1}{|Z_C|}\right) \frac{\pi}{2} = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & Z_C > Z_L \\ -\frac{\pi}{2} & Z_C < Z_L \end{cases} \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** Per  $Z_C = Z_L$ , ossia se  $\omega$  coincide con la frequenza di risonanza, l'impedenza è nulla e la corrente si annulla, essendo  $I_L = -I_C$ .

Presi la d.d.p. complessa

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

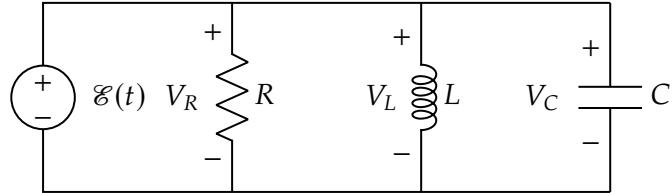
la corrente complessa totale risulta

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{Z_{LC}} \hat{V}(t) = \frac{1}{|Z_{LC}|} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta} = \frac{|\omega^2 LC - 1|}{\omega L} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta}$$

In termini non complessi il voltaggio è pari a

$$V(t) = \frac{|\omega^2 LC - 1|}{\omega L} V_0 \cos(\omega t - \theta)$$

**11.5.11 ★ Circuito RLC in parallelo**



Se ai capi dei rami i paralleli c'è una d.d.p. alternata

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

le correnti che attraversano il resistore e l'induttore sono

$$\begin{aligned} I_R(t) &= I_{R,0} \cos(\omega t + \phi_R) = \frac{V_0}{|Z_R|} \cos(\omega t + \phi_R) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) \\ I_L(t) &= I_{L,0} \cos(\omega t + \phi_L) = \frac{V_0}{|Z_L|} \cos(\omega t + \phi_L) = \frac{V_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ I_C(t) &= I_{C,0} \cos(\omega t + \phi_C) = \frac{V_0}{|Z_C|} \cos(\omega t + \phi_C) = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

L'ammettenza complessiva è la somma delle ammettenze dei singoli componenti; di conseguenza, il modulo della impedenza complessiva è l'inverso del modulo dell'ammettenza:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{RLC}} &= \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\ |Z_{RLC}| &= \frac{1}{\left|\frac{1}{Z_{RLC}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$|Z_{RLC}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad (11.91)$$

In forma esponenziale, l'impedenza è

$$Z_{RLC} = |Z_{RLC}| e^{i\theta}$$

dove<sup>2</sup>

$$\tan \theta = \tan \left( -\frac{\operatorname{Im} \left( \frac{1}{Z_{RLC}} \right)}{\operatorname{Re} \left( \frac{1}{Z_{RLC}} \right)} \right) = \tan \left( \frac{R}{\omega L} - R\omega C \right)$$

---

<sup>2</sup>L'ammettenza in forma esponenziale si scrive come

$$\frac{1}{Z_{RLC}} = \frac{1}{|Z_{RLC}|} e^{i\varphi}$$

dove

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} \left( \frac{1}{Z_{RLC}} \right)}{\operatorname{Re} \left( \frac{1}{Z_{RLC}} \right)}$$

Presi la d.d.p. complessa

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

la corrente complessa totale risulta

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{Z_{RLC}} \hat{V}(t) = \frac{1}{|Z_{RLC}|} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} V_0 e^{i\omega t} e^{-i\theta}$$

In termini non complessi il voltaggio è pari a

$$V(t) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} V_0 \cos(\omega t - \theta)$$

---

Se prendiamo il reciproco di  $Z_{RLC} = |Z_{RLC}|e^{i\theta}$  in forma esponenziale abbiamo

$$\frac{1}{Z_{RLC}} = \frac{1}{|Z_{RLC}|} e^{i(-\theta)}$$

da cui segue che

$$\theta = -\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \implies \tan \theta = \tan(-\varphi)$$

# CAPITOLO 12

## PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA

---

*“Water, fire, air and dirt  
 Fucking magnets, how do they work?  
 And I don’t wanna talk to a scientist  
 Y’all motherfuckers lying, and getting me pissed”*

*INSANE CLOWN POSSE, vincitori del premio Nobel per la fisica del 2009.*

**N**EI capitoli precedenti abbiamo esplorato i fenomeni elettrostatici.

### 12.1 PERMEABILITÀ MAGNETICA E SUSCETTIVITÀ MAGNETICA

**RICORDIAMO...** Prendiamo un *condensatore* che genera tra le armature cariche un campo elettrico costante  $E_0$ . Se poniamo all’interno una lastra di *materiale dielettrico*, il campo elettrico effettivo misurato tra le piastre diventa

$$E_\kappa = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma}{\kappa \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

dove con  $\kappa > 1$  è la *costante dielettrica relativa*, dipendente dal materiale, e

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0$$

la *costante dielettrica assoluta*.

Consideriamo un apparato per generare un campo magnetico costante  $\vec{B}_0$ , come ad esempio un solenoide cilindrico di  $n$  spire percorso da una corrente  $I$ . Riempiamo il solenoide di un certo mezzo omogeneo: il campo  $\vec{B}$  che misuriamo ora in presenza del materiale è parallelo e concorde a  $\vec{B}_0$ ; inoltre, il rapporto tra i moduli del campo magnetico

nel vuoto e di quello misurato nel mezzo è

$$\kappa_m = \frac{B_{\kappa_m}}{B_0} \quad (12.1)$$

Sperimentalmente, si trova che tale rapporto è *caratteristico del tipo* di materiale e non dipende dalla geometria o dalla corrente del solenoide.

**DEFINIZIONE 12.1.1. - COSTANTE DI PERMEABILITÀ MAGNETICA RELATIVA E SUSCETTIBILITÀ ELETTRICA DEL DIELETTRICO.**

La **costante di permeabilità magnetica relativa** è il rapporto adimensionale

$$\kappa_m = \frac{B_{\kappa_m}}{B_0} \quad (12.2)$$

La grandezza

$$\chi_m = \kappa_m - 1 > 0 \quad (12.3)$$

viene detta **suscettibilità magnetica**, mentre la grandezza

$$\mu = \kappa_m \mu_0 \quad (12.4)$$

è definita **permeabilità magnetica assoluta**

La situazione è all'apparenza analoga a quella dei dielettrici: il rapporto tra campo magnetico misurato nel mezzo e quello nel vuoto dipende solo dal materiale e risulta esserci una relazione lineare tra di essi. La grossa differenza rispetto al caso elettrico è che  $\kappa_m$  non è sempre maggiore di 1! Infatti, possiamo classificare i materiali in base alla loro permeabilità magnetica:

- Se  $\kappa_m < 1$  ( $\chi_m < 0$ ) il materiale è detto **diamagnetico**: il campo magnetico nel mezzo è meno intenso di quello nel vuoto.

$$B_\kappa < B_0 \quad (12.5)$$

- Se  $\kappa_m > 1$  ( $\chi_m > 0$ ) il materiale è detto **paramagnetico**: il campo magnetico nel mezzo è meno intenso di quello nel vuoto.

$$B_\kappa > B_0 \quad (12.6)$$

- Se  $\kappa_m \gg 1$  (circa nell'ordine di  $10^5$ ) il materiale è detto *ferromagnetico*. Questo caso esula da quelli precedenti:  $\kappa_m$  non è più un valore *costante* (anzi, varia sensibilmente valore!), ma dipende da *come viene magnetizzato*<sup>1</sup> il materiale.

**ESEMPIO - VALORI DELLA SUSCETTIBILITÀ MAGNETICA.**

Diamagneti	$\chi_m$	Paramagneti	$\chi_m$
Argento	$2,39 \times 10^{-5}$	Alluminio	$2,08 \times 10^{-5}$
Oro	$-3,46 \times 10^{-5}$	Platino	$2,791 \times 10^{-5}$
Rame	$-0,98 \times 10^{-5}$	Uranio	$40,92 \times 10^{-5}$

**12.2 MAGNETIZZAZIONE**

<sup>1</sup>Nella sezione 12.4, pag. 230 approfondiremo i materiali ferromagnetici e come si magnetizzano.

**RICORDIAMO...** Il campo elettrostatico nei materiali dielettrici è dovuto a fenomeni di *polarizzazione*, in cui le particelle del materiale acquistano un momento di dipolo proporzionale ad un campo elettrico esterno in modo da verificare i fenomeni osservati. Ci eravamo concentrati su due tipi di polarizzazioni:

- **Polarizzazione elettronica.** Il campo elettrico esterno causa una *separazione atomica* in cui il centro di carica della nube di elettroni e del nucleo *non coincidono più*, producendo un microscopico momento di dipolo *concorde* al campo elettrico. Gli effetti complessivi dei dipoli causano un  al campo elettrico esterno.
- **Polarizzazione per orientamento.** In un materiale le cui particelle sono già dotate di un *momento di dipolo nativo* - di norma con orientazione *puramente casuale* a causa dell'agitazione termica - il campo elettrico esterno causa l'allineamento di queste con esso. Come prima, gli effetti complessivi dei dipoli causano un *campo elettrico di polarizzazione parallelo ma opposto* al campo elettrico esterno.

In entrambi i casi, il momento di dipolo complessivo è concorde con il campo esterno, mentre il campo elettrico di polarizzazione ad esso associato risulta essere *opposto* al campo esterno

Il processo che nei materiali para/diamagnetici causa il campo magnetico all'interno del mezzo prende il nome di **magnetizzazione**: esso consiste nel far acquisire alle particelle del materiale un *momento (di dipolo) magnetico* in modo da ottenere il comportamento osservato in precedenza. Ci sono diversi metodi di magnetizzazione, ma i più importanti sono la *magnetizzazione atomica* e la *magnetizzazione per orientamento*.

Purtroppo, la loro trattazione è particolarmente complessa e non possiamo addurre una spiegazione *quantitativa e precisa* di questi fenomeni nel *modello classico*<sup>2</sup> - sarà possibile farlo correttamente nell'ambito della Fisica Quantistica. Saremo quindi sintetici sul loro funzionamento.

- **Magnetizzazione atomica.** Il campo magnetico esterno produce un microscopico momento magnetico parallelo ma *opposto* al campo elettrico. Gli effetti complessivi di questi momenti causano un *campo magnetico parallelo ma opposto* al campo magnetico esterno. La magnetizzazione atomica è la causa dei fenomeni *diamagnetici*.
- **Magnetizzazione per orientamento.** In un materiale le cui particelle sono già dotate di *momenti magnetici nativi  $\vec{m}_i$*  - di norma con orientazione *puramente casuale* a causa dell'agitazione termica - il campo magnetico esterno causa l'allineamento di queste con esso. Gli effetti complessivi dei momenti causano un *campo magnetico parallelo e concorde* al campo magnetico esterno. La magnetizzazione per orientamento è la causa dei fenomeni *paramagnetici*.

Ecco "spiegato" *qualitativamente* il perché del valore così vario di  $\kappa_m$ : a seconda di quale effetto dei due *prevale* in un dato materiale, esso sarà diamagnetico o parametrico.

**Magnetizzazione dei materiali** In qualunque caso di magnetizzazione ci troviamo, gli atomi o le molecole in un volumetto  $\Delta V$  del materiale acquistano, sotto l'azione del campo

<sup>2</sup>Per spiegare la *magnetizzazione atomica* con il modello classico si fa uso del *principio di equivalenza di Ampère*, in modo da vedere l'atomo come se fosse una *spira* percorsa da corrente. Capirete anche voi che una spiegazione così è *quantitativa e precisa* tanto quanto calcolare il fabbisogno giornaliero di una mucca, supponendo però di approssimarla con una sfera senza orifizi. Ciò nonostante, il *principio di equivalenza di Ampère* risulta essere comunque valido in contesti meno delicati e di scala maggiore, come il processo di creazione del campo magnetico dalla magnetizzazione.

magnetico esterno  $\vec{B}$ , un *momento magnetico medio*  $\langle \vec{m} \rangle$  orientato parallelamente a  $\vec{B}$ :

$$\langle \vec{m} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{m}_i \quad (12.7)$$

Qui  $N$  è il numero di particelle nel volume  $\Delta V$ . La **densità di magnetizzazione** risulta

$$\vec{M} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{m}_i}{dV} = \frac{dN \langle \vec{m} \rangle}{dV} = n \langle \vec{m} \rangle \quad (12.8)$$

dove

$$n = \frac{N}{\Delta V}$$

è la densità di particelle nell'intorno di  $Q$ .

Normalmente, in assenza di campo magnetico la causalità dei momenti fa sì che

$$\langle \vec{m} \rangle = 0 \implies \vec{M} = 0$$

ma se siamo in presenza di un campo magnetico esterno  $\vec{B}$  il momento magnetico per unità di volume *non* è nullo ed è allineato con  $\vec{B}$ :

$$\langle \vec{m} \rangle \neq 0 \implies \vec{M} \neq 0$$

### 12.2.1 Campo magnetico generato dalla magnetizzazione

**RICORDIAMO...** Nei materiali *dielettrici* attraversati da un *campo elettrico esterno* - generato da un condensatore - si poteva addurre il *campo di polarizzazione opposto* a delle cariche "fittizie" (che poi così fittizie non sono) depositate nel dielettrico con segno opposto a quello della carica libera sul conduttore.

Dalla (12.1) scriviamo

$$B = \kappa_m B_0 = (1 + \chi_m) B_0 = B_0 + \chi_m B_0 = \mu_0 n I \mu_0 \chi_m n I$$

Dato che il termine  $\mu_0 n I$  è il campo magnetico prodotto nel solenoide dalla corrente  $I$  che circola nelle spire, il secondo termine rappresenta l'effetto sul campo magnetico misurato da parte del *mezzo magnetizzato* - effetto identico a quello prodotto da un secondo solenoide uguale al primo, ma percorso da una corrente "fittizia", detta **corrente amperiana**, di intensità

$$I_m = \chi_m I \quad (12.9)$$

Se la corrente amperiana è *discorde* rispetto a quella del solenoide il campo misurato è minore di quello nel vuoto e si è in presenza di fenomeni *diamagnetici*; viceversa, se la corrente amperiana è concorde allora gli effetti si somma e si è verificano fenomeni *paramagnetici*.

Vedremo che questa corrente non è "fittizia": anche se non è una corrente di conduzione, essa è il risultato macroscopico di *correnti di origini atomiche*.

**Modellizzazione delle correnti amperiane - il caso uniforme** Consideriamo la situazione del solenoide “ pieno”. Il cilindro interno di materiale *magnetizzato uniformemente* ha una densità magnetica  $\vec{M} = \text{const}$  parallela all’asse  $z$ . Supponiamo di suddividerlo in dischi di altezza  $dz$  e, a loro volta, li suddividiamo in prismi infinitesimi di base  $d\Sigma$ , altezza  $dz$  e volume  $dV = d\Sigma dh$ . Ciascuno dei prismi ha un momento magnetico orientato come  $\vec{M}$  e pari a

$$d\vec{m} = \vec{M} dV = \left| \vec{M} \right| d\Sigma d\vec{h} = \left| \vec{M} \right| d\Sigma dz \vec{u}_z$$

Per il *principio di equivalenza di Ampère*<sup>3</sup> al prisma magnetizzato possiamo sostituire una spira infinitesima di area  $d\Sigma$  e altezza  $dh$ , attraversata da una corrente  $dI_m$ , il cui momento di dipolo magnetico è pari a  $d\vec{m}$  ed è tale per cui

$$d\vec{m} = dI_m d\Sigma \hat{\mathbf{u}}_z$$

Uguagliando la (12.2.1) e la (12.2.1) otteniamo

$$dI_m = \left| \vec{M} \right| dz \quad (12.10)$$

Siccome supponiamo  $\vec{M}$  uniforme su tutto il dielettrico, il vettore di magnetizzazione è lo stesso per due prismi *contigui*, di conseguenza l’intensità della corrente amperiana infinitesima è costante in tutta l’oggetto. Sulle *superfici di contatto* tra prismi tali corrente sono *uguali e contrarie*, quindi si elidono a due a due. Le uniche correnti non bilanciate sono quelle sulla *superficie esterna* del disco: il disco di materiale magnetizzato uniformemente è equivalente ad un circuito percorso dalla corrente (12.10).

Ripetendo il ragionamento con i dischi, il cilindro è equivalente ad un circuito di altezza  $h$  percorso dalla corrente amperiana

$$\vec{M} = \int_0^h \vec{M} dz = \vec{M} h \quad (12.11)$$

**RICORDIAMO...** La densità superficiale delle cariche di polarizzazione è

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \quad (12.12)$$

La situazione magnetica è *duale* a quella del dielettrico. Infatti, possiamo definire una grandezza vettoriale associata alla corrente amperiana detta **densità lineare di corrente**:

$$\vec{j}_{\Sigma,m} = \vec{M} \times \hat{\mathbf{u}}_n \quad (12.13)$$

il cui verso è regolato dalla *regola della vite*.

**ATTENZIONE!** La densità di corrente amperiana nel caso uniforme, sebbene circoli soltanto sulla superficie, è di natura *lineare*! Infatti, la corrente amperiana circola soltanto su *anelli lineari* (tutti paralleli tra di loro) del cilindro e quindi anche la densità è lineare per questo motivo.

### Modellizzazione delle correnti amperiane - il caso *non uniforme*

<sup>3</sup>Si veda Capitolo 7, sezione 7.6.1, pag. 144.

**RICORDIAMO...** Se il vettore di polarizzazione *non* è uniforme, le cariche di polarizzazione sono presenti anche all'*interno* del dielettrico.

Se il vettore di magnetizzazione *non* è uniforme, la carica amperiana *non* scorre solo sulla superficie. Consideriamo sempre la suddivisione in prismi infinitesimi in modo che in ogni prisma il vettore di magnetizzazione ha un valore costante. Vogliamo studiare il valore della corrente amperiana lungo la direzione  $y$ ; essendo  $\vec{M}$  non uniforme, i contributi alla corrente amperiana provengono da molteplici direzioni.

Prendiamo la *base comune* a due prismi contigui lungo l'asse  $x$  e con area di base  $d\Sigma = dx dz$ . In ciascun prisma, alla componente  $M_z(x)$  di  $\vec{M}$  è associata una corrente  $I_y^{(1)}$  opportuna secondo l'*equivalenza di Ampere*. La corrente complessiva sulla superficie di contatto dati questi due elementi è

$$I_y^{(1)}(z) = I_1^{(I)} - I_2^{(II)} = (M_z(x) - M_z(x + dx)) dz = \left( M_z^{(I)} - M_z^{(II)} \right) dz = -\frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz$$

In realtà non è l'unico contributo lungo l'asse  $y$ . Infatti, consideriamo un'altra coppia di prismi, questa volta contigui lungo l'asse  $z$  e con area di base  $d\Sigma = dx dz$ . In ciascun prisma, la componente  $M_x(z)$  di  $\vec{M}$  è prodotta da un'opportuna corrente di Ampere  $I_y^{(2)}$  lungo  $y$ :

$$I_y^{(2)}(z) = I_1^{(I)}(z) - I_2^{(II)}(z) = (M_x(z) - M_x(z + dz)) dz = \left( M_x^{(I)} - M_x^{(II)} \right) dz = -\frac{\partial M_x}{\partial z} dx dz$$

Si osserva invece che la componente  $M_y(y)$  è *uniforme* in entrambi i casi affrontati e, d'altro canto, non ha rilevanza per le correnti amperiane perché tale situazione è riconducibile a quella già vista in cui le correnti interne si semplificano.

In totale, lungo l'asse  $Y$  la corrente è

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) dx dz = (\vec{\nabla} \times \vec{M})_y dx dz \quad (12.14)$$

Dalla definizione di intensità di corrente

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{v} \vec{b} h u_n d\Sigma$$

Si nota inoltre che l'elemento di area è ortogonale all'asse  $y$ , quindi la componente lungo  $y$  della densità di corrente è

$$j_y = \frac{dI_y}{dx dz} \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) = (\vec{\nabla} \times \vec{M})_y$$

Riapplicando il ragionamento anche nelle altre direzioni otteniamo

$$\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (12.15)$$

Dalle leggi (12.13) e (12.15) si deduce che gli effetti magnetici di un mezzo magnetizzato si possono calcolare a partire da una distribuzione superficiale di corrente con densità *lineare*  $\vec{j}_{\Sigma,m}$  e di una distribuzione spaziale di corrente con densità  $\vec{j}_m$ .

### 12.3 LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEI MATERIALI

Siamo ora in grado di formulare le equazioni della magnetostatica nei materiali: dovremo modificare quelle leggi che presentano al loro interno informazioni riguardo le sorgenti di campo.

Consideriamo un campo magnetostatico  $\vec{B}$ . Mentre la divergenza del campo magnetico rimane nulla...

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (12.16)$$

... il suo rotore risulta pari alla densità di corrente complessiva  $\vec{j}_{tot}$  nel materiale, moltiplicata per  $\mu_0$  - ma tale densità è pari alla somma di quella di conduzione  $\vec{j}$  già presente e di quella corrente amperiana  $\vec{j}_m$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{tot} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \implies \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}$$

Definito il **campo magnetizzante**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (12.17)$$

otteniamo la legge

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (12.18)$$

**OSSERVAZIONE.** Quando consideriamo un materiale diamagnetico o paramagnetico immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$ , ciò che andiamo a modificare è il campo magnetizzante  $\vec{H}$  e non  $\vec{B}$ .

**ATTENZIONE!** Il campo magnetizzante  $\vec{H}$  è soltanto un campo ausiliario, ma non ha un vero e proprio significato fisico.

Ci sembrerebbe di aver fatto "sparire" le correnti amperiane riscrivendo la *legge di Ampère per la circuitazione* in questa maniera, ma in realtà l'abbiamo soltanto nascosta sotto il tappeto!<sup>4</sup> I campi  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  sono legati ancora dalla densità di magnetizzazione  $\vec{M}$  - che incorpora in essa le informazioni della corrente amperiana. Per poter risolvere *definitivamente*  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  ci un'**equazione di stato del mezzo magnetico** che leggi esplicitamente  $\vec{B}$  e  $\vec{M}$  o, equivalentemente,  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$ .

Per molti materiali diamagnetici e paramagnetici vale la seguente relazione *lineare*:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (12.19)$$

**ATTENZIONE!** Tale legge non è valida per i *materiali ferromagnetici*.

**DIGRESSIONE.** Per molti materiali paramagnetici la magnetizzazione  $\vec{B}$  è dunque proporzionale al campo magnetizzante  $\vec{H}$  se le temperature sono *sufficientemente alte* e i campi *sufficientemente piccoli*. A valori dei campi fissi, la suscettibilità magnetica è

<sup>4</sup>Di nuovo, lavare un tappeto pieno di corrente elettrica non è un granché.

inversamente proporzionale alla temperatura secondo la **prima legge di Curie**:

$$\chi_m = \frac{C}{T} \sim \frac{\rho}{T}$$

Qui  $C$  è una costante detta **costante di Curie** specifica del materiale; per una formula esplicita di tale costante sono richieste conoscenze troppo approfondite di Fisica Quantistica, ma ci basta sapere che è proporzionale alla densità del materiale  $\rho$  (o, più precisamente, al numero di atomi/molecole magnetizzate per unità di volume).

Da essa ricaviamo

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{M} + \vec{H}) = \mu_0 (\chi_m + 1) \vec{H} = \mu_0 \kappa_m \vec{H} = \mu \vec{H} \\ \vec{B} &= \kappa_m \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (12.20)$$

e la (12.18) si può riscrivere come

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (12.21)$$

**OSSERVAZIONE.** L'ultima legge è pari all'analogia equazione della magnetostatica nel vuoto a cui abbiamo sostituito a  $\mu_0$  la costante assoluta  $\mu$ .

**Leggi di Maxwell per l'elettromagnetostatica nei materiali** Ricapitolando, si hanno le seguenti leggi nel caso di un materiale qualunque...

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{D}) = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = q_{int} = \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
Legge di Gauss per il magnetismo	$\Phi_{\partial V}(\vec{B}) = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge dell'induzione di Faraday	$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
Legge della circuitazione di Ampère-Maxwell	$\Gamma_\gamma(\vec{H}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = I_{int}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$

$$\text{dove} \quad \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P} \quad \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}$$

... e le seguenti per un materiale al contempo dielettrico lineare (con *costante dielettrica assoluta*  $\epsilon = \kappa \varepsilon_0$ ) e diamagnetico/paramagnetico lineare (con *costante di permeabilità magnetica assoluta*  $\mu = \kappa \mu_0$ ).

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{E}) = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$
Legge di Gauss per il magnetismo	$\Phi_{\partial V}(\vec{B}) = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge dell'induzione di Faraday	$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
Legge della circuitazione di Ampère-Maxwell	$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \mu I_{int}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j}$

**Leggi di Maxwell per l'elettromagnetismo nei materiali** Nel caso di campi elettrici e magnetici *dipendenti dal tempo*, non è difficile ricavare le equazioni di Maxwell nei materiali partendo da quanto osservato in questa sezione. Per avere un quadro completo, si hanno le seguenti leggi nel caso di un materiale qualunque...

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{D}) = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = q_{int} = \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
Legge di Gauss per il magnetismo	$\Phi_{\partial V}(\vec{B}) = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge dell'induzione di Faraday	$\begin{aligned} \Gamma_\gamma(\vec{E}) &= \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \end{aligned}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Legge della circuitazione di Ampère-Maxwell	$\begin{aligned} \Gamma_\gamma(\vec{D}) &= \oint_{\partial \Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \\ &= \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \\ &= I_{int} + \frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\vec{D})}{\partial t} \end{aligned}$	$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$dove \quad \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P} \quad \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}$$

... e le seguenti per un materiale al contempo dielettrico lineare (con *costante dielettrica assoluta*  $\epsilon = \kappa \epsilon_0$ ) e diamagnetico/paramagnetico lineare (con *costante di permeabilità magnetica assoluta*  $\mu = \kappa \mu_0$ ).

Nome	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss per l'elettricità	$\Phi_{\partial V}(\vec{E}) = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon}$
Legge di Gauss per il magnetismo	$\Phi_{\partial V}(\vec{B}) = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge dell'induzione di Faraday	$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Legge della circuitazione di Ampère-Maxwell	$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \oint_{\partial \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \left( \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma + \epsilon \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \right) = \mu I_{int} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi_{\Sigma}(\vec{E})}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \left( \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

#### 12.4 FENOMENOLOGIA DEI FERROMAGNETI

Le sostanze ferromagnetiche risultano essere particolarmente differenti rispetto ai materiali diamagnetici e paramagnetici che abbiamo studiato nelle precedenti sezioni.

Avevamo definito un materiale *ferromagnetico* come una sostanza avente una costante di permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m$  molto più grande di 1. Tale definizione è sì corretta, ma problematica: come già detto, parlare di “costante” di permeabilità magnetica in questo contesto è *improprio*, in quanto il suo valore può variare sensibilmente da *come viene magnetizzato*.

Inoltre si può inoltre osservare come le relazioni che legano  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{M}$  non siano lineari o tanto meno *univoche*! Infatti, si è osservato sperimentalmente come in presenza di campi magnetici non particolarmente elevati la *magnetizzazione* risultasse invece *elevata*.

Inoltre, la cosa più peculiare di tutte che si può notare con i materiali ferromagnetici è la loro capacità di rimanere magnetizzati permanentemente anche senza un campo magnetico esterno. Diamo quindi una definizione di ferromagnetismo più qualitativa che quantitativa sulla base di queste osservazioni.

##### DEFINIZIONE 12.4.1. - FERROMAGNETISMO.

Il ferromagnetismo è il meccanismo per cui certi materiali diventano *magneti permanenti*, ossia rimangono magnetizzati anche dopo essere stati soggetti ad un campo magnetico esterno. La loro tendenza a “ricordarsi la loro storia magnetica” è detta **isteresi**.

**Ciclo di isteresi** Consideriamo un solenoide a forma di *toro*<sup>5</sup> riempito di un materiale ferromagnetico. Al variare della corrente nelle spire varia il valore del campo magnetico  $\vec{H}$ : misurando quello e il campo magnetico  $\vec{B}$  interno al toroide possiamo calcolare riettamente

<sup>5</sup>Qui s'intende quello matematico, non quello animale.

la funzione  $B(H)$  e, indirettamente dalla legge

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H,$$

la funzione  $M(H)$ . All'inizio il materiale è allo stato *verGINE*, ossia non è magnetizzato ( $\vec{M} = 0$ ) e non c'è alcun campo presente ( $\vec{B} = 0$ ,  $\vec{H} = 0$ ). Al crescere della corrente (e quindi di  $H$ ) i valori di  $B$  e di  $M$  si dispongono lunga la curva di prima magnetizzazione  $\alpha$ . Poiché essa non è una retta, le grandezze

$$\mu = \frac{B}{H} \quad \kappa_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \chi_m = \kappa_m - 1$$

non sono costanti, bensì *funzioni* di  $H$ .

Passato il valore  $H_m$  si raggiunge il *livello di saturazione*, in cui la magnetizzazione raggiunge la *magnetizzazione di saturazione* costante  $M_{sat}$  e il campo magnetico invece cresce linearmente - con pendenza  $\mu_0$  - secondo la relazione

$$B = \mu_0 (H + M_{sat}) = \mu_0 H + \mu_0 M_{sat}$$

Per  $H > H_m$  il materiale è *saturo* e il campo  $\vec{B}$  incrementa soltanto per effetto della corrente - non c'è alcun contributo *ulteriore* da parte della sostanza.

Se dopo aver raggiunto  $H_m$  si fa decrescere  $H$  i valori di  $B$  e  $M$  non si dispongono lungo  $\alpha$ , bensì su una nuova curva  $\beta$  che è sempre maggiore della curva di prima magnetizzazione e tale per cui, al valore  $H = 0$ , è tale per cui

$$B_r = \mu_0 M_r$$

dove  $B_r$  è il *campo magnetico residuo* e  $M_r$  è la *magnetizzazione residua*: il materiale *rimane* quindi magnetizzato anche in *assenza di corrente* nel solenoide toroidale.

Per annullare (temporaneamente) la magnetizzazione è necessario *invertire il senso della corrente* fino a raggiungere il valore di  $H$  detto *campo coercitivo*  $H_c$ , in cui non c'è magnetizzazione  $M = 0$  e il campo magnetico è tale per cui

$$B_c = \mu_0 H_c$$

Diminuendo ulteriormente  $H$  si raggiunge il valore  $-H_m$  oltre il quale si raggiunge la magnetizzazione di saturazione, con verso opposto.

Ora, facendo riportare  $H$  al valore  $H_m$  si percorre una nuova curva  $\gamma$  fino al ricongiungimento della curva  $\alpha$ , completando il *ciclo di isteresi*.

Per poter *smagnetizzare* completamente il materiale, ossia riportarlo ad uno stato vergine, bisogna interrompere la magnetizzazione *prima* di raggiungere il livello di saturazione: in questo modo, si ottengono dei cicli sempre più stretti con i vertici sulla curva di prima magnetizzazione, fino a far convergere il ciclo allo stato vergine.

In questo modo in realtà è possibile raggiungere un qualunque punto compreso tra le curve  $\beta$  e  $\gamma$ : non essendo *univoco* il valore che  $B(H)$  (o  $M(H)$ ) assume, la magnetizzazione di una sostanza ferromagnetica dipende dalla *storia della sostanza*, oltre che dal valore di  $H$ .

**OSSERVAZIONE.** Il ciclo dipende dal *materiale*. Ci sono materiali detti *duri* in cui il ciclo di isteresi è *largo* e sono adatti a diventare materiali permanenti in quanto il valore della magnetizzazione residua  $M_r$  è vicino a quella di saturazione  $M_{sat}$ . D'altro canto, i materiali *dolci* hanno un ciclo di isteresi *stretto* ed è facile smagnetizzarli - per questo sono

utili per costruire degli *elettromagneti*, cioè magneti il cui campo può essere facilmente controllato dalla quantità di corrente che scorre nelle bobine che lo costituiscono.

**Seconda legge di Curie** Una proprietà dei materiali ferromagnetici è l'esistenza di una *temperatura critica*, detta **temperatura di Curie**  $T_C$  tale per cui un materiale ferromagnetico che la supera diventa paramagnetico (e viceversa), con la suscettività alla temperatura  $T$  che segue la **seconda legge di Curie**:

$$\chi_m = C \frac{\rho}{T - T_C} \quad (12.22)$$

dove  $C$  è la **costante di Curie** specifica del materiale e  $\rho$  la densità.

Questa transizione di fase è spiegabile solo a livello quantistico-statistico tramite il *modello di Ising*.

# III

## ONDE



CAPITOLO **13**

# ONDE

---

*"Chiunque sa cos'è una curva, fino a quando non si ha studiato abbastanza Matematica per confondersi con tutte le innumerevoli eccezioni esistenti."*

*FELIX KLEIN, dopo aver studiato troppa Matematica.*

**N**ELLA



# IV

## RACCOLTA DIFFERENZIATA



# APPENDICE A

## RACCOLTA DIFFERENZIATA: RICHIAMI DI GEOMETRIA E CALCOLO DIFFERENZIALE

---

“BEEP BOOP”

*Lollo BiancoBot, dopo aver finito le citazioni.*

Per comprendere a fondo gli argomenti trattati in questo Manualozzo™ è estremamente importante avere una buona padronanza dei concetti di *Geometria Differenziale* e *Calcolo Differenziale*. In questo capitolo troverete dei cenni, brevi ma non troppo, per colmare ogni potenziale lacuna a riguardo.

Quanto indicato con il simbolo ★ sono degli *approfondimenti non necessari* - ma possono essere comunque utili ed interessanti per un lettore curioso.

### A.1 ★ VARIETÀ DIFFERENZIABILE

#### DEFINIZIONE A.1.1. - CARTA, COORDINATE LAGRANGIANE, PARAMETRIZZAZIONE LOCALE.

Dato un insieme di punti  $M$  non vuoto, una **carta** è una coppia  $(U, \varphi)$  dove

- $U$  è un insieme<sup>a</sup> contenuto in  $M$  detto **dominio della carta**.
- $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  è una funzione *iniettiva*<sup>b</sup>, con  $\varphi(U)$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

La funzione  $\varphi$  associa ad ogni punto  $p \in U \subseteq M$  un  $m$ -upla  $(q^\lambda)$  (con  $\lambda = 1, \dots, m$ ) dette **coordinate** di  $p$  rispetto alla carta  $(U, \varphi)$ .

$$\varphi(p) = (q^1(p), \dots, q^n(p)) \quad (\text{A.1})$$

La funzione  $\varphi$  è suriettiva è quindi invertibile: l'inversa  $\varphi^{-1}$ , detta **parametrizzazione locale**, associa alle coordinate  $q^\lambda$  il punto  $p \in U \subseteq M$  con quelle coordinate.

<sup>a</sup>A seconda delle definizioni,  $U$  si impone per definizione essere aperto per una topologia innata su  $M$  oppure risulta aperto per una topologia indotta dall'atlante e nella definizione non è richiesto specificarlo.

Le due definizioni sono equivalenti.

<sup>b</sup>A seconda delle definizioni,  $\varphi$  si impone per definizione essere un omeomorfismo - i.e. mappa continua con inversa continua - oppure risulta un omeomorfismo in seguito alla topologia indotta dall'atlante stesso. Le due definizioni sono equivalenti.

#### DEFINIZIONE A.1.2. - FUNZIONE DI TRANSIZIONE.

Date due carte  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$  su  $M$  con  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , la **funzione di transizione** dalla carta  $(U_1, \varphi_1)$  alla carta  $(U_2, \varphi_2)$  è la funzione

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\text{A.2})$$

Essendo definita tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  si possono definire le sue *derivate*.

Se due carte hanno una funzione di transizione *differenziabile*, di solito  $\mathcal{C}^\infty$  o più raramente  $\mathcal{C}^k$ , le carte sono dette **compatibili**.

#### DEFINIZIONE A.1.3. - ATLANTE.

Un **atlante** è una collezione di carte  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  che copre tutto l'insieme  $M$ , cioè per qualunque punto  $p \in M$  esiste almeno una carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per un certo  $\alpha \in I$ , tale che  $p \in U_\alpha$ .

Se le funzioni di transizione dell'atlante sono  $\mathcal{C}^k$ , allora l'atlante si chiama **atlante  $\mathcal{C}^k$** .

Se l'**atlante** è  $\mathcal{C}^\infty$ , la funzione di transizione è un **diffeomorfismo**, in quanto è una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  con inversa  $\mathcal{C}^\infty$ .

#### DEFINIZIONE A.1.4. - ATLANTE MASSIMALE.

Dato un *atlante*  $\mathcal{A}$ , l'**atlante massimale** è l'atlante contenente tutte le carte compatibili con l'atlante originale  $\mathcal{A}$ .

#### DEFINIZIONE A.1.5. - TOPOLOGIA INDOTTA DALL'ATLANTE.

Un atlante definisce sempre una topologia sull'insieme  $M$ , detta

$A \subseteq M$  aperto se  $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \quad \varphi(A \cap U_\alpha)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  con la topologia Euclidea.

Secondo questa topologia:

1.  $U_\alpha$  è aperto in  $M$ .
2.  $\varphi_\alpha$  manda aperti in aperti, quindi è aperta ed, essendo biettiva, è un omeomorfismo tra  $U_\alpha$  e  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ .

#### DEFINIZIONE A.1.6. - VARIETÀ DIFFERENZIABILE.

Una **varietà differenziabile** (altresì detta **varietà differenziale**) di classe  $\mathcal{C}^k$  e **dimensione**  $n$  è un insieme di punti  $M$  non vuoto che può essere coperto da un **atlante  $\mathcal{C}^k$**   $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ , che di solito supponiamo massimale, dove  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \alpha \in I$ . Inoltre, lo spazio topologico<sup>a</sup>  $M$  si suppone spesso essere Hausdorff e a base numerabile.

<sup>a</sup>Con la topologia su  $M$  con cui si sono definite le carte o con la topologia indotta dall'atlante.

In sintesi, una **varietà differenziabile** è una varietà topologica con una struttura differenziabile globale: l'esistenza dell'atlante soddisfa le condizioni di varietà topologica, mentre la struttura differenziabile è indotta dalle condizioni di compatibilità delle carte dell'atlante.

Per semplicità considereremo, se non specificato, le varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e

quindi tralasciamo il termine "di classe  $\mathcal{C}^k$ ".

### ESEMPI.

- Gli spazi affini  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n$  con coordinate cartesiane, polari, sferiche, cilindriche...
- Le sfere  $S^n$  di dimensione  $n$ .
- Le superfici regolari in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzate da

$$\begin{aligned}\vec{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\hspace{2cm}} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

## A.2 ★ METRICA

### DEFINIZIONE A.2.1. - METRICA.

Una **metrica** (o anche detto **tensore metrico**) su una varietà differenziabile  $M$  è una mappa bilineare simmetrica - ossia un campo tensoriale simmetrico doppiamente contravariante - non degenere

$$\begin{aligned}g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto X \cdot Y = \langle X, Y \rangle = g(X, Y)\end{aligned}\tag{A.3}$$

che ad una coppia di campi vettoriali sopra  $M$  associa un campo scalare su  $M$ . Essa soddisfa le proprietà di un **prodotto interno**:

- **Bilinearità**, ossia lineare separatamente in entrambi gli argomenti:

$$g(f\vec{X} + h\vec{Y}, \vec{Z}) = fg(\vec{X}, \vec{Z}) + hg(\vec{Y}, \vec{Z}), \forall f, h \in \mathcal{F}(M), \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathcal{X}(M) \tag{A.4}$$

$$g(\vec{X}, f\vec{Y} + h\vec{Z}) = fg(\vec{X}, \vec{Y}) + hg(\vec{X}, \vec{Z}), \forall f, h \in \mathcal{F}(M), \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathcal{X}(M) \tag{A.5}$$

- **Simmetria**:

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{Y}, \vec{X}), \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathcal{X}(M) \tag{A.6}$$

- **Non degenere**: per ogni campo vettoriale  $\vec{X} \neq 0$

$$\exists \vec{Y} : g(\vec{X}, \vec{Y}) \neq 0 \tag{A.7}$$

La metrica generalizza molte delle proprietà del *prodotto scalare* di vettori negli spazi Euclidei.

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$  e dati i campi  $\vec{X} = X^\lambda \vec{e}_\lambda$ ,  $\vec{Y} = Y^\lambda \vec{e}_\lambda \in \mathcal{X}(M)$  si ha

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g\left(X^\lambda \vec{e}_\lambda, Y^\mu \vec{e}_\mu\right) = X^\lambda Y^\mu g(\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\mu) = X^\lambda Y^\mu g_{\lambda\mu}$$

dove

$$g_{\lambda\mu} = g(\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\mu) \tag{A.8}$$

sono le componenti di  $g$  nelle coordinate scelte.

### DEFINIZIONE A.2.2. - COORDINATE ORTOGONALI.

Data  $M$  varietà differenziabile e  $(q^\lambda)$  coordinate su  $M$ , le coordinate sono **ortogonal**i rispetto ad una metrica  $g$  se  $g_{\mu\nu} = 0$ ,  $\forall \mu \neq \nu$ .

**DEFINIZIONE A.2.3. - VARIETÀ RIEMANNIANA.**

Una varietà **Riemanniana**  $(M, g)$  è una varietà differenziabile  $M$  a cui è associata una metrica  $g$ .

**Metrics e 1-forme** La metrica si può descrivere da una matrice invertibile. Invertendola, otteniamo la matrice associata ad un campo tensoriale simmetrico doppiamente covariante, ossia una mappa bilineare che a due 1-forme sulla varietà differenziabile  $M$  associa un campo scalare.

$$\begin{aligned} g : \Omega(M) \times \Omega(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle = [g^{-1}](\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Pertanto,  $g^{-1}$  definisce un prodotto interno sulle 1-forme.

**OSSERVAZIONE.** Vale anche il ragionamento contrario: da un campo tensoriale  $(2, 0)$  simmetrico che definisce un prodotto interno sulla varietà si può considerare il campo tensoriale  $(0, 2)$  associato alla matrice inversa, il quale è una metrica sulla stessa varietà e un prodotto interno per le 1-forme.

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$  e dati le 1-forme  $\underline{\alpha} = \alpha_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda, \underline{\beta} = \beta_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda \in \Omega^1(M)$  si ha

$$g(\vec{X}, \vec{Y}) = g\left(\alpha_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda, \beta_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda\right) = \alpha_\lambda \beta_\lambda g\left(\underline{\epsilon}^\lambda, \underline{\epsilon}^\lambda\right) = \alpha_\lambda \beta_\lambda g^{\lambda\mu}$$

dove

$$g^{\lambda\mu} = g\left(\underline{\epsilon}^\lambda, \underline{\epsilon}^\mu\right) \quad (\text{A.10})$$

**Isomorfismi musicali** Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su una varietà Riemanniana  $(M, g)$ , possiamo considerare due isomorfismi mutualmente inversi tra fibrati vettoriali:

- **Bemolle:** dato un campo vettoriale  $X = X^\lambda \vec{e}_\lambda$  su  $M$ , il **bemolle**  $X^\flat$  è una 1-forma su  $M$  ottenuta **abbassando un indice**:

$$\begin{aligned} \flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto X^\flat = g_{\mu\lambda} X^\mu \underline{\epsilon}^\lambda = X_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Utilizzando il prodotto interno definito da  $g$ , si ha per qualunque campo vettoriale  $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$X^\flat(Y) = g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

- **Diesis:** dato una 1-forma  $\varphi = \varphi_\lambda \underline{\epsilon}^\lambda$  su  $M$ , il **diesis**  $\varphi^\sharp$  è un campo vettoriale su  $M$  ottenuto **alzando un indice**:

$$\begin{aligned} \flat : T^*M &\longrightarrow TM \\ \varphi &\longmapsto \varphi^\sharp = g^{\mu\lambda} \varphi_\mu \vec{e}_\lambda = \varphi^\lambda \vec{e}_\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

dove  $g^{\mu\lambda}$  sono componenti della matrice inversa associata alla metrica  $g$ .

Utilizzando il prodotto interno definito da  $g$ , si ha per qualunque campo vettoriale  $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\langle \varphi^\sharp, Y \rangle = g(\varphi^\sharp, Y) = \varphi(Y)$$

## A.3 ★ ELEMENTO DI LINEA

**DEFINIZIONE A.3.1. - SPOSTAMENTO INFINITESIMO.**

Il vettore **spostamento infinitesimo** è la variazione infinitesima del vettore posizione  $\vec{r}$ . Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$ ,

$$d\vec{s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} dq^\lambda = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right| \frac{\partial \vec{r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right|} dq^\lambda = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\lambda} \right| dq^\lambda \hat{\mathbf{u}}_\lambda \quad (\text{A.13})$$

Lo spostamento infinitesimo si calcola ricavando, per ogni direzione  $\hat{\mathbf{u}}_\lambda$ , la variazione della corrispondente coordinata *tenendo costanti* le altre.

**DEFINIZIONE A.3.2. - ELEMENTO DI LINEA.**

L'**elemento di linea** è il quadrato della lunghezza di uno spostamento infinitesimo. Se  $g$  è il tensore metrico della varietà  $n$ -dimensionale, allora

$$ds^2 = g(d\vec{s}, d\vec{s}) \quad (\text{A.14})$$

**NOTAZIONE.** Talvolta si indica lo spostamento infinitesimo e l'elemento di linea, in maniera alternativa a  $d\vec{s}$  e  $ds$ , come  $d\vec{\ell}$  e  $d\ell$

**ATTENZIONE!** In diversi contesti lo spostamento infinitesimo è chiamato elemento di linea, pur essendo concettualmente differente da quello che qui indichiamo come elemento di linea.

Poiché lo spostamento infinitesimo è arbitrario,  $ds^2$  definisce completamente la metrica; in notazione suggestiva ma non corretta dal punto di vista tensoriale

$$ds^2 = g \quad (\text{A.15})$$

Scelte delle coordinate  $(q^\lambda)$  su  $M$ , si ha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \quad (\text{A.16})$$

Se la metrica è ortogonale, l'elemento di linea è della forma

$$ds^2 = g_{11} (dq^1)^2 + \dots + g_{nn} (dq^n)^2 \quad (\text{A.17})$$

**Applicazioni** Preso un vettore  $\vec{r}$  parametrizzante una curva, il vettore spostamento  $d\vec{s}$  rappresenta una sua parte infinitesima tale da sembrare lineare. Per questo motivo il parente stretto del vettore spostamento, l'elemento di linea permette il calcolo dell'arcolunghezza e degli integrali curvilinei, oltre che definire la metrica.

**DEFINIZIONE A.3.3. - ARCOLUNGHEZZA.**

L'**arcolunghezza** è la distanza tra due punti lungo una sezione di una curva  $\vec{r}(\tau)$

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{|ds^2|} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dr^\mu}{dt} \frac{dr^\nu}{dt}} \quad (\text{A.18})$$

**DEFINIZIONE A.3.4. - INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE.**

Un **integrale curvilineo di prima specie** è un integrale dove un campo scalare

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

viene valutato lungo una curva  $\gamma$  di parametrizzazione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow U$ :

$$\int_{\gamma} f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\vec{r}(\tau)) |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (\text{A.19})$$

In particolare, la lunghezza della curva  $\gamma$  è

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (\text{A.20})$$

**DEFINIZIONE A.3.5. - INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE.**

Un **integrale curvilineo di seconda specie** è un integrale dove un campo vettoriale  $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  viene valutato lungo una curva  $\gamma$  di parametrizzazione  $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow U$ :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(\tau)) \cdot |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (\text{A.21})$$

Gli integrali curvilineo di seconda specie sono indipendenti dalla parametrizzazione, ma dipendono invece dall'*orientazione*: nella fattispecie, invertire l'orientazione della parametrizzazione cambia il segno dell'integrale curvilineo.

#### A.4 ★ ELEMENTO DI AREA

**DEFINIZIONE A.4.1. -**

Data una superficie  $\Sigma$  a due dimensioni immersa in  $\mathbb{R}^3$ , l'**elemento di superficie** è una sua porzione infinitesima. In termini matematici, scelte una parametrizzazione  $\vec{r}(u, v)$  di  $\Sigma$  e dunque una scelta di coordinate  $(u, v)$ , allora l'elemento di superficie è una 2-forma data da

$$d\Sigma = \sqrt{\det g} du dv = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (\text{A.22})$$

dove  $g$  è la metrica associata alla superficie con la parametrizzazione scelta.

**Applicazioni** Come si può facilmente immaginare, l'elemento di superficie permette il calcolo degli integrali superficiali.

**DEFINIZIONE A.4.2. - INTEGRALE SUPERFICIALE PER CAMPI SCALARI.**

Un **integrale superficiali per campi scalari** è un integrale dove un campo scalare

$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  viene valutato su una superficie di parametrizzazione  $\vec{r} : T \longrightarrow U$ :

$$\int_{\Sigma} f d\Sigma = \int_T f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{\det g} du dv = \int_T f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (\text{A.23})$$

In particolare, l'area di  $\Sigma$  è

$$A = \int_{\Sigma} 1 d\Sigma = \int_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (\text{A.24})$$

Un integrale superficiale per campi vettoriali può essere definito in due modi differenti:

- Integrando il campo *componente per componente* utilizzando l'integrale superficiale per campi scalari; il risultato in tal caso è un vettore.
- Integrando la *componente normale* del campo tramite la superficie con l'integrale superficiale per campi scalari; il risultato in tal caso è uno scalare ed è il **flusso** del campo vettoriale tramite la superficie considerata.

## A.5 ★ ELEMENTO DI VOLUME

### DEFINIZIONE A.5.1. - ELEMENTO DI VOLUME.

Fissate delle coordinate  $(x^i)$ , un **elemento di volume** su una varietà Riemanniana *orientabile* di dimensione  $n$  è una  $n$ -forma data da

$$dV = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{A.25})$$

dove  $g$  è la metrica associata alla varietà.

Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , si può fisicamente vedere come una porzione infinitesima di volume - anche se in termini matematici rimane una 3-forma su  $\mathbb{R}^3$ . Date le coordinate  $(u, v, s)$  su  $\mathbb{R}^3$  e la metrica  $g$  ad esse associata, si esprime per convenzione come

$$dV = \sqrt{\det g} du dv ds \quad (\text{A.26})$$

**Cambio di coordinate** Nelle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  la forma di volume è

$$dV = dx dy dz$$

Operando un cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = x(u, v, s) \\ y = y(u, v, s) \\ z = z(u, v, s) \end{cases}$$

la forma di volume cambia con il determinante della Jacobiana del cambiamento:

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, s)} \right| du dv ds$$

**Applicazioni** L'elemento di volume permette di definire l'integrale (di Lebesgue) di una funzione su una varietà differenziabile. Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , la forma di volume permette il calcolo degli **integrali triple**.

In particolare, il volume di un dominio  $V$  è dato da

$$V = \int_V 1 dV = \int_V dV$$

## A.6 ★ OPERATORE STAR DI HODGE

### DEFINIZIONE A.6.1. - SIMBOLO DI LEVI-CIVITA.

Il **simbolo di Levi-Civita** è definito come

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i_1, i_2 \dots, i_n) \text{ è una permutazione pari di } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{se } (i_1, i_2 \dots, i_n) \text{ è una permutazione dispari di } (1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

### DEFINIZIONE A.6.2. - OPERATORE STAR DI HODGE.

Data una varietà Riemanniana *orientata*  $M$  di dimensione  $n$ , lo **star di Hodge** è una funzione lineare

$$*: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

che associa alla  $k$ -forma  $\beta$  un'unica  $(n-k)$ -forma  $*\beta$ , detta **duale di Hodge** definita dall'identità

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV \quad (\text{A.28})$$

dove  $dV \in \omega^n(X)$  è la forma di volume indotta da  $g$ .

Fissate delle componenti  $(q^\lambda)$ , una  $k$ -forma ha una scrittura canonica data da

$$\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} \underline{\epsilon}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underline{\epsilon}^{i_k} \quad (\text{A.29})$$

dove  $\alpha_{i_1 \dots i_k}$  sono funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  sulla varietà. Allora, il duale di Hodge è definito come

$$\begin{aligned} * \alpha &= \frac{1}{k!(n-k)!} \sqrt{|g|} \alpha_{j_1 \dots j_k} g^{j_1 i_1} \dots g^{j_k i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \underline{\epsilon}^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \underline{\epsilon}^{i_n} = \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!} \sqrt{|g|} \alpha^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \underline{\epsilon}^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \underline{\epsilon}^{i_n} \end{aligned}$$

dove  $g$  è la metrica su  $M$  e

$$\alpha^{i_1 \dots i_k} = \alpha_{j_1 \dots j_k} g^{j_1 i_1} \dots g^{j_k i_k}$$

**PROPRIETÀ A.6.1. - PROPRIETÀ DELL'OPERATORE STAR DI HODGE.** Data una varietà Riemanniana  $(M, g)$  di dimensione  $n$  e sia  $\alpha \in \Omega^k(M)$ . Allora valgono le seguenti:

- Il duale di Hodge della funzione (0-forma) identicamente unitaria  $1$  è

$$*1 = dV \quad (\text{A.30})$$

- Il duale del duale di Hodge di una  $k$ -forma è

$$*(\ast\alpha) = (-1)^{k(n+1)} \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha \quad (\text{A.31})$$

## A.7 OPERATORI DIFFERENZIALI

In questa sezione ci limitiamo a considerare lo spazio affine  $\mathbb{R}^3$  - dotato delle proprietà di varietà differenziale - ove non specificato diversamente.

**DEFINIZIONE A.7.1. - OPERATORE NABLA.**

L'operatore **nabla** è una notazione matematica che semplifica la scrittura di diverse equazioni. In coordinate cartesiane su  $\mathbb{R}^3$ , si può immaginare un vettore puramente formale che contiene gli operatori delle derivate parziali nelle tre direzioni spaziali (cartesiane):

$$\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (\text{A.32})$$

**ATTENZIONE!** L'operatore nabla assume significato soltanto quando viene *applicato*, come ad un campo scalare o ad un campo vettoriale. Ad esempio, una scrittura del tipo  $\vec{\nabla} + \vec{v}$  non ha alcun senso né fisico, né matematico.

L'operatore nabla ha tre possibili applicazioni, a seconda se viene moltiplicato per un campo scalare, oppure se moltiplicato con un campo vettoriale per mezzo del prodotto scalare o quello vettoriale.

**Cambio di coordinate** Anche se lo scriviamo come vettore formale,  $\vec{\nabla}$  si può anche vedere come *covettore* - un nome carino per dire le *forme lineari*. In particolare, le componenti di  $\vec{\nabla}$  cambiano come i covettori, cioè dobbiamo operare in modo covariante e utilizzare la *matrice* del cambiamento di base:

$$\frac{\partial}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{A.33})$$

**Gradiente****DEFINIZIONE A.7.2. - CAMPO SCALARE.**

Un **campo scalare**  $\varphi$  è una funzione

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y, z) \longmapsto \varphi(x, y, z) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

dove  $(x, y, z)$  sono eventualmente funzioni del tempo.

Un campo scalare è quindi una mappa che a punti di  $\mathbb{R}^3$  associa valori scalari.

**DEFINIZIONE A.7.3. - GRADIENTE.**

Dato un campo scalare  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ , il **gradiente** è il campo vettoriale dato dall'applicazione della nabla tramite moltiplicazione per uno scalare a  $\varphi$ :

$$\vec{\nabla}\varphi = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (\text{A.35})$$

**ESEMPI.**

- Se  $\varphi$  rappresenta l'*altitudine*,  $\vec{\nabla}\varphi$  è la discesa.
- Se  $\varphi$  rappresenta la *pressione* o la *temperatura*,  $\vec{\nabla}\varphi$  è la direzione in cui essa varia più rapidamente.

**OSSERVAZIONE.** Dato un campo scalare, esistono delle **superfici equipotenziali** tali per cui  $\varphi = \text{costante}$  sulla superficie. Il gradiente di  $\varphi$  è, punto per punto, ortogonale alla superficie equipotenziale.

### ★ Teorema del gradiente

#### TEOREMA A.7.1. - TEOREMA DEL GRADIENTE.

Per ogni campo scalare  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  e per ogni curva differenziabile  $\gamma$  da  $P$  a  $Q$  si ha

$$\int_{\gamma} \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(Q) - \varphi(P) \quad (\text{A.36})$$

In altre parole, gli integrali curvilinei di campi definiti da gradienti sono indipendenti dal percorso scelto e dipendono solo dal punto iniziale e dal punto finale.  $\square$

**★ Spostamento infinitesimo e gradiente** Diamo una definizione alternativa del gradiente che ci tornerà più utile avanti. Si noti che il modulo, direzione e verso del gradiente è indipendente dal sistema di coordinate, in virtù della sua natura vettoriale. Fissati due punti infinitamente vicini, possiamo considerare il gradiente del campo scalare  $\varphi$  come il vettore tale che il prodotto scalare per il vettore spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$  dà la variazione di  $\varphi$  per tale spostamento.

$$d\varphi = \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.37})$$

dove  $d\varphi$  è matematicamente una 1-forma e si calcola tramite la derivata esterna, in coordinate:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx^i} dx^i \quad (\text{A.38})$$

Questa definizione è *intrinseca* e non richiede alcun sistema di coordinate, e può essere utilizzato per ricavare anche l'espressione dell'operatore nabla in altre coordinate.

Per questioni operative conviene comunque servirsi di un sistema di coordinate e calcolare le componenti del gradiente in tale sistema.

### Divergenza

#### DEFINIZIONE A.7.4. - DIVERGENZA.

Dato un campo vettoriale  $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , la **divergenza** è il campo scalare dato dall'applicazione della nabla tramite prodotto scalare ad  $\vec{G}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \partial_x G_x + \partial_y G_y + \partial_z G_z \quad (\text{A.39})$$

**ESEMPIO.** Se  $\vec{G}$  rappresenta la velocità dell'aria in una certa regione di spazio,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$  rappresenta quanta più aria sta "uscendo" da quella regione rispetto a quanta ne sta "entrando". Se scalidiamo l'aria, essa si espande, i vettori puntano verso l'esterno della regione e la divergenza è positiva; se raffreddiamo l'aria, l'aria si contrae e la divergenza ha un valore negativo.

## Rotore

### DEFINIZIONE A.7.5. - ROTORE.

Dato un campo vettoriale  $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , il **rotore** è il campo vettoriale dato dall'applicazione della nabla tramite prodotto vettoriale ad  $\vec{G}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = (\partial_y G_z - \partial_z G_y, \partial_z G_x - \partial_x G_z, \partial_x G_y - \partial_y G_x) \quad (\text{A.40})$$

Si definisce anche come il determinante formale

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_x & G_y & G_z \\ \hat{\mathbf{u}}_x & \hat{\mathbf{u}}_y & \hat{\mathbf{u}}_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.41})$$

**ESEMPIO.** Supponiamo che  $\vec{G}$  rappresenta la velocità di un flusso d'acqua in una certa regione di spazio e di porre una pallina ruvida nel fluido, in modo che non si può spostare da tale punto. Anche se non si sposta da lì, il fluido fa comunque ruotare la pallina: l'asse di rotazione è nella direzione di  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$  applicato al centro della palla, mentre la velocità angolare dipende dal modulo del rotore in tale punto.

In altre parole, è una misura di come un fluido potrebbe ruotare (o meglio, far ruotare qualcosa a livello microscopico)

### A.7.1 Derivate seconde

Dato che dopo aver applicato l'operatore nabla otteniamo campi scalari o vettoriali, possiamo riapplicare l'operatore nabla come in precedenza per ottenere delle derivate seconde; alcune hanno particolare rilevanza perché sono importanti dal punto di vista matematico oppure perché sono costantemente nulle.

i)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi$ , dove  $\nabla^2$  è il **laplaciano**:

$$\nabla^2 \varphi = \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi \quad (\text{A.42})$$

ii)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$

iii)  $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$

iv)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = 0$

v)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) + \nabla^2 \vec{G}$ , dove  $\nabla^2 \vec{G}$  è il **laplaciano vettoriale**:

$$\nabla^2 \vec{G} = (\nabla^2 G_x, \nabla^2 G_y, \nabla^2 G_z) \quad (\text{A.43})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo ii) e iv).

ii)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_x & G_y & G_z \\ \hat{\mathbf{u}}_x & \hat{\mathbf{u}}_y & \hat{\mathbf{u}}_z \end{vmatrix} &= \\ &= (\partial_y \partial_z \varphi - \partial_z \partial_y \varphi) \hat{\mathbf{u}}_x + (\partial_z \partial_x \varphi - \partial_x \partial_z \varphi) \hat{\mathbf{u}}_y + (\partial_x \partial_y \varphi - \partial_y \partial_x \varphi) \hat{\mathbf{u}}_z = 0 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\partial_y G_x - \partial_x G_y, \partial_z G_x - \partial_x G_z, \partial_x G_y - \partial_y G_x) = \\ = \partial_x \partial_y G_z - \partial_x \partial_z G_y + \partial_y \partial_z G_x - \partial_y \partial_x G_z + \partial_z \partial_x G_y - \partial_z \partial_y G_x = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Definite le nostre derivate seconde, otteniamo una conseguenza quasi immediata.

**PROPOSIZIONE A.7.1. - OGNI CAMPO CONSERVATIVO È IRROTATORIALE.**

Ogni campo conservativo  $\vec{G}$  è irrotazionale.

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\vec{G} = \vec{\nabla}\varphi$  per un opportuno potenziale  $\varphi$  definito a meno di costanti, allora si ha che

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 \quad \square$$

**Teoremi relativi alle derivate seconde** Concludiamo la discussione con alcuni teoremi non banali (e forniti senza dimostrazione) che seguono dalle derivate seconde qui definite.

**TEOREMA A.7.2. - OGNI CAMPO IRROTATORIALE È CONSERVATIVO.**

Ogni campo irrotazionale  $\vec{G}$  è (localmente) conservativo, ossia è il gradiente di un opportuno campo scalare  $\varphi$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0 \implies \exists \varphi : \vec{G} = \vec{\nabla}\varphi \quad \square$$

**TEOREMA A.7.3. - OGNI CAMPO CON DIVERGENZA NULLA È SOLENOIDALE.**

Ogni campo  $\vec{G}$  con divergenza nulla è (localmente) soleinoidale, ossia è il rotore di un opportuno campo vettoriale  $\vec{A}$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0 \implies \exists \vec{A} : \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \square$$

## A.7.2 Operatori differenziali in dimensioni maggiori

Matematicamente, possiamo estendere parte delle definizioni precedenti dallo spazio affine  $\mathbb{R}^3$  a quello di un generico di  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINIZIONE A.7.6. - OPERATORE NABLA IN  $\mathbb{R}^n$ .**

L'operatore **nabla** è una notazione matematica che semplifica la scrittura di diverse equazioni. Nelle coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  della base standard  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  su  $\mathbb{R}^n$ , è il vettore puramente formale che contiene gli operatori delle derivate parziali nelle direzioni della base :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x^n} \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \vec{e}_i \quad (\text{A.44})$$

Preso il campo scalare

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^n) &\longmapsto \varphi(x^0, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

e il campi vettoriale

$$\vec{G} : \begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^n) \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^n \\ (G_1(x^0, \dots, x^n), \dots, G_n(x^0, \dots, x^n)) \quad (\text{A.46})$$

possiamo definire i seguenti operatori differenziali:

■ **Gradiente:**

$$\vec{\nabla}\varphi = (\partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\vec{e}_i \quad (\text{A.47})$$

■ **Divergenza:**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \partial_1 G^1 + \partial_y G_y + \partial_z G_z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G^i}{\partial x^i} = \partial_i G^i \quad (\text{A.48})$$

■ **Laplaciano:**

$$\nabla^2\varphi = \partial_i^2\varphi + \dots + \partial_n^2\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^i)^2} \quad (\text{A.49})$$

■ **Laplaciano vettoriale:**

$$\nabla^2\vec{G} = (\nabla^2 G_1, \dots, \nabla^2 G_n) \quad (\text{A.50})$$

**Operatore d'Alembertiano** Se consideriamo lo *spaziotempo di Minkowski*  $M = \mathbb{R}^4$ , con coordinate  $(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$  dotato della *metrika di Minkowski*

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si può definire un'estensione in tale spazio del *laplaciano*  $\nabla^2$ , l'**operatore d'Alembertiano**:

$$\square = \partial^\mu\partial_\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2} = \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{A.51})$$

dove  $c$  è la velocità della luce.

In questo modo possiamo definire il laplaciano di un campo scalare...

$$\square\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi \quad (\text{A.52})$$

...e, dato un campo vettoriale  $\vec{G}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , l'estensione del laplaciano vettoriale

$$\square\vec{G} = (\square G_0, \square G_1, \square G_2, \square G_3) \quad (\text{A.53})$$

In alcuni ambiti, ma specialmente nell'ambito dello studio delle onde *non elettromagnetiche*, si può adattare tale operatore sostituendo a  $c$  un'opportuna velocità  $v$ .

**TEOREMA A.8.1. - TEOREMA DELLA DIVERGENZA.**

Si consideri un volume  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  compatto con bordo liscio  $\partial V$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \int_{\partial V} \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \quad (\text{A.54})$$

□

Utilizzando la notazione fisica, la A.54 si scrive come

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \Phi_{\Sigma}(\vec{G}) \quad (\text{A.55})$$

**Teorema del rotore****TEOREMA A.8.2. - TEOREMA DEL ROTORE.**

Si consideri una curva  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  semplice - ossia senza intersezioni con sé stessa, chiusa e liscia a tratti; si consideri inoltre una superficie  $\Sigma$  liscia tale che  $\partial\Sigma = \gamma$ . Dato un campo vettoriale differenziabile  $\vec{G}$  in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \vec{G} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.56})$$

□

Utilizzando la notazione fisica, la A.56 si scrive come

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\nabla} \vec{G}) = \Gamma_{\gamma}(\vec{G}) \quad (\text{A.57})$$

**OSSERVAZIONE.** Ci sono infinite superfici con bordo  $\gamma$ , ma il flusso del rotore rimane *sempre* invariato.

**A.9 CAMPI CONSERVATIVI, IRROTATORIALI E SOLENOIDALI****Campi conservativi****DEFINIZIONE A.9.1. - CAMPO CONSERVATIVO E POTENZIALE.**

Dato un campo vettoriale  $\vec{G}$ , se esiste un campo scalare  $\varphi$  tale che  $\vec{G} = \vec{\nabla} \varphi$ , allora  $\vec{G}$  viene detto **conservativo** e il campo scalare  $\varphi$  è detto **potenziale**.

**Campi irrotazionali****DEFINIZIONE A.9.2. - CAMPO IRROTATORIALE.**

Un campo vettoriale  $\vec{G}$  viene detto **irrotazionale** se  $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ .

**PROPOSIZIONE A.9.1. - ★ CAMPO IRROTATORIALE E CAMPO CONSERVATIVO.**

Un campo conservativo è sempre irrotazionale; il viceversa è vero se il dominio è semplicemente connesso. □

**TEOREMA A.9.1. - CARATTERIZZAZIONI EQUIVALENTI DEI CAMPI CONSERVATIVI IN  $\mathbb{R}^3$ .**

Sia  $\vec{G}$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Le seguenti sono equivalenti:

- i)  $\vec{G}$  è conservativo, cioè esiste  $\varphi$  campo scalare tale che  $\vec{G} = \vec{\nabla}\varphi$ .
- ii)  $\vec{G}$  è irrotazionale, cioè  $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ .
- iii)  $\Gamma_\gamma(\vec{G}) = 0$ ,  $\forall \gamma$  curva chiusa.
- iv)  $\int_{\gamma_1} \vec{G} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{G} \cdot d\vec{s}$ ,  $\forall \gamma_1, \gamma_2$  curve tra due estremi  $A$  e  $B$  fissi.

□

**Campi solenoidali****DEFINIZIONE A.9.3. - CAMPO SOLENOIDALE E VETTORE POTENZIALE.**

Un campo vettoriale  $\vec{G}$  viene detto **solenoidale** se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$ .

In particolare, un campo è solenoidale se e solo se esiste un campo vettoriale  $\vec{A}$  tale che  $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Il campo vettoriale  $\vec{A}$  è detto **vettore potenziale**.

**TEOREMA A.9.1. - CARATTERIZZAZIONI EQUIVALENTI DEI CAMPI SOLENOIDALI IN  $\mathbb{R}^3$ .**

Sia  $\vec{G}$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Le seguenti sono equivalenti:

- i)  $\vec{G}$  è solenoidale, cioè  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$ .
- ii)  $\vec{G}$  ammette un vettore potenziale  $\vec{A}$  tale per cui  $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .
- iii)  $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = 0$ ,  $\forall \Sigma$  superficie chiusa.
- iv)  $\Phi_{\Sigma_1}(\vec{G}) = \Phi_{\Sigma_2}(\vec{G})$  se  $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2$ .
- v) Tutte le linee di forze sono chiuse.

**DIMOSTRAZIONE.**

II)  $\Rightarrow$  I) Se  $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , allora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

III)  $\Rightarrow$  IV) Consideriamo la superficie  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sono aperte se prese singolarmente, ma unendole al bordo la loro unione diventa chiusa; pertanto, si ha

$$\Phi_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}(\vec{G}) = 0$$

Posto  $\hat{\mathbf{u}}_n$  il versore esterno alla superficie unita e  $\hat{\mathbf{u}}_i$  il versore della superficie  $\Sigma_i$  concorde con il verso di  $\vec{G}$ , si osserva che

$$\Phi_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}(\vec{G}) = \int_{\Sigma} \vec{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_2} \vec{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 d\Sigma_2$$

da cui segue

$$\int_{\Sigma_1} \vec{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_2} \vec{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 d\Sigma_2 = 0$$

e quindi la tesi. □

**★ Teorema fondamentale del calcolo vettoriale**

**TEOREMA A.9.2. - TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO VETTORIALE.**

Ogni campo vettoriale può essere espresso come la somma di un campo irrotazionale e di un campo solenoidale.  $\square$

**A.10 ★ OPERATORI DIFFERENZIALI E FORME DIFFERENZIALI**

Consideriamo  $\mathbb{R}^n$  in coordinate cartesiane: questa è una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  con metrica l'identità, ossia  $g = \mathbb{M}$ .

**Gradiente** Dato un campo scalare  $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , il **gradiente** di  $\varphi$  è definito come il campo vettoriale  $\vec{\nabla}\varphi$  associato tramite l'isomorfismo musicale del diesis alla 1-forma  $d\varphi$ ,

$$\vec{\nabla}\varphi = (d\varphi)^\sharp \in \Omega^1(M), \quad (\text{A.58})$$

dove  $d\varphi$  è il differenziale (o derivata esterna) della funzione  $\varphi$ .

**Rotore** Il **rotore** di un campo vettoriale  $\vec{G}$  su  $\mathbb{R}^n$  è definito come la  $(n-2)$ -forma  $\text{rot}\vec{G}$  seguente:

$$\text{rot}\vec{G} = * \left( d[\vec{E}]^\flat \right) = * \left( d\underline{E} \right)$$

Questa è una generalizzazione del concetto del rotore ad  $n$  dimensioni. Nel caso specifico di  $\mathbb{R}^3$ , il rotore è una 1-forma; pertanto il rotore vettoriale a noi noto è semplicemente il campo vettoriale che otteniamo applicando l'isomorfismo musicale del diesis a  $\text{rot}\vec{G}$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \left( \text{rot}\vec{G} \right)^\sharp \quad (\text{A.59})$$

**Divergenza** La **divergenza** di  $\vec{G}$  è definito come il campo scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \text{tr} \left\{ d\vec{G} \right\} \quad (\text{A.60})$$

dove  $d\vec{G}$  è il differenziale della funzione.

Possiamo definire la divergenza in termini di operatore *star di Hodge*. Dato un campo vettoriale  $\vec{G} = E^i(\vec{r})\hat{u}_i$  su  $\mathbb{R}^3$ , l'isomorfismo musicale del bemolle definisce la sua 1-forma associata

$$\underline{E} = (\vec{G})^\flat = G_i(\vec{r})dx^i$$

Il suo duale di Hodge è la 2-forma

$$*\underline{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} E^i dx^j \wedge dx^k$$

dove  $\varepsilon_{ijk}$  è un simbolo di Levi-Civita.

La derivata esterna di  $*\underline{E}$  è la 3-forma

$$d * \underline{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_l E^i dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k$$

Il suo duale di Hodge è un campo scalare e coincide con la divergenza di  $\vec{G}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = *d * \underline{E} = \partial_i E^i \quad (\text{A.61})$$

### A.10.1 Teorema di Stokes per forme differenziali

**TEOREMA A.10.1. - TEOREMA DI STOKES PER FORME DIFFERENZIALI.**

Se  $\omega$  è una  $n$ -forma liscia con supporto compatto sulla varietà differenziabile e orientabile  $M$  di dimensione  $n+1$ , dotata - sulla base dell'orientazione indotta da  $M$  - di un bordo pari ad una varietà differenziabile  $\partial M$  di dimensione  $n$ , allora

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

dove nel secondo integrale si intende, con un abuso di notazione, la restrizione sul bordo  $\partial M$  di  $\omega$  (o equivalentemente, è pari al pullback  $i^*\omega$  dove  $i: \partial M \hookrightarrow M$  è l'inclusione del bordo nella varietà).  $\square$

Da questo importante teorema si possono ricavare diversi risultati già noti, applicati tuttavia al mondo delle forme differenziali.

**Teorema del rotore per forme differenziali** Si può osservare che  $\vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot \hat{u}_n dA$  è una 2-forma che è pari a

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot \hat{u}_n dA = *(\vec{\nabla} \times \vec{G})^\flat = d\vec{G}^\flat$$

Allora, il teorema del rotore per le forme differenziali diventa

$$\int_{\Sigma} d\underline{E} = \int_{\partial \Sigma} \underline{E} \quad (\text{A.62})$$

**Teorema della divergenza per forme differenziali** Si può osservare che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV$  è una 3-forma che è pari a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = d * \underline{E}$$

Allora, il teorema del rotore per le forme differenziali diventa

$$\int_V *d * \underline{E} = \int_{\partial V} ast d\underline{E} \quad (\text{A.63})$$

## A.11 COORDINATE SFERICHE E CILINDRICHE

In molti casi dove sono presenti evidenti simmetrie, le coordinate cartesiane possono complicare la trattazione del fenomeno fisico. A questo scopo introduciamo due sistemi di coordinate di frequente utilizzo: le **coordinate sferiche** e le **coordinate cilindriche**.

### A.11.1 Coordinate sferiche

**DEFINIZIONE A.11.1. - COORDINATE SFERICHE.**

Le **coordinate sferiche** sono un sistema di coordinate per  $\mathbb{R}^3$  dove la posizione  $\vec{r}$  di un punto è specificato da tre numeri:

- La **distanza radiale**  $r$  dall'origine.
- L'**angolo polare** (latitudine)  $\theta$  tra la direzione verticale dello zenith - l'asse  $z$  positivo - e il vettore radiale.
- L'**angolo azimutale** (longitudine)  $\varphi$  - definito tra l'asse  $x$  positivo e la proiezione

del vettore radiale sul piano  $xy$ , in senso antiorario.  
Utilizzando i radianti, si pone  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$

La legge di trasformazione dalle coordinate sferiche alle coordinate cartesiane è

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.64})$$

Viceversa, si ha

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

### Basi e componenti vettoriali

**RICORDIAMO...** Dato un cambiamento di coordinate  $q^\lambda = q^\lambda(x^i)$ , la matrice del cambiamento di base è la matrice che ha sulle colonne i vettori della nuova base espressi in funzione della seconda. In *notazione di Einstein* essa è della forma

$$M = \left( \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \right) \quad (\text{A.66})$$

dove  $i$  è l'indice di riga e  $\lambda$  quello di colonna.

Per passare dalla base riferita alle  $x^i$  alla nuova base riferita alle  $q^\lambda$  la formula è quindi

$$\vec{e}_\lambda = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \vec{G}_i \quad (\text{A.67})$$

Invece, per cambiare le componenti dei vettori dobbiamo operare in modo controvariante e utilizzare la *matrice inversa* del cambiamento di base:

$$v^\lambda = \frac{\partial q^\lambda}{\partial x^i} V_i \quad (\text{A.68})$$

Poniamo qui  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $q^1 = r$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = \varphi$ . Il vettore posizione in cartesiane è

$$\vec{r} = x^i \hat{u}_i = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z$$

Allora, il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  alla base sferica  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$  è

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \frac{\partial x^i}{\partial r} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z \\ \hat{e}_\theta = \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \hat{u}_x + r \cos \theta \sin \varphi \hat{u}_y - r \sin \theta \hat{u}_z \\ \hat{e}_\varphi = \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \hat{u}_x + r \sin \theta \cos \varphi \hat{u}_y \end{cases} \quad (\text{A.69})$$

Poiché

$$|\hat{e}_r| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 \quad |\hat{e}_\theta| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r \quad |\hat{e}_\varphi| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta, \quad (\text{A.70})$$

il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$  alla base *ortonormale sferica*  $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_\varphi)$  è

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{|\hat{\mathbf{e}}_r|} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_z \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{|\hat{\mathbf{e}}_\theta|} = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_y - \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_z \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{|\hat{\mathbf{e}}_\varphi|} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \varphi \hat{\mathbf{u}}_y \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

La matrice del cambiamento di base ortonormale  $M$  è una rotazione nelle tre dimensioni attorno all'origine, e la relazione di cui sopra si può scrivere matricialmente come

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_r \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.72})$$

Si osservi in particolare che  $M$  è *ortogonale*, quindi  $M^{-1} = M^T$ . Pertanto, il cambiamento delle componenti di un campo vettoriale  $\vec{G}$  dalle cartesiane alle sferiche è

$$(G_r \quad G_\theta \quad G_\varphi) = (G_x \quad G_y \quad G_z) M^{-1} = (G_x \quad G_y \quad G_z) M^T \quad (\text{A.73})$$

**Elemento di linea** Lo spostamento infinitesimo da  $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$  a  $\vec{r} + d\vec{r} = (r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  è

$$d\vec{s} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \right| dq^i \hat{\mathbf{u}}_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| dr \hat{\mathbf{u}}_r + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| d\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi = dr \hat{\mathbf{u}}_r + rd\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (\text{A.74})$$

Essendo la metrica associata alle coordinate sferiche ortogonale, l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{A.75})$$

### Operatore nabla

**RICORDIAMO...** L'operatore nabla, scritto in notazione versoriale cartesiana, è

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_x \hat{\mathbf{u}}_x + \vec{\nabla}_y \hat{\mathbf{u}}_y + \vec{\nabla}_z \hat{\mathbf{u}}_z = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z$$

Le componenti dell'operatore dalle sferiche alle cartesiane sono:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_x = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{\nabla}_y = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{\nabla}_z = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{A.76})$$

Sostituendo in A.32 i versori e le componenti dell'operatore nabla in coordinate sferiche, si ricava, dopo raccoglimenti e calcoli noiosi,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (\text{A.77})$$

In modo alternativo, possiamo ricavare l'espressione A.77 dalla definizione intrinseca di gradiente. Presa una funzione  $V$  arbitraria, inserendo lo spostamento infinitesimo A.74 nella A.37 si ricava

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi = \vec{\nabla}_r V dr + \vec{\nabla}_\theta V r d\theta + \vec{\nabla}_\varphi V r \sin \theta d\varphi,$$

da cui

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (\text{A.78})$$

e quindi l'espressione dell'operatore nabla è quanto scritto nella A.77.

**Divergenza** Calcoliamo il divergenza in coordinate sferiche applicando l'operatore nabla in coordinate sferiche al campo vettoriale come fosse un prodotto scalare, tenendo conto che i versori stessi sono funzioni delle coordinate e che le derivate devono essere applicate *prima* del prodotto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} &= \left( \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{u}}_\varphi \right) \cdot (G_r\hat{\mathbf{u}}_r + G_\theta\hat{\mathbf{u}}_\theta + G_\varphi\hat{\mathbf{u}}_\varphi) = \\ &= \vec{\mathbf{u}}_r \left[ \frac{\partial}{\partial r}(G_r\hat{\mathbf{u}}_r) + \frac{\partial}{\partial r}(G_\theta\hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(G_\varphi\hat{\mathbf{u}}_\varphi) \right] + \\ &\quad + \frac{\vec{\mathbf{u}}_\theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}(G_r\hat{\mathbf{u}}_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(G_\theta\hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(G_\varphi\hat{\mathbf{u}}_\varphi) \right] + \\ &\quad + \frac{\vec{\mathbf{u}}_\varphi}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi}(G_r\hat{\mathbf{u}}_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(G_\theta\hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(G_\varphi\hat{\mathbf{u}}_\varphi) \right] \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti con la *regola di Leibniz* otteniamo, in ogni parentesi, sei termini di cui 3 che sono derivate dei versori. Facendo solo calcoli noiosi ci calcoliamo queste derivate...

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r = 0 & \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_\theta = 0 & \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_\theta & \frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta = -\hat{\mathbf{u}}_r & \frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{u}}_r = \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{u}}_\theta = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{u}}_\varphi = \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_r - \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{array}$$

...e sostituendo nell'espressione della divergenza otteniamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2G_r) + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(G_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.79})$$

**Laplaciano** Essendo il laplaciano la divergenza del gradiente, per ottenerlo applichiamo con un prodotto scalare l'operatore nabla in coordinate sferiche alle componenti del gradiente:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.80})$$

### A.11.2 Coordinate cilindriche

#### DEFINIZIONE A.11.2. - COORDINATE CILINDRICHE.

Le **coordinate cilindriche** sono un sistema di coordinate per  $\mathbb{R}^3$  dove la posizione  $\vec{r}$  di un punto è specificato da tre numeri:

- La **distanza assiale**  $R$  tra l'asse verticale - asse  $z$  - e il punto  $\vec{r}$
- L'**angolo azimutale** (longitudine)  $\theta$  - definito tra l'asse  $x$  positivo e la linea sul piano  $xy$  dall'origine alla proiezione del punto  $\vec{r}$ , in senso antiorario.
- L'**altezza**  $z$  in segno tra il piano  $xy$  e il punto  $\vec{r}$ :

Utilizzando i radianti, si pone  $R \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $z \in \mathbb{R}$

La legge di trasformazione dalle coordinate sferiche alle coordinate cartesiane è

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ y = R \cos \theta \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

Viceversa, si ha

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

**Basi e componenti vettoriali** Poniamo qui  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $q^1 = R$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = z$ . Il vettore posizione in cartesiane è

$$\vec{r} = x^i \hat{\mathbf{u}}_i = x \hat{\mathbf{u}}_x + y \hat{\mathbf{u}}_y + z \hat{\mathbf{u}}_z$$

Allora, il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$  alla base cilindrica  $(\hat{\mathbf{e}}_R, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z)$  è

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_R = \frac{\partial x^i}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -R \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_x + R \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\partial x^i}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases} \quad (\text{A.83})$$

Poiché

$$|\hat{\mathbf{e}}_R| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} \right| = 1 \quad |\hat{\mathbf{e}}_\theta| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = R \quad |\hat{\mathbf{e}}_z| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1, \quad (\text{A.84})$$

il cambiamento dalla base cartesiana  $(\hat{\mathbf{u}}_x, \hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$  alla base *ortonormale* cilindrica  $(\hat{\mathbf{u}}_R, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_z)$  è

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_R = \frac{\hat{\mathbf{e}}_R}{|\hat{\mathbf{e}}_R|} = \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{|\hat{\mathbf{e}}_\theta|} = -\sin \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{|\hat{\mathbf{e}}_z|} = \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases} \quad (\text{A.85})$$

La matrice del cambiamento di base ortonormale  $M$  è una rotazione assiale attorno all'asse  $z$  in senso antiorario, e la relazione di cui sopra si può scrivere matricialmente come

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_R \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x \\ \hat{\mathbf{u}}_y \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.86})$$

Si osservi in particolare che  $M$  è *ortogonale*, quindi  $M^{-1} = M^T$ . Pertanto, il cambiamento delle componenti di un campo vettoriale  $\vec{G}$  dalle cartesiane alle cilindriche è

$$(G_r \quad G_\theta \quad G_\varphi) = (G_x \quad G_y \quad G_z) M^{-1} = (G_x \quad G_y \quad G_z) M^T \quad (\text{A.87})$$

**Elemento di linea** Lo spostamento infinitesimo da  $\vec{r} = (r, \theta, z)$  a  $\vec{r} + d\vec{r} = (r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$  è

$$d\vec{s} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \right| dq^i \hat{\mathbf{u}}_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} \right| dR \hat{\mathbf{u}}_R + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| dz \hat{\mathbf{u}}_z = dR \hat{\mathbf{u}}_R + R d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + dz \hat{\mathbf{u}}_z \quad (\text{A.88})$$

Essendo la metrica associata alle coordinate cilindriche ortogonale, l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (\text{A.89})$$

**Operatore nabla** Ricaviamo, per semplicità, l'espressione dell'operatore nabla dalla definizione intrinseca di gradiente. Presa una funzione  $V$  arbitraria, inserendo lo spostamento infinitesimo A.88 nella A.37 si ricava

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla}_R V dr + \vec{\nabla}_\theta V R d\theta + \vec{\nabla}_z V dz,$$

da cui

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (\text{A.90})$$

e quindi l'espressione dell'operatore nabla è

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (\text{A.91})$$

**Divergenza** Calcoliamo il divergenza in coordinate cilindriche applicando l'operatore nabla in coordinate sferiche al campo vettoriale come fosse un prodotto scalare, tenendo conto che i versori stessi sono funzioni delle coordinate e che le derivate devono essere applicate *prima* del prodotto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} &= \left( \frac{\partial}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \right) \cdot (G_R \hat{\mathbf{u}}_R + G_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + G_z \hat{\mathbf{u}}_z) = \\ &= \hat{\mathbf{u}}_R \left[ \frac{\partial}{\partial R} (G_R \hat{\mathbf{u}}_R) + \frac{\partial}{\partial R} (G_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial R} (G_z \hat{\mathbf{u}}_z) \right] + \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{u}}_\theta}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (G_R \hat{\mathbf{u}}_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (G_z \hat{\mathbf{u}}_z) \right] + \\ &\quad + \hat{\mathbf{u}}_z \left[ \frac{\partial}{\partial z} (G_R \hat{\mathbf{u}}_R) + \frac{\partial}{\partial z} (G_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (G_z \hat{\mathbf{u}}_z) \right] \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti con la *regola di Leibniz* otteniamo, in ogni parentesi, sei termini di cui 3 che sono derivate dei versori. Facendo solo calcoli noiosi ci calcoliamo queste derivate...

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_R = 0 & \frac{\partial}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_\theta = 0 & \frac{\partial}{\partial R} \hat{\mathbf{u}}_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_R = \hat{\mathbf{u}}_\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta = -\hat{\mathbf{u}}_r & \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_R = 0 & \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_\theta = 0 & \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z = 0 \end{array}$$

...e sostituendo nell'espressione della divergenza otteniamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{G}} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (G_R R) + \frac{1}{R} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \quad (\text{A.92})$$

**Laplaciano** Essendo il laplaciano la divergenza del gradiente, per ottenerlo applichiamo con un prodotto scalare l'operatore nabla in coordinate cilindriche alle componenti del gradiente:

$$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.93})$$

# B

APPENDICE

## NOTE AGGIUNTIVE

---

“... and they don’t stop coming.”

*SMASH MOUTH, sorpresi che ci siano delle note aggiuntive dopo duecento e passa pagine di appunti.*

Riportiamo alcune note, precisazioni e dimostrazioni complementari agli argomenti dei capitoli principali.

Quanto indicato con il simbolo  $\star$  sono degli *approfondimenti non necessari* - ma possono essere comunque utili ed interessanti per un lettore curioso.

### B.1 CAPITOLO 7: MAGNETOSTATICA

#### B.1.1 Area di una superficie delimitata da una curva piana chiusa

##### LEMMA B.1.1. - AREA DI UNA SUPERFICIE DELIMITATA DA UNA CURVA PIANA CHIUSA.

*Data una curva  $\gamma$  piana, chiusa, liscia a tratti, semplice e orientata positivamente, con parametrizzazione  $\vec{r}$ , si ha che il vettore area per la superficie piana racchiusa da  $\gamma$  è*

$$\Sigma \hat{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \vec{r} \times d\vec{s} \quad (\text{B.1})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dato che la nostra curva  $\gamma$  è una *curva di Jordan*, ossia  $\gamma$  divide il piano in una componente connessa *interna* limitata e una *esterna* limitata, ha senso porre un sistema di riferimento in *coordinate polari*, con origine un punto arbitrariamente scelto nella componente del piano interna alla curva: se  $\theta$  è l’angolo azimutale e  $\rho$  la distanza dall’origine, si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

La curva  $\gamma$  può essere quindi parametrizzata come

$$\vec{r}(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x + \rho(\theta) \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_y$$

su  $[\theta_1, \theta_2]$  e tale per cui  $\vec{r}(\theta_1) = \vec{r}(\theta_2)$ ;  $\rho(\theta)$  descrive la distanza dall'origine. La velocità risulta

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(\theta) &= \frac{d}{dt} (\rho(\theta) \cos \theta) \hat{\mathbf{u}}_x + \frac{d}{dt} (\rho(\theta) \sin \theta) \hat{\mathbf{u}}_y = \\ &= (\dot{\rho}(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta) \hat{\mathbf{u}}_x + (\dot{\rho}(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta) \hat{\mathbf{u}}_y\end{aligned}$$

Poiché l'elemento di area dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari diventa

$$dA = dx dy = \rho d\rho d\theta,$$

l'area delimitata dalla curva  $\gamma$  è

$$\Sigma = \int_{\Sigma} dx dy = \int_0^{2pi} \int_0^{\rho(\theta)} \int \rho d\rho d\theta = \int_0^{2pi} \frac{1}{2} \rho \Big|_0^{\rho(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2pi} \rho^2(\theta) d\theta$$

Ora, calcolando il prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_x & \hat{\mathbf{u}}_y & \hat{\mathbf{u}}_z \\ \rho(\theta) \cos \theta & \rho(\theta) \sin \theta & 0 \\ \dot{\rho}(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta & \dot{\rho}(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho \dot{\rho} \sin \varphi \cos \varphi - \rho \dot{\rho} \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \hat{\mathbf{u}}_z = \rho^2(\varphi) \hat{\mathbf{u}}_z\end{aligned}$$

Poiché il versore normale ad una superficie nel piano  $xy$  quale  $\Sigma$  è  $\hat{\mathbf{u}}_z$  è immediato trovare che

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi \hat{\mathbf{u}}_z = \Sigma \hat{\mathbf{u}}_z \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Tale risultato è equivalente a calcolare l'area di una superficie bidimensionale utilizzando il **teorema di Gauss-Green** e dunque è un'ulteriore corollario del *teorema di Stokes*.

In quanto tale, si può mostare che la relazione scritta vale per una *qualunque* superficie che ha come bordo una determinata curva: il vettore area è determinato *esclusivamente* dal bordo della superficie.

## B.2 CAPITOLO 11: OSCILLAZIONI ELETTRICHE E CORRENTI ALTERNATE

### B.2.1 Fasori

#### DEFINIZIONE B.2.1. - FASORE.

Data una grandezza sinusoidale

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove l'ampiezza  $A$ , la pulsazione  $\omega$  e la fase  $\phi$  sono costanti temporali, la sua **rappresentazione**

**tazione analitica o fasore è**

$$\hat{\xi}(t) = A \cos(\omega t + \phi) + iA \sin(\omega t + \phi) = Ae^{i(\omega t + \phi)} = Ae^{i\phi}e^{i\omega t} \quad (\text{B.2})$$

Il fasore può essere rappresentato nel *piano complesso di Argand-Gauss* come un vettore di lunghezza  $A$  e angolo  $\phi$ , che ruota con velocità angolare  $\omega$ . In realtà, in molti contesti il termine di rotazione  $e^{i\omega t}$  risulta essere comune ad altri fasori e pertanto le operazioni che andremo a fare si possono eseguire direttamente sui termine  $Ae^{i\phi}$  - sarà poi facile reinserire  $e^{i\omega t}$  alla fine dei calcoli. Di conseguenza, potrà essere utile passare alla *rappresentazione vettoriale* per le nostre operazioni tra fasori con la stessa pulsazione.

**ATTENZIONE!** Per il motivo sopracitato, in diversi contesti il termine “fasore” fa riferimento esclusivamente a  $Ae^{i\theta}$ .

Si osservi che, poiché la grandezza originale non è altro che la *parte reale* del fasore...

$$\xi(t) = \operatorname{Re} \hat{\xi}(t) \quad (\text{B.3})$$

... nella rappresentazione vettoriale dei fasori la grandezza originale è la proiezione sulla (retta dei reali).

**NOTAZIONE.** Tralasciando il termine di rotazione, un fasore di ampiezza  $A$  e angolo  $\phi$  si indica come

$$\xi = A \angle \phi \quad (\text{B.4})$$

**Moltiplicazione per una costante (scalare)** La **moltiplicazione** di un fasore

$$\hat{\xi}(t) = Ae^{i\phi}e^{i\omega t}$$

per una costante scalare complessa

$$\hat{k} = Be^{i\theta}$$

è ancora un fasore, che modifica l'*ampiezza* e la *fase* del fasore originale.

$$\hat{k}\hat{\xi}(t) = Be^{i\theta} \cdot Ae^{i\phi}e^{i\omega t} = AB e^{i(\phi+\theta)}e^{i\omega t} \quad (\text{B.5})$$

$$k\xi(t) = AB \cos(\omega t + (\phi + \theta)) \quad (\text{B.6})$$

In notazione fasoriale:

$$\hat{k} \cdot A \angle \phi = AB \angle (\phi + \theta) \quad (\text{B.7})$$

**Somma di fasori** La **somma** di due fasori

$$\hat{\xi}_1(t) = A_1 e^{i\phi_1}e^{i\omega t} \quad \hat{\xi}_2(t) = A_2 e^{i\phi_2}e^{i\omega t}$$

è ancora un fasore.

$$\hat{\xi}_1(t) + \hat{\xi}_2(t) = A_1 e^{i\phi_1}e^{i\omega t} + A_2 e^{i\phi_2}e^{i\omega t} = \left( A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} \right) e^{i\omega t} = A_3 e^{i\phi_3}e^{i\omega t} \quad (\text{B.8})$$

$$\xi_1(t) + \xi_2(t) = A_3 \cos(\omega t + \phi_3) \quad (\text{B.9})$$

dove

$$A_3^2 = (A_1^2 \cos \phi_1 + A_2^2 \cos \phi_1)^2 + (A_1^2 \sin \phi_1 + A_2^2 \sin \phi_1)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\phi_3 = \begin{cases} \operatorname{sgn}(A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)) \frac{\pi}{2} & \text{se } A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 = 0 \\ \arctan\left(\frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}\right) & \text{se } A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}\right) & \text{se } A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 < 0 \end{cases}$$

In notazione fasoriale:

$$A_1 \angle \phi_1 + A_2 \angle \phi_2 = A_3 \angle \phi_3 \quad (\text{B.10})$$

Alternativamente, si può fare la *somma vettoriale* dei vettori di coordinate

$$\hat{\xi}_1(t) = (A_1 \cos(\omega t + \phi_1), A_1 \sin(\omega t + \phi_1)) \quad \hat{\xi}_2(t) = (A_2 \cos(\omega t + \phi_2), A_2 \sin(\omega t + \phi_2))$$

per produrre il vettore risultante

$$\hat{\xi}_1(t) + \hat{\xi}_2(t) = (A_3 \cos(\omega t + \phi_3), A_3 \sin(\omega t + \phi_3))$$

**Derivata e integrale** La **derivata temporale** o l'**integrale** rispetto a  $t$  di un fasore produce un altro fasore.

$$\frac{d}{dt} \hat{\xi}(t) = \frac{d}{dt} (A e^{i\phi} e^{i\omega t}) = A e^{i\phi} i\omega e^{i\omega t} = \omega A e^{i\phi} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t} = \omega A e^{i(\phi + \frac{\pi}{2})} e^{i\omega t} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \omega A \cos\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{B.12})$$

In altre parole, *derivare* un fasore temporalmente è equivalente a moltiplicare per la costante scalare  $i\omega$ .

$$\frac{d}{dt} \hat{\xi}(t) = i\omega \hat{\xi}(t) = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega \hat{\xi}(t) \quad (\text{B.13})$$

In notazione fasoriale:

$$\frac{d}{dt} A \angle \phi = i\omega \cdot A \angle \phi = \omega A \angle \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{B.14})$$

In modo analogo, integrare un fasore temporalmente è equivalente a dividere per la costante scalare  $i\omega$ .

$$\int \hat{\xi}(t) dt = \frac{1}{i\omega} \hat{\xi}(t) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\omega} \hat{\xi}(t) \quad (\text{B.15})$$

In notazione fasoriale:

$$\int A \angle \phi dt = \frac{i\omega}{\cdot} A \angle \phi = \frac{A}{\omega} \angle \left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{B.16})$$

**Rapporto tra fasori** Il **rapporto** tra due fasori

$$\hat{\xi}_1(t) = A_1 e^{i\phi_1} e^{i\omega t} \quad \hat{\xi}_2(t) = A_2 e^{i\phi_2} e^{i\omega t}$$

prende il nome di **impedenza**:

$$Z = \frac{\hat{\xi}_1(t)}{\hat{\xi}_2(t)} = \frac{A_1 e^{i\phi_1} e^{i\omega t}}{A_2 e^{i\phi_2} e^{i\omega t}} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \quad (\text{B.17})$$

Tuttavia, *non* è un fasore, perché non corrisponde ad una grandezza sinusoidale variabile nel tempo.

# C

APPENDICE

## PROPRIETÀ VARIE ED EVENTUALI

---

*“La Matematica consiste di fatti veri riguardanti oggetti immaginari.”*

*PHILIP DAVIS E REUBEN HERSH, matematici immaginari con opinioni vere.*

Riportiamo alcune proprietà utili per il lettore.

### C.1 IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Data una funzione  $f \rightarrow XY$ , per ogni sottoinsieme  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$  valgono le seguenti proprietà:

Immagine	Controimmagine
$f(X) \subseteq Y$	$f^{-1}(Y) = X$
$f(f^{-1}(Y)) = f(X)$	$f^{-1}(f(X)) = X$
$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ <sup>1</sup>	$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ <sup>2</sup>
$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$	$(f _A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$
$f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$	$f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$
$f(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$	$f^{-1}(B) = \emptyset \iff B \subseteq Y \setminus f(X)$
$f(A) \supseteq B \iff \exists C \subseteq A: f(C) = B$	$f^{-1}(B) \supseteq A \iff f(A) \subseteq B$
$f(A) \supseteq f(X \setminus A) \iff f(A) = f(X)$	$f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(Y \setminus B) \iff f^{-1}(B) = X$
$f(X \setminus A) \supseteq f(X) \setminus f(A)$	$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
$f(A \cup f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cup B$	$f^{-1}(f(A) \cup B) \supseteq A \cup f^{-1}(B)$
$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$	$f^{-1}(f(A) \cap B) \supseteq A \cap f^{-1}(B)$
$f(A) \cap B = \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$	

Date le funzioni  $f \rightarrow XY$  e  $g \rightarrow YZ$ , valgono le seguenti proprietà:

- $(g \circ f)(A) = g(f(A))$
- $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$

<sup>1</sup>Uguale se  $B \subseteq f(X)$ , cioè se  $f$  suriettiva.

<sup>2</sup>Uguale se  $f$  iniettiva.

Data una funzione  $f \rightarrow XY$  e dati i sottoinsiemi  $A_1, A_2 \subseteq X$  e  $B_1, B_2 \subseteq Y$  valgono le seguenti proprietà:

<b>Immagine</b>	<b>Controimmagine</b>
$A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$	$B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$	$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ <sup>3</sup>	$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
$f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ <sup>4</sup>	$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Data una funzione  $f \rightarrow XY$  e date le famiglie di sottoinsiemi  $\{A_i\} \subseteq \mathcal{P}(X)$  e  $\{B_i\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$  (con  $I$  un insieme di indici anche *infinito* o *non numerabile*) valgono le seguenti proprietà:

<b>Immagine</b>	<b>Controimmagine</b>
$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$	$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ <sup>5</sup>	$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

## C.2 MODI DI CONVERGENZA

Lo schema riassuntivo è nella pagina successiva.

---

<sup>3</sup>Uguale se  $f$  *iniettiva*.

<sup>4</sup>Si veda 3.

<sup>5</sup>Si veda 3.

## C.3 PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

## Teoremi

Convergenza uniforme (teoria di Riemann)	Convergenza uniforme (teoria di Lebesgue)
<p>Siano <math>f_n, f \rightarrow [a, b] \mathbb{R}</math>, <math>n \geq 1</math> tali che</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>(a) <math>f_n \in \mathcal{R}([a, b])</math>, <math>\forall n \geq 1</math>.</li> <li>(b) <math>f_n</math> converge uniformemente a <math>f</math> su <math>[a, b]</math>.</li> </ul> <p>Allora</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f \in \mathcal{R}([a, b])</math>.</li> <li>2. Vale il <b>passaggio al limite sotto segno di integrale</b>:</li> </ol> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$	<p>Consideriamo lo spazio di misura <math>(X, \mathcal{M}, \mu)</math> e le funzioni <math>f_n, f \rightarrow X \mathbb{C}</math> tali che</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>(a) <math>f_n \in L^1(\mu)</math>.</li> <li>(b) <math>f_n</math> converge uniformemente a <math>f</math> su <math>X</math>.</li> <li>(c) <math>\mu(X) &lt; +\infty</math>.</li> </ul> <p>Allora</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f \in L^1(\mu)</math>.</li> <li>2. <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \ f_n - f\ _1 = 0</math>.</li> <li>3. Vale il <b>passaggio al limite sotto segno di integrale</b>:</li> </ol> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$

## Vantaggi

- È l'unico teorema sul passaggio di limite valido nella teoria di Riemann.
- Vale su spazi di misura finita invece che solamente sugli intervalli finiti.

## Svantaggi

- |  |  |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Richiede la convergenza uniforme.</li> <li>■ Vale solo per funzioni limitate.</li> <li>■ Vale solo su intervalli limitati.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Richiede la convergenza uniforme.</li> <li>■ Richiede l'integrabilità della successione.</li> <li>■ Vale solo su spazi di misura finita.</li> </ul> |
|--|--|

### Teoremi

<b>Convergenza monotona</b>	<b>Convergenza dominata</b>
<p>Siano <math>(X, \mathcal{M}, \mu)</math> uno spazio di misura e <math>f_n, f \rightarrow X[0, +\infty]</math> con <math>n \geq 1</math> tali che</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>(a) <math>f_n</math> sono misurabili.</li> <li>(b) C'è convergenza puntuale: <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X</math></li> <li>(c) La successione di funzioni è crescente: <math>0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall n \geq 1, \forall x \in X</math></li> </ul> <p>Allora</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f</math> è misurabile.</li> <li>2. Vale il <b>passaggio al limite sotto segno di integrale</b>:</li> </ol> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$	<p>Siano <math>(X, \mathcal{M}, \mu)</math> uno spazio di misura e <math>f_n, f \rightarrow X\mathbb{C}</math> con <math>n \geq 1</math> tali che</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>(a) <math>f_n</math> sono misurabili.</li> <li>(b) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X</math></li> <li>(c) Esiste una funzione <math>g \in \mathcal{L}^1(\mu)</math> tale per cui <math> f_n(x)  \leq g(x), \forall n \geq 1, \forall x \in X</math></li> </ul> <p>Allora</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f \in L^1(\mu)</math>.</li> <li>2. <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X  f_n - f  d\mu = 0</math></li> <li>3. Vale il <b>passaggio al limite sotto segno di integrale</b>:</li> </ol> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$
<b>Vantaggi</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Richiede solo la convergenza puntuale.</li> <li>■ Si può applicare anche con la convergenza <b>q.o.</b> purché la misura sia completa o la funzione limite <math>f</math> è una funzione misurabile che coincide <b>q.o.</b> con il limite <b>q.o.</b> della successione.</li> <li>■ È sufficiente anche solamente supporre che la successione <math>f_n</math> sia non decrescente su <math>X</math> <b>q.o..</b></li> <li>■ Vale qualunque sia la misura di <math>X</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Richiede solo la convergenza puntuale.</li> <li>■ Si può applicare anche con la convergenza <b>q.o.</b> e con la dominazione <b>q.o.</b> purché la misura sia completa o la funzione limite <math>f</math> è una funzione misurabile che coincide <b>q.o.</b> con il limite <b>q.o.</b> della successione.</li> <li>■ Vale qualunque sia la misura di <math>X</math>.</li> <li>■ Vale per funzione a valori complessi.</li> </ul>
<b>Svantaggi</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Non vale per successioni decrescenti.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Richiede una dominazione della successione.</li> </ul>

# D

## APPENDICE

# ELENCHI DELLE DEFINIZIONI E DEI TEOREMI

---

ELENCO DELLE DEFINIZIONI E DEGLI ASSIOMI	CAPITOLO 2: IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E LA LEGGE DI GAUSS
<b>CAPITOLO 1: IL CAMPO ELETROSTATICO</b>	<b>D2.1.1. FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE</b>
D1.1.1. CARICA ELETTRICA POSITIVA E NEGATIVA	25
PRI1.1.1. PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DELLA CARICA	6
D1.1.2. DEFINIZIONE OPERATIVA DI CARICA ELETTRICA	7
D1.2.1. LEGGE DI COULOMB	7
PRI1.2.1. PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER FORZE ELETROSTATICHE	9
D1.3.1. CAMPO VETTORIALE	9
D1.3.2. LINEA DI CAMPO	10
D1.4.1. CAMPO ELETROSTATICO	10
PRI1.4.1. PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER CAMPI ELETROSTATICI	11
D1.5.1. MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO	13
D1.6.1. DENSITÀ DI CARICA VOLUMICA	16
D1.6.2. DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE	17
D1.6.3. DENSITÀ DI CARICA LINEARE	17
<b>CAPITOLO 3: LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO, IL POTENZIALE ELETTRICO E LE LEGGI DI MAXWELL PER L'ELETROSTATICA</b>	<b>D3.1.1. CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE</b>
D3.1.1. ANGOLO SOLIDO	27
D2.4.1. EQUILIBRIO STABILE	36
D2.4.2. EQUILIBRIO INSTABILE	36
D3.2.1. LAVORO	40
D3.2.2. FORZA CONSERVATIVA	40
D3.2.3. CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO	41
D3.3.1. SUPERFICI EQUIPOTENZIALI	45
<b>CAPITOLO 4: CONDUTTORI E CONDENSATORI</b>	<b>D4.1.1. CONDUTTORE</b>
D4.1.1. CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE	59
D4.2.1. INDUZIONE COMPLETA	65
D4.3.2. SCHERMO ELETROSTATICO O SCHERMO DI FARADAY	69
D4.4.1. CONDENSATORE	69

<b>D4.4.2.</b> CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE		<b>D9.1.1.</b> NODO	164
	69	<b>D9.1.2.</b> MAPPA DI GAUSS	164
<b>CAPITOLO 5:</b> CORRENTE ELETTRICA E		<b>D9.1.3.</b> LINKING NUMBER DI GAUSS	
CIRCUITI ELETTRICI			165
<b>D5.1.1.</b> CORRENTE ELETTRICA	76	<b>D9.2.1.</b> INVARIANZA DI GAUGE	168
<b>D5.1.2.</b> INTENSITÀ DI CORRENTE	77	<b>CAPITOLO 10:</b> CAMPI ELETTRICI E MA-	
<b>D5.1.3.</b> VELOCITÀ DI DERIVA	77	GNETICI VARIABILI NEL TEMPO E LE	
<b>D5.1.4.</b> DENSITÀ DI CORRENTE	78	EQUAZIONI DI MAXWELL	
<b>D5.2.1.</b> CONDUTTIVITÀ E RESISTIVITÀ		<b>D10.3.1.</b> INDUTTANZA	180
	83	<b>D10.3.2.</b> AUTOFLUSSO	180
<b>D5.2.2.</b> RESISTENZA E CONDUTTANZA		<b>D10.4.1.</b> INDUTTORE	181
	84	<b>D10.4.2.</b> CIRCUITO RL	181
<b>D5.4.1.</b> FORZA ELETTROMOTRICE	89	<b>D10.6.1.</b> CORRENTE DI SPOSTA- MENTO E DENSITÀ DI CORRENTE DI	
<b>D5.5.1.</b> CIRCUITO ELETTRICO	90	SPOSTAMENTO	185
<b>D5.5.2.</b> COMPONENTE, NODO, RAMO,		<b>CAPITOLO 11:</b> OSCILLAZIONI ELETTRI-	
MAGLIA, INTERRUTTORE	90	CHE E CORRENTI ALTERNATE	
<b>D5.5.3.</b> COLLEGAMENTO IN SERIE E IN		<b>D11.1.1.</b> CIRCUITO RLC	194
PARALLELO	91	<b>D11.1.2.</b> RESISTENZA CRITICA	195
<b>D5.5.4.</b> RESISTORE	91	<b>D11.1.3.</b> CIRCUITO LC	196
<b>D5.5.5.</b> CIRCUITO RC	101	<b>D11.1.4.</b> CORRENTE CONTINUA	197
<b>CAPITOLO 6:</b> PROPRIETÀ ELETTRICHE		<b>D11.1.5.</b> CORRENTE ALTERNATA	197
DELLA MATERIA		<b>D11.2.1.</b> ELETTROGENERATORE	198
<b>D6.1.1.</b> COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA		<b>D11.3.1.</b> MOTORE	202
E SUSCETTIBILITÀ ELETTRICA DEL		<b>D11.4.1.</b> IMPEDENZA E AMMETTENZA	
DIELETTRICO	109	205	
<b>D6.1.2.</b> COSTANTE DIELETTRICA ASSOLU-		<b>D11.4.2.</b> REATTANZA	206
TA	110	<b>D11.5.1.</b> FREQUENZA DI RISONANZA	
<b>CAPITOLO 7:</b> IL CAMPO MAGNETICO		215	
<b>D7.3.1.</b> AMPERE (1960)	132	<b>CAPITOLO 12:</b> PROPRIETÀ MAGNETICHE	
<b>D7.3.2.</b> AMPERE (2019)	132	DELLA MATERIA	
<b>D7.4.1.</b> FORZA DI LORENTZ	133	<b>D12.1.1.</b> COSTANTE DI PERMEABILITÀ MA-	
<b>D7.4.2.</b> PASSO DELL'ELICA	135	GNETICA RELATIVA E SUSCETTIBI-	
<b>D7.4.3.</b> BOTTIGLIA MAGNETICA	135	LITÀ ELETTRICA DEL DIELETTRICO	
<b>D7.4.4.</b> SPETTROMETRO DI MASSA	136	222	
<b>D7.5.1.</b> SECONDA LEGGE DI LAPLACE		<b>D12.4.1.</b> FERROMAGNETISMO	230
	140	<b>APPENDICE A:</b> RACCOLTA DIFFERENZIA- <td></td>	
<b>D7.6.1.</b> REGOLA DELLA VITE	140	TA: RICHIAMI DI GEOMETRIA E CALCOLO	
<b>D7.6.2.</b> MOMENTO MAGNETICO DELLA		DIFFERENZIALE	
SPIRA	142	<b>DA.1.1.</b> CARTA, COORDINATE LAGRAN-	
<b>PRI7.6.1.</b> PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI		GIANE, PARAMETRIZZAZIONE LO-	
AMPÈRE	144	CALE	239
<b>CAPITOLO 8:</b> IL FLUSSO DEL CAMPO		<b>DA.1.2.</b> FUNZIONE DI TRANSIZIONE	
MAGNETICO E LA LEGGE DI BIOT-SAVART		240	
<b>D8.2.1.</b> SECONDA LEGGE DI LAPLACE		<b>DA.1.3.</b> ATLANTE	240
	153	<b>DA.1.4.</b> ATLANTE MASSIMALE	240
<b>D8.2.2.</b> SOLENOIDE	158	<b>DA.1.5.</b> TOPOLOGIA INDOTTA DALL'A-	
<b>CAPITOLO 9:</b> LA CIRCUITAZIONE DEL		TLANTE	240
CAMPO MAGNETICO, LA LEGGE DI AMPÈRE		<b>DA.1.6.</b> VARIETÀ DIFFERENZIABILE	
E LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEL CASO		240	
STATICO			

<b>DA.2.1.</b> METRICA	241	<b>DA.6.2.</b> OPERATORE STAR DI HODGE	
<b>DA.2.2.</b> COORDINATE ORTOGONALI	241	<b>DA.6.3.</b> 246	
<b>DA.2.3.</b> VARIETÀ RIEMANNIANE	242	<b>DA.7.1.</b> OPERATORE NABLA	247
<b>DA.3.1.</b> SPOSTAMENTO INFINITESIMO	243	<b>DA.7.2.</b> CAMPO SCALARE	247
<b>DA.3.2.</b> ELEMENTO DI LINEA	243	<b>DA.7.3.</b> GRADIENTE	247
<b>DA.3.3.</b> ARCOLUNGHEZZA	243	<b>DA.7.4.</b> DIVERGENZA	248
<b>DA.3.4.</b> INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA		<b>DA.7.5.</b> ROTORE	249
SPECIE	244	<b>DA.7.6.</b> OPERATORE NABLA IN $\mathbb{R}^n$	250
<b>DA.3.5.</b> INTEGRALE CURVILINEO DI		<b>DA.9.1.</b> CAMPO CONSERVATIVO E POTEN-	
SECONDA SPECIE	244	ZIALE	252
<b>DA.4.1.</b>	244	<b>DA.9.2.</b> CAMPO IRROTAZIONALE	252
<b>DA.4.2.</b> INTEGRALE SUPERFICIALE PER		<b>DA.9.3.</b> CAMPO SOLENOIDALE E VETTORE	
CAMPISCALARI	244	POTENZIALE	253
<b>DA.5.1.</b> ELEMENTO DI VOLUME	245	<b>DA.11.1.</b> COORDINATE SFERICHE	255
<b>DA.6.1.</b> SIMBOLO DI LEVI-CIVITA	246	<b>DA.11.2.</b> COORDINATE CILINDRICHE	
			258
<b>APPENDICE C:</b> NOTE AGGIUNTIVE			
		<b>DB.2.1.</b> FASORE	262

## ELENCO DEI TEOREMI

<b>CAPITOLO 2:</b> IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E LA LEGGE DI GAUSS		<b>T5.5.1.</b> PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF O LEGGE DEI NODI	98
<b>T2.2.1.</b> LEGGE DI GAUSS	26	<b>T5.5.2.</b> SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF O LEGGE DELLE MAGLIE	98
<b>T2.4.1.</b> TEOREMA DI EARNshaw	36	<b>CAPITOLO 7:</b> IL CAMPO MAGNETICO	
<b>CAPITOLO 3:</b> LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO, IL POTENZIALE ELETTRICO E LE LEGGI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA		<b>T7.2.1.</b> LEGGE DI GAUSS PER LA MAGNETOSTATICA	129
<b>PR3.2.1.</b> CARATTERIZZAZIONE DELLE FORZE CONSERVATIVE	40	<b>T7.6.1.</b> MOMENTO MECCANICO DI UNA SPIRA	142
<b>PR3.2.2.</b> CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI	41	<b>CAPITOLO 9:</b> LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO, LA LEGGE DI AMPÈRE E LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEL CASO STATICO	
<b>T3.3.1.</b> IL CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO	42	<b>T9.1.1.</b> LEGGE (DELLA CIRCUITAZIONE) DI AMPÈRE	162
<b>C3.3.1.</b> LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO È NULLA	44	<b>CAPITOLO 10:</b> CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO E LE EQUAZIONI DI MAXWELL	
<b>PR3.4.1.</b> DISCONTINUITÀ DI CAMPO ELETTRICO TRA SUPERFICI	50	<b>T10.1.1.</b> LEGGE DELL'INDUZIONE DI FARADAY O LEGGE DI FARADAY-NEUMANN	
<b>T3.5.1.</b> EQUAZIONI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA NEL VUOTO		LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-Lenz	175
	53	<b>C10.1.1.</b> LEGGE DI LENZ	175
<b>T4.1.1.</b> TEOREMA DI COULOMB	60	<b>T10.2.1.</b> LEGGE DI INDUZIONE DI FARADAY	178
<b>CAPITOLO 4:</b> CONDUTTORI E CONDENSATORI		<b>T10.6.1.</b> LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE DI MAXWELL-AMPÈRE	186
<b>PR4.3.1.</b> UN CONDUTTORE CAVO HA CAMPO ELETTRICO NULLO AL SUO INTERNO	64	<b>CAPITOLO 11:</b> OSCILLAZIONI ELETTRICHE E CORRENTI ALTERNATE	

<b>PR11.5.1.</b> IMPEDENZA DEL RESISTORE			
	<b>208</b>		
<b>PR11.5.2.</b> IMPEDENZA DELL'INDUTTORE			
	<b>209</b>		
<b>PR11.5.3.</b> IMPEDENZA DEL CONDENSATORE			
	<b>210</b>		
<b>APPENDICE A:</b> RACCOLTA DIFFERENZIATA: RICHIAMI DI GEOMETRIA E CALCOLO DIFFERENZIALE			
<b>PTA.6.1.</b> PROPRIETÀ DELL'OPERATORE STAR DI HODGE	<b>246</b>		
<b>TA.7.1.</b> TEOREMA DEL GRADIENTE	<b>248</b>		
<b>CAPITOLO 1:</b> RACCOLTA DIFFERENZIATA: RICHIAMI DI GEOMETRIA E CALCOLO DIFFERENZIALE			
<b>PRA.7.1.</b> OGNI CAMPO CONSERVATIVO È IRROTAZIONALE	<b>250</b>		
<b>TA.7.2.</b> OGNI CAMPO IRROTAZIONALE È CONSERVATIVO	<b>250</b>		
<b>TA.7.3.</b> OGNI CAMPO CON DIVERGENZA NULLA È SOLENOIDALE	<b>250</b>		
<b>TA.8.1.</b> TEOREMA DELLA DIVERGENZA	<b>252</b>		
<b>TA.8.2.</b> TEOREMA DEL ROTORE	<b>252</b>		
<b>PRA.9.1.</b> ★ CAMPO IRROTAZIONALE E CAMPO CONSERVATIVO	<b>252</b>		
<b>TA.9.1.</b> CARATTERIZZAZIONI EQUIVALENTI DEI CAMPI CONSERVATIVI IN $\mathbb{R}^3$	<b>253</b>		
<b>TA.9.1.</b> CARATTERIZZAZIONI EQUIVALENTI DEI CAMPI SOLENOIDALI IN $\mathbb{R}^3$	<b>253</b>		
<b>TA.9.2.</b> TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO VETTORIALE	<b>254</b>		
<b>TA.10.1.</b> TEOREMA DI STOKES PER FORME DIFFERENZIALI	<b>255</b>		
<b>APPENDICE C:</b> NOTE AGGIUNTIVE			
<b>LB.1.1.</b> AREA DI UNA SUPERFICIE DELIMITATA DA UNA CURVA PIANA CHIUSA	<b>261</b>		

# E

APPENDICE

## RINGRAZIAMENTI

---

*"Lafayette: Ehi, Napoleone! Direi che questa è la fine.*

*Napoleone: Un momento, il capo sono io! Lo dico io quando è la fine!*

*[La parola **FINE** lo colpisce alla testa.]*

*Napoleone: È la fine."*

*GLI ARISTOGATTI.*

AVREI tanta gente da ringraziare e a cui dedicare il Manualozzo™ , ma ho già scritto 276 pagine in LATEX e se proprio posso evitarne altre non mi dispiacerebbe farlo; dunque, mi limiterò ad elencare, in ordine casuale alcune delle tante persone che vorrei ringraziare. A Elisa Antuca, a cui va il mio più sentito ringraziamento per le correzioni che ha apportato a questo Manualozzo™ : senza di lei ogni farsa dle Manaluozzo™ sarbebe scritta csoì. A Francesca Colombo, che senza il piacevole caffettino alla mattina le lezioni di Analisi III le avrei seguite in compagnia di Morfeo.

A Guido Buffa, perché se non mi avesse introdotto alla perdizione di Farming Simulator probabilmente potevo diventare un membro produttivo della società - ma in tutta onestà non vale la pena esserlo.

A Samuele Corsato, che mi mette una gioia indescribibile vederlo imparare LATEX.

A Julian Kerpaci, fido contendente per l'ultimo posto del Fantacalcio (però sarò io il penultimo, sappilo).

A Alessandro Amatelli, per aver sollevato delle stimolanti, in un modo o nell'altro, domande che hanno indirettamente migliorato il Manualozzo™ .

A Matteo Cagnotti, Emiliano Colla, Eugenio Del Nero, Marco Lugarà, Andrea Natale, Francesco Ruatta, Andrea Scalenghe e tutta la gente simpatica che ho conosciuto in quasi tre anni di università. Aspe', siamo già nel 2022? Diofa.

A Elena Maserati, anche se odi matematica te lo dedico comunque perché sono bastardo geneticamente :)

*We're no strangers to love...*



# BIBLIOGRAFIA

---

- [PS15a] C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi matematica 1*. Zanichelli, 2015. ISBN: 9788808151339.  
URL: <https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-pagani-salsa-001?hl=analisi%201>.
- [PS15b] C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi matematica 2*. Zanichelli, 2015. ISBN: 9788808637086.  
URL: <https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-pagani-salsa-001?hl=analisi%201>.
- [Rud87] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1987.  
ISBN: 9780071002769. URL: <https://www.mheducation.com/highered/product/real-complex-analysis-rudin/M9780070542341.html>.
- [Rud76] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1976. ISBN: 9780070542358. URL: <https://www.mheducation.com/highered/product/principles-mathematical-analysis-rudin/M9780070542358.html>.
- [Fol13] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013. ISBN: 9781118626399. URL: <https://www.wiley.com/en-us/Real+Analysis%3A+Modern+Techniques+and+Their+Applications%2C+2nd+Edition-p-9781118626399>.
- [Jec03] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9783540440857. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/3-540-44761-X>.
- [Pea87] G. Peano. *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*. Fratelli Bocca, 1887.
- [GKP89] R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 1989. URL: <https://www.bibsonomy.org/bibtex/2cce670ef39186763ecd379d2cca1e0a/jaeschke>.
- [Ram14] S. A. Ramanujan. «Modular equations and approximations to  $\pi$ ». In: *Quarterly Journal of Mathematics* XLV (1914), pp. 350–372.
- [Leb26] H. Lebesgue. «SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA NOTION D'INTÉGRALE». In: *Revue de Métaphysique et de Morale* 34.2 (1926), pp. 149–167. ISSN: 00351571, 21025177. URL: <http://www.jstor.org/stable/40896441>.
- [And21] A. Andretta. *Elements of Mathematical Logic*. 2021.
- [AB21] E. Antuca e M. Bertolotti. *Tutto quello che avreste voluto sapere sulla Geometria 2\* (\* ma non avete mai osato chiedere)*. 2021. URL: <https://maxmaci.github.io/manualozzi/ManualozzoGeometria2.pdf>.

- [HSH] user21820 HATES SMOKING-HATS. *Definition of Ordinals in Set Theory in Layman Terms*. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/1861272>.