Appunti di Geometria 2

Anno Accademico 2020/2021

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUI BEEP BOOP"

Indice

I

Topologia generale

CAPITOLO 1

Spazi topologici

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, *UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

1.1 Spazio topologico

Definizione 1.1.0. Uno **spazio topologico** $(X, \mathcal{T})$ è un insieme X con una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ detta **topologia** che soddisfano i seguenti assiomi (detti **assiomi degli aperti**):

1. *Il vuoto e l'insieme stesso sono aperti della topologia*: $\varnothing,\ X \in \mathcal{T}$.
2. *L'unione arbitraria di aperti è un aperto*: dati $\{A_i\}_{i \in I}$ tale che $A_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I$ ($|I| \leq \infty$), allora $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.
3. *L'intersezione finita di aperti è aperta*: sati $\{A_i\}_{i \in I}$ tale che $A_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I$ ($|I| < \infty$), allora $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di $\mathcal{T}$ si dicono **aperti** della topologia.

Definizione 1.1.1. Si può definire equivalentemente su X una topologia $\mathcal{T}$ usando gli **assiomi dei chiusi**):

1. *Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia*: $\varnothing,\ X \in \mathcal{T}$.
2. *L'unione finita di chiusi è un chiuso*: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I$ ($|I| < \infty$), allora $\bigcap\limits_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.
3. *L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso*: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I$ ($|I| \leq \infty$), allora $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di $\mathcal{T}$ si dicono **chiusi** della topologia.

Osservazione. 1.1. *Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per soli due sottoinsiemi qualunque.*

Esempio.
- **Topologia discreta**: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, *tutti* gli insiemi sono *aperti*.
- **Topologia banale**: $\mathcal{T} = \emptyset,\ X$, *tutti* gli insiemi sono *aperti*.

1.2 Distanza e spazi metrici

Definizione 1.2.0. Su un insieme X una funzione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è una **distanza** se:
1. *Positività della distanza*: $\forall x,\ y \in X \quad d(x,\ y) \geq 0$ e $d(x,\ y) = 0 \iff x = y$
2. *Simmetria*: $\forall x,\ y \in X \quad d(x,\ y) = d(y,\ x)$
3. **Disuguaglianza triangolare**: $\forall x,\ y,\ z \in X \quad d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$

Definizione 1.2.1. Uno **spazio metrico** (X, d) è un insieme su cui è definita una distanza.

Definizione 1.2.2. Definita la **palla aperta di centro** x come l'insieme degli elementi di X che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,\ y) < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia** $\mathcal{T}_d$ **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

Esempio.
- Su un qualunque insieme X si può definire la *distanza banale*:

$$d(x,\ y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \tag{1.2}$$

  In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.
- Su $X = \mathbb{R}$ si può definire come distanza il *valore assoluto* $d(x,\ y) = |x - y|$, che induce la **topologia Euclidea** $\mathcal{E}_{ucl}$, definita con le palle aperte di raggio ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \tag{1.3}$$

  nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su $X = \mathbb{R}^n$ si può definire come distanza la *norma Euclidea*: $d(x, y) = \|x - y\|$. che induce la *topologia Euclidea* $\mathscr{E}_{ucl}$ in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$
$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathscr{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

Attenzione! Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme X nel modo seguente:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in CF) \text{ se } \forall X \setminus A \text{ è finito.}$$
$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso } (C \in CF) \text{ se } \forall C \text{ è finito.}$$

Alcune osservazioni:

- Se un aperto A è tale se il suo complementare $\mathscr{C}A$ è finito, si ha che:

$$A = \mathscr{C}(\mathscr{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \tag{1.4}$$

  In altre parole A è aperto è pari ad X privato al più di un numero finito di punti.
- Se X è finito, la topologia CF coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di X è finito e dunque un aperto.
- Se X è infinito, ad esempio $\mathbb{R}$, la topologia *non* è quella discreta: $[0, 1]$ per la topologia discreta è un chiuso ma per quella CF non lo è in quanto *non* è finito.

1.2.1 *Norme esotiche*

Possiamo definire su $\mathbb{R}^n$ una famiglia di distanze dette **norme**; qui di seguito ne elenchiamo alcune. Definiti i punti $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ abbiamo:

- **Norma infinito**: $d_\infty(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$
- **Norma uno**: $d_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- **Norma due**: $d_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
- **Norma p**: $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$

Si ha inoltre $\lim\limits_{p \to +\infty} d_p = d_\infty$.
Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le d_1(x, y) \le n d_\infty(x, y) \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Supponiamo senza perdere di generalità che $d_\infty(x,\ y) = |x_1 - y_1|$.

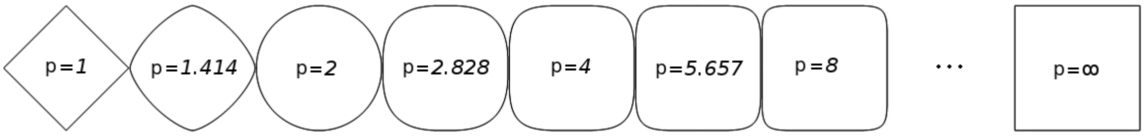
$$d_2(x,\ y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2} \geq \sqrt{|x_1 - y_1|^2} = |x_1 - y_1| = d_\infty(x,\ y)$$
$$d_2(x,\ y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leq |x_1 - y_1| + \ldots + |x_1 - y_1| = n|x_1 - y_1| = nd_\infty(x,\ y)$$

Notiamo che $|x_i - y_i|$ sono sempre positive, allora sia $a_i := |x_i - y_i|$. Segue che $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)^2$ perché $a_i, \ldots, a_n \geq 0$. Allora:

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \leq a_1 + \ldots + a_n \implies d_2 \leq d_1$$

Queste disuguaglianze danno le seguenti inclusioni[1]:

$$B_1(\varepsilon) \subseteq B_2(\varepsilon) \subseteq B_\infty(\varepsilon) \subseteq B_1(n\varepsilon) \tag{1.6}$$



Questo ci porta a dire che le topologie indotte da queste distanze sono la stessa.
Preso adesso $X = \mathscr{C}([0,\ 1]) = \{f : [0,\ 1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continua}\}$, esso è uno spazio vettoriale infinito, con $0_{\mathscr{C}} \equiv O_{[0,\ 1]}$ (cioè la funzione *identicamente nulla*). In questo caso possiamo comunque adattare le norme precedenti con delle "somme infinite", ovvero degli integrali.

- **Norma infinito**: $d_\infty(f,\ g) = \max_{x \in [0,\ 1]} |f((x) - (y)|$
- **Norma uno**: $d_1(f,\ g) = \int_0^1 |f((x) - (y)|$
- **Norma due**: $d_2(f,\ g) = \sqrt{\int_0^1 |f((x) - (y)|^2}$
- **Norma p**: $d_p(f,\ g) = \sqrt[p]{\int_0^1 |f((x) - (y)|^p}$

A differenza del caso su $\mathbb{R}^n$, ogni norma genera in realtà una topologia distinta!

1.3 Finezza: confronto di topologia

Definizione 1.3.0. Sia X un insieme e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ due topologie di X. Si dice che $\mathcal{T}_1$ è **meno fine** di $\mathcal{T}_2$ se tutti gli aperti della prima topologia sono aperti della seconda:

$$\forall A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2 \tag{1.7}$$

In modo analogo si dice anche che $\mathcal{T}_2$ è **più fine** di $\mathcal{T}_1$.

In altre parole, una topologia più fine ha più aperti rispetto a quella confrontata.

[1] Qui usiamo la notazione $B_i(r)$ per indicare la palla aperta di raggio r e centro fissato x rispetto alla norma i.

Esempio.

- La *topologia banale* è la *meno fine* di tutte, dato che ogni topologia contiene $\varnothing$, X.
- La *topologia discreta* è la *più fine* di tutte, dato che ogni topologia è contenuta in $\mathscr{P}(X)$.
- Su $\mathbb{R}$ la topologia dei complementari finiti è *meno fine* di quella euclidea. Infatti un aperto $A \in CF$ su $\mathbb{R}$ è definito come $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, cioè:

$$A = (-\infty,\ x_1) \cup (x_1,\ x_2) \cup \ldots \cup (x_n,\ +\infty)$$

Per n punti gli $n+1$ intervalli ottenuti sono aperti della topologia euclidea; essendo unione di aperti, anche A è un aperto di $\mathscr{E}_{ucl}$

Osservazione. 1.2. *Se definiamo due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono due topologie di un insieme X, l'intersezione $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è anch'essa una topologia di X e, per costruzione, è meno fine di $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.*

1.4 BASE DELLA TOPOLOGIA

Definizione 1.4.0. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. $\mathscr{B}$ è una **base** per $\mathcal{T}$ se:

1. *La base è costituita da paerti per la topologia $\mathcal{T}$: $A \in \mathscr{B} \implies A \in \mathcal{T} (\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T})$.*
2. *Tutti gli aperti della topologia sono unioni degli aperti delle basi: $A \in \mathcal{T} \implies \exists B_i \in \mathscr{B},\ i \in I : A = \bigcap_{i \in I} B_i$.*

Attenzione! La base $\mathscr{B}$ non è detto che sia una topologia! Ad esempio, le unioni sono aperti della topologia, ma non è detto che siano interni alla base $\mathscr{B}$.

Esempio.

- Nella *topologia euclidea* di $\mathbb{R}^n$ una base è

$$\mathscr{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0\} \tag{1.8}$$

Infatti, $\forall x \in A$ aperto $\exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq A$ per la definizione della topologia; segue che $A = \bigcap_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$.

- Nella *topologia euclidea* di $\mathbb{R}$ una base è

$$\mathscr{B} = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\} \tag{1.9}$$

Un'altra base per $\mathbb{R}$ nella $\mathscr{E}_{ucl}$ è

$$\mathscr{B} = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$$

Dato $x \in \mathbb{R}$, esiste sempre una successione $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$ decrescente o crescente tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$, essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}^a$. Allora presa $a_n \searrow a$ e $b_n \nearrow b$, si ha:

$$(a,\ b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n,\ b_n)$$

Questa base con estremi razionali ha *infiniti elementi*, ma in *misura minore* rispetto a quella ad estremi reali.

[a] Per una discussione più approfondita a riguardo, si guardi sez. **XXX** a pag. **XXX**.

Teorema 1.4.0. Teorema delle basi. (Manetti, 3.7)
Sia X un insieme e $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. $\mathscr{B}$ è la base di un'*unica* topologia *se e solo se*:

1. *L'insieme X deve essere scritto come unione di elementi della famiglia*: $X = \bigcap_{B \in \mathscr{B}} B$.
2. *Per ogni punto dell'intersezione di elementi della famiglia deve esserci un'altro elemento di essa che contiene il punto ed è sottoinsieme dell'intersezione*:

$$\forall A, B \in \mathscr{B}\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \mathscr{B} : x \in C \subseteq A \cap B \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B}$ la famiglia di sottoinsiemi che verifica i punti 1 e 2. Allora devo trovare una topologia di cui $\mathscr{B}$ è base. Definiamo $\mathcal{T}$ tale che:

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathscr{B}$$

Verifichiamo gli assiomi degli aperti su $\mathcal{T}$.

I $X \in \mathcal{T}$ per ipotesi 1, $\varnothing \in \mathcal{T}$ perché è l'unione sugli insiemi di indici vuoto ($I = \varnothing$).

II Sia $A_i = \bigcap_j B_{ij}$, con $B_{ij} \in \mathscr{B}$. Allora:

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i \left(\bigcap_j B_{ij} \right) = \bigcap_{i,\,j} B_{ij} \implies \bigcap_{i,\,j} A_i \in \mathcal{T}$$

III Sia $A, B \in \mathcal{T}$, cioè $A = \bigcap_i A_i$ e $B = \bigcap_j B_j$ con $A_i, B_j \in \mathscr{B}$. Allora:

$$A \cap B = \left(\bigcap_i A_i \right) \cap \left(\bigcap_j B_j \right) = \bigcap_{i,\,j} \left(\underbrace{A_i \cap B_j}_{\in \mathcal{T} \text{ per l'ipotesi 2}} \right) \in \mathcal{T}$$

Esempio. Sia $X = \mathbb{R}$ e $\mathscr{B} = \{[a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$. Verifichiamo che $\mathscr{B}$ soddisfa il teorema appena enunciato.

1. $\mathbb{R} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n,\ n)$.
2. Preso $[a, b) \cap [c, d)$ si ha che esso è $\varnothing$ o è $[e, f)$, con $e = \max\{a,\ c\}$, $f = \min\{b,\ d\}$; in entrambi i casi l'intersezione è elemento di $\mathscr{B}$.

Esiste dunque una topologia su $\mathbb{R}$ che ha base $\mathscr{B}$; questa *non* è base per la topologia Euclidea, ad esempio, dato che gli intervalli semiaperti non sono inclusi in $\mathscr{E}_{ucl}$.
Notiamo inoltre che $(a,\ b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n},\ b \right)$, dunque la topologia definita $\mathscr{B}$ comprende

gli aperti della topologia Euclidea: $\mathcal{E}_{ucl}$ è meno fine di questa topologia.

1.5 ALTRI CONCETTI TOPOLOGICI: CHIUSURA, INTERNO, FRONTIERA E DENSITÀ

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e un sottoinsieme $A \subseteq X$, si ha:

- A *aperto* della topologia se $A \in \mathcal{T}$.
- A *chiuso* della topologia se $\mathscr{C}A = X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Attenzione! Essere aperto oppure essere chiuso *non si escludono a vicenda*! Un insieme può essere aperto, chiuso, entrambi o nessuno dei due. Ad esempio, il vuoto e l'insieme stesso sono aperti e chiusi allo stesso tempo, dato che per ipotesi sono aperti i loro complementari $\mathscr{C}\varnothing = X \setminus \varnothing = X$ e $\mathscr{C}X = X \setminus X = \varnothing$ sono anch'essi aperti.

Definizione 1.5.0. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **chiusura** $\overline{A}$ di A è il più piccolo chiuso contente A:

$$\overline{A} = \bigcup_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C \tag{1.11}$$

Proprietà:

- $A \subseteq \overline{A}$.
- $\overline{A}$ è un chiuso in quanto intersezione (arbitraria) di chiusi.
- A è un chiuso $\iff A = \overline{A}$.

Definizione 1.5.1. Un punto x è **aderente** ad A se $x \in \overline{A}$.

Definizione 1.5.2. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. L'**interno** A^o di A è il più grande aperto contenuto in A:

$$A^o = \bigcap_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ aperto}}} B \tag{1.12}$$

Proprietà:

- $A^o \subseteq A$.
- A^o è un aperto in quanto unione (arbitraria) di aperti.
- A è un aperto $\iff A = A^o$.

Definizione 1.5.3. Un punto x è **interno** ad A se $x \in A^o$.

Definizione 1.5.4. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **frontiera** ∂A di A sono i punti della chiusura di A non contenuti nel suo interno o, in altri termini, i punti aderenti sia ad A sia al suo complementare.

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^o = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \tag{1.13}$$

Proprietà:

- $\partial A \subseteq \overline{A}$.
- ∂A è un chiuso.

Definizione 1.5.5. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. A è **denso** è denso in X se $\overline{A} = X$ o, in altri termini, tutti i punti di X sono aderenti ad A.

Esempio. Il più piccolo chiuso contenente $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{R}$, poiché ogni reale è aderente ai razionali. Dunque $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

1.6 Intorni

Definizione 1.6.0. Sia X spazio topologico e $x \in X$. V è un **intorno** di x se $\exists A$ aperto tale che $x \in A \subseteq V$ o, in altri termini, se x è interno ad U. Definiamo inoltre la **famiglia degli intorni** di x $I(x) \subseteq \mathscr{P}(X)$:

$$I(x) = \{V \subseteq X \mid V \text{ è intorno di } x\} \tag{1.14}$$

Osservazione. 1.3. *Dato $A \subseteq X$, per ogni $x \in A$ tale che A è intorno di x si può definire un aperto $A_x \subseteq A$, con $x \in A_x$. L'unione arbitraria di questi A_x risulta essere contenuta in A e pari al suo interno. Dunque, si può definire l'interno di A come $A^o = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$; segue che A è aperto se e solo se A è intorno di ogni punto in A.*

Lemma 1.6.0. Proprietà degli intorni. (Manetti, 3.20, 3.21)

1. *Si possono estendere gli intorni:* $U \in I(x),\ U \subseteq V \implies V \in I(x)$
2. *Le intersezioni di intorni sono ancora intorni:* $U,\ V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$
3. *Caratterizzazione della chiusura per intorni:*
   $B \subseteq X$, allora $x \in \overline{B} \iff \forall U \in I(x) \quad U \cap B \neq \varnothing$.

Dimostrazione.

I L'aperto A che soddisfa la definizione di $U \in I(x)$ è per costruzione contenuto anche in V, dunque A è un aperto che soddisfa la definizione di V intorno di x.

II Definiti gli aperti $A_U \subseteq U$, $A_V \subseteq V$ che soddisfano la definizione di intorni di x, l'intersezione $A = A_U \cap A_V$ è un aperto contenente x. Dato che $A = A_U \cap A_V \subseteq U \cap V$, $U \cap V$ per definizione di intorno di x.

III Per contronominale.

$$\begin{aligned} x \notin \overline{B} &\iff x \notin B \wedge x \notin \partial B \\ &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \overline{B} \cap \overline{X \setminus B} \\ &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \partial (X \setminus B) \\ &\iff x \in (X \setminus B)^{o} \\ &\iff \exists U \in I(X) \ : x \in U \subseteq X \setminus B \\ &\iff \exists U \in I(x) \ : \ U \cap B = \varnothing \end{aligned}$$

Definizione 1.6.1. Sia X spazio topologico, $x \in X$ e $I(x)$ la famiglia degli intorni di x. Una sottofamiglia $\mathcal{J} \subseteq I(x)$ è un **sistema fondamentale di intorni** di x se $\forall U \in I(x) \exists V \in \mathcal{J} \ : \ V \subseteq U$.

1.7 FUNZIONI CONTINUE

Definizione 1.7.0. Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** se la controimmagine di aperti in Y è un aperto in X:

$$\forall A \text{ aperto in } Y, \ f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \tag{1.15}$$

Alternativamente, f è continua se la controimmagine di chiusi in Y è un chiuso in Y.

$$\forall C \text{ chiuso in } Y, \ f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \tag{1.16}$$

Osservazione. 1.4.

- *Si ha la definizione di continuità con i chiusi perché la controimmagine si "comporta bene" con i complementari:*

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

- *È sufficiente verificare la definizione per gli aperti una base di Y perché la controimmagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:*

$$f^{-1}\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$$

Lemma 1.7.0. (Manetti, 3.25)
Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione. f è continua iff $\forall A \subseteq X \quad f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dimostrazione. Ricordiamo che per ogni funzione si ha:

- $f\left(f^{-1}(C)\right) \subseteq C$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\Longrightarrow)$ Sia $A \subseteq X$. Dobbiamo dimostrare che $f\left(\overline{A}\right)\overline{f(A)}$. Sappiamo che se un insieme è contenuto in un altro, lo stesso vale per le immagini e le controimmagini. Allora:

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)}$$
$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$

$f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ è un chiuso (in X in quanto controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso) che contiene A. Ma allora anche la chiusura, che è il più piccolo chiuso contenente A, è contenuta in $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Segue quindi:

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$
$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}$$

$\Longleftarrow)$ Sia $C \subseteq Y$ chiuso e sia $A = f^{-1}(C)$. Dobbiamo dimostrare che A è chiuso in X. Poiché $A \subseteq \overline{A}$ è vero per definizione, dimostriamo che $\overline{A} \subseteq A$. Per ipotesi:

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$$
$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

Applicando nuovamente la controimmagine:

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq C$$
$$\overline{A} = \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right)\right) \subseteq f^{-1}(C) = A$$

Dunque la controimmagine A di un chiuso C è un chiuso.

Teorema 1.7.0. Manetti, 3.26 La composizione di funzioni continue è continua.

$$f\colon Y \to Z,\ g\colon X \to Y \text{ continue} \implies f \circ g\colon X \to Z \text{ continua} \tag{1.17}$$

Dimostrazione. La controimmagine della composizione di funzioni $f \circ g$ è definita come $f^{-1}(f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1}$. Allora A aperto in $Z \implies f^{-1}(A)$ aperto $\implies g^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)$ aperto.

Definizione 1.7.1. (Manetti, 3.27)
Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to Y$ funzione. Dato $x \in X$ f è **continua** in x se:

$$\forall U \in I(f(x)) \exists V \in I(x)\ :\ f(V) \subseteq U \tag{1.18}$$

Questa è la generalizzazione della definizione tradizionale della continuità affrontata in *Analisi UNO*.

Teorema 1.7.1. (Manetti, 3.28)
Siano X, Y spazi topologici e $f: X \to Y$ funzione. f è continua per aperti $\iff$ f è continua in x $\forall x \in X$.

Dimostrazione. $\implies$) Sia $x \in X$ e $U \in I(f(x))$. Per definizione di intorno $\exists A$ aperto in Y tale che $f(x) \in A \subseteq U$. Basta porre $V = f^{-1}(A)$: per continuità è aperto in X e, dato che $x \in f^{-1}(A)$ perché $f(x) \in A$, allora V è intorno di x. Segue che $f(V) = f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A \subseteq U$.
$\impliedby$) Sia $A \subseteq Y$ aperto. Dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(A)$ sia aperto. Preso $x \in f^{-1}(A)$ si ha che $f(x) \in A$; dunque A è, in quanto aperto, intorno di $f(x)$. Allora, poiché f è continua in x, $\exists V \in I(x)$ tale che $f(V) \subseteq A$.
Segue che $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è intorno di x poiché contiene un intorno V dello stesso punto. Dunque $f^{-1}(A)$ aperto perché è intorno di ogni suo punto.

Definizione 1.7.2. Siano X, Y spazi topologici e $f: X \to Y$ funzione.
- f è **aperta** se $\forall A$ aperto in X $f(A)$ è aperto in Y.
- f è **chiusa** se $\forall C$ chiuso in X $f(C)$ è chiuso in Y.

Osservazione. 1.5. *È sufficiente verificare la definizione di funzione aperta per gli aperti di una base di X perché l'immagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:*

$$f\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f(A_i)$$

Attenzione! Una funzione f aperta che non sia omeomorfismo non è necessariamente una funzione aperta. Si prenda $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \end{array}$ (la proiezione sulla prima coordinata):
- f è *continua* per ovvi motivi.
- f è *aperta*. Infatti, presa una base su $\mathbb{R}^2$ come $\{B_\varepsilon(x, y)\}$, si ha che $f(B_\varepsilon(x, y)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ che sono aperti in $\mathbb{R}$.
- f *non* è *chiusa*. Prendiamo $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$ e definiamo la funzione $\begin{array}{l} g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array}$ continua; vediamo facilmente come $C = g^{-1}(\{1\})$ e, essendo 1 chiuso in R, C è controimmagine continua di un chiuso e dunque chiuso.
  Si ha dunque $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che tuttavia non è un chiuso della topologia Euclidea in quanto non contiene infiniti punti (una base della $\mathcal{E}_{ucl}$ è formata da intervalli, che dunque contengono infiniti punti).

Definizione 1.7.3. Siano X, Y spazi topologici e $f: X \to Y$ funzione. f è un **omeomorfismo** se è *biunivoca*, *continua* e la sua inversa è *continua*; più precisamente, esiste $g: Y \to X$ continua tale per cui $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$.
Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra i due; in

notazione $X \cong Y$.

Lemma 1.7.1. (Manetti, 3.31)
Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to Y$ funzione *continua*. Allora vale:

1. f omeomorfismo $\iff$ f aperta e biettiva.
2. f omeomorfismo $\iff$ f chiusa e biettiva.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima condizione, la seconda è analoga.
$\implies$) Un omeomorfismo è biettiva per definizione. Dimostriamo dunque che f sia aperta, cioè $\forall A \in X$ aperto $f(A) \in Y$ è aperto. Ma definita $g\colon Y \to X$ l'inversa continua dell'omeomorfismo f (cioè $f^{-1} = g$), si ha che $\forall A \in X$ $g^{-1}(A) = f(A)$ è aperto.
$\impliedby$) f è già biettiva e continua per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che l'inversa $g\colon Y \to X$ sia continua, cioè $\forall A \in X$ aperto $g^{-1}(A) \in Y$ è aperto. Ma $g^{-1}(A) = f(A)$ che è aperto perché f è aperta.

1.8 TOPOLOGIA INDOTTA

Definizione 1.8.0. Dati:

- Uno spazio topologico X.
- Un insieme Y.
- Una funzione $f\colon Y \to X$

Allora su Y si può definire la **topologia indotta** come la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono f continua.

1.9 SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO

Definizione 1.9.0. Sia X uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Su Y si può definire la seguente *topologia di sottospazio*:

$$U \subseteq Y \text{ aperto in } Y \iff \exists V \subseteq X \text{ aperto in } X (V \in \mathcal{T}) \ : U = V \cap Y \tag{1.19}$$

Definita l'**inclusione** $\begin{array}{c} i\colon Y \hookrightarrow X \\ y \mapsto y \end{array}$, la topologia di sottospazio è la topologia indotta da i, cioè la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono continua l'inclusione.

Dimostrazione. Dimostriamo la continuità dell'inclusione. Se A aperto in X, $i^{-1}(A) = A \cap Y$ (tutti gli elementi di A contenuti in Y) è aperto in Y per definizione.

Definizione 1.9.1. Sia X uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Allora:

- $A \subseteq Y$ **aperto** in Y $\iff$ $A = U \cap Y$ con U aperto in X.
- $C \subseteq Y$ **chiuso** in Y $\iff$ $C = U \cap Y$ con V chiuso in X.
- Se $\mathscr{B}$ è una base della topologia di X $\implies$ $\mathscr{B}' := \{B \cap Y \mid B \in \mathscr{B}\}$ è base della topologia di sottospazio.

Osservazione. 1.6. *Se $A \subseteq Y$ è aperto della topologia di X, allora A è aperto in Y poiché $A = A \cap Y$.*

Esempio. Sia $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$ in topologia Euclidea.

- $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ è aperto in Y in quanto è già aperto in X.
- $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ è chiuso in Y in quanto è già chiuso in X.
- $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ è aperto in Y in quanto si ha, ad esempio, $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap Y$.

Lemma 1.9.0. (Manetti, 3.55)
Sia $A \subseteq Y \subseteq X$ con X spazio topologico e Y sottospazio topologico. Definiamo:

- $\mathcal{cl}_Y(A) =$ chiusura di A in Y.
- $\mathcal{cl}_X(A) =$ chiusura di A in X.

Allora $\mathcal{cl}_Y(A) = \mathcal{cl}_X(A) \cap Y$.

Dimostrazione. Preso $\mathscr{C} = \{C \subseteq X \mid C \text{ chiuso in } X \text{ e } A \subseteq C\}$, per definizione di chiusura si ha:

$$\mathcal{cl}_X(A) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$$

Ora sia $\mathscr{C}' = \{C \cap Y \mid C \in \mathscr{C}\}$. Allora, usando i chiusi del sottospazio:

$$\mathcal{cl}_Y(A) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} (C \cap Y) = \left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C\right) \cap Y = \mathcal{cl}_Y(A)$$

.

1.9.1 *Immersione*

Definizione 1.9.2. Sia $f : X \to Y$ funzione tra X, Y spazi topologici. Se:

- f continua.
- f iniettiva

Allora f è un'**immersione** se e solo se ogni aperto in X è controimmagine di un aperto di Y per f, cioè se e solo se si ha che:

$$B \subseteq X \text{ è aperto in } X \iff B = f^{-1}(A),\ A \text{ aperto in } Y \tag{1.20}$$

Osservazione. 1.7. *Per costruzione f è immersione se la topologia su X è la topologia indotta, dunque la meno fine che rende f continua.*

Se sull'immagine $f(X) \subseteq Y$ mettiamo la topologia di sottospazio di Y, si ha che

$$f : X \to Y \text{ immersione} \iff f_{\bullet} : X \to f(X) \text{ è omeomorfismo}$$

Esempio. Esempio di *non* immersione.

$$\begin{aligned} [0,\ 1) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Notiamo innanzitutto che $f([0,\ 1)) = S^1$. Si ha:

- $f_\bullet$ è continua per ovvi motivi
- $f_\bullet$ iniettiva, dato che l'unico caso problematico poteva essere $t = 1$ che *non* nel dominio (si avrebbe avuto infatti $f_\bullet(0) = f_\bullet(1)$).
- $f_\bullet$ suriettiva per costruzione.

Tuttavia $f_\bullet$ *non* è immersione, dato che $f_\bullet^{-1}$ non è continua. Preso $P = (1,\ 0) \in S^1$, $f_\bullet^{-1}$ non è continua in P. Infatti, gli intorni di 0 in $[0,\ 1)$ sono del tipo $U = [0,\ \varepsilon)$, dunque dovrei trovare $\forall U$ un intorno V di $P \in S^1 : f_\bullet^{-1}(V) \subseteq U$.
Tuttavia, solo la parte superiore di $V \in I(P)$ ha la controimmagine interna ad U: la parte inferiore, poiché sono le immagini di punti prossimi all'estremo 1 del dominio, non hanno controimmagini in U. Pertanto, non abbiamo l'omeomorfismo di $f_\bullet$ e dunque l'immersione.

Definizione 1.9.3. Sia $f : X \to Y$ funzione tra $X,\ Y$ spazi topologici.

- f si dice **immersione aperta** se f è chiusa.
- f si dice **immersione chiusa** se f è aperta.

Lemma 1.9.1. Manetti, 3.59
Sia $f : X \to Y$ funzione *continua* tra $X,\ Y$ spazi topologici.

1. f iniettiva e aperta $\implies$ f è immersione (aperta)
2. f iniettiva e chiusa $\implies$ f è immersione (chiusa)

Dimostrazione. Dimostriamo il caso chiuso, il caso aperto è analogo. Preso $C \subsetneq X$ chiuso, sappiamo che $f(C)$ è chiuso in Y, ma possiamo sempre dire che $f(C) = f(C) \cap f(X)$ in quanto $f(C) \subseteq \cap f(X)$. Dunque $f(C)$ è un chiuso del sottospazio $f(X)$. Segue che ogni chiuso di C è un chiuso dell'immagine di f, dunque $f_\bullet : X \to f(X)$ è:

- Continua perché lo è f.
- Biunivoca perché $f_\bullet$ è iniettiva in quanto lo è f e suriettiva per definizione.
- Chiusa per costruzione.

$f_\bullet$ è dunque omeomorfismo ed f è immersione (chiusa).

1.10 Prodotti topologici

Definizione 1.10.0. Siano $P,\ Q$ spazi topologici e $P \times Q$ il suo prodotto cartesiano. Definite le **proiezioni**:

$$\begin{aligned} p : P \times Q &\to P \\ (x,\ y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} q : P \times Q &\to Q \\ (x,\ y) &\mapsto y \end{aligned} \tag{1.23}$$

La **topologia prodotto** $\mathscr{P}$ è la topologia *meno fine* fra quelli che rendono p e q *continue*. In particolare, ricordando l'osservazione 1.2, la topologia prodotto è l'intersezione di *tutte* le topologia che rendono continue p e q.

Teorema 1.10.0. Manetti, 3.61

1. Una *base* della topologia $\mathscr{P}$ è data dagli insiemi della forma $U \times V$ dove $U \subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto.
2. $p,\ q$ sono aperte; inoltre $\forall (x,\ y) \in P \times Q$ le restrizioni:

$$\begin{aligned} p_{|}\colon\ & P \times \{y\} \to P \\ & (x,\ y) \mapsto x \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} q_{|}\colon\ & \{x\} \times Q \to Q \\ & (x,\ y) \mapsto y \end{aligned} \tag{1.25}$$

   Sono *omeomorfismi*.

3. Data $f : X \to P \times Q$ con X spazio topologico, si ha che:

$$f \text{ continua} \iff f_1 = p \circ f,\ f_2 = q \circ f \text{ continue} \tag{1.26}$$

Dimostrazione.

I Dimostriamo che:
   A) La famiglia $\{U \times V\}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$.
   B) P è meno fine di $\mathcal{T}$.
   C) $\mathcal{T}$ è meno fine di P.

   In questo modo avremo che la topologia $\mathcal{T}$ è la topologia prodotto $\mathscr{P}$ e ne conosceremo una base.

   a) Segue dal teorema delle basi 1.1 (Manetti, 3.7). Infatti
      i. $P \times Q$ appartiene alla famiglia $\{U \times V\}$, dato che per definizione gli insiemi stessi P e Q sono aperti.
      ii. L'intersezione di due elementi della famiglia appartiene alla famiglia: $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.
   b) Per definizione $\mathscr{P}$ è la meno fine fra tutte le topologie sul prodotto. Dunque, per dimostrare A) basta vedere che $p,\ q$ sono continue rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.

      Presa la proiezione p, sia $U \subseteq P$ aperto. Si ha che $p^{-1}(U) = U \times Q$ è aperto in $\mathcal{T}$ in quanto è prodotto di aperti; in particolare sta nella base! Dunque p è continua, e un ragionamento analogo vale per q.
   c) Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di $\mathcal{T}$ è anche aperto di $\mathscr{P}$.

      Presi $U \subseteq P$, $V \subseteq Q$ allora:

$$U \times V = (U \cap P) \times (V \cap Q) = (U \times P) \cap (V \times Q) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

      Poichè $p,\ q$ sono continue e $U,\ V$ sono aperti, anche $p^{-1}(U),\ q^{-1}(V)$ sono aperti; segue che la loro intersezione è aperta e dunque $U \times V$ è aperto della topologia $\mathcal{T}$.

II Dimostriamo il caso con $p_|$, dato che il caso con $q_|$ è analogo. Preso un aperto della base $U \times V$, studiamo gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$.

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } y \notin V \\ U \times \{y\} & \text{se } y \in V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$ sono tutte e solo le unioni di $U \times \{y\}$, al variare di Y di aperti dello spazio P. Si ha dunque:

$$p_| (U \times \{y\}) = U$$

Dunque, essendo $p_|$ continua perché restrizione della proiezione (che è continua per definizione), biettiva per costruzione e aperta per i risultati appena ottenuti si ha che $P \times \{y\}$ e P sono omeomorfi, cioè $p_|$ è omeomorfismo.
Per dimostrare che p sia aperta, preso A aperto in $P \times Q$, si ha:

$$p(A) = p\left[\bigcap_{y \in \mathbb{Q}} (A \cap P \times \{y\})\right] = \bigcap_{y \in \mathbb{Q}} p(A \cap P \times \{y\}) \tag{1.27}$$

Per i ragionamenti della prima parte, $A \cap P \times \{y\}$ è aperto di $P \times \{y\}$ e sappiamo dunque che $p_| (A \cap P \times \{y\})$ è aperto: ne segue che $p(A \cap P \times \{y\})$ è aperto in P al variare di y. Allora anche $p(A)$ è aperto (in quanto è unione di aperti) e dunque p è aperta.

III $\Longrightarrow$) Poiché $f : X \to P \times Q$, $p : P \times Q \to P$ e $q : P \times Q \to Q$ sono continue, le composizioni $f_1 = p \circ f : X \to P$, $f_2 = q \circ f : X \to Q$ sono banalmente continue.
$\Longleftarrow$) Dobbiamo dimostrare che f sia continua. Sia $A = U \times V \subseteq P \times Q$ aperto della base:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}\left(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)\right) = f^{-1}\left(p^{-1}(U)\right) \cap f^{-1}\left(q^{-1}(V)\right) \\ &= (pf)^{-1}(U) \cap (qf)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Per ipotesi pf, qf sono continue, dunque loro controimmagini di aperti sono ancora aperti; inoltre, essendo la loro intersezione un aperto, segue l'implicazione.

Proposizione 1.10.0. Siano X, Y spazi topologici e $X \times Y$ il prodotto. Allora:

1. Date le basi $\mathscr{B}$ della topologia di X e $\mathscr{C}$ della topologia di Y, allora:

$$\mathscr{D} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B},\ V \in \mathscr{C}\} \tag{1.28}$$

è una base per la topologia prodotto.

2. Dati $x \in X$, $y \in Y$, siano $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni di x e $\mathscr{V} = \left\{V_j\right\}_{j \in J}$ un sistema fondamentale di intorni di y. Poniamo $Wij := U_i \times V_j \subseteq X \times Y$. Allora:

$$\mathscr{W} = \left\{W_{ij}\right\}_{j \in J} \tag{1.29}$$

è un sistema fondamentale di intorni di $(x, y) \in X \times Y$.

3. Se $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, allora $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare, il prodotto di chiusi è chiuso.

Dimostrazione. I Segue dalla dimostrazione dal primo punto del teorema 1.4 (Manetti, 3.61).

II Per definizione di sistema fondamentale di intorni si ha:

$$\forall U \in I(x)\ \exists U_i \in \mathscr{U} : U_i \in U$$
$$\forall V \in I(y)\ \exists V_i \in \mathscr{V} : V_j \in V$$

$\Longrightarrow$) Per ogni intorno U di x e V di y, si ha $W \in I(x, y)$. Inoltre, presi gli intorni U_i e V_j definiti come sopra, si ha che $W_{ij} = U_i \times V_j \in I(x, y)$ per definizione di topologia prodotto; segue che, per ogni intorno W di questa forma esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$$

$\Longleftarrow$) Prendiamo un intorno $W \in I(x, y)$, esiste un aperto $W' \subseteq W$. Poiché W' appartiene al prodotto $X \times Y$, si ha che $W' = \bigcap_k U_k \times V_k$ con U_k e V_k aperti di X e Y. Preso allora $(x, y) \in W'$, esiste gli aperti U_k e V_k che contengono rispettivamente x e y.
Segue dunque che $U_k \in I(x)$ e $V_k \in I(y)$ e dunque dal sistema fondamentale di intorni si ha che $\exists U_i \in \mathscr{U},\ V_j \in \mathscr{V}$ tali che $U_i \in U_k,\ V_j \in V_k$. Allora definito $W_{ij} = U_i \times V_j$, si ha per ogni intorno W di esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U_k \times V_k \subseteq W' \subseteq W$$

III

$$\begin{aligned}
(xy) \in \overline{A \times B} &\iff \forall W \in I(x, y) \quad W \cap (A \times B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x),\ \forall V \in I(y) \quad (U \times V) \cap (A \times B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x),\ \forall V \in I(y) \quad (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x),\ \forall V \in I(y) \quad U \cap A \neq \varnothing,\ V \cap B \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x) \quad U \cap A \neq \varnothing,\ \forall V \in I(y) \quad V \cap B \neq \varnothing \\
&\iff x \in \overline{A} \wedge y \in \overline{B} \iff ()(xy) \in \overline{A} \times \overline{B}
\end{aligned}$$

In particolare, se A e B sono chiusi, avendo che $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$, otteniamo:

$$A \times B = \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$$

Osservazione. 1.8. *Il prodotto di un numero* ***finito*** *di spazi topologici è pari al prodotto di due spazi:*

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

In particolare una base di aperti di $X_1 \times \ldots \times X_n$ è data da:

$$\mathscr{B} = \{A_1 \times \ldots \times A_n \mid A_i \text{ aperto in } X_i\}$$

1.11 Assiomi di separazione: T1 e Hausdorff

Definizione 1.11.0. Uno spazio topologico X si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso, in particolare se e solo se tutti i punti sono chiusi.
In termini di intorni, X è **T1** se presi due punti distinti x e y esiste un intorno per il punto x che non contiene y e viceversa:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{array}{ll} \exists U \in I(x) & y \notin U \\ \exists V \in I(y) & x \notin V \end{array} \tag{1.30}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che la definizione di **T1** implica quella per intorni e viceversa.
$\implies$) Siano $x, y \in X \quad x \neq y$. Per ipotesi $\{x\}$ è chiuso, dunque $V = X \setminus \{x\}$ è aperto. Poiché $y \neq x$, allora $y \notin \{x\} \implies y \in V$, ed essendo V aperto, $V \in I(y)$. Dunque V è intorno di y e banalmente $x \notin V$.
$\impliedby$) Dobbiamo dimostrare che $\forall x \quad \{x\}$ è chiuso, cioè $A = X \setminus \{x\}$ è aperto. Sia $y \in A$: $y \notin \{x\} \implies y \neq x$. Per ipotesi allora esiste un intorno V di y tale che $x \notin V$. Necessariamente si ha che $V \subseteq A$, dunque A è anch'esso intorno di y. Per l'arbitrarietà di y, A è intorno di ogni suo punto, dunque A è aperto.

Osservazione. 1.9.
1. *X è **T1** se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:*

$$\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} U \tag{1.31}$$

2. *Ogni spazio metrico è **T1***

Dimostrazione. I $\implies$) Se X è **T1**, allora $\forall \{y\} \subseteq X$ è chiuso. Fissato x, prendiamo $y \in \bigcup_{U \in I(x)} U$. Allora $\forall U \in I(x)$ $\{y\} \cap U \neq \varnothing$. Da ciò segue che $x \in \overline{\{y\}} = \{y\}$, cioè $y = x$. Allora $\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} U$.
$\impliedby$) Per dimostrare che X è **T1** è sufficiente dimostrare che $\{x\}$ è chiuso, dato che ogni insieme finito in X si può vedere come unione finita di singoletti $\{x\}$ e per gli assiomi dei chiusi otteniamo un chiuso. In particolare, ci basta dimostrare che $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$, essendo l'altra implicazione ovvia per definizione.
Sia $y \in \overline{\{x\}}$. Per definizione di chiusura $\forall V \in I(y)$ $V \cap \overline{\{x\}} \neq \varnothing \implies \forall V \in I(y)$ $V \cap \overline{\{x\}} = \{x\}$, cioè l'intersezione dei V deve incontrare $\{x\}$:

$$\bigcup_{V \in I(y)} V \cap \{x\} = \{x\}$$

Per ipotesi, $\bigcup_{V \in I(y)} V = \{y\}$, dunque $\{y\} \cap \{x\} = \{x\} \implies y \in \{x\} \implies \overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$ e vale le ipotesi.

II Se X è metrico e $x \in X$, il sistema fondamentale di intorni di X sono gli intorni centrati in X di raggio arbitrario, cioè $B_\varepsilon(x)$. Allora:

$$\bigcup_{U \in I(x)} U = \bigcup_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(x) = \{x\}$$

E per la proposizione precedente si ha che X metrico è **T1**.

Definizione 1.11.1. Uno spazio topologico X si dice di **Hausdorff** o **T2** se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{matrix} : U \cap V = \varnothing \tag{1.32}$$

Osservazione. 1.10.

1. *X è di **Hausdorff** se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:*

$$\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} \overline{U} \tag{1.33}$$

2. *Essere **Hausdorff** implica essere **T1**, ma non il viceversa.*
3. *Ogni spazio metrico è di **Hausdorff**. Infatti:*

Dimostrazione.

I $\implies$) Sia X di **Hausdorff**. Fissato x, sia $y \in \overline{U}$, con $U \in I(x)$. Per definizione di $\overline{U}$, $\forall V \in I(y) \quad V \cap U \neq \varnothing$. Se $y \neq x$, si avrebbe un assurdo, dato che $\nexists V \in I(y) : U \cap V = \varnothing$ e dunque X non sarebbe di **Hausdorff**.

$\impliedby$) Dobbiamo dimostrare che X è di **Hausdorff**. Sia $x \neq y$. Allora $y \notin \{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} \overline{U}$. Allora, per definizione di chiusura si ha che $\forall U \in I(x)\ \exists V \in I(y) : V \cap U = \varnothing$. Segue dunque la tesi.

II Avendo per ogni coppia di punti distinti due intorni disgiunti in quanto **Hausdorff**, banalmente i due intorni verificano la definizione di **T1** per intorni.

Il viceversa *non* è vero: prendendo la topologia dei complementari finiti CF su uno spazio X *non* finito, essa è **T1** ma non **Hausdorff**.

III Presi $x \neq y$, allora $d(x, y) = d > 0$. Dunque, per disuguaglianza triangolare si ha sempre che:

$$B_{d/4}(Y) \cap B_{d/4}(Y) = \varnothing$$

II

Omotopia