

---

# APPUNTI DI GEOMETRIA 2

---

Anno Accademico 2020/2021

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUI BEEP BOOP”



# INDICE

---

INDICE    ii

## I    TOPOLOGIA GENERALE    1

1	SPAZI TOPOLOGICI	3
1.1	Spazio topologico	3
1.1.1	Distanza e spazi metrici	4
1.1.2	Finezza: confronto di topologia	6
1.1.3	Base della topologia	7
1.1.4	Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità	9
1.1.5	Intorni	10
1.2	Funzioni continue	11
1.3	Omeomorfismi	13
1.4	Topologia indotta	14
1.5	Sottospazio topologico	14
1.5.1	Immersione	15
1.6	Prodotti topologici	16
1.7	Assiomi di separazione: $T_1$ e Hausdorff	20
1.8	Proprietà topologica	23
2	CONNESSIONE E COMPATTEZZA	25
2.1	Connessione	25
2.1.1	Connessione per archi	27
2.1.2	Connessione nella topologia euclidea	29
2.1.3	Intersezioni, unioni e prodotti di spazi connessi	31
2.1.4	Spazi connessi non c.p.a.	32
2.1.5	Componenti connesse	34
2.2	Compattezza	35
2.2.1	Relazioni fra compattezza e altre proprietà topologiche	37
3	GRUPPI TOPOLOGICI	43
3.1	Gruppi topologici	43
4	TOPOLOGIA QUOZIENTE	49
4.1	Topologia quoziente	49
4.1.1	Identificazione	50
4.1.2	Quozienti tipici	52

4.1.3	Quoziente Hausdroff	55
5	AZIONI DI GRUPPO	57
5.1	Azione di un gruppo su un insieme	57
5.2	Stabilizzatore di un elemento	58
5.3	Azione per omeomorfismi	59
5.3.1	Spazio proiettivo reale	63
6	ASSIOMI DI NUMERABILITÀ E SUCCESSIONI	65
6.1	Numerabilità	65
6.2	Successioni	69
6.2.1	Punti di accumulazione	70
6.2.2	Sottosuccessioni	70
6.3	Successioni e compatti	72
6.3.1	Compattezza per successioni	74
6.4	Spazi metrici completi	75
II	OMOTOPIA	79
7	OMOTOPIA	81
7.1	Lemma di incollamento	81
7.2	Componenti connesse e componenti c.p.a.	82
7.3	Omotopia tra funzioni continue	84
7.4	Equivalenza omotopica	87
7.4.1	Spazi contraibili	89
7.5	Retratti e retratti di deformazione	91
8	IL GRUPPO FONDAMENTALE	97
8.1	Omotopie fra cammini	97
8.2	Gruppo fondamentale	102
8.2.1	Dipendenza dal punto base	103
8.2.2	Mappe continue e omomorfismo di gruppi	105
8.3	Digressione: Categorie	105
8.3.1	Funtori	107
8.4	Isomorfismi e gruppi fondamentali	109
8.5	Numero di Lebesgue	112
8.6	Teorema di Van Kampen sui generatori	114
8.7	Gruppo fondamentale della sfera	116
8.8	Gruppo fondamentale della circonferenza	117
8.8.1	Mappa esponenziale	117
8.8.2	Sollevamento	118
8.8.3	Dimostrazione del gruppo fondamentale della circonferenza	123
8.8.4	Alcune conseguenze del gruppo fondamentale della circonferenza	123
8.8.5	Gruppo fondamentale del prodotto	125
8.9	Alcuni esempi di gruppi fondamentali	126
8.9.1	Toro	126
8.9.2	Un gruppo fondamentale non abeliano	126
8.9.3	Spazio proiettivo reale	127

### III CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI TOPOLOGICHE 131

- 9 VARIETÀ TOPOLOGICHE 133
  - 9.1 Varietà topologiche 133
    - 9.1.1 Dimensione 1 134
    - 9.1.2 Dimensione 2 134
  - 9.2 Somma connessa di superfici compatte 138
  - 9.3 Classificazione delle superfici topologiche compatte 143
    - 9.3.1 Triangolazione 144
    - 9.3.2 Dimostrazione del teorema di classificazione: prima parte 145
  - 9.4 Orientabilità 149
    - 9.4.1 Dimostrazione del teorema di classificazione: seconda parte 150
  - 9.5 Suddivisione di una superficie compatta 151
  - 9.6 Caratteristica di Eulero 152
    - 9.6.1 Dimostrazione del teorema di classificazione: terza e ultima parte 153
    - 9.6.2 Somma connessa e caratteristica di Eulero 154
    - 9.6.3 Impraticiamoci! Caratteristica di Eulero 155

### IV APPROFONDIMENTI DI ALGEBRA LINEARE 157

- 10 APPROFONDIMENTI DI ALGEBRA LINEARE 159
  - 10.1 Diagonalizzazione simultanea 159
  - 10.2 Polinomi e matrici 161
    - 10.2.1 Ideale di una matrice 162
    - 10.2.2 Polinomio minimo 162
  - 10.3 Teorema di Cayley-Hamilton 163
  - 10.4 Forma canonica di Jordan 166
    - 10.4.1 Autospazi generalizzati 169
    - 10.4.2 Esistenza della base dell'autospazio generalizzato che dà la forma di Jordan 174
    - 10.4.3 Unicità della forma di Jordan 178
    - 10.4.4 Polinomio minimo e forma di Jordan 178
    - 10.4.5 Impraticiamoci! Forma canonica di Jordan 180
  - 10.5 Funzione esponenziale nei complessi 183
    - 10.5.1 Esponenziale di una matrice quadrata complessa 185
    - 10.5.2 Calcolo dell'esponenziale di una matrice tramite la forma di Jordan 189
    - 10.5.3 Impraticiamoci! Funzione esponenziale nei complessi 191
  - 10.6 Matrici reali e forma di Jordan 192

### V GEOMETRIA PROIETTIVA 195

- 11 GEOMETRIA PROIETTIVA 197
  - 11.1 Spazi proiettivi 197
  - 11.2 Sottospazi proiettivi 198
  - 11.3 Coordinate omogenee e sistemi di riferimento proiettivo 199
  - 11.4 Operazioni con i sottospazi 202

11.5	Punti linearmente indipendenti e in posizione generale	204
11.5.1	Impratichiamoci! Punti linearmente indipendenti	205
11.6	Rappresentazione parametrica di un sottospazio proiettivo	206
11.6.1	Coordinate proiettive e punti in posizione generale	207
11.7	Trasformazioni proiettive	208
11.7.1	Gruppo lineare proiettivo	210
11.7.2	Altri aspetti delle trasformazioni proiettive	211
11.7.3	Trasformazioni proiettive in coordinate	213
11.7.4	Punti fissi di proiettività	214
11.7.5	Impratichiamoci! Trasformazioni proiettive	215
11.8	Geometria affine e geometria proiettiva	216
11.8.1	Chiusura proiettiva di un sottospazio affine	219
11.8.2	Un esempio di proiettività	223
11.8.3	Impratichiamoci! Geometria affine e geometria proiettiva	224
11.9	Spazi proiettivi complessi	224
11.9.1	Retta proiettiva complessa	227
11.10	Birapporto	229
11.10.1	Birapporto e trasformazioni proiettive	232
11.10.2	Eserciziamoci! Birapporto	235
11.11	Piano proiettivo duale	235
11.11.1	Fascio di rette	236
11.11.2	Spazi vettoriali duali e spazi proiettivi duali	238
11.11.3	Impratichiamoci! Piano proiettivo duale	239
12	CONICHE PROIETTIVE	241
12.1	Coniche nel piano proiettivo	241
12.1.1	Coniche proiettive	243
12.1.2	Classificazione delle coniche proiettive complesse	245
12.1.3	Classificazione delle coniche proiettive reali	245
12.1.4	Curve algebriche piane affini e chiusura proiettiva	246
12.1.5	Classificazione affine delle coniche nel caso complesso	249
12.1.6	Polinomi omogenei in 2 variabili	250
12.1.7	Intersezione tra una retta ed una curva nel piano proiettivo	251
12.1.8	Intersezione tra una retta ed una curva nel caso affine	253
12.1.9	Retta tangente	253
12.2	Fasce di coniche proiettive	261
12.2.1	Studio delle coniche degeneri di un fascio	262
12.2.2	Parametrizzazione delle coniche nel piano proiettivo	263
12.2.3	Impratichiamoci! Fasce di coniche proiettive	269
VI	APPENDICI	271
13	NOTE AGGIUNTIVE	273
13.1	Capitolo 1: spazi topologici	273
13.2	Capitolo 6: assiomi di numerabilità e successioni	274
13.3	Capitolo 11: forma canonica di Jordan	274
13.3.1	Convergenza	276
13.4	Capitolo 12: geometria proiettiva	276
13.4.1	Regola di Cramer	276



# I

## TOPOLOGIA GENERALE





# SPAZI TOPOLOGICI

---

“La Topologia generale è una malattia da cui l’umanità guarirà presto.”

HENRI POINCARÉ (1854–1912), dopo aver letto le prime pagine di un libro di Topologia.

Immaginiamo di aver un oggetto costituito di un magico *materiale elastico* che possiamo allungare, piegare, torcere e rimpicciolire a piacere, ma che non possiamo né strappare né incollarne parti. L’oggetto che otteniamo dopo queste deformazioni lo consideriamo “equivalente” a quello iniziale. Che proprietà si mantengono prima e dopo?

Il principale scopo della *Topologia* è studiare proprio le proprietà che rimangono invariate da queste deformazioni continue. Per far ciò, è necessario dotare un insieme di una struttura, detta **topologia**, che permetta la definizione di **continuità** di una funzione e di **omeomorfismo**, generalizzando così quello che abbiamo chiamato “deformazioni”.

In questo capitolo ci occuperemo dunque di introdurre questi concetti fondamentali per poi studiare alcuni risultati che ne conseguono. Inoltre, affronteremo alcuni degli *assiomi di separazione* e la nozione di *distanza*.

## 1.1 SPAZIO TOPOLOGICO

**DEFINIZIONE 1.1.0.** SPAZIO TOPOLOGICO E ASSIOMI DEGLI APERTI.

Uno **spazio topologico**  $(X, \mathcal{T})$  è un insieme  $X$  con una famiglia di sottoinsiemi  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  detta **topologia** che soddisfano i seguenti assiomi (detti **assiomi degli aperti**):

1. Il vuoto e l’insieme stesso sono aperti della topologia:  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. L’unione arbitraria di aperti è un aperto: dati  $\{A_i\}_{i \in I}$  tali che  $A_i \in \mathcal{T}$ ,  $\forall i \in I$  ( $|I| \leq \infty$ ), allora  $\bigcup_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$ .
3. L’intersezione finita di aperti è aperta: dati  $\{A_i\}_{i \in I}$  tali che  $A_i \in \mathcal{T}$ ,  $\forall i \in I$  ( $|I| < \infty$ ), allora  $\bigcap_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$ .

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  si dicono **aperti** della topologia.

**DEFINIZIONE 1.1.1.** SPAZIO TOPOLOGICO E ASSIOMI DEI CHIUSI.

Si può definire equivalentemente su  $X$  una topologia  $\mathcal{T}$  usando gli **assiomi dei chiusi**:

1. *Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia:*  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. *L'unione finita di chiusi è un chiuso:* dati  $\{C_i\}_{i \in I}$  tale che  $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$  ( $|I| < \infty$ ), allora  $\bigcup_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$ .
3. *L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso:* dati  $\{C_i\}_{i \in I}$  tale che  $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$  ( $|I| \leq \infty$ ), allora  $\bigcap_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$ .

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  si dicono **chiusi** della topologia.

**OSSERVAZIONE.** Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per *solì due sottoinsiemi* qualunque, in quanto poi è verificato per induzione.

**ESEMPLI.**

- **Topologia discreta:**  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ , tutti gli insiemi sono *aperti*.
- **Topologia banale:**  $\mathcal{T} = \emptyset, X$ , gli *unici* aperti sono *banali*.

## 1.1.1 Distanza e spazi metrici

**DEFINIZIONE 1.1.2.** DISTANZA.

Su un insieme  $X$  una funzione  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  è una **distanza** se:

1. **Positività della distanza:**  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
2. **Simmetria:**  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ .
3. **Disuguaglianza triangolare:**  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**DEFINIZIONE 1.1.3.** SPAZIO METRICO.

Uno **spazio metrico**  $(X, d)$  è un insieme su cui è definita una distanza.

**DEFINIZIONE 1.1.4.** PALLA APERTA E TOPOLOGIA INDOTTA DALLA DISTANZA.

Definita la **palla aperta di centro**  $x$  come l'insieme degli elementi di  $X$  che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad (1.1)$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia**  $\mathcal{T}_d$  **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A. \quad (1.2)$$

**ESEMPLI.**

- Su un qualunque insieme  $X$  si può definire la *distanza banale*:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (1.3)$$

In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.

- Su  $X = \mathbb{R}$  si può definire come distanza il *valore assoluto*  $d(x, y) = |x - y|$ , che induce la **topologia Euclidea**  $\mathcal{Eucl}$ , definita con le palle aperte di raggio  $\varepsilon$ :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \quad (1.4)$$

nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathcal{Eucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su  $X = \mathbb{R}^n$  si può definire come distanza la *norma Euclidea*:  $d(x, y) = \|x - y\|$  che induce la *topologia Euclidea*  $\mathcal{Eucl}$  in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathcal{Eucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

**ATTENZIONE!** Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme  $X$  nel modo seguente:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in CF) \text{ se } X \setminus A \text{ è finito.}$$

$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso } (C \in CF) \text{ se } C \text{ è finito.}$$

- Se un aperto  $A$  è tale se il suo complementare  $\mathcal{C}A$  è finito, si ha che:

$$A = \mathcal{C}(\mathcal{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \quad (1.5)$$

In altre parole  $A$  è aperto è pari ad  $X$  privato al più di un numero finito di punti.

- Se  $X$  è finito, la topologia  $CF$  coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di  $X$  è finito e dunque un aperto.
- Se  $X$  è infinito, ad esempio  $\mathbb{R}$ , la topologia *non* è quella discreta:  $[0, 1]$  per la topologia discreta è un chiuso ma per quella  $CF$  non lo è in quanto *non* è finito.

#### 1.1.1.1 Norme esotiche

Possiamo definire su  $\mathbb{R}^n$  una famiglia di distanze dette **norme**; qui di seguito ne elenchiamo alcune. Definiti i punti  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  abbiamo:

- **Norma infinito:**

$$d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$$

- **Norma due:**

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

- **Norma uno:**

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

- **Norma p:**

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$$

Si ha  $\lim_{p \rightarrow +\infty} d_p = d_\infty$ . Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \quad (1.6)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo senza perdere di generalità che  $d_\infty(x, y) = |x_1 - y_1|$ .

$$d_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} \geq \sqrt{|x_1 - y_1|^2} = |x_1 - y_1| = d_\infty(x, y)$$

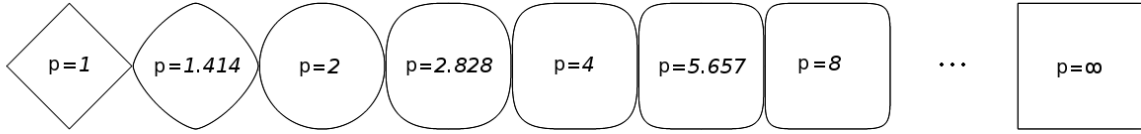
$$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_1 - y_1| = n|x_1 - y_1| = n d_\infty(x, y)$$

Notiamo che  $|x_i - y_i|$  sono sempre positive, allora sia  $a_i := |x_i - y_i|$ . Segue che  $a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)^2$  perché  $a_i, \dots, a_n \geq 0$ . Allora:

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq a_1 + \dots + a_n \implies d_2 \leq d_1$$

Queste disuguaglianze danno le seguenti inclusioni<sup>1</sup>:

$$B_1(\varepsilon) \subseteq B_2(\varepsilon) \subseteq B_\infty(\varepsilon) \subseteq B_1(n\varepsilon) \quad (1.7)$$



Questo ci porta a dire che le topologie indotte da queste distanze sono la stessa.

Preso adesso  $X = \mathcal{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$ , esso è uno spazio vettoriale infinito, con  $0_{\mathcal{C}} \equiv O_{[0, 1]}$  (cioè la funzione *identicamente nulla*). Possiamo comunque adattare le norme precedenti con delle “somme infinite”, ovvero degli *integrali*.

■ **Norma infinito:**

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

■ **Norma due:**

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

■ **Norma uno:**

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

■ **Norma p:**

$$d_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx}$$

A differenza del caso su  $\mathbb{R}^n$ , ogni norma genera in realtà una topologia distinta!

### 1.1.2 Finezza: confronto di topologia

**DEFINIZIONE 1.1.5. FINEZZA.**

Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  due topologie di  $X$ . Si dice che  $\mathcal{T}_1$  è **meno fine** di  $\mathcal{T}_2$  se tutti gli aperti della prima topologia sono aperti della seconda:

$$\forall A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2 \quad (1.8)$$

In modo analogo si dice anche che  $\mathcal{T}_2$  è **più fine** di  $\mathcal{T}_1$ .

In altre parole, una topologia *più fine* ha *più aperti* rispetto a quella confrontata.

<sup>1</sup>Qui  $B_i(r)$  indica la palla aperta di raggio  $r$  e centro fissato  $x$  rispetto alla norma  $i$ .

**ESEMPLI.**

- La *topologia banale* è la *meno fine* di tutte, dato che ogni topologia contiene  $\emptyset, X$ .
- La *topologia discreta* è la *più fine* di tutte, dato che ogni topologia è contenuta in  $\mathcal{P}(X)$ .
- Su  $\mathbb{R}$  la topologia dei complementari finiti è *meno fine* di quella euclidea. Infatti un aperto  $A \in CF$  su  $\mathbb{R}$  è definito come  $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , cioè:

$$A = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, +\infty)$$

Per  $n$  punti gli  $n + 1$  intervalli ottenuti sono aperti della topologia euclidea; essendo unione di aperti, anche  $A$  è un aperto di  $\mathcal{Eucl}$

**OSSERVAZIONE.** Se definiamo due topologie  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  sono due topologie di un insieme  $X$ , l'intersezione  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$  è anch'essa una topologia di  $X$  e, per costruzione, è *meno fine* di  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ .

## 1.1.3 Base della topologia

**DEFINIZIONE 1.1.6. BASE.**

Sia  $(X, \mathcal{T})$  uno spazio topologico.  $\mathcal{B}$  è una **base** per  $\mathcal{T}$  se:

1. La base è costituita da aperti per la topologia  $\mathcal{T}$ :  $A \in \mathcal{B} \implies A \in \mathcal{T} (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T})$ .
2. Tutti gli aperti della topologia sono unioni degli aperti delle basi:  $A \in \mathcal{T} \implies \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I: A = \bigcup_{i \in I} B_i$ .

**ATTENZIONE!** La base  $\mathcal{B}$  non è detto che formi una topologia! Ad esempio, le unioni sono aperti della topologia, ma non è detto che siano interni alla base  $\mathcal{B}$ .

**ESEMPLI.**

- Nella *topologia euclidea* di  $\mathbb{R}^n$  una base è

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\} \quad (1.9)$$

Infatti,  $\forall x \in A$  aperto  $\exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq A$  per la definizione della topologia; segue che  $A = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$ .

- Nella *topologia euclidea* di  $\mathbb{R}$  una base è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1.10)$$

Un'altra base per  $\mathbb{R}$  nella  $\mathcal{Eucl}$  è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Dato  $x \in \mathbb{R}$ , esiste sempre una successione  $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$  decrescente o crescente tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ , essendo  $\mathbb{Q}$  denso in  $\mathbb{R}^a$ . Allora presa  $a_n \searrow a$  e  $b_n \nearrow b$ , si ha:

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

Questa base con estremi razionali ha *infiniti elementi*, ma in *misura minore* rispetto a quella ad estremi reali.

<sup>a</sup>Per una discussione più approfondita a riguardo, si guardi sez. 6.3, pag. 72.

**TEOREMA 1.1.0. TEOREMA DELLE BASI.** (MANETTI, 3.7)

Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ .  $\mathcal{B}$  è la base di un'unica topologia se e solo se:

1. L'insieme  $X$  deve essere scritto come unione di elementi della famiglia:  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .
2. Per ogni punto dell'intersezione di elementi della famiglia deve esserci un'altro elemento di essa che contiene il punto ed è sottoinsieme dell'intersezione:

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in A \cap B \quad \exists C \in \mathcal{B} : x \in C \subseteq A \cap B \quad (1.11)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{B}$  la famiglia di sottoinsiemi che verifica i punti 1 e 2. Allora devo trovare una topologia di cui  $\mathcal{B}$  è base. Definiamo  $\mathcal{T}$  tale che:

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathcal{B}$$

Verifichiamo gli assiomi degli aperti su  $\mathcal{T}$ .

- I  $X \in \mathcal{T}$  per ipotesi 1,  $\emptyset \in \mathcal{T}$  perché è l'unione sugli insiemi di indici vuoto ( $I = \emptyset$ ).
- II Sia  $A_i = \bigcup_j B_{ij}$ , con  $B_{ij} \in \mathcal{B}$ . Allora:

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \left( \bigcup_j B_{ij} \right) = \bigcup_{i,j} B_{ij} \implies \bigcup_{i,j} A_i \in \mathcal{T}$$

- III Sia  $A, B \in \mathcal{T}$ , cioè  $A = \bigcup_i A_i$  e  $B = \bigcup_j B_j$  con  $A_i, B_j \in \mathcal{B}$ . Allora:

$$A \cap B = \left( \bigcup_i A_i \right) \cap \left( \bigcup_j B_j \right) = \bigcup_{i,j} \left( \underbrace{A_i \cap B_j}_{\in \mathcal{T} \text{ per l'ipotesi 2}} \right) \in \mathcal{T}$$

□

**ESEMPIO.** Sia  $X = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Verifichiamo che  $\mathcal{B}$  soddisfa il teorema appena enunciato.

1.  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ .
2. Preso  $[a, b] \cap [c, d]$  si ha che esso è  $\emptyset$  o è  $[e, f]$ , con  $e = \max\{a, c\}$ ,  $f = \min\{b, d\}$ ; in entrambi i casi l'intersezione è elemento di  $\mathcal{B}$ .

Esiste dunque una topologia su  $\mathbb{R}$  che ha base  $\mathcal{B}$ ; questa *non* è base per la topologia Euclidea, ad esempio, dato che gli intervalli semiaperti non sono inclusi in  $\mathcal{B}$ .

Notiamo inoltre che  $(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ a + \frac{1}{n}, b \right)$ , dunque la topologia definita  $\mathcal{B}$  comprende gli aperti della topologia Euclidea:  $\mathcal{Euc}$  è meno fine di questa topologia.

## 1.1.4 Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e un sottoinsieme  $A \subseteq X$ , si ha:

- $A$  aperto della topologia se  $A \in \mathcal{T}$ .
- $A$  chiuso della topologia se  $\mathcal{C}A = X \setminus A \in \mathcal{T}$ .

**ATTENZIONE!** Essere aperto oppure essere chiuso *non si escludono a vicenda!* Un insieme può essere aperto, chiuso, entrambi o nessuno dei due. Ad esempio, il vuoto e l'insieme stesso sono aperti e chiusi allo stesso tempo, dato che per ipotesi sono aperti i loro complementari  $\mathcal{C}\emptyset = X \setminus \emptyset = X$  e  $\mathcal{C}X = X \setminus X = \emptyset$  sono anch'essi aperti.

**DEFINIZIONE 1.1.7. CHIUSURA.**

Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . La **chiusura**  $\bar{A}$  di  $A$  è il più piccolo chiuso contenente  $A$ :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C \quad (1.12)$$

PROPRIETÀ:

- $A \subseteq \bar{A}$ .
- $\bar{A}$  è un chiuso in quanto intersezione (arbitraria) di chiusi.
- $A$  è un chiuso  $\iff A = \bar{A}$ .

**DEFINIZIONE 1.1.8. PUNTO ADERENTE.**

Un punto  $x$  è **aderente** ad  $A$  se  $x \in \bar{A}$ .

**DEFINIZIONE 1.1.9. INTERNO.**

Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . L'**interno**  $A^\circ$  di  $A$  è il più grande aperto contenuto in  $A$ :

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ aperto}}} B \quad (1.13)$$

PROPRIETÀ:

- $A^\circ \subseteq A$ .
- $A^\circ$  è un aperto in quanto unione (arbitraria) di aperti.
- $A$  è un aperto  $\iff A = A^\circ$ .

**DEFINIZIONE 1.1.10. PUNTO INTERNO.**

Un punto  $x$  è **interno** ad  $A$  se  $x \in A^\circ$ .

**DEFINIZIONE 1.1.11. FRONTIERA.**

Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . La **frontiera**  $\partial A$  di  $A$  sono i punti della chiusura di  $A$  non contenuti nel suo interno o, in altri termini, i punti aderenti sia ad  $A$  sia al suo complementare.

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} \quad (1.14)$$

PROPRIETÀ:

- $\partial A \subseteq \bar{A}$ .

■  $\partial A$  è un chiuso.

**DEFINIZIONE 1.1.12.** INSIEME DENSO.

Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ .  $A$  è **denso** è denso in  $X$  se  $\overline{A} = X$  o, in altri termini, tutti i punti di  $X$  sono aderenti ad  $A$ .

**ESEMPIO.** Il più piccolo chiuso contenente  $\mathbb{Q}$  è  $\mathbb{R}$ , poiché ogni reale è aderente ai razionali. Dunque  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.5 Intorni

**DEFINIZIONE 1.1.13.** INTORNO.

Sia  $X$  spazio topologico e  $x \in X$ .  $V$  è un **intorno** di  $x$  se  $\exists A$  aperto tale che  $x \in A \subseteq V$  o, in altri termini, se  $x$  è interno ad  $U$ . Definiamo inoltre la **famiglia degli intorni** di  $x$   $I(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ :

$$I(x) = \{V \subseteq X \mid V \text{ è intorno di } x\} \quad (1.15)$$

**OSSERVAZIONE.** Dato  $A \subseteq X$ , per ogni  $x \in A$  tale che  $A$  è intorno di  $x$  si può definire un aperto  $A_x \subseteq A$ , con  $x \in A_x$ . L'unione arbitraria di questi  $A_x$  risulta essere contenuta in  $A$  e pari al suo interno. Dunque, si può definire l'interno di  $A$  come  $A^\circ = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$ ; segue che  $A$  è aperto se e solo se  $A$  è intorno di ogni punto in  $A$ .

**LEMMA 1.1.0.** PROPRIETÀ DEGLI INTORNI. (MANETTI, 3.20, 3.21)

1. Si possono estendere gli intorni:  $U \in I(x), U \subseteq V \implies V \in I(x)$
2. Le intersezioni di intorni sono ancora intorni:  $U, V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$
3. Caratterizzazione della chiusura per intorni:  
 $B \subseteq X$ , allora  $x \in \overline{B} \iff \forall U \in I(x) \quad U \cap B \neq \emptyset$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- I L'aperto  $A$  che soddisfa la definizione di  $U \in I(x)$  è per costruzione contenuto anche in  $V$ , dunque  $A$  è un aperto che soddisfa la definizione di  $V$  intorno di  $x$ .
- II Definiti gli aperti  $A_U \subseteq U, A_V \subseteq V$  che soddisfano la definizione di intorni di  $x$ , l'intersezione  $A = A_U \cap A_V$  è un aperto contenente  $x$ . Dato che  $A = A_U \cap A_V \subseteq U \cap V, U \cap V$  per definizione di intorno di  $x$ .
- III Per contronominale.

$$\begin{aligned}
 x \notin \overline{B} &\iff x \notin B \wedge x \notin \partial B \\
 &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \overline{B \cap X \setminus B} \\
 &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \partial(X \setminus B) \\
 &\iff x \in (X \setminus B)^\circ \\
 &\iff \exists U \in I(x) : x \in U \subseteq X \setminus B \\
 &\iff \exists U \in I(x) : U \cap B = \emptyset
 \end{aligned}$$

□



**DEFINIZIONE 1.1.14.** SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI.

Sia  $X$  spazio topologico,  $x \in X$  e  $I(x)$  la famiglia degli intorni di  $x$ . Una sottofamiglia  $\mathcal{J} \subseteq I(x)$  è un **sistema fondamentale di intorni** di  $x$  se  $\forall U \in I(x) \exists V \in \mathcal{J} : V \subseteq U$ .

## 1.2 FUNZIONI CONTINUE

**DEFINIZIONE 1.2.0.** FUNZIONE CONTINUA.

Siano  $X, Y$  spazi topologici. Una funzione  $f : X \longrightarrow Y$  si dice **continua** se la controimmagine di aperti in  $Y$  è un aperto in  $X$ :

$$\forall A \text{ aperto in } Y, f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \quad (1.16)$$

Alternativamente,  $f$  è **continua** se la controimmagine di chiusi in  $Y$  è un chiuso in  $X$ .

$$\forall C \text{ chiuso in } Y, f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \quad (1.17)$$

**OSSERVAZIONI.**

- Si ha la definizione di continuità con i chiusi perché la controimmagine si “comporta bene” con i complementari:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

- È sufficiente verificare la definizione per gli aperti una base di  $Y$  perché la controimmagine si “comporta bene” con le unioni di insiemi:

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$$

**LEMMA 1.2.0.** (MANETTI, 3.25)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.  $f$  è continua se e solo se:

$$\forall A \subseteq X \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad (1.18)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che per ogni funzione si ha:

- $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow$ ) Sia  $A \subseteq X$ . Dobbiamo dimostrare che  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . Sappiamo che se un insieme è contenuto in un altro, lo stesso vale per le immagini e le controimmagini. Allora:

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq \overline{f(A)} \\ A &\subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \end{aligned}$$

$f^{-1}(\overline{f(A)})$  è un chiuso (in  $X$  in quanto controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso) che contiene  $A$ . Ma allora anche la chiusura, che è il più piccolo chiuso

contenente  $A$ , è contenuta in  $f^{-1}(\overline{f(A)})$ . Segue quindi:

$$\begin{aligned}\overline{A} &\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \\ f(\overline{A}) &\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Sia  $C \subseteq Y$  chiuso e sia  $A = f^{-1}(C)$ . Dobbiamo dimostrare che  $A$  è chiuso in  $X$ . Poiché  $A \subseteq \overline{A}$  è vero per definizione, dimostriamo che  $\overline{A} \subseteq A$ . Per ipotesi:

$$\begin{aligned}f(\overline{A}) &\subseteq \overline{f(A)} \\ f(f^{-1}(C)) &\subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C\end{aligned}$$

Applicando nuovamente la controimmagine:

$$\begin{aligned}f(\overline{f^{-1}(C)}) &\subseteq C \\ \overline{A} = \overline{f^{-1}(C)} &\subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C)})) \subseteq f^{-1}(C) = A\end{aligned}$$

Dunque la controimmagine  $A$  di un chiuso  $C$  è un chiuso. □

**TEOREMA 1.2.0.** MANETTI, 3.26

La *composizione* di funzioni continue è continua.

$$f : Y \longrightarrow Z, \quad g : X \longrightarrow Y \text{ continue} \implies f \circ g : X \longrightarrow Z \text{ continua} \quad (1.19)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La controimmagine della composizione di funzioni  $f \circ g$  è definita come  $f^{-1}(f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1}$ . Allora  $A$  aperto in  $Z \implies f^{-1}(A)$  aperto  $\implies g^{-1}(f^{-1}(A))$  aperto. □

**DEFINIZIONE 1.2.1.** CONTINUITÀ PER PUNTI. (MANETTI, 3.27)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione. Dato  $x \in X$   $f$  è **continua** in  $x$  se:

$$\forall U \in I(f(x)) \exists V \in I(x) : f(V) \subseteq U \quad (1.20)$$

Questa è la generalizzazione della definizione tradizionale della continuità affrontata in *Analisi 1*.

**TEOREMA 1.2.1.** (MANETTI, 3.28)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.  $f$  è continua per aperti  $\iff f$  è continua in  $x \forall x \in X$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Sia  $x \in X$  e  $U \in I(f(x))$ . Per definizione di intorno  $\exists A$  aperto in  $Y$  tale che  $f(x) \in A \subseteq U$ . Basta porre  $V = f^{-1}(A)$ : per continuità è aperto in  $X$  e, dato che  $x \in f^{-1}(A)$  perché  $f(x) \in A$ , allora  $V$  è intorno di  $x$ . Segue che  $f(V) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$ .

$\Leftarrow$ ) Sia  $A \subseteq Y$  aperto. Dobbiamo dimostrare che  $f^{-1}(A)$  sia aperto. Preso  $x \in f^{-1}(A)$  si ha che  $f(x) \in A$ ; dunque  $A$  è, in quanto aperto, intorno di  $f(x)$ . Allora, poiché  $f$  è

continua in  $x$ ,  $\exists V \in I(x)$  tale che  $f(V) \subseteq A$ .

Segue che  $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$ , cioè  $f^{-1}(A)$  è intorno di  $x$  poiché contiene un intorno  $V$  dello stesso punto. Dunque  $f^{-1}(A)$  aperto perché è intorno di ogni suo punto.  $\square$

**DEFINIZIONE 1.2.2.** FUNZIONE APERTE E FUNZIONE CHIUSA.

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.

- $f$  è **aperta** se  $\forall A$  aperto in  $X$   $f(A)$  è aperto in  $Y$ .
- $f$  è **chiusa** se  $\forall C$  chiuso in  $X$   $f(C)$  è chiuso in  $Y$ .

**OSSERVAZIONE.** È sufficiente verificare la definizione di funzione aperta per gli aperti di una base di  $X$  perché l'immagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$$

**ATTENZIONE!** Una funzione  $f$  aperta che non sia omeomorfismo *non* è necessariamente una funzione chiusa. Si prenda  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  (la proiezione sulla prima coordinata):

- $f$  è *continua* per ovvi motivi.
- $f$  è *aperta*. Infatti, presa una base su  $\mathbb{R}^2$  come  $\{B_\varepsilon(x, y)\}$ , si ha che  $f(B_\varepsilon(x, y)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  che sono aperti in  $\mathbb{R}$ .
- $f$  *non* è *chiusa*. Prendiamo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$  e definiamo la funzione

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua; vediamo facilmente come } C = g^{-1}(\{1\}) \text{ e, essendo } (x, y) \longmapsto xy$$

1 chiuso in  $\mathbb{R}$ ,  $C$  è controimmagine continua di un chiuso e dunque chiuso.

Si ha dunque  $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , che tuttavia non è un chiuso della topologia Euclidea in quanto non contiene infiniti punti (una base della *Eucl* è formata da intervalli, che dunque contengono infiniti punti).

### 1.3 OMEOMORFISMI

**DEFINIZIONE 1.3.0.** OMEOMORFISMO.

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.  $f$  è un **omeomorfismo** se è *biunivoca*, *continua* e la sua inversa è *continua*; più precisamente, esiste  $g : Y \rightarrow X$  continua tale per cui  $g \circ f = Id_X$  e  $f \circ g = Id_Y$ .

Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra i due; in notazione  $X \cong Y$ .

**INTUITIVAMENTE...** Possiamo immaginare l'omeomorfismo come una *deformazione* che *piega* e *allunga* uno spazio senza formare *strappi* ( $f$  continua), creare *nuovi punti* ( $f$  iniettiva), *sovrapposizioni* ( $f$  suriettiva) o *incollamenti* ( $f^{-1}$  continua): in questo modo si può trasformare lo spazio in un altro che mantenga le stesse *proprietà topologiche* dell'originale.

Si vede allora facilmente che un *quadrato* ed un *cerchio* sono omeomorfi, mentre una *sfera* ed un *toro* (la versione “topologica” di una ciambella col buco, si veda sez. 8.16, pag. 126) non lo sono, dato che non posso creare né far sparire quel buco; allo stesso modo una *retta* non è omeomorfa ad un *punto*, dato che non posso “accumulare” tutti i punti della retta in uno solo!

Seppur questa “visualizzazione” è una buona intuizione del funzionamento degli omeomorfismi, **non è completamente accurata**. Ad esempio, un *nastro di Möbius* (per la definizione si veda sez. 9.9, pag. 149) con un mezzo-giro ed uno con tre mezzi-giri sono omeomorfi, ma con la nostra intuizione non si arriva a dire perché.

**LEMMA 1.3.0.** (MANETTI, 3.31)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione *continua*. Allora vale:

1.  $f$  omeomorfismo  $\iff f$  aperta e biettiva.
2.  $f$  omeomorfismo  $\iff f$  chiusa e biettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la prima condizione, la seconda è analoga.

$\implies$ ) Un omeomorfismo è biettivo per definizione. Dimostriamo dunque che  $f$  sia aperta, cioè  $\forall A \in X$  aperto  $f(A) \in Y$  è aperto. Ma definita  $g : Y \longrightarrow X$  l’inversa continua dell’omeomorfismo  $f$  (cioè  $f^{-1} = g$ ), si ha che  $\forall A \in X$   $g^{-1}(A) = f(A)$  è aperto.

$\impliedby$ )  $f$  è già biettiva e continua per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che l’inversa  $g : Y \longrightarrow X$  sia continua, cioè  $\forall A \in X$  aperto  $g^{-1}(A) \in Y$  è aperto. Ma  $g^{-1}(A) = f(A)$  che è aperto perché  $f$  è aperta.  $\square$

#### 1.4 TOPOLOGIA INDOTTA

**DEFINIZIONE 1.4.0.** TOPOLOGIA INDOTTA.

Dati:

- Uno spazio topologico  $X$ .
- Un insieme  $Y$ .
- Una funzione  $f : Y \longrightarrow X$

Allora su  $Y$  si può definire la **topologia indotta** come la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono  $f$  continua.

#### 1.5 SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO

**DEFINIZIONE 1.5.0.** TOPOLOGIA DI SOTTOSPAZIO.

Sia  $X$  uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e  $Y \subseteq X$  un suo sottoinsieme. Su  $Y$  si può definire la seguente **topologia di sottospazio**:

$$U \subseteq Y \text{ aperto in } Y \iff \exists V \subseteq X \text{ aperto in } X (V \in \mathcal{T}) : U = V \cap Y \quad (1.21)$$

Definita l’**inclusione**  $i : \begin{matrix} Y & \hookrightarrow & X \\ y & \longmapsto & y \end{matrix}$ , la topologia di sottospazio è la topologia indotta da  $i$ , cioè la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono continua l’inclusione.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la continuità dell'inclusione. Se  $A$  aperto in  $X$ ,  $i^{-1}(A) = A \cap Y$  (tutti gli elementi di  $A$  contenuti in  $Y$ ) è aperto in  $Y$  per definizione.  $\square$

**DEFINIZIONE 1.5.1.** APERTI, CHIUSI E BASI DEL SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO.

Sia  $X$  uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e  $Y \subseteq X$  un suo sottoinsieme. Allora:

- $A \subseteq Y$  **aperto** in  $Y \iff A = U \cap Y$  con  $U$  aperto in  $X$ .
- $C \subseteq Y$  **chiuso** in  $Y \iff C = U \cap Y$  con  $U$  chiuso in  $X$ .
- Se  $\mathcal{B}$  è una base della topologia di  $X \implies \mathcal{B}' := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$  è base della topologia di sottospazio.

**OSSERVAZIONE.** Se  $A \subseteq Y$  è aperto della topologia di  $X$ , allora  $A$  è aperto in  $Y$  poiché  $A = A \cap Y$ .

**ESEMPLI.** Sia  $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$  in topologia Euclidea.

- $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  è aperto in  $Y$  in quanto è già aperto in  $X$ .
- $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  è chiuso in  $Y$  in quanto è già chiuso in  $X$ .
- $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  è aperto in  $Y$  in quanto si ha, ad esempio,  $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap Y$ .

**LEMMA 1.5.0.** (MANETTI, 3.55)

Sia  $A \subseteq Y \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico e  $Y$  sottospazio topologico. Definiamo:

- $\text{cl}_Y(A)$  = chiusura di  $A$  in  $Y$ .
- $\text{cl}_X(A)$  = chiusura di  $A$  in  $X$ .

Allora  $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Preso  $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid C \text{ chiuso in } X \text{ e } A \subseteq C\}$ , per definizione di chiusura si ha:

$$\text{cl}_X(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

Ora sia  $\mathcal{C}' = \{C \cap Y \mid C \in \mathcal{C}\}$ . Allora, usando i chiusi del sottospazio:

$$\text{cl}_Y(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}'} (C \cap Y) = \left( \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap Y = \text{cl}_X(A) \cap Y = \text{cl}_Y(A)$$

$\square$

### 1.5.1 Immersione

**DEFINIZIONE 1.5.2.** IMMERSIONE.

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  funzione tra  $X, Y$  spazi topologici. Se:

- $f$  continua.
- $f$  iniettiva

Allora  $f$  è un'**immersione** se e solo se ogni aperto in  $X$  è controimmagine di un aperto di  $Y$  per  $f$ , cioè se e solo se si ha che:

$$B \subseteq X \text{ è aperto in } X \iff B = f^{-1}(A), \text{ } A \text{ aperto in } Y \quad (1.22)$$

**OSSERVAZIONE.** Per costruzione  $f$  è immersione se la topologia su  $X$  è la topologia indotta, dunque la meno fine che rende  $f$  continua.

Se sull'immagine  $f(X) \subseteq Y$  mettiamo la topologia di sottospazio di  $Y$ , si ha che

$$f : X \longrightarrow Y \text{ immersione} \iff f_{\bullet} : X \longrightarrow f(X) \text{ è omeomorfismo}$$

**ESEMPIO.** ESEMPIO DI NON IMMERSIONE.

$$\begin{aligned} [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Notiamo innanzitutto che  $f([0, 1)) = S^1$ . Si ha:

- $f_{\bullet}$  è continua per ovvi motivi
- $f_{\bullet}$  iniettiva, dato che l'unico caso problematico poteva essere  $t = 1$  che *non* nel dominio (si avrebbe avuto infatti  $f_{\bullet}(0) = f_{\bullet}(1)$ ).
- $f_{\bullet}$  suriettiva per costruzione.

Tuttavia  $f_{\bullet}$  *non* è immersione, dato che  $f_{\bullet}^{-1}$  non è continua. Preso  $P = (1, 0) \in S^1$ ,  $f_{\bullet}^{-1}$  non è continua in  $P$ . Infatti, gli intorno di 0 in  $[0, 1)$  sono del tipo  $U = [0, \varepsilon)$ , dunque dovrei trovare  $\forall U$  un intorno  $V$  di  $P \in S^1$  :  $f_{\bullet}^{-1}(V) \subseteq U$ .

Tuttavia, solo la parte superiore di  $V \in I(P)$  ha la controimmagine interna ad  $U$ : la parte inferiore, poiché sono le immagini di punti prossimi all'estremo 1 del dominio, non hanno controimmagini in  $U$ . Pertanto, non abbiamo l'omeomorfismo di  $f_{\bullet}$  e dunque l'immersione.

**DEFINIZIONE 1.5.3.** IMMERSIONE APERTA E CHIUSA.

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  funzione tra  $X, Y$  spazi topologici.

- $f$  si dice **immersione aperta** se  $f$  è aperta.
- $f$  si dice **immersione chiusa** se  $f$  è chiusa.

**LEMMA 1.5.1.** (MANETTI, 3.59)

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  funzione *continua* tra  $X, Y$  spazi topologici.

1.  $f$  iniettiva e aperta  $\implies f$  è immersione (aperta)
2.  $f$  iniettiva e chiusa  $\implies f$  è immersione (chiusa)

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il caso chiuso, il caso aperto è analogo. Preso  $C \subseteq X$  chiuso, sappiamo che  $f(C)$  è chiuso in  $Y$ , ma possiamo sempre dire che  $f(C) = f(C) \cap f(X)$  in quanto  $f(C) \subseteq f(X)$ . Dunque  $f(C)$  è un chiuso del sottospazio  $f(X)$ . Segue che ogni chiuso di  $C$  è un chiuso dell'immagine di  $f$ , dunque  $f_{\bullet} : X \longrightarrow f(X)$  è:

- Continua perché lo è  $f$ .
- Biunivoca perché  $f_{\bullet}$  è iniettiva in quanto lo è  $f$  e suriettiva per definizione.
- Chiusa per costruzione.

$f_{\bullet}$  è dunque omeomorfismo ed  $f$  è immersione (chiusa). □

**DEFINIZIONE 1.6.0.** TOPOLOGIA PRODOTTO E PROIEZIONI.

Siano  $P, Q$  spazi topologici e  $P \times Q$  il suo prodotto cartesiano. Definite le **proiezioni**:

$$\begin{aligned} p : P \times Q &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} q : P \times Q &\longrightarrow Q \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned} \quad (1.25)$$

La **topologia prodotto**  $\mathcal{P}$  è la topologia *meno fine* fra quelli che rendono  $p$  e  $q$  continue. In particolare, ricordando l'osservazione 1.2, la topologia prodotto è l'intersezione di tutte le topologia che rendono continue  $p$  e  $q$ .

**TEOREMA 1.6.0.** (MANETTI, 3.61)

1. Una *base* della topologia  $\mathcal{P}$  è data dagli insiemi della forma  $U \times V$  dove  $U \subseteq P$  aperto,  $V \subseteq Q$  aperto.
2.  $p, q$  sono aperte; inoltre  $\forall (x, y) \in P \times Q$  le restrizioni:

$$\begin{aligned} p| : P \times \{y\} &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} q| : \{x\} \times Q &\longrightarrow Q \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned} \quad (1.27)$$

Sono *omeomorfismi*.

3. Data  $f : X \longrightarrow P \times Q$  con  $X$  spazio topologico, si ha che:

$$f \text{ continua} \iff f_1 = p \circ f, f_2 = q \circ f \text{ continue} \quad (1.28)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

I Dimostriamo che:

- A) La famiglia  $\{U \times V\}$  è base per una topologia  $\mathcal{T}$ .
- B)  $P$  è meno fine di  $\mathcal{T}$ .
- C)  $\mathcal{T}$  è meno fine di  $P$ .

In questo modo avremo che la topologia  $\mathcal{T}$  è la topologia prodotto  $\mathcal{P}$  e ne conosceremo una base.

- a) Segue dal teorema delle basi (Teorema 1.1, Manetti, 3.7). Infatti
  - i.  $P \times Q$  appartiene alla famiglia  $\{U \times V\}$ , dato che per definizione gli insiemi stessi  $P$  e  $Q$  sono aperti.
  - ii. L'intersezione di due elementi della famiglia appartiene alla famiglia:  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ .
- b) Per definizione  $\mathcal{P}$  è la meno fine fra tutte le topologie sul prodotto. Dunque, per dimostrare A) basta vedere che  $p, q$  sono continue rispetto alla topologia  $\mathcal{T}$ .

Presa la proiezione  $p$ , sia  $U \subseteq P$  aperto. Si ha che  $p^{-1}(U) = U \times Q$  è aperto in  $\mathcal{T}$  in quanto è prodotto di aperti; in particolare sta nella base! Dunque  $p$  è continua, e un ragionamento analogo vale per  $q$ .

- c) Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di  $\mathcal{T}$  è anche aperto di  $\mathcal{P}$ .  
Presi  $U \subseteq P, V \subseteq Q$  allora:

$$U \times V = (U \cap P) \times (V \cap Q) = (U \times P) \cap (V \times Q) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

Poichè  $p, q$  sono continue e  $U, V$  sono aperti, anche  $p^{-1}(U), q^{-1}(V)$  sono aperti; segue che la loro intersezione è aperta e dunque  $U \times V$  è aperto della topologia  $\mathcal{T}$ .

- II Dimostriamo il caso con  $p|$ , dato che il caso con  $q|$  è analogo. Preso un aperto della base  $U \times V$ , studiamo gli aperti del sottospazio  $P \times \{y\}$ .

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \notin V \\ U \times \{y\} & \text{se } y \in V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio  $P \times \{y\}$  sono tutte e solo le unioni di  $U \times \{y\}$ , al variare di  $U$  di aperti dello spazio  $P$ . Si ha dunque:

$$p|(U \times \{y\}) = U$$

Dunque, essendo  $p|$  continua perché restrizione della proiezione (che è continua per definizione), biettiva per costruzione e aperta per i risultati appena ottenuti si ha che  $P \times \{y\}$  e  $P$  sono omeomorfi, cioè  $p|$  è omeomorfismo.

Per dimostrare che  $p$  sia aperta, preso  $A$  aperto in  $P \times Q$ , si ha:

$$p(A) = p \left[ \bigcup_{y \in Q} (A \cap P \times \{y\}) \right] = \bigcup_{y \in Q} p(A \cap P \times \{y\}) \quad (1.29)$$

Per i ragionamenti della prima parte,  $A \cap P \times \{y\}$  è aperto di  $P \times \{y\}$  e sappiamo dunque che  $p|(A \cap P \times \{y\})$  è aperto: ne segue che  $p(A \cap P \times \{y\})$  è aperto in  $P$  al variare di  $y$ . Allora anche  $p(A)$  è aperto (in quanto è unione di aperti) e dunque  $p$  è aperta.

- III  $\Rightarrow$ ) Poiché  $f : X \longrightarrow P \times Q$ ,  $p : P \times Q \longrightarrow P$  e  $q : P \times Q \longrightarrow Q$  sono continue, le composizioni  $f_1 = p \circ f : X \longrightarrow P$ ,  $f_2 = q \circ f : X \longrightarrow Q$  sono banalmente continue.  
 $\Leftarrow$ ) Dobbiamo dimostrare che  $f$  sia continua. Sia  $A = U \times V \subseteq P \times Q$  aperto della base:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)) = f^{-1}(p^{-1}(U)) \cap f^{-1}(q^{-1}(V)) = \\ &= (p \circ f)^{-1}(U) \cap (q \circ f)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Per ipotesi  $p \circ f, q \circ f$  sono continue, quindi le loro controimmagini di aperti sono ancora aperti; essendo la loro intersezione un aperto, segue l'implicazione.  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.6.o.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $X \times Y$  il prodotto. Allora:

1. Date le basi  $\mathcal{B}$  della topologia di  $X$  e  $\mathcal{C}$  della topologia di  $Y$ , allora:

$$\mathcal{D} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{C}\} \quad (1.30)$$



è una base per la topologia prodotto.

2. Dati  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , siano  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un sistema fondamentale di intorno di  $x$  e  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$  un sistema fondamentale di intorno di  $y$ . Poniamo  $W_{ij} := U_i \times V_j \subseteq X \times Y$ . Allora:

$$\mathcal{W} = \{W_{ij}\}_{j \in J} \quad (1.31)$$

è un sistema fondamentale di intorno di  $(x, y) \in X \times Y$ .

3. Se  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ , allora  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ . In particolare, il prodotto di chiusi è chiuso.

#### DIMOSTRAZIONE.

- I Segue dalla dimostrazione dal primo punto del teorema 1.4 ((MANETTI, 3.61)).  
 II Per definizione di sistema fondamentale di intorno si ha:

$$\begin{aligned} \forall U \in I(x) \exists U_i \in \mathcal{U} : U_i \subseteq U \\ \forall V \in I(y) \exists V_j \in \mathcal{V} : V_j \subseteq V \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ) Per ogni intorno  $U$  di  $x$  e  $V$  di  $y$ , si ha  $W \in I(x, y)$ . Inoltre, presi gli intorno  $U_i$  e  $V_j$  definiti come sopra, si ha che  $W_{ij} = U_i \times V_j \in I(x, y)$  per definizione di topologia prodotto; segue che, per ogni intorno  $W$  di questa forma esiste  $W_{ij}$  tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$$

$\Leftarrow$ ) Prendiamo un intorno  $W \in I(x, y)$ , esiste un aperto  $W' \subseteq W$ . Poiché  $W'$  appartiene al prodotto  $X \times Y$ , si ha che  $W' = \bigcup_k U_k \times V_k$  con  $U_k$  e  $V_k$  aperti di  $X$  e  $Y$ . Preso allora  $(x, y) \in W'$ , esiste gli aperti  $U_k$  e  $V_k$  che contengono rispettivamente  $x$  e  $y$ .

Segue dunque che  $U_k \in I(x)$  e  $V_k \in I(y)$  e dunque dal sistema fondamentale di intorno si ha che  $\exists U_i \in \mathcal{U}$ ,  $V_j \in \mathcal{V}$  tali che  $U_i \subseteq U_k$ ,  $V_j \subseteq V_k$ . Allora definito  $W_{ij} = U_i \times V_j$ , si ha per ogni intorno  $W$  di esiste  $W_{ij}$  tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U_k \times V_k \subseteq W' \subseteq W$$

#### III

$$\begin{aligned} (x, y) \in \overline{A \times B} &\iff \forall W \in I(x, y) \quad W \cap (A \times B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad U \cap A \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x) \quad U \cap A \neq \emptyset, \forall V \in I(y) \quad V \cap B \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{A} \wedge y \in \overline{B} \iff (x, y) \in \overline{A} \times \overline{B} \end{aligned}$$

In particolare, se  $A$  e  $B$  sono chiusi, avendo che  $A = \overline{A}$  e  $B = \overline{B}$ , otteniamo:

$$A \times B = \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$$

□

**OSSERVAZIONE.** Il prodotto di un numero **finito** di spazi topologici è pari al prodotto di

due spazi:

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

In particolare una base di aperti di  $X_1 \times \dots \times X_n$  è data da:

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \text{ aperto in } X_i\}$$

### 1.7 ASSIOMI DI SEPARAZIONE: T1 E HAUSDORFF

**DEFINIZIONE 1.7.0.** SPAZIO T1.

Uno spazio topologico  $X$  si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso, in particolare se e solo se tutti i punti sono chiusi.

In termini di intorni,  $X$  è **T1** se presi due punti distinti  $x$  e  $y$  esiste un intorno per il punto  $x$  che non contiene  $y$  e viceversa:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{array}{ll} \exists U \in I(x) & y \notin U \\ \exists V \in I(y) & x \notin V \end{array} \quad (1.32)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che la definizione di **T1** implica quella per intorni e viceversa.

$\implies$ ) Siano  $x, y \in X \quad x \neq y$ . Per ipotesi  $\{x\}$  è chiuso, dunque  $V = X \setminus \{x\}$  è aperto. Poiché  $y \neq x$ , allora  $y \notin \{x\} \implies y \in V$ , ed essendo  $V$  aperto,  $V \in I(y)$ . Dunque  $V$  è intorno di  $y$  e banalmente  $x \notin V$ .

$\impliedby$ ) Dobbiamo dimostrare che  $\forall x \quad \{x\}$  è chiuso, cioè  $A = X \setminus \{x\}$  è aperto. Sia  $y \in A$ :  $y \notin \{x\} \implies y \neq x$ . Per ipotesi allora esiste un intorno  $V$  di  $y$  tale che  $x \notin V$ . Necessariamente si ha che  $V \subseteq A$ , dunque  $A$  è anch'esso intorno di  $y$ . Per l'arbitrarietà di  $y$ ,  $A$  è intorno di ogni suo punto, dunque  $A$  è aperto.  $\square$

**OSSERVAZIONI.**

1.  $X$  è **T1** se e solo se per ogni punto  $x \in X$  si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U \quad (1.33)$$

2. Ogni spazio metrico è **T1**.

**DIMOSTRAZIONE.**

I  $\implies$ ) Se  $X$  è **T1**, allora  $\forall \{y\} \subseteq X$  è chiuso. Fissato  $x$ , prendiamo  $y \in \bigcap_{U \in I(x)} U$ . Allora  $\forall U \in I(x) \quad \{y\} \cap U \neq \emptyset$ . Da ciò segue che  $x \in \overline{\{y\}} = \{y\}$ , cioè  $y = x$ . Allora  $\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$ .

$\impliedby$ ) Per dimostrare che  $X$  è **T1** è sufficiente dimostrare che  $\{x\}$  è chiuso, dato che ogni insieme finito in  $X$  si può vedere come unione finita di singoletti  $\{x\}$  e per gli assiomi dei chiusi otteniamo un chiuso. In particolare, ci basta dimostrare che  $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ , essendo l'altra implicazione ovvia per definizione.

Sia  $y \in \{x\}$ . Per definizione di chiusura  $\forall V \in I(y) \quad V \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset \implies \forall V \in I(y) \quad V \cap$

$\overline{\{x\}} = \{x\}$ , cioè l'intersezione dei  $V$  deve incontrare  $\{x\}$ :

$$\bigcap_{V \in I(y)} V \cap \{x\} = \{x\}$$

Per ipotesi,  $\bigcap_{V \in I(y)} V = \{y\}$ , dunque  $\{y\} \cap \{x\} = \{x\} \implies y \in \{x\} \implies \overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$  e vale le ipotesi.

II Se  $X$  è metrico e  $x \in X$ , il sistema fondamentale di intorni di  $X$  sono gli intorni centrati in  $X$  di raggio arbitrario, cioè  $B_\varepsilon(x)$ . Allora:

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}$$

E per la proposizione precedente si ha che  $X$  metrico è **T1**. □

#### DEFINIZIONE 1.7.1. Spazio di Hausdorff.

Uno spazio topologico  $X$  si dice di **Hausdorff** o **T2** se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{matrix} : U \cap V = \emptyset \quad (1.34)$$

#### OSSERVAZIONI.

1.  $X$  è di **Hausdorff** se e solo se per ogni punto  $x \in X$  si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U} \quad (1.35)$$

2. Essere **Hausdorff** implica essere **T1**, ma non il viceversa.

3. Ogni spazio metrico è di **Hausdorff**.

#### DIMOSTRAZIONE.

I  $\implies$ ) Sia  $X$  di **Hausdorff**. Fissato  $x$ , sia  $y \in \overline{U}$ , con  $U \in I(x)$ . Per definizione di  $\overline{U}$ ,  $\forall V \in I(y) \quad V \cap U \neq \emptyset$ . Se  $y \neq x$ , si avrebbe un assurdo, dato che  $\nexists V \in I(y) : U \cap V = \emptyset$  e dunque  $X$  non sarebbe di **Hausdorff**.

$\Leftarrow$ ) Dobbiamo dimostrare che  $X$  è di **Hausdorff**. Sia  $x \neq y$ . Allora  $y \notin \{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$ . Allora, per definizione di chiusura si ha che  $\forall U \in I(x) \quad \exists V \in I(y) : V \cap U = \emptyset$ . Segue dunque la tesi.

II Avendo per ogni coppia di punti distinti due intorni disgiunti in quanto **Hausdorff**, banalmente i due intorni verificano la definizione di **T1** per intorni.

Il viceversa *non* è vero: prendendo la topologia dei complementari finiti  $CF$  su uno spazio  $X$  *non* finito, essa è **T1** ma non **Hausdorff**.

III Presi  $x \neq y$ , allora  $d(x, y) = d > 0$ . Dunque, per disuguaglianza triangolare si ha sempre che:

$$B_{d/4}(x) \cap B_{d/4}(y) = \emptyset \quad \square$$

**PROPOSIZIONE 1.7.0.** (MANETTI, 3.6.8)

Sottospazi e prodotti di spazi di **Hausdorff** sono **Hausdorff**.

**DIMOSTRAZIONE.**

- Sia  $Y \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico,  $Y$  con la topologia di sottospazio. Prendiamo  $x, y \in Y$  con  $x \neq y$ .  
 $X$  di **Hausdorff** implica che  $\exists U, V \subseteq X$  intorni rispettivamente di  $x$  e  $y$  tali che  $U \cap V = \emptyset$ . Basta prendere allora  $U \cap Y, V \cap Y$ : sono intorni sempre di  $x$  e  $y$  in  $Y$  che restano comunque disgiunti.
- Sia  $X \times Y$  con  $X, Y$  spazi topologici. Prendiamo  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ . Questo significa che  $x_1 \neq x_2$  oppure  $y_1 \neq y_2$ .  
 Scegliamo senza perdita di generalità  $x_1 \neq x_2$ . Essendo  $X$  di **Hausdorff**,  $\exists U_1, U_2$  (intorni) aperti in  $X$  tali che  $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 : U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Allora:

$$\begin{aligned} & U_1 \times Y \text{ intorno di } (x_1, y_1) \\ & U_2 \times Y \text{ intorno di } (x_2, y_2) \end{aligned} \implies U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = (U_1 \cap U_2) \times (Y \cap Y) = \emptyset$$

□

**TEOREMA 1.7.0.** (MANETTI, 3.69)

Sia  $X$  spazio topologico. La **diagonale**  $\Delta \subseteq X \times X$  è l'insieme delle coppie che hanno uguali componenti:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \quad (1.36)$$

Si ha:

$$X \text{ di } \mathbf{Hausdorff} \iff \Delta \text{ CHIUSO IN } X \times X \quad (1.37)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Dobbiamo dimostrare che  $\Delta$  è chiuso, cioè  $X \times X \setminus \Delta$  aperto, ovvero  $X \times X \setminus \Delta$  è intorno di ogni suo punto.

Preso  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta \implies x \neq y$  dato che *non* appartiene alla diagonale. Essendo  $X$  di **Hausdorff**,  $\exists U, V : x \in U, y \in V$  (intorni) aperti disgiunti. Allora  $U \times V \cap \Delta = \emptyset$ : se così non fosse, ci potrebbero essere dei valori della diagonale che appartengono ad  $U \times V$ , cioè esisterebbe almeno una coppia  $(x', y')$  tale che  $x' = y'$ , ovvero gli intorni non sarebbero disgiunti. Allora  $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$ .

$\Leftarrow$ ) Siano  $x, y \in X, x \neq y$ . Allora  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ , che è aperto per ipotesi. Necessariamente esiste un aperto della base della topologia prodotto che contiene la coppia:  $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$ . Per gli stessi ragionamenti dell'altra implicazione, si ha che  $x \in U, y \in V$  con  $U, V$  aperti (e dunque intorni) disgiunti. Segue che  $X$  è di **Hausdorff**. □

**PROPOSIZIONE 1.7.1.**

1. Siano  $f, g : X \longrightarrow Y$  continue,  $Y$  di **Hausdorff**. Sia  $C$  il luogo dei punti dove  $f$  e  $g$  coincidono:

$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \quad (1.38)$$

Allora  $C$  è chiuso.

2. Sia  $f : X \longrightarrow X$  continua,  $X$  di **Hausdorff**. Sia  $F_{ix}(f)$  il luogo dei **punti fissi**

di  $f$  e  $g$  coincidono:

$$F_{ix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\} \quad (1.39)$$

Allora  $F_{ix}(f)$  è chiuso.

3. Siano  $f, g : X \longrightarrow Y$  continue,  $Y$  di **Hausdorff** e  $A \subseteq X$  denso in  $X$ . Allora

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x) \implies \forall x \in X \quad f(x) = g(x) \quad (1.40)$$

4. Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua,  $Y$  di **Hausdorff**. Sia  $\Gamma_f$  il **grafico** di  $f$  le insieme delle coppie  $(x, f(x))$  formate dai punti del dominio e le corrispondenti immagini tramite  $f$ .

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \quad (1.41)$$

Allora  $\Gamma_f$  è chiuso in  $X \times Y$ .

#### DIMOSTRAZIONE.

- I Definiamo la funzione  $h : X \longrightarrow X \times Y$   
 $x \longmapsto (f(x), g(x))$ . Essa è continua perché le componenti sono continue; considerata la diagonale  $\Delta_Y$  di  $Y \times Y$ , si ha che  $C = h^{-1}(\Delta_Y)$  è la controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso e quindi chiuso.

- II Basta porre al punto  $1 \quad g = Id_X$ .

- III Per ipotesi  $A \subseteq h^{-1}(\Delta_Y)$ . In quanto  $A$  è denso in  $X$ ,  $\overline{A} = X$ . Dunque:

$$X = \overline{A} \subseteq \overline{h^{-1}(\Delta_Y)} = h^{-1}(\Delta_Y)$$

Questo è vero in quanto  $Y$  è di **Hausdorff** e la diagonale  $\Delta_Y$  è un chiuso: segue che  $h^{-1}(\Delta_Y)$  è chiuso e dunque pari alla sua chiusura. Si ha la tesi.

- IV Definiamo la funzione continua  $l : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$   
 $(x, y) \longmapsto (f(x), y)$ . Allora  $\Gamma_f = l^{-1}(\Delta_Y)$  è un chiuso. □

## 1.8 PROPRIETÀ TOPOLOGICA

### DEFINIZIONE 1.8.0. PROPRIETÀ TOPOLOGICA.

Una **proprietà topologica**  $P$  è una caratteristica degli spazi topologici per cui se ogni spazio  $X$  che possiede quella proprietà  $P$  è omeomorfo ad uno spazio  $Y$ , allora anche  $Y$  ha quella proprietà (e viceversa):

$$X \cong Y \implies [X \text{ ha } P \iff Y \text{ ha } P] \quad (1.42)$$

In altre parole, una proprietà topologica è **invariante** rispetto agli omeomorfismi.

**OSSERVAZIONE.** Per verificare che  $P$  è una proprietà topologica dati due spazi omeomorfi  $X \cong Y$ , basta in realtà verificare solo che se  $X$  ha la proprietà  $P$  allora anche  $Y$  la ha. Invece, si può verificare che due spazi **non** sono omeomorfi trovando una proprietà topologica che non condividono tra di loro.

**ESERCIZIO.** (MANETTI, 3.56)

Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $Y$  di **Hausdorff**. Se esiste  $f : X \longrightarrow Y$  continua e iniettiva, allora  $X$  è di **Hausdorff**.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Essendo  $f$  iniettiva,  $f(x) \neq f(y) \in Y$ : in quanto  $Y$  è di **Hausdorff**,  $\exists U, V$  (intorni) aperti disgiunti in  $Y$  che contengono rispettivamente  $f(x)$  e  $f(y)$ .

Per continuità di  $f$  le controimmagini di questi intorni aperti sono aperti e per iniettività sono ancora disgiunti:  $\exists f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  (intorni) aperti disgiunti che contengono rispettivamente  $x$  e  $y$ . Segue che  $X$  è di **Hausdorff**.  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.8.0.** Essere di **Hausdorff** è una proprietà topologica, ovvero:

$$X \cong Y \implies [X \text{ è di Hausdorff} \implies Y \text{ è di Hausdorff}] \quad (1.43)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  un omeomorfismo tra i due spazi. Allora  $f$  è per definizione continua e iniettiva. Per l'esercizio 1.1 (MANETTI, 3.56) segue che  $X$  di **Hausdorff**  $\implies Y$  di **Hausdorff**.  $\square$

**TEOREMA 1.8.0.**  $X, Y$  di **Hausdorff**  $\iff X \times Y$  di **Hausdorff**.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Si veda la proprietà 1.2 (MANETTI, 3.6.8).

$\impliedby$ ) Si fissi  $y_0 \in Y$ . Definita la funzione  $f : X \longrightarrow X \times Y$ , essa è continua  

$$x \longmapsto (x, y_0)$$

ed iniettiva, dunque per l'esercizio 1.1 (MANETTI, 3.56) segue che  $X$  è di **Hausdorff**.

Definito  $x_0 \in X$  e  $f : Y \longrightarrow X \times Y$ , allo stesso modo si verifica che  $Y$  è di **Hausdorff**.  

$$y \longmapsto (x_0, y)$$

$\square$

# CONNESSIONE E COMPATTEZZA

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Le due proprietà che danno il nome a questo capitolo sono estremamente importanti, in quanto sono due dei principali *invarianti* studiati in topologia. Entrambe rappresentano una *generalizzazione* di alcuni aspetti affrontati più o meno esplicitamente durante lo studio dell'Analisi:

- Ci sono sottoinsiemi del piano i cui punti possono essere *connessi* da una linea arzigogolata, una spezzata o un segmento, mente
- Ci sono sottoinsiemi *limitati* le cui successioni di punti *convergono* nel sottoinsieme.

Vedremo che la **connessione** e la **compattezza** sono definite in modo abbastanza basilare, seppur non necessariamente siano intuitive a primo acchito. Tuttavia, proprio in virtù di questa semplicità, sono applicabili in tanti contesti diversi; in particolare, la compattezza come la definiremo ci permetterà di prendere informazioni note *localmente* ed estenderle in modo che valgano globalmente in tutto lo spazio.

## 2.1 CONNESSIONE

**DEFINIZIONE 2.1.0.** SPAZIO CONNESSO E SPAZIO SCONNESSO.

Uno spazio topologico  $X$  si dice **connesso** se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono  $\emptyset$ ,  $X$ .

Uno spazio non *connesso* si dice **sconnesso** oppure **non connesso**.

**LEMMA 2.1.0.** (MANETTI, 4.2)

Sono condizioni equivalenti:

1.  $X$  è *sconnesso*.
2.  $X = A \cup B$  con  $A$ ,  $B$  aperti, non vuoti, disgiunti.
3.  $X = A \cup B$  con  $A$ ,  $B$  chiusi, non vuoti, disgiunti.

**DIMOSTRAZIONE.**

$2 \iff 3$ ) Sono equivalenti: se  $A$  è aperto e disgiunto da  $B$  tale che  $X = A \cup B$  significa che  $B = \mathcal{C}A = X \setminus A$  e dunque chiuso; analogamente per  $B$  aperto si ha che  $A$  è chiuso: allora  $A, B$  chiusi e aperti propri.

$1 \implies 2$ ) Esiste  $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$  con  $A$  aperto e chiuso. Allora basta porre  $B = \mathcal{C}A = X \setminus A$ : essendo il complementare di  $A$  è aperto e chiuso, sono disgiunti e tali per cui  $B \neq X, B \neq \emptyset$ .  $A$  e  $B$  soddisfano la tesi.

$1 \implies 2$ )  $A$  aperto,  $B$  aperto  $\implies A$  chiuso perché  $A = \mathcal{C}X = X \setminus B$ . Inoltre  $A$  non vuoto,  $B$  non vuoto  $\implies A \neq X$ . Dunque  $A$  è aperto, chiuso e  $A \neq \emptyset, X$  e pertanto soddisfa la tesi: esiste un sottoinsieme aperto e chiuso che non il vuoto o l'insieme stesso.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Il lemma 2.1 (MANETTI, 4.2) ci dice che è sufficiente trovare solo due aperti (o chiusi) che soddisfano la condizione di cui sopra per affermare la sconnessione. Viceversa, per dimostrare la connessione, dobbiamo dimostrare che per ogni coppia di aperti (o chiusi) non vuoti, la cui unione è  $X$ , essi non siano disgiunti.

**ESEMPLI.** Esempi di spazi topologici *sconnessi* in topologia Euclidea:

- $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .
- $X = [0, 1] \cup (2, 3)$ .

**LEMMA 2.1.1.** (MANETTI, 4.4)

Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$  con  $A$  aperto e chiuso. Sia  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  *connesso*. Allora  $Y \cap A = \emptyset$  (cioè  $Y \subseteq Y \setminus A$ ) oppure  $Y \subseteq A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo  $Y \cap A$ : esso è intersezione di due aperti e chiusi per ipotesi ( $Y$  è aperto e chiuso perché *connesso*), cioè è aperto e chiuso. Essendo  $Y$  *connesso*, un suo sottoinsieme aperto e chiuso o è l'insieme vuoto oppure è l'insieme stesso, cioè  $Y \cap A = \emptyset$  (cioè  $Y \subseteq Y \setminus A$ ) oppure  $Y \cap A = Y$  (cioè  $Y \subseteq A$ ).  $\square$

**TEOREMA 2.1.0.** (MANETTI, 4.6)

Con la topologia Euclidea,  $X = [0, 1]$  è *connesso*.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $X = [0, 1] = C \cup D$  con:

- $C, D$  entrambi chiusi.
- $C, D$  entrambi aperti.

Dobbiamo dimostrare che  $C, D$  *non* sono disgiunti, ovvero  $C \cap D \neq \emptyset$ . Supponiamo sia  $0 \in C$  e poniamo  $d = \inf D$ . Essendo  $D$  un chiuso,  $d \in \overline{D} = D$ .

- Se  $d = 0$ ,  $d \in C \cap D \neq \emptyset$ .
- Se  $d > 0$  allora  $[0, d) \subseteq C$  perché *non sta* in  $D$ . Il passaggio alla chiusura mantiene l'inclusione, dunque  $[0, d] \subseteq \overline{C} = C$ . Segue che  $d \in C$  e dunque  $C \cap D \neq \emptyset$ .  $\square$

**TEOREMA 2.1.1.** (MANETTI, 4.7)



L'immagine continua di un *connesso* è un *connesso*:

$$f : X \longrightarrow Y \text{ continua, } X \text{ connesso} \implies f(X) \text{ connesso} \quad (2.1)$$

**TEOREMA 2.1.2.** Sia  $Z \subseteq f(X)$ ,  $Z$  aperto, chiuso in  $f(X)$  non vuoto. Per dimostrare che  $f(X)$  sia connesso ci è sufficiente dimostrare che  $Z = f(X)$ : in questo modo gli unici aperti e chiusi sono i sottoinsiemi impropri:

- $Z$  aperto:  $\exists A$  aperto in  $Y : Z = A \cap f(X)$ .
- $Z$  chiuso:  $\exists C$  chiuso in  $Y : Z = C \cap f(X)$ .

Allora:

- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \implies f^{-1}(Z)$  è uguale alla controimmagine continua di un aperto in  $Y$ , cioè è uguale ad un aperto di  $X$ .
- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(C) \implies f^{-1}(Z)$  è uguale alla controimmagine continua di un chiuso in  $Y$ , cioè è uguale ad un chiuso di  $X$ .

Segue che  $f^{-1}(Z)$  è aperto e chiuso in  $X$ . Notiamo inoltre che, essendo  $Z \neq \emptyset$ , allora  $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$ : essendo  $X$  connesso per ipotesi, necessariamente  $f^{-1}(Z) = X$ .

**OSSERVAZIONE.** Dal teorema precedente segue che essere *connesso* è una proprietà topologica! Infatti, se vale per una qualunque funzione continua  $f : X \longrightarrow Y$ , allora varrà anche per omeomorfismi tra  $X$  e  $Y$ ; in particolare, si avrà per suriettività che  $f(X) = Y$  connesso.

### 2.1.1 Connessione per archi

**DEFINIZIONE 2.1.1. ARCO.**

Un **arco** o **cammino**  $\alpha$  da un punto  $x$  a un punto  $y$  in uno spazio topologico  $X$  è una funzione continua che parametrizza un *percorso* finito fra gli estremi  $x$  e  $y$ :

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ continua : } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \quad (2.2)$$

**DEFINIZIONE 2.1.2. CONNESSIONE PER ARCHI.**

Uno spazio topologico  $X$  si dice **connesso per archi** o **c.p.a.** o *path-connected* se per ogni coppia di punti in  $X$  esiste un arco che li collega:

$$\forall x, y \in X \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ continua : } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \quad (2.3)$$

**TEOREMA 2.1.3. (MANETTI, 4.7)**

$X$  **c.p.a.**  $\implies X$  *connesso*.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X = A \cup B$ , con  $A, B$  aperti non vuoti. Vogliamo dimostrare che  $A \cap B \neq \emptyset$ . Essendo non vuoti, prendiamo  $a \in A, b \in B$ . In quanto  $X$  è **c.p.a.**, esiste il cammino (continuo)  $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b$ .

Studiamo la controimmagine di  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(X) &= \alpha^{-1}(A \cup B) = [0, 1] \\ [0, 1] &= \alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)\end{aligned}$$

$\alpha^{-1}(A)$ ,  $\alpha^{-1}(B)$  sono entrambi aperti e non vuoti in quanto controimmagini (continue) di aperti non vuoti ( $0 \in \alpha^{-1}(A)$ ,  $1 \in \alpha^{-1}(B)$ ).

Poiché  $[0, 1]$  è connesso, allora le controimmagini trovate non sono disgiunte. Segue allora:

$$\exists t \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) \implies \alpha(t) \in \alpha(\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)) \subset \alpha(\alpha^{-1}(A)) \cap \alpha(\alpha^{-1}(B)) = A \cap B$$

□

### DEFINIZIONE 2.1.3. GIUNZIONE DI CAMMINI.

Dati due cammini in uno spazio  $X$ :

$$\begin{aligned}\alpha : [0, 1] &\longrightarrow X & \alpha(0) &= x, \alpha(1) = y \\ \beta : [0, 1] &\longrightarrow X & \beta(0) &= y, \beta(1) = z\end{aligned}$$

Allora possiamo creare un cammino  $\alpha * \beta$  con la **giunzione di cammini**:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

**LEMMA 2.1.2.** Sia  $A, B$  c.p.a,  $A \cap B \neq \emptyset \implies A \cup B$  c.p.a.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $x, y \in A$  oppure  $x, y \in B$  esiste per ipotesi un arco che li collega. Dobbiamo allora trovare un arco in  $A \cup B$  da  $x$  a  $y$   $\forall x \in A, y \in B$ . Preso  $z \in A \cap B$ , per ipotesi esistono due cammini ad esso:

$$\begin{aligned}\alpha : [0, 1] &\longrightarrow A & \alpha(0) &= x, \alpha(1) = z \\ \beta : [0, 1] &\longrightarrow B & \beta(0) &= z, \beta(1) = y\end{aligned}$$

Usando la *giunzione di cammini*, si ha:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Il cammino  $\alpha * \beta : [0, 1] \longrightarrow A \cup B$  è quello richiesto. □

### OSSERVAZIONI.

- Usando la giunzione di cammini, si ha che:

$$X \text{ è c.p.a.} \iff \exists z \in X : \forall x \in X \quad \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X : \alpha(0) = z, \alpha(1) = x$$

In altre parole, uno spazio è **c.p.a.** se e solo se esiste un punto per cui ogni altro punto è collegato tramite un arco.

- Per ogni arco  $\alpha$  esiste l'arco inverso, percorso al contrario:  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ .

**DEFINIZIONE 2.1.4. SEGMENTO.**

In  $\mathbb{R}^n$ , un **segmento**  $\overline{PQ}$  è la combinazione lineare tra i punti  $P$  e  $Q$ , parametrizzato come:

$$\overline{PQ} = \{P + tQ \mid t \in [0, 1]\} \quad (2.6)$$

**DEFINIZIONE 2.1.5. SOTTOINSIEME CONVESSO.**

Un sottoinsieme  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  è **convesso** se per ogni coppia di punti esiste un segmento che li collega contenuto interamente in  $Y$ .

$$\forall P, Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \quad (2.7)$$

**DEFINIZIONE 2.1.6. SOTTOINSIEME STELLATO.**

Un sottoinsieme  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  è **stellato** per  $P$  se esiste un  $P \in Y$  tale che per ogni altro punto esiste un segmento che li collega contenuto interamente in  $Y$ .

$$\exists P \in Y : \forall Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \quad (2.8)$$

**ESEMPL.**

- Gli intervalli aperti e semiaperti sono **c.p.a.**, dunque sono *connessi*: l'arco  $\alpha$  è banalmente il segmento pari all'intervallo aperto.
- Preso  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *convesso*, qualunque segmento è anche per costruzione un arco:  $X$  è anche **c.p.a.** e dunque *connesso*.
- $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  *non* è *convesso* (per  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  non si hanno segmenti interni ad  $X$ ) ma è **c.p.a.** (basta prendere un cammino che “giri attorno” all'origine) e dunque è *connesso*.
- Preso  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *stellato* per  $P \in X$ , qualunque segmento con  $P$  è anche per costruzione un arco:  $X$  è anche **c.p.a.** per l'osservazione 2.1 e dunque *connesso*.
- Ogni insieme *convesso* è anche *stellato* per  $P$ , basta fissare un qualunque punto come nostro  $P$ . In generale, un insieme è convesso se e solo se è stellato per ogni suo punto.

### 2.1.2 Connessione nella topologia euclidea

Vediamo ora che conseguenze hanno questi teoremi in  $\mathbb{R}$  con la topologia Euclidea.

**TEOREMA 2.1.4.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $I$  è un intervallo, ovvero  $I$  è *convesso*.
2.  $I$  è **c.p.a.**.
3.  $I$  è *connesso*.

**DIMOSTRAZIONE.**

- 1)  $\implies$  2) Siccome  $I$  è convesso  $\implies I$  stellato  $\implies I$  c.p.a.  $\implies I$  connesso.  
 2)  $\implies$  3) Vale in generale che c.p.a.  $\implies$  connesso.  
 3)  $\implies$  1) Per contronominale mostriamo che  $I$  non intervallo  $\implies I$  sconnesso.  $I$  non intervallo significa che

$$\exists a < b < c, a, c \in I, b \notin I$$

$$b \notin I \implies I = \underbrace{\left( I \cap (-\infty, b) \right)}_{\in a} \cup \underbrace{\left( I \cap (b, +\infty) \right)}_{\in c}$$

ovvero  $I$  è unione di aperti, non vuoti e disgiunti  $\implies I$  sconnesso.  $\square$

**OSSERVAZIONE.**

- Come conseguenza immediata di questo teorema si ha il **teorema di esistenza degli zeri** per funzioni continue da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , infatti se l'immagine continua di un connesso è un connesso, per tali funzioni vale che l'immagine continua di un intervallo è un intervallo.
- Per  $n \geq 1$  la sfera  $S^n := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$  è c.p.a., infatti  $\forall x, y \in S^n$  si trova sempre un arco come intersezione di  $S^n$  e del piano  $H$  passante per il centro della sfera,  $x$  e  $y$ .

Mostriamo un risultato per funzioni continue da  $S^n$  in  $\mathbb{R}$ .

**TEOREMA 2.1.5.** Sia  $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $\exists x \in S^n : f(x) = f(-x)$ . In particolare  $f$  non è iniettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Costruiamo una funzione  $g(x) = f(x) - f(-x)$ : essa è continua perché somma di funzioni continue. Siccome  $S^n$  è connesso allora  $g(S^n) \subseteq \mathbb{R}$  è connesso  $\implies$  per il teorema precedente  $g(S^n)$  è un intervallo.

Si considerino un punto  $y \in S^n$  arbitrario e le sue immagini  $g(y)$  e  $g(-y)$ : esse appartengono all'intervallo dell'immagine  $g(S^n)$ , quindi se ne può considerare il loro punto medio:

$$\frac{1}{2} [g(y) - g(-y)] = \frac{1}{2} [f(y) - f(-y) - f(y) + f(-y)] = 0$$

$$\implies \exists x \in S^n : g(x) = 0, \text{ ovvero } f(x) = f(-x)$$

$\square$

Come conseguenza di questo teorema si ha che un aperto di  $\mathbb{R}$  non sarà mai omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA 2.1.6.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ . Se  $I, U$  sono aperti allora  $I$  non è omeomorfo a  $U$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri un omeomorfismo  $g : U \longrightarrow I$ . Siccome  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto allora esiste una palla aperta di raggio  $\varepsilon$  contenuta in  $U$ , se ne considera il bordo  $S^n \subseteq U$ . Si considera dunque la restrizione  $g|_{S^n} : S^n \longrightarrow I$ , che per il teorema precedente non è iniettiva. Dunque  $g$  non è un omeomorfismo.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Il teorema appena visto è un caso particolare del TEOREMA DELL'INVARIANZA DELLA DIMENSIONE: "Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$  aperti. Se  $U \cong V \implies n = m$ . Equivalentemente  $n \neq m \implies U \not\cong V$ ".

### 2.1.3 Intersezioni, unioni e prodotti di spazi connessi

**TEOREMA 2.1.7.** Siano  $\{X_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottoinsiemi di uno spazio topologico  $X$ . Se ogni  $X_i$  è connesso e  $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$  allora  $\bigcup_{i \in I} X_i$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $Z \subseteq Y := \bigcup_{i \in I} X_i$  un aperto, chiuso non vuoto. Vogliamo dimostrare che  $Z = X$ , cosicché  $X$  risulti connesso. Basta l'inclusione  $Y \subseteq Z$ . Si considera l'intersezione di  $Z$  e di un connesso, dunque essa sarà banale:

$$X_i \cap Z = \begin{cases} \emptyset \\ X_i \end{cases}$$

Dimostriamo ora che non è vuota, infatti siccome  $Z$  non è vuoto ed è contenuto nell'unione ci sarà un connesso per cui l'intersezione non è vuota:

$$\begin{aligned} Z \neq \emptyset, Z \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i &\implies \exists i_0 : X_{i_0} \cap Z \neq \emptyset \\ X_{i_0} \text{ è connesso} &\implies X_{i_0} \cap Z = X_{i_0} \implies X_{i_0} \subseteq Z \\ \text{Siccome } \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset &\implies \exists x \in \bigcap_{i \in I} X_i \implies x \in X_{i_0} \subseteq Z \implies x \in Z \\ \text{Siccome } x \in \bigcap_{i \in I} X_i &\implies \forall i \in I, X_i \cap Z \neq \emptyset \end{aligned}$$

Quindi per  $\forall i, X_i \subseteq Z \implies Y \subseteq Z \implies Y = Z$ , quindi  $Y$  è connesso perché l'unico aperto e chiuso non vuoto è banale ( $Y$ ).  $\square$

**TEOREMA 2.1.8.**  $X, Y$  sono spazi topologici connessi  $\iff X \times Y$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\Leftarrow$ ) Si sfrutta la continuità delle proiezioni e che l'immagine continua di un connesso

è connessa:

$$p : X \times Y \longrightarrow X \text{ continua e suriettiva} \implies p(X) = X \text{ connesso}$$

$$q : X \times Y \longrightarrow Y \text{ continua e suriettiva} \implies q(Y) = Y \text{ connesso}$$

$\implies$ ) Si vuole sfruttare il teorema sull'unione di connessi, prestando attenzione che la loro intersezione non sia vuota, quindi si scrive il prodotto come unione di connessi già noti:  $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$ , infatti  $X \times \{y\} \cong X$  che per ipotesi è connesso, tuttavia

$$\bigcap_{y \in Y} X \times \{y\} = \emptyset !$$

Cerchiamo dunque di unire un insieme in modo tale che l'intersezione non sia vuota: sia  $x_0 \in X$  e  $Y_{x_0} = \{x_0\} \times Y$  e poniamo  $X_y = X \times \{y\}$  e si ha quanto voluto:

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{y \in Y} X_y \cup Y_{x_0} \text{ e } X_y \cap Y_{x_0} = (x_0, y) \\ &\implies \bigcap_{y \in Y} (X_y \cup Y_{x_0}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Dunque  $X \times Y$  è unione di connessi la cui intersezione non è vuota, quindi per il teorema precedente è connesso.  $\square$

#### 2.1.4 Spazi connessi non c.p.a.

Approfondiamo ora la differenza fra essere spazio connesso o **c.p.a.**, mostrando esempi di un tipo ma non dell'altro. Prima, però, dimostreremo un teorema sulla caratterizzazione di un *insieme denso* che ci tornerà utile.

**TEOREMA 2.1.9.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$  un suo sottoinsieme, allora:

$$A \text{ è denso} \iff \forall U \subseteq X \text{ aperto e } U \neq \emptyset, U \cap A \neq \emptyset$$

**DIMOSTRAZIONE.**  $\implies$ ) Se  $A$  è denso allora  $\overline{A} = X$ . Supponiamo che  $\exists V$  aperto :  $V \cap A = \emptyset$ . Siccome  $V$  è aperto allora  $X \setminus V$  è chiuso, inoltre  $V \cap A = \emptyset$ , quindi  $A \subseteq X \setminus V$ . Essendo  $A$  contenuto in un chiuso allora lo sarà anche la sua chiusura, siccome è il più piccolo chiuso che lo contiene:

$$\overline{A} = X \subseteq X \setminus V \implies V = \emptyset$$

Ne segue che l'unico aperto che non interseca  $A$  è l'insieme vuoto.

$\Leftarrow$ ) Consideriamo un chiuso  $K \supseteq A$ . Siccome è chiuso allora il suo complementare  $X \setminus K$  è aperto. Per ipotesi dunque si ha che  $V \cap A \neq \emptyset$  oppure  $V = \emptyset$ , passando al complementare si ottiene che:

$$\begin{aligned} A \subseteq K &\implies X \setminus K \subseteq X \setminus A \implies V \subseteq X \setminus A \implies \\ &\implies V \cap A = \emptyset \implies V = \emptyset \implies K = X \implies \overline{A} = X \end{aligned}$$

L'ultima implicazione è dovuta al fatto che ogni chiuso che contiene  $A$  si è dimostrato essere solo  $X$  per cui esso sarà la sua chiusura.  $\square$

**TEOREMA 2.1.10.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $Y \subseteq X$  connesso, allora

$$\forall W: Y \subseteq W \subseteq \overline{Y} \implies W \text{ connesso}$$

In particolare la chiusura di un connesso è connessa.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $W$  è connesso si considera un suo sottoinsieme  $Z \subseteq W$  aperto, chiuso e non vuoto e si mostra che è pari a  $W$ .

$$Z \subseteq W \text{ aperto} \implies \exists A \subseteq X \text{ aperto} : Z = W \cap A$$

$$Z \subseteq W \text{ chiuso} \implies \exists C \subseteq X \text{ chiuso} : Z = W \cap C$$

Si vuole sfruttare il fatto che  $Y$  è connesso:

$$Z \cap Y = A \cap W \cap Y \stackrel{!}{=} A \cap Y \text{ aperto in } Y \quad Z \cap Y = C \cap W \cap Y \stackrel{!}{=} C \cap Y \text{ aperto in } Y$$

Dove il passaggio indicato con (!) è dovuto al fatto che  $Y \subseteq W$ . Per poter sfruttare la connessione di  $Y$  e dedurre che  $Z \cap Y = Y$  dobbiamo prima provare che tale intersezione non è vuota e per farlo sfruttiamo il teorema precedente:

$$Y \text{ denso in } W, \text{ infatti } \text{cl}_W(Y) = \text{cl}_X(Y) \cap W = \overline{Y} \cap W = W$$

$$Z \text{ aperto in } W \implies Z \cap Y \neq \emptyset \implies Z \cap Y = Y \implies Y \subseteq Z$$

Tuttavia  $Y$  è denso in  $W$  e  $Z$  è chiuso in  $W$  che contiene  $Y$ , quindi

$$\text{cl}_W(Y) = W \subseteq Z \implies W = Z \implies W \text{ connesso}$$

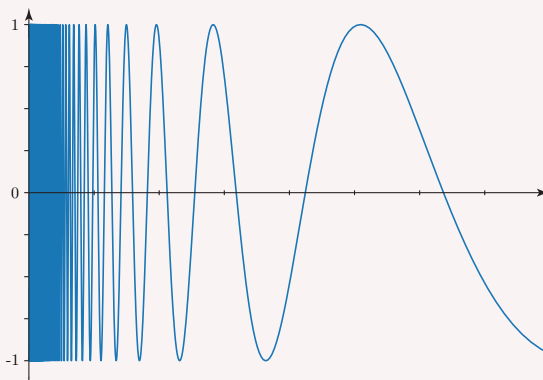
□

Vediamo ora degli esempi di spazi connessi ma non **c.p.a.**.

**ESEMPIO. SENO DEL TOPOLOGO.**

Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$  con la topologia euclidea e  $Y = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ , detto anche **seno del topologo**. Esso è **c.p.a.** perché per connettere due punti basta percorrere la curva stessa del grafico. Quindi  $Y$  è connesso, dunque per il teorema 2.11 (pag. 33)  $\overline{Y}$  è connesso.

Tuttavia  $\overline{Y}$  non è **c.p.a.** in quanto  $\overline{Y} = Y \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$  ed i punti sull'asse delle  $y$  e sulla curva  $Y$  non si possono connettere tramite un arco continuo.



**ESEMPIO. LA PULCE ED IL PETTINE.**

Si consideri il “pettine” come il seguente sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  con la topologia euclidea:

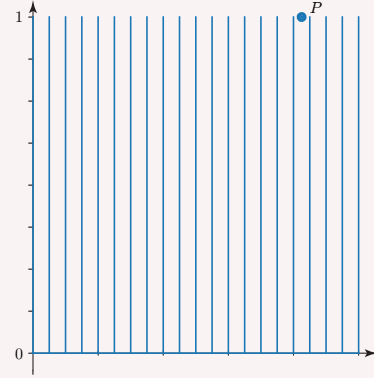
$$Y = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq r \leq 1}} \{(r, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

Presi due punti su  $Y$  si possono collegare fra loro scendendo alla base del pettine  $[0, 1]$  e risalendo sui “denti” di ascissa razionale. Quindi  $Y$  è **c.p.a.**, allora  $Y$  è connesso e  $\bar{Y} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Si consideri ora la “pulce”, ovvero un punto  $P$  di ascissa irrazionale ed ordinata 1, ad esempio  $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ . Sia  $Z = Y \cup P$ ; per il teorema precedente segue che  $Z$  è connesso, infatti:

$$Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y} = [0, 1] \times [0, 1]$$

Tuttavia  $Z$  non è **c.p.a.**: preso un cammino  $\alpha : [0, 1] \longrightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^2$  tale che  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  con  $\alpha(0) = (0, 0)$  e  $\alpha(1) = P$ , per continuità  $y(t) \neq 0 \implies x(t) \in \mathbb{Q}$ , ma è vero per  $P$  che ha ascissa irrazionale, dunque non esiste un cammino continuo che colleghi l'origine e  $P$ . Ne consegue che  $Z$  non è **c.p.a.**.



**OSSERVAZIONE.** L'immagine continua di uno spazio **c.p.a.** è **c.p.a.**, ovvero dato  $X$  **c.p.a.**,  $f : X \longrightarrow Y$  continua, allora  $f(X)$  è **c.p.a.**.

Dati  $a, b \in X$  si vuole trovare un cammino fra  $f(a)$  e  $f(b)$  in  $f(X)$ . Si consideri la composizione seguente fra il cammino  $\alpha$  fra  $a$  e  $b$  con la funzione  $f$  stessa. Siccome ha come dominio  $[0, 1]$  ed è continua essendo composizione di funzione continue è in effetti un cammino fra le due immagini:

$$f \circ \alpha : [0, 1] \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y$$

### 2.1.5 Componenti connesse

L'intuizione geometrica che ci ha portati alla definizione di connessione è stata “di quanti pezzi è fatto uno spazio?”. Se uno spazio è connesso è fatto di un solo “pezzo”, cerchiamo ora di definire cosa sono i “pezzi” e come sono fatti.

**DEFINIZIONE 2.1.7. COMPONENTE CONNESSA.**

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $C \subseteq X$ . Si dice che  $C$  è una **componente connessa** se:

- $C$  è connesso.
- $C$  è **massimale**, ovvero  $C \subseteq A$ ,  $A$  connesso  $\implies C = A$ .

Scelto  $x \in X$  si può definire la **componente connessa di un punto**, ovvero:

$$C(x) = \bigcup \{C \mid C \text{ connesso}, x \in C\} \quad (2.9)$$

La componente connessa di *un punto* è effettivamente una componente connessa: infatti, è connessa perché unione di connessi con intersezione *non vuota* ( $x$  stesso) e se  $C(x) \subseteq A \implies x \in A \implies A \subseteq C(x) \implies A = C(x)$ .

Vediamo ora qualche proprietà delle componenti connesse, in particolare che sono chiuse e formano una partizione.

**TEOREMA 2.1.11.** Sia  $X$  uno spazio topologico, allora:

1. le componenti connesse sono chiuse.
2. le componenti connesse formano una partizione di  $X$ .



**DIMOSTRAZIONE.**

- I Sia  $C$  una componente connessa. Per ogni insieme vale che  $C \subseteq \overline{C}$ , ma  $C$  è connesso, quindi  $\overline{C}$  è connesso. Siccome  $C$  è massimale allora  $C = \overline{C}$ , ovvero è chiuso.
- II Per dimostrare che le componenti connesse formano una partizione di  $X$  dobbiamo mostrare che  $X$  è unione disgiunta delle componenti connesse. Prima di tutto dimostriamo che sono un ricoprimento

$$\forall x \in X, x \in C(x) \implies X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Mostriamo ora che sono disgiunti prendendo due componenti connesse  $C$  e  $D$  ed analizzando il caso in cui la loro intersezione non è vuota, in particolare sfruttiamo la massimalità:

$$C \cap D \neq \emptyset \implies C \cup D \text{ connesso} \implies C = C \cup D = D$$

□

**ESEMPIO.** Sia  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  con la topologia Euclidea. Le componenti connesse di  $\mathbb{Q}$  sono i punti, quindi i punti sono chiusi in  $\mathbb{Q}$ , il che è una riconferma dato che sappiamo che  $\mathbb{Q}$  è Hausdorff. Tuttavia non possono essere aperti altrimenti avremmo la topologia discreta!

Inoltre siccome  $\mathbb{Q}$  ha più di una componente connessa significa che non è connesso! Invece  $\mathbb{R}$  è connesso grazie all'assioma di completezza.

**OSSERVAZIONE.** Dati due spazi omeomorfi si ha che hanno lo stesso numero di componenti connesse in quanto l'immagine continua di connessi è connessa. Quindi il **numero di componenti connesse** ci fornisce un criterio per determinare quando due spazi non sono omeomorfi!

## 2.2 COMPATTEZZA

**DEFINIZIONE 2.2.0.** RICOPRIMENTO APERTO E SOTTORICOPRIMENTO.

Sia  $X$  uno spazio topologico. Un **ricoprimento aperto** di  $X$  è una famiglia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  di aperti di  $X$  tali che  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ .

Un **sottoricoprimento**  $\mathcal{B}$  di un ricoprimento aperto  $\mathcal{A}$  è una famiglia di aperti di  $\mathcal{A}$  la cui unione è ancora tutto  $X$ .

**ESEMPLI.** ESEMPLI DI RICOPRIMENTI APERTI.

- $\mathbb{R} = (-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$  è un ricoprimento aperto
- $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, -n)$  è un ricoprimento aperto
- $\mathbb{R} = \bigcup_{p \text{ primo}} (-p, p)$  è un ricoprimento aperto

**DEFINIZIONE 2.2.1.** SPAZIO COMPATTO.

Uno spazio topologico  $X$  si dice **compatto** se dato un qualsiasi ricoprimento aperto  $\mathcal{A}$  si può sempre estrarre un sottoricoprimento *finito*  $\mathcal{B}$ .

L'importanza della definizione risiede nel fatto che non si chiede che esista un ricoprimento  $\mathcal{A}$  finito (basterebbe banalmente  $X$  stesso che è aperto) bensì che da  $\mathcal{A}$  si possa sempre estrarre un *numero finito di aperti* che ricopra ancora  $X$ .

**ESEMPLI.** ESEMPLI DI SPAZI NON COMPATTI.

- $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea: se si considera il ricoprimento aperto  $\mathbb{R} = (-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$ , esso non ammette sottoricoprimento finito.
- Gli intervalli aperti o semiaperti della forma  $[a, b)$  hanno come ricoprimento aperto  $\mathcal{A} = \left\{ \left[ a, b - \frac{1}{n} \right) \right\}$ , che non ammette un sottoricoprimento finito.

**TEOREMA 2.2.0.** L'immagine *continua* di un compatto è un compatto: dati  $X, Y$  spazi topologici,  $f : X \longrightarrow Y$  continua, allora

$$X \text{ compatto} \implies f(X) \text{ compatto}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Considerato un ricoprimento aperto di  $f(X)$ , si vuole trovare un sottoricoprimento finito tramite le controimmagini di  $f$  in modo da sfruttare così la compattezza di  $X$ .

Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  ricoprimento di  $f(X)$ , allora  $\forall i \in I, A_i \subseteq Y$  aperto e  $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq f(X)$ .

Si considerino ora le controimmagini, che saranno aperte perché  $f$  è continua:  $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A_i)\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Tuttavia  $X$  è compatto, quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito:

$$X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n) \implies f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \implies f(X) \text{ compatto}$$

Da questo teorema segue che essere compatti è una **proprietà topologica**. □

**TEOREMA 2.2.1.** L'intervallo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  con la topologia euclidea è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$  con  $A_i$  aperti in  $\mathbb{R}$ , quindi  $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ .

Sia  $X = \{t \in \mathbb{R} \mid [0, t] \text{ è coperto da un numero finito di } A_i\}$ . Mostriamo che non è vuoto

$$t = 0, [0, 0] = \{0\} \subseteq A_{i=0} \implies 0 \in X \implies X \neq \emptyset$$

Siccome  $X$  non è vuoto per la completezza dei reali ne posso considerare l'estremo superiore  $b = \sup X$ . Ci sono due casi:  $b > 1$  e  $b \leq 1$ , dimostriamo che il primo è possibile e che il secondo è assurdo sfruttando le proprietà dell'estremo superiore:

- $b > 1 \implies \exists t \in X: 1 < t < b \implies [0, 1] \subseteq [0, t] \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$
- $b \leq 1 \implies b \in [0, 1] \implies \exists A_0 \in \mathcal{A}: b \in A_0$ , visto che  $\mathcal{A}$  è un ricoprimento aperto  $A_0$  è aperto, dunque contiene  $b$  con tutto un suo intorno, ovvero  $\exists \delta > 0: B_\delta(b) = (b - \delta, b + \delta) \subseteq A_0$ . Mostriamo ora che  $A_0$  non copre solo  $[0, b]$  ma

va oltre, quindi si ottiene l'assurdo che  $b \neq \sup X$ . Sia dunque  $0 < h < \delta$ , allora

$$[0, b+h] = [0, t] \cup [t, b+h] \subseteq \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n}_{t \in X} \cup \underbrace{A_0}_{B_\delta(b) \subseteq A_0}$$

Quindi  $b+h$  è coperto da un numero finito di aperti, il che implica che  $b+h \in X$ , il che è assurdo perché  $b = \sup X$ .  $\square$

Notiamo che questo teorema implica che un intervallo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  è compatto, infatti è omeomorfo a  $[0, 1]$  e la compattezza è una proprietà topologica.

Vediamo ora un esempio di spazio compatto che non abbia la topologia euclidea.

**ESEMPIO.** Uno spazio  $X$  con la topologia cofinita è compatto.

Ricordiamo che gli aperti nella topologia cofinita sono i sottoinsiemi il cui complementare è finito, quindi un ricoprimento aperto sarà della forma:

$$\mathcal{A} = \{A_i\}, \quad A_0 = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

Si considerino gli  $A_i$  che contengano i punti  $x_i$  che non sono in  $A_0$ , ovvero:

$$A_i \in \mathcal{A}: x_i \in A_i \implies X = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$$

**OSSERVAZIONE.** Notiamo che se  $X$  è finito allora  $X$  è compatto per qualsiasi topologia, in quanto se la sua cardinalità è finita allora lo sarà anche quella del suo insieme delle parti, dai cui elementi scelgo gli aperti di una topologia. Dunque i casi interessanti di spazi compatti sono quelli il cui insieme di sostegno *non è finito*.

Inoltre, se  $X$  ha la topologia discreta vale anche il viceversa:

$$X \text{ top. discreta} \implies (X \text{ compatto} \iff X \text{ finito})$$

Sia  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$ ,  $A_x := \{x\}$ , che è aperto in quanto  $X$  ha la topologia discreta. Siccome  $X$  è compatto allora esiste un sottoricoprimento finito, ovvero un numero finito di aperti di  $\mathcal{A}$  che lo ricopra, ossia  $X = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \implies X$  finito.

### 2.2.1 Relazioni fra compattezza e altre proprietà topologiche

#### TEOREMA 2.2.2. MANETTI 4.41.1

Un chiuso in un compatto è un compatto, ovvero se  $X$  è uno spazio topologico compatto,  $C \subseteq X$  chiuso allora  $C$  è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di  $X$ , sia  $C \subseteq X$  chiuso, allora  $A := X \setminus C$  è aperto in  $X$ .

Sia  $\mathcal{A}' = \{A_i, A\}$  ricoprimento aperto di  $X$ . Siccome  $X$  è compatto esiste un suo sottoricoprimento finito

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A \implies C = X \setminus A = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

ovvero  $C$  è compatto.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** MANETTI, 4.41.2 L'unione finita di compatti è un compatto, ovvero se  $K_1, \dots, K_n$  sono compatti allora  $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$  è compatto, infatti basta prendere l'unione dei sottoricoprimenti finiti.

Vediamo ora che relazione c'è fra le due proprietà topologiche di essere uno spazio di **Hausdorff** (T2) e compatto.

**TEOREMA 2.2.3. Compatto in un Hausdorff è chiuso** MANETTI, 4.48

Se  $X$  è di Hausdorff e  $K \subseteq X$  è compatto, allora  $K$  è chiuso.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $K$  è chiuso mostriamo che il suo complementare è aperto, ovvero che è intorno di ogni suo punto, in modo tale da poter usare agilmente l'essere di **Hausdorff**.

$$\begin{aligned} K \text{ chiuso} &\iff X \setminus K \text{ aperto} \iff \exists A \subseteq X \setminus K \text{ aperto} : x_0 \in A \\ A \subseteq X \setminus K &\iff A \cap K = \emptyset \end{aligned}$$

Per poter sfruttare che  $X$  è di **Hausdorff** scriviamo  $A$  come intorno di  $x_0$  e  $K$  come intorno di  $y$ :

$$\begin{aligned} x_0 \in X \setminus K, y \in K &\xrightarrow{X \text{ T}_2} x \neq y \implies \exists U_y \in I(x_0), \exists V_y \in I(y) : U_y \cap V_y = \emptyset \\ \text{Sia } V &= \bigcup_{y \in K} V_y \implies V \supseteq K \xrightarrow{K \text{ compatto}} V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} \\ \text{Sia } U &= U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n} \in I(x_0) \\ \implies V_{y_i} \cap U_{y_i} &= \emptyset \implies V \cap K = \emptyset \implies U \subseteq X \setminus K \end{aligned}$$

□

**TEOREMA 2.2.4.** MANETTI, 4.42

Un sottospazio  $K \subseteq \mathbb{R}$  è compatto  $\iff K$  chiuso e limitato.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Siccome  $\mathbb{R}$  è di **Hausdorff** e  $K$  è compatto allora per il teorema precedente  $K$  è chiuso.

Per vedere che è limitato consideriamo un ricoprimento aperto  $\mathcal{A} = \{(-n, n) \cap K\}_{n \in \mathbb{N}}$  di  $K$ . Siccome è compatto allora esiste un sottoricoprimento finito, ovvero:

$$K \subseteq (-n_1, n_1) \cup \dots \cup (-n_m, n_m) \implies K \subseteq (-M, M), M := \max m_i$$

quindi  $K$  è limitato.

$\Leftarrow$ )  $K$  è limitato, quindi  $K \subseteq [-n, n]$ , che è compatto e  $K$  è chiuso per ipotesi, dunque per il teorema 2.15 è compatto. □

**OSSERVAZIONE.** Da notare che il teorema precedente non afferma che gli unici compatti di  $\mathbb{R}$  sono gli intervalli chiusi e limitati, ma anche una loro unione finita potrebbe esserlo.

**TEOREMA 2.2.5.** MANETTI, 4.43

Sia  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $X$  compatto e  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea. Se  $f$  è continua allora ammette massimo e minimo.

**DIMOSTRAZIONE.**  $f$  continua e  $X$  compatto  $\implies f(X)$  compatto, e per il teorema precedente ciò equivale al fatto che  $f(X)$  è chiuso e limitato.

$$\left. \begin{array}{ll} f(x) \text{ limitata} & \implies \sup \{f(x)\} < +\infty \\ f(x) \text{ chiusa} & \implies \sup \{f(x)\} = \max \{f(x)\} \end{array} \right\} \implies f(x) \text{ ammette massimo.}$$

Analogamente per il minimo. □

**OSSERVAZIONE.** Per poter parlare di massimo e minimo c'è bisogno di un *ordinamento* sul codominio, mentre il dominio  $X$  potrebbe anche non averne uno!

Vogliamo ora vedere come si comporta la compattezza rispetto al prodotto, prima però va dimostrato un lemma che ci tornerà utile nella dimostrazione del teorema.

**LEMMA 2.2.0.** TUBE LEMMA

Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $Y$  compatto,  $x_0 \in X$ ,  $A \subseteq X \times Y$ :  $A$  aperto e  $\{x_0\} \times Y \subseteq A$ . Allora  $\exists U \subseteq X$  con  $x_0 \in U$ , aperto tale che  $\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq A$

**DIMOSTRAZIONE.**  $A$  aperto in  $X \times Y \implies A = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$  aperti della base, quindi  $\{U_i \times V_i\}$  è un ricoprimento aperto di  $\{x_0\} \times Y \cong Y$  compatto, dunque esiste un sottoricoprimento finito  $\{x_0\} \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \dots \cup (U_n \times V_n)$ . Se necessario si eliminano gli aperti che sono disgiunti da  $\{x_0\} \times Y$  e poniamo  $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$ , allora

$$\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \dots \cup (U_n \times V_n) \subseteq A$$

□

**TEOREMA 2.2.6.** MANETTI, 4.49.2

$X, Y$  compatti  $\iff X \times Y$  è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\Leftarrow$ ) Si considerino le proiezioni, che sono funzioni continue. Essendo  $X \times Y$  compatto allora le immagini delle proiezioni saranno compatte, ed essendo le proiezioni suriettive allora  $X, Y$  sono compatti.

$\Rightarrow$ ) Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  un ricoprimento aperto di  $X \times Y$ , cerchiamo un sottoricoprimento finito.

Per sfruttare la compattezza di  $Y$  notiamo che  $Y \cong \{x\} \times Y \subseteq A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n} = A_x$ , che possiamo pensare come sottoricoprimento “verticale” finito. Notiamo inoltre che gli  $A_{x_i}$  dipendono dalla  $\{x\}$  scelta.

Per il Tube Lemma dimostrato sopra allora

$$\exists U_x \subseteq X \text{ aperto} : \{x\} \times Y \subseteq U_x \times Y \subseteq A_x = A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}$$

Tuttavia  $X$  è compatto, dunque  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$  unione finita, sfruttando le proiezioni si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned} X \times Y &= p^{-1}(X) = p^{-1}(U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}) = (U_{x_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{x_n} \times Y) \subseteq \\ &\subseteq (A_{x_1,1} \cup \dots \cup A_{x_1,n_1}) \cup \dots \cup (A_{x_m,1} \cup \dots \cup A_{x_m,n_m}) \end{aligned}$$

□

Sfruttiamo ora che il prodotto di compatti è compatto per generalizzare il teorema 2.17 allo spazio  $\mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA 2.2.7.**  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto  $\iff K$  chiuso e limitato.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ )  $K$  è compatto in  $\mathbb{R}^n$  che è un Hausdorff, quindi  $K$  è chiuso per il teorema 2.16. Per dimostrare che è limitato consideriamo un ricoprimento di palle aperte centrate nell'origine e si sfrutta subito che  $K$  è compatto

$$K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(\mathbf{0}) \implies K \subseteq B_{n_1}(\mathbf{0}) \cup \dots \cup B_{n_m}(\mathbf{0}) \subseteq B_M(\mathbf{0})$$

con  $M = \max n_i$ .

$\impliedby$ )  $K$  è limitato, quindi  $K \subseteq [-a, a]^n$  che è compatto perché prodotto di compatti, ma  $K$  è anche chiuso, quindi per il teorema 2.15 è compatto. □

**DIGRESSIONE.** In realtà vale un teorema più generale, che si dimostrerà poi nel corso di Istituzioni di Analisi. **TEOREMA:** Sia  $X$  uno spazio metrico completo, allora  $K \subseteq X$  compatto  $\iff K$  chiuso e totalmente limitato, ovvero  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $K$  è contenuto in un'unione finita di palle di raggio  $\varepsilon$ .

In  $\mathbb{R}^n$  vale limitato  $\iff$  totalmente limitato, ma ad esempio consideriamo lo spazio metrico:

$$\mathcal{C}([0, 1]) := \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \right\}, \text{ con } d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

Una palla di centro  $\mathbf{0}$  e raggio 1 come:

$$B_1(\mathbf{0}) = \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}, -1 \leq f(x) \leq 1 \right\}$$

È chiusa e limitata, tuttavia in  $\mathcal{C}([0, 1])$  non è compatta.

**TEOREMA 2.2.8.** FUNZIONE CONTINUA DA COMPATTO AD HAUSDORFF È CHIUSA. (MANETTI 4.52)

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua con  $X$  compatto e  $Y$  di Hausdorff, allora  $f$  è chiusa.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $f$  è chiusa consideriamo  $C \subseteq X$  chiuso e mostriamo

che  $f(C)$  è chiuso sfruttando rispettivamente i teoremi 2.15, 2.13 e 2.16:

$C \subseteq X$  chiuso in compatto  $\implies C$  compatto  $\implies f(C)$  compatto in  $\mathbf{T}_2 \implies f(C)$  chiuso

□

In generale vale il **teorema di Kuratowski-Mrówka**:  $Y$  è compatto se e solo se per qualsiasi spazio topologico  $X$  la proiezione  $p_X : X \times Y \longrightarrow X$  è chiusa; noi ne dimostreremo una versione più debole.

**TEOREMA 2.2.9.** MANETTI, 4.49.1

Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $Y$  compatto, allora la proiezione  $p : X \times Y \longrightarrow X$  è chiusa.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $p$  è chiusa mostriamo che preso un  $C \subseteq X \times Y$  chiuso allora  $p(C) \subseteq X$  è chiuso, ovvero che il suo complementare  $X \setminus p(C)$  è intorno di ogni suo punto.

Se  $p(C) = X$  allora è già chiuso, se invece  $p(C) \neq X$  allora  $\exists x_0 \in X \setminus p(C)$ , dimostriamo che quest'ultimo insieme è intorno di  $x_0$ . Si consideri la fibra di  $x_0$ :

$$p^{-1}(\{x_0\}) = \{x_0\} \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus C = A$$

con  $A$  aperto perché complementare di un chiuso.

Si rientra dunque nelle ipotesi del Tube lemma e si ottiene che

$$\exists U \subseteq X \text{ aperto} : p^{-1}(U) = U \times Y \subseteq A \implies U \cap p(C) = \emptyset \implies x_0 \in U \subseteq X \setminus p(C)$$

□





# GRUPPI TOPOLOGICI

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Nel Capitolo 1 abbiamo definito la struttura di *spazio topologico* su un insieme con lo scopo principale di poter definire formalmente la *continuità* di una funzione. Un’altro tipo di struttura fondamentale per la Matematica è quella di *gruppo*, un insieme dotato di una *operazione binaria* che soddisfa le condizioni di chiusura, associatività, identità ed invertibilità.

In questo capitolo studieremo il **gruppo topologico**, un oggetto matematico che è dotato contemporaneamente sia di una struttura di *gruppo*, sia di una di *spazio topologico*. In questo modo, potremo eseguire operazioni algebriche e parlare di continuità allo stesso tempo. Vedremo inoltre le relazioni fra alcune proprietà che abbiamo già visto e questo nuovo oggetto di studio.

## 3.1 GRUPPI TOPOLOGICI

Conoscendo le strutture di *gruppo* e *spazio topologico* su un insieme, vogliamo vedere come possono essere *compatibili* fra loro.

**DEFINIZIONE 3.1.0.** GRUPPO TOPOLOGICO.

Un insieme  $G$  si dice **gruppo topologico** se:

- $G$  è un *gruppo*.
- $G$  è uno *spazio topologico*.
- L’operazione e l’inverso sono funzioni *continue*:

$$\begin{array}{ll} \mu : G \times G \longrightarrow G & i : G \longrightarrow G \\ (x, y) \longmapsto x \cdot y & x \longmapsto x^{-1} \end{array} \quad (3.1)$$

Vediamo ora degli esempi noti di gruppi topologici.

**ESEMPI.**

- $(\mathbb{R}^n, +, \mathcal{E}_{uc\ell}), (\mathbb{C}^n, +, \mathcal{E}_{uc\ell})$ .
- $(\mathbb{R}^*, \cdot, \mathcal{E}_{uc\ell}), (\mathbb{R}^*, \cdot, \mathcal{E}_{uc\ell})$  con la topologia indotta di sottospazio.
- $(M_{n,m}(\mathbb{R}), \cdot, \mathcal{E}_{uc\ell})$  con la topologia indotta di sottospazio di  $\mathbb{R}^{n,m}$ , ad es.  $[0, 1]$ .

**OSSERVAZIONE.** I gruppi topologici  $GL(n, \mathbb{R})$  e  $GL(n, \mathbb{C})$  sono aperti di  $M_{n,n}$ .

Infatti, considerata la funzione del *determinante*  $\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  essa è continua in quanto per calcolare il determinante si opera solo con somme e prodotti.

Si ha che  $GL(n, \mathbb{R})$  è il complementare dell'insieme delle matrici che hanno determinante nullo, il quale è un chiuso in quanto controimmagine di un chiuso quale  $\{0\}$  di una funzione continua. Dunque tale gruppo topologico è aperto, e analogamente vale per il caso con  $\mathbb{C}$ .

Vediamo ora altri sottoinsiemi di  $M_{n,n}$ :

- $SL$ , dato da  $\{\det A = 1\}$ , è il *gruppo speciale lineare*.
- $O$ , determinato dall'equazione  $A^t A = I$ , è il *gruppo ortogonale*.
- $SO = O \cap SL$  è il *gruppo speciale ortogonale*.
- $U$ , determinato dall'equazione  $A^{t*} \bar{A} = I$ , è il *gruppo unitario*.
- $SU = U \cap SL$  è il *gruppo speciale unitario*.

Ci sono delle operazioni sulle matrici che sono continue:

- *Moltiplicazione matriciale*: continua perché definita tramite somme e prodotti di elementi delle matrici
- *Inversa*: è una funzione che ad una matrice  $A$  associa  $\frac{1}{\det A}$  per prodotti e somme di elementi della matrice, in particolare è continua.

**OSSERVAZIONE.** Per i gruppi topologici in generale vale la *moltiplicazione destra e sinistra*:

$$\begin{array}{ccc} L_h : G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & hg \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} R_h : G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & gh \end{array}$$

$$(L_h)^{-1} = L_{h^{-1}} \text{ e } (R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$$

In particolare sono omeomorfismi. Ne segue che un gruppo topologico è **omogeneo**, ovvero:

$$\forall g, h \in G \exists \varphi : G \longrightarrow G \text{ omeomorfismo : } \varphi(g) = h$$

Infatti, basta porre  $\varphi = L_{hg^{-1}}$  oppure  $\varphi = R_{g^{-1}h}$ .

Il seguente teorema ci permette di caratterizzare i gruppi topologici di **Hausdorff** grazie alla chiusura dell'elemento neutro.

**TEOREMA 3.1.0.** Sia  $G$  un gruppo topologico,  $e \in G$  il suo elemento neutro, si ha che:

$$G \text{ di Hausdorff} \iff \{e\} \text{ chiuso}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ )  $G$  di **Hausdorff**  $\implies G T_1 \implies$  tutti i punti sono chiusi, in particolare anche  $\{e\}$ .

$\impliedby$ ) Per dimostrare che  $G$  è di **Hausdorff** si utilizza la caratterizzazione con la

diagonale chiusa, sfruttando l'omogeneità dei gruppi topologici:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh^{-1} \end{aligned} \quad , \quad (g, h) = (h, g) \iff g = h \iff \varphi((g, h)) = gh^{-1} = e \\ \implies \Delta_G = \varphi^{-1}(\{e\})$$

Per ipotesi  $\{e\}$  è chiusa, quindi  $\Delta_G$  è chiuso e dunque  $G$  è di **Hausdorff**.  $\square$

**OSSERVAZIONE.**  $GL(n, \mathbb{R})$  è sconnesso. Mostriamo che è unione di due aperti non vuoti disgiunti sfruttando la funzione determinante  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ , infatti essendo continua le controimmagini di aperti saranno aperti:

$$\begin{aligned} \det^{-1}((0, +\infty)) &= GL^+(n, \mathbb{R}) \\ \det^{-1}((-\infty, 0)) &= GL^-(n, \mathbb{R}) \end{aligned} \implies GL(n, \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \sqcup GL^-(n, \mathbb{R})$$

Dimostriamo un lemma che generalizza il teorema 2.8 e che ci sarà utile nella dimostrazione successiva sulla connessione di alcuni gruppi topologici.

**LEMMA 3.1.0. MANETTI 4.18**

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua. Se  $f$  è suriettiva aperta o chiusa,  $Y$  è connesso e le fibre sono connesse, ovvero se  $\forall y \in Y$   $f^{-1}(y)$  è connesso, allora  $X$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $f$  sia aperta e consideriamo  $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$  aperti (per  $f$  chiusa si considerano dei chiusi e si procede in modo analogo) t.c.  $X = A_1 \cup A_2$ . Per dimostrare che  $X$  è connesso mostriamo che  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ :

$$\begin{aligned} f \text{ aperta} &\implies f(A_1), f(A_2) \text{ aperti} \\ f \text{ suriettiva} &\implies f(X) = Y \implies f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) = Y \\ Y \text{ connesso} &\implies f(A_1) \cap f(A_2) \neq \emptyset \implies \exists y_0 \in f(A_1) \cap f(A_2) \implies \begin{cases} f^{-1}(y_0) \cap A_1 \neq \emptyset \\ f^{-1}(y_0) \cap A_2 \neq \emptyset \end{cases} \\ &\implies \left( (f^{-1}(y_0) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y_0) \cap A_2) = f^{-1}(y_0) \right) \implies f^{-1}(y_0) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \implies \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} (f^{-1}(y_0) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y_0) \cap A_2) = f^{-1}(y_0) \\ \text{fibre connesse} \end{array} \right. \\ &\implies A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \end{aligned}$$

$\square$

**TEOREMA 3.1.1.**  $\forall n \geq 1$ ,  $GL^+(n, \mathbb{R})$  e  $GL(n, \mathbb{C})$  sono connessi.

**DIMOSTRAZIONE.** Si procede per induzione su  $n$  per  $GL^+(n, \mathbb{R})$ , il caso  $GL(n, \mathbb{C})$  è analogo.

$$n = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} GL^+(1, \mathbb{R}) = (0, +\infty) \\ GL(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{array} \right. \text{ connessi.}$$

$n > 1$  ) Supponiamo che  $GL^+(n-1, \mathbb{R})$  sia connesso e dimostriamo che lo è anche  $GL(n, \mathbb{R})$ . Cerchiamo dunque una funzione continua da  $GL^+(n, \mathbb{R})$  a  $GL(n-1, \mathbb{R})$  che soddisfi le ipotesi del lemma precedente. Pertanto si considera la funzione prima

colonna  $p : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  che mappa la prima colonna di  $A$ . Siccome  $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n-1}$  allora  $p$  è una proiezione, dunque per il punto 2 della proposizione 1.4 è aperta. Restringiamo ora  $p$  a  $GL^+(n, \mathbb{R})$  nel modo seguente  $p : GL^+(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  che è una funzione continua, suriettiva e aperta, inoltre  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è connesso per  $n > 1$ . Calcoliamo ora le fibre e mostriamo che sono tutte omeomorfe fra loro e connesse, quindi prima ne troviamo una, mostriamo che è connessa poi dimostriamo che sono tutte omeomorfe. A questo scopo consideriamo il seguente vettore e la sua fibra

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \implies p^{-1}(y_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right\}$$

con  $(*, \dots, *) \in \mathbb{R}^{n-1}$  arbitrario in quanto non influisce nel calcolo del determinante e con  $A \in GL^+(n-1, \mathbb{R})$ , da cui segue che  $p^{-1}(y_0) = \mathbb{R}^{n-1} \times GL^+(n-1, \mathbb{R})$ , dunque  $p^{-1}(y_0)$  è connesso visto che i due fattori lo sono per ipotesi.

Mostriamo ora che tutte le fibre sono omeomorfe a  $p^{-1}(y_0)$ . Sia  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e sia  $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$  tale che  $p(A) = y$ , ovvero  $y$  è la prima colonna di  $A$ . In generale vale la relazione  $p(AB) = Ap(B)$  e la moltiplicazione sinistra  $L_A : GL^+(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$   
 $B \longmapsto AB$

è un omeomorfismo. Dimostriamo che vale  $p^{-1}(y) = L_A(p^{-1}(y_0)) = Ap^{-1}(y_0)$ , in modo tale da avere tutte le fibre omeomorfe fra loro:

$$\begin{aligned} \supseteq \quad B \in p^{-1}(y_0) &\implies B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \implies p(AB) = Ap(B) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = p(A) = y \\ \subseteq \quad C \in p^{-1}(y) &\implies C = \begin{pmatrix} y & * & \cdots & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poniamo allora  $B = A^{-1}C$ :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A^{-1}C) = A^{-1}p(C) = A^{-1}y = A^{-1}p(A) = \\ &= p(A^{-1}A) = p(I) = y_0 \end{aligned}$$

Poiché  $C = AB$ , allora  $B \in p^{-1}(y_0)$ .

Quindi, siccome tutte le fibre sono tutte omeomorfe ad una fibra connessa, allora sono tutte connesse e valgono le ipotesi del lemma precedente, per cui  $GL^+(n, \mathbb{R})$  è connesso.  $\square$

**COROLLARIO 3.1.0.**  $SL(n, \mathbb{R})$  e  $SL(n, \mathbb{C})$  sono connessi.

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $GL^+(n, \mathbb{R})$  e  $GL(n, \mathbb{C})$  sono connessi, basta considerare la se-

guente funzione:

$$f : GL^+(n, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(n, \mathbb{R})$$

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{\det A} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{\det A} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Siccome  $f$  è continua e suriettiva e  $GL^+(n, \mathbb{R})$  è connesso allora  $f(GL^+) = SL$  è connesso.  $\square$

**COROLLARIO 3.1.1.**  $O$  non è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $O$  è sottogruppo di  $GL$  e la connessione è una proprietà topologica allora  $O$  non è connesso. In particolare si può dividere in base a  $\det = +1$  e  $\det = -1$ .  $\square$

**TEOREMA 3.1.2.**  $SO(n), U(n)$  e  $SU(n)$  sono compatti e connessi.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che sono *compatti* essendo sottospazi di  $\mathbb{R}^{n \times n}$  per il teorema 2.20 basta dimostrare che sono chiusi e limitati. In particolare essendo definiti tramite equazioni che sono luoghi di zeri di polinomi in  $a_{ij}$  allora sono chiusi:

$$SO(n) : \begin{cases} A^t A = I \\ \det A = 1 \end{cases}, \quad U(n) : A^t \bar{A} = I, \quad SU(n) : \begin{cases} A^t \bar{A} = I \\ \det A = 1 \end{cases}$$

Siccome  $SU(n) \subseteq U(n) \subseteq SO(n)$  basta dimostrare che  $SO(n)$  è limitato:

$$A \in SO(n) \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1, \forall i = 1, \dots, n \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = n \implies SO(n) \subseteq S_{\sqrt{n}} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$$

dove  $S_{\sqrt{n}}$  è la sfera di raggio  $\sqrt{n}$ , dunque  $SO(n)$  è limitato. Ne segue che anche  $U(n)$  e  $SU(n)$  lo sono, dunque sono tutti chiusi e limitati in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , quindi compatti.

Per dimostrare che sono *connessi* si procede analogamente al teorema precedente sfruttando il lemma che lo precede. Si consideri  $p : SO(n) \longrightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  funzione prima colonna, essa è continua, suriettiva e chiusa in quanto è un compatto (appena dimostra-

ti) in un **Hausdorff**, e le sue fibre sono connesse  $p^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$  con  $A \in SO(n-1)$ , dunque per il lemma precedente  $SO(n)$  è connesso.  $\square$

**OSSERVAZIONE.**  $GL$  e  $SL$  non sono compatti perché non sono limitati, inoltre  $GL$  è aperto e non chiuso.



# TOPOLOGIA QUOZIENTE

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Riprendiamo l’oggetto *elasticamente magico* con cui abbiamo introdotto il Capitolo 1: fra tutte le deformazioni che potevamo fare, *incollare* parti di esso *non* era consentito. E se invece provassimo a farlo? Quello che otterremo non è più uno spazio “*equivalente*” per un topologo a quello originale, ma comunque con molte proprietà interessanti da studiare. La **topologia quoziente** formalizza questo concetto euristico di “*incollare parti*” utilizzando le *relazioni di equivalenza*; con il tipico approccio della Topologia Generale, faremo ciò dando delle semplici (seppur inizialmente poco intuitive) condizioni sulla continuità in modo da definire la topologia più adatta per l’*insieme quoziente*.

## 4.1 TOPOLOGIA QUOZIENTE

Accenniamo fin da subito che la situazione è *duale* rispetto a quella dei sottospazi, analizzati nella sezione 1.5, pag. 14.

### DEFINIZIONE 4.1.0. TOPOLOGIA QUOZIENTE.

Dato  $X$  uno spazio topologico,  $Y$  un *insieme* e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione suriettiva, la **topologia quoziente** su  $Y$  indotta da  $f$  è la topologia *più fine* che rende  $f$  continua.

Analizziamo ora chi sono i suoi aperti:  $A \subseteq Y$  aperto  $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$  aperto. Notiamo che l’implicazione  $\implies$  è necessaria perché  $f$  sia continua, mentre l’implicazione  $\impliedby$  è quella che caratterizza la topologia quoziente: infatti, se si considera un insieme  $B \subseteq Y$  che non è aperto, allora la sua controimmagine  $f^{-1}(B) \subseteq X$  non sarà aperta, pertanto la topologia su  $Y$  è la più fine.

**TIPS & TRICKS!** Per verificare che un sottoinsieme sia aperto in  $Y$  con la topologia quoziente bisogna verificare che la sua controimmagine è aperta.

Vediamo ora un esempio che giustifica la terminologia “topologia quoziente”.

**ESEMPIO.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Posto  $Y = X/\sim$  insieme quoziente e  $\pi : X \longrightarrow Y$   $x \longmapsto [x]_\sim$  **proiezione al quoziente**, la topologia quoziente su  $Y$  è quella che rende la proiezione continua.

Ricordiamo il primo Teorema fondamentale di isomorfismo per gli *insiemi*, altresì chiamato *decomposizione canonica*.

**RICORDIAMO...** Data una qualsiasi funzione suriettiva  $f : X \longrightarrow Y$  vi è la seguente relazione di equivalenza:  $\forall x, y \in X, x \sim y \iff f(x) = f(y)$ ; inoltre,  $\exists! h : X/\sim \longrightarrow Y$  biunivoca tale che  $f = h \circ \pi$ , basta porre  $h([x]) := f(x)$  in modo tale che il diagramma *commuti*.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! h & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Mostriamo che è ben definita e biunivoca.

$$[x] = [y] \iff x \sim y \iff f(x) = f(y) \iff h([x]) = h([y]) \implies h \text{ ben definita e iniettiva}$$

$$f \text{ suriettiva} \implies h \text{ suriettiva}$$

#### 4.1.1 Identificazione

Tenendo a mente il concetto di immersione illustrato a pagina 15 illustriamo il concetto duale di *identificazione*.

**DEFINIZIONE 4.1.1. IDENTIFICAZIONE.**

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  una funzione continua e suriettiva;  $f$  si dice **identificazione** se  $Y$  ha la topologia quoziente indotta da  $f$ .

In generale è difficile determinare quando una data funzione è un'identificazione, quindi ne cerchiamo una condizione *sufficiente*.

**TEOREMA 4.1.0. MANETTI, 5.4**

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua, suriettiva e chiusa (o aperta), allora  $f$  è un'identificazione chiusa (o aperta).

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $f$  sia aperta. Dimostrare che è un'identificazione è equivalente al mostrare che  $A \subseteq Y$  aperto  $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$  aperto. L'implicazione  $\implies$  è garantita dalla continuità di  $f$ , per quanto riguarda l'implicazione opposta  $\impliedby$  invece siccome  $f$  è suriettiva allora  $f(f^{-1}(A)) = A$  e siccome  $f$  è aperta allora anche  $A$  è aperto.  $\square$

Vediamo ora un esempio di identificazione chiusa e non aperta.

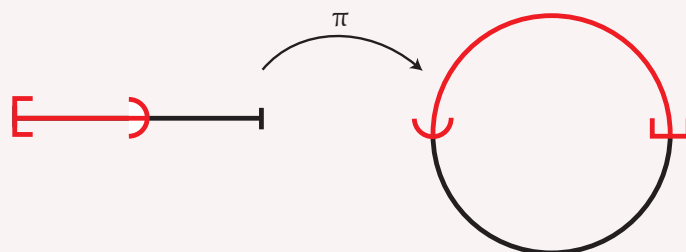
**ESEMPIO.** Si consideri la funzione:

$$\begin{array}{ccc} f : [0, 2\pi] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

È una funzione continua, suriettiva e chiusa (compatto in **Hausdorff**), dunque è un'identificazione chiusa.



Tuttavia  $f$  non è aperta, infatti dato  $A = [0, 1] \subseteq [0, 2\pi]$  aperto, ma  $f(A)$  non è aperto in  $S^1$ .



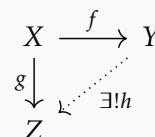
**OSSERVAZIONE.** Gli omeomorfismi sono identificazioni chiuse e aperte.

Vediamo ora che relazione c'è fra le identificazioni ed i quozienti dati da relazioni di equivalenza.

**TEOREMA 4.1.1.** PROPRIETÀ UNIVERSALE DELLE IDENTIFICAZIONI, MANETTI, 5.6

Dati  $X, Y, Z$  spazi topologici,  $g$  una qualsiasi funzione continua,  $f$  identificazione con le mappe come in figura, allora

$\exists! h$  continua :  $g = h \circ f \iff (\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y))$   
ovvero se e solo se  $g$  è costante sulle fibre di  $f$ .



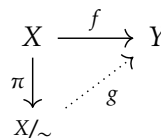
**DIMOSTRAZIONE.** Idealmente se  $f$  fosse invertibile definiremmo  $h = g \circ f^{-1}$ . Tuttavia l'invertibilità di  $f$  non è fra le ipotesi, quindi si sfrutta al meglio l'ipotesi della suriettività e si considera una controimmagine tramite  $f$  e se ne fa l'immagine tramite  $g$ , ovvero  $y \in Y, h(y) := g(x)$  con  $x \in f^{-1}(y)$ . Con questa costruzione  $h$  è ben definita siccome  $g$  sarà costante sulle fibre di  $f$ .

Verifichiamo che  $h$  è continua tramite la definizione:

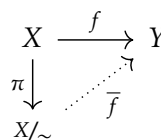
$$U \subseteq Z \text{ aperto, } h^{-1}(U) \subseteq Y \iff f^{-1}(h^{-1}(U)) \subseteq X \text{ aperto} \iff g^{-1}(U) \subseteq X \text{ aperto}$$

Siccome  $g$  è continua allora lo è anche  $h$ . □

Come conseguenza si ha che, data  $f$  continua,  $\sim$  relazione di equivalenza e  $X/\sim$  spazio topologico con la topologia quoziente indotta dalla proiezione  $\pi$ ,  $\exists g$  continua  $\iff (x \sim y \implies f(x) = f(y))$ , ovvero  $\pi$  è costante sulle fibre di  $f$ .



In particolare, se  $\sim$  è la relazione d'equivalenza indotta da  $f$ , e dunque si è nelle ipotesi del primo Teorema fondamentale di isomorfismo degli insiemi, allora  $(x \sim y \iff f(x) = f(y)) \implies \exists! \bar{f}$  biettiva, continua. Dunque vale



$$\bar{f} \text{ omeomorfismo} \iff f \text{ identificazione} \quad (4.1)$$

Riprendiamo l'esempio precedente ed esaminiamolo in termini di spazio quoziente.

**ESEMPIO.**  $D^n/\sim \cong S^n$

Consideriamo il caso  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} f : D^1 = [0, 2\pi] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

La funzione  $f$  è un'identificazione, dunque  $S^1 \cong [0, 2\pi]/\sim \cong [0, 1]/\sim = D^1/\sim$ , con  $\sim$  tale che sia costante sulle fibre di  $f$ :

$$s \sim t \iff \begin{cases} \cos s = \cos t \\ \sin s = \sin t \end{cases} \iff s = t \vee s = 0, t = 2\pi$$

Si può generalizzare in dimensione  $n$  con l'identificazione:

$$\begin{aligned} f : D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto (2x\sqrt{1-\|x\|^2}, 2\|x\|^2-1) \end{aligned}$$

Dunque  $D^n/\sim \cong S^n$  per la relazione:

$$\underline{x} \sim \underline{y} \iff \underline{x} = \underline{y} \vee \|\underline{x}\|^2 = 1 = \|\underline{y}\|^2$$

In altre parole, ogni punto interno è *in relazione con sé stesso* e tutti i punti sul bordo sono *identificati* in un'unica classe.

#### 4.1.2 Quozienti tipici

Vedremo ora degli esempi di spazi quoziente usati frequentemente.

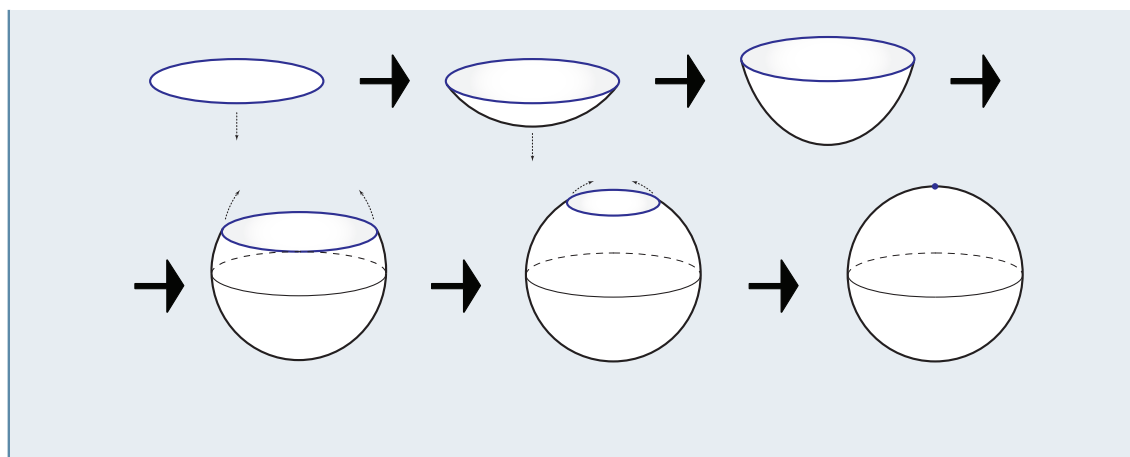
**INTUITIVAMENTE...** Quando quozientiamo uno spazio topologico, possiamo immaginare che i punti contenuti nelle classi di equivalenza vengano “incollati” tutti in un unico punto per formare un nuovo spazio quoziente.

Ad esempio, prendendo il disco  $D^2$  con la relazione di equivalenza  $\sim$  che identifica i punti del bordo:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ oppure } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$$

I punti all'*interno del disco* vengono tutti identificati in classi di equivalenza *separate*, dunque passando allo spazio quoziente avremo una classe per *ciascun* punto interno e un'*unica* classe per tutti il bordo.

Lo spazio quoziente ottenuto è  $S^2$ : possiamo ottenerlo visualmente “gonfiando” l'interno del disco per poi chiudere il “palloncino” ottenuto lungo i punti del bordo, come in figura.



#### 4.1.2.1 Contrazione di un sottospazio ad un punto

Sia  $X$  uno spazio topologico,  $A \subseteq X$ ,  $\forall x, y \in X$   $x \sim y \iff x = y$  oppure  $x, y \in A$ , ovvero ogni punto è in relazione con sé stesso e tutti i punti di  $A$  sono in relazione fra loro, dunque quotientando si “**contraggono**” ad un unico punto.

**ESEMPIO.**  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Cerchiamo ora di generalizzare l'esempio precedente. Ricordiamo che relazione c'è fra i dischi e le sfere:

$$D^n = \text{disco in } \mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

$$S^{n-1} = \text{bordo di } D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

Considerando  $\sim$  come la contrazione di  $S^{n-1}$  ad un punto, si ha che  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ .

**ATTENZIONE!** Anche se  $X$  è di **Hausdorff** non è detto che  $X/A$  sia di **Hausdorff**!

Se  $A$  non è chiuso allora  $X/A$  non è neanche **T1**, infatti  $\pi^{-1}([A]) = A$  non chiuso implica che  $[A]$  non lo è, quindi per la caratterizzazione degli spazi **T1** (definizione 1.26, pag. 20)  $X/A$  non è **T1**.

Tuttavia se  $X$  è di **Hausdorff**,  $K \subseteq X$  è compatto allora  $X/K$  è di **Hausdorff**.

#### 4.1.2.2 Cono su uno spazio

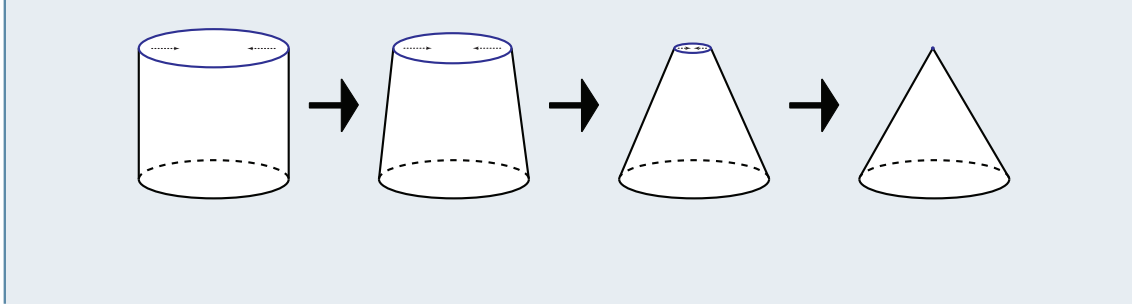
**DEFINIZIONE 4.1.2. CILINDRO.**

Dato  $X$  spazio topologico, si definisce **cilindro** su  $X$  lo spazio  $X \times [0, 1]$ .

**DEFINIZIONE 4.1.3. CONO.**

Il **cono** su  $X$  spazio topologico è il quoziente  $X \times [0, 1]/X \times \{1\}$  oppure  $X \times [0, 1]/X \times \{0\}$ .

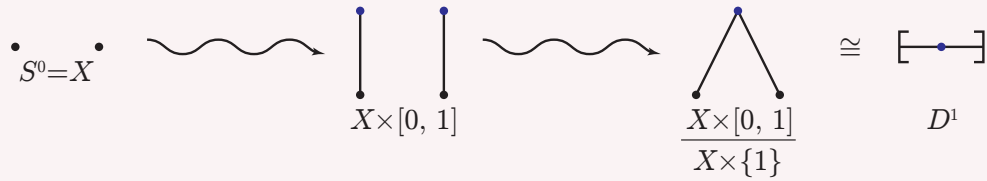
**INTUITIVAMENTE...** Riprendendo il procedimento intuitivo di incollare parti dello spazio originale per creare il quoziente, lo stesso si può fare anche nel caso del cono. In questo caso, tutti i punti di una delle basi vengono incollati in uno.



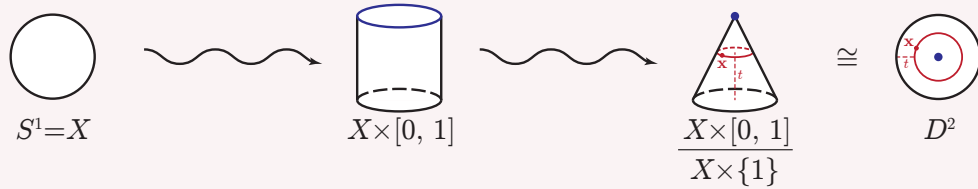
**OSSERVAZIONE.** Un cono è sempre c.p.a. rispetto al “vertice”.

**ESEMPIO.** CONO SU  $S^n \cong D^{n+1}$ .

Studiamo i casi al variare della dimensione.  $n = 0$ )  $S^0 = \{-1, 1\} = X \rightsquigarrow X \times [0, 1] \rightsquigarrow X \times [0, 1] / X \times \{1\} \cong D^1$ .



$n = 1$ )  $S^1 = X \rightsquigarrow X \times [0, 1] \rightsquigarrow X \times [0, 1] / X \times \{1\} \cong D^2$ .



In generale, considerata la funzione:

$$\begin{aligned} f : S^n \times [0, 1] &\longrightarrow D^{n+1} \\ (\mathbf{x}, t) &\longmapsto t\mathbf{x} \end{aligned}$$

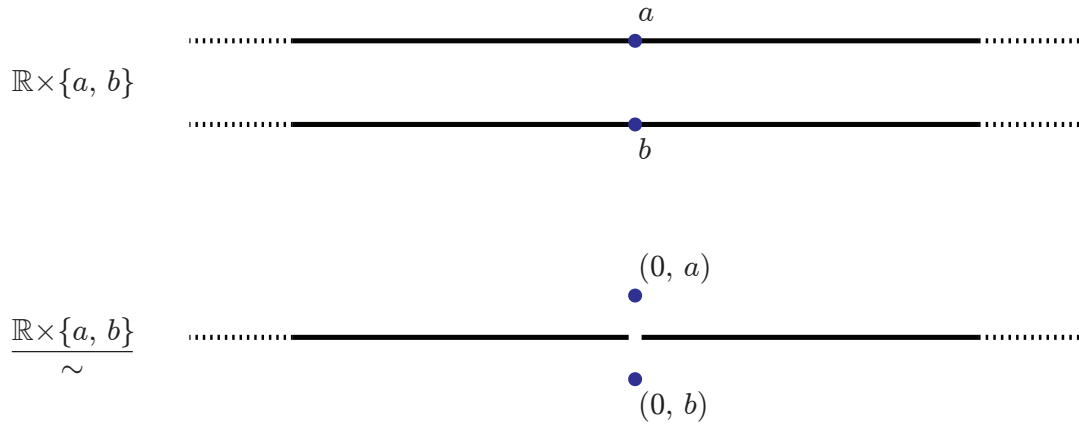
Essa è continua, suriettiva, chiusa (compatto in **Hausdorff**), dunque  $f$  è identificazione. Verifichiamo che la relazione di equivalenza indotta da  $f$  è proprio quella di contrazione:

$$(\mathbf{x}, t) \sim (\mathbf{y}, s) \iff f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{y}, s) \iff t\mathbf{x} = s\mathbf{y} \iff \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{y}, t = s \\ t = s = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } t \neq 0 \implies \mathbf{x} = \frac{s}{t}\mathbf{y}, \text{ ma } \|\mathbf{x}\| = 1 \implies \underbrace{\left|\frac{s}{t}\right| \|\mathbf{y}\|}_{=1} = 1 \implies \left|\frac{s}{t}\right| = 1 \implies s = t \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

## 4.1.2.3 Retta con 2 origini

Analizziamo un particolare spazio topologico che spesso fungerà da controesempio, in particolare per le varietà topologiche (vedi sezione): **la retta con 2 origini**. Sia  $X = \mathbb{R} \times \{a, b\}$ .



Vogliamo definire una relazione di equivalenza che lasci “separate” solo le origini:

$$(x, \alpha) \sim (y, \beta) \iff \begin{cases} x = y, \alpha = \beta \\ x = y \neq 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ:

1.  $Y := X/\sim$  è c.p.a., infatti se i punti  $(x, \alpha)$  e  $(y, \beta)$  sono tali che  $x \neq 0 \neq y$  basta prendere il segmento  $\overline{xy}$  sulla retta  $\mathbb{R} \times \{a\}$  e proiettarlo. Per unire  $(0, a)$  e  $(0, b)$  basta unire entrambi con un cammino al punto  $(1, a) = (1, b)$
2.  $Y$  non è di **Hausdorff**: tutti gli intorni di  $(0, a)$  si intersecano con tutti gli intorni di  $(0, b)$
3.  $Y$  è *localmente omeomorfo* a  $\mathbb{R}$ , infatti ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$
4.  $\exists K_1, K_2 \subseteq Y$  compatti tali per cui  $K_1 \cap K_2$  non è compatto: basta prendere  $K_1 = \pi([-1, 1] \times \{a\})$  e  $K_2 = \pi([-1, 1] \times \{b\})$  compatti in  $Y$ , ma  $K_1 \cap K_2 = [-1, 0) \cup (0, 1]$  non è compatto in  $Y$

## 4.1.3 Quoziente Hausdorff

Cerchiamo ora delle condizioni per avere un *quoziente Hausdorff*.

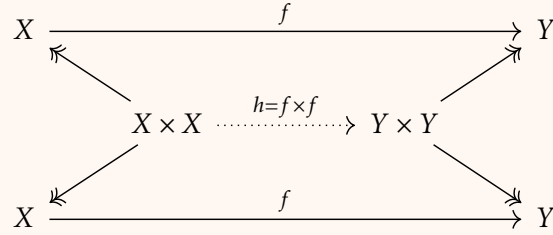
**TEOREMA 4.1.2.** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua e identificazione con  $X$  compatto e di **Hausdorff**, allora sono equivalenti:

1.  $Y$  è di **Hausdorff**.
2.  $f$  chiusa.
3.  $K = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$  chiuso in  $X \times X$ .

**DIMOSTRAZIONE.**  $1 \implies 3$ ) Si vuole utilizzare la caratterizzazione di essere **Hausdorff** con la chiusura della diagonale  $\Delta_Y$ , ovvero il teorema 1.5. Bisogna dunque vedere  $K$  come

controimmagine continua di  $\Delta_Y$ : si consideri  $h := f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$   
 $(x_1, x_2) \longmapsto (f(x_1), f(x_2))$

continua perché lo è  $f$ . Inoltre  $K = h^{-1}(\Delta_Y)$  e  $Y$  è  $T_2 \implies K$  chiuso in quanto controimmagine di un chiuso tramite una funzione continua.



3  $\implies$  2) Per dimostrare che  $f$  è chiusa bisogna far vedere che  $\forall C \subseteq X, C$  chiuso  $\implies f(C) \subseteq Y$  chiuso, ma  $f$  è identificazione  $\iff f^{-1}(f(C)) \subseteq X$  chiuso. Notiamo che  $f^{-1}(f(C)) = p_1(K \cap p_2^{-1}(C))$ , infatti

$$p_2^{-1}(C) = X \times C \implies K \cap p_2^{-1}(C) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_2) \in C\}$$

$$p_2 \text{ continua e } C \text{ chiuso} \implies p_2^{-1}(C) \text{ chiuso}$$

$$K \text{ chiuso} \implies p_2^{-1}(C) \cap K \text{ chiuso}$$

$$X \text{ compatto e } T_2 \implies p_1 \text{ chiuso} \implies p_1(K \cap p_2^{-1}(C)) \text{ chiuso}$$

2  $\implies$  1) Serve il *teorema di Wallace*, pertanto non ne affronteremo la dimostrazione.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Nella dimostrazione 1  $\implies$  3) *non* si è utilizzato che  $f$  è un'identificazione, dunque vale *in generale*!

# AZIONI DI GRUPPO

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

In questo capitolo studieremo uno strumento importante dell'algebra: l'**azione di un gruppo**  $G$  su un insieme  $X$ . Grazie a ciò, possiamo dire che gli elementi del gruppo “spostano” gli elementi dell'insieme in altri, senza dotare l'insieme di alcuna particolare struttura od operazione. Alcuni gruppi sono definiti proprio sulla base delle azioni, come il *gruppo simmetrico*: gli elementi sono le *permutazioni* sull'insieme!

Per gli scopi della topologia, le azioni di gruppo hanno particolare importanza: se nel Capitolo 4 abbiamo visto diversi tipi di spazi quozienti, generalmente dando una *relazione di equivalenza* su un sottoinsieme relativamente semplice, qui introdurremo *quozienti topologici* indotti da queste azioni di gruppo. Fra questi preannunciamo il ruolo di primo piano svolto dallo *spazio proiettivo reale*.

## 5.1 AZIONE DI UN GRUPPO SU UN INSIEME

**DEFINIZIONE 5.1.0.** GRUPPO SIMMETRICO.

Sia  $X$  un insieme. Si definisce il **gruppo simmetrico** sull'insieme  $X$  come:

$$S(X) := \{ f : X \longrightarrow X \mid f \text{ biunivoca} \} \quad (5.1)$$

**DEFINIZIONE 5.1.1.** AZIONE DI UN GRUPPO SU UN INSIEME.

Sia  $G$  un gruppo e  $X$  un insieme. Un'**azione** di  $G$  su  $X$  è, equivalentemente:

- $\Phi : G \longrightarrow S(X)$  morfismo di gruppi, ovvero  $\Phi(g.h) = \Phi(g)\Phi(h)$ .
- $\varphi : G \times X \longrightarrow X$  tale che  $e.x = x, \forall x \in X$  e  $g.(h.x) = (gh).x$ .  
 $(g, x) \longmapsto g.x$

Se ho  $\Phi$  definisco  $\varphi(g, x) = \underbrace{\Phi(g)}_{\in S(X)}(x)$ .

Se ho  $\varphi$  definisco  $\Phi(g) : X \longrightarrow X$   
 $x \longmapsto \varphi(g, x)$ .

**DEFINIZIONE 5.1.2.** RELAZIONE DI EQUIVALENZA DELL'AZIONE.

Su  $X$  definiamo una *relazione di equivalenza* dettata dall'azione di un gruppo  $G$ :

$$x \sim y \iff \exists g \in G : y = g.x$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che è una relazione di equivalenza:

- **RIFLESSIVA:**  $x \sim x$ ? Basta porre  $g = e$ , in quanto  $x = e.x$ .
- **SIMMETRICA:** Per ipotesi  $y = g.x$ , allora  $x = g^{-1}.y$  ( $g^{-1} \in G$ ).
- **TRANSITIVA:** Poichè  $y = g.x$ ,  $z = h.y$ , segue  $z = h.(g.x) = (hg).x$  e  $hg \in G$ . □

**DEFINIZIONE 5.1.3.** ORBITA.

Le classi di equivalenza date da questa relazione sono dette **orbite**:

$$[x] = G.x = \{y \in X \mid \exists y : y = g.x\} = \{g.x \in X \mid g \in G\}$$

L'insieme quoziente è detto **spazio delle orbite** e si scrive come  $X/G$ .

Vediamo ora un esempio di azione e di orbite.

**ESEMPIO.**  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $G = GL(n, \mathbb{R})$ ,  $\varphi(A, \mathbf{v}) = A\mathbf{v}$  è la moltiplicazione matrice per vettore. Analizziamo le orbite:  $G.\mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$ , ovvero il vettore nullo è un'orbita. Siano ora  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{w}$ . Esiste  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ :  $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ ? Sì, se  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ,  $G.\mathbf{v} = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Quindi  $\mathbb{R}^n/GL(n, \mathbb{R}) = \{a, b\}$  con  $a = [\mathbf{0}]$  e  $b = [\mathbf{v}]$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

## 5.2 STABILIZZATORE DI UN ELEMENTO

**DEFINIZIONE 5.2.0.** STABILIZZATORE DI UN ELEMENTO.

Lo **stabilizzatore di un elemento** è l'insieme degli elementi di  $G$  che fissano  $x$ :

$$H_x := \{g \in G \mid g.x = x\} \tag{5.2}$$

$H_x$  è un *sottogruppo di isotropia* di  $x$ . Inoltre, se  $H_x$  è banale, allora l'azione è **libera**.

**DIMOSTRAZIONE.**  $H_x$  è chiuso rispetto all'azione:

- $1_G \in H_x$  per definizione dell'azione  $g.(1_G.x = x \forall x)$ .
- $\forall g, h \in H_x$ , allora  $(gh).x = g.(h.x) = g.x = x$ . □

**OSSERVAZIONE.** L'insieme  $G/H_x$  dei laterali sinistri di  $H_x$  in  $G$  è in corrispondenza biunivoca con l'orbita  $O(x)$ . Inoltre, se  $G$  è finito, la cardinalità dell'orbita è pari all'indice di  $H_x$  in  $G$ .



**DIMOSTRAZIONE.** Sia data:

$$\begin{aligned}\alpha : G/H_x &\longrightarrow O(x) \\ g \cdot H_x &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

Mostriamo che  $\alpha$  è ben definita e biunivoca.

1. *Ben definizione:* se  $g \cdot H_x = \tilde{g} \cdot H_x$  allora  $g^{-1}\tilde{g} = h \in H_x \implies \tilde{g} = gh \in H_x$ . Si ha:

$$\alpha(\tilde{g} \cdot H_x) = \tilde{g} \cdot x = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = \alpha(g \cdot H_x)$$

Poiché  $g \cdot H_x = \tilde{g} \cdot H_x \implies g \cdot x = \tilde{g} \cdot x$  la funzione è ben definita.

2. *Iniettività:*

$$\begin{aligned}\alpha(g_1 \cdot H_x) = \alpha(g_2 \cdot H_x) &\implies g_1 \cdot x = g_2 \cdot x \implies g_2^{-1} \cdot (g_1 \cdot x) = g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) \\ &\implies (g_2^{-1} \cdot g_1) \cdot x = 1_G \cdot x = x\end{aligned}$$

Ne segue che  $(g_2^{-1}g_1) \in H_x \implies g_2^{-1}g_1 = h \in H_x \implies g_1 \cdot H_x = g_2 \cdot H_x$ .

3. *Suriettività:* se  $y \in O(x)$ , per definizione  $\exists g \in G : y = g \cdot x$ , cioè  $y = \alpha(g \cdot H_x)$ . Ne consegue, dal teorema di Lagrange, che  $|O(x)| = [G : H_x] = \frac{|G|}{|H_x|}$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Punti nella stessa orbita hanno stabilizzatori **coniugati**:

$$x_2 = g \cdot x_1 \implies H_{x_2} = g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1} \quad (5.3)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\subseteq$ ) Sia  $h \in H_{x_2}$ . Si ha:

$$h \cdot x_2 = x_2 \implies h \cdot (g \cdot x_1) = g \cdot x_1 \implies (g^{-1}hg) \cdot x_1 = x_1$$

Segue che  $\forall h \in H_{x_2} \ g^{-1}hg \in H_{x_1}$ , ma allora  $h = (g^{-1}h^{-1}g)g^{-1} \in g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1}$ . Pertanto per l'arbitrarietà di  $h$  si ha  $H_{x_2} \subseteq g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1}$

$\supseteq$ ) Sia  $h \in H_{x_1}$  e consideriamo  $ghg^{-1}$ . Se moltiplico (con l'azione  $\cdot$ ) per  $x_2$ :

$$(ghg^{-1}) \cdot x_2 = (ghg^{-1}) \cdot (g \cdot x_1) = (gh) \cdot (g^{-1}g) \cdot x_1 = (gh) \cdot x_1 = g \cdot (h \cdot x_1) = g \cdot x_1 = x_2$$

Pertanto  $\forall h \in H_{x_1} \ (ghg^{-1}) \cdot x_2 = x_2$  e per l'arbitrarietà di  $h$  si ha  $g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1} \subseteq H_{x_2}$   $\square$

### 5.3 AZIONE PER OMEOMORFISMI

**DEFINIZIONE 5.3.0.** AZIONE PER OMEOMORFISMI.

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G$  un gruppo che agisce su  $X$ . Diciamo che  $G$  **agisce per omeomorfismi** se  $\forall g \in G$  l'applicazione:

$$\begin{aligned}\theta_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x\end{aligned} \quad (5.4)$$

è un omeomorfismo.

Questo è equivalente a chiedere che l'azione sia data da un *omomorfismo* di gruppi:

$$\Phi : G \longrightarrow \{\text{omeomorfismi } X \rightarrow X\} \leq S(X) \quad (5.5)$$

**LEMMA 5.3.0.**  $G$  agisce per omeomorfismi se e solo se  $\theta_g$  è *continua*,  $\forall g \in G$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

$\Rightarrow$ )  $G$  agisce per omeomorfismi se  $\theta_g$  è un omeomorfismo  $\forall g$ , dunque banalmente  $\theta_g$  è continua.

$\Leftarrow$ ) Dobbiamo dimostrare che  $\theta_g$  è un omeomorfismo. Notiamo che  $\forall g, h \in G$  vale  $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ :

$$(\theta_g \circ \theta_h)(x) = \theta_g(\theta_h(x)) = \theta_g(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x = \theta_{gh}(x) \quad \forall x$$

Inoltre, vale  $\theta_e = Id_X$ :

$$\theta_e(x) = e \cdot x = x = Id(x) = x \quad \forall x$$

Allora, consideriamo  $\theta_{g^{-1}}$ ,  $\forall g \in G$ , consideriamo la composizione seguente:

$$(\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g)(x) = \theta_{g^{-1}g}(x) = \theta_e(x) = Id_X(x) = x$$

Cioè l'inversa di  $\theta_g$  è  $\theta_{g^{-1}}$ . Ma allora per ipotesi anche  $\theta_{g^{-1}}$  è continua, dunque segue la tesi.  $\square$

**PROPOSIZIONE 5.3.0.**

1. Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G$  un gruppo che agisce su  $X$  per omeomorfismo. Sia  $\pi$  la proiezione dall'insieme allo spazio delle orbite  $X/G$ :

$$\pi : X \longrightarrow X/G \quad (5.6)$$

Allora  $\pi$  è aperta e, se  $G$  è finito,  $\pi$  è anche chiusa.

2. Sia  $X$  di **Hausdorff** e  $G$  gruppo finito che agisce su  $X$  per omeomorfismi. Allora  $X/G$  è di Hausdorff.

**DIMOSTRAZIONE.**

- I Sia  $A \subseteq X$  un aperto. Vogliamo dimostrare che  $\pi(A)$  è aperto in  $X/G$ . Un aperto della topologia quoziente è tale se la controimmagine dell'aperto nel quoziente è un aperto: si deve allora dimostrare che  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è aperto in  $X$ . Ogni elemento di  $A$  è contenuto in un'orbita, dunque  $\pi(A)$  contiene le orbite degli  $x \in A$ ; la controimmagine  $\pi^{-1}(\pi(A))$  risulta dunque pari all'unione di *tutte* le orbite in  $X$  che intersecano l'insieme  $A$ :

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A$$

Ma allora  $g \cdot A = \{g \cdot x \mid x \in A\}$  è un aperto  $\forall g \in G$  poiché un omeomorfismo porta aperti in aperti; l'unione di aperti è aperta, dunque  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è aperto in  $X$  cioè  $\pi(A)$  è aperto in  $X/G$ .

Preso  $C$  chiuso, dobbiamo allo stesso modo dimostrare  $\pi(C)$  chiuso in  $X/G$ , cioè  $\pi^{-1}(\pi(C))$  chiuso in  $X$ . Usando lo stesso ragionamento, otteniamo che:

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g.C$$

Con  $g.C = \{g.x \mid x \in C\}$  chiuso per omeomorfismo. In particolare, essendo  $G$  finito, segue che l'unione dei  $g.C$  è finita e dunque anch'essa è un chiuso. Segue dunque  $\pi^{-1}(\pi(C))$  chiuso in  $X$  e  $\pi(C)$  chiuso in  $X/G$ .

II Siano  $p, q \in X/G$  distinti. Vogliamo dimostrare che esistono intorni di  $p$  e  $q$  disgiunti.

Siano  $x, y \in X$  tali che  $\pi(x) = p$  e  $\pi(y) = q$  e consideriamo il gruppo finito  $G = \{g_1 = 1_G, g_2, \dots, g_n\}$ . Le orbite di  $x$  e  $y$  sono diverse: se così non fosse, si avrebbe  $\pi(x) = \pi(y)$  e cioè  $p = q$ , il che è assurdo! Allora:

$$g_i.x \neq g_j.y \quad \forall i, j$$

Definiti gli (intorni) aperti  $U \in I(x)$  e  $V \in I(y)$  disgiunti (in quanto  $X$  di **Hausdorff**), possiamo considerare gli altri (intorni) aperti disgiunti  $g_i.U \in I(g_i.x)$ ,  $g_i.V \in I(g_i.y)$ .

Allora:

$$\tilde{U} := \bigcup_i g_i.U \quad \tilde{V} := \bigcup_i g_i.V \quad (5.7)$$

Sono entrambi aperti. Vogliamo costruire  $U \in I(x)$  e  $V \in I(y)$  in modo che siano (intorni) aperti disgiunti tali che, costruiti come sopra  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$ , si abbia  $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ . Così, passando al quoziente con  $\pi$ , si otterranno degli intorni  $\pi(\tilde{U})$  di  $p$  e  $\pi(\tilde{V})$  di  $q$  che soddisfano  $\pi(\tilde{U}) \cap \pi(\tilde{V}) = \emptyset$ .

- Costruiamo  $U$  e  $V$ :  $\forall i$  sappiamo che  $x \neq g_i.y$  in  $X$  (in quanto le orbite di  $x$  e  $y$  sono distinte. In quanto  $X$  è di **Hausdorff**, si ha che  $\forall i \exists U_i, V_i$  (intorni) aperti disgiunti tali che  $x \in U_i$  e  $g_i.y \in V_i$ . Notiamo che  $y \in g_i^{-1}.V_i$ ; allora definiamo

$$U := \bigcap_i U_i \in I(x) \quad V := \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}.V_i \in I(y)$$

- Ricaviamo  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$ :  $\forall i$  (e quindi per ogni elemento di  $G$ ) abbiamo:

$$U \cap (g_i.V) \subseteq U_i(g_i.g_i^{-1}.V_i) = U_i \cap V_i = \emptyset \implies U \cap (g_i.V) = \emptyset$$

Allora  $\forall i, j$  abbiamo:

$$(g_i.U) \cap (g_j.V) = (g_i.U) \cap (g_i g_j^{-1} g_j.V) = g_i.(U \cap (g_j^{-1} g_j.V))$$

Ma  $g_j^{-1} g_j \in G$ , dunque  $U \cap (g_j^{-1} g_j.V) = \emptyset$ . Segue che:

$$(g_i.U) \cap (g_j.V) = \emptyset \implies \left( \bigcup_i g_i.U \right) \cap \left( \bigcup_i g_i.V \right) = \emptyset \implies \tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$$

□

**ESEMPIO.**  $(\mathbb{Z}, +)$  agisce in  $\mathbb{R}$  per **traslazione**:

$$m \cdot x = x + m \quad (5.8)$$

Se mettiamo ad  $\mathbb{R}$  la topologia Euclidea, allora l'azione è per omeomorfismi, dato che fissato  $m \in \mathbb{Z}$ :  $\theta_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  è continua.

$$x \longmapsto x + m$$

- *Orbite*:  $O(x) = \{x + m \mid m \in \mathbb{Z}\}$  rappresenta tutti i numeri che hanno mantissa uguale (ad esempio, preso  $x = 1.5$ , nella sua orbita abbiamo  $1.5, 2.5, -1.5, \dots$ ).
- *Stabilizzatore*:  $H_x = \{m \in \mathbb{Z} \mid x + m = x\} = \{0\}$  è banale, dunque l'azione è libera.
- *Spazio delle orbite*:  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è insiemisticamente in corrispondenza biunivoca con  $[0, 1)$ , in particolare un sistema di rappresentanti di  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sono le orbite al variare di  $x \in [0, 1)$ . Inoltre, lo spazio delle orbite è compatto essendo immagine continua di un compatto ( $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). Si può dimostrare che è omeomorfo a  $S^1$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo  $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}$

$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

- $f$  è continua.
- $f$  è suriettiva.
- $f(t_1) = f(t_2) \iff t_1 - t_2 \in \mathbb{Z} \iff t_1, t_2$  nella stessa orbita  $\iff \pi(t_1) = \pi(t_2)$

Allora la relazione di equivalenza indotta da  $f$  è quella dell'azione di  $\mathbb{Z}$  su  $\mathbb{R}$ .

Inoltre,  $f$  induce  $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$  continua per le proprietà della topologia quoziente e che rende commutativo il diagramma a lato. Infatti  $\bar{f}$  è biunivoca in quanto suriettiva (lo è  $f$ ) ed iniettiva (per conseguenza del sistema di rappresentanti che si ha su  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ).

Inoltre, essendo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  compatto ed  $S^1$  di **Hausdorff**,  $\bar{f}$  è chiusa e dunque  $\bar{f}$  è l'omeomorfismo cercato. Per questo motivo, si ha anche che  $f$  è un'identificazione aperta.  $\square$

**DIGRESSIONE.** Si può sempre vedere  $\mathbb{R}^2$  come lo spazio dei complessi  $\mathbb{C}$ . Allora  $S^1 \in \mathbb{C} \implies S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ . La funzione di prima si può anche riscrivere come:

$$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \leftrightarrow \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \leftrightarrow e^{2\pi i t} \quad (5.9)$$

**ESEMPIO.**  $G = GL(n, \mathbb{R})$  agisce su  $\mathbb{R}^n$  con l'azione di moltiplicazione matrice per vettore:

$$A \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \quad (5.10)$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato  $A \in G$ :  $\theta_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  è continua.

$$\mathbf{v} \longmapsto A\mathbf{v}$$

- *Orbite*: definite  $O(\mathbf{v}) = \{A\mathbf{v} \mid A \in G\}$  ci sono solo due orbite,  $[0]$  e  $[\mathbf{v}]$  con  $\mathbf{v} \neq 0$ , dato che ogni vettore può essere scritto come prodotto di un vettore per un'opportuna matrice di cambiamento di base.
- *Spazio delle orbite*:  $\mathbb{R}^n/G = \{[0], [\mathbf{v}]\}$ . Considerando la proiezione al quoziente  $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/G$ , si ha che  $\pi^{-1}([\mathbf{v}]) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , che è un aperto ma *non* è un chiuso. Per definizione di aperto della topologia quoziente  $\{[\mathbf{v}]\}$  è aperto ma

non chiuso in  $\mathbb{R}^n/G$ , dunque non tutti i punti nello spazio delle orbite son chiusi. Segue che  $\mathbb{R}^n/G$  non è **T1** e tanto meno è di **Hausdorff**.

### 5.3.1 Spazio proiettivo reale

In questa sezione introduciamo uno spazio topologico molto importante per i nostri studi, lo **spazio proiettivo reale**. Nel Capitolo 9 guarderemo il suo comportamento come *varietà topologica*, mentre nel Capitolo 11 tratteremo una sua *generalizzazione* su un qualunque campo  $\mathbb{K}$  con gli strumenti dell'*algebra lineare*, oltre a discutere topologicamente lo *spazio proiettivo complesso*.

**ESEMPIO.**  $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , inteso come gruppo moltiplicativo, agisce su  $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  con l'azione di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (5.11)$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato  $\lambda \in G$ :  $\theta_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$   
 $\mathbf{x} \longmapsto \lambda \mathbf{x}$

è continua.

- **Orbite:**  $O(\mathbf{x}) = \{\lambda \mathbf{x} \mid \lambda \in G\}$  rappresentano tutte le rette vettoriali passanti per l'origine in  $\mathbb{R}^{n+1}$  a cui son state tolte l'origine.
- **Spazio delle orbite:**  $\frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{G} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è lo **spazio proiettivo reale**, spazio topologico rispetto alla topologia quoziente indotta dall'azione.  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è di **Hausdorff** e **compatto**.

#### DEFINIZIONE 5.3.1. SPAZIO PROIETTIVO REALE.

Lo **spazio proiettivo reale**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  (o  $\mathbb{RP}^n$ ) di dimensione  $n$  è lo spazio topologico delle rette vettoriali passanti origine in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , a cui son state tolte l'origine. È definito come lo spazio quoziente rispetto all'azione del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{R}^*$ :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{R}^*} \quad (5.12)$$

**PROPOSIZIONE 5.3.1.**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è di **Hausdorff**, **compatto** e **c.p.a.**.

#### DIMOSTRAZIONE.

I Dati  $p, q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ,  $p \neq q$  essi sono della forma  $p = [\mathbf{x}]$  e  $q = [\mathbf{y}]$ . Allora:

$$[\mathbf{x}] \neq [\mathbf{y}] \implies \mathcal{L}_0(\mathbf{x}) \neq \mathcal{L}_0(\mathbf{y})$$

Con  $\mathcal{L}_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{L}_0(\mathbf{y})$  le rette vettoriali descritte da  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Prendiamo gli (intorni) aperti disgiunti  $U \setminus \{0\} \in I(\mathbf{x})$ ,  $V \setminus \{0\} \in I(\mathbf{y})$  in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Allora, passando al quoziente,  $\pi(U \setminus \{0\})$  e  $\pi(V \setminus \{0\})$  formano due fasci di rette a forma di “doppio cono infinito” con vertice nell'origine; questi due coni sono (intorni) aperti in quanto

$$\pi^{-1}(\pi(U \setminus \{0\})) = U \setminus \{0\} \quad \pi^{-1}(\pi(V \setminus \{0\})) = V \setminus \{0\}$$

Inoltre sono interni disgiunti di  $p$  e  $q$ , dunque  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è di **Hausdorff**.

- II Per dimostrare che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è compatto, mostreremo che  $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , dato che  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  è compatto.

Notiamo che, presa l'orbita di un vettore  $\mathbf{v}$ , si ha:

$$[\mathbf{v}] = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\} = \left\{ \underbrace{\lambda \|\mathbf{v}\|}_{=\mu \in \mathbb{R}^*} \underbrace{\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}}_{\in S^1} \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \right\} = \{\mu \mathbf{x} \mid \mu \in \mathbb{R}^*\} = [\mathbf{x}]$$

Dunque ogni orbita dello spazio proiettivo reale si può scrivere come l'orbita di un vettore appartenente alla sfera  $S^n$ . Segue che non solo  $\pi$  è suriettiva, ma anche  $\pi|_{S^n}$  è suriettiva, cioè  $\pi|_{S^n}(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ; segue dunque che  $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Dato che  $S^n$  è compatto e **c.p.a.**, segue che anche lo spazio proiettivo reale è compatto e **c.p.a.** (in quanto immagine continua tramite  $\pi$  di  $S^n$ ).  $\square$

# ASSIOMI DI NUMERABILITÀ E SUCCESIONI

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Dallo studio dell'*Analisi* sono ben note le *successioni* a valori reali e le loro proprietà. In questo capitolo porremo la nostra attenzione sulle **successioni** con codominio uno *spazio topologico*. Inoltre, riprenderemo dal Capitolo 2 la trattazione dei *compatti* per studiare la relazione che hanno con le successioni.

Prima fare tutto ciò, tuttavia, abbiamo bisogno di introdurre degli **assiomi di numerabilità**, in modo da garantire l'esistenza di insiemi *numerabili* di oggetti topologici; la maggior parte degli spazi topologici più comuni soddisfano almeno uno di questi assiomi.

Il capitolo si conclude con un approfondimento delle successioni negli spazi metrici.

## 6.1 NUMERABILITÀ

**DEFINIZIONE 6.1.0.** INSIEME NUMERABILE.

Un insieme  $X$  è **numerabile** o di *cardinalità numerabile* se è finito oppure esiste una biezione tra l'insieme  $X$  e i naturali  $\mathbb{N}$ .

**DEFINIZIONE 6.1.1.** SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ (A BASE NUMERABILE).

Uno spazio topologico  $X$  è **a base numerabile** se esiste una base  $\mathcal{B}$  della topologia tale che  $\mathcal{B}$  sia di *cardinalità numerabile*. Si dice anche che  $X$  soddisfa il **secondo assioma di numerabilità**.

**DEFINIZIONE 6.1.2.** PRIMO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ.

Uno spazio topologico  $X$  è *primo numerabile* se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile. Si dice anche che  $X$  soddisfa il **primo assioma di numerabilità**.

**OSSERVAZIONI.**

1. Il secondo assioma di numerabilità implica il primo.
2. Se  $X$  è finito,  $X$  soddisfa sempre i due assiomi.
3. Se  $X$  è spazio metrico,  $X$  è sempre *primo numerabile*.
4. Se  $X$  è *a base numerabile*, ogni sottospazio  $Y$  di  $X$  è *a base numerabile*. In particolare  $Y$  è primo numerabile.
5. Se  $X$  e  $Y$  sono *a base numerabile*, allora  $X \times Y$  è *a base numerabile*. In particolare  $X \times Y$  è primo numerabile.
6. Non è vero che il quoziente di  $X$  spazio *a base numerabile* (o *primo numerabile*) è sempre *a base numerabile* (o *primo numerabile*).

**DIMOSTRAZIONE.**

- I Se  $X$  ha base numerabile  $\mathcal{B}$  e  $x \in X$ , allora  $\{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$  è un sistema fondamentali di intorni di  $x$  ed è chiaramente numerabile.
- II Ogni base e sistema fondamentale di intorni contiene necessariamente un numero finito di elementi.
- III Preso  $x \in X$ , allora  $\{B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un sistema fondamentale di intorni ed è numerabile.
- IV Se  $\mathcal{B}$  è una base numerabile per  $X$ ,  $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$  è base numerabile per  $Y$ .
- V Se  $\mathcal{B}_X$  è una base numerabile per  $X$  e  $\mathcal{B}_Y$  base numerabile per  $Y$ , allora  $\{A \times B \mid A \in \mathcal{B}_X, B \in \mathcal{B}_Y\}$  è base di  $X \times Y$  numerabile: il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili rimane numerabile.
- VI La contrazione di  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{R}$  ad un punto, cioè il quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , non è primo numerabile nè tanto meno a base numerabile, pur essendo  $\mathbb{R}$  a base numerabile in quanto metrico<sup>a</sup>. □

<sup>a</sup>Nelle “Note aggiuntive”, a pag. 274, si può trovare la dimostrazione di ciò.

**ESEMPIO.**  $\mathbb{R}$  con la topologia Euclidea è *a base numerabile*. Infatti, presa:

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

- È numerabile (è definita con i razionali  $\mathbb{Q}$ , che sono numerabili)
- È una base perché, dati  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ :

$$(x, y) = \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ x < a < b < y}} (a, b)$$

**PROPOSIZIONE 6.1.0.** Sia  $X$  *a base numerabile*. Allora ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un sottoricoprimento numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A}$  un ricoprimento aperto di  $X$ ,  $\mathcal{B}$  una base numerabile per  $X$  e  $x \in X$ . Allora  $\exists U_x \in \mathcal{A}$  tale che  $x \in U_x$ . Essendo  $\mathcal{B}$  base,  $\exists B_x \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B_x \subseteq U_x$ . Abbiamo così determinato un sottoinsieme numerabile della base  $\mathcal{B}$ :

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B_x \mid x \in X\}$$



Allora esiste in particolare  $E \subseteq X$  numerabile tale che:

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B_x \mid x \in E\}$$

Se consideriamo ora  $\widetilde{\mathcal{A}} := \{U_x \mid x \in E\}$ , notiamo che:

- $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$ .
- $\widetilde{\mathcal{A}}$  è numerabile perché lo è  $E$ .
- $X = \bigcup_{B_x \in \widetilde{\mathcal{B}}} B_x = \bigcup_{x \in E} B_x \subseteq \bigcup_{x \in E} U_x$ .

Segue che  $\widetilde{\mathcal{A}}$  è un sottoricoprimento numerabile di  $A$ . □

**DEFINIZIONE 6.1.3.** SPAZIO SEPARABILE.

Uno spazio topologico  $X$  si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme  $E$  *denso* e *numerabile*.

**ESEMPL.**

- Se  $X$  è numerabile, allora è separabile perché l'insieme stesso è un sottoinsieme numerabile e denso.
- $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea è separabile perché si ha  $E = \mathbb{Q}^n$  denso in  $\mathbb{R}^n$ .

**LEMMA 6.1.0.** Se  $X$  è a base numerabile, allora è separabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{B}$  una base numerabile. Per ogni  $U \in \mathcal{B}$  sia  $x_U \in U$  un punto e sia:

$$E = \{x_U \mid U \in \mathcal{B}\}$$

- $E$  è numerabile perché lo è  $\mathcal{B}$ : abbiamo preso un punto per ogni elemento della base numerabile.
- $E$  è denso: se  $A \subseteq X$  è aperto *non vuoto*, allora  $\exists U \in \mathcal{B}$  tale che  $x_U \in U \subseteq A \implies x_U \in A \implies E \cap A \neq \emptyset$ . □

**PROPOSIZIONE 6.1.1.** Se  $X$  è spazio metrico,  $X$  è sempre primo numerabile ed è:

$$a \text{ base numerabile} \iff \text{separabile}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Sempre vera per ogni spazio anche non metrico (lemma 6.1).

$\impliedby$ ) Sia  $E \subseteq X$  sottoinsieme numerabile e denso e consideriamo:

$$\mathcal{B} = \{B_{1/n}(e) \mid e \in E, n \in \mathbb{N}\}$$

Questo insieme è numerabile: mostriamo che sia una base. Per far ciò fissiamo  $U \subseteq X$  aperto e prendiamo  $x \in U$ : vogliamo trovare un aperto di  $\mathcal{B}$  contenuto in  $U$  contenente  $x$ .<sup>a</sup>

Sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $B_{1/n}(x) \subseteq U$ . Cerchiamo opportuni  $e \in E$ ,  $m \in \mathbb{N}$  tale che:

$$x \in B_{1/m}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$$

Consideriamo la palla  $B_{1/2n}(x)$ . Siccome  $E$  è denso in  $X$ ,  $\exists e \in E \cap B_{1/2n}(x)$ .

Prendiamo ora la palla  $B_{1/2n}(e) \in \mathcal{B}$ :

- *contiene  $x$*  perché se  $e \in B_{1/2n}(x) \implies d(e, x) < \frac{1}{2n} \implies x \in B_{1/2n}(e)$
- $B_{1/2n}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$ ; infatti, preso  $y \in B_{1/2n}(e)$  si ha:

$$d(x, y) \leq d(x, e) + d(e, y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$\implies y \in B_{1/n}(x) \subseteq U.$$

Segue la tesi. □

<sup>a</sup>Gli elementi della base sono già aperti banalmente. Per l'arbitrarietà di  $x$ , troviamo un ricoprimento aperto di  $U$  costituito da aperti di  $\mathcal{B}$  contenuto interamente in  $U$ , cioè  $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ .

**ESEMPIO.** Si può vedere che  $\mathbb{R}^n$  è base numerabile anche perché è uno spazio metrico ed è separabile.

**ATTENZIONE!** Un insieme con una certa topologia può essere a base numerabile (o primo numerabile), ma non necessariamente rispetto ad un'altra!

**ESEMPIO.** RETTA DI SORGENFREY.

Consideriamo  $X = \mathbb{R}$  con la topologia avente come base:

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \quad (6.1)$$

Mostriamo  $\mathcal{B}$  è base per una topologia, è separabile, primo numerabile ma *non* è a base numerabile.

- *Base per una topologia*: usiamo il teorema delle basi (Manetti, 3.7), pag. 8.

$$\text{I } X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \text{ è ovvio.}$$

II Prendiamo  $A = [a, b)$ ,  $B = [c, d)$  e consideriamo:

$$\forall x \in A \cap B = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$$

Allora basta prendere  $C = A \cap B \in \mathcal{B}$  per soddisfare  $x \in C \subseteq A \cap B$ .

- *Separabile*:  $E = \mathbb{Z}$  è numerabile ed è denso perché vale sempre  $[a, b) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ , dunque ogni aperto non vuoto interseca  $E$ ; segue che  $X$  è separabile.
- *primo numerabile*: s  $a \in \mathbb{R}$  allora  $\left\{ \left[ a, a + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un sistema fondamentale di intorno di  $a$  numerabile. Preso  $U$  intorno di  $a$ ,  $\exists b > a$  tale che  $[a, b) \subseteq U$ ; inoltre,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $a + \frac{1}{n} < b$ , cioè:

$$\left[ a, a + \frac{1}{n} \right) \subseteq [a, b) \subseteq U$$

- *Non a base numerabile*: presa una base  $\tilde{\mathcal{B}}$  per  $X$ , mostriamo che non è numerabile. Sia  $x \in \mathbb{R}$ . Allora:

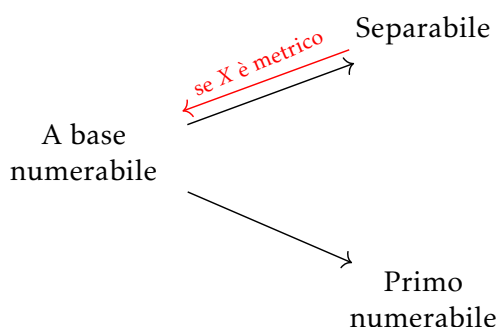
$$[x, \infty) = \bigcup_{y > x} [x, y)$$

È aperto. In particolare, esiste un aperto dipendente dal punto  $x$ , cioè  $U(x) = [x, b) \in \widetilde{\mathcal{B}}$  (per un certo  $b > x$ ) per cui  $x \in U(x) \subseteq [x, \infty)$ .

Notiamo che se  $x \neq y$ , allora  $U(x) \neq U(y)$ : preso  $y > x$ , segue che  $x \notin [y, \infty) \supseteq U(y) \Rightarrow x \notin U(y) \Rightarrow U(x) \neq U(y)$ . L'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{B}} \\ x & \longmapsto & U(x) \end{array} \quad (6.2)$$

è iniettiva, dunque  $\widetilde{\mathcal{B}}$  non è in iniezione con i naturali e pertanto  $\widetilde{\mathcal{B}}$  non è numerabile.



## 6.2 SUCCESIONI

### DEFINIZIONE 6.2.0. SUCCESIONE.

Una **successione** in uno spazio topologico  $X$  è una funzione:  $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$  che indichiamo con  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}$ .

### DEFINIZIONE 6.2.1. CONVERGENZA DI UNA SUCCESIONE.

Sia  $\{a_n\}$  una successione in  $X$ . Diciamo che  $\{a_n\}$  **converge** a  $p \in X$  se  $\forall U \in I(p) \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U, \forall n \geq n_0$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $X$  è di **Hausdorff**, una successione convergente ha un **unico** limite.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\{a_n\}$  converga a  $p$  e  $q$ . Mostriamo che  $p = q$ .

Siano  $U \in I(p)$  e  $V \in I(q)$ .

- Siccome  $\{a_n\}$  converge a  $p$ ,  $\exists n_0$  tale che  $a_n \in U, \forall n \geq n_0$ .
- Siccome  $\{a_n\}$  converge a  $q$ ,  $\exists n_1$  tale che  $a_n \in V, \forall n \geq n_1$ .

$$\text{Allora } a_n \in U \cap V \quad \forall n \geq \max_{n_0, n_1} \implies U \cap V \neq \emptyset \implies p = q$$

L'ultima implicazione deriva dal fatto che  $X$  è di **Hausdorff**. Infatti, se in **Hausdorff**  $p \neq q \implies U \cap V = \emptyset$ , vale anche la sua negazione:  $U \cap V \neq \emptyset \implies p = q$ .  $\square$

### DEFINIZIONE 6.2.2. LIMITE.

Se  $X$  è di **Hausdorff** e  $\{a_n\}$  è convergente, ha senso parlare del **limite** della successione:

$$p = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (6.3)$$

Se  $X$  non è di **Hausdorff**, la stessa successione può convergere a più punti, dunque non esiste il limite della successione.

**ESEMPI.**

- Se  $X$  ha la topologia banale  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ , l'unico intorno di qualunque punto è  $X$ . Allora ogni successione  $\{a_n\}$  in  $X$  converge sempre ad un qualunque punto  $p$ .
- Se  $X$  ha la topologia discreta,  $\{a_n\}$  successione in  $X$  converge a  $p \iff \exists n_0 : a_n = p, \forall n \geq n_0$ , cioè se la successione è finitamente costante. Infatti, nella topologia discreta anche il singoletto  $\{p\}$  è intorno di  $p$ , dunque eventualmente la successione avrà solo termini nel singoletto.

**OSSERVAZIONE.** Se  $X$  spazio metrico:

$$a_n \text{ CONVERGE A } p \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad (6.4)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ )  $U = B_\varepsilon(p)$  è l'intorno di convergenza che soddisfa l'implicazione.

$\impliedby$ ) Sia  $U \in I(p)$ . Allora  $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(p) \subseteq U$ . Ma allora, dato che per le ipotesi  $\exists n_0 : d(p, a_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ , cioè  $a_n \in B_\varepsilon(p) \subseteq U \implies a_n \in U \forall n \geq n_0$ .  $\square$

### 6.2.1 Punti di accumulazione

**DEFINIZIONE 6.2.3.** PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER LA SUCCESSIONE.

Un punto  $p \in X$  è **punto di accumulazione per la successione**  $\{a_n\}$  se:

$$\forall U \in I(p), \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n \in U \quad (6.5)$$

**ESERCIZIO.** Se  $X$  è spazio metrico, allora:

$$p \text{ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER } a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad (6.6)$$

**DEFINIZIONE 6.2.4.** PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER IL SOTTOINSIEME E DERIVATO.

Un punto  $p \in X$  è **punto di accumulazione per il sottoinsieme**  $B \subseteq X$  se:

$$\forall U \in I(p), \exists b \in B : b \in U \setminus \{p\} \quad (6.7)$$

L'insieme dei punti di accumulazione per il sottoinsieme  $B$  è chiamato **derivato** di  $B$ .

**ESERCIZIO.** Data la successione  $\{a_n\}$  in  $X$  e definito  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ :

- $p \in X$  punto di accumulazione per la successione non è mai punto di accumulazione per l'insieme  $A$ .
- $p \in X$  punto di accumulazione per l'insieme  $A$  in generale non è punto di accumulazione per la successione; se  $X$  è metrico allora vale l'implicazione.

### 6.2.2 Sottosuccessioni

**DEFINIZIONE 6.2.5. SOTTOSUCCESSIONE.**

Una **sottosuccessione** di  $\{a_n\}$  è la composizione di  $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$  con un'applicazione *strettamente crescente*  $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$   $n \longmapsto k(n)$ . Si indica con  $\{a_{k_n}\}$ .

**LEMMA 6.2.0.**  $\blacktriangle$  Sia  $\{a_n\}$  una successione su  $X$  e  $p \in X$ . Valgono le seguenti implicazioni:

$$\textcircled{1} \{a_n\} \text{ converge a } p \quad (6.8)$$

$$\Downarrow$$

$$\textcircled{2} \{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \quad (6.9)$$

$$\Downarrow \textcircled{*}$$

$$\textcircled{3} p \text{ è un punto di accumulazione per } \{a_n\} \quad (6.10)$$

$$\Downarrow \textcircled{**}$$

$$\textcircled{4} p \in \overline{A} \text{ dove } A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \quad (6.11)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\textcircled{1} \implies \textcircled{2}$  La sottosuccessione convergente è la successione stessa.

$\textcircled{2} \implies \textcircled{3}$  Sia  $\{a_{k(n)}\}$  una sottosuccessione convergente a  $p$  e sia  $U \in I(p)$ .

Se  $a_{k(n)}$  converge a  $p$  si ha che  $\exists n_0 : a_{k(n)} \in U, \forall n \geq n_0$ . Poichè  $k(n)$  è strettamente crescente,  $\exists n_1 : k(n) \geq N, \forall n \geq n_1$ . Allora preso:

$$n = \max\{n_0, n_1\}$$

Abbiamo che  $a_{k(n)} \in U, k(n) \geq N$ .<sup>a</sup> Segue che  $p$  è punto di accumulazione per  $\{a_n\}$ .

$\textcircled{3} \implies \textcircled{4}$   $p \in \overline{A} \iff \forall U \in I(p) A \cap U \neq \emptyset$ . Allora sia  $U$  intorno di  $p$ : voglia che  $U \cap A \neq \emptyset$ . Essendo  $p$  punto di accumulazione per  $\{a_n\}$ ,  $\exists n a_n \in U \implies U \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

<sup>a</sup>L'intorno  $U$  è arbitrario.

**LEMMA 6.2.1.** Sia  $X$  primo numerabile,  $\{a_n\}$  successione in  $X$  e  $p \in X$ . Allora vale anche il viceversa di  $\textcircled{*}$ , cioè:

$$\{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \iff p \text{ è di accumulazione per } \{a_n\} \quad (6.12)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Vale per  $\textcircled{*}$ .

$\impliedby$ ) Sia  $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  sistema fondamentale di intorni di  $p$  numerabile per ipotesi ( $X$  primo numerabile). Consideriamo i seguenti insiemi:

$$\widetilde{U}_m := U_1 \cap \dots \cap U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

■  $\widetilde{U}_m$  è intorno di  $p$ , in quanto intersezione *finita* di intorni di  $p$ .

■  $\widetilde{U}_m = U_1 \cap \dots \cap U_m \supseteq U_1 \cap \dots \cap U_m \cap U_{m+1} = \widetilde{U}_{m+1}$ .

Segue che  $\{\widetilde{U}_m\}$  è ancora un sistema fondamentale di intorni (numerabile) di  $p$ , infatti, se  $V$  è intorno di  $p$ ,  $\exists m : V \supseteq U_m \supseteq \widetilde{U}_m$ .

A meno di sostituire  $U_m$  con  $\widetilde{U}_m$ , possiamo supporre che  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$ .

Costruiamo una sottosuccessione di  $\{a_n\}$  convergente a  $p$ . Sicuramente:

■  $\exists k(1) \in \mathbb{N} : a_{k(1)} \in U_1$ .

■  $\exists k(2) \geq k(1) + 1 : a_{k(2)} \in U_2$ .

E così via:  $\forall m \exists k(m) \geq k(m-1) + 1$  tale che  $a_{k(m)} \in U_m$ , ottenendo una sottosuccessione  $\{a_{k(m)}\}$ . Notiamo in particolare che:

☺ Se  $m_2 \geq m_1$ , allora  $a_{k(m_2)} \in U_{m_2} \subseteq U_{m_1}$ .

Mostriamo che  $\{a_{k(n)}\}$  converge a  $p$ .

Sia  $V$  intorno di  $p$ . Dal sistema fondamentale di intorni  $\exists m_0$  tale che  $U_{m_0} \subseteq V$ . Da ☺ si ha che  $\forall m \geq m_0 \ a_{k(m)} \in U_{m_0} \subseteq V$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 6.2.0.** CARATTERIZZAZIONE DELLA CHIUSURA IN TERMINI DI SUCCESSIONI.

Sia  $X$  uno spazio topologico *primo numerabile*. Sia  $Y \subseteq X$  e  $p \in X$ . Sono equivalenti

- Esiste una successione in  $Y$  convergente a  $p$ .
- $p$  è di accumulazione per una successione in  $Y$ .
- $p \in \overline{Y}$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

①  $\Rightarrow$  ② Non è necessario che  $X$  sia primo numerabile, è immediato dal lemma 6.2 (pag. 71).

②  $\Rightarrow$  ③ Non è necessario che  $X$  sia primo numerabile. Se  $p$  di accumulazione per  $\{a_n\}$  con  $a_n \in Y \ \forall n \Rightarrow A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ . Allora segue dal lemma 6.2 (pag. 71) che  $p \in A = \overline{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{Y}$ .

③  $\Rightarrow$  ① Sia  $\{U_n\}$  un sistema fondamentale di intorni di  $p$  tale che  $U_n \supseteq U_{n+1} \ \forall n$ . Allora:

$$p \in \overline{Y} \Rightarrow \forall n \ Y \cap U_n \neq \emptyset \Rightarrow \forall n \ \exists y_n \in Y \cap U_n$$

In modo analogo a ☺ (pag. 72), se  $n_2 \geq n_1$ , allora  $y_{n_2} \in U_{n_2} \subseteq U_{n_1}$ . Allora  $\{y_n\}$  è una successione in  $Y$ , mostriamo che converge a  $p$ .

Sia  $V$  intorno di  $p$ . Dal sistema fondamentale di intorni  $\exists n_0$  tale che  $U_{n_0} \subseteq V$ . Dal ragionamento analogo a ☺ si ha che  $\forall n \geq n_0 \ y_n \in U_{n_0} \subseteq V$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Preso uno spazio topologico  $X$  primo numerabile, se  $Y \subseteq X$  è un sottoinsieme **denso** (cioè  $\overline{Y} = X$ ) allora la proposizione precedente ogni elemento  $p \in X$  ammette una successione in  $Y$  convergente al punto  $p$ .

In  $\mathbb{R}$ , ciò comporta che ogni *reale* può essere approssimato da una successione di soli *razionali*, dato che  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**PROPOSIZIONE 6.3.0.** (MANETTI, 4.46)

Sia  $X$  spazio topologico e sia  $K_n \subseteq X \forall n \in \mathbb{N}$  un sottospazio chiuso, *compatto* e non vuoto. Supponiamo inoltre che:

$$K_n \supseteq K_{n+1} \forall n \implies K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

Allora:  $\bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Iniziamo in  $K_1$ . Consideriamo  $A_n := K_1 \setminus K_n$ :

- $K_n$  chiuso in  $X \implies K_n$  chiuso in  $K_1$ . Allora  $A_n$  complementare di un chiuso, dunque aperto in  $K_1 \forall n \geq 1$ .
- $K_n \supseteq K_{n+1} \implies A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \geq 1$ .

Sia allora  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = A_N = K_1 \setminus \underbrace{K_N}_{\neq \emptyset} \subsetneq K_1$$

Allora nessuna unione *finita* degli  $A_n$  ricopre  $K_1$ , cioè  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subsetneq K_1$ , altrimenti  $\{A_n\}$  sarebbe un ricoprimento aperto di  $K_1$  che *non* ammette sottoricoprimento finito (assurdo, in quanto  $K_1$  è *compatto*!).

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} K_1 \setminus K_n = K_1 \setminus \left( \bigcap_{n \geq 1} K_n \right) \subsetneq K_1 \implies \bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$$

□

**LEMMA 6.3.0.** In uno spazio topologico *compatto*  $X$  ogni successione in  $X$  ha punti di accumulazione.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{a_n\}$  successione in  $X$ . Per definizione:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per } \{a_n\} \iff \forall U \in \mathcal{I}(p), \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n \in U$$

Per  $N$  fissato sia  $A_N := \{a_n \mid n \geq N\} \subseteq X$ . Allora:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per } \{a_n\} \iff \forall U \in \mathcal{I}(p), \forall N \in \mathbb{N} U \cap A_N \neq \emptyset \iff \forall N \in \mathbb{N}, p \in \overline{A_N} := C_N$$

Dunque  $\{\text{punti di accumulazione di } \{a_n\}\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} C_N$  e:

$$\{a_n\} \text{ ha punti di accumulazione} \iff \bigcap_{N \in \mathbb{N}} C_N \neq \emptyset$$

- $A_N \neq \emptyset$  per definizione, dunque  $C_N$  è un chiuso non vuoto.
- $X$  è compatto,  $C_N$  chiuso in  $X$  compatto  $\implies C_N$  *compatto*.

Poiché  $A_N = \{a_n \mid n \geq N\} \supseteq A_{N+1} = \{a_n \mid n \geq N+1\}$ , si ha:

$$C_N = \overline{A_N} \subseteq \overline{A_{N+1}} = C_{N+1}$$

Abbiamo trovato una successione di compatti contenuto l'uno nel successivo. Allora per la proposizione 6.4 (pag. 73, (MANETTI, 4.46)). si ha che  $\bigcap_{n \geq 1} C_n \neq \emptyset$ . Segue che esiste un punto di accumulazione per la successione.  $\square$

### 6.3.1 Compattezza per successioni

**DEFINIZIONE 6.3.0.** COMPATTO PER SUCCESSIONI.

Sia  $X$  spazio topologico.  $X$  si dice **compatto per successioni** se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

**OSSERVAZIONE.** Per il lemma 6.2  $\triangle$  (pag. 71), se  $X$  è compatto per successioni allora ogni successione in  $X$  ha un punto di accumulazione.

**LEMMA 6.3.1.** Sia  $X$  primo numerabile. Allora:

1.  $X$  compatto per successioni  $\iff$  Ogni successione in  $X$  ha un punto di accumulazione.
2.  $X$  compatto  $\implies X$  compatto per successioni.

**DIMOSTRAZIONE.**

- I  $\implies$ ) Vale per l'osservazione precedente.  
 $\impliedby$ ) Vale per il lemma 6.3, pag. 71: se ogni successione ha un punto di accumulazione in  $X$  primo numerabile, allora ogni sottosuccessione ammette una sottosuccessione convergente a  $p$ , cioè  $X$  è compatto per successioni.
- II Se  $X$  è compatto, allora ogni successione in  $X$  ha dei punti di accumulazione e per il punto 1) segue che  $X$  è compatto per successioni.  $\square$

**PROPOSIZIONE 6.3.1.** CARATTERIZZAZIONE DELLA COMPATTEZZA IN TERMINI DI SUCCESSIONI

Sia  $X$  uno spazio topologico a base numerabile. Allora sono equivalenti:

1.  $X$  compatto.
2.  $X$  compatto per successioni
3. Ogni successione in  $X$  ammette un punto di accumulazione.

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo già che  $2) \iff 3)$  e  $1) \implies 2)$  dal lemma precedente. Dobbiamo dimostrare  $2) \implies 1)$ . Dimostriamo per contronominale ( $\neg 1) \implies \neg 2$ ): se  $X$  non è compatto, allora  $X$  non è compatto per successioni, cioè esiste una sottosuccessione in  $X$  che non ha alcuna sottosuccessione convergente.

- $X$  non compatto  $\implies \exists \tilde{\mathcal{A}}$  ricoprimento aperto di  $X$  che non ha sottoricoprimenti finiti.
- $X$  a base numerabile  $\implies \exists \mathcal{A}$  sottoricoprimento di  $\tilde{\mathcal{A}}$  che sia numerabile.

Poiché ogni sottoricoprimento di  $\mathcal{A}$  è anche un sottoricoprimento di  $\tilde{\mathcal{A}}$ , significa che  $\mathcal{A}$  non ha sottoricoprimenti finiti. Definiamo:

$$\mathcal{A} := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$



Allora:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{j=1}^n A_j \subsetneq X \implies \exists x_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$$

Costruisco così una successione  $\{x_n\}$  successione in  $X$  tale per cui:

$$\odot x_n \notin A_j \quad \forall j \leq n.$$

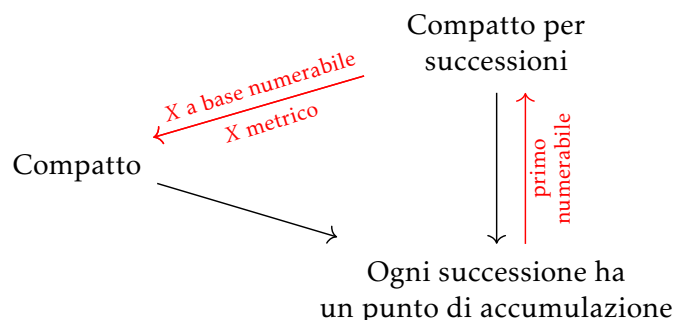
Mostriamo che  $\{x_n\}$  non ha sottosuccessioni convergenti. Sia  $\{x_{k(n)}\}$  una sottosuccessione arbitraria di  $\{x_n\}$  e sia  $p \in X$ , mostriamo che essa non converga ad un qualunque  $p$ .

- $\mathcal{A}$  è un (sotto)ricoprimento di  $X \implies \exists N : p \in A_N$
- Da  $\odot$  (pag. 75) abbiamo che  $x_n \notin A_N \quad \forall n \geq N$  (dato che  $x_n \notin A_j \quad \forall j \leq n$ , in particolare in  $A_N$  per ogni  $n \geq N$ ); si ha allora  $x_{k(n)} \notin A_N \quad \forall n : k(n) \geq N$ .

Essendo  $k(n)$  crescente,  $\exists n_0 : k(n) \geq N \quad \forall n \geq n_0$ . Segue che se  $n \geq n_0$  allora  $x_{k(n)} \notin A_N$ . Poiché  $A_N$  è intorno di  $p$ , segue che  $\{x_{k(n)}\}$  non converge a  $p$ .  $\square$

**TEOREMA 6.3.o.** Sia  $X$  spazio metrico. Allora:

$$X \text{ compatto} \iff X \text{ compatto per successioni} \quad (6.13)$$



## 6.4 SPAZI METRICI COMPLETI

**DEFINIZIONE 6.4.0.** SUCCESSIONE DI CAUCHY.

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una successione  $\{a_n\}$  si dice **di Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, a_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0 \quad (6.14)$$

**DEFINIZIONE 6.4.1.** SPAZIO METRICO COMPLETO.

Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

**OSSERVAZIONI.**

1. Ogni successione *convergente* è di *Cauchy*.
2. Una successione di Cauchy è *convergente* se e solo se ha punti di accumulazione.
3. Una successione di Cauchy è *convergente* se ha una *sottosuccessione convergente*.
4. Se  $X$  è *compatto*, allora ogni successione di Cauchy è *convergente*.
5. Se  $X$  è spazio metrico *compatto*, allora  $X$  è spazio metrico *completo*; non è vero il

viceversa.

**DIMOSTRAZIONE.**

I Se  $a_n \rightarrow p$  per  $n \rightarrow +\infty$  significa che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, p) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Considerati  $n, m \geq n_0$  si ha:

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(p, a_m) < 2\varepsilon \quad (6.15)$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  vale la convergenza.

II  $\Rightarrow$ ) Sempre vera per 6.2 (pag. 71).

$\Leftarrow$ ) Sia  $\{a_n\}$  una successione di Cauchy e sia  $p$  un punto di accumulazione. Sia  $\varepsilon > 0$ : dalla definizione di successione di Cauchy  $\exists n_0$  tale per cui  $d(a_n, a_m) < \varepsilon \forall n, m \geq n_0$ .

Essendo  $p$  di accumulazione,  $\exists n_1 \geq n_0$  tale per cui  $d(p, a_{n_1}) < \varepsilon$ . Allora, se  $n \geq n_0$  si ha:

$$d(a_n, p) \leq d(a_n, a_{n_1}) + d(a_{n_1}, p) < 2\varepsilon$$

Dunque  $\{a_n\}$  converge a  $p$ .

III Poiché  $X$  è metrico,  $X$  è primo numerabile, dunque avere un punto di accumulazione è equivalente ad avere una sottosuccessione convergente.

IV Se  $X$  è compatto, ogni successione ha punti di accumulazione, in particolare quelle di Cauchy: per il punto 2) tutte le successioni di Cauchy risultano allora convergenti.

V Segue dal punto 4). Un controesempio del viceversa è  $\mathbb{R}^n$ , dato che è completo ma non è compatto (si veda il teorema seguente).  $\square$

**TEOREMA 6.4.o.**  $\mathbb{R}^n$  in metrica euclidea è uno spazio metrico completo.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{a_n\}$  di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$ . Mostriamo che  $\{a_n\}$  è eventualmente limitata<sup>a</sup>. Poiché la successione di Cauchy è definita per ogni  $\varepsilon$ , fissiamo  $\varepsilon = 1$ . Allora:

$$\exists n_0 : \|a_n - a_m\| \leq 1 \forall n, m \geq n_0$$

Sia  $M := \max_{n_0, \dots, n_0} \|a_n\|$ . Se  $n \geq n_0$  si ha:

$$\|a_n\| = \|a_n - a_{n_0} + a_{n_0}\| \leq \|a_n - a_{n_0}\| + \|a_{n_0}\| \leq 1 + M$$

Questo significa che  $\{a_n\} \subseteq \overline{B_{1+M}(0)}$ . Questa palla chiusa è uno spazio metrico *indotto* in  $\mathbb{R}^n$  e compatto, cioè è uno *spazio metrico completo*. Allora la successione di Cauchy, trovandosi in uno spazio metrico completo, converge in esso, e dunque converge anche in  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

<sup>a</sup>Supponendo chiaramente che la successione sia ben definita, ci interessa solamente che la successione sia limitata dopo un  $n_0$ : prima di ciò ho un numero finito di termini  $a_0, \dots, a_{n_0} < \infty$  e posso chiaramente prendere una palla (chiusa) che li contenga, ad esempio di raggio  $M + 1$  con  $M$  definito come nella dimostrazione.

**ATTENZIONE!** La **completezza** *non* è una proprietà topologica! Per esempio,  $\mathbb{R}$  e  $(0, 1)$  con metrica euclidea sono omeomorfi rispetto alla topologia indotta dalla metrica, ma  $\mathbb{R}$  abbiamo appena dimostrato che è completo, mentre  $(0, 1)$  si può vedere che non lo è!



# II

## OMOTOPIA



# OMOTOPIA

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Finora abbiamo visto omeomorfismi tra spazi topologici sotto tanti aspetti diversi, definendo rigorosamente quella che era l'intuizione del magico materiale elastico. Possiamo osservare tuttavia delle “*equivalenze di forma*” che un omeomorfismo è troppo rigido per descriverle.

Ad esempio, si possono considerare *equivalenti* figure con lo stesso numero di buchi. Sotto questo punto di vista, la figura corrispondente alla lettera **O** e quella corrispondente a **P** sono *equivalenti*, dato che hanno entrambe un solo buco, mentre **X** non lo è perché non ne ha. Allo stesso tempo, nessuna di queste è *omeomorfa* all'altra: infatti, se togliamo dalle tre lettera/figure un punto come il nodo di raccordo delle “stanghette” (o per **O** un punto qualunque), otteniamo per **O** una componente connessa, per **P** due e per **X** ben quattro distinte.

Preceduto da un'approfondimento delle componenti connesse (anche per archi), nel presente capitolo formalizzeremo questo tipo di equivalenza più debole e allo stesso tempo più ampia: l'**omotopia**.

## 7.1 LEMMA DI INCOLLAMENTO

### LEMMA 7.1.0. LEMMA DI INCOLLAMENTO

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $X = A \cup B$ . Siano  $f : A \longrightarrow Y$  e  $g : B \longrightarrow Y$  continue tali che  $f(x) = g(x) \ \forall x \in A \cap B$ , cioè  $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ .

Consideriamo l'**incollamento**  $h : X \longrightarrow Y$  definito da:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases} \quad (7.1)$$

Se  $A$  e  $B$  sono entrambi aperti in  $X$  (o entrambi chiusi in  $X$ ), allora  $h$  è continua.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $A$  e  $B$  aperti. Sia  $U \subseteq Y$  aperto. Allora:

$$h^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\subseteq A} \cap \underbrace{g^{-1}(U)}_{\subseteq B}$$

Essendo  $f, g$  continue, segue che  $f^{-1}(U)$  è aperto in  $A$  e  $g^{-1}(U)$  è aperto in  $B$ . In quanto  $A, B$  aperti, per definizione di aperto del sottospazio<sup>a</sup>  $f^{-1}(U)$  e  $g^{-1}(U)$  sono aperti su  $X \implies h^{-1}(U)$  aperto.

Il caso di  $A$  e  $B$  chiusi è esattamente analogo.  $\square$

<sup>a</sup>Poiché un aperto del sottospazio è dato dall'intersezione del sottospazio con un aperto di  $X$ , se abbiamo che anche il sottospazio è aperto di  $X$ , l'intersezione è aperta: in questo caso ogni aperto del sottospazio è anche aperto di  $X$ .

## 7.2 COMPONENTI CONNESSE E COMPONENTI C.P.A.

Riprendiamo la trattazione delle componenti connesse e **c.p.a.** introdotte nel Capitolo 2.

**DEFINIZIONE 7.2.0.** COMPONENTE CONNESSA.

Una **componente connessa** di  $X$  spazio topologico è uno spazio  $C \subseteq X$  **connesso massimale**, tale per cui:

$$C \subseteq A \subseteq X \text{ con } A \text{ connesso} \implies C = A \quad (7.2)$$

**OSSERVAZIONI.**

- Le componenti connesse formano una *partizione* di  $X$ .
- Se  $x \in X$  si può definire la componente connessa che contiene  $x$ :

$$C(x) = \bigcup \{C \subseteq X \mid x \in C, C \text{ connesso}\} \quad (7.3)$$

- Le componenti connesse possono essere viste come classi di equivalenza per la seguente relazione di equivalenza su  $X$ :

$$x, y \in X \quad x \sim_C y \iff \exists C \subseteq X \text{ connesso} : x, y \in C \quad (7.4)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Innanzitutto mostriamo che la relazione è di equivalenza:

- **RIFLESSIVA:**  $x \sim_C x$  è vero, dato che  $\{x\}$  è sempre un connesso.
- **SIMMETRICA:** ovvia dalla definizione.
- **TRANSITIVA:** Supponiamo  $x \sim_C y, y \sim_C z$ . Allora  $\exists C, D \subseteq X$  connessi tale che  $x, y \in C$  e  $y, z \in D$ . Allora  $C \cup D$  contiene sia  $x$  che  $z$ . Inoltre, essendo  $y \in C \cap D \implies C \cap D \neq \emptyset$ , dunque  $C \cup D$  è un connesso: vale  $x \sim_C z$ .

Mostriamo che le classi di equivalenza sono le componenti connesse per  $x$ .

$\subseteq$ ) Se  $C \subseteq X$  è una componente connessa, allora  $\forall x, y \in C$  si ha  $x \sim_C y$ , cioè  $C$  è interamente contenuta in  $C_0 = [x] = [y]$  classe di equivalenza per  $\sim_C$ :  $C \subseteq C_0$ .

$\supseteq$ ) Sia  $z \in C_0$  classe di equivalenza e sia  $x \in C$  componente connessa. Allora:  $x \sim_C z \implies \exists T \subseteq X$  connesso :  $x, z \in T$ .

Consideriamo  $C \cup T$ .  $C$  e  $T$  sono connessi,  $x \in C \cap T \implies C \cap T \neq \emptyset$ :  $C \cup T$  è ancora connessa. In quanto  $C$  è componente connessa, poiché  $C \subseteq C \cup T$ , per definizione segue che  $C = C \cup T$ , cioè  $T \subseteq C$ . Allora  $z \in C$  e  $C_0 \subseteq C$ .  $\square$



**DEFINIZIONE 7.2.1.** COMPONENTE C.P.A..

Una **componente c.p.a.** di  $X$  è una classe di equivalenza per la relazione  $\sim_A$  così definita:

$$x, y \in X \quad x \sim_A y \iff \exists \alpha \text{ CAMMINO IN } X : \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \quad (7.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Mostriamo che sia una relazione di equivalenza:

- **RIFLESSIVA:**  $x \sim_A x$  è vero, dato che esiste sempre il **cammino costante** nel punto  $x$ :

$$\begin{aligned} c_x : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x \end{aligned} \quad (7.6)$$

- **SIMMETRICA:** se  $x \sim_A y$  sappiamo che  $\exists \alpha : I \longrightarrow X$  tale per cui  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ . Possiamo definire il **cammino inverso**:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

- ◇  $\bar{\alpha}$  è continuo, perché composizione di applicazioni continue:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} X \\ t &\longmapsto 1-t \longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

- ◇  $\bar{\alpha}(0) = \alpha(1) = y, \bar{\alpha}(1) = \alpha(0) = x$ .

Allora il cammino  $\bar{\alpha}$  definisce  $y \sim_A x$ .

- **TRANSITIVA:** Supponiamo  $x \sim_A y, y \sim_A z$ . Allora  $\exists \alpha, \beta : I \longrightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y, \beta(0) = y, \beta(1) = z$ . Usando la **giunzione di cammini**:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (7.8)$$

In particolare:

$$\begin{cases} (\alpha * \beta)(0) = \alpha(0) \\ (\alpha * \beta)(1) = \beta(1) \end{cases}$$

Poichè  $\alpha * \beta$  soddisfa le ipotesi del lemma di incollamento, essa è continua e collega con un cammino unico  $x$  e  $z$ , dunque vale  $x \sim_A z$ .

□

**OSSERVAZIONI.**

1. Le componenti **c.p.a.** formano una partizione di  $X$
2. Sia  $C \subseteq X$  un sottospazio **c.p.a.** per cui vale che  $C \subseteq A \subseteq X$  con  $A$  **c.p.a.**  $\implies C = A$ , allora  $C$  è una componente **c.p.a.**
3. In generale le componenti **c.p.a.** non sono né aperte né chiuse.
4. Se  $A$  è una componente **c.p.a.**, allora  $A$  è **c.p.a.** e dunque *connessa*:  $A$  è allora interamente contenuta in una componente connessa, cioè le componenti connesse sono unioni di componenti **c.p.a.**

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il punto 2. Supponiamo per assurdo che esista  $z \in X \setminus C$  tale che esista un cammino  $\alpha$  tra un punto  $x \in C$  e  $z$ . Definiamo  $A := C \cup \text{Im } \alpha$ , con  $\text{Im } \alpha$  il percorso di  $\alpha$  in  $X$ . Si ha che  $A$  è **c.p.a.**, essendo esso unione di spazi **c.p.a.**:  $C$  lo è per ipotesi e  $\text{Im } \alpha$  lo è banalmente per definizione. In particolare  $A \subseteq C$ , dunque per ipotesi  $A = C$ . Ma allora:

$$z \in A = C \implies z \in C \implies \text{Assurdo!}$$

Segue che *non* esiste alcun cammino con punti esterni a  $C$ . Dunque  $C$  è componente connessa di  $X$ .  $\square$

**ESEMPIO.** Ricordiamo l'esempio della *pulce e il pettine*, cioè lo spazio  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  descritto da:

$$\begin{aligned} X &= Y \cup \{p\} \\ Y &= (I \times \{0\}) \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} (\{r\} \times I) \\ p &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

Questo spazio  $X$  è connesso, non **c.p.a.**: infatti, le componenti **c.p.a.** sono due,  $Y$  e  $\{p\}$ .

### 7.3 OMOTOPIA TRA FUNZIONI CONTINUE

**INTUITIVAMENTE...** Dati due spazi topologici  $X, Y$  e due funzioni  $f, g : X \longrightarrow Y$ , si ha un'**omotopia** tra le due funzioni se una funzione può essere “*deformata in modo continuo*” nell'altra (e viceversa).

Per far ciò vogliamo trovare una famiglia di funzioni  $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$  tale che ogni funzione  $f_t : X \longrightarrow Y$  sia continua e vari “*con continuità*” al variare di  $t \in [0, 1]$  fra  $f_0 = f$  e  $f_1 = g$ .

**DEFINIZIONE 7.3.0. OMOTOPIA.**

Due funzioni continue  $f, g : X \longrightarrow Y$  si dicono **omotope** se  $\exists F : X \times I \longrightarrow Y$  continua tale che:

$$F(x, 0) = f(x) \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X \quad (7.9)$$

La funzione  $F$  è detta **omotopia** tra  $f$  e  $g$ ; denotiamo che le funzioni sono omotope con  $f \sim g$ .

Inoltre, definiamo gli elementi della famiglia di funzioni  $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$  nel seguente modo:

$$\forall t \ f_t := F(\bullet, t) : X \longrightarrow Y : f_0 = f, f_1 = g \quad (7.10)$$

**OSSERVAZIONE.** Ricordando la definizione di *segmento* (29, 2.5), la funzione:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \overline{PQ} \\ t &\longmapsto tA + (1-t)B \end{aligned}$$

È biunivoca ed, in particolare, è omeomorfismo.

**ESEMPIO.** Dato un sottospazio  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso, allora spazio topologico  $X$  e per ogni funzione  $f, g : X \longrightarrow Y$  continua, allora  $f$  e  $g$  sono omotope.

**DIMOSTRAZIONE.** L'omotopia è:

$$\begin{aligned} F : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

- $F$  è ben definita. Se  $x \in X$  abbiamo  $f(x), g(x) \in Y$  convesso: esiste allora  $\overline{f(x)g(x)} \subseteq Y$ , cioè  $(1-t)f(x) + tg(x) \in Y \forall x \in X, t \in I$ .
- $F$  è continua perché composizione di funzioni continue:

$$\begin{aligned} X \times I &\longrightarrow Y \times Y \times I \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto (f(x), g(x), t) \longmapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

- $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ . □

**OSSERVAZIONE.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  (non necessariamente convesso!) e  $f, g : X \longrightarrow Y$  continua tale che  $\overline{f(x)g(x)} \subseteq Y, \forall x \in X$ . Allora  $f$  è omotopa a  $g$  con la stessa omotopia  $F$  definita nel caso di  $Y$  convesso.

**ATTENZIONE!** Nel parlare di omotopie è estremamente importante verificare che siano ben definite! Infatti, prendiamo ad esempio  $Y = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  e le funzioni costanti in  $p$  e in  $q$ , rispettivamente  $f : X \longrightarrow S^1$  e  $g : X \longrightarrow S^1$ .  

$$\begin{aligned} x &\longmapsto p & x &\longmapsto q \end{aligned}$$

Considerata  $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $F(x, y) = (1-t)f(x) + tg(x) = (1-t)p + tq$ , essa non è ben definita in  $Y$ : presi due punti della sfera  $S^1$  il segmento non è mai contenuto in essa!

**LEMMA 7.3.0.** Siano  $X, Y$  due spazi topologici. L'omotopia è una *relazione di equivalenza* sull'insieme delle funzioni continue da  $X$  e  $Y$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- **RIFLESSIVA:** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua. Consideriamo:

$$\begin{aligned} F : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Essa è:

- ◇ Continua perché lo è  $f$ .
- ◇  $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x) \forall x \in X$ .

Allora  $f \sim f$ .

- **SIMMETRICA:** Supponiamo  $f \sim g$ , cioè  $\exists F : X \times I \longrightarrow Y$  tale che:

$$\begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in X$$

Consideriamo:

$$\begin{aligned} G : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto F(x, 1-t) \end{aligned}$$

Essa è:

- ◇ Continua perché composizione di funzioni continue.
  - ◇  $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$ ,  $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$ .
- Allora  $g \sim f$ .

- **TRANSITIVA:** Siano  $f, g, h : X \longrightarrow Y$  continue,  $f \sim g$  e  $g \sim h$ , cioè:

$$\begin{aligned} \exists F : X \times I &\longrightarrow Y, \quad G : X \times I \longrightarrow Y \\ \begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases} & \quad \begin{cases} G(x, 0) = g(x) \\ G(x, 1) = h(x) \end{cases} \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Consideriamo  $H : X \times I \longrightarrow Y$  :

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x, 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

- ◇  $H$  è continua per il lemma di incollamento:
    - \* È ben definita per  $t = \frac{1}{2}$ .
    - \*  $H$  è continua separatamente su  $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$  e  $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , entrambi chiusi.
  - ◇  $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x) \quad \forall x \in X$ .
- Allora  $f \sim h$ . □

**LEMMA 7.3.1. COMPOSIZIONE DI OMOTOPIE (MANETTI 10.13)**

Siano  $X, Y, Z$  spazi topologici e siano  $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$  continue ed omotope,  $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$  continue ed omotope. Allora  $g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2 : X \longrightarrow Z$  sono omotope:

$$f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2 \implies g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2 \quad (7.11)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo che:

- $\exists F : X \times I \longrightarrow Y$  continua tale che  $F(x, 0) = f_1(x)$ ,  $F(x, 1) = f_2(x) \quad \forall x \in X$ .
- $\exists G : Y \times I \longrightarrow Z$  continua tale che  $G(y, 0) = g_1(y)$ ,  $G(y, 1) = g_2(y) \quad \forall y \in Y$ .

Sia:

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow Z \\ (x, t) &\longmapsto G(F(x, t), t) \end{aligned}$$

- $H$  è continua perché composizione di funzioni continue.
- $H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_1(x), 0) = g_1(f_1(x)) \quad \forall x \in X$ .
- $H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = G(f_2(x), 1) = g_2(f_2(x)) \quad \forall x \in X$ .

Allora  $H$  è l'omotopia cercata. □

## 7.4 EQUIVALENZA OMOTOPICA

### DEFINIZIONE 7.4.0. OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI.

Siano  $X, Y$  due spazi topologici. Diciamo che  $X$  e  $Y$  sono **omotopicamente equivalenti**, o che hanno lo stesso **tipo di omotopia**, se esistono due applicazioni continue:

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \longrightarrow X \quad (7.12)$$

Tali che:

$$g \circ f \sim Id_X \quad \text{e} \quad f \circ g \sim Id_Y \quad (7.13)$$

In tal caso  $f$  e  $g$  si dicono **equivalenze omotopiche**.

### OSSERVAZIONI.

1. Se  $X$  e  $Y$  sono *omeomorfi*, allora sono anche *omotopicamente equivalenti*.
2. Consideriamo  $X = \mathbb{R}^n$  in topologia Euclidea e  $Y = \{1 \text{ punto}\}$ . Allora  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti.

### DIMOSTRAZIONE.

- I L'omotopia è una relazione riflessiva, dunque se abbiamo  $h = k$  e  $h \sim h$ , allora si ha  $h \sim k$ . Nel caso di un isomorfismo, preso  $f$  e la sua inversa  $g$ , possiamo affermare:

$$\begin{cases} g \circ f = Id_X \\ f \circ g = Id_Y \end{cases} \implies \begin{cases} g \circ f \sim Id_X \\ f \circ g \sim Id_Y \end{cases}$$

- II Consideriamo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow Y = \{1 \text{ punto}\} & g : Y = \{1 \text{ punto}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & & \text{punto} &\longmapsto g(\text{punto}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$f$  e  $g$  sono *continue*, inoltre:

$$f \circ g : Y = \{1 \text{ punto}\} \longrightarrow Y = \{1 \text{ punto}\} \implies f \circ g = Id_Y$$

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{0} \end{aligned} \implies g \circ f = O_{\mathbb{R}^n} \text{ (applicazione nulla)}$$

Per l'osservazione 1) dato che vale  $f \circ g = Id_Y$  allora  $f \circ g \sim Id_Y$ .

Abbiamo che  $g \circ f = O_{\mathbb{R}^n}$  è omotopa a  $Id_{\mathbb{R}^n}$ , in quanto  $\mathbb{R}^n$  è *convesso* e due applicazioni continue a valori in  $\mathbb{R}^n$  sono sempre omotope, come dimostrato nell'esempio 7.2 (pag. 85). Una di queste, ad esempio, è la seguente:

$$F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\bar{x}, t) = t \cdot \bar{x}$$

- $F$  è continua.
- $F(\bar{x}, 0) = \bar{0} = (g \circ f)(\bar{x})$ .
- $F(\bar{x}, 1) = \bar{x} = Id_{\mathbb{R}^n}(\bar{x})$ .

□

**ATTENZIONE!** Se  $n > 0$ ,  $\mathbb{R}^n$  e  $\{1 \text{ punto}\}$  *non* sono omeomorfi, dato che *non* possono essere in corrispondenza biunivoca.

**ESERCIZIO.** Essere omotopicamente equivalenti è una relazione di equivalenza sull'insieme degli spazi topologici.

**DIMOSTRAZIONE.**

- **RIFLESSIVA:**  $X \sim X \iff \exists f, g$  continue per cui  $g \circ f \sim Id_X$ ,  $f \circ g \sim Id_X$ . Ponendo  $f \equiv Id_X \equiv g$  vale banalmente  $g \circ f = f \circ g = Id_X \sim Id_X$ .
- **SIMMETRICA:** Da  $X \sim Y$  sappiamo che  $\exists f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : Y \longrightarrow X$  continue per cui  $g \circ f \sim Id_X$ ,  $f \circ g \sim Id_Y$ ; se vogliamo mostrare  $Y \sim X$  dobbiamo cercare  $h : Y \longrightarrow X$ ,  $k : X \longrightarrow Y$  per cui  $k \circ h \sim Id_Y$ ,  $h \circ k \sim Id_X$ . Ponendo  $h \equiv g$  e  $k \equiv f$ , esse soddisfano la richiesta.
- **TRANSITIVA:** Da  $X \sim Y$  e  $Y \sim Z$ :
  - ◇  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : Y \longrightarrow X$  continue tali che  $g \circ f \sim Id_X$ ,  $f \circ g \sim Id_Y$ .
  - ◇  $h : Y \longrightarrow Z$ ,  $k : Z \longrightarrow Y$  continue tali che  $k \circ h \sim Id_Y$ ,  $h \circ k \sim Id_Z$ .
 Vogliamo trovare  $a : X \longrightarrow Z$ ,  $b : Z \longrightarrow X$  continue tali che  $b \circ a \sim Id_X$ ,  $a \circ b \sim Id_Z$ . Se definiamo:

$$a := h \circ f : X \longrightarrow Z$$

$$b := g \circ k : Z \longrightarrow X$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} b \circ a &= (g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \\ a \circ b &= (h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \end{aligned}$$

Dalla composizione di funzioni omotope:

$$\begin{aligned} f \sim f & \implies (k \circ h) \circ f \sim Id_Y \circ f \\ k \circ h \sim Id_Y & \implies g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ Id_Y \circ f \\ g \sim g & \implies g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ Id_Y \circ f \\ g \circ (k \circ h) \circ f & \sim g \circ Id_Y \circ f \\ \parallel & \quad \parallel \\ b \circ a & \sim g \circ f \\ & \quad \wr \\ & \quad Id_X \end{aligned}$$

$\implies b \circ a \sim Id_X$ . In modo analogo:

$$\begin{aligned} k \sim k & \implies (f \circ g) \circ k \sim Id_Y \circ k \\ f \circ g \sim Id_Y & \implies h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ Id_Y \circ k \\ h \sim h & \implies h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ Id_Y \circ k \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
h \circ (f \circ g) \circ k & \sim & h \circ Id_Y \circ k \\
\parallel & & \parallel \\
a \circ b & \sim & h \circ k \\
& & \wr \\
& & Id_Z
\end{array}$$

$$\Rightarrow a \circ b \sim Id_Z.$$

□

## 7.4.1 Spazi contraibili

**DEFINIZIONE 7.4.1.** SPAZIO CONTRAIBILE.

Uno spazio topologico è **contraibile** o *contrattile* se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

**ESEMPI.**

1.  $\mathbb{R}^n$  è contraibile: si veda l'osservazione precedente.
2. Dall'esempio seguente, per transitività del tipo di equivalenza, si può affermare che *tutti* i  $\mathbb{R}^n$  sono tutti omotopicamente equivalenti tra di loro.
3. Ogni sottospazio  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *convesso* è contraibile.
4. Ogni sottospazio  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *stellato* è contraibile.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l'esempio 4): l'esempio 3) è automaticamente dimostrato perché un convesso è stellato per ogni suo punto.

Sia  $P_0 \in X$  il punto rispetto al quale  $X$  è stellato e consideriamo l'inclusione del singoletto  $\{P_0\}$  in  $X$  e la funzione costante da  $X$  al punto, entrambe costanti:

$$i : \{P_0\} \hookrightarrow X \quad g : X \longrightarrow \{P_0\}$$

Allora consideriamo:

- $g \circ i : \{P_0\} \longrightarrow \{P_0\}$  è pari all'identità  $Id_{\{P_0\}}$  del singoletto e dunque ovviamente omotopa ad essa.
- $\varphi := i \circ g : X \longrightarrow X$   
 $P \longmapsto P_0$  è una funzione costante. Vogliamo dimostrare che  $\varphi$  è

omotopa a  $Id_X$ . Siccome  $X$  è stellato rispetto a  $P_0$ ,  $\forall P \in X$  si ha  $\overline{PP_0} \subseteq X$ . Allora definiamo la funzione:

$$\begin{array}{ccc}
F : X \times I & \longrightarrow & X \\
(P, t) & \longmapsto & tP + (1-t)P_0
\end{array}$$

Ha senso definire ciò proprio perché su  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ci sono le operazioni di somma e prodotto per scalari. Oltre ad essere ben definita per quanto detto prima ( $F(P, t) \in X$ ),  $F$  è continua e  $F(P, 0) = P_0 = \varphi(0)$ ,  $F(P, 1) = P = Id_X(P)$ . Si ha l'omotopia cercata. □

**ESEMPIO.**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è nè convesso, nè stellato.

**LEMMA 7.4.0.** Se  $X$  è contraibile, allora  $X$  è c.p.a..

**DIMOSTRAZIONE.** Con il seguente diagramma ricordiamo le funzioni in gioco con la comprimibilità.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{g} & X \\ \{1 \text{ punto}\} & & \\ & \xleftarrow{f \text{ (costante)}} & \end{array}$$

Necessariamente dobbiamo mappare  $g$  ad un punto di  $X$ , ad esempio  $x_0$ .

Il singoletto e  $X$  sono in equivalenze omotopica, in particolare da ciò si ha una funzione costante in  $x_0$ :

$$\begin{array}{ccc} \varphi := g \circ f : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & x_0 \end{array}$$

In quanto  $f$  e  $g$  sono in equivalenza omotopica, si ha che  $\varphi \sim Id_X$ , cioè esiste un omotopia fra le due funzioni:

$$F : X \times I \longrightarrow X \quad \text{continua : } F(x, 0) = \varphi(x) = x_0, F(x, 1) = Id_X(x) = x \quad \forall x \in X$$

Fissato  $x \in X$  sia  $\alpha : I \longrightarrow X$  dato da  $\alpha(t) = F(x, t)$ :

- $\alpha$  è continua perché lo è  $f$ .
- $\alpha(0) = F(x, 0) = x_0, \alpha(1) = F(x, 1) = x$ .

Segue che  $\alpha$  è un cammino da  $x_0$  a un qualunque punto  $x$  in  $X$ , dunque  $X$  è **c.p.a.**.  $\square$

**ESERCIZIO.** Se  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti, allora:

1.  $X$  è **c.p.a.**  $\iff Y$  è **c.p.a.**
2.  $X$  è connesso  $\iff Y$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $f, g$  le equivalenze omotopiche.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & Y \\ X & & \\ & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

I Se consideriamo  $f \circ g \sim Id_Y$ , l'omotopia che la definisce è:

$$F : Y \times I \longrightarrow Y : F(y, 0) = f(g(y)), F(y, 1) = y \quad \forall y \in Y$$

Possiamo usare  $F$  per costruire, ad  $y \in Y$  fissato, un arco in  $Y$  che collega  $y$  ad un punto di  $f(X) \subseteq Y$ . Infatti, consideriamo  $\alpha : I \longrightarrow Y$  dato da  $\alpha(t) = F(y, t)$ :

- $\alpha$  è continua perché lo sono  $f$  e  $g$ .
- $\alpha(0) = F(y, 0) = f(g(y)) \in f(X) \subseteq Y, \alpha(1) = F(y, 1) = y$ .

$\implies$ ) Supponendo  $X$  **c.p.a.**, allora  $f(X)$  è **c.p.a.**. Per i ragionamenti appena fatti abbiamo che ogni punto di  $Y$  ha un arco che lo collega ad un punto di  $f(X)$ , dunque per giunzione di cammini anche  $Y$  è **c.p.a.**

$\impliedby$ ) Supponendo che  $Y$  sia **c.p.a.**, applicando all'equivalenza omotopica  $g : Y \longrightarrow X$  un procedimento analogo a  $\implies$ ) si ha che  $X$  è **c.p.a.**<sup>a</sup>.

II Sia  $X$  connesso (ma non **c.p.a.**, altrimenti ricadiamo nel punto 1) dell'esercizio), mentre supponiamo che  $Y$  si può scrivere come unione disgiunta di due aperti



$A$  e  $B$ :  $Y = A \cup B$ . Ma allora:

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Per continuità di  $f$  anche  $f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(B)$  sono aperti disgiunti in  $X$  connesso. Segue che necessariamente uno dei due deve essere vuoto<sup>b</sup>, ad esempio  $f^{-1}(A) = \emptyset$ , cosicché  $X = f^{-1}(B)$ .

Per i ragionamenti visti nel punto 1) possiamo trovare un arco che collega un qualsiasi punto  $y \in Y$  con  $f(g(y)) \in f(X)$ . In particolare, dato che  $f \circ g$  mappa  $Y$  in  $B$ , si avrà  $f(g(y)) \in B$ : ma allora  $y \in B$  necessariamente, dato che se fosse in  $A$  i due aperti non sarebbero disgiunti! Per l'arbitrarietà di  $y$  segue che  $A = \emptyset$  e dunque anche  $Y$  è connesso.

Il viceversa è analogo. □

<sup>a</sup>In realtà è sufficiente, per i ragionamenti visti sopra, dire che se  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti, allora  $X$  è **c.p.a.**  $\iff f(X)$  è **c.p.a.**

<sup>b</sup>In quanto se non fosse così,  $X$  non sarebbe connesso.

**ESEMPIO.** Le sfere  $S^n \forall n \geq 1$  sono spazi topologici **c.p.a.** non contraibili.

## 7.5 RETRATTI E RETRATTI DI DEFORMAZIONE

**DEFINIZIONE 7.5.0. RETRATTO.**

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$  un suo sottospazio. Diciamo che  $A$  è un **retrato** di  $X$  se:

$$\exists r : X \longrightarrow A \text{ continua : } r|_A = Id_A, \text{ cioè : } r(a) = a \forall a \in A \quad (7.15)$$

In tal caso  $r$  è detta **retrazione**.

**OSSERVAZIONE.** Se  $r$  è una retrazione, per costruzione è suriettiva, dunque  $A$  **eredita** da  $X$  tutte le proprietà topologiche che si trasmettono per mappe continue (ad esempio connesso, **c.p.a.**, compatto).

**ESEMPLI.**

- Dato  $x_0 \in X$ ,  $\{x_0\}$  è sempre un retratto: infatti la mappa costante  $X \longrightarrow (x_0)$  soddisfa banalmente le ipotesi di retrazione.
- Presi  $X = [0, 1]$ ,  $A = (0, 1]$  non è un retratto di  $X$  (non è compatto!).
- Presi  $X = [0, 1]$ ,  $\tilde{A} = \{0, 1\}$  non è un retratto (non è connesso!).

**ESEMPIO. LA RETRAZIONE RADIALE.**

Sia  $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $A = S^{n-1} \subseteq X$ . Vogliamo definire una retrazione di  $X$  su  $A$ , cioè una funzione continua  $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow A = S^{n-1}$  tale che  $r|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$ . Definiamo allora la **retrazione radiale**:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ \mathbf{x} &\longmapsto r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned} \quad (7.16)$$

- $r$  è ben definita perché  $\mathbf{x} \neq 0 \implies \|\mathbf{x}\| \neq 0$ .
- $r$  continua.

- Se  $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ , allora  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , cioè  $\forall \mathbf{x} \in S^{n-1} \ r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{x}$ .

**DEFINIZIONE 7.5.1.** RETRATTO DI DEFORMAZIONE.

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$  un suo sottospazio. Diciamo che  $A$  è un **retrato di deformazione** se:

- $r|_A = Id_A$ , cioè  $r$  è un retratto.
- Se  $i : A \hookrightarrow X$  è l'inclusione di  $A$  in  $X$ , allora  $i \circ r : X \longrightarrow X$  è omotopa all'identità di  $X$  ( $i \circ r \sim Id_X$ ).

**OSSERVAZIONE.** Se  $A$  è un retratto di deformazione di  $X$ , allora  $A$  e  $X$  hanno lo stesso tipo di omotopia.

**DIMOSTRAZIONE.**

- $r : X \longrightarrow A$  e  $i : A \hookrightarrow X$  sono continue.
- $i \circ r \sim Id_X$  per ipotesi.
- $r \circ i : A \longrightarrow A$  è la restrizione di  $r$  ad  $A$  che, per ipotesi, è proprio l'identità di  $A$ , cioè  $r \circ i = r|_A = Id_A$  e banalmente sono omotope.  $\square$

**ESEMPIO.** Mostriamo che  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è un retratto di deformazione. Sfruttiamo la retrazione radiale definita a pag. 91:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ \mathbf{x} &\longmapsto r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

Considero ora l'inclusione, definendo per comodità  $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$i : S^{n-1} \longrightarrow X$$

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow X \\ \mathbf{x} &\longmapsto \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

$$\tilde{r} := i \circ r : X \longrightarrow X \\ \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

Vogliamo che  $\tilde{r}$  sia omotopa a  $Id_X$ . Osserviamo che  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = X$  il segmento da  $\mathbf{x}$  a  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$  non contiene, per costruzione, l'origine: allora esso è interamente contenuto in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = X$ . Dunque, riprendendo l'osservazione di pag. 85 definiamo l'omotopia:

$$\begin{aligned} F : X \times I &\longrightarrow X \\ (\mathbf{x}, t) &\longmapsto (1-t)\mathbf{x} + t\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

Infatti  $F$  è ben definita, continua e  $F(\mathbf{x}, 0) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \tilde{r}(\mathbf{x})$ ,  $F(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x} = Id_X(\mathbf{x})$ .

**COROLLARIO 7.5.0.** In generale vale che  $S^{n-1}$  è retratto di deformazione di  $\mathbb{R}^n \setminus \{1 \text{ punto}\}$ ; in particolare hanno lo stesso tipo di omotopia.

**INTUITIVAMENTE...** Se l'omeomorfismo permette di deformare uno spazio *mantenendo* certe qualità, l'equivalenza omotopica risulta essere una forma **più debole** di trasformazione, in cui posso sempre deformare uno spazio *perdendo* tuttavia certe qualità.

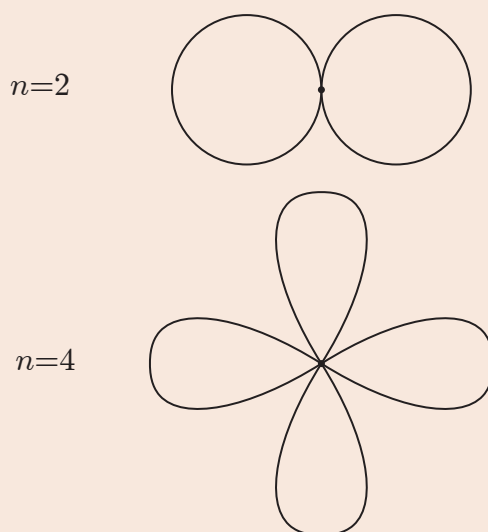
Riprendendo l'intuizione (non sempre corretta) di omeomorfismo enunciata nel Capitolo 1, possiamo vedere allora l'equivalenza omotopica come una deformazione che *piega* e *allunga* uno spazio senza formare *strappi* ( $f$  continua) ma che *permette* fino ad un certo punto *sovrapposizioni* e *incollamenti* (ad esempio, non posso far sparire alcuni fori né ammassare indiscriminatamente troppi punti).

Dunque, sotto queste condizioni, posso rendere la *retta* un *punto*, mentre il *piano* senza un punto si può trasformare in una *circonferenza*. Allo stesso tempo però, non posso "concentrare" la *sfera* in uno solo *punto*.

Ancor più che con il ragionamento intuitivo sull'omeomorfismo è necessario esercitare **estrema cautela** nell'applicare questa nozione euristica di omotopia.

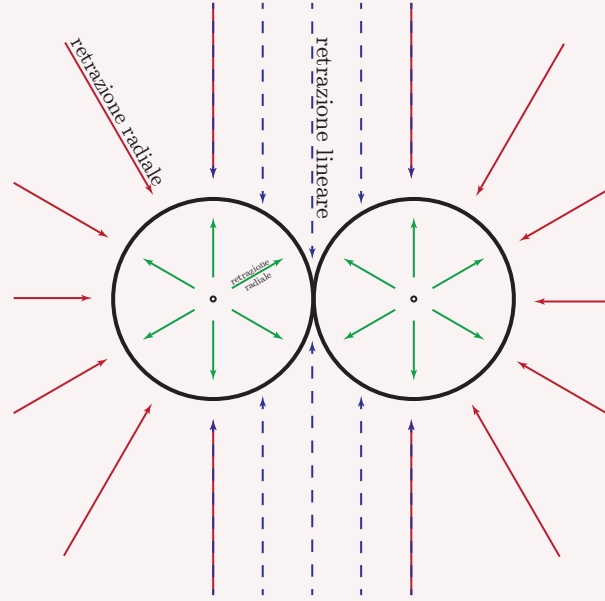
**DEFINIZIONE 7.5.2.** BOUQUET DI CIRCONFERENZE.

Un **bouquet di  $n$  circonferenze** è uno spazio topologico ottenuto unendo in un punto  $n$  copie di  $S^1$ .



**ESEMPLI.** ALTRI ESEMPLI DI EQUIVALENZE OMOTOPICHE.

1.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di un *bouquet di due circonferenze*: si può ottenere attraverso una composizione (continua) di retrazioni *radiali* e *lineari*.



2.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{n \text{ punti}\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di un *bouquet di n circonferenze*.
3.  $\mathbb{R}^3 \setminus \{1 \text{ retta}\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{1 \text{ punto}\}$  per retrazioni lineari, dunque ha la stessa omotopia di  $S^1$  per i ragionamenti precedenti.
4. Per  $\mathbb{R}^3 \setminus \{2 \text{ rette}\}$  dobbiamo distinguere a seconda della relazione fra le due rette.
  - Se le rette sono **disgiunte**,  $X$  è sempre omeomorfo a:

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} \setminus \{x = y = 1\} = \widetilde{X}$$

Cioè lo spazio  $\mathbb{R}^3$  privato di due rette perpendicolari al piano e distinte. Considerato ora il piano  $Y = \{\text{piano } xy\} \setminus \{(0,0), (1,1)\}$ , questo risulta un retratto di deformazione di  $\widetilde{X}$  con retrazione:

$$r : \begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \longrightarrow & Y \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, 0) \end{array}$$

Infatti la funzione è sempre ben definita e continua e, considerata la restrizione di  $r$  ad  $Y$ , segue che banalmente che è l'identità di  $Y$  in quanto tutti i punti di  $Y$  hanno già la forma  $(x, y, 0)$ . Guardando invece  $\widetilde{r} = i \circ r$  con  $i : Y \hookrightarrow \widetilde{X}$ , un'omotopia con  $Id_{\widetilde{X}}$  è:

$$F : \widetilde{X} \times I \longrightarrow \widetilde{X} : F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$$

Infatti  $F$  è banalmente ben definita continua, con  $F(\mathbf{x}, 0) = (x, y, 0) = \widetilde{r}(\mathbf{x})$  e  $F(\mathbf{x}, 1) = (x, y, z) = Id_{\widetilde{X}}(\mathbf{x})$ .

Segue che  $\widetilde{X}$ , e dunque anche  $X$  per omeomorfismo, ha la stessa omotopia di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$  e di un *bouquet di due circonferenze*.

- Se le due rette sono **incidenti**, a meno di omeomorfismi si intersecano nell'origine. Consideriamo dunque  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{r_1 \cup r_2\}$  e lo spazio  $A = S^2 \setminus$

$\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ . Se prendiamo la retrazione:

$$\begin{array}{ccc} r : X & \longrightarrow & A \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \end{array}.$$

e l'omotopia:

$$\widetilde{r} := i \circ r : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \end{array}$$

Si verifica in modo analogo a come visto nel caso della sfera e dello spazio privato dell'origine (esempio a pagina 7.6), trattando con una *retrazione radiale* ben definita e la sua omotopia nota, che  $A$  è retrato di deformazione di  $X$ . Segue allora che hanno lo stesso tipo di omotopia.



# IL GRUPPO FONDAMENTALE

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Nel Capitolo 7, abbiamo definito e studiato diverse proprietà legate all’omotopia, mostrando alcuni esempi di spazi omotopicamente equivalenti. Tuttavia, non abbiamo ancora formalizzato un aspetto dell’intuizione iniziale: come contiamo i *buchi* di una figura?

In questo capitolo proseguiamo la trattazione introducendo un *oggetto algebrico* che associamo come invariante ad uno spazio topologico: il **gruppo fondamentale**. Definendo una versione dell’omotopia specifica dei cammini, utilizziamo questo gruppo formato dalle classi di equivalenza omotopica di *cammini chiusi* per mostrare in termini rigorosi la presenza di buchi.

Inoltre, largo spazio sarà lasciato alla dimostrazione del primo gruppo fondamentale non banale, quello della *circonferenza*.

## 8.1 OMOTOPIE FRA CAMMINI

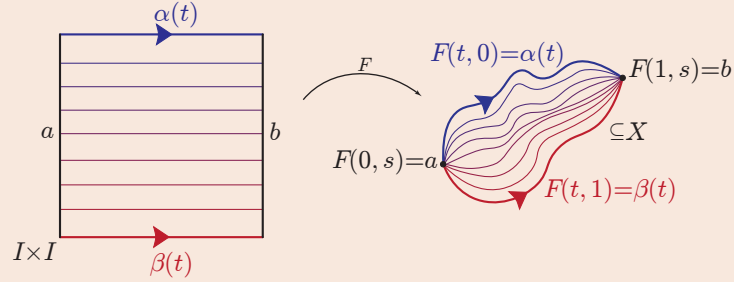
**NOTAZIONE** Se non specificato diversamente, useremo  $I$  per indicare l’intervallo  $[0, 1]$ .

**DEFINIZIONE 8.1.0.** OMOTOPIA DI CAMMINI.

Siano  $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$  due cammini da  $a$  a  $b$ , cioè con *stessi estremi*. Allora  $\alpha, \beta$  sono **cammini omotopi** se  $\exists F : I \times I \longrightarrow X$  tale che:

$$\begin{cases} F(t, 0) = \alpha(t) \\ F(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \text{ è omotopia tra } \alpha \text{ e } \beta$$

$$\begin{cases} F(0, s) = a \\ F(1, s) = b \end{cases} \quad \forall s \in I \text{ } F(\bullet, s) \text{ è sempre un cammino tra } a \text{ e } b$$
(8.1)



$F$  è detta **omotopia di cammini** o **omotopia a estremi fissi**.

**DEFINIZIONE 8.1.1.** INSIEME DEI CAMMINI.

Indichiamo con  $\Omega(X; a, b)$  l'**insieme dei cammini** in  $X$  da  $a$  a  $b$ .

**OSSERVAZIONE.** L'omotopia di cammini è una relazione di equivalenza su  $\Omega(X; a, b)$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- **RIFLESSIVA:**  $\alpha \sim \alpha$ ? Presa  $F(t, s) = \alpha(t)$ , essa è ben definita, continua e:

$$F(t, 0) = \alpha(t), F(t, 1) = \alpha(t), F(0, s) = \alpha(0) = a, F(1, s) = \alpha(1) = b$$

Cioè è omotopia di cammini tra  $\alpha$  e se stessa.

- **SIMMETRICA:** Da  $\alpha \sim \beta$  sappiamo che esiste  $F$  omotopia di cammini per cui:

$$F(t, 0) = \alpha(t), F(t, 1) = \beta(t), F(0, s) = a, F(1, s) = b$$

Per avere  $\beta \sim \alpha$ , basta prendere  $\tilde{F}(t, s) = F(t, 1 - s)$ : essa è ben definita, continua e:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, 0) &= F(t, 1) = \beta(t), \tilde{F}(t, 1) = F(t, 0) = \alpha(t) \\ \tilde{F}(0, s) &= F(0, s) = a, \tilde{F}(1, s) = F(1, s) = b \end{aligned}$$

Cioè è omotopia di cammini tra  $\beta$  e  $\alpha$ .

- **TRANSITIVA:** Da  $\alpha \sim \beta$  abbiamo:

$$\begin{cases} F(t, 0) = \alpha(t) \\ F(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \begin{cases} F(0, s) = a \\ F(1, s) = b \end{cases}$$

Mentre da  $\beta \sim \gamma$ :

$$\begin{cases} G(t, 0) = \beta(t) \\ G(t, 1) = \gamma(t) \end{cases} \quad \begin{cases} G(0, s) = a \\ G(1, s) = b \end{cases}$$

Definita allora la seguente funzione:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(t, 2s-1) & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$



Essa è ben definita, continua per il lemma di incollamento e tale per cui:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= F(t, 0) = \alpha(t), & H(t, 1) &= G(t, 1) = \gamma(t) \\ H(0, s) &= a, & H(1, s) &= b \end{aligned}$$

Cioè è omotopia di cammini tra  $\alpha$  e  $\gamma$ . □

**RICORDIAMO...** Abbiamo già definito due “operazioni” fra insiemi di cammini, senza averle necessariamente formalizzate:

- **PRODOTTO DI CAMMINI:**  $\Omega(X; a, b) \times \Omega(X; b, c) \longrightarrow \Omega(X; a, c)$   
 $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha * \beta$
- **INVERSIONE DI CAMMINI:**  $\Omega(X; a, b) \longrightarrow \Omega(X; b, a)$   
 $\alpha \longmapsto \bar{\alpha}$

**OSSERVAZIONE.** Si ha  $\overline{\bar{\alpha}} = \alpha$ . Infatti:

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t) \implies \overline{\bar{\alpha}}(t) = \bar{\alpha}(1-t) = \alpha(t)$$

**LEMMA 8.1.0.** COMPOSIZIONI DI OMOTOPIE DI CAMMINI (KOSNIOWSKI, 14.2)

Dati  $\alpha, \alpha' \in \Omega(X; a, b)$  e  $\beta, \beta' \in \Omega(X; b, c)$ , parlando in termini di omotopie di cammini:

$$\alpha \sim \alpha' \text{ e } \beta \sim \beta' \implies \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \quad (8.2)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Esistono  $F, G : I \times I \longrightarrow X$  tali che:

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t) & F(0, s) &= a & \forall t, s \in I \\ F(t, 1) &= \alpha'(t) & F(1, s) &= b \\ G(t, 0) &= \beta(t) & G(0, s) &= b & \forall t, s \in I \\ G(t, 1) &= \beta'(t) & G(1, s) &= c \end{aligned}$$

Consideriamo  $H : I \times I \longrightarrow X$  data da:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t-1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- $H$  è ben definita per  $t = \frac{1}{2}$
- $H$  è continua per il lemma di incollamento, essendo definito sui chiusi  $[0, \frac{1}{2}] \times I$  e  $[\frac{1}{2}, 1] \times I$  è continua su di essi.
- $H(t, 0) = (\alpha * \beta)(t)$
- $H(t, 1) = (\alpha' * \beta')(t)$   $\Bigg\} = \forall t \in I \text{ è omotopia}$
- $H(0, s) = F(0, 0) = a$
- $H(1, s) = G(1, 0) = c$   $\Bigg\} = \forall s \in I \text{ ha estremi fissi}$

$H$  è l'omotopia a estremi fissi cercata. □

**LEMMA 8.1.1.** CAMBIAMENTO DI PARAMETRI (MANETTI, 11.3)

Sia  $\alpha : I \longrightarrow X$  un cammino e  $\varphi : I \longrightarrow I$  una funzione continua tale che  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(1) = 1$ . Allora  $\alpha \circ \varphi \sim \alpha$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $F : I \times I \longrightarrow X$  data da  $F(t, s) = \alpha(s\varphi(t) + (1-s)t)$ .

- $s\varphi(t) + (1-s)t$  è una combinazione lineare che è contenuta in  $I \subseteq \mathbb{R} \forall t, s \in I$  per convessità dell'intervallo  $I$ , da cui segue che  $F$  è ben definita.
- $F$  continua perché composizione di funzioni continue.
- $F(t, 0) = \alpha(t)$
- $F(t, 1) = \alpha(\varphi(t))$  } =  $\forall t \in I$  è omotopia
- $F(0, s) = \alpha(0)$
- $F(1, s) = \alpha(s + 1 - s) = \alpha(1)$  } =  $\forall s \in I$  ha estremi fissi

$H$  è l'omotopia a estremi fissi cercata tra  $\alpha$  e  $\alpha \circ \varphi$ . □

**DEFINIZIONE 8.1.2.** CAMMINO COSTANTE.

Il **cammino costante**  $C_a$  nel punto  $a$  è un cammino che non si sposta mai da esso, cioè è descritto da una funzione costante nel punto:

$$\begin{aligned} C_a : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto a \end{aligned} \quad (8.3)$$

**PROPOSIZIONE 8.1.0.** (MANETTI, 11.4 E 11.6)

Sia  $X$  spazio topologico e si considerino i cammini:

$$\alpha \in \Omega(X; a, b) \quad \beta \in \Omega(X; b, c) \quad \gamma \in \Omega(X; c, d)$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. ASSOCIATIVITÀ:  $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$ .
2. RAPPORTO COI CAMMINI COSTANTI:  $C_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * C_b$ .
3. INVERSO:  $\alpha * \bar{\alpha} \sim C_a$  e  $\bar{\alpha} * \alpha \sim C_a$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

I Scriviamo i due cammini:

$$\begin{aligned} ((\alpha * \beta) * \gamma)(t) &= \begin{cases} \alpha(4t) & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \beta(4t-1) & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \\ ((\alpha * (\beta * \gamma)))(t) &= \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(4t-2) & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma(2t-3) & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

I due cammini differiscono per una *riparametrizzazione*  $\phi : I \longrightarrow I$  di  $\alpha *$

$(\beta * \gamma)$  definita in questo modo:

$$\begin{cases} 2s = 4t \\ 4s - 2 = 4t - 2 \\ 4s - 3 = 4t - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} s = 2t & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ s = t + \frac{1}{4} & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ s = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 2t & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ t + \frac{1}{4} & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

- $\phi$  è ben definita e continua per lemma di incollamento.
- $\phi(0) = 0$  e  $\phi(1) = 1$ .
- $((\alpha * (\beta * \gamma)))(\phi(t)) = ((\alpha * \beta) * \gamma)(t)$ .

Per il lemma del cambiamento di parametro i due cammini sono omotopi.

II Scriviamo i due cammini:

$$(C_a * \alpha)(t) = \begin{cases} a & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2t - 1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$(\alpha * C_b)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ b & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

I due cammini differiscono per delle *riparametrizzazioni* di  $\alpha$   $\phi : I \longrightarrow I$  e  $\psi : I \longrightarrow I$  definite così:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2t - 1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} 2t & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

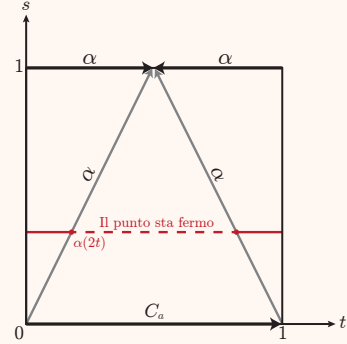
- $\phi$  e  $\psi$  son ben definite e continue per lemma di incollamento.
- $\phi(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$  e  $\phi(1) = 1$ ,  $\psi(1) = 1$ .
- $(C_a * \alpha)(t) = \alpha(\phi(t))$  e  $(\alpha * C_b)(t) = \alpha(\psi(t))$ .

Per il lemma del cambiamento di parametro i due cammini sono entrambi omotopi a  $\alpha$ , si hanno quindi le equivalenze omotopiche cercate.

III È sufficiente dimostrare che  $\alpha * \bar{\alpha} \sim C_a$ . Possiamo immaginare di rappresentare tutte le parametrizzazioni di cammini definiti da un omotopia sul piano  $I \times I$ , con  $t$  sulle ascisse e  $s$  sulle ordinate.

In questo modo i punti  $a$  di inizio e  $b$  di fine sono rappresentati dai segmenti verticali in  $t = 0$  e in  $t = 1$ , mentre i cammini  $\alpha$  di inizio e  $\beta$  fine sono segmenti orizzontali in  $s = 0$  e  $s = 1$ . Dunque, all'interno di  $I \times I$  possiamo trovare (fissato  $s$ ) tutti i cammini  $F(\bullet, s)$  di estremi  $a$  e  $b$  compresi tra i cammini  $\alpha$  e  $\beta$ : essi sono rappresentati da segmenti orizzontali.

Nel nostro caso, possiamo considerare il punto  $a$  di inizio e il punto  $b$  di fine del cammino  $\alpha$ . Nei due cammini “esterni” o il cammino non si sposta mai da  $a$  ( $C_a$ ), oppure percorre tutto il cammino  $\alpha$  fino a  $b$  (che è raggiunto per  $t = \frac{1}{2}$ ) e torna poi indietro per lo stesso cammino ( $\alpha * \bar{\alpha}$ ). Tuttavia, dobbiamo considerare anche cammini che percorrono  $\alpha$  fino ad un punto  $c$  intermedio fra  $a$  e  $b$ , stanno fermi in  $c$  per poi tornare indietro. Definiamo la seguente omotopia:



$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s) & \text{se } \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \alpha(2-2t) & \text{se } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Verifichiamo che lo sia:

- $F$  è ben definita grazie alla ben definizione di  $\alpha$ : tutti i valori di  $F$  risultano interni ad  $X$ .
- $F$  è continua per il lemma di incollamento.
- $F(t, 0) = \alpha(0) = C_a(t)$ ,  $F(t, 1) = \alpha * \bar{\alpha}(t)$  e  $F(0, s) = a = F(1, s)$ .

In questo modo teniamo conto della possibilità del cammino di “fermarsi” per un certo tempo in un particolare punto  $\alpha(s)$ . □

## 8.2 GRUPPO FONDAMENTALE

### DEFINIZIONE 8.2.0. LACCIO.

Sia  $X$  uno spazio topologico e fissiamo un punto  $x_0 \in X$ . I **lacci** o **cappi** sono i cammini chiusi in  $X$ , cioè tutti i cammini il cui punto iniziale e finale coincidono. Il loro insieme si denota dunque come  $\Omega(X; x_0, x_0)$ .

**OSSERVAZIONE.** Possiamo notare come  $\forall \alpha, \beta \in \Omega(X; x_0, x_0)$  si ha:

$$\alpha * \beta \in \Omega(X; x_0, x_0) \quad \bar{\alpha} \in \Omega(X; x_0, x_0)$$

Allora, se quozientiamo l’insieme dei lacci rispetto alla relazione di equivalenza data dall’omotopia di cammini, esso possiede una struttura di *gruppo*:

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega(X; x_0, x_0)}{\sim} \quad (8.4)$$

Preso un laccio  $\alpha$ , indichiamo la sua classe di equivalenza in  $\pi_1(X, x_0)$  con  $[\alpha]$ . Allora:

- Il prodotto di cammini dà un’operazione ben definita su  $\pi_1(X, x_0)$  grazie al lemma 8.1 (Kosniowski, 14.2):

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta] \quad (8.5)$$

- L’operazione appena definita è associativa per il primo punto della proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6).

- $[C_{x_0}]$  è l'elemento neutro, sempre per la proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6):

$$[C_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] \cdot [C_{x_0}] \quad (8.6)$$

- $[\bar{\alpha}]$  è l'inverso di  $[\alpha]$ , cioè  $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$ , per la proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6):

$$[\bar{\alpha}] \cdot [\alpha] = [C_{x_0}] = [\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] \quad (8.7)$$

**ATTENZIONE!** La proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6) ci garantisce che la composizione di cammini omotopi è omotopa ( $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$ ), dunque possiamo parlare della classe  $[\alpha * \beta * \gamma]$ . Tuttavia, al di fuori del quoziente non ha senso  $\alpha * \beta * \gamma$ ! L'ordine con cui congiungiamo i cammini dà luogo a due cammini certamente omotopi, *ma non uguali*, dato che la parametrizzazione varia<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Questo si vede chiaramente nella dimostrazione della proposizione.

#### DEFINIZIONE 8.2.1. GRUPPO FONDAMENTALE.

Dato uno spazio topologico  $X$  e fissato un punto (detto **punto base**)  $x_0$ , il **gruppo fondamentale** con punto base  $x_0$  è il gruppo  $\pi_1(X, x_0)$  definito nell'osservazione precedente. Si chiama anche **primo gruppo fondamentale** o **gruppo di Poincaré**.

##### 8.2.1 Dipendenza dal punto base

**TEOREMA 8.2.0.** Il gruppo fondamentale dipende *solo* dalla componente **c.p.a.** contenente il punto base  $x$ .

In altre parole, se  $x, y \in X$  appartengono alla stessa componente **c.p.a.**, preso un arco  $\gamma$  da  $x$  a  $y$  e costruito:

$$\begin{aligned} \gamma_{\#} : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\longmapsto [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{aligned} \quad (8.8)$$

È ben definito ed è un *isomorfismo* di gruppi, cioè:

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y) \quad (8.9)$$

**RICORDIAMO...** Una funzione fra due gruppi  $f : (G, \cdot_G) \longrightarrow (H, \cdot_H)$  è un **omomorfismo di gruppi** se:

$$f(a \cdot_G b) = f(a) \cdot_H f(b) \quad \forall a, b \in G$$

Se  $f$  è *biettiva*, allora parliamo di **isomorfismo di gruppi**.

#### DIMOSTRAZIONE.

- $\gamma_{\#}$  è ben definito in quanto la classe  $[\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$  è ben definita per la composizione dei cammini ed è la classe di equivalenza di un cappio di  $y$  ( $\bar{\gamma}$  parte da  $y$  e raggiunge  $x$ , con  $\alpha$  compie un cammino chiuso in  $x$  per tornare al punto di partenza  $y$ ).

- $\gamma_{\#}$  è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned}\gamma_{\#}([\alpha] * [\beta]) &= \gamma_{\#}([\alpha * \beta]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * C_x * \beta * \gamma] \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \cdot [\bar{\gamma} * \beta * \gamma] = \gamma_{\#}([\alpha]) \cdot \gamma_{\#}([\beta])\end{aligned}$$

Infatti, anche l'elemento neutro viene mappato all'elemento neutro del codominio:

$$\gamma_{\#}([C_x]) = [\bar{\gamma} * C_x * \gamma] = [\bar{\gamma} * \gamma] = [C_y]$$

- Possiamo associare in modo analogo al cammino  $\bar{\gamma}$  il cammino:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{\#} : \pi_1(X, y) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]\end{aligned}$$

In modo assolutamente analogo a come visto sopra, si vede che è un omeomorfismo; verifichiamo ora che  $\gamma_{\#}$  e  $\bar{\gamma}_{\#}$  siano l'uno l'inverso dell'altro:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{\#}(\gamma_{\#}([\alpha])) &= \bar{\gamma}_{\#}([\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]) = [\gamma * \bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma}] = [C_x * \alpha * C_x] = [\alpha] \\ \gamma_{\#}(\bar{\gamma}_{\#}([\alpha])) &= \gamma_{\#}([\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]) = [\bar{\gamma} * \gamma * \alpha * \bar{\gamma} * \gamma] = [C_y * \alpha * C_y] = [\alpha]\end{aligned}$$

Segue che allora  $\gamma_{\#}$  è biettiva. □

#### OSSERVAZIONI.

- Se due punti  $x_1$  e  $x_2$  stanno in componenti connesse per archi diverse, *non* c'è alcuna relazione tra  $\pi_1(X, x_1)$  e  $\pi_1(X, x_2)$ .
- Se  $X$  è **c.p.a.**, il suo gruppo fondamentale è *unico* a meno di isomorfismo.

**ESEMPIO.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  un sottospazio convesso e  $y_0 \in Y$ . Allora  $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$  è **banale**; in particolare, allora  $\pi_1(\mathbb{R}^n, y_0)$  è banale per ogni  $n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$ . Vogliamo mostrare che  $[\alpha] = [C_{y_0}]$ , cioè che  $\alpha \sim C_{y_0}$ . Consideriamo  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tale che:

$$F(t, s) = s(\alpha(t)) + (1-s)y_0$$

- $F$  risulta ben definita: è una combinazione convessa al variare di  $s \in [0, 1]$  tra  $\alpha(t) \in Y$  (per  $t$  fissato) e  $y_0 \in Y$ .
- $F$  è continua perché composizione di applicazioni continue.
- $F(t, 0) = y_0 = C_{y_0}(t)$ ,  $F(t, 1) = \alpha(t)$ .
- $F(0, s) = s\alpha(0) + (1-s)y_0 = sy_0 + (1-s)y_0 = y_0$ ,  $F(1, s) = s\alpha(1) + (1-s)y_0 = sy_0 + (1-s)y_0 = y_0$ .

Segue che  $F$  è un'omotopia tra  $C_{y_0}$  e  $\alpha$ , dunque segue la tesi. □

#### DEFINIZIONE 8.2.2. SPAZIO SEMPLICEMENTE CONNESSO.

Uno spazio topologico  $X$  è **semplicemente connesso** se è **c.p.a.** e ha gruppo fondamentale **banale**.

**ESEMPLI.**

- $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso.
- Ogni convesso di  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso.

## 8.2.2 Mappe continue e omomorfismo di gruppi

**NOTAZIONE**  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  è una funzione continua  $f : X \longrightarrow Y$  tale che  $f(x_0) = y_0$ .

**OSSERVAZIONE.** Consideriamo  $f : X \longrightarrow Y$  continua e due cammini  $\alpha$  in  $X$  da  $a$  a  $b$  e  $\beta$  in  $X$  da  $b$  a  $c$ .

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\alpha} & X \xrightarrow{f} Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & f \circ \alpha & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\beta} & X \xrightarrow{f} Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & f \circ \beta & \end{array}$$

Si ha che:

1.  $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ .
2.  $f \circ \bar{\alpha} = f \circ \alpha$ .
3. Se  $\alpha \sim \alpha'$ , allora  $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ .

**PROPOSIZIONE 8.2.0.** Dati  $X, Y$  spazi topologici, due punti  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  e una funzione  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  continua, si può definire associare un omomorfismo tra i corrispettivi gruppi fondamentali:

$$\begin{array}{ccc} f_* : \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] & \longmapsto & [f \circ \alpha] \end{array} \quad (8.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

- $f_*$  è ben definita: infatti,  $f \circ \alpha \in \Omega(Y; y_0, y_0)$  e se  $[a] = [a']$ ,  $\alpha \sim \alpha'$ . Per il punto 3 dell'osservazione precedente, si ha  $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ , cioè  $[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha']$ .
- $f_*$  è un omeomorfismo di gruppi: infatti, presi  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ , si ha:

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] \cdot [\beta]) &= f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] \stackrel{1}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = \\ &= f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta]) \end{aligned}$$

$$\text{Inoltre: } f_*([C_{x_0}]) = [f \circ C_{x_0}] = [C_{y_0}].$$

□

## 8.3 DIGRESSIONE: CATEGORIE

**DEFINIZIONE 8.3.0. CATEGORIA.**

Una **categoria**  $\mathcal{C}$  consiste di:

- Una **classe**  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , i cui elementi sono dati **oggetti** di  $\mathcal{C}$ .
- Per ogni *coppia* di oggetti  $X$  e  $Y$  di  $\mathcal{C}$  una classe  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , i cui elementi sono detti **morfismi** da  $X$  a  $Y$ .

- Per ogni *terna* di oggetti  $X, Y, Z$  un'operazione binaria detta **composizione** di morfismi:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array} \quad (8.11)$$

Tali che questi oggetti soddisfino i seguenti assiomi:

1. **ASSOCIATIVITÀ:** Per ogni  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ,  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$  si ha:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ in } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \quad (8.12)$$

2. **IDENTITÀ:** Per ogni oggetto  $X$  esiste un **morfismo identità**  $Id_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  tale che:

$$\begin{array}{ccc} f \circ Id_X = f & Id_X \circ g = g & \\ \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) & \end{array} \quad (8.13)$$

Si dimostra che  $Id_X$  è unico per ogni oggetto  $X$ .

#### DEFINIZIONE 8.3.1. ISOMORFISMO.

Un morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  si dice **isomorfismo** se:

$$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \text{ tale che } g \circ f = Id_X \quad f \circ g = Id_Y \quad (8.14)$$

In tal caso  $g$  è unico e si pone  $g = f^{-1}$ .

Inoltre, due oggetti  $X$  e  $Y$  sono **isomorfi** se  $\exists f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  isomorfismo.

#### ESEMPLI. ESEMPLI DI CATEGORIE

- **SET** **Oggetti:** insiemi.  
**Morfismi:** applicazioni tra insiemi.
- **GR**<sup>a</sup> **Oggetti:** gruppi.  
**Morfismi:** omomorfismi di gruppi.
- **VECT** <sub>$\mathbb{K}$</sub>  **Oggetti:** spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ .  
**Morfismi:** applicazioni lineari.
- **TOP** **Oggetti:** spazi topologici.  
**Morfismi:** applicazioni continue.
- **TOP\*** **Oggetti:** spazi topologici con punto base  $(X, x_0)$ .  
**Morfismi:** applicazione continue  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ .
- **KTOP** **Oggetti:** spazi topologici.  
**Morfismi:** classi di omotopia di funzioni continue da  $X$  a  $Y$ .<sup>b</sup>
- Preso uno spazio topologico  $X$ , si può considerare la categoria  $\mathcal{C}$  seguente:  
**Oggetti:** aperti di  $X$ .  
**Morfismi:** inclusioni.  
Nello specifico, se  $U, V \subseteq X$  aperti, allora:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } U \not\subseteq V \\ \{i\} & \text{se } U \xhookrightarrow{i} V \end{cases}$$

<sup>a</sup>Indicata anche con **GRP**.

<sup>b</sup>La composizione in **KTOP** è garantita dalla composizione di omotopie, cioè dal lemma 7.3 (Manetti 10.13).



**ATTENZIONE!** Come si evince dall'esempio 6, i morfismi delle categorie possono anche *non* essere funzioni!

### 8.3.1 Funtori

#### DEFINIZIONE 8.3.2. FUNTORE.

Siano  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  due categorie. Un **funtore**  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  consiste di due funzioni:

1. Una *funzione sugli oggetti*  $F : \text{Ob}(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ .  

$$x \longmapsto F(x)$$
2. Una *funzione sui morfismi* che, a seconda della sua costruzione, definisce due tipi di funtori:
  - Parliamo di **funtore covariante**<sup>a</sup> se, per ogni coppia di oggetti  $X, Y$  in  $\mathcal{A}$ , si ha un'applicazione:

$$\begin{aligned} F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned} \quad (8.15)$$

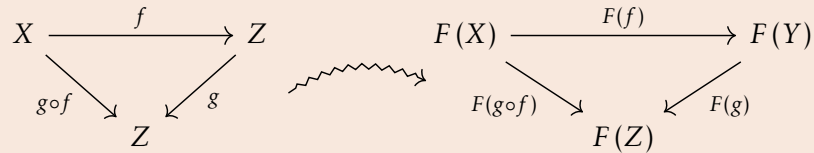
Che preserva i morfismi identità e la composizione:

◇ IDENTITÀ:  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$

$$F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)} \quad (8.16)$$

◇ COMPOSIZIONE:  $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (8.17)$$



- Parliamo di **funtore controvariante** se, per ogni coppia di oggetti  $X, Y$  in  $\mathcal{A}$ , si ha un'applicazione:

$$\begin{aligned} F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(Y), F(X)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned} \quad (8.18)$$

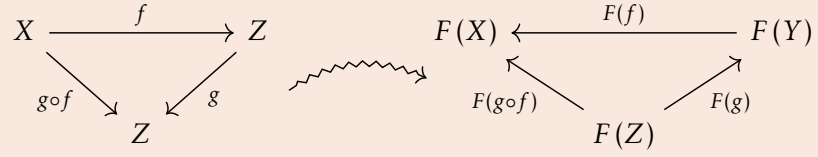
Che preserva i morfismi identità, mentre inverte la direzione della composizione:

◇ IDENTITÀ:  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ :

$$F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)} \quad (8.19)$$

◇ COMPOSIZIONE:  $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$ :

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \quad (8.20)$$



<sup>a</sup>In letteratura, il *funtore covariante* spesso viene indicato anche solo come *funtore*.

**OSSERVAZIONI.** Un funtore porta:

- Isomorfismi in isomorfismi,
- Oggetti isomorfi in oggetti isomorfi.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  è isomorfismo in  $\mathcal{A}$ ,  $\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X)$  tale che  $g = f^{-1}$ , cioè  $g \circ f = \text{Id}_X$ ,  $f \circ g = \text{Id}_Y$ . Ma allora, se  $F$  è covariante:

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$$

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\text{Id}_Y) = \text{Id}_{F(Y)}$$

$F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(X), F(Y))$  è isomorfismo con inversa  $F(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(Y), F(X))$ . Se  $F$  è controvariante:

$$F(g) \circ F(f) = F(f \circ g) = F(\text{Id}_Y) = \text{Id}_{F(Y)}$$

$$F(f) \circ F(g) = F(g \circ f) = F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$$

$F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(Y), F(X))$  è isomorfismo con inversa  $F(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(X), F(Y))$ .  $\square$

**ESEMPLI.**

1.

$$F : \underline{\mathbf{GR}} \longrightarrow \underline{\mathbf{SET}}$$

**Oggetti:**  $(G, \cdot) \mapsto G$

**Morfismi:**  $f : G \longrightarrow H \mapsto f : G \longrightarrow H$

Questo *funtore covariante* si chiama anche **funtore dimenticante**, in quanto associa un gruppo all'insieme su cui si base.

$$F : \underline{\mathbf{TOP}} \longrightarrow \underline{\mathbf{SET}}$$

**Oggetti:**  $(G, \mathcal{T}) \mapsto G$

**Morfismi:**  $f : G \longrightarrow H \mapsto f : G \longrightarrow H$

In modo analogo, si definisce il funtore dimenticante fra **TOP** e **SET**, che associa lo spazio topologico all'insieme sui cui abbiamo definito la topologia.

2.

$$F : \underline{\mathbf{VECT}}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \underline{\mathbf{VECT}}_{\mathbb{K}}$$

**Oggetti:**  $V \mapsto V^* = \{ \text{applicazioni lineari } V \longrightarrow \mathbb{K} \}$

**Morfismi:**  $f : V \longrightarrow W \text{ lineare} \mapsto f^t : W^* \longrightarrow V^*$   
 $\varphi \longmapsto \varphi \circ f$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$$

Questo *funtore controvariante* è chiamata **funzione trasposta**.

3.  $F : \underline{\mathbf{TOP}}^* \longrightarrow \underline{\mathbf{GR}}$
- Oggetti:**  $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$
- Morfismi:**  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \mapsto f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$   
 $[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$
- Questo funtore *covariante* si basa sull'omomorfismo tra gruppi fondamentali indotto da  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la funtorialità dell'ultimo esempio.

- **IDENTITÀ:**  $\forall (X, x_0) \in \text{Ob}(\underline{\mathbf{TOP}}^*)$ :

$$F(Id_X) = (Id_X)_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \implies Id_{\pi_1(X, x_0)}$$

$$[\alpha] \longmapsto [Id_X \circ \alpha] = [\alpha]$$

- **COMPOSIZIONE:**  $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$

Vogliamo che  $F(g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ :

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(g_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha])$$

□

#### 8.4 ISOMORFISMI E GRUPPI FONDAMENTALI

**COROLLARIO 8.4.0.** Se  $f : X \longrightarrow Y$  è un omeomorfismo, allora:

$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$  è isomorfismo di gruppi,  $\forall x_0 \in X$ .

**RICORDIAMO...** Se  $g \circ f$  è una funzione biunivoca, allora  $f$  è iniettiva e  $g$  è suriettiva.

**COROLLARIO 8.4.1.** Sia  $A \subseteq X$  un retratto con retrazione  $r : X \longrightarrow A$ ; si consideri inoltre la sua inclusione  $i : A \hookrightarrow X$ . Si ha che:

- $\forall a \in A$   $i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$  è un omomorfismo *iniettivo*.
- $\forall a \in A$   $r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a)$  è un omomorfismo *suriettivo*.

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo dalla definizione che  $r|_A = Id_A$ ; poiché  $r \circ i : A \longrightarrow X$ ,  
 $x \longmapsto r(x)$ ,  
 si ha  $r \circ i = r|_A = Id_A$ . Allora, passando con il funtore all'omomorfismo di gruppi:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(A, a) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, a) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(A, a) \\ & & \searrow r_* \circ i_* & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

Notiamo che  $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (Id_A)_*$ , cioè  $r_* \circ i_*$  è biettiva. In particolare, ne consegue, per quanto detto poco sopra, che  $i_*$  è iniettiva e  $r_*$  suriettiva. □

**TEOREMA 8.4.0.** (KOSNIOWSKI, 15.12)

Siano  $f, g : X \longrightarrow Y$  continue, omotope e  $x_0 \in X$ . Allora esiste un *isomorfismo di gruppi*:

$$\varphi : \pi_1(Y, f(x_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, g(x_0)) \quad (8.21)$$

Tale che:

$$g_* = \varphi \circ f_* \quad (8.22)$$

Più precisamente, data l'omotopia  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tra  $f$  e  $g$ , allora:

$$\gamma := F(x_0, t) : I \longrightarrow Y \quad (8.23)$$

È un arco da  $F(x_0, 0) = f(x_0)$  a  $F(x_0, 1) = g(x_0)$ ; dunque:

$$\begin{aligned} \gamma_\# : \pi_1(Y, f(x_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, g(x_0)) \\ [\alpha] &\longmapsto [\bar{\omega} * \alpha * \omega] \end{aligned} \quad (8.24)$$

è un *isomorfismo di gruppi* e si ha:

$$g_* = \gamma_\# \circ f_* \quad (8.25)$$

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ f_* \swarrow & & \searrow g_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\gamma_\#} & \pi_1(X, g(x_0)) \end{array}$$

**COROLLARIO 8.4.2.** Se  $f : X \longrightarrow X$  è una funzione omotopa all'identità, allora:

$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$  è isomorfismo di gruppi,  $\forall x_0 \in X$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Data l'omotopia  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tra  $f$  e  $Id_X$ , allora:

$$\gamma := F(x_0, t) : I \longrightarrow Y$$

È un arco da  $F(x_0, 0) = f(x_0)$  a  $F(x_0, 1) = x_0$ ; dunque, per il teorema precedente segue che

$$\gamma_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$$

è un *isomorfismo di gruppi* e si ha:

$$f_* = \gamma_\# \circ (Id_X)_* = \gamma_\# \circ Id_{\pi_1(X, x_0)} = \gamma_\#$$

In particolare, ne segue che  $f_* = \gamma_\#$  è isomorfismo.  $\square$

**RICORDIAMO...** Siano  $A, B, C, D$  degli insiemi e  $f, g, h$  delle applicazioni come nel diagramma seguente:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Tali per cui  $g \circ f$ ,  $h \circ g$  sono biunivoche. Segue che  $f$  è biunivoca.

- $f$  è iniettiva perché  $g \circ f$  è iniettiva.
- $f$  è suriettiva: preso  $b \in B$  e il corrispettivo  $g(b) \in C$ , dal fatto che  $g \circ f$  è biunivoca segue che  $\exists a \in A : g(f(a))(g \circ f)(a) = g(b)$ . Essendo  $h \circ g$  biunivoca,  $g$  è iniettiva, dunque  $b = f(a) \implies f$  suriettiva e segue allora la tesi.

**TEOREMA 8.4.1. INVARIANZA OMOTOPICA DEL GRUPPO FONDAMENTALE (MANETTI, 11.22)**

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  un'equivalenza omotopica. Allora  $\forall x_0 \in X$  si ha che:

$$f : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \quad (8.26)$$

È isomorfismo di gruppi.

**DIMOSTRAZIONE.** In quanto  $f : X \longrightarrow Y$  è un'equivalenza omotopica, necessariamente  $\exists g : Y \longrightarrow X$  continua tale che:

$$g \circ f \sim Id_X \quad f \circ g \sim Id_Y$$

Su  $g \circ f \sim Id_X$  applichiamo il teorema precedente.

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ (g \circ f)_* \swarrow & & \searrow (Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}^a \\ \pi_1(X, g(f_0)) & \xrightarrow[\text{isomorfismo di gruppi}]{\gamma^\#} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Per il corollario appena visto, poiché  $g \circ f \sim Id_X$ , segue che  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  è isomorfismo di gruppi. Allora consideriamo lo schema seguente.

$$\begin{array}{ccccc} & & g_* \circ f_* = (g \circ f)_* & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, g(f(x_0))) \\ & & \searrow \tilde{f}_* \circ g_* & & \downarrow \tilde{f}_* \\ & & \pi_1(X, f(g(f(x_0)))) & & \end{array}$$

Sapendo che  $f \circ g \sim Id_Y$ , possiamo dimostrare in modo analogo (usando come punto base  $f(x_0) \in Y$ ) che  $\tilde{f}_* \circ g_* = (\tilde{f} \circ g)_*$  è isomorfismo di gruppi.

Applicando il ragionamento insiemistico ricordato in precedenza (pag. 110) segue che  $f_*$  è un omomorfismo biiettivo, cioè un isomorfismo.  $\square$

<sup>a</sup>Si veda a pag. 109.

**COROLLARIO 8.4.3.** Se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici **c.p.a.** e omotopicamente equivalenti, allora hanno gruppi fondamentali isomorfi.

**DIMOSTRAZIONE.** Dal teorema appena dimostrato sappiamo che se due spazi sono omotopicamente equivalenti, il gruppo fondamentale di  $X$  rispetto ad un qualunque punto base in  $X$  è isomorfo a quello di  $Y$  rispetto  $f(x_0)$ . In particolare, se gli spazi sono **c.p.a.**, il loro gruppo fondamentale è *unico* a meno di omomorfismi. Segue che il gruppo fondamentale di  $X$  è isomorfo all'unico gruppo fondamentale di  $Y$ .  $\square$

**COROLLARIO 8.4.4.** Sia  $X$  uno spazio topologico contraibile. Allora  $X$  è semplicemente connesso.

**DIMOSTRAZIONE.**  $X$  contraibile significa che  $X$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $\{1 \text{ punto}\}$ . Segue che, per il corollario precedente, il gruppo fondamentale di  $X$  è banale:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(\{1 \text{ punto}\}) = \{1\}$$

Essendo  $X$  contraibile,  $X$  è anche **c.p.a.**, dunque vale la tesi.  $\square$

**COROLLARIO 8.4.5.** Sia  $i : A \hookrightarrow X$  un retratto di deformazione. Allora  $\forall a \in A$ :

$$i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a) \quad r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a) \quad (8.27)$$

Sono isomorfismi di gruppi.

## 8.5 NUMERO DI LEBESGUE

Per poter calcolare il *gruppo fondamentale* delle *sfe*  $S^n$ , con  $n \geq 2$ , abbiamo prima bisogno di qualche risultato preliminare.

**DEFINIZIONE 8.5.0.** DISTANZA DI UN PUNTO DA UN INSIEME IN UNO SPAZIO METRICO.

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $C \subseteq X$  un sottoinsieme non vuoto; preso  $x \in X$ , la **distanza di  $x$  da  $C$**  è definita come:

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y) \quad (8.28)$$

Vediamo alcune proprietà.

1. Vale  $d(x, C) \geq 0$ , inoltre  $d(x, C) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists y \in C : d(x, y) < \varepsilon \iff x \in \overline{C}$ .
2. Fissato il sottoinsieme  $C$  e facendo *variare* il punto  $x$  si vede che la funzione “distanza da  $C$ ” è continua:

$$\begin{aligned} d : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, C) \end{aligned}$$

Infatti, presi  $x, z \in X$  e  $y \in C$  si ha che:

$$d(x, C) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \implies d(x, C) - d(x, z) \leq d(z, y), \forall y \in C$$

Dunque, al variare di  $y$ :

$$d(x, C) - d(x, z) \leq \inf_{y \in C} d(z, y) = d(z, C) \implies d(x, C) - d(z, C) \leq d(x, z)$$

Scambiando simmetricamente  $x$  e  $z$  si ottiene  $|d(x, C) - d(z, C)| \leq d(x, z)$ ; per l'arbitrarietà di  $x$  e  $y \in C$  allora la funzione  $d$  è continua.

**LEMMA 8.5.0.** LEMMA DEL NUMERO DI LEBESGUE (KOSNIOWSKI, TEOREMA 23.4)

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $\mathcal{A}$  un ricoprimento aperto di  $X$ . Allora  $\exists \delta > 0$  tale che, per ogni palla aperta  $B$  in  $X$  di diametro minore di  $\delta$ ,  $\exists U \in \mathcal{A} : B \subseteq U$ .

**DEFINIZIONE 8.5.1.** NUMERO DI LEBESGUE.

Il numero  $\delta$  descritto nell'enunciato del lemma è detto *numero di Lebesgue* del ricoprimento  $\mathcal{A}$

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $X$  è compatto, allora  $\mathcal{A}$  ammette un sottoricoprimento finito  $\{U_1, \dots, U_n\}$  di aperti. Si considerano i complementari  $C_j := X \setminus U_j$ , chiusi in  $X$ :

$$C_1 \cap \dots \cap C_n = (X \setminus U_1) \cap \dots \cap (X \setminus U_n) = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n) = X \setminus X = \emptyset$$

Per ogni  $j = 1, \dots, n$  sia  $f_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$  la funzione distanza da  $C_j$ : è continua, positiva  $f_j \geq 0$  e si annulla su  $C_j$  chiuso. Sia  $F := \max(f_1, \dots, f_n)$ : essa è continua perché è il massimo di funzioni continue. Mostriamo che vale sempre  $F > 0$ :

$$\begin{aligned} f_j &\geq 0, \forall j && \implies F \geq 0 \\ \text{Se } \exists x_0 \in X : F(x_0) = 0 && \implies f_j(x_0) = 0, \forall j && \implies x_0 \in C_j, \forall j \\ \text{Ma } C_1 \cap \dots \cap C_n = \emptyset && \implies F > 0 \text{ su } X \end{aligned}$$

Quindi, siccome  $F$  è continua e positiva su un compatto, allora  $F$  ammette minimo  $\delta > 0$ .

Sia  $B$  una palla aperta in  $X$  con diametro minore di  $\delta$  e sia  $x_1 \in B$ , allora :

$$\max(f_1(x_1), \dots, f_n(x_1)) = F(x_1) \geq \delta \implies \exists j \in \{1, \dots, n\} : f_j(x_1) \geq \delta$$

cioè tale che  $d(x_1, C_j) \geq \delta > \text{diam} B$ . Mostriamo che  $B \subseteq U_j$ , ovvero che  $B \cap C_j = \emptyset$ :

$$y \in B \implies d(y, x_1) < \text{diam} B < \delta \leq d(x_1, C_j) \implies y \notin C_j \implies B \cap C_j = \emptyset$$

□

**COROLLARIO 8.5.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico,  $\alpha : I \longrightarrow X$  un cammino e  $\mathcal{A}$  un ricoprimento di  $X$ . Allora esiste una suddivisione finita  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$  di  $[0, 1]$  tale che  $\forall i = 0, \dots, k-1 \exists U_i \in \mathcal{A} : \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ , ovvero l'immagine di ogni intervallino della suddivisione è contenuta nel corrispondente aperto del ricoprimento.

**DIMOSTRAZIONE.**  $I$  è uno spazio metrico compatto: sia  $\tilde{\mathcal{A}} := \{\alpha^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{A}\}$  ricoprimento aperto di  $I$  e  $\delta$  il numero di Lebesgue del ricoprimento  $\mathcal{A}$ . Allora basta scegliere una partizione opportuna per poter applicare il lemma:

$$\begin{aligned} |t_{i+1} - t_i| < \delta &\implies \forall i, \exists \varepsilon : t_{i+1} - t_i + 2\varepsilon < \delta && \implies \text{diam}(t_i - \varepsilon, t_{i+1} + \varepsilon) < \delta \\ &\implies \exists U_i \in \mathcal{A} : [t_i - \varepsilon, t_{i+1} + \varepsilon] \subseteq \alpha^{-1}(U_i) && \implies \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i \end{aligned}$$

□

**OSSERVAZIONE.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Preso  $x_0 \in A \subseteq X$  e l'inclusione del sottoinsieme  $A$  in  $X$   $i : A \hookrightarrow X$ , essa induce un *morfismo di gruppi*:

$$\begin{aligned} i_* : \pi_1(A, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [i \circ \alpha] \end{aligned}$$

Il morfismo, ad un laccio  $\alpha : I \longrightarrow A$  in  $A$  con punto base  $x_0$ , associa lo stesso laccio ma visto in  $X$ , sempre con il punto base  $x_0$ :

$$i \circ \alpha : I \longrightarrow X$$

Ricordiamo, per il corollario 8.6 (pag. 112), che se  $A$  è un **retrato** allora  $i_*$  è *iniettivo*; segue che se  $A$  è un **retrato di deformazione** allora  $i_*$  è un *isomorfismo di gruppi*. Consideriamo l'immagine di  $i_*$ , ovvero:

$$G_A := \text{Im } i_* = i_*(\pi_1(A, x_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$$

Esso è il sottogruppo di  $\pi_1(X, x_0)$  dei cammini  $\gamma$  che hanno almeno un rappresentante la cui immagine è interamente contenuta in  $A$ :

$$G_A = \{[\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \mid \exists \tilde{\gamma} \text{ con } [\tilde{\gamma}] = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0) : \tilde{\gamma}([0, 1]) \subseteq A\}$$

Quindi, ad ogni sottoinsieme di  $X$  possiamo associare un *sottogruppo del gruppo fondamentale* definito dall'immagine del morfismo *indotto* dall'inclusione ed è formato esattamente dalle *classi di cammini* che ammettono rappresentante con *immagine* interamente contenuta nel sottoinsieme.

## 8.6 TEOREMA DI VAN KAMPEN SUI GENERATORI

**RICORDIAMO...** Sia  $G$  un gruppo qualsiasi e  $S \subseteq G$  sottoinsieme. Si dice che  $S$  **genera il gruppo**  $G$  se ogni  $g \in G$  si può scrivere come *prodotto finito* di elementi di  $S$  e di loro inversi.

Vediamo ora un risultato generale per poter avere qualche informazione in più sui gruppi fondamentali, sfruttando proprio la nozione di generatore. Si riuscirà a calcolare il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, x_0)$  di generici spazi  $X$  nel corso di *Geometria 4*.

**TEOREMA 8.6.o.** TEOREMA DI VAN KAMPEN SUI GENERATORI (MANETTI 11.25).

Sia  $X$  uno spazio topologico e siano  $A, B \subseteq X$  aperti tali che  $A, B$  e  $A \cap B$  siano **c.p.a.** e  $A \cap B \neq \emptyset, X = A \cup B^a$ .

Sia  $x_0 \in A \cap B$ ; consideriamo le inclusioni  $i : A \hookrightarrow X$  e  $j : B \hookrightarrow X$  con i loro morfismi indotti:

$$i_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \text{ e } j_* : \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \quad (8.29)$$

Siano inoltre  $G_A := \text{Im } i_*$  e  $G_B := \text{Im } j_*$ . Allora  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da  $G_A \cup G_B$ .

<sup>a</sup>Per il teorema 2.8, pag. 31 questo implica che  $X$  è **c.p.a.**



**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ . Mostriamo che  $[\alpha]$  si può scrivere come prodotto finito di elementi di  $G_A \cup G_B$ .

Siccome  $\{A, B\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ , per il corollario 8.7 (pag. 113) esiste una partizione  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$  tale che  $\forall i = 0, \dots, k-1, \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq A$  oppure  $\subseteq B$ . Si consideri ora:

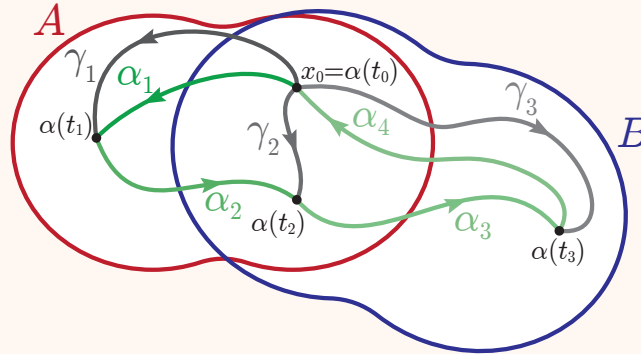
$$\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow X, \forall i = 1, \dots, k$$

Si può pensare ad essa come un *cammino* in  $X$ , se lo riparametrizziamo su  $[0, 1]$ . Per il *lemma sul cambiamento di parametri* (pag. 100) si ottiene, usando anche la giunzione di cammini:

$$\alpha \sim (((\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3) * \dots) * \alpha_k$$

Utilizziamo ora la *connessione per archi*. Essendo  $A, B, A \cap B$  **c.p.a.**, allora  $\forall i = 1, \dots, k-1$ :

- Se  $\alpha(t_i) \in A \cap B$  si sceglie un arco  $\gamma_i : I \longrightarrow A \cap B$  da  $x_0$  a  $\alpha(t_i)$ .
- Se  $\alpha(t_i) \in A \setminus B$  si sceglie un arco  $\gamma_i : I \longrightarrow A$  da  $x_0$  a  $\alpha(t_i)$ .
- Se  $\alpha(t_i) \in B \setminus A$  si sceglie un arco  $\gamma_i : I \longrightarrow B$  da  $x_0$  a  $\alpha(t_i)$ .



Grazie a  $\gamma_i$  ora si può ottenere un *cammino chiuso*:  $\forall i = 1, \dots, k$  sia  $\beta_i := (\gamma_{i-1} * \alpha_i) * \overline{\gamma_i}$ :

- $\beta_i$  è ben definito.
- $\beta_i$  è, per costruzione, un cammino chiuso con *punto base*  $x_0$ .

Segue che  $[\beta_i] \in \pi_1(X, x_0)$ .

Mostriamo ora che  $\text{Im } \beta_i$  è contenuta o in  $A$  o in  $B$ . Fissato  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\text{Im } \alpha_i = \alpha([t_{i-1}, t_i])$  è contenuto o in  $A$  o in  $B$ , supponiamo quanto segue:

$$\begin{aligned} \text{Im } \alpha_i \subseteq A &\implies \alpha(t_{i-1}) \in A, \alpha(t_i) \in A \implies \gamma_{i-1} \text{ e } \gamma_i \text{ entrambi a valori in } A \\ \implies \text{Im } \beta_i \subseteq A &\implies [\beta_i] \in G_A \end{aligned}$$

In modo analogo si può mostrare da  $\text{Im } \alpha_i \subseteq B$  che  $[\beta_i] \in G_B$ . Quindi  $[\beta_i] \in G_A \cup G_B, \forall i$  e:

$$[\alpha] = [\alpha_1 * \dots * \alpha_k] = [\beta_1 * \dots * \beta_k] = [\beta_1] \dots [\beta_k]$$

Pertanto  $G_A \cup G_B$  generano  $\pi_1(X, x_0)$ . □

**COROLLARIO 8.6.o.** (MANETTI, 11.26)

Sia  $X$  uno spazio topologico e siano  $A, B \subseteq X$  aperti tali che

1.  $A$  e  $B$  sono *semplicemente connessi*.
2.  $A \cap B \neq \emptyset$  è **c.p.a.**.

3.  $X = A \cup B$ .  
Allora  $X$  è semplicemente connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema 2.8  $X$  è connesso, essendo unione di **c.p.a.** con intersezione non vuota.

Siccome l'intersezione non è vuota, sia  $x_0 \in A \cap B$ : le ipotesi del *teorema di Van Kampen* appena dimostrato sono soddisfatte, quindi  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da  $G_A$  e  $G_B$ . Tuttavia  $A$  è semplicemente connesso, dunque  $\pi_1(A, x_0) = \{1\}$ ; considerando:

$$L_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow G_A \text{ suriettiva} \implies G_A = \{1\}$$

Vale allo stesso modo per  $G_B = \{1\}$ . Siccome  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da  $G_A \cup G_B = \{1\}$ , allora  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ .  $\square$

## 8.7 GRUPPO FONDAMENTALE DELLA SFERA

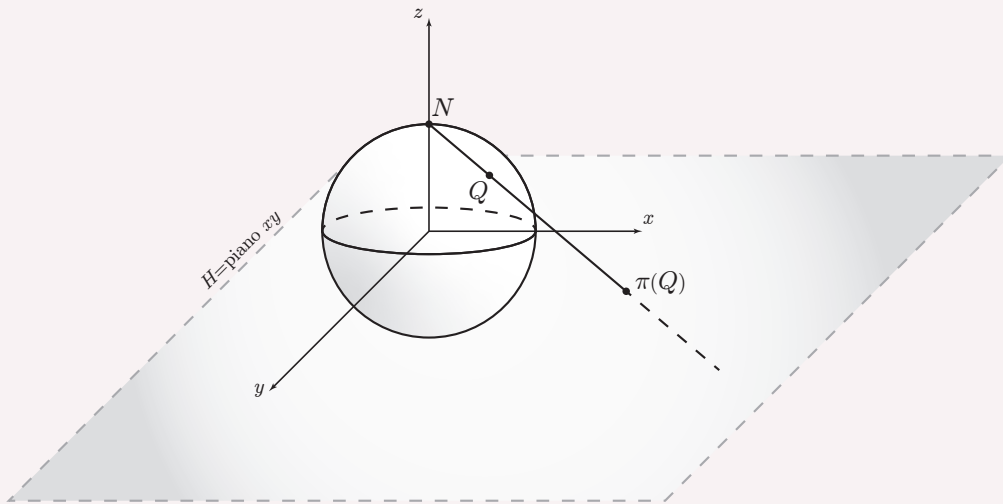
**OSSERVAZIONE.** PROIEZIONE STEREOGRAFICA.

Consideriamo la  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  sfera  $n$ -dimensionale. Si ha che  $\forall p \in S^n$ ,  $S^n \setminus \{1 \text{ punto}\} \cong \mathbb{R}^n$ . Ciò si verifica tramite la **proiezione stereografica**.

Essa opera nel seguente modo: si consideri la sfera  $S^n$  centrata nell'origine e privata del punto  $N = (0, 0, \dots, 1)$ , detto anche **polo Nord**; la proiezione stereografica sarà:

$$\pi : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow H = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n = 0\} \quad (8.30)$$

Che, al punto  $Q \in S^n$ , associa il punto di intersezione  $\pi(Q)$  di intersezione della *retta* passante per  $N$  e  $Q$  con l'iperpiano  $H$ .



La proiezione stereografica è in particolare un *omeomorfismo*<sup>a</sup> e, poiché  $H \cong \mathbb{R}^2$  (in quanto iperpiano di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), si ha  $S^n \setminus \{1 \text{ punto}\} \cong \mathbb{R}^n$ .

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. ??, si può trovare la dimostrazione di ciò per  $n = 2$ .

**COROLLARIO 8.7.0.** (MANETTI, 11.27)

La sfera  $S^n$  è semplicemente connessa,  $\forall n \geq 2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Applichiamo il *teorema di Van Kampen*, scegliendo degli aperti adatti. Sia:

- $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$  il polo Nord.
- $S = (0, \dots, -1) \in S^n$  il polo Sud.

Definiamo  $A := S^n \setminus \{N\}$ : esso è aperto, **c.p.a.**, omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  per la *proiezione stereografica* e, siccome  $\mathbb{R}^n$  è contraibile, lo è anche  $A$ ; dunque sarà *semplicemente connesso*. Lo stesso è vero per  $B := S^n \setminus \{S\}$ .

Si ha  $A \cap B = S^n \setminus \{N, S\}$  **c.p.a.** se  $n \geq 2$ ,  $A \cap B$  non vuoto e inoltre  $S^n = A \cup B$ ; per il corollario 8.8 si ha che  $S^n$  è *semplicemente connesso*.  $\square$

**ATTENZIONE!**  $X$  contraibile implica  $X$  semplicemente connesso, ma non vale il viceversa! Infatti, le sfere  $S^n, n \geq 2$  sono *semplicemente connesse* ma non sono contraibili perché non sono omotopicamente equivalenti ad un punto.

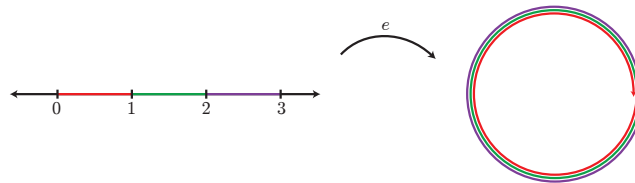
Pertanto, il tipo di omotopia di  $X$  determina il gruppo fondamentale di  $X$ , ma non vale il viceversa!

## 8.8 GRUPPO FONDAMENTALE DELLA CIRCONFERENZA

Nella sezione precedente abbiamo analizzato il gruppo fondamentale delle sfere  $S^n$  per  $n \geq 2$ : ci domandiamo ora cosa succede per la circonferenza  $S^1$ .

Siccome la dimostrazione sarà lunga e articolata, preannunciamo che il gruppo fondamentale che otterremo non è banale, ma è  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ : nello specifico, l'isomorfismo rappresenta il *numero di giri con segno* che un cammino chiuso fa *intorno* alla circonferenza.<sup>1</sup>

Dunque, la nostra intenzione è di formalizzare il concetto che ogni intervallo fra due interi consecutivi “copre” la circonferenza.



## 8.8.1 Mappa esponenziale

**DEFINIZIONE 8.8.0.** MAPPA ESPONENZIALE.

La **mappa esponenziale** si può considerare come proiezione ad un quoziente per l'azione di  $\mathbb{Z}$  su  $\mathbb{R}$ , cioè è la seguente funzione continua e *aperta*:

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Nota: per la dimostrazione del teorema seguiremo il capitolo 16 del libro “A first course in Algebraic Topology” di Kosniowski.

Con questa notazione si considera  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ , per cui  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Si veda a riguardo la digressione a pag. 62.

Utilizzeremo come punto base per i nostri scopi il punto  $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ , equivalente a  $1 \in \mathbb{C}$ .

### 8.8.1.1 Rivestimento

Vogliamo ora utilizzare questa proprietà per definire il numero di giri che fa un cammino chiuso intorno alla circonferenza.

**LEMMA 8.8.0.** Sia  $U \subsetneq S^1$  aperto. Allora:

$$e^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \quad (8.31)$$

Con  $V_n \subseteq \mathbb{R}$  aperto e la restrizione  $e|_{V_n} : V_n \longrightarrow U$  è un omeomorfismo  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**DEFINIZIONE 8.8.1.** UNIFORMEMENTE RIVESTITO.

Un tale  $U$  aperto di un qualsiasi spazio topologico  $X$  si dice **uniformemente rivestito**.

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri un punto *non* in  $U$ , ad esempio supponiamo  $1 \notin U$ . Si ha che:

$$e^{-1}(1) = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) = 1\} = \mathbb{Z} \implies \mathbb{Z} \cap e^{-1}(U) = \emptyset$$

Dunque,  $\mathbb{Z}$  è *disgiunto* dalla controimmagine di  $U$ .

Poniamo ora  $V_0 := e^{-1}(U) \cap [0, 1] = e^{-1}(U) \cap (0, 1)$ , in quanto la controimmagine di  $U$  non contiene interi.

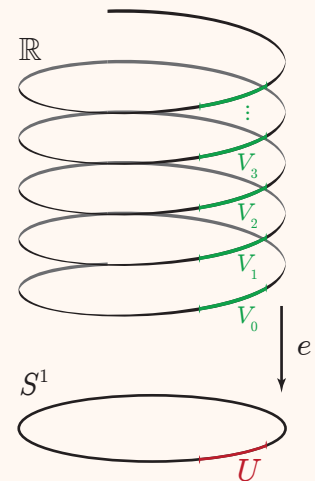
- $V_0$  è aperto in  $\mathbb{R}$  in quanto intersezione di aperti.
- La restrizione  $e|_{V_0}$  è iniettiva.
- $e(V_0) = U$  in quanto  $e((0, 1)) = S^1 \setminus \{1\}$  e  $U \subseteq S^1 \setminus \{1\}$  per ipotesi.

Siccome  $e$  è *aperta*, la restrizione  $e|_{V_0} : V_0 \longrightarrow U$  è un *omeomorfismo* in quanto è biunivoca, continua e aperta.

Definiamo ora  $V_n := V_0 + n = \{x + n \mid x \in V_0\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Allora:

$$e^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \text{ e } V_n \subseteq (n, n+1)$$

Quindi  $V_n \cap V_m = \emptyset$  se  $n \neq m$ , che implica l'*iniettività* della funzione  $e|_{V_n}$  e il fatto che la somma di sopra sia *disgiunta*. Essendo  $e(V_n) = U$ , allora  $e|_{V_n} : V_n \longrightarrow U$  è un omeomorfismo.



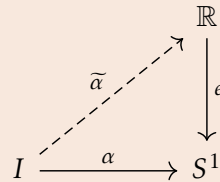
□

### 8.8.2 Sollevamento

**DEFINIZIONE 8.8.2. SOLLEVAMENTO.**

Sia  $\alpha$  un cammino in  $S^1$ . Un **sollevamento** di  $\alpha$  è una funzione continua  $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  tale che commuti il diagramma a lato, cioè tale che  $\alpha = e \circ \tilde{\alpha}$ .

Più in generale, dato  $X$  spazio topologico e  $f : X \longrightarrow S^1$  continua, un **sollevamento** di  $f$  è la funzione  $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$  continua tale che  $f = e \circ \tilde{f}$ .



Se  $\tilde{\alpha}$  è un sollevamento di  $\alpha$ , allora:

$$\forall t \in I, e(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t) \implies e^{2\pi i \tilde{\alpha}(t)} = \cos(2\pi \tilde{\alpha}(t)) + i \sin(2\pi \tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$$

Dunque  $2\pi \tilde{\alpha}(t)$  è una *determinazione dell'angolo* per  $\alpha(t) \in S^1$ ; muovendosi con continuità su  $S^1$  tramite  $\alpha$  ci si muove in maniera continua anche tramite  $\tilde{\alpha}$ , ovvero  $2\pi \tilde{\alpha}$  è una **determinazione continua** dell'angolo per  $\alpha$ .

**ESEMPIO.** Fissato  $n \in \mathbb{Z}$ , si consideri il cammino:

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i n t} \end{aligned}$$

Ad esempio, per  $n = 1$  si percorre 1 giro in senso *antiorario*, con  $n = 2$  si percorrono 2 giri in senso antiorario, con  $n = -1$  si percorre 1 un giro in senso *orario*.

Un sollevamento di  $\gamma$  è dato da  $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $\gamma(t) = e(\tilde{\gamma}(t))$ . Poiché  $\gamma$  è già scritto in forma esponenziale, si ha  $\tilde{\gamma}(t) = nt$ .

Andiamo ora a verificare l'*esistenza* di sollevamenti per cammini e vedere se e quando sono *unici*.

**TEOREMA 8.8.o. SOLLEVAMENTO DI CAMMINI**

Ogni cammino  $\alpha : I \longrightarrow S^1$  ammette un sollevamento  $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ . Inoltre, fissato il punto iniziale, il sollevamento è *unico*: fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ :  $e(x_0) = \alpha(0)$  (ovvero  $x_0 \in e^{-1}(\alpha(0))$  fibra di  $\alpha(0) \in S^1$ ),  $\exists!$   $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  sollevamento di  $\alpha$  a partire da  $x_0$ , cioè  $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- **Esistenza:** Per dimostrare l'*esistenza* si sfruttano gli aperti *uniformemente rivestiti*, dividendo  $I$  in modo tale da avere sottointervalli la cui immagine tramite  $\alpha$  sia contenuta in un *aperto rivestito*; costruiremo induttivamente il sollevamento "a pezzi", componendo con le inverse locali dell'esponenziale.

$\forall p \in S^1$  punto della circonferenza, sia  $U_p \subsetneq S^1$  un intorno aperto *connesso* di  $p$ . Allora  $U_p$  è *uniformemente rivestito*, quindi  $\{U_p\}_{p \in S^1}$  è un ricoprimento aperto di  $S^1$ .

Sia  $\alpha : I \longrightarrow S^1$  un cammino; per il corollario 8.7 del *teorema di Lebesgue* si ha che:

$$\exists 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1 \text{ suddivisione :}$$

$$\forall i = 1, \dots, k, \alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i \text{ aperto del ricoprimento.}$$

Costruiamo ora il sollevamento "a pezzi" *induttivamente* su ciascun intervallino

$[0, t_i]$ : prima si costruisce il passo base per  $[0, t_1]$  poi, assumendo di aver già definito il sollevamento fino a  $t_i$ , lo si costruisce fino a  $t_{i+1}$ .

$t_1$  Posto  $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ , per  $[0, t_1]$  si ha che  $\alpha([0, t_1]) \subseteq U_1$  uniformemente rivestito; pertanto, per il lemma 8.4 (pag. 118) vale:

$$e^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \text{ aperto in } \mathbb{R} : e|_{V_n} : V_n \longrightarrow U_1 \text{ è un omeomorfismo.}$$

Siccome  $x_0 \in e^{-1}(\alpha(0))$  e  $\alpha(0) \in U_1$  allora  $x_0 \in e^{-1}(U_1)$ . Tuttavia, i  $V_n$  sono disgiunti, quindi  $\exists! \bar{n} : x_0 \in V_{\bar{n}}$ . Siccome  $e|_{V_{\bar{n}}} : V_{\bar{n}} \longrightarrow U_1$  è un

omeomorfismo, allora ha un'inversa locale  $\varphi := (e|_{V_{\bar{n}}})^{-1} : U_1 \longrightarrow V_{\bar{n}}$ .

Poniamo ora come primo “pezzo” del sollevamento:

$$\tilde{\alpha}_1 := \varphi \circ \alpha|_{[0, t_1]}, \quad \tilde{\alpha}_1 : [0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$t_{i+1}$  Supponiamo di avere definito  $\tilde{\alpha}_i : [0, t_i] \longrightarrow \mathbb{R}$  continua, sollevamento di  $\alpha|_{[0, t_i]}$ , ovvero il sollevamento di  $\alpha$  da 0 fino a  $t_i$ .

Procedendo analogamente al primo intervallo: consideriamo  $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{i+1}$  uniformemente rivestito, tale per cui  $e^{-1}(U_{i+1}) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m$  con  $W_m$  aperti. Fra questi  $W_m$  scegliamo quello che contiene il punto di partenza.

$$\tilde{\alpha}_i(t_i) \in e^{-1}(\alpha(t_i)) \implies \tilde{\alpha}_i(t_i) \in e^{-1}(U_{i+1}) \implies \exists! \bar{m} : \tilde{\alpha}_i(t_i) \in W_{\bar{m}}.$$

Sia  $\psi := (e|_{W_{\bar{m}}})^{-1} : U_{i+1} \longrightarrow W_{\bar{m}}$  e poniamo  $\widetilde{\alpha_{i+1}} : [0, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$  inversa locale che estende il sollevamento  $\tilde{\alpha}_i$  come segue:

$$\widetilde{\alpha_{i+1}}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(t) & t \in [0, t_i] \\ \psi \circ \alpha(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

Tale funzione è continua per il lemma di incollamento 7.1.

Procedendo in questo modo definiamo  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  sollevamento di  $\alpha$  a partire da  $x_0$ .

- **Unicità:** Sia  $\widehat{\alpha} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  un *altro* sollevamento di  $\alpha$  a partire da  $x_0$ . Sia  $Y$  l'insieme dove  $\tilde{\alpha}$  e  $\widehat{\alpha}$  coincidono:

$$Y := \{t \in I \mid \tilde{\alpha}(t) = \widehat{\alpha}(t)\}$$

Allora:

- ◇  $0 \in Y \implies Y \neq \emptyset$  dato che  $\tilde{\alpha}(0) = \widehat{\alpha}(0) = x_0$ .
- ◇  $Y$  è chiuso per l'implicazione  $1 \implies 3$ ) del teorema ?? (pag. ??), dato che si ha che, prese due mappe continue a valori in uno spazio di **Hausdorff**, l'insieme su cui coincidono è chiuso.

Mostriamo che  $Y$  è anche *aperto*, così per la connessione di  $I$  si ha che  $Y = I$ , il che implica  $\tilde{\alpha} = \widehat{\alpha}$ . Per dimostrare che  $Y$  è aperto dimostriamo che è intorno di

ogni suo punto, usando gli intorni uniformemente rivestiti.

Sia  $t_0 \in Y$  e sia  $\alpha(t_0) \in S^1$ . Sia  $U$  un intorno aperto di  $\alpha(t_0)$  uniformemente rivestito; si ha  $e^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  e vale inoltre:

$$\tilde{\alpha}(t_0) = \widehat{\alpha}(t_0) \in e^{-1}(\alpha(t_0)) \subseteq e^{-1}(U)$$

Per il lemma 8.4 (pag. 8.4)  $\exists! \bar{n}: \tilde{\alpha}(t_0) = \widehat{\alpha}(t_0) \in V_{\bar{n}}$  aperto in  $\mathbb{R}$ .

Poniamo  $A := \tilde{\alpha}^{-1}(V_{\bar{n}}) \cap \widehat{\alpha}^{-1}(V_{\bar{n}})$ . Si ha:

- ◇  $A$  è aperto in  $I$  in quanto intersezione di controimmagine tramite funzioni continue di aperti.
- ◇  $t_0 \in A$ .

Mostriamo ora che le due funzioni coincidano su  $A$ , ovvero  $\tilde{\alpha}(t) = \widehat{\alpha}(t)$ ,  $\forall t \in A$ .

Se  $t \in A$ , per definizione di  $A$  si ha che  $\tilde{\alpha}(t)$  e  $\widehat{\alpha}(t) \in V_{\bar{n}}$ , dunque per definizione di sollevamento:

$$e(\tilde{\alpha}(t)) = e(\widehat{\alpha}(t)) = \alpha(t)$$

Ma  $e|_{V_{\bar{n}}}$  è iniettiva perché è un omeomorfismo, quindi  $\tilde{\alpha}(t) = \widehat{\alpha}(t) \implies A \subseteq Y \implies t_0$  è interno a  $Y$ . Per l'arbitrarietà di  $t_0$  vale  $Y$  aperto.  $\square$

### 8.8.2.1 Grado di un cammino

**DEFINIZIONE 8.8.3.** GRADO DI UN CAMMINO CHIUSO IN  $S^1$ .

Sia  $\alpha : I \longrightarrow S^1$  un cammino chiuso con punto base  $1 \in S^1$  e sia  $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  l'unico sollevamento di  $\alpha$  a partire da  $x_0 = 0 \in e^{-1}(1)$ . Si definisce **grado** di  $\alpha$  come il punto finale del sollevamento:

$$\deg(\alpha) := \tilde{\alpha}(1) \tag{8.32}$$

**OSSERVAZIONE.** ①  $\deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$ .

Quella appena data è una *buona definizione* grazie al teorema precedente che assicura che il sollevamento esiste ed è unico.

Inoltre  $\deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$ : per definizione di sollevamento, siccome il cammino è chiuso:

$$\tilde{\alpha}(1) \in e^{-1}(\alpha(1)) = e^{-1}(\alpha(0)) = e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$$

Il grado conta il **numero di giri** con *segno* di  $\alpha$  intorno a  $S^1$ , dove il segno è *positivo* se gira in senso *antiorario*, e *negativo* se gira in senso *orario*.

Abbiamo così formalizzato il numero di giri con segno intorno a  $S^1$ .

**ESEMPI.**

- Sia  $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ , con  $t \in [0, 1]$ , e sia  $\tilde{\alpha}(t) = t$  il sollevamento di  $\alpha$  a partire da  $x_0 = 0$ . Siccome  $\tilde{\alpha}(1) = 1 \implies \deg \alpha = 1$ ,  $\alpha$  percorre solo un giro in senso antiorario intorno a  $S^1$ .
- Fissato  $n \in \mathbb{Z}$ , sia  $\gamma : I \longrightarrow S^1$  : esso è un cammino chiuso con punto base 1. Il sollevamento di  $\gamma$  con punto base  $x_0 = 0$  è dato da  $\tilde{\gamma}(t) = nt$ , dunque  $\deg \gamma = \tilde{\gamma}(1) = n$ .

**OSSERVAZIONE.** ②  $\deg \alpha = \widetilde{\alpha}(1) - \widetilde{\alpha}(0)$ .

Sia  $\alpha : I \longrightarrow S^1$  un cammino chiuso con punto base 1,  $\widetilde{\alpha}_0$  il sollevamento di  $\alpha$  con punto base  $x_0 = 0$ . Preso  $n \in \mathbb{Z}$ , si consideri  $\widetilde{\alpha}_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$  definita come  $\widetilde{\alpha}_n = \widetilde{\alpha}_0 + n$ . Siccome per ogni punto nella *fibra* del punto iniziale esiste ed è unico il *sollevamento*, e siccome la fibra in questo caso è  $\mathbb{Z}$  si ha che, per ogni intero, il sollevamento sarà il traslato di  $\widetilde{\alpha}_0$ . Verifichiamolo.

Si ha che  $\widetilde{\alpha}_n$  è continuo ed è un sollevamento di  $\alpha$ , infatti:

$$e(\widetilde{\alpha}_n(t)) = e^{2\pi i \widetilde{\alpha}_n(t)} = e^{2\pi i (\widetilde{\alpha}_0(t) + n)} = e^{2\pi i \widetilde{\alpha}_0(t)} e^{2\pi i n} = \alpha(t)$$

Il suo punto iniziale è  $n$ , infatti  $\widetilde{\alpha}_n(0) = \widetilde{\alpha}_0(0) + n = n$ . Quindi  $\widetilde{\alpha}_n$  è il sollevamento di  $\alpha$  a partire da  $x_0 = n$ .

Inoltre osserviamo che

$$\widetilde{\alpha}_n(1) - \widetilde{\alpha}_n(0) = \widetilde{\alpha}_0(1) + n - (\underbrace{\widetilde{\alpha}_0(0) + n}_{=0}) = \widetilde{\alpha}_0(1) = \deg \alpha$$

Pertanto  $\deg \alpha = \widetilde{\alpha}(1) - \widetilde{\alpha}(0)$  con  $\widetilde{\alpha}$  è un sollevamento qualsiasi.

Si può quindi riformulare la definizione di grado di un cammino chiuso  $\alpha$  in  $S^1$  con *punto base qualsiasi* come la differenza fra il punto finale e quello iniziale di un sollevamento  $\widetilde{\alpha}$  qualsiasi del cammino:

$$\deg(\alpha) := \widetilde{\alpha}(1) - \widetilde{\alpha}(0) \quad (8.33)$$

Vediamo ora come si comporta il grado rispetto al prodotto di cammini.

**TEOREMA 8.8.1.** Siano  $\alpha, \beta$  cammini chiusi in  $S^1$  con punto base 1. Allora:

$$\deg(\alpha * \beta) = \deg \alpha + \deg \beta \quad (8.34)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\widetilde{\alpha}$  il sollevamento di  $\alpha$  a partire da  $x_0 = 0$ . Allora definiamo  $a := \widetilde{\alpha}(1) = \deg \alpha \in \mathbb{Z}$ . Sia  $\widehat{\beta}$  il sollevamento di  $\beta$  a partire da  $a$ ; si ha:

$$\deg \beta = \widehat{\beta}(1) - \widehat{\beta}(0) = \widehat{\beta} - a$$

Siccome  $\widetilde{\alpha}, \widehat{\beta} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $\widetilde{\alpha}(1) = \widehat{\beta}(0)$  si può considerare il cammino prodotto  $\widetilde{\alpha} * \widehat{\beta} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ . Dimostriamo che è un sollevamento di  $\alpha * \beta$ :

$$e(\widetilde{\alpha} * \widehat{\beta}(t)) = e^{2\pi i \widetilde{\alpha} * \widehat{\beta}(t)} = \begin{cases} e^{2\pi i \widetilde{\alpha}(t)}, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ e^{2\pi i \widehat{\beta}(2t-1)}, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \alpha * \beta(t)$$

$$(\widetilde{\alpha} * \widehat{\beta})(0) = \widetilde{\alpha}(0) = 0 \implies \deg(\alpha * \beta) = (\widetilde{\alpha} * \widehat{\beta})(1) = \widehat{\beta}(1) = a + \deg \beta = \deg \alpha + \deg \beta$$

□

Si può dimostrare, anche se in questa sede non lo faremo, che il grado è *invariante* per omotopia di cammini; concettualmente consiste nel costruire un sollevamento fra le omotopie per mostrare che hanno lo stesso grado.



**TEOREMA 8.8.2. TEOREMA DI MONODROMIA.**

Siano  $\alpha, \beta$  cammini chiusi in  $S^1$  con punto base 1 e supponiamo che  $\alpha$  e  $\beta$  siano cammini omotopi. Allora  $\deg \alpha = \deg \beta$ , cioè il grado è invariante per omotopia di cammini.

## 8.8.3 Dimostrazione del gruppo fondamentale della circonferenza

**TEOREMA 8.8.3. GRUPPO FONDAMENTALE DI  $S^1$** 

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \quad (8.35)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ . Vogliamo dimostrare che è un **isomorfismo di gruppi** per ottenere la tesi.

- $\Phi$  è un'applicazione *ben definita* per il teorema di monodromia.
- $\Phi$  è un *morfismo di gruppi*: dati  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, 1)$  si ha che:

$$\Phi([\alpha] \cdot [\beta]) = \Phi([\alpha * \beta]) = \deg(\alpha * \beta) = \deg \alpha + \deg \beta = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta])$$

- $\Phi$  è *suriettiva*:  $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists \gamma$  cammino chiuso in  $S^1$  e di grado  $n \implies \Phi([\gamma]) = n$ .
- $\Phi$  è *iniettiva*; per far ciò, mostriamo che  $\ker \Phi$  è banale. Sia  $[\alpha] \in \ker \Phi$ , vogliamo dimostrare che  $[\alpha] = [C_1]$ , cioè  $\alpha \sim C_1$  cammino costante in  $S^1$ . Per ipotesi  $\deg \alpha = \Phi([\alpha]) = 0$ , quindi si consideri il sollevamento di  $\alpha$  con punto base  $x_0 = 0$ . Si ha  $\deg \alpha = \tilde{\alpha}(1) = 0$ , cioè  $\alpha$  è un cammino chiuso.

Siccome  $\mathbb{R}$  è contraibile, allora è *semplicemente connesso*, dunque  $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{1\}$  e  $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{1\}$ . Pertanto,  $[\tilde{\alpha}] = [C_0] \implies \exists F : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$  omotopia di cammini fra  $\tilde{\alpha}$  e  $C_0$ .  $F$  è continua e:

$$\begin{cases} F(t, 0) = \tilde{\alpha}(t) \\ F(t, 1) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in I \quad F(0, s) = F(1, s) = 0, \quad \forall s \in I$$

Sia  $G := e \circ F : I \times I \longrightarrow S^1$ ;  $G$  è continua e vale che:

$$\begin{cases} G(t, 0) = e(F(t, 0)) = e(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t) \\ G(t, 1) = e(F(t, 1)) = e(0) = 1 \end{cases} \quad \forall t \in I \quad G(0, s) = G(1, s) = 1, \quad \forall s \in I$$

$G$  è un'omotopia di cammini fra  $\alpha$  e  $C_1$  in  $S^1$ , pertanto  $\Phi$  iniettiva.

Concludiamo che  $\Phi$  è isomorfismo di gruppi e segue dunque la tesi.  $\square$

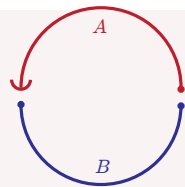
## 8.8.4 Alcune conseguenze del gruppo fondamentale della circonferenza

Osserviamo ora, con un esempio sulla circonferenza, che il corollario 8.8 *non* vale se  $A$  e  $B$  non sono *aperti*.

**ESEMPIO.** Siano  $X = S^1$ ,  $A = (S^1 \cap \{y > 0\}) \cup \{(1, 0)\}$  e  $B = S^1 \cap \{y \leq 0\}$ : notiamo come non sono aperti in  $X$ .

- $A \cong (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  convesso in  $\mathbb{R}$ , allora  $A$  è contraibile e dunque semplicemente connesso.
- $B = S^1 \cap \{y \leq 0\} \cong [0, 1]$  convesso in  $\mathbb{R}$ , allora  $B$  è contraibile e dunque semplicemente connesso.

Si ha che  $X = A \cup B$ ,  $A \cap B = \{(1, 0)\} \neq \emptyset$  e **c.p.a.**, ma  $X = S^1$  come abbiamo appena dimostrato *non* è semplicemente connesso!



**COROLLARIO 8.8.o.** (MANETTI, 12.38)

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  il disco unitario e  $A = \partial D$  il suo bordo, ovvero  $A = S^1$ . Allora  $A$  non è un retrato di  $D$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A$  fosse un retrato, allora  $\pi_1(A)$  dovrebbe essere isomorfo ad un sottogruppo di  $\pi_1(D)$ . Tuttavia,  $\pi_1(A) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  e  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  convesso  $\implies \pi_1(D) = \{1\}$ , il che è un assurdo in quanto  $\mathbb{Z} \not\subset \{1\}$ .  $\square$

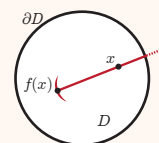
**OSSERVAZIONE.** Allo stesso modo, se  $X$  è uno spazio topologico *semplicemente connesso* e  $A \subseteq X$  con  $A \cong S^1$ , allora  $A$  *non* può essere un retrato di  $X$ .

**COROLLARIO 8.8.1.** TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER (MANETTI 12.39)

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  il disco unitario e sia  $f : D \longrightarrow D$  continua. Allora  $f$  ha un punto fisso, ovvero  $\exists x_0 \in D : f(x_0) = x_0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per *assurdo*, supponiamo che  $f$  *non* abbia punti fissi, ovvero  $f(x_0) \neq x_0$ ,  $\forall x_0 \in D$ . Utilizziamo  $f$  per costruire una retrazione che non può esistere per motivi topologici. Sia  $r : D \longrightarrow \partial D$  *retrazione* continua con  $r|_{\partial D} = Id_{\partial D}$  definita nel modo seguente:

Preso  $S$  la semiretta aperta uscente da  $f(x)$  (essendo aperta il punto  $f(x)$  è escluso) e passante per  $x$  (in quanto  $x \neq f(x)$  per ipotesi dell'assurdo), si ponga  $r(x) = S \cap \partial D$ .



Se  $x \in \partial D$ , allora  $x = r(x) \implies r|_{\partial D} = Id_{\partial D} \implies r$  retrazione, il che è *assurdo* per il corollario precedente.  $\square$

#### 8.8.4.1 Invarianza della dimensione

Grazie al calcolo del gruppo fondamentale della circonferenza si riescono anche a dimostrare dei casi particolari del *teorema di invarianza della dimensione* (che verrà affrontato nel corso di *Topologia Algebrica*).

**TEOREMA 8.8.4.** TEOREMA DI INVARIANZA DELLA DIMENSIONE.

Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  aperti. Se  $U$  e  $V$  sono omeomorfi allora  $n = m$ . Per contronominale, se  $n \neq m$  allora  $U$  e  $V$  non sono omeomorfi.

**ESEMPIO.** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto con  $n \geq 2$ . Allora  $U$  *non* è omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}$ . Per dimostrarlo basta considerare una palla  $B$  in  $\mathbb{R}^n$  ed un intervallo  $I$  in  $\mathbb{R}$  e togliere ad

entrambe un punto: nel primo caso si ottiene ancora un *connesso*, mentre nel secondo uno *sconnesso*, dunque *non* possono essere omeomorfi.

**TEOREMA 8.8.5.** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto con  $n \geq 3$ . Allora  $U$  non è omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Ragionando per assurdo, ipotizziamo che  $U$  sia omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $B \subseteq U$  una palla aperta di centro  $p$ , allora  $B$  è omeomorfo ad un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ .

Sia  $q \in A$  il punto corrispondente a  $p$  tramite l'omeomorfismo, dunque  $B \setminus \{p\}$  è omeomorfo a  $A \setminus \{q\}$ , ma  $B \setminus \{p\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $S^{n-1}$ .

Infatti, sia  $S$  una sfera centrata in  $p$  tale per cui  $S \subset B$ , si ha che  $S \cong S^{n-1}$  e  $S \subset B \setminus \{p\}$  è un *retrato di deformazione*. Supponiamo per semplicità che  $p = \mathbf{0}$ ; la retrazione è data da:

$$\begin{aligned} r : B \setminus \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto R \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

Con  $R$  raggio di  $S$ . Segue che  $A \setminus \{q\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $S^{n-1}$ ,  $n \geq 3 \implies n-1 \geq 2 \implies S^{n-1}$  è semplicemente connesso, cioè  $A \setminus \{q\}$  è *semplicemente connesso*. Dimostriamo ora che questo è assurdo.

$A$  aperto  $\implies \exists C$  circonferenza centrata in  $q$  tale che  $C \subset A$ . Si ha che  $C$  è un retratto (in generale *non* di *deformazione*!) di  $A \setminus \{q\}$ , sempre con la stessa retrazione di prima:

$$\begin{aligned} f : A \setminus \{q\} &\longrightarrow C \\ x = q + (x - q) &\longmapsto q + r(C) \frac{x - q}{\|x - q\|} \end{aligned}$$

Con  $r(C)$  raggio di  $C$  e lo spostamento dovuto al fatto che  $C$  è centrata in  $q$ . Se  $x_0 \in C \subset A \setminus \{q\}$ , siccome esso è un retratto, si ha che  $\mathbb{Z} \cong \pi_1(C, x_0) \hookrightarrow \pi_1(A \setminus \{q\}, x_0) = \{1\}$ , da cui l'assurdo.  $\square$

**ATTENZIONE!** Non abbiamo potuto supporre che  $A$  fosse una palla perché non sappiamo che “forma” abbia dato l'omeomorfismo!

### 8.8.5 Gruppo fondamentale del prodotto

**TEOREMA 8.8.6.** (MANETTI, 11.17)

Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ . Allora:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \quad (8.36)$$

**ATTENZIONE!** Con  $\oplus$  si intende la *somma diretta* di gruppi, da intendersi come *prodotto cartesiano* i cui morfismi sono *componente per componente*. È diversa dalla *somma diretta fra spazi vettoriali*, dato in quest'ultimo caso essa è *interna*!

**DIMOSTRAZIONE.** Un cammino  $\alpha : I \longrightarrow X \times Y$  è determinato dalle sue componenti

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  con  $\alpha_1 : I \longrightarrow X$  e  $\alpha_2 : I \longrightarrow Y$ , dunque c'è la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\Omega(X \times Y; x_0, y_0, (x_0, y_0)) \leftrightarrow \Omega(X; x_0, x_0) \times \Omega(Y; y_0, y_0)$$

Allo stesso modo, la mappa  $F : I \times I \longrightarrow X \times Y$  è determinata dalle sue componenti  $(F_1, F_2)$  con  $F_1 : I \times I \longrightarrow X$  e  $F_2 : I \times I \longrightarrow Y$ ; inoltre, si ha che  $F$  è omotopia fra i cammini  $\alpha$  e  $\beta$  se e solo se  $F_i$  è un'omotopia di cammini fra  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ .

Dunque c'è una corrispondenza biunivoca tra i quozienti:

$$\begin{aligned} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\leftrightarrow \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\leftrightarrow ([\alpha_1], [\alpha_2]) \end{aligned}$$

Essa è anche un morfismo di gruppi, dato che  $\alpha * \beta = (\alpha_1 * \beta_1, \alpha_2 * \beta_2)$ : i gruppi sono isomorfi.  $\square$

## 8.9 ALCUNI ESEMPI DI GRUPPI FONDAMENTALI

### 8.9.1 Toro

**DEFINIZIONE 8.9.0. TORO.**

Il **toro**  $T$  è lo spazio dato dal prodotto  $S^1 \times S^1$ .

Siccome  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , si ha sicuramente che  $T \subset \mathbb{R}^4$ ; tuttavia, esso è *omeomorfo* al sottospazio  $X$  di  $\mathbb{R}^3$  che possiamo visualizzare come una “ciambella”. In particolare, si può definire come effetto della *rotazione* attorno all'asse  $z$  di una *circonferenza* ad esso disgiunto.

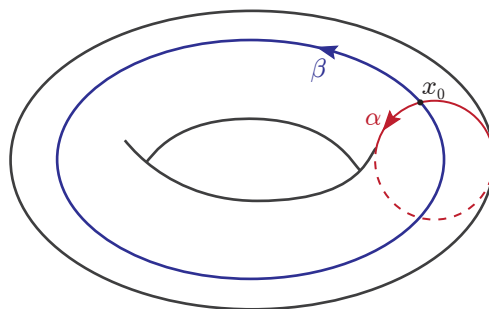
Per il teorema precedente si ha:

$$\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Siccome  $\mathbb{Z}$  è un gruppo *ciclico infinito*, posso considerare per il gruppo fondamentale  $\pi_1(S^1)$  i generatori  $\{-1\}$  e  $\{1\}$ , cioè la *classe* del cappio di grado 1 e quella di grado  $-1$ ; si utilizzerà come generatore *standard*  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ .

Per il toro, dunque, consideriamo i generatori corrispondenti a  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  in  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ; scelto pertanto il punto base  $x_0 = (1, 1)$  si hanno:

- $\alpha(t) = (e^{2\pi it}, 1)$ , corrispondente ad un giro nel senso della circonferenza indicata in **rosso**.
- $\beta(t) = (1, e^{2\pi it})$ , corrispondente ad un giro nel senso della circonferenza indicata in **blu**.



### 8.9.2 Un gruppo fondamentale non abeliano

Sia  $X$  l'unione ad un punto di due circonferenze in  $\mathbb{R}^2$ , cioè il **bouquet di due circonferenze** che abbiamo trattato a pag. 93. Si ha che  $\pi_1(X, x_0)$  è *infinito*: presi i cammini  $[\alpha]$  e  $[\beta]$  per ciascuna delle due circonferenze, con punto base  $x_0$  dato dall'intersezione delle

due circonferenze, essi *non* commutano, ovvero  $[\alpha * \beta] \neq [\beta * \alpha]$ . Inoltre  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da  $[\alpha]$  e da  $[\beta]$ .

### 8.9.3 Spazio proiettivo reale

Consideriamo ora il caso dello *spazio proiettivo reale*, che abbiamo introdotto nel capitolo Capitolo 5.

Ricordiamo la definizione 5.7:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

Dove  $x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: y = \lambda x$ , cioè  $\sim$  è la relazione indotta dall'azione di  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  su  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  per moltiplicazione.

Ricordiamo inoltre la proposizione 5.2 per cui  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è *compatto* e *connesso*; si ha inoltre che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è di **Hausdorff**.

Considerata la *restrizione* della proiezione  $\pi_0 := \pi|_{S^n} : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , essa è continua, suriettiva e chiusa (in quanto funzione da compatto in **Hausdorff**), quindi  $\pi_0$  è un'identificazione. Pertanto,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è anche un quoziente di  $S^n$  rispetto alla relazione che identifica i *punti antipodali*  $p$  e  $-p$ .

Si consideri dunque la funzione associata:

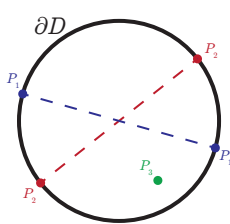
$$\begin{aligned} \varphi : S^n &\longrightarrow S^n && \text{omeomorfismo di } S^n \\ p &\longmapsto -p \end{aligned} \quad (8.37)$$

Tale relazione di equivalenza su  $S^n$  è indotta dall'azione del gruppo  $\{\pm 1\}$  per moltiplicazione, dunque  $\pi_0 : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è sia chiusa, sia aperta. In particolare, se  $U \subset S^n$  è un aperto su cui  $\pi_0$  è *iniettiva*, allora  $\pi_{0|_U} : U \longrightarrow \pi_0(U)$  è un *omeomorfismo* perché continua, biunivoca e aperta.

Da notare che, se  $\pi_0$  è iniettiva su  $U$ , allora  $U \subsetneq S^n$ , dunque se  $p_0 \in S^n \setminus \{p_0\} \cong \mathbb{R}^n$  segue che  $\pi_0(U)$  aperto in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

Analizziamo alcuni casi di dimensione *bassa*:

- **$n = 1$ : retta proiettiva reale  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .**
- **$n = 2$ : piano proiettivo reale.** La sua descrizione geometrica esplicita può essere *complicata*, tuttavia possiamo trovare un *modello* che ci permetta di studiarlo comodamente. Data la mappa  $\pi_0 : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e considerata la *calotta superiore* della sfera compreso l'*equatore*, cioè  $C := S^2 \cap \{z \geq 0\}$ , si ha che  $\pi_0(C) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Dunque,  $\pi_{0|_C} : C \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è ancora chiusa ed è ancora un'identificazione.



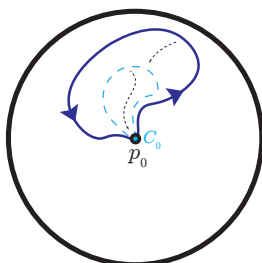
Sia ora  $D \subset \mathbb{R}^2$  il disco unitario; si ha che  $D \cong C$  tramite la proiezione ortogonale dei punti della calotta superiore sul piano  $xy$ , dunque  $D \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è un'identificazione che identifica i *punti antipodali* su  $\partial D$ . Lo spazio quoziente che otteniamo su  $D$  (e anche su  $C$ , chiaramente) è omeomorfo a  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e prende il nome **modello piano di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$** .

Da ciò si vede, anche intuitivamente, che il gruppo fondamentale risulta un gruppo di due elementi:

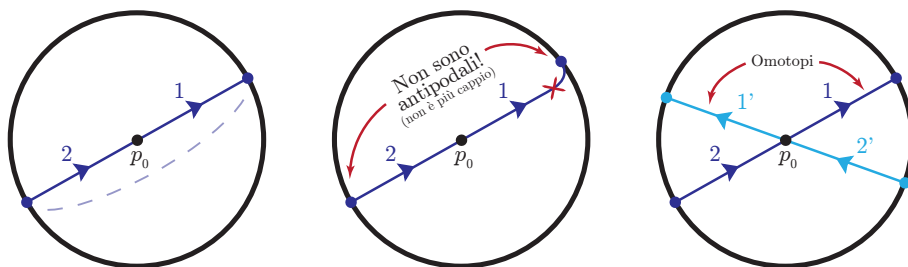
$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), p_0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\} \quad (8.38)$$

Vediamo il perché. Preso un punto base  $p_0$ :

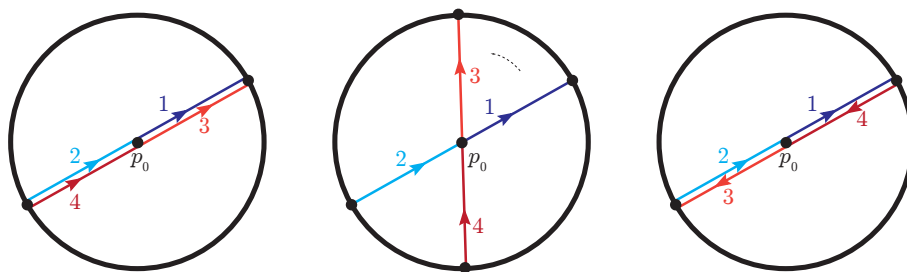
- ◊ Qualunque coppia contenuta all'interno del disco, cioè senza toccare alcun punto del bordo, è omotopicamente equivalente al cammino banale  $C_0$  (e quindi la classe è  $[C_0]$ ).



- ◊ Qualunque coppia che va “oltre il bordo” *una volta*, attraversando il cammino banale e torna indietro al punto base *non* è banale. Infatti, non possiamo ridurre il cammino ad un coppia sul piano (dato che non avremmo più i punti sul bordo *antipodali*), al più possiamo “ruotarlo” attorno al punto base per ottenere un’altro coppia omotopico al primo che attraversa sempre il bordo<sup>2</sup>.

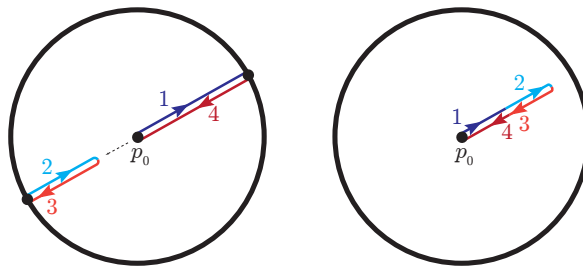


Tuttavia, un coppia che va oltre il bordo *due volte* è omotopicamente equivalente al cammino costante. Infatti, possiamo “ruotare” la seconda parte del coppia (nell’immagine indicata con 3 e 4, cioè la parte del laccio dopo che ha già attraversato una volta il bordo) in modo da ottenere il cammino come in figura.



In questo modo, percorrendo il coppia si attraversa il bordo e, quando si arriva al punto base per la prima volta, si torna indietro e si ripercorre il percorso appena fatto all’indietro.

<sup>2</sup>Per semplicità, nelle figure abbiamo preso come punto il centro del disco. Questi ragionamenti e quelli successivi si adattano facilmente anche nel caso di un *punto generico*, ponendo una leggera *deformazione* al coppia in modo da fare rotazioni “lecite”, cioè che mantengono i punti del cammino posti sul bordo *antipodali*.



In termini di classi si ha:

$$[\alpha]^2 = [\alpha * \bar{\alpha}] = [C_{p_0}]$$

Ottenendo quindi come gruppo fondamentale un gruppo di due soli elementi.





# III

## CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI TOPOLOGICHE



# VARIETÀ TOPOLOGICHE

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

La Terra è piatta o sferica? Per un topologo, la risposta è: *dipende* da come la si guarda. Sappiamo che vista nello spazio la Terra è una *sfera*; tuttavia, se ci troviamo in una *zona piana*, nei nostri dintorni appare sufficientemente piatta. In modo analogo, su un foglio i *triangoli* sono quelli ben noti con somma degli angoli interni un angolo piatto, se prendiamo tre punti ben distanti sulla Terra il “triangolo” che otteniamo ha somma maggiore! Com’è possibile?

Le **varietà topologiche** sono la risposta formale a ciò: una varietà topologica è uno spazio che localmente ha le stesse proprietà di uno spazio Euclideo reale. In particolare, in questa trattazione ci occuperemo principalmente di varietà topologiche di *dimensione 2* e di come poterle classificarle a meno di omeomorfismi.

## 9.1 VARIETÀ TOPOLOGICHE

**DEFINIZIONE 9.1.0.** LOCALMENTE EUCLIDEO.

Uno spazio topologico  $X$  si dice **localmente euclideo** di dimensione  $n$  se ogni punto di  $X$  ammette un intorno aperto omeomorfo ad una palla aperta di  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINIZIONE 9.1.1.** VARIETÀ TOPOLOGICA.

Uno spazio topologico  $X$  si dice **varietà topologica** di dimensione  $n$  se  $X$  è di **Hausdorff**, connesso, a base numerabile e localmente euclideo di dimensione  $n$ .

**ESEMPL.**

- $\mathbb{R}^n$  è una varietà topologica di dimensione  $n$ .
- $S^n$  è una varietà topologica compatta di dimensione  $n$ , infatti grazie alla proiezione stereografica si ha che  $S \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}$ .

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è una varietà topologica compatta di dimensione  $n$ .
- Ogni aperto connesso di una varietà topologica di dimensione  $n$  è una varietà topologica di dimensione  $n$ .

**OSSERVAZIONE.** La dimensione di una varietà topologica è *ben definita* per l'invarianza della dimensione.

**OSSERVAZIONI.**

- Una varietà topologica è **c.p.a.**.
- Se  $X$  è una varietà topologica di dimensione  $n$  e  $Y$  è una varietà topologica di dimensione  $m$  allora  $X \times Y$  è una varietà topologica di dimensione  $n + m$ .

**ESEMPIO.**  $T = S^1 \times S^1$  è una varietà topologica di dimensione 2.

**TEOREMA 9.1.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico compatto, connesso, **Hausdorff** e localmente euclideo di dimensione  $n$ . Allora  $X$  è a *base numerabile*, dunque  $X$  è una varietà topologica di dimensione  $n$ .

### 9.1.1 Dimensione 1

Analizziamo il caso di varietà topologiche di dimensione 1, per esempio  $\mathbb{R}$  e  $S^1$ .

**TEOREMA 9.1.1.** Ogni varietà topologica di dimensione 1 è omeomorfo a  $\mathbb{R}$  se *non* è compatta, oppure a  $S^1$  se compatta.

**ESEMPIO.** Riconsideriamo l'esempio della **retta con 2 origini** (sez. 4.1.2.3, pag. 4.1.2.3): essa è un quoziente non **Hausdorff**, dunque *non* è una varietà topologica.

### 9.1.2 Dimensione 2

**DEFINIZIONE 9.1.2.** SUPERFICIE TOPOLOGICA.

Una varietà topologica di dimensione 2 si dice **superficie topologica**.

**ESEMPL.**

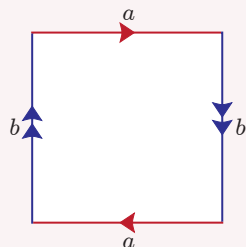
- Il *piano*  $\mathbb{R}^2$  oppure  $\mathbb{R}^2 \setminus \{n \text{ punti}\}$  sono superfici topologiche di dimensione 2 *non* compatte.
- La **sfera**  $S^2$  è una superficie topologica compatta.
- Il **toro**  $T = S^1 \times S^1$  è una superficie topologica compatta.
- Il **piano proiettivo**  $P = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  una superficie topologica compatta.

Vogliamo dare una classificazione delle superfici topologiche *compatte*. Innanzitutto, esaminiamo alcuni esempi di superfici compatte studiandole sul *modello piano*, di cui daremo successivamente una definizione formale.

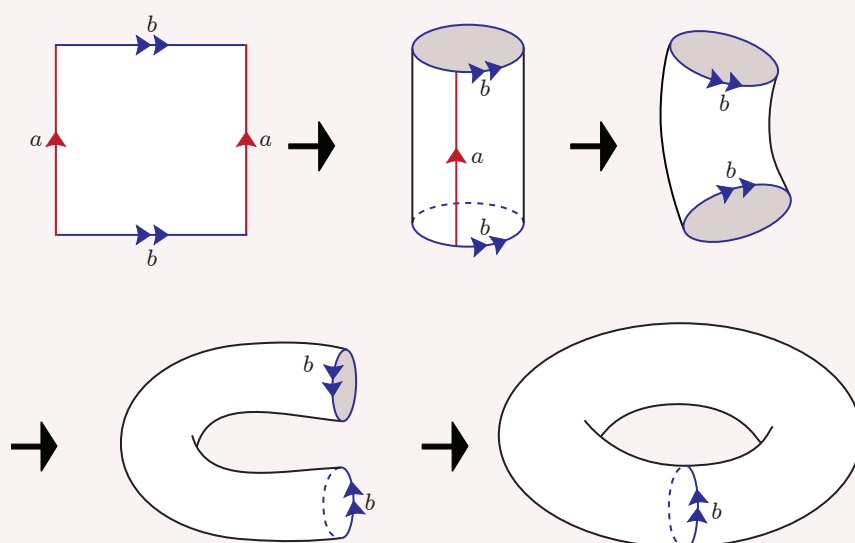
**ESEMPL.** MODELLI PIANI.

- Siccome  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è un quoziente del disco, allora, a meno di omeomorfismo, lo si può anche vedere come un quoziente di  $I \times I$  con una relazione di equivalenza

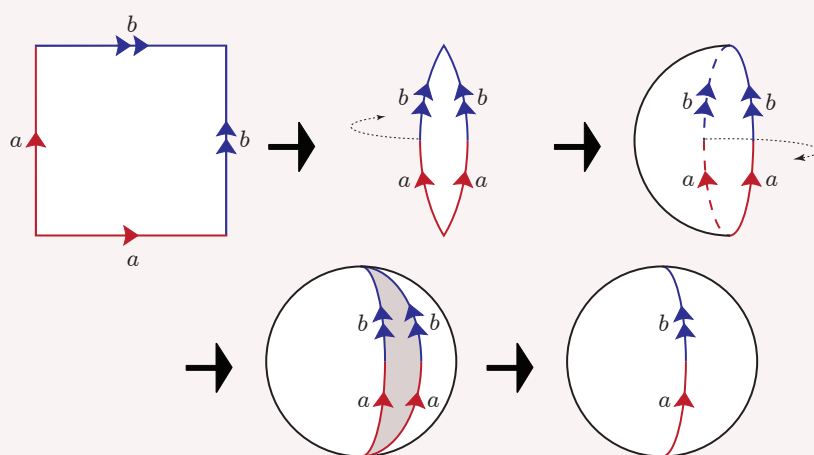
sul bordo con parola  $abab$ .



- Anche il **toro** si può vedere come quoziente di  $I \times I$  con parola  $aba^{-1}b^{-1}$ .



- Vediamo  $S^2$  come quoziente di  $I \times I$  con parola  $bb^{-1}a^{-1}a$ .



**OSSERVAZIONE.** Sia  $P \subset \mathbb{R}^2$  un poligono pieno con un numero *pari* di lati. Sia  $\sim$  una relazione di equivalenza che identifica i lati a 2 a 2. Allora  $S := P/\sim$  è una *superficie topologica compatta*, infatti:

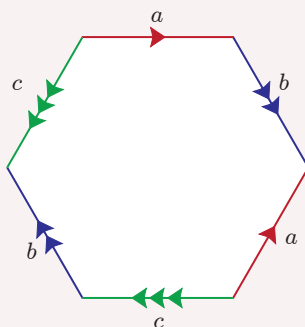
1.  $P$  è connesso e compatto  $\implies S$  connesso e compatto.
2.  $S$  è localmente euclideo di dimensione 2. Infatti, sia  $p \in S$ :

- Se  $p$  viene da un *punto interno* al poligono, allora si sceglie un intorno aperto  $U$  centrato in tale punto tale che  $U \cap \partial P = \emptyset$ , data la proiezione  $\pi : P \longrightarrow S$ ,  $\pi(U) \cong U$  ed è un intorno aperto di  $p$ .
- Se  $p$  viene da un punto interno ad un *lato*, grazie all'identificazione dei lati a due a due si ha che passando al quoziente, cioè un intorno aperto di  $p$  omeomorfo ad un disco aperto.
- Se  $p$  viene da un *vertice*, siccome i vertici vengono identificati con i vertici, analogamente al caso dei lati si ottiene un intorno aperto di  $p$  in  $S$  omeomorfo ad un disco aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

3.  $S$  è di **Hausdorff**.

Nella relazione di equivalenza due lati vengono identificati nel modo seguente: poiché  $l_i \cong [0, 1]$ , scelgo un omeomorfismo  $\varphi : l_1 \longrightarrow l_2$ , in modo che  $p_1 \in l_1 \sim \varphi(p) \in l_2$  e  $\varphi$  manda vertici in vertici.

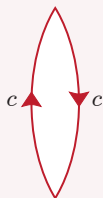
Il poligono  $P$  con la relazione di equivalenza sui lati è detto un **modello piano** della superficie  $S$  e può essere schematizzato con una *sequenza di lettere* detta **parola**. Ad esempio, per la parola  $aba^{-1}cbc^{-1}$  si ottiene il modello piano seguente:



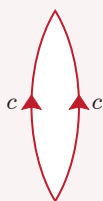
Inoltre, il modello piano di una superficie compatta *non è unico*.

#### ESEMPLI.

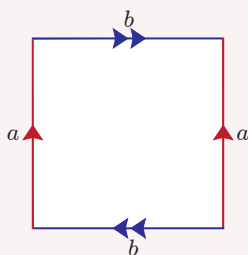
- Abbiamo già visto il modello piano di  $S^2$  sul *quadrato*; per la costruzione effettuata, possiamo unire la sequenza di lati  $ab$  in un unico lato  $c$  in modo da ottenere un modello costituito da un poligono *improprio a due lati*, con parola  $cc^{-1}$ :



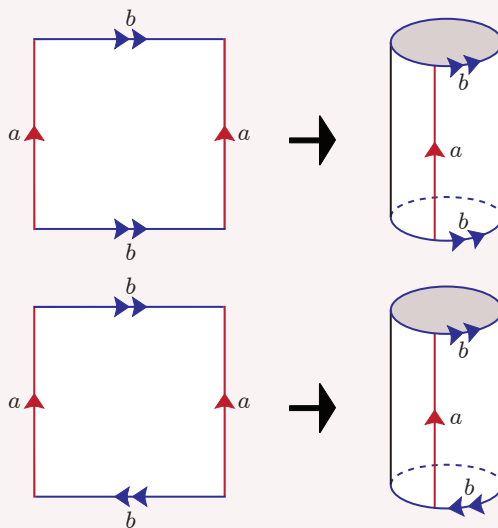
- Anche il modello piano di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sul *quadrato* può essere trasformato in uno sul poligono a due lati, unificando  $ba$  per ottenere un'unico lato  $c$  e un modello con parola  $cc$ :



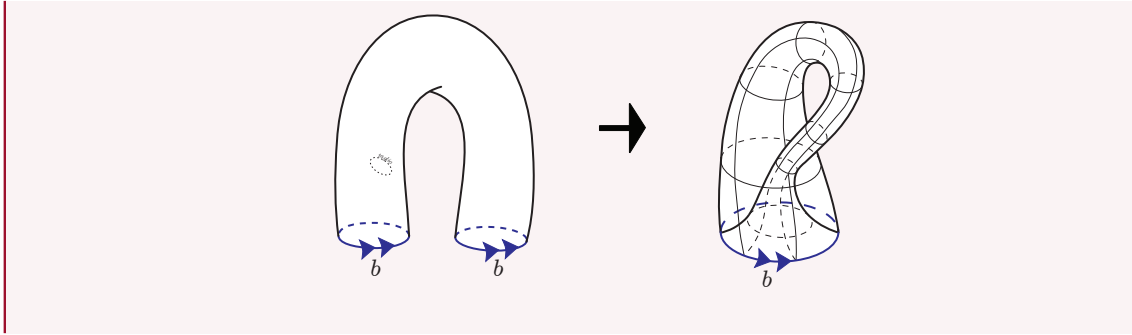
- La **bottiglia di Klein**  $K$  è la superficie compatta data dal modello piano:



Confrontiamo la costruzione della bottiglia di Klein con la costruzione del *toro*, vista precedentemente. Innanzitutto otteniamo in entrambi il cilindro  $S^1 \times I$  con la relazione di equivalenza sul *bordo*; notiamo che nella bottiglia di Klein (il modello inferiore nella figura sotto) il “verso” rispetto al quale *incolleremo* i bordi sono uno l’opposto dell’altro.



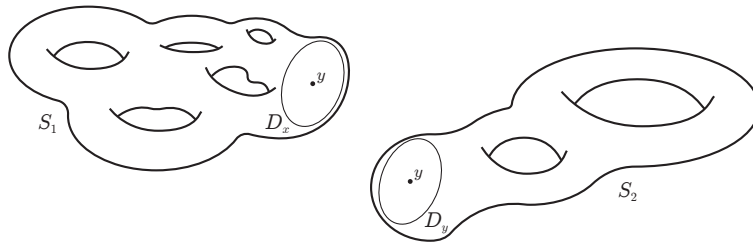
Questo comporta che la bottiglia di Klein *non* può essere rappresentata in  $\mathbb{R}^3$ ; tuttavia, possiamo visualizzarla in modo improprio operando un “*taglio*” nella superficie e compenetrando uno dei due estremi del cilindro nella figura, come di seguito.



## 9.2 SOMMA CONNESSA DI SUPERFICI COMPATTE

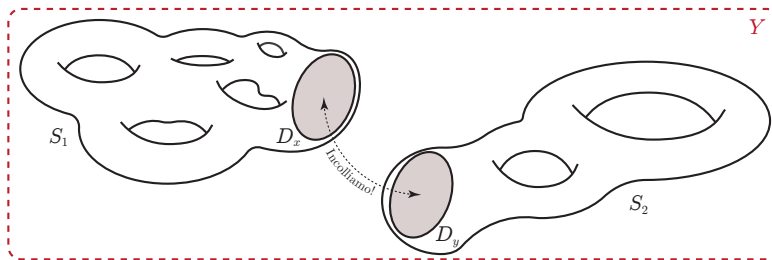
Siano  $S_1$  e  $S_2$  superfici compatte e siano  $x \in S_1$  e  $y \in S_2$ . Siano  $D_x \subset S_1$  e  $D_y \subset S_2$  interni di  $x$  e  $y$  rispettivamente, omeomorfi ad un disco chiuso  $D \subset \mathbb{R}^2$ :

$$D_x \xrightarrow{h} D_y$$



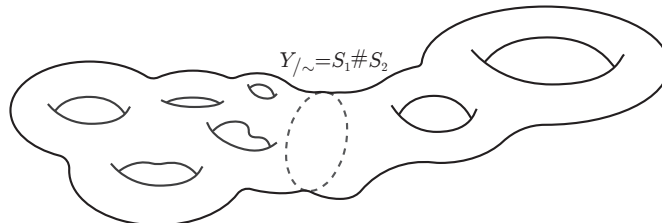
Togliamo dalle due superfici gli interni dei dischetti, creando dunque lo spazio:

$$Y := (S_1 \setminus D_x^\circ) \sqcup (S_2 \setminus D_y^\circ)$$



Incolliamo ora i due pezzi di  $Y$  lungo i bordi dei dischi, cioè mettiamo su  $Y$  la seguente relazione di equivalenza:

$$x_1 \sim y_1 \iff x_1 = y_1 \text{ oppure } x_1 \in \partial D, y_1 \in \partial D \text{ e } y_1 = h(x_1) \text{ (o viceversa)}$$

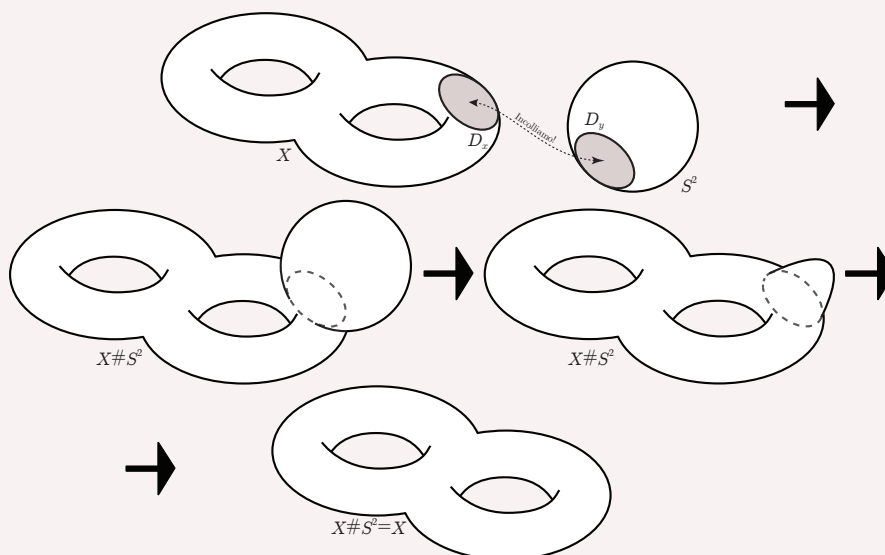




Vediamo ora qualche fatto che *non* dimostriamo:

- Il quoziente è ancora una superficie topologica, che chiamiamo **somma connessa**  $S_1 \# S_2$  di  $S_1$  e  $S_2$ .
- La somma connessa  $S_1 \# S_2$ , a meno di omeomorfismo, *non dipende* dalle scelte fatte come i punti  $x$  e  $y$ , gli intorni  $D_x$  e  $D_y$ , l'omeomorfismo  $h$ , ma soltanto da  $S_1$  e da  $S_2$ !
- La somma connessa di superfici compatte è, a meno di omeomorfismi, *commutativa* e *associativa*:
  - ◇ COMMUTATIVA:  $S_1 \# S_2 \cong S_2 \# S_1$ .
  - ◇ ASSOCIATIVA:  $(S_1 \# S_2) \# S_3 \cong S_1 \# (S_2 \# S_3)$ .
- Se  $S_1, S_2$  sono superfici compatte, allora anche  $S_1 \# S_2$  è una superficie topologica compatta.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $X$  una superficie compatta. Allora  $X \# S^2 \cong X$ . Infatti,  $S^2 \setminus D_y$  è omeomorfo ad un *disco chiuso* in  $\mathbb{R}^2$ . Dato che stiamo togliendo un disco anche ad  $X$  per poi aggiungerne un altro, ritroviamo  $X$  a meno di omeomorfismi.

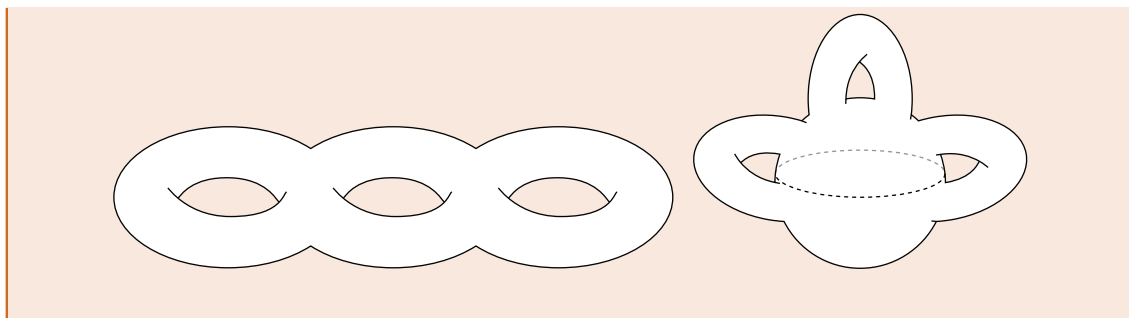


**DEFINIZIONE 9.2.0.** SOMMA DI TORI.

Indichiamo con  $T_g$  la **somma connessa di  $g \geq 1$  tori**:

$$T_g = \underbrace{T \# \dots \# T}_{g \text{ volte}} \quad g \geq 1 \quad (T_1 = T) \quad (9.1)$$

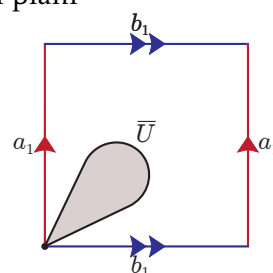
$T_g$  può essere visualizzato sia come “ciambella con  $g$  buchi”, sia come “sfera con  $g$  manici”.



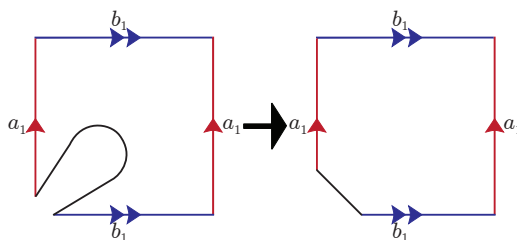
### 9.2.0.1 Rappresentazione della somma connessa tramite modelli piani

Supponiamo che  $S_1$  e  $S_2$  abbiano entrambe un modello piano, rappresentato da una parola.

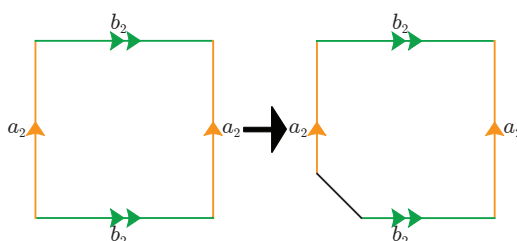
Ad esempio, prendiamo come  $S_1$  un *toro*, con parola  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ . Scegliamone un *vertice* e prendiamo un disco  $\bar{U}$  passante per il vertice che non tocca il resto del bordo.



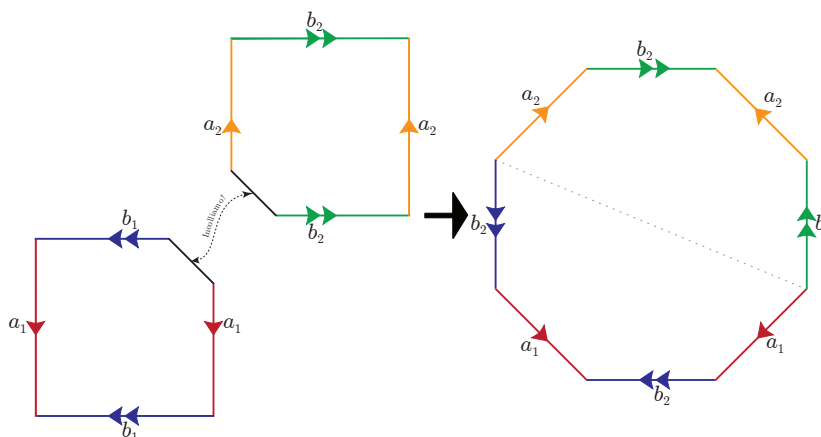
Per fare la somma connessa, togliamo  $U$ :



Facciamo lo stesso con la seconda superficie,  $S_2$  (che in questo esempio è anch'essa un toro di parola  $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ ).



Infine, *incolliamo* lungo i due nuovi lati creati bucando le due superfici:



Il modello ottenuto è un modello piano per  $S_1 \# S_2$ , la cui parola associata è ottenuta per concatenazione:

$$\underbrace{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}}_{\text{modello piano di } S_1} \underbrace{a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}}_{\text{modello piano di } S_2}$$

**ESEMPIO.** Il toro  $T$  è dato dalla parola  $aba^{-1}b^{-1}$ . Allora  $T_g = T \# \dots \# T$  ha un modello piano dato dalla parola :

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

$T_g$  è un quoziente con  $4g$  lati.

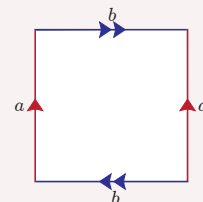
**DEFINIZIONE 9.2.1.** SOMMA CONNESSA DI  $n$  PIANI PROIETTIVI

Preso il piano proiettivo reale  $P = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , definiamo la **somma connessa di  $n$  piani proiettivi** come:

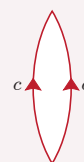
$$P_n = \underbrace{P \# \dots \# P}_{n \text{ volte}} \quad n \geq 1 \quad (P_1 = P)$$

**OSSERVAZIONE.** Studiamo come la *bottiglia di Klein* altro non è che la somma connessa di due piani proiettivi, cioè  $K = P \# P = P_2$ .

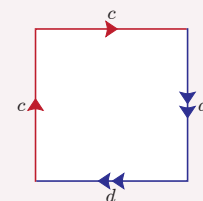
$K$  ha il modello piano quadrato con parola  $aba^{-1}b$ , come nella figura a fianco.



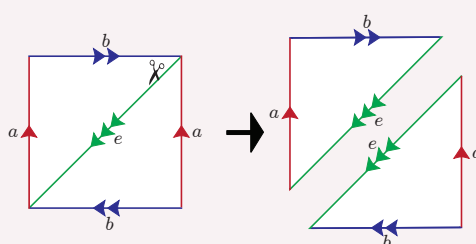
Abbiamo visto inoltre come  $P = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ha un modello piano a due lati con parola  $cc$ .



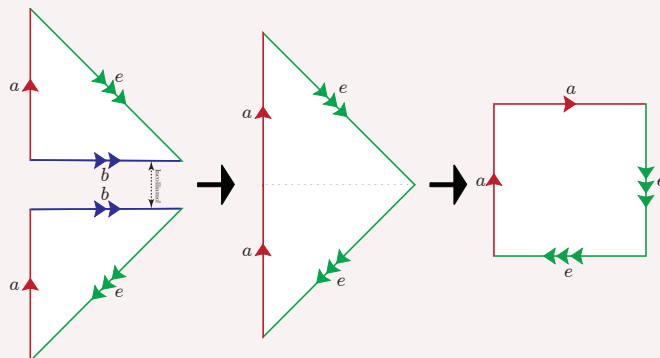
Pertanto, per le osservazioni precedenti, la somma connessa di due piani proiettivi  $P \# P$  ha il modello piano dato dalla parola  $ccdd$ .



Vogliamo vedere che  $aba^{-1}b$  e  $ccdd$  danno la stessa superficie. Partiamo dal primo modello e tagliamo lungo la diagonale.



Incolliamo lungo il lato  $b$ :



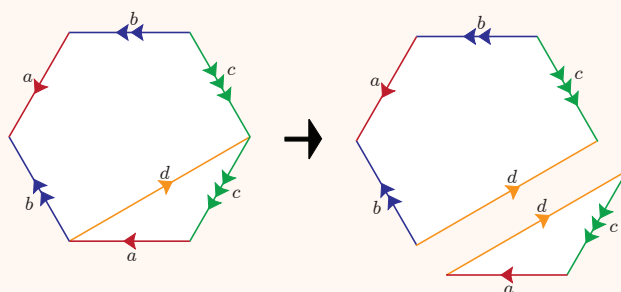
Infatti, otteniamo come modello  $aaee$ , che corrisponde a  $P\#P$ .

**LEMMA 9.2.0.**

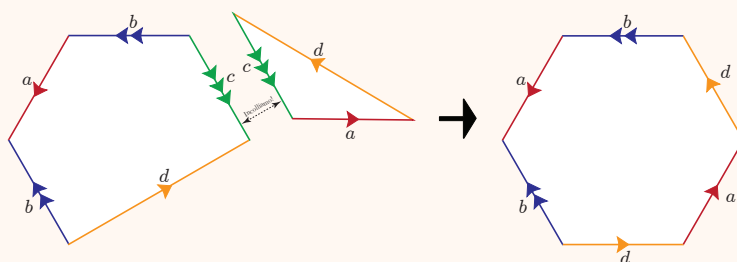
$$T\#P = K\#P = P\#P\#P$$

(9.2)

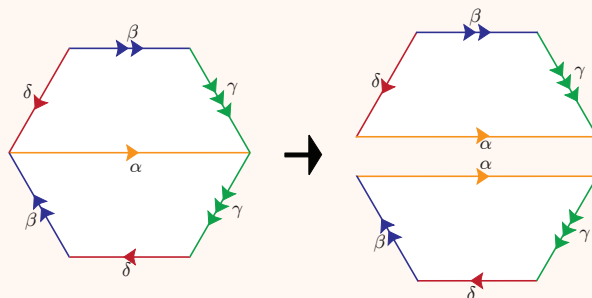
**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo già che, essendo  $K = P\#P$ , allora  $K\#P = P\#P\#P$ . Vogliamo invece mostrare ora che  $T\#P$  sia uguale a  $K\#P$ . Facciamo un procedimento di taglia e incolla, partendo da  $T\#P$ , modello piano con parola  $aba^{-1}b^{-1}cc$ .



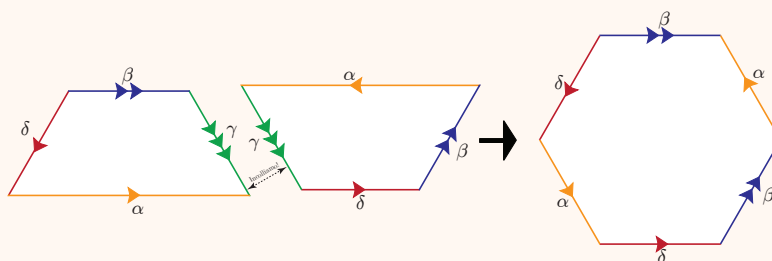
Incolliamo lungo  $c$ :



Otteniamo un modello piano di  $T\#P$  che può essere descritto dalla parola  $dadbab^{-1}$ . Prendiamo adesso  $K\#P$ , di parola  $\underbrace{\delta\beta\delta^{-1}\beta}_K \underbrace{\gamma\gamma}_P$  :



Incolliamo lungo  $\gamma$ :



Otteniamo un modello piano di  $K\#P$  che può essere descritto dalla parola  $\delta\alpha\delta\beta\alpha\beta^{-1}$ , che corrisponde lettera per lettera al modello  $T\#P$ .  $\square$

**COROLLARIO 9.2.0.** Se  $g \geq 1$  e  $n \geq 1$  si ha:

$$T_g \# P_n = P_{n+2g} \quad (9.3)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $g = 1$ :

$$T\#P_n = \underbrace{T\#P \# P_{n-1}}_{P_3} = P_3 \# P_{n-1} = P \# P_{n+2}$$

Procediamo per induzione su  $g$ ; se è vero per  $g-1$ , allora:

$$T_g \# P_n = T \# T_{g-1} \# P_n = T \# P_{n+2g-2} = T \# P \# P_{n+2g-3} = P_3 \# P_{n+2g-3} = P_{n+2g}$$

$\square$

### 9.3 CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI TOPOLOGICHE COMPATTE

**TEOREMA 9.3.0.** CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI TOPOLOGICHE COMPATTE.

Ogni superficie topologica compatta è omeomorfa a  $S^2$ ,  $T_g$  per qualche  $g \geq 1$  oppure  $P_n$  per qualche  $n \geq 1$ .

Inoltre, tali superfici sono tutte distinte, ovvero:

- $T_g \not\cong T_{g'}$  se  $g \neq g'$ .
- $P_n \not\cong P_{n'}$  se  $n \neq n'$ .

- $T_g \not\cong P_n \forall n \geq 1, \forall g \geq 1.$
- $S^2 \not\cong T_g \forall g \geq 1.$
- $S^2 \not\cong P_n \forall n \geq 1.$

Per la dimostrazione del teorema abbiamo prima bisogno di definire e dimostrare dei risultati sulla triangolazione.

### 9.3.1 Triangolazione

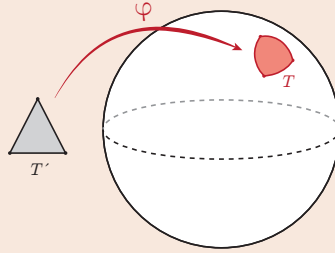
**DEFINIZIONE 9.3.0. TRIANGOLO GEOMETRICO.**

Sia  $S$  una superficie compatta. Un **triangolo geometrico**  $T$  in  $S$  è un'applicazione:

$$\varphi : T' \longrightarrow T \subseteq S \quad (9.4)$$

Dove  $T' \subseteq \mathbb{R}^2$  è un triangolo *non* degenerare (compreso dell'interno), inteso nel senso tradizionale del termine, mentre  $\varphi$  è un omeomorfismo.

I vertici e i lati di  $T$  sono le immagini tramite  $\varphi$  dei vertici dei lati di  $T'$ .



**DEFINIZIONE 9.3.1. TRIANGOLAZIONE.**

Sia  $S$  una superficie compatta. Una **triangolazione** di  $S$  è una collezione *finita* di triangoli geometrici  $T_1, \dots, T_r$  in  $S$  tale che:

1.  $S = T_1 \cup \dots \cup T_r.$
2.  $\forall i \neq j$  si ha che  $T_i \cap T_j$  può essere una di queste tre possibilità:
  - $\emptyset.$
  - Un *vertice* di entrambi i triangoli.
  - Un *lato* di entrambi i triangoli.

Una superficie compatta  $S$  si dice **triangolabile** se ammette una triangolazione.

**ESEMPIO.** Il **tetraedro** dà una triangolazione della sfera con 4 triangoli.

Enunciamo ora un teorema (di cui *non* daremo dimostrazione) che ci servirà successivamente per poter classificare le superfici compatte direttamente con i loro modelli piani associati.

**TEOREMA 9.3.1. TEOREMA DI RADÒ, 1925.**

Ogni superficie compatta è triangolabile.

**COROLLARIO 9.3.0.** Ogni superficie compatta  $S$  ha un modello piano.

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema di Radò,  $S$  ammette una triangolazione  $T_1, \dots, T_r$ . Ripor-  
tiammo gli  $r$  triangoli nel piano, con i lati identificati. Incolliamo poi i lati uno ad uno  
fino ad ottenere un unico poligono con delle identificazioni sui lati.  $\square$

### 9.3.2 Dimostrazione del teorema di classificazione: prima parte

La prima parte della dimostrazione del teorema di classificazione si occupa di dimostrare  
che *tutte le superfici compatte sono omeomorfe a  $S^2$ ,  $T_g$  o  $P_n$* . Grazie al corollario appena  
dimostrato, possiamo studiare direttamente il *modello piano* associato alla superficie  
compatta  $S$  in esame, cioè studieremo un *poligono* con i lati identificati a 2 a 2. Diamo ora  
una nomenclatura utile.

#### DEFINIZIONE 9.3.2. COPPIE DI LATI.

Nel modello piano, una *coppia di lati* identificati tra di loro:

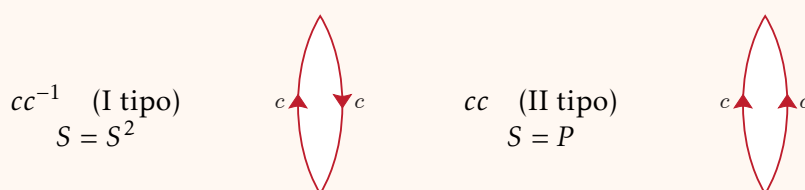
- È del **primo tipo** se, percorrendo il bordo del poligono, i due lati compaiono con  
*orientazione opposta*.
- È del **secondo tipo** se, percorrendo il bordo del poligono, i due lati compaiono  
con la *stessa orientazione*.

**ESEMPIO.** Nella *bottiglia di Klein*  $K$ , modello con parola  $aba^{-1}b$ , i lati  $a$  sono del I tipo,  
mentre i lati  $b$  sono del II tipo.

La dimostrazione è *costruttiva*: procederemo passo per passo, da un modello piano di una  
qualunque superficie compatta ad ottenere una delle superfici citate nel teorema con un  
**algoritmo di taglia e incolla**.

#### DIMOSTRAZIONE.

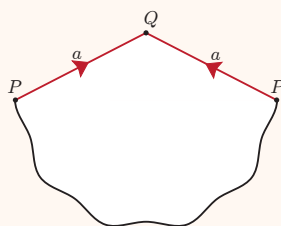
**PASSO 0:** se nel modello piano ci sono *solo* 2 lati abbiamo finito. Infatti, abbiamo solo  
due superfici con un modello di questo tipo, che abbiamo già visto:



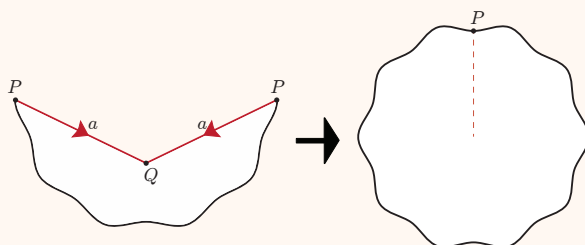
Possiamo supporre che nel modello piano c'è un numero di lati maggiore di 4.

**PASSO 1:** *Eliminazione delle coppie adiacenti del I tipo.*

Supponiamo che nel modello piano ci sia una coppia di lati *adiacenti* del I tipo, come in  
figura.



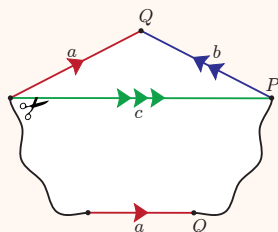
Incolliamo i lati  $a$  della coppia: in questo modo, otteniamo un nuovo modello piano omeomorfo al primo con due lati in meno.



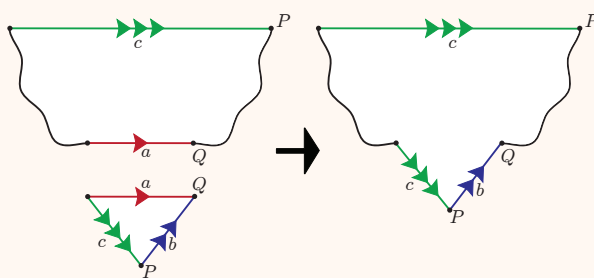
Ripetiamo il passo 1 finché eliminiamo tutte le coppie adiacenti del I tipo. Se alla fine abbiamo due soli lati, ricadiamo nel passo 0 e abbiamo già finito la dimostrazione.

**PASSO 2:** *Riduzione dei vertici a un'unica classe di equivalenza.*

Supponiamo che i vertici del poligono *non* siano tutti equivalenti. Dunque, esisterà un lato  $b$  i cui due vertici  $P$  e  $Q$  *non* sono equivalenti!



Consideriamo il secondo lato  $a$  con vertice  $Q$  e, facendo un taglio come in figura, incolliamo il lato  $a$ :



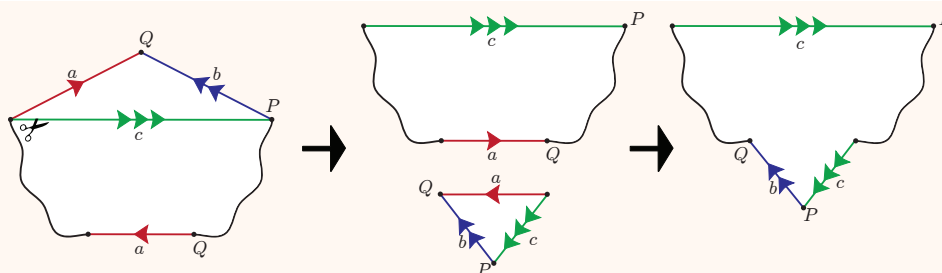
Abbiamo ora un vertice  $Q$  in meno e un vertice  $P$  in più. Ripetiamo questa operazione facendo via via diminuire i vertici  $Q$ . Quando rimane solo un vertice  $Q$  deve essere parte di una coppia adiacente del I tipo; possiamo pertanto incollare il lato  $a$  facendo scomparire il vertice  $Q$ .

Alternando i passi 1 e 2 arriviamo ad un modello piano con tutti i vertici identificati e senza coppie adiacenti del I tipo.

**OSSERVAZIONE.** Quando incolliamo lungo una coppia di lati del I tipo *non* ribaltiamo i lati, dunque le restanti coppie mantengono il tipo. Al contrario, quando invece incolliamo lungo una coppia di lati del II tipo, i lati restanti *possono* cambiare tipo.

Ad esempio, nel passo 2, se  $a$  è del primo tipo (come nelle figure precedenti) anche il lato  $c$  di taglio è del I tipo e le restanti coppie *non* cambiano tipo. Invece, se  $a$  è del II tipo, il lato  $c$  è del II tipo:

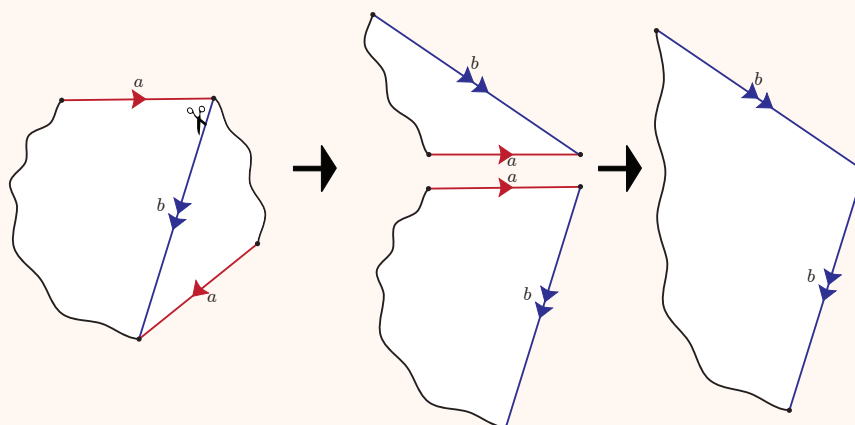




In altre parole, l'esistenza di *almeno una* coppia di lati del II tipo è *mantenuta* dal passo 2.

**PASSO 3:** *Rendere adiacenti le coppie del II tipo.*

Supponiamo che ci sia una coppia di lati *a* non adiacenti del II tipo. Operiamo un taglio *b* tra gli estremi finali della coppia e incolliamo la coppia stessa.



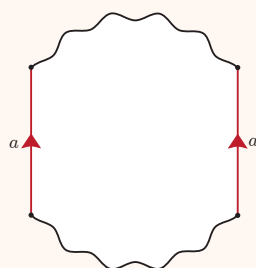
In questo modo rendiamo adiacenti tutte le coppie dello stesso tipo.

Se ci sono solo *coppie del II tipo*, abbiamo ottenuto una parola della forma:

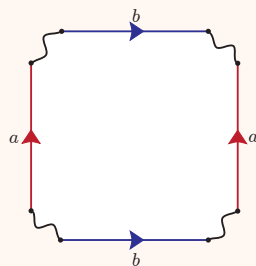
$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n \implies \boxed{S \cong P_n} \quad (9.5)$$

**PASSO 4:** *Raggruppare le coppie del I tipo.*

Supponiamo che nel modello piano ci sia almeno una coppia del primo tipo (non adiacente per i passi precedenti).

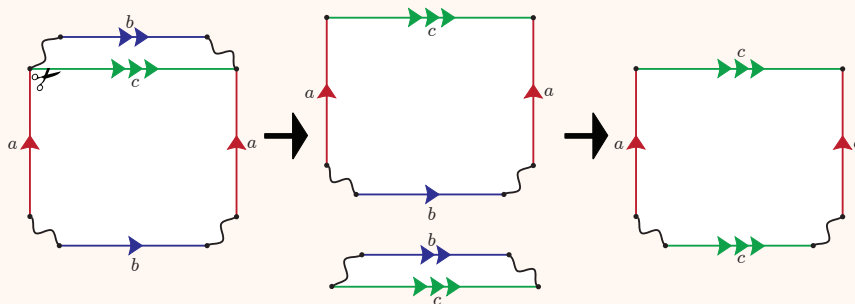


Allora deve esistere un'altra coppia di lati del I tipo tali che queste coppie si separino a vicenda. Infatti, i vertici sono tutti identificati tra loro, in particolare lo sono i due vertici di *a*. In altre parole, deve esistere un lato *b* nella parte superiore identificato ad un lato *b* nella parte inferiore.

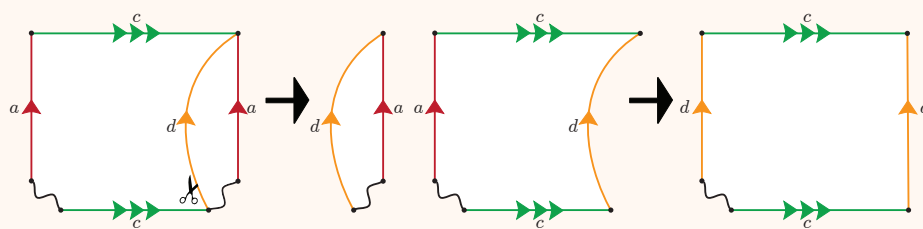


Siccome i lati  $b$  non sono adiacenti e abbiamo già reso adiacenti tutte le coppie di lati del II tipo,  $b$  deve essere una coppia di lati del I tipo. Operiamo due taglie e incolla per raggruppare le due coppie.

4.1 Taglio un lato  $c$  lungo gli estremi finali di  $a$  nella stessa direzione di  $b$  e incollo  $b$ .



4.2 Taglio un lato  $d$  lungo gli estremi finali di  $c$  nella stessa direzione di  $a$  e incollo  $a$ .



In queste operazioni incolliamo lungo coppie del I tipo, pertanto i tipi delle coppie *non cambiano!*

- Se nel modello piano compaiono *solo* coppie del I tipo, dopo un numero finito di passi otteniamo la parola:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \implies \boxed{S \cong T_g} \quad (9.6)$$

- Se invece nel modello piano compaiono sia coppie adiacenti del II tipo, sia sequenze  $aba^{-1}b^{-1}$  di coppie del I tipo, allora  $S$  è data dalla somma connessa di tori e piani proiettivi, con almeno un piano proiettivo, pertanto per il corollario 9.1 (pag. 143) segue che  $\boxed{S \cong P_n}$

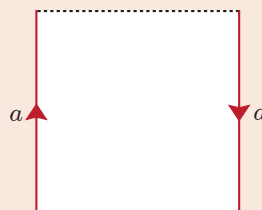
□

**OSSERVAZIONE.** Si ottiene sempre un piano proiettivo se e solo nel modello iniziale c'è almeno una coppia di lati del II tipo (perché i passi mantengono il tipo).

## 9.4 ORIENTABILITÀ

### DEFINIZIONE 9.4.0. NASTRO DI MÖBIUS.

Definiamo il **nastro di Möbius** (aperto)  $N_0 \subseteq \mathbb{R}^3$  come lo spazio  $[0, 1] \times (0, 1)$  (mentre si considera  $[0, 1] \times [0, 1]$  nel caso chiuso  $N$ ) con i lati quozientati come in figura.



**OSSERVAZIONE.**  $N_0$  è una superficie topologica, ma *non* è compatta in quanto *non* è chiusa.

**INTUITIVAMENTE...** Immaginiamo di avere una *figura bidimensionale* posta sulla sfera  $S^2$ ; essa è libera di muoversi su di essa. Qualunque percorso chiuso essa faccia, la figura tornerà al punto di partenza *esattamente come era partita*.

Prendiamo invece il *nastro di Möbius*. Dopo un percorso attorno al nastro, la figura torna al punto di partenza non com'era partita, bensì ci ritorna con la sua *immagine speculare*!

Oltre a questo strano avvenimento, notiamo che la figura nel caso della sfera percorre sempre e solo un percorso sull'esterno o sull'interno della sfera, ma *mai* contemporaneamente su entrambi. Nel caso del nastro di Möbius, la figura percorre *l'intera superficie* in un unico percorso.

In questi termini, diciamo che la sfera è una superficie **orientabile**: non esistono percorsi che mi ribaltano una figura piana su di essa e (vista come superficie in  $\mathbb{R}^3$ ) ho due lati ben distinti, l'interno e l'esterno della sfera. Il nastro di Möbius, invece, **non è orientabile**: la figura si *ribalta* e, allo stesso tempo, percorre tutta la superficie; in altre parole, non esiste un "interno" o un "esterno" del nastro.

I comportamenti sul nastro di Möbius che abbiamo appena osservato si presentano anche in superfici come il *piano proiettivo reale* o la *bottiglia di Klein*; in particolare, si ha questo proprio perché possiamo identificare su di esse un percorso esattamente *analogo* a quello visto sul nastro di Möbius.

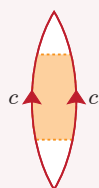
Possiamo formalizzare l'*orientabilità* utilizzando questo principio.

### DEFINIZIONE 9.4.1. ORIENTABILITÀ.

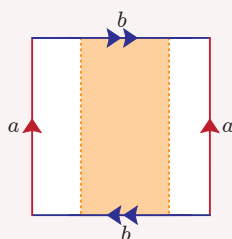
Una superficie topologica si dice **orientabile** se contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius (aperto o chiuso). Altrimenti  $S$  si dice **non orientabile**.

### ESEMPLI.

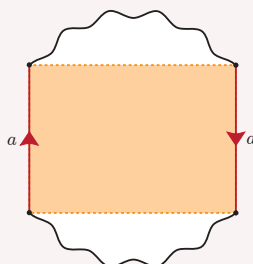
- $N_0$  *non* è orientabile.
- $P = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  *non* è orientabile:



- $K$  non è orientabile:



- Una superficie il cui modello piano contiene una coppia di lati del II tipo *non* è orientabile:



#### OSSERVAZIONI.

1.  $S^2$  e  $T_g$  sono orientabili  $\forall g \geq 1$ .
2. Se una superficie *compatta* è omeomorfa a un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ , allora è *orientabile* ed è rappresentabile.

**OSSERVAZIONE.** L'**orientabilità** è una proprietà topologica, cioè è mantenuta per omeomorfismo.

#### 9.4.1 Dimostrazione del teorema di classificazione: seconda parte

Noto ciò, con il concetto di orientabilità possiamo fare un passettino avanti nella classificazione delle superfici.

#### COROLLARIO 9.4.0.

$$S^2 \not\cong P_n \quad \forall n \geq 1$$

$$T_g \not\cong P_n \quad \forall n \geq 1, \quad \forall g \geq 1$$

**COROLLARIO 9.4.1.** Sia  $S$  una superficie compatta con un suo modello piano. Allora  $S$  è *orientabile* se e solo se il modello *non* contiene coppie di lati del II tipo.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\Rightarrow$ ) Se c'è una coppia di lati del II tipo, costruiamo facilmente un nastro di Möbius collegandone gli estremi.

$\Leftarrow$ ) Applicando l'algoritmo del taglia e incolla, se non ci sono lati del II tipo otteniamo una superficie omeomorfa a  $S^2$  o a  $T_g$ , entrambe superfici orientabili.  $\square$

## 9.5 SUDDIVISIONE DI UNA SUPERFICIE COMPATTA

**DEFINIZIONE 9.5.0. LATO.**

Un **lato** in  $S$  superficie compatta è un sottospazio  $L \subseteq S$  con un'applicazione continua  $f : [0, 1] \longrightarrow L$  tale che valga una delle due proprietà seguenti:

- $f$  è omeomorfismo tra  $[0, 1]$  e  $L$ .
- $f$  è iniettivo su  $[0, 1)$ ,  $f(0) = f(1)$  e  $f$  induce un omeomorfismo tra  $L$  e  $S^1$  (cioè  $f$  è un'identificazione).

Definiamo come **vertici** del lato, rispetto ai due casi sopra:

- $f(0)$  e  $f(1)$ .
- $f(0)$ .

**DEFINIZIONE 9.5.1. SUDDIVISIONE DI UNA SUPERFICIE COMPATTA.**

Una **suddivisione**  $\mathcal{S}$  di una superficie compatta  $S$  è data da:

- un sottoinsieme finito  $V$  di  $S$ , i cui punti sono detti **vertici**.
- un insieme finito  $L_1, \dots, L_m$  in  $S$  di lati

Tali che:

1.  $\forall L, L_i \cap V = \{\text{vertici di } L_i\}$ .
2.  $\forall i \neq j, L_i \cap L_j \subseteq V$ .
3.  $S \setminus (L_1 \cup \dots \cup L_m)$  ha un numero *finito* di componenti connesse dette **facce** della suddivisione e ogni faccia è omeomorfa a un disco aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

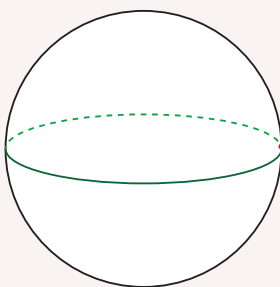
**ESEMPIO.** Una **triangolazione**  $T_1, \dots, T_r$  di  $S$  induce *sempre* una suddivisione, in cui:

- $V = \text{vertici di } T_1, \dots, T_r$ .
- $L_1, \dots, L_m = \text{lati di } T_1, \dots, T_r$ .
- $\text{Facce} = \text{interni di } T_1, \dots, T_r$ .

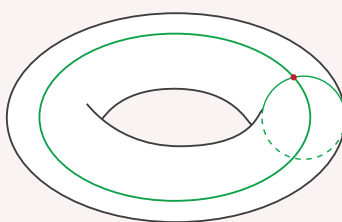
Pertanto, ogni superficie compatta ammetta almeno una suddivisione perché esiste sempre una triangolazione per il *Teorema di Radò*.

**ESEMPLI.**

- $S^2$  ha una suddivisione (ulteriore a quella data dal tetraedro) data da un **unico vertice**, un **unico lato** e **due facce**.



- Il toro ha una suddivisione data da un **unico vertice**, **due lati** e un'**unica faccia**.



## 9.6 CARATTERISTICA DI EULERO

**DEFINIZIONE 9.6.0.** CARATTERISTICA DI EULERO.

Data una suddivisione  $\mathcal{S}$  di una superficie compatta  $S$ , essa avrà:

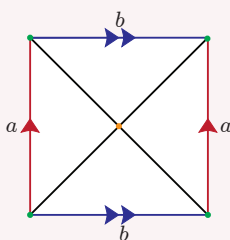
- $v$  vertici.
- $e$  lati.
- $f$  facce.

La **caratteristica di Eulero** di  $\mathcal{S}$  è:

$$\chi(S, \mathcal{S}) = v - e + f \in \mathbb{Z} \quad (9.7)$$

**ESEMPL.**

- Il *tetraedro* ha 4 vertici, 6 lati e 4 facce, pertanto  $S^2$  ha come caratteristica di Eulero  $\chi(S, \mathcal{S}_1) = 4 - 6 + 4 = 2$ .
- Riprendendo la suddivisione della sfera precedente, descritta dalla tripletta  $(v, e, f) = (1, 1, 2)$ , la caratteristica di Eulero secondo questa suddivisione è  $\chi(S, \mathcal{S}_1) = 1 - 1 + 2 = 2$ .
- Il toro ha una suddivisione  $(v, e, f) = (1, 2, 1)$ , con caratteristica di Eulero  $\chi(S, \mathcal{S}) = 1 - 2 + 1 = 0$ .
- Possiamo costruire una suddivisione alternativa del toro direttamente sul modello piano, nel modo seguente:



Allora abbiamo  $(v, e, f) = (2, 6, 4)$  con caratteristica di Eulero  $\chi(S, \mathcal{S}) = 2 - 6 + 4 = 0$ .

Notiamo che, in questi esempi, suddivisioni diverse di una stessa superficie hanno stessa caratteristica di Eulero. Questo *non* è un caso: il seguente teorema (che non dimostreremo) ci garantisce ciò.

**TEOREMA 9.6.0.** Date due suddivisioni  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  della stessa superficie compatta  $S$ , si ha:

$$\chi(S, \mathcal{S}_1) = \chi(S, \mathcal{S}_2)$$

**DEFINIZIONE 9.6.1.** CARATTERISTICA DI EULERO.

Sia  $S$  una superficie compatta. La **caratteristica di Eulero**  $\chi(S) \in \mathbb{Z}$  è la caratteristica di Eulero di una qualsiasi suddivisione di  $S$ .

**COROLLARIO 9.6.0.** La **caratteristica di Eulero** è un'invariante per omeomorfismo.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $S_1$  e  $S_2$  due superfici compatte omeomorfe tra di loro e siano  $\mathcal{S}_1$  una suddivisione di  $S_1$ . Usando l'omeomorfismo, costruiamo una suddivisione  $\mathcal{S}_2$  di  $S_2$  con lo stesso numero di vertici, lati e facce di  $\mathcal{S}_1$ . Allora:

$$\chi(S_1) = \chi(S_1, \mathcal{S}_1) = \chi(S_2, \mathcal{S}_2) = \chi(S_2)$$

□

**ESEMPIO.**

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T) = 0$

### 9.6.1 Dimostrazione del teorema di classificazione: terza e ultima parte

Forti di questo nuovo invariante per omeomorfismi, possiamo concludere la dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici compatte.

Innanzitutto, vediamo per bene che relazione c'è tra la caratteristica di Eulero e il modello piano di una superficie.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $S$  una superficie compatta avente un modello piano con  $2n$  lati identificati a coppie. Esso dà una suddivisione nativa di  $S$  in cui:

- I *vertici*  $v$  sono le immagini in  $S$  dei vertici del poligono e il loro numero è il numero di classi di equivalenza sui vertici del modello piano.
- I *lati*  $n$  sono le immagini in  $S$  dei lati del poligono e il loro numero è il numero di coppie di lati del modello piano.
- C'è solo *una* faccia, data dall'immagine dell'interno del poligono.

In altre parole:

$$\chi(S) = v - n + 1 \tag{9.8}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

- $P_n$  è espresso dalla parola  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$  e la suddivisione data dal modello

piano ha un solo vertice,  $n$  lati e una faccia. Allora:

$$\chi(P_n) = 1 - n + 1 = 2 - n \quad \forall n \geq 1 \quad (9.9)$$

In particolare:

$$\begin{aligned} \chi(P) &= 1 \\ \chi(K) &= \chi(P_2) = 0 = \chi(T) \end{aligned}$$

Ma  $T \not\cong K$  in quanto  $T$  è orientabile, mentre  $K$  non lo è.

Notiamo che  $\chi(P_n) \leq 1 \quad \forall n \geq 1$  e  $\chi(P_n) = 2 - n$  è una funzione iniettiva. Pertanto, se  $n_1 \neq n_2$ , allora  $\chi(P_{n_1}) \neq \chi(P_{n_2})$  e, in quanto invariante per omeomorfismi, segue che  $P_{n_1} \not\cong P_{n_2}$ .

In altre parole, *tutte* le superfici  $P_n$  sono *non* omeomorfe tra di loro.

- $T_g$  è espresso dalla parola  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$  e la suddivisione data dal modello piano ha un solo vertice,  $2g$  lati e una faccia. Allora:

$$\chi(T_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g \quad \forall g \geq 1 \quad (9.10)$$

In particolare, se poniamo  $T_0 = S^2$  come caso “degenerare” di toro non bucato e  $\chi(T_g) = 2 - 2g \quad \forall g \geq 0$ :

- ◇ La caratteristica di Eulero delle superfici orientabili è sempre *pari* e minore di 2.
- ◇  $\chi(S) \leq 2$  per ogni superficie compatta.

Notiamo che  $\chi(T_g) = 2 - 2g$  è una funzione iniettiva. Pertanto, se  $g_1 \neq g_2$ , allora  $\chi(T_{g_1}) \neq \chi(T_{g_2})$  e, in quanto invariante per omeomorfismi, segue che  $T_{g_1} \not\cong T_{g_2}$ . In altre parole, *tutte* le superfici  $T_g$  sono *non* omeomorfe tra di loro.  $\square$

### 9.6.2 Somma connessa e caratteristica di Eulero

**LEMMA 9.6.0.** Siano  $S_1, S_2$  due superfici compatte. Allora:

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2 \quad (9.11)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Scegliamo una triangolazione  $(v_1, e_1, f_1)$  e  $(v_2, e_2, f_2)$  per  $S_1$  e  $S_2$ , rispettivamente. Per costruire  $S_1 \# S_2$  scegliamo un triangolo su  $S_1$  e uno su  $S_2$ . Incolliamo le due superfici lungo i bordi di questi due triangoli. Otteniamo così una triangolazione per  $S_1 \# S_2$  con  $(v_3, e_3, f_3)$ :

$$\begin{cases} v_3 = v_1 + v_2 - 3 \\ e_3 = e_1 + e_2 - 3 \\ f_3 = f_1 - 1 + f_2 - 1 = f_1 + f_2 - 2 \end{cases} \\ \implies \chi(S_1 \# S_2) = v_3 - e_3 + f_3 = v_1 + v_2 - \cancel{3} - (e_1 + e_2 - \cancel{3}) + f_1 + f_2 - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2)$$

$\square$



**OSSERVAZIONE.** Possiamo ora calcolare in un altro modo  $\chi(P_n)$  e  $\chi(T_g)$ , per induzione:

$$\chi(P) = 1$$

$$\chi(P_2) = \chi(P \# P, =) 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\chi(P_n) = \chi(P \# P_{n-1}, =) \chi(P_n) + \chi(P_{n-1}) - 2 = 1 + 2 - (n-1) - 2 = 2 - n$$

In modo analogo per  $T_g$ :

$$\chi(T) = 0$$

$$\chi(T_2) = \chi(T \# T) = 0 + 0 - 2 = -2$$

$$\chi(T_g) = \chi(T \# T_{g-1}) = \chi(T_g) + \chi(T_{g-1}) - 2 = 0 + 2 - 2(g-1) - 2 = 2 - 2g$$

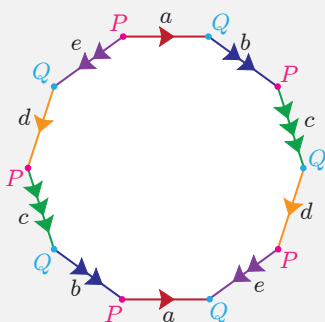
### 9.6.3 Impraticchiamoci! Caratteristica di Eulero

**ESERCIZIO.** PROVA D'ESAME, LUGLIO 2018.

Sia  $S$  la superficie compatta data dalla parola  $abcdea^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{-1}$ . Determinare la classe di  $S$  nella classificazione delle superfici compatte.

**SOLUZIONE.** Tutte le coppie di lati sono del II tipo, pertanto  $S$  è orientabile, cioè può essere  $S^2$  o  $T_g$  per un qualche  $g \geq 1$ , e la caratteristica di Eulero è del tipo  $\chi(S) = 2 - 2g$ .  $S$  ha un modello piano seguente con 10 lati identificati a coppie, che dà origine ad una suddivisione di  $S$  con 5 lati  $a, b, c, d, e$ , una faccia e  $v$  vertici, con  $v$  il numero di classi di equivalenza sui vertici del modello.

Per calcolare  $v$ , disegniamo il modello piano e raggruppiamo i vertici.



Su 10 vertici ho 2 classi di equivalenza, quindi  $v = 2$ . Pertanto:

$$\chi(S) = v - 5 + 1 = 2 - 4 = -2 = 2 - 2g \implies 2g = 4 \implies g = 2 \implies S \cong T_2$$



# IV

## APPROFONDIMENTI DI ALGEBRA LINEARE



# APPROFONDIMENTI DI ALGEBRA LINEARE

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Questo capitolo si può considerare un approfondimento di concetti ben noti dall’Algebra Lineare, cercando di rispondere alle seguenti questioni:

- **DIAGONALIZZAZIONE SIMULTANEA:** quando possiamo diagonalizzare due matrici con una *stessa base* di autovettori?
- **POLINOMI E MATRICI:** possiamo valutare un *polinomio* con dei valori matriciali? Che relazione c’è fra polinomi matriciali e il *polinomio caratteristico* della matrice?
- **FORMA CANONICA DI JORDAN:** possiamo generalizzare la *decomposizione spettrale* anche a matrici che non sono diagonalizzabili, rendendole così “più semplici”?
- **FUNZIONE ESPONENZIALE MATRICIALE:** come abbiamo fatto con i polinomi, possiamo “matricizzare” la funzione esponenziale?

## 10.1 DIAGONALIZZAZIONE SIMULTANEA

**RICORDIAMO...** Sia  $V$  spazio vettoriale, su campo  $\mathbb{K}$ , di dimensione finita. Consideriamo gli **endomorfismi** di  $V$  o, equivalentemente, le matrici  $n \times n$  a elementi in  $\mathbb{K}$  (con  $\dim V = n$ ).

- $A$  determina un endomorfismo di  $\mathbb{K}^n$  dato da  $v \mapsto Av$ .
- Matrici associate allo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse sono **simili**, cioè:

$$\exists P \in GL(n\mathbb{K}) : B = P^{-1}AP \quad (10.1)$$

- Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  - ◇  $A$  è **diagonalizzabile**.
  - ◇  $A$  è simile ad una matrice diagonale  $A = PDP^{-1}$  con  $P$  matrice con **autovet-tori** sulle colonne.

- ◇  $\mathbb{K}^n$  ammette una base di **autovettori** di  $A$ .
- ◇  $\mathbb{K}^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$  con  $V_{\lambda_i}$  **autospazio** relativo ad  $A$

**DEFINIZIONE 10.1.0.** DIAGONALIZZAZIONE SIMULTANEA.

Siano  $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$  due matrici *diagonalizzabili*. Diciamo che  $A$  e  $B$  sono **simultaneamente diagonalizzabili** se esiste una base di  $\mathbb{K}^n$  composta di autovettori sia di  $A$  che di  $B$ . Equivalentemente,  $A$  e  $B$  sono **simultaneamente diagonalizzabili** se esiste una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^{-1}AP$  e  $P^{-1}BP$  sono *entrambe diagonal*.

**ESEMPIO.** Non tutte le matrici diagonalizzabili lo sono simultaneamente. Prendiamo  $\mathbb{R}^2$ ; si consideri:

- $A$  diagonalizzabile con 2 autovalori diversi, i cui autospazi sono le rette  $y = x$  e  $y = -x$ .
- $B$  diagonalizzabile con 2 autovalori diversi, i cui autospazi sono le rette  $y = 0$  e  $y = 2x$ .

Non esiste alcun autovettore comune, dunque  $A$  e  $B$  *non* sono simultaneamente diagonalizzabili.

Dalla sola definizione non è semplice capire quali matrici sono a tutti gli effetti simultaneamente diagonalizzabili. Tuttavia, il seguente teorema ci permetterà di trovare una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzazione simultanea.

**TEOREMA 10.1.0.** Siano  $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ . Allora  $A$  e  $B$  sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se  $A$  e  $B$  sono diagonalizzabili e  $A, B$  commutano, cioè  $AB = BA$ .

Per dimostrare il teorema, abbiamo tuttavia bisogno del seguente lemma:

**LEMMA 10.1.0.** Siano  $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$  tale che  $AB = BA$  e sia  $W$  un autospazio di  $B$ . Allora, presa l'azione di  $GL(n, \mathbb{K})$  su  $\mathbb{K}^{n,n}$ , si ha che  $A \cdot W \subseteq W$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\lambda$  l'autovalore di  $B$  relativo all'autospazio  $W$ . Per definizione di autospazio:

$$W = \{\mathbf{v} \in V \mid B \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}$$

Sia  $\mathbf{w} \in W$ . Vogliamo mostrare che  $A \cdot \mathbf{w} \in W$ .

$$B \cdot (A \cdot \mathbf{w}) = (BA \cdot \mathbf{w}) = (AB \cdot \mathbf{w}) = A \cdot (B \cdot \mathbf{w}) = A \cdot (\lambda \mathbf{w}) = \lambda (A \cdot \mathbf{w})$$

$A \cdot \mathbf{w}$  è autovettore rispetto a  $\lambda$ , pertanto  $A \cdot \mathbf{w} \in W$ ,  $\forall \mathbf{w}$  e dunque segue la tesi.  $\square$

**DIMOSTRAZIONE.** DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 10.1.

$\Rightarrow$ ) Per ipotesi,  $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$  tale che  $D_1 = P^{-1}AP$  e  $D_2 = P^{-1}BP$  sono diagonal; in particolare, in quanto matrici diagonal, esse commutano:  $D_1 D_2 = D_2 D_1$ . Allora  $A = PD_1 P^{-1}$  e  $B = PD_2 P^{-1}$ .

$$AB = (PD_1 P^{-1})(PD_2 P^{-1}) = PD_1 D_2 P^{-1} = PD_2 D_1 P^{-1} = (PD_2 P^{-1})(PD_1 P^{-1}) = BA$$

$\Leftarrow$ ) Procediamo con una *dimostrazione costruttiva*. Sappiamo che:

- $A$  diagonalizzabile  $\Rightarrow \exists \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  base di  $V$  composta da *autovettori* di  $A$ .

■  $B$  diagonalizzabile  $\implies V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$  con  $W_j$  autospazi di  $B$   
Consideriamo  $\mathbf{v}_1 \in V$ . Esso si scrive in modo unico:

$$(*) \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_{1,1} + \dots + \mathbf{w}_{1,r} \text{ con } \mathbf{w}_{1,j} \in W_j, \forall j = 1, \dots, r$$

$\mathbf{v}_1$  è autovettore di  $A$  relativo all'autovalore di  $\lambda_1$ , dunque  $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ . Moltiplichiamo  $\mathbf{v}_1$  per  $A$ :

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= A\mathbf{w}_{1,1} + \dots + A\mathbf{w}_{1,r} \\ &\parallel \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\mathbf{w}_{1,1} + \dots + \lambda_1\mathbf{w}_{1,r} \end{aligned}$$

Dal lemma appena dimostrato, da  $A.W_j \subseteq W_j, \forall j$  segue che  $A.\mathbf{w}_j \in W_j$ . Per la chiusura di  $W_j$  rispetto al prodotto per uno scalare, abbiamo anche  $\lambda\mathbf{w}_j \in W_j, \forall j$ . Siccome in una somma diretta la decomposizione è unica, deduciamo che:

$$A.\mathbf{w}_{1,1} = \lambda_1\mathbf{w}_{1,1}, \dots, A.\mathbf{w}_{1,r} = \lambda_1\mathbf{w}_{1,r}$$

In altre parole,  $\forall j, \mathbf{w}_{1,j}$  è  $\mathbf{0}$  oppure un autovettore di  $A$  e, per ipotesi, anche di  $B$ . Procediamo allo stesso modo tutti i vettori della base  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ : si ha che  $\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_{i,1} + \dots + \mathbf{w}_{i,r}$  e  $\forall i, j, \mathbf{w}_{i,j}$  è  $\mathbf{0}$  oppure un autovettore comune di  $A$  e  $B$ .

Otteniamo un insieme  $\{\mathbf{w}_{i,j}\}$  di autovettori comuni di  $A$  e  $B$ . Per costruzione, lo *span lineare* dei  $\{\mathbf{w}_{i,j}\}$  contiene  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  e pertanto è necessariamente pari a  $V$ !

In altre parole,  $\{\mathbf{w}_{i,j}\}$  è un sistema di generatori di  $V$  e possiamo estrarre da esso una base di  $V$  costituita di autovettori comuni ad  $A$  e a  $B$ .  $\square$

## 10.2 POLINOMI E MATRICI

**RICORDIAMO...** Dato un campo  $\mathbb{K}$ , indichiamo con  $\mathbb{K}[t]$  l'anello dei polinomi a coefficienti in  $\mathbb{K}$  nella variabile  $t$ ; un suo elemento  $f(t) \in \mathbb{K}[t]$  è della forma:

$$f(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0 \text{ con } b_i \in \mathbb{K} \quad (10.2)$$

Finora abbiamo sempre *valutato* i polinomi in valori del campo  $\mathbb{K}$ . Possiamo invece valutarli in una *matrice* in  $\mathbb{K}^{n,n}$ ? Dopotutto, la *somma di matrici* e la *moltiplicazione per uno scalare* sono operazioni *interne* a  $\mathbb{K}^{n,n}$  e pertanto potremmo pensare che sia lecito.

Tuttavia, presi i polinomi  $p$  così come sono, non sarebbe *ben definita*  $p(A)$  a causa del **termine noto**; infatti, non possiamo sommare uno *scalare ad una matrice*! Per ovviare a questo problema, quando valutiamo un polinomio in una matrice  $A$  "*correggiamo*" il termine noto con la **matrice identità**  $I$ :

$$f(A) := b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I \text{ con } b_i \in \mathbb{K} \quad (10.3)$$

In questo modo,  $f(A) \in \mathbb{K}^{n,n}$ .

**ESEMPIO.** Preso  $f(t) = t^2 - 3$ , il polinomio valutato nella matrice  $A$  è  $f(A) = A^2 - 3I$ .

**OSSERVAZIONE.** Dati  $f, g \in \mathbb{K}[t]$  e  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ , si ha:

- $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$ .
- $(fg)(A) = f(A)g(A)$

**DIMOSTRAZIONE.** Prendiamo i polinomi  $f(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$  e  $g(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$  e valutiamoli entrambi in  $A$ :  $f(A) = b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I$  e  $g(A) = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I$ .

I La somma è ovvia.

II Il prodotto è garantito dalla commutatività delle potenze di matrici.  $\square$

### 10.2.1 Ideale di una matrice

**DEFINIZIONE 10.2.0.** IDEALE DI UNA MATRICE.

Data  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ , definiamo l'**ideale della matrice**:

$$I_A := \{f \in \mathbb{K}[t] \mid f(A) = O\} \quad (10.4)$$

**OSSERVAZIONE.**

- $O \in I_A$ .
- $I_A \neq \{O\}$ ; infatti, se consideriamo le seguenti  $n^2 + 1$  matrici in  $\mathbb{K}^{n,n}$ :

$$I, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$$

Per il lemma di Steinitz queste matrici sono necessariamente *linearmente dipendenti*, dato che superano in numero  $\dim \mathbb{K}^{n,n} = n^2$ , cioè esistono i coefficienti  $a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$  non tutti nulli tali che:

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = O$$

Allora  $p(t) = a_{n^2} t^{n^2} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$  è un polinomio *non* nullo in  $I_A$ .

- $I_A$  soddisfa giustamente la definizione di ideale di  $\mathbb{K}[t]$ :
  - ◇  $I_A$  È UN SOTTOGRUPPO DI  $(\mathbb{K}^{n,n}, +)$ .

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A) = O \implies f + g \in I_A$$

- ◇ ASSORBIMENTO: se  $h \in \mathbb{K}[t]$  si ha :

$$(fh)(A) = \underbrace{f(A) h(A)}_{=O} = O \implies fh \in I_A$$

### 10.2.2 Polinomio minimo

**PROPOSIZIONE 10.2.0.** L'anello  $\mathbb{K}[t]$  è ad *ideali principali*: se  $I \subseteq \mathbb{K}[t]$  è un ideale,  $\exists p$  tale che  $I = (p)$ . Il generatore  $p$  è *unico* a meno di moltiplicazione per scalari *non* nulli, se prendiamo  $P$  **monico** allora è unico.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $p \in I$  un polinomio *non* nullo di grado *minimo* tra i polinomi in  $I_A$ . Se  $p$  è *costante*, allora  $I = \mathbb{K}[t] = (1) = (p)$ .

Supponiamo allora  $p$  *non* costante. Vogliamo mostrare che  $p$  genera  $I$ . Prendiamo  $f \in I$



e dividiamolo per  $p$ :

$$\underbrace{f(t)}_{\in I} = \underbrace{p(t)q(t)}_{\in I \text{ per assorbimento}} + r(t)$$

Con  $r(t)$  polinomio con  $\deg r < \deg p$ . Notiamo che anche  $r(t) \in I$  per essere vera l'equazione di sopra; in particolare, per la minimalità del grado di  $p$  non può esserci un polinomio in  $I$  di grado minore di  $p$ , dunque  $r \equiv 0$ . Allora  $p \mid f$  e dunque ogni polinomio in  $I$  è generato da  $p$ :  $I \equiv (p)$ .

Se  $I = (p) = (\tilde{p})$ , allora  $p, \tilde{p} \in I$  e dunque  $p \mid \tilde{p}, \tilde{p} \mid p$ , cioè  $p = \lambda \tilde{p}$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Se  $p$  è monico, l'unico coefficiente  $\lambda$  per cui si ha  $p = \lambda \tilde{p}$  è 1, e dunque  $p = \tilde{p}$ , cioè  $p$  è unico.  $\square$

**DEFINIZIONE 10.2.1.** POLINOMIO MINIMO.

Sia  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  e sia  $I_A$  ideale dei polinomi che si annullano in  $A$ . Il **polinomio minimo**  $m_A(t)$  di  $A$  è il generatore monico di  $I_A$ , ovvero è il polinomio monico non nullo di grado minimo tra i polinomi in  $I_A$ .

**ESEMPIO.** Cerchiamo il polinomio minimo della seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Notiamo che  $A^2 - I = O$ , dunque  $p(t) = t^2 - 1 \in I_A$ . Poiché  $m_A(t) \mid p(t)$ , esso può essere solo  $t - 1, t + 1, t^2 - 1$ . Escludiamo sempre il caso  $m_A(t) = 1$ , in quanto allora si avrebbe  $I_A = \mathbb{K}[t]$  e ciò non è mai vero per questo anello (i polinomi di grado 0 non si annullano in generale sulle matrici!).

Se fosse  $m_A(t) = t - 1$ , allora  $m_A(A) = A - I \neq O$  e dunque  $t - 1 \notin I_A$ . In modo analogo  $m_A(t) = t + 1 \implies A + I \neq O \implies t + 1 \notin I_A$ . L'unica possibilità è allora  $m_A(t) = t^2 - 1$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $A$  e  $B$  sono simili, allora  $I_A = I_B \subseteq \mathbb{K}[t]$  e quindi  $m_A(t) = m_B(t)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M \in GL(n, \mathbb{K})$  la matrice che rende  $A$  simile a  $B$ :  $B = M^{-1}AM$ . Le potenze di matrici simili sono simili anch'esse:

$$\begin{aligned} B &= M^{-1}AM \\ B^2 &= M^{-1}A^2M \\ &\vdots \\ B^k &= M^{-1}A^kM \end{aligned}$$

Se  $p(t) = c_d t^d + \dots + c_0$ , allora:

$$\begin{aligned} M^{-1}p(A)M &= M^{-1}(c_d A^d + \dots + c_0 I)M = c_d (M^{-1}A^d M) + \dots + c_1 (M^{-1}AM) + c_0 I = \\ &= c_d B^d + \dots + c_1 B + c_0 I = p(B) \end{aligned}$$

Ovvero  $M^{-1}p(A)M = p(B)$ . Pertanto,  $p(A) = O$  se e solo se  $p(B) = O$ , cioè se  $I_A = I_B$ .  $\square$

**RICORDIAMO...** Ricordiamo alcune definizioni e proprietà utili legate al **determinante**:

- Il **complemento algebrico**  $(i, j)$  di una matrice quadrata  $M$  è:

$$M_{i,j} = (-1)^{i+j} \det \left( \begin{array}{c} \text{matrice ottenuta da } M \text{ cancellando} \\ \text{la riga } i \text{ e la colonna } j \end{array} \right) \quad (10.5)$$

- La **matrice aggiunta**  $\text{adj}(M)$  di una matrice quadrata  $M$  è la matrice  $(M_{i,j})$  che, al posto  $(i, j)$  ha il complemento algebrico  $M_{j,i}$ .<sup>a</sup>
- La **regola di Laplace** afferma che:

$$\text{adj}(M)M = M\text{adj}(M) = \det(M)I \quad (10.6)$$

Inoltre, se  $\det(M) \neq 0$ , allora:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{adj}(M) \quad (10.7)$$

- Il **polinomio caratteristico** di  $A$  è:

$$C_A(t) = \det(tI - A) = (-1)^n \det(A - tI) \quad (10.8)$$

In particolare, il polinomio caratteristico è un polinomio *monico*.

<sup>a</sup>Attenzione all'ordine degli indici!

**OSSERVAZIONE.** Una matrice i cui elementi sono polinomi in  $\mathbb{K}[t]$  può essere scritta in modo unico come polinomio in  $t$  con coefficienti delle matrici in  $\mathbb{K}^{n,n}$ .

**ESEMPIO.**

$$\begin{pmatrix} 2t^2 & 3t+1 \\ t^2-4t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**TEOREMA 10.3.0. TEOREMA DI CAYLEY-HAMILTON.**

Sia  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ . Allora  $C_A(t) \in I_A$ , cioè  $C_A(A) = 0$ . In altre parole,  $m_A(t) \mid C_A(t)$ . In particolare  $\deg m_A(t) \leq n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M := tI - A$ . Allora:

$$C_A(t) = \det M = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0$$

Consideriamo l'*aggiunta* di  $M$ ,  $\text{adj}(M) = \text{adj}(tI - A)$ . Poiché gli elementi di  $tI - A$  sono polinomi in  $\mathbb{K}[t]$  di grado minore o uguale di 1 e gli elementi di  $\text{adj}(M)$  sono polinomi in  $\mathbb{K}[t]$  di grado minore o uguale di  $n-1$ ,  $\text{adj}(M)$  si scrive come polinomio di grado minore e uguale a  $n-1$  con coefficienti in  $\mathbb{K}^{n,n}$  (grazie all'osservazione di pag. 164).

$$\text{adj}(M) = C_{n-1}t^{n-1} + C_{n-2}t^{n-2} + \dots + C_1t + C_0, \quad C_i \in \mathbb{K}^{n,n}$$

Usando la regola di Laplace:

$$\begin{aligned}
 M \operatorname{adj}(M) &= \det(M) I \\
 &\Downarrow \\
 (tI - A) \operatorname{adj}(M) &= C_A(t) I &= (t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0)I \\
 &\parallel &= \boxed{It^n + b_{n-1}It^{n-1} + \dots + b_1It + b_0I} \\
 (tI - A)(C_{n-1}t^{n-1} + C_{n-2}t^{n-2} + \dots + C_1t + C_0) & \\
 = \boxed{C_{n-1}t^n + C_{n-2}t^{n-1} + \dots + C_1t^2 + C_0t +} & \\
 \quad \boxed{-AC_{n-1}t^{n-1} - AC_{n-2}t^{n-2} + \dots - AC_1t + AC_0} &
 \end{aligned}$$

Uguagliamo i due termini evidenziati, sommando le matrici coefficienti termine a termine. Si ha il sistema:

$$\begin{cases}
 C_{n-1} = I & : t^n \\
 C_{n-2} - AC_{n-1} = b_{n-1}I & : t^{n-1} \\
 C_{n-3} - AC_{n-2} = b_{n-2}I & : t^{n-2} \\
 \dots & \\
 C_0 - AC_1 = b_1I & : t \\
 -AC_0 = b_0I & : 1
 \end{cases}$$

Sostituiamo a cascata le equazioni dalla seconda in giù:

$$\begin{cases}
 C_{n-2} = A + b_{n-1}I \\
 C_{n-3} = A^2 + b_{n-1}A + b_{n-2}I \\
 \dots \\
 C_0 = A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \dots + b_1I
 \end{cases}$$

Sostituiamo  $C_0$  nell'ultima:

$$\underbrace{A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0I}_{C_A(A)} = O$$

Abbiamo dunque ottenuto la tesi. □

**OSSERVAZIONE.** Si ha che  $m_A(t) \mid C_A(t) \implies C_A(t) = m_A(t)q(t)$ , con  $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ . In altre parole, le radici del polinomio minimo sono autovalori.

Il seguente teorema afferma un legame ancora più forte tra polinomio minimo e autovalori di una matrice.

**TEOREMA 10.3.1.** Sia  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  e  $m_A(t)$  il suo polinomio minimo. Allora, preso  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$m_A(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ è un autovalore di } A \quad (10.9)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Segue dal teorema di Cayley-Hamilton perché  $m_A(\lambda) = 0 \implies C_A(\lambda) = 0 \implies \lambda$

autovalore.

$\Leftarrow$ ) Sia  $\lambda$  un autovalore di  $A$  con autovettore associato  $\mathbf{v}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ A^2\mathbf{v} &= A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si arriva a  $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ . Preso un generico polinomio  $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ , esso si può esprimere come:

$$p = \sum_{i=0}^d c_i t_i \quad c_i \in \mathbb{K}$$

Allora  $p(A) = \sum_{i=0}^d c_i A^i$  e dunque:

$$p(A)\mathbf{v} = \left( \sum_{i=0}^d c_i A^i \right) \mathbf{v} = \sum_{i=0}^d c_i (A^i \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^d c_i (\lambda^i \mathbf{v}) = \underbrace{\left( \sum_{i=0}^d c_i \lambda^i \right)}_{\in \mathbb{K}} \mathbf{v} = p(\lambda) \mathbf{v}$$

Consideriamo ora un polinomio  $p \in I_A$ . Per sua definizione  $p(A) = 0$ ; in particolare, da quanto scritto sopra:

$$0\mathbf{v} = p(\lambda)\mathbf{v}$$

Ed essendo  $\mathbf{v}$  un autovettore,  $\mathbf{v} \neq 0$ ; dall'equazione sopra necessariamente segue  $p(\lambda) = 0$ . In particolare, essendo  $p \in I_A$  generato dal polinomio minimo  $m_A$  (cioè  $p(t) = m_A(t)q(t)$  con  $q(t) \neq 0$ ), segue che  $m_A(\lambda) = 0$ .  $\square$

#### 10.4 FORMA CANONICA DI JORDAN

D'ora in poi, se non altresì specificato, considereremo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , cioè tratteremo di matrici  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  e endomorfismi fra spazi vettoriali complessi.

**OSSERVAZIONE.** Poichè  $\mathbb{C}$  è **algebricamente chiuso**, ogni polinomio  $p \in \mathbb{C}[t]$  si fattorizza completamente come prodotto di fattori lineari:

$$C_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r} \text{ con } m_i \text{ molteplicità algebrica di } \lambda_i \quad (10.10)$$

Nel caso del polinomio minimo, si ha:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{h_1} \dots (t - \lambda_r)^{h_r} \text{ con } 1 \leq h_i \leq m_i \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (10.11)$$

Come altra conseguenza, ogni matrice  $n \times n$  ammette  $n$  autovalori complessi, contati con la loro molteplicità.

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  una matrice associata a un endomorfismo  $f : V \longrightarrow V$ . Se  $f$  è diagonalizzabile, esiste una base in cui la matrice di  $f$  è diagonale. Anche quando tuttavia la matrice non è diagonalizzabile, vogliamo cercare una base in cui la matrice di  $f$  è *particolarmente semplice*.

**DEFINIZIONE 10.4.0.** BLOCCO DI JORDAN.

Un **blocco di Jordan**  $J = J_k(\lambda)$ , di autovalore  $\lambda \in \mathbb{C}$  e dimensione  $K$ , è una matrice quadrata  $k \times k$  con sulla diagonale solo l'autovalore e sopra ogni elemento della diagonale 1:

$$J = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

**OSSERVAZIONI.**

- $J$  è determinato da  $\lambda$  e  $k$ .
- Il polinomio caratteristico di  $J$  è  $C_J(t) = (t - \lambda)^k$ , cioè  $\lambda$  è l'unico autovalore di  $J$  con molteplicità algebrica  $k$ .

**OSSERVAZIONE.** Definiamo il blocco di Jordan di dimensione  $k$  con autovalore zero, necessario per calcolare l'autospazio  $V_\lambda$ :

$$N = J - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

Si ha che  $\text{rk } N = k - 1 \implies \dim V_\lambda = \dim \ker N = k - \text{rk } N = 1$ , cioè  $J$  non è mai diagonalizzabile se  $k > 1$ , dato che  $1 = \dim V_\lambda \leq m_\lambda = k$ .

Se la base  $\mathcal{B}$  dello spazio  $V$  (in cui stiamo operando con l'endomorfismo associato a  $J$ ) è  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ , notiamo che  $\mathbf{e}_1$  è l'unico autovettore di  $N$  e  $V_\lambda = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1)$ . Si vede che  $J$  agisce in modo particolare sui vettori di  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{cases} J\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1 \\ J\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 \\ \dots \\ J\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1} + \lambda\mathbf{e}_k \end{cases}$$

Anche  $N$  agisce in modo altrettanto particolare sui vettori di  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{cases} N\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ N\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \\ \dots \\ N\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1} \end{cases}$$

Cioè, cominciando da  $\mathbf{e}_k$  e applicando  $N$  ripetutamente otteniamo gli altri vettori della base.

$$\mathbf{e}_1 \xleftarrow{N} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{N} \dots \xleftarrow{N} \mathbf{e}_{k-1} \xleftarrow{N} \mathbf{e}_k$$

Ad esempio, con  $N^2$  si ha:

$$\begin{cases} N^2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ N^2 \mathbf{e}_2 = N(N\mathbf{e}_2) = N\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ \dots \\ N^2 \mathbf{e}_k = N(N\mathbf{e}_k) = N\mathbf{e}_{k-1} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Infatti, se guardiamo la matrice  $N^2$ , si ha:

$$N^2 = (J - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha dunque, ad ogni potenza successiva di  $N$ , lo “spostamento” della diagonale di 1 verso destra. In particolare:

$$N^{k-1} = (J - \lambda I)^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

E in questo caso si ha la relazione con i vettori della base:

$$\begin{cases} N^{k-1} \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, k-1 \\ \dots \\ N^{k-1} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

Studiando l'immagine dell'applicazione associata ad  $N$ , essendo la base dell'immagine i vettori colonna l.i., si ha  $\text{Im } N^{k-1} = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1)$ .

Come già affermato dunque, è  $\mathbf{e}_k$  a determinare l'intera base di  $V$  tramite la moltiplicazione per  $N$ .

Come ultima osservazione fondamentale, notiamo inoltre che  $N^k = O$ , cioè  $N$  è una matrice **nilpotente** di ordine  $k$ .

#### DEFINIZIONE 10.4.1. FORMA DI JORDAN.

Una matrice quadrata si dice in **forma di Jordan** se ha solo blocchi di Jordan lungo la diagonale, mentre altrove è nulla.

**ESEMPIO.** La seguente matrice  $9 \times 9$  è in forma di Jordan con  $J_3(2)$ ,  $J_2(i)$ ,  $J_3(i)$  e  $J_1(-4)$ :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} i & 1 \\ 0 & i \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-4} \end{pmatrix}$$

**OSSERVAZIONE.** Una matrice *diagonale* è in forma di Jordan, con un unico blocco di ordine 1 (cioè senza alcun 1 nell'elemento sopra).

**OSSERVAZIONE.** Se  $A$  è in forma di Jordan, sulla diagonale compaiono tutti gli autovalori con la loro *molteplicità*. Dunque, se  $\lambda$  è un autovalore, la somma delle *dimensioni* dei blocchi relativi a  $\lambda$  è uguale alla *molteplicità algebrica*  $m_\lambda$  di  $\lambda$ .

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \quad (10.14)$$

**TEOREMA 10.4.0. ESISTENZA E UNICITÀ DELLA FORMA DI JORDAN**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dim  $n$  e  $f$  un endomorfismo di  $V$ . Allora *esiste* una base di  $V$  in cui la matrice di  $f$  è in forma di Jordan. Inoltre, la forma di Jordan è *unica* a meno dell'ordine dei blocchi.

*In termini matriciali*, ogni  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  è simile ad una matrice in forma di Jordan, unica a meno dell'ordine dei blocchi:

$$J = P^{-1}AP \quad (10.15)$$

$P$  è la matrice del cambiamento di base che presenta, nelle colonne, la base che mette  $A$  in forma di Jordan.

### 10.4.1 Autospazi generalizzati

Per dimostrare il teorema appena enunciato, faremo uso di un concetto nuovo: quello di *autospazio generalizzato*. Prima di definirlo, ricordiamo alcune proprietà legate agli endomorfismi che ci torneranno utili.

**DEFINIZIONE 10.4.2. SPAZIO VETTORIALE INVARIANTE.**

Uno spazio vettoriale  $V$  si dice **invariante** per un endomorfismo  $f$  se:

$$f(V) \subseteq V \quad (10.16)$$

Se  $A$  è la matrice associata all'endomorfismo rispetto ad una base fissata, si scrive anche  $AV \subseteq V$ .

**OSSERVAZIONE.** Supponiamo che  $V = U \oplus W$ , con  $U$  e  $W$  sottospazi di  $V$ ; supponiamo inoltre i due sottospazi  $U$  e  $W$  siano **invarianti** per  $f$  endomorfismo, dunque  $f(U) \subseteq U$  e  $f(W) \subseteq W$ . Prese una base  $\mathcal{B}_U$  di  $U$  e una base  $\mathcal{B}_W$  di  $W$ , la base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$  è una base di  $V$  e la matrice di  $f$  rispetto a questa base è a blocchi.

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right)$$

- $B$  è quadrata, di ordine  $\dim U$  ed è la matrice associata a  $f|_U : U \longrightarrow U$  rispetto a  $\mathcal{B}_U$ .
- $C$  è quadrata, di ordine  $\dim W$  ed è la matrice associata a  $f|_W : W \longrightarrow W$  rispetto a  $\mathcal{B}_W$ .

**DEFINIZIONE 10.4.3. AUTOSPAZIO GENERALIZZATO.**

Data una funzione  $f : V \longrightarrow V$  e  $A$  una matrice associata ad  $f$ ; sia  $\lambda$  un autovalore di  $f$  (di cui ne esiste almeno uno perché in  $\mathbb{C}$ ),  $V_\lambda = \ker(f - \lambda Id) = \ker(A - \lambda I)$  l'autospazio di  $\lambda$  e  $m_\lambda$  la molteplicità algebrica di  $\lambda$ .

Allora l'**autospaio generalizzato** di  $\lambda$  è:

$$\tilde{V} = \ker(f - \lambda Id)^{m_\lambda} = \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda} \quad (10.17)$$

**LEMMA 10.4.0. PROPRIETÀ DEGLI AUTOSPAZI GENERALIZZATI**

1.  $V_\lambda \subseteq \tilde{V}_\lambda$ .
2.  $\tilde{V}_\lambda$  è invariante per  $A$ , cioè  $A\tilde{V}_\lambda \subseteq \tilde{V}_\lambda$ .
3.  $\dim \tilde{V}_\lambda = m_\lambda$ .
4.  $f|_{\tilde{V}_\lambda} : \tilde{V}_\lambda \longrightarrow \tilde{V}_\lambda$  ha polinomio caratteristico  $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ .
5. Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sono tutti gli autovalori di  $A$ , si ha:

$$V = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{\lambda_r} \quad (10.18)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo un autovalore  $\lambda$  di  $A$ . Analizziamo le potenze  $(A - \lambda I)$ , i loro nuclei e le loro immagini.

I Se  $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^h$ , allora, per definizione:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^h \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \implies (A - \lambda I)^{h+1} \mathbf{v} &= (A - \lambda I)(A - \lambda I)^h \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \implies \mathbf{v} &\in \ker(A - \lambda I)^{h+1} \\ \implies \ker(A - \lambda I)^h &\subseteq \ker(A - \lambda I)^{h+1} \end{aligned}$$

Al crescere di  $h$ :

$$\{0\} \subseteq \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^2 \subseteq \dots \quad (*) \quad (10.19)$$



Cioè il nucleo della potenza  $h$  è contenuto in tutti quelli successivi. In particolare:

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda} \implies V_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$$

Dimostrando così la prima proprietà.

II In modo analogo, se  $\mathbf{w} \in \text{Im}(A - \lambda I)^h$ , per definizione  $\exists \mathbf{v} \in (A - \lambda I)^h$  tale che:

$$\begin{aligned} w &= (A - \lambda I)^h \mathbf{v} = (A - \lambda I)^{h-1} ((A - \lambda I) \mathbf{v}) \\ &\implies \mathbf{w} \in \text{Im}(A - \lambda I)^{h-1} \\ &\implies \text{Im}(A - \lambda I)^{h-1} \supseteq \text{Im}(A - \lambda I)^h \end{aligned}$$

Al crescere di  $h$ :

$$V \supseteq \text{Im}(A - \lambda I) \supseteq \text{Im}(A - \lambda I)^2 \supseteq \dots \quad (*) \quad (10.20)$$

Cioè l'immagine della potenza  $h$  contiene tutte quelle successive.

Possiamo mostrare come tutti gli spazi finora visti (nuclei e immagini delle potenze  $(A - \lambda I)^h$ ) sono invarianti:

■ Se  $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^h$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= A\mathbf{0} = A((A - \lambda I)^h \mathbf{v}) \stackrel{a}{=} (A - \lambda I)^h A\mathbf{v} \\ &\implies A\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^h \\ &\implies A(\ker(A - \lambda I)^h) \subseteq \ker(A - \lambda I)^h \end{aligned}$$

Abbiamo appena dimostrato l'invarianza dello spazio  $\widetilde{V}_\lambda$ .

■ Se  $\mathbf{w} \in \text{Im}(A - \lambda I)^h$  esiste  $\mathbf{v}$  tale che:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (A - \lambda I)^h \mathbf{v} \implies A\mathbf{w} = A(A - \lambda I)^h \mathbf{v} \stackrel{b}{=} (A - \lambda I)^h (A\mathbf{v}) \\ &\implies A\mathbf{w} \in \text{Im}(A - \lambda I)^h \\ &\implies A(\text{Im}(A - \lambda I)^h) \subseteq \text{Im}(A - \lambda I)^h \end{aligned}$$

III Per trovare la dimensione dell'autospazio generalizzato, sappiamo che:

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda I)^h &\subseteq \ker(A - \lambda I)^{h+1} \\ \text{Im}(A - \lambda I)^h &\supseteq \text{Im}(A - \lambda I)^{h+1} \end{aligned}$$

Allora, se consideriamo il teorema nullità più rango sulle applicazioni  $(A - \lambda I)^h$  e  $(A - \lambda I)^{h+1}$  in  $V$ :

$$\begin{aligned} \dim \ker(A - \lambda I)^h + \dim \text{Im}(A - \lambda I)^h & \\ \parallel & \\ n = \dim V & \\ \parallel & \\ \dim \ker(A - \lambda I)^{h+1} + \dim \text{Im}(A - \lambda I)^{h+1} & \end{aligned}$$

Ne consegue che:

$$\ker(A - \lambda I)^h = \ker(A - \lambda I)^{h+1} \iff \text{Im}(A - \lambda I)^h = \text{Im}(A - \lambda I)^{h+1} \quad (10.21)$$

Siccome  $V$  ha dimensione finita, la successione crescente  $\textcircled{*}$  dei nuclei delle potenze (eq. I, pag. 171) ad un certo punto deve *stabilizzarsi*, cioè deve esserci un'uguaglianza per tutti gli elementi successivi<sup>c</sup>. Denotiamo con  $p$  il più piccolo intero tale che:

$$\ker(A - \lambda I)^p = \ker(A - \lambda I)^{p+1}$$

Mostriamo che  $\forall h \geq p$  valgono le seguenti relazioni:

$$\ker(A - \lambda I)^h = \ker(A - \lambda I)^p$$

$$\text{Im}(A - \lambda I)^h = \text{Im}(A - \lambda I)^p$$

È sufficiente mostrarlo per i nuclei, dato che vale anche per le immagini per nullità più rango.

Sia  $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^h \supseteq (A - \lambda I)^h$  con  $h \geq p + 2$ .<sup>d</sup> Allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda I)^p \mathbf{v} = (A - \lambda I)^{p+1} \underbrace{\left( (A - \lambda I)^{h-p-1} \mathbf{v} \right)}_{\in \ker(A - \lambda I)^h = \ker(A - \lambda I)^p} \\ \implies \mathbf{0} &= (A - \lambda I)^p \left( (A - \lambda I)^{h-p-1} \mathbf{v} \right) = (A - \lambda I)^{h-1} \mathbf{v} \\ \implies \mathbf{v} &\in \ker(A - \lambda I)^{h-1} \end{aligned}$$

Iterando in questo modo, otterremo  $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^{p+1} = \ker(A - \lambda I)^p$ . Dunque, come conseguenza del termine stabilizzatore, tutti i sottospazi  $\ker(A - \lambda I)^k$  (con  $k < p$ ) sono strettamente contenuti in quelli successivi fino al termine  $p$ -esimo, mentre  $\text{Im}(A - \lambda I)^k$  contengono strettamente quelli successivi fino al  $p$ -esimo.

$$\{0\} \subsetneq \ker(A - \lambda I) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda I)^p \quad (10.22)$$

$$V \supsetneq \text{Im}(A - \lambda I) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(A - \lambda I)^p \quad (10.23)$$

- Si ha  $p \geq 1$  : se fosse  $p = 0$ , si avrebbe  $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$  e dunque nessun autovettore o autovalore.
- Si ha  $\dim \ker(A - \lambda I)^p \geq p$  : poiché nella successione abbiamo delle inclusioni strette, fra un termine e il suo successivo la dimensione deve aumentare di almeno 1.

Mostriamo ora che i termini  $p$ -esimi delle due successioni sono in somma diretta, in particolare dobbiamo solo dimostrare:

$$\ker(A - \lambda I)^p \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p = \{0\}$$

Infatti, preso  $\mathbf{u} \in \ker(A - \lambda I)^p \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p$ ,  $\exists \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} = (A - \lambda I)^p \mathbf{v}$ . Ma:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda I)^p \mathbf{u} = (A - \lambda I)^p (A - \lambda I)^p \mathbf{v} = (A - \lambda I)^{2p} \mathbf{v} \\ \implies \mathbf{v} &\in \ker(A - \lambda I)^{2p} = \ker(A - \lambda I)^p \implies \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Per nullità più rango si ha  $\dim \ker(A - \lambda I)^p + \dim \text{Im}(A - \lambda I)^p = \dim V$ ; segue che:

$$V = \ker(A - \lambda I)^p \oplus \text{Im}(A - \lambda I)^p \quad (10.24)$$

In particolare sappiamo che, per l'osservazione a pag. 170, rispetto ad una base di  $V$  opportuna la matrice associata  $A$  è a *blocchi*, di cui i due non nulli sono

uno *codificato* dalla restrizione dell'endomorfismo a  $\ker(A - \lambda I)^p$ , mentre l'altro dalla restrizione a  $\operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$ . Consideriamo allora queste due restrizioni ai sottospazi:

$$\varphi : \ker(A - \lambda I)^p \longrightarrow \ker(A - \lambda I)^p$$

$$\psi : \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p \longrightarrow \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$$

Facciamo le seguenti considerazioni.

- **$\lambda$  è l'unico autovalore di  $\varphi$ .** Definiamo la matrice  $B$  associata a  $\varphi$ . Sappiamo che  $(A - \lambda I)^p$  annulla tutti i vettori di  $\ker(A - \lambda I)^p$ . Dunque, la *restrizione* di  $A - \lambda I$  su di esso, ovvero  $B - \lambda I$  (associata all'applicazione  $\varphi - \lambda Id$ ), è *endomorfismo nilpotente* di ordine  $p$ . In altre parole, l'applicazione  $(\varphi - \lambda Id)^p$  si *annulla* se valutata su un vettore (non nullo)  $\mathbf{v}$  appartenente al *dominio*  $\ker(A - \lambda I)^p$ . Ciò equivale a dire che:

$$(B - \lambda I)^p \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Ma ciò significa:  $(B - \lambda I)^p = \mathbf{0}$ .

Preso allora il polinomio  $p(t) = (t - \lambda)^p$  appartiene all'ideale di  $B$  (cioè all'ideale di  $\varphi$ ), in particolare  $\lambda$  è autovalore di  $\varphi$  (perché  $p(\lambda) = 0 \implies m_B(\lambda) = 0$ ).

Conseguentemente, se supponiamo di avere  $\mu$  come altro autovalore di  $\varphi$ , si ha che  $m_B(\mu) = 0 \implies p(\mu) = 0 \implies (\mu - \lambda)^p \implies \mu = \lambda$ . Si ha dunque l'unicità.

- **$\lambda$  non è autovalore di  $\psi$ .** Infatti, sia  $\mathbf{v} \in \operatorname{Im}(A - \lambda I)$  per cui  $\lambda$  è il suo autovalore. Allora:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}) &= \lambda \mathbf{v} \stackrel{e}{\iff} A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \iff (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\implies \mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^p \\ &\implies \mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^p \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p = \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

Ma sapendo che  $\ker(A - \lambda I)^p \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p = \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$ , si ha  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , dunque *non* può  $\lambda$  autovalore di  $\psi$ .

Riprendendo l'osservazione a pag. 170, scelte delle opportune basi, definiamo  $\mathbf{B}$  la matrice associata a  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  la matrice associata a  $\psi$  in modo da avere la matrice  $A$  associata a  $f$  a blocchi.

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right)$$

Usiamo questa matrice per calcolare il polinomio caratteristico:<sup>f</sup>

$$C_A(t) = C_B(t) C_C(t)$$

- $C_B(t)$  è il polinomio caratteristico di  $\mathbf{B}$ , il cui unico autovalore è  $\lambda$ ; grazie all'osservazione a pag. 10.6, possiamo dire che la molteplicità algebrica di  $\lambda$  come autovalore di  $\mathbf{B}$  è esattamente la dimensione dello spazio  $\mathbf{B}$ . Il polinomio caratteristico risulta:

$$(t - \lambda)^{\dim \ker(A - \lambda I)^p}$$

- $C_C(t)$ , in quanto  $\psi$  non ha l'autovalore  $\lambda$ , non è divisibile per  $t - \lambda$ :  
 $(t - \lambda) \nmid C_C(t)$ .

Segue che la molteplicità algebrica di  $\lambda$  come autovalore della matrice  $\mathbf{B}$  è la stessa di quella come autovalore della matrice  $A$ :

$$m_\lambda = \dim \ker (A - \lambda I)^p \geq p$$

Da cui segue:

$$\ker (A - \lambda I)^p = \ker (A - \lambda I)^{m_\lambda} = \widetilde{V}_\lambda$$

Dunque, sapendo che  $\dim \widetilde{V}_\lambda = \dim \ker (A - \lambda I)^p = m_\lambda$ , segue la proprietà 3.

- IV Notiamo che l'endomorfismo  $\varphi$  definito nella dimostrazione precedente altro non è che  $f|_{\widetilde{V}_\lambda} : \widetilde{V}_\lambda \longrightarrow \widetilde{V}_\lambda$ , e abbiamo visto come il suo polinomio caratteristico debba essere  $(t - \lambda)_\lambda^m$ . Si conclude il punto 4.

- V Non dimostreremo quest'ultimo punto. □

<sup>a</sup> $A$  e  $A - \lambda I$  commutano.

<sup>b</sup>Si veda la nota precedente.

<sup>c</sup>Infatti, ogni inclusione potrebbe essere stretta e dunque la dimensione di questi sottospazi può aumentare; tuttavia, essendo  $V$  finito questi sottospazio non possono avere dimensione maggiore di  $n$ .

<sup>d</sup>Poiché  $p$  è tale per cui  $\ker (A - \lambda I)^p = \ker (A - \lambda I)^{p+1}$ , il caso  $h = p + 1$  è banalmente vero.

<sup>e</sup> $Av$  segue dalla definizione di  $\psi$  come restrizione dell'endomorfismo  $f$ .

<sup>f</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 274, si può trovare la dimostrazione della formula del determinante di una matrice a blocchi, su cui si basa la seguente formula.

Riassumendo, sappiamo ora che gli autospazi generalizzati sono invarianti e sono in somma diretta tra loro.

$$V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_r} \quad (10.25)$$

Ora, per trovare una base che mette la matrice  $A$  associata ad  $f$  in forma di Jordan, basta farlo in *ogni autospazio generalizzato*  $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ , in cui l'unico autovalore è  $\lambda_i$  per le osservazioni precedenti. In sostanza, quello che vogliamo fare è compiere una "*separazione degli autovalori*".

Per calcolare l'autospazio generalizzato dovremmo calcolare  $\widetilde{V}_\lambda = (A - \lambda I)^{m_\lambda}$ , ma basterà calcolare invece  $\widetilde{V}_\lambda = (A - \lambda I)^p$ .

Nella sezione seguente dimostreremo l'esistenza della base di  $\widetilde{V}_\lambda$  che dà la forma di Jordan.

#### 10.4.2 Esistenza della base dell'autospazio generalizzato che dà la forma di Jordan

Prima di procedere dimostriamo un lemma che servirà più avanti.

**LEMMA 10.4.1.** Siano  $f : U \longrightarrow V$  e  $g : V \longrightarrow W$  due applicazioni lineari. Si ha:

$$\dim (\operatorname{Im} f \cap \ker g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} (g \circ f) = \dim \ker (g \circ f) - \dim \ker f \quad (10.26)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

Sia  $h := g|_{\text{Im} f} : \text{Im} f \longrightarrow W$ . Si ha:

$$\dim \ker h = \dim \text{Im} f - \dim h$$

Ma  $\ker h = \text{Im} f \cap \ker g$  e  $\text{Im} h = g(\text{Im} f) = \text{Im}(g \circ f)$ , dunque:

$$\begin{aligned} \ker h &= \dim \text{Im} f - \dim \text{Im} h \\ \dim(\text{Im} f \cap \ker g) &= \dim \text{Im} f - \dim \text{Im}(g \circ f) \end{aligned}$$

Per dimostrare la seconda uguaglianza, abbiamo:

$$\begin{aligned} \dim \text{Im} f &= \dim U - \dim \ker f \\ \dim \text{Im}(g \circ f) &= \dim U - \dim \ker(g \circ f) \\ \implies \dim \text{Im} f - \dim \text{Im}(g \circ f) &= \dim \ker(g \circ f) - \dim \ker f \end{aligned}$$

□

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordando la successione delle immagini (equazione 10.22):

$$V \supsetneq \text{Im}(A - \lambda I) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(A - \lambda I)^p$$

Intersechiamo ogni termine con  $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ :

$$\ker(A - \lambda I) \cap V \supseteq \ker(A - \lambda I) \cap \text{Im}(A - \lambda I) \supseteq \dots \supseteq \ker(A - \lambda I) \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p$$

E poniamo:

$$S_i := \ker(A - \lambda I) \cap \text{Im}(A - \lambda I)^{i-1} \quad (10.27)$$

In particolare, notiamo che:

- $S_1 = \ker(A - \lambda I) \cap V = \ker(A - \lambda I) = V_\lambda$ .
- $S_{p+1} = \ker(A - \lambda I) \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p = \{0\}$  perché  $\ker(A - \lambda I) \subsetneq \ker(A - \lambda I)^p$  e dunque  $S_{p+1} \subseteq \ker(A - \lambda I)^p \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p = \{0\}$ .
- Può benissimo capitare che  $S_i = S_{i+1}$ .

Riscriviamo con questa nuova denominazione la successione creata.

$$V_\lambda = S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_p \quad (10.28)$$

Costruiamo la base di  $\widetilde{V}_\lambda$ .

Innanzitutto, scegliamo una base  $\{x_1^1, \dots, x_r^1\}$  del sottospazio più piccolo  $S_p$ . Per costruzione,  $x_i^1 \in \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1}$ , cioè:

$$\forall i = 1, \dots, r \exists x_i^p \in V \quad x_i^1 = (A - \lambda I)^{p-1} x_i^p$$

È lecito definire i vettori “intermedi” fra  $x_i^p$  e  $x_i^1$ , ottenuti da moltiplicazioni successive della matrice  $A - \lambda I$  al vettore  $x_i^p$ :

$$\begin{aligned} x_i^{p-1} &:= (A - \lambda I) x_i^p \\ x_i^{p-2} &:= (A - \lambda I) x_i^{p-1} = (A - \lambda I)^2 x_i^p \\ &\dots \end{aligned} \quad (10.29)$$

Per capire meglio le relazioni fra questi vettori ed altri che vedremo successivamente nella dimostrazione, utilizziamo il seguente schema tratto da **albano:2017jordan**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_i^p & & & & & & \\
 \downarrow A-\lambda I & & & & & & \\
 x_i^{p-1} & y_j^{p-1} & & & & & \\
 \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & & & & \\
 x_i^{p-2} & y_j^{p-2} & z_k^{p-2} & & & & \\
 \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & & & \\
 x_i^2 & y_j^2 & z_k^2 & \dots & a_t^2 & & \\
 \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & \downarrow A-\lambda I & & \\
 x_i^1 & y_j^1 & z_k^1 & \dots & a_t^1 & b_u^1 &
 \end{array}$$

Notiamo che i vettori  $\{x_i^1, \dots, x_i^p\}$  dà origine ad un *blocco di Jordan*  $J_p(\lambda)$  di dimensione  $p$  e relativo all'autovalore  $\lambda$ , poiché questi vettori soddisfano la costruzione vista nell'osservazione di pag. 167: infatti, si ha  $x_i^1 \in S_p \subseteq V_\lambda$ , dunque  $x_i^1$  è un autovettore di  $V_\lambda$  e gli altri vettori sono ottenuti dall'applicazione ripetuta di una matrice all'ultimo vettore della base<sup>a</sup>. Lo stesso vale  $\forall i = 1, \dots, r$ .

Consideriamo ora lo spazio  $S_{p-1}$ , che ricordiamo contiene  $S_{p-1}$  cioè  $(S_p \subseteq S_{p-1})$ . Vogliamo completare  $\{x_1^1, \dots, x_r^1\}$  ad una base di  $S_{p-1}$  con dei vettori  $y_1^1, \dots, y_s^1$ :

$$\{x_1^1, \dots, x_r^1, y_1^1, \dots, y_s^1\}$$

Per costruzione,  $y_j^1 \in S_{p-1} \subseteq \text{Im}(A - \lambda I)^{p-2}$ , dunque:

$$\forall j = 1, \dots, s \exists y_1^{p-1} \in V \quad y_j^1 = (A - \lambda I)^{p-2} y_j^{p-1}$$

Per ogni  $j$  otteniamo  $p - 1$  vettori  $\{j_i^1, \dots, j_i^{p-1}\}$  tali che  $y_j^s \in V_\lambda$  e  $j_i^{i-1} := (A - \lambda I)y_j^i$   $\forall i = 2, \dots, p - 1$ . Analogamente al caso precedente, questo gruppo di vettori dà origine ad un *blocco di Jordan* di ordine  $p - 1$ .

Procediamo in questo modo: prendiamo la base ottenuta per  $S_i$  e la completiamo ad una di  $S_{i-1} \supseteq S_i$ ; poiché ogni vettore aggiunto appartiene a  $\text{Im}(A - \lambda I)^{i-2}$ , applicando  $i - 2$  volte la matrice  $A_\lambda I$  al vettore  $z_k^{i-1}$  (fino ad ottenere  $z_k^1$ ) otteniamo un'insieme di vettori che generano un blocco di Jordan di dimensioni  $i$  e di autovalore  $\lambda$ .

Chiaramente, poiché potrebbe anche accadere che  $S_{i-1} = S_i$ , si prosegue senza aggiungere vettori alla base e si passa al sottospazio successivo.

Arriviamo con queste iterazioni fino a  $S_2 = V_\lambda \cap \text{Im}(A - \lambda I)$ : completiamo la base da  $S_3$  ad una di  $S_2$  aggiungendo i vettori  $\{a_1^1, \dots, a_t^1\}$ . Sappiamo che  $\exists a_t^2 : a_t^1 = (A - \lambda I)^{p-2} a_t^2$ , dunque abbiamo i due vettori che formano il blocco di Jordan di dimensione 2.

Infine, completiamo ad una base di  $S_1$  aggiungendo i vettori  $\{b_1^1, \dots, b_u^1\}$ . In questo caso, non abbiamo bisogno di calcolare altri vettori  $b_u^i \forall u$  (al variare di  $i$ ) come prima, in quanto i vettori, per definizione di  $S_1$ , appartengono anche a  $\ker(A - \lambda I)$ . Allora,  $\forall u$   $b_u^1$  generano blocchi di Jordan di dimensione 1.

Al variare di  $i, j, k, \dots, t, u$  abbiamo costruito un insieme di vettori tutti appartenenti a  $\widetilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ : nello schema precedente essi sono tutti i vettori appartenenti a tutte le colonne, da quella di  $x_i$  a quella di  $b_u$ .

**Vogliamo contare quanti sono questi vettori.** Innanzitutto, dobbiamo considerare che lo schema, per compattezza, rappresenta *solo una colonna* per ciascun  $x_i, y_j, \dots$ , ma in realtà c'è una colonna analoga alla prima *per ogni vettore* della base di  $S_p$ , una colonna analoga alla seconda per ogni vettore della base di  $S_{p-1}$  e così via. In pratica, abbiamo  $\dim S_p = r$  colonne con  $x_i$ ,  $\dim S_{p-1} - \dim S_p = s$  colonne con  $y_j$  e così via.

Contiamo adesso gli elementi per *righe*. L'*ultima riga*, quella di  $x_i^1, y_j^1, z_k^1, \dots, a_t^1, b_u^1$  al variare di  $i, j, k, \dots, t, u$ , sono per costruzione i vettori di una base di  $S_1$ , e quindi il loro numero sono  $\dim S_1$ .

Sulla *penultima riga* non abbiamo i vettori  $b_u$  e i vettori  $x_i^2, y_j^2, z_k^2, \dots, a_t^2$  presenti sono in numero uguale ai vettori  $x_i^1, y_j^1, z_k^1, \dots, a_t^1$  al variare di  $i, j, k, \dots, t$ , base di  $S_2$  e quindi ne abbiamo  $\dim S_2$ .

Proseguendo così, il numero di vettori della  $i$ -esima riga è pari alla dimensione dello spazio  $S_i$ ; in totale l'insieme è formato da  $N$  vettori, con:

$$N = \sum_{i=1}^p \dim S_i \quad (10.30)$$

Usando il lemma 10.3 (pag. 174), otteniamo che:

$$\begin{aligned} \dim S_i &= \dim(\ker(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^{i-1}) = \\ &= \dim \ker(A - \lambda I)^i - \dim \ker(A - \lambda I)^{i-1} \\ &\Rightarrow \\ N = \sum_{i=1}^p \dim S_i &= \sum_{i=1}^p (\dim \ker(A - \lambda I)^i - \dim \ker(A - \lambda I)^{i-1}) = \\ &= \dim \ker(A - \lambda I)^p - \dim \ker(A - \lambda I)^0 = \\ &= \dim \ker(A - \lambda I)^p = \widetilde{V}_\lambda \end{aligned}$$

L'insieme dei vettori, che ricordiamo essere tutti contenuti in  $\widetilde{V}_\lambda$ , ha *cardinalità* pari alla *dimensione dell'autospazio generalizzato*. Ci resta dunque da dimostrare che i vettori siano *linearmente indipendenti* per verificare che essi siano a tutti gli effetti la base cercata di  $\widetilde{V}_\lambda$ .

Per dimostrarlo, prendiamo la combinazione lineare seguente:

$$\sum_i \alpha_i x_i^p + \sum_i \beta_i x_i^{p-1} + \dots + \sum_i \gamma_i y_j^{p-1} + \dots + \sum_u \delta_u b_u^1 = 0$$

Applicando  $(A - \lambda I)^{p-1}$  tutti i termini si *annullano* eccetto  $x_i^p$  e coefficienti al variare di  $i$ , ovvero:

$$\sum_i \alpha_i (A - \lambda I) x_i^p = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i x_i^1 = 0$$

Poichè  $x_i^1$  al variare di  $i$  sono *linearmente indipendenti* (sono base di  $S_p$ !), i loro coefficienti devono necessariamente *tutti* nulli:  $\alpha_i = 0 \forall i$ . La combinazione lineare sopra diventa:

$$\sum_i \beta_i x_i^{p-1} + \dots + \sum_j \gamma_j y_j^{p-1} + \dots + \sum_u \delta_u b_u^1 = 0$$

Applicando  $(A - \lambda I)^{p-2}$ , nella combinazione lineare rimangono solo  $x_i^{p-1}$  e  $y_j^{p-1}$  al variare di  $i$  e  $j$  con i loro coefficienti. Complessivamente, i vettori formano la base già vista di  $S_{p-1}$ , dunque i coefficienti risultano nulli:  $\beta_i = 0, \gamma_j = 0 \forall i, j$ .

Allo stesso modo, applicando  $(A - \lambda I)^{p-3}, \dots$  si vede che tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli, ovvero i vettori dell'insieme sono **linearmente indipendenti**.  $\square$

<sup>a</sup>Chiaramente ciò non implica che il blocco di Jordan in esame sia proprio  $A$ !  $A$  ha sempre ordine  $n \times n$ , mentre il blocco ottenuto dalla base in questione ha ordine  $p \times p$ , con  $p \leq n$ .

#### 10.4.3 Unicità della forma di Jordan

**DIMOSTRAZIONE.** Per ultima cosa osserviamo come la forma di Jordan di  $A$  sia unica. Sulla sua diagonale compaiono, per definizione, gli *autovalori con molteplicità*: questo dipende esclusivamente dalle radici del polinomio caratteristico e dunque da  $A$  stessa. Per un dato autovalore  $\lambda$ , abbiamo ottenuto dei blocchi di Jordan corrispondenti agli spazi  $S_k$  di dimensione  $k$  e di numero pari ai vettori aggiunti per completare la base dello spazio  $S_{k+1}$  passo per passo (ovvero  $\dim S_{k+1} - \dim S_k$ , dato che ogni vettore aggiunto  $x_i^1$  genera la successione  $x_i^1, \dots, x_i^k$ ). Poiché il *numero dei blocchi* dipende esclusivamente da  $A - \lambda I$ , dunque da  $A$  stessa, e *non* dal procedimento, la forma di Jordan di  $A$  è unica.  $\square$

Il corollario seguente è immediato.

**COROLLARIO 10.4.0.** Due matrici in forma di Jordan sono simili se e solo se hanno gli stessi blocchi (a meno dell'ordine).

#### 10.4.4 Polinomio minimo e forma di Jordan

**PROPOSIZIONE 10.4.0.** Sia  $A$  una matrice complessa  $n \times n$  e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  gli autovalore distinti di  $A$  e, per ogni  $i = 1, \dots, r$ , sia  $p_i$  l'ordine del più grande blocco di Jordan di  $A$  relativo a  $\lambda_i$ . Allora il polinomio minimo di  $A$  è:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \dots (t - \lambda_r)^{p_r} \quad (10.31)$$

L'osservazione che qui facciamo ci servirà nella dimostrazione della proposizione.

**OSSERVAZIONE.** Se  $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ , allora:

$$p(A)q(A) = q(A)p(A) \quad (10.32)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre che  $A$  sia già in forma di Jordan. Consideriamo  $A - \lambda_1 I$ , rappresentata in figura: ha, nella parte rossa, dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore zero. Poichè la parte rossa è una sottomatrice nilpotente



di ordine  $p_1$ , ne consegue che  $(A - \lambda_1 I)^{p_1}$  ha la matrice nulla nella parte zero. In generale,  $(A - \lambda_i I)^{p_i}$  è nullo nel blocco  $m_i \times m_i$  corrispondente a  $\lambda_i$ .

$$\begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\phantom{0}} \end{pmatrix}$$

Ne segue che  $(A - \lambda_1 I)^{p_1} \dots (A - \lambda_r I)^{p_r}$  è la matrice nulla, perché ha ogni blocco nullo. Ciò significa che il seguente polinomio si annulla su  $A$  e dunque appartiene al suo ideale:

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \dots (t - \lambda_r)^{p_r} \in I_A$$

Perciò il polinomio minimo divide  $f$ :  $m_A(t) \mid f(t)$ .

Consideriamo ora  $(A - \lambda_1 I)^h$  con  $h < p_1$ : come abbiamo visto nello studio delle proprietà dei blocchi di Jordan, esso ha nel primo blocco una colonna uguale a  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ , diciamo ad esempio la colonna  $s \in \{1, \dots, m_1\}$ .

Posto  $d_i \geq 1$ ,  $(A - \lambda_i I)^{d_i}$  nel posto  $(1, 1)$  ha  $(\lambda_1 - \lambda_i)^{d_i} \neq 0$  se  $i = 2, \dots, r$ . Infatti,  $A$  (presa in forma di Jordan) è triangolare superiore e ha  $\lambda_1$  al posto  $(1, 1)$ ; allo stesso modo  $A - \lambda_i I$  è triangolare superiore e ha  $\lambda_1 - \lambda_i$  al posto  $(1, 1)$ .

Ne consegue che  $\prod_{i=2}^r (A - \lambda_i I)^{d_i}$  ha un numero  $\neq 0$  nel posto  $(1, 1)$ . Allora, utilizzando l'osservazione ad inizio sezione che garantisce la commutatività del prodotto:

$$(A - \lambda_1 I)^h \prod_{i=2}^r (A - \lambda_i I)^{d_i} = \prod_{i=2}^r (A - \lambda_1 I)^{d_i} (A - \lambda_i I)^h$$

Rappresentando visivamente il prodotto di queste due matrici:

$$\begin{pmatrix} * \neq 0 & & \\ & \ddots & \\ & & * \neq 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al posto  $(1, s)$  otteniamo il valore  $* \neq 0$ , dunque il prodotto complessivo è diverso da zero. Si ha:

$$(t - \lambda_1)^h \prod_{i=2}^r (t - \lambda_i)^{d_i} \notin I_A \text{ se } h < p_1$$

Segue che qualunque blocco di Jordan di ordine non massimo fa sì che il polinomio scritto sopra non appartenga all'ideale di  $A$ , e dunque il più piccolo polinomio che è diviso da  $m_A(t)$  (al quale dunque deve coincidere necessariamente) è  $f(t)$  visto sopra.  $\square$

**COROLLARIO 10.4.1.** Sia  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$ . Allora  $A$  è **diagonalizzabile** se e solo se il suo polinomio minimo ha tutte radici di molteplicità 1.

**DIMOSTRAZIONE.** Per la proposizione precedente, la molteplicità delle radici del polinomio minimo corrisponde alla dimensione del più grande blocco di Jordan di  $A$  relativo a  $\lambda_i$ .

Segue chiaramente che se  $m_{\lambda_i} = 1 \forall i$  l'ordine di tutti i blocchi è 1, dunque  $A$  è diagonalizzabile.

Viceversa, se  $A$  è diagonalizzabile, tutti i blocchi sono di dimensione 1 e questa, per la stessa proposizione di prima, corrisponde alla molteplicità delle radici del polinomio caratteristico.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** La forma di Jordan determina il polinomio minimo e il polinomio caratteristico, ma *non* vale il viceversa. Per esempio, prendiamo le seguenti matrici:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Queste due matrici hanno forme di Jordan *diverse*, ma hanno entrambe:

$$C_A = (t-2)^7 \quad m_A = (t-2)^3 \dim V_2 = 3$$

#### 10.4.5 Impratichiamoci! Forma canonica di Jordan

**TIPS & TRICKS!** ALCUNE NOZIONI UTILI PER IL CALCOLO DELLA BASE E DELLA FORMA DI JORDAN.

1. Per calcolare l'autospazio generalizzato  $\tilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda}$  è sufficiente calcolare, se conosco il massimo ordine  $p$  dei blocchi di Jordan relativi a  $\lambda$ :

$$\tilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda I)^p \quad (10.33)$$

2. Si ha, per le osservazioni fatte nella dimostrazione precedente:

$$\dim S_i - \dim S_{i+1} = \# \text{ blocchi di Jordan di dimensione } i \quad (10.34)$$

3. L'autospazio  $V_\lambda = S_1$  ha come base tutti i vettori aggiunti a partire dalla base di  $S_p$ , compresi i vettori di quest'ultima base; poiché per ognuno di questi vettori abbiamo, per costruzione, un blocco di Jordan relativo a  $\lambda$ , il numero di questi vettori corrisponde al *numero totale di blocchi di Jordan*, cioè la *molteplicità geometrica di  $\lambda$* :

$$\dim V_\lambda = \# \text{ blocchi di Jordan relativi a } \lambda \quad (10.35)$$

4. Per l'osservazione a pag. 169:

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \quad (10.36)$$

5. Per l'osservazione a pag. 178, l'esponente di  $t - \lambda$  nel polinomio minimo  $m_A$  è la dimensione del blocco più grande relativo a  $\lambda$ .

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \quad (10.37)$$

6. Se conosco già le dimensioni dei blocchi di Jordan di  $\lambda$ :

$$a_1 \leq \dots \leq a_r = p$$

mi basta calcolare i sottospazi:

$$S_{a_1} \supseteq \dots \supseteq S_{a_r} = S_p$$

7. Se  $A$  ha un'unico autovalore  $\lambda$ , allora  $V = \tilde{V}_\lambda$  e  $(A - \lambda I)^p = 0$ . In particolare segue che:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \quad \exists \mathbf{u} \in (A - \lambda I)^{p-1} : (A - \lambda I)^{p-1} \mathbf{u} &= \mathbf{v} \\ \implies \mathbf{0} = (A - \lambda I)^p \mathbf{u} = (A - \lambda I) \mathbf{v} \\ \implies \mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I) \\ \implies \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \subseteq \ker(A - \lambda I) \\ \implies S_p = \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \cap \ker(A - \lambda I) &= \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \end{aligned}$$

Pertanto, nel caso  $S_p$  non c'è bisogno di intersecare con  $V_\lambda$ ! Questo tuttavia non si applica agli altri  $S_i$ , dato che non vale la relazione  $\text{Im}(A - \lambda I)^i \subseteq \ker(A - \lambda I)$ .

8. Se so che per  $\lambda$  tutti i blocchi di Jordan hanno la stessa dimensione  $p$ , possiamo calcolare direttamente  $S_p = \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \cap V_\lambda$ .

**ESERCIZIO.** Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcolare la sua forma di Jordan e la base per cui essa è in tale forma.

**SOLUZIONE.** Il suo polinomio caratteristico è  $C_A(t) = (t - 2)^3$  e  $\lambda = 2$  è l'unico autovalore, con molteplicità algebrica  $m_\lambda = 3$ . Studiamo l'autospazio:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Il rango è  $\text{rk}(A - 2I) = 1$  e la molteplicità geometrica è pertanto  $\dim V_2 = 2$ . Notiamo che le possibili forme di Jordan di una matrice  $3 \times 3$  con unico autovalore 2 sono:

3 blocchi,  $\dim V_2 = 3$  2 blocchi,  $\dim V_2 = 2$  1 blocco,  $\dim V_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Come osservato precedentemente, la molteplicità geometrica di  $\lambda$  dà il numero di blocchi di Jordan della matrice, pertanto ho sicuramente due blocchi di Jordan e, avendo fatto tutti i casi, sappiamo senza altri calcoli che il blocco massimo ha ordine  $p = 2$ . La situazione in termini di spazi  $S_i$ , è:

$$V_2 = S_1 \supseteq S_2 = \operatorname{Im}(A - 2I)$$

Avendo un unico autovalore, nel caso  $S_2$  non abbiamo bisogno di calcolare l'intersezione con l'autospazio. Dunque, cerchiamo una base di  $S_2 = \operatorname{Im}(A - 2I)$ . Sappiamo già che la sua base è di un solo vettore, dato che  $\operatorname{rk}(A - 2I) = 1 = \dim \operatorname{Im}(A - 2I)$ . Essendo l'immagine, possiamo prendere un vettore colonna della matrice  $A - 2I$ , che definiremo  $x_1^1$ ; ad esempio, prendiamo la prima colonna:

$$x_1^1 = (6, 0, 9)$$

Per la scelta effettuata, per costruire  $x_1^2$  ci è sufficiente prendere il vettore  $(1, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= (6, 0, 9) = (A - 2I)(1, 0, 0) \\ x_1^2 &= (1, 0, 0) \end{aligned}$$

Allora  $\{x_1^1, x_1^2\}$  dà il blocco di Jordan di ordine 2.

Completiamo  $\{x_1^1\}$  ad una base di  $V_2$ . Esplicitando l'autospazio:

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \{3x + 3y + 2z = 0\}$$

Possiamo scegliere ad esempio  $(-1, 1, 0)$ , ottenendo allo stesso tempo il vettore che dà il blocco di ordine 1 di Jordan. La base che rende  $A$  in forma di Jordan è:

$$\{(6, 0, 9), (1, 0, 0), (-1, 1, 0)\}$$

#### **ESERCIZIO.** ESERCIZIO 4, SCRITTO LUGLIO 2018

Sia  $A$  matrice quadrata complessa  $6 \times 6$ . Dire quali delle seguenti affermazioni possono verificarsi, motivando la risposta.

1. Il polinomio minimo di  $A$  è  $(t - 2)^5$ , l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3.
2. Il polinomio minimo di  $A$  è  $(t - 2)(t - 3)^3$ , l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3.
3.  $A$  ha polinomio caratteristico  $(t - 2)^6$  e  $A^2 - A - I = O$ .
4.  $A^2 - A - I = O$  e  $A$  ha autovalori *non* reali.

#### **SOLUZIONE.**

- I  $A$  ha un unico autovalore 2, di molteplicità algebrica 6, dunque il più grande blocco di Jordan nella forma di Jordan di  $A$  ha dimensione 5; poiché la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è la molteplicità geometrica, segue che il numero di blocchi relativi a 2 sono 3.  
Non si può dunque verificare, in quanto con la condizione di avere un blocco di dimensione 5 non ci può essere più di un solo blocco di dimensione 1.
- II  $A$  ha autovalori 2 e 3, di molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 3, dunque il più grande blocco di Jordan nella forma di Jordan di  $A$  riferito a 2 ha dimensione

1, mentre quello riferito a 3 è 3; poiché la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è la molteplicità geometrica, segue che il numero di blocchi relativi a 2 sono 3.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

III Si ha:

$$\begin{cases} \blacksquare f(t) = t^2 - t - 1 \\ \blacksquare f(A) = O \end{cases} = f(t) \in I_A$$

Tuttavia  $f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_1)$ . Dunque, consideriamo:

$$m_A(t) \mid f(t) \implies m_A(t) = \begin{cases} t - \lambda_1 \\ t - \lambda_2 \\ f(t) \end{cases}$$

Inoltre,  $m_A(t) \mid C_A(t) = (t - 2)^6$ .

Notiamo che:

$$f(2) = 4 - 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Poiché  $\lambda = 2$  è l'unico autovalore di  $A$  ed  $f \in I_A$ , si avrebbe  $f(2) = 0$ , cioè abbiamo un assurdo.

IV Si ha  $f(t) = t^2 - t - 1 \in I_A$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ sono entrambe non reali.}$$

Allora  $f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_1)$  e, per le osservazioni del punto precedente:

$$m_A(t) = \begin{cases} t - \lambda_1 \\ t - \lambda_2 \\ f(t) \end{cases}$$

Allora, gli autovalori di  $A$  possono essere solo  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , dunque  $A$  non può avere autovalori complessi.

## 10.5 FUNZIONE ESPONENZIALE NEI COMPLESSI

La **funzione esponenziale**  $e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) si può *caratterizzare* in diversi modi; sia con il concetto di limite:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Oppure come il valore della serie di potenze:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Vogliamo ora definire una funzione analoga anche in campo complesso.

**DEFINIZIONE 10.5.0.** FUNZIONE ESPONENZIALE SUI NUMERI COMPLESSI.

Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Definiamo come **funzione esponenziale sui numeri complessi** la seguente serie:

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (10.38)$$

Essa è una funzione continua.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che sia ben definita la funzione mostrando la convergenza della serie. In realtà possiamo mostrare che la serie **converge assolutamente**<sup>a</sup>. Dunque, con i complessi consideriamo il *modulo*  $|\cdot|$ :

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \quad (10.39)$$

Questa serie nei reali converge ad  $e^{|z|}$ : la serie pertanto converge assolutamente e dunque la funzione è ben definita; se  $z \in \mathbb{R}$  allora l'esponenziale è in tutto e per tutto quello noto nei reali.

Studiamo ora la continuità, dimostrando che **converga uniformemente**<sup>b</sup> in qualunque sottoinsieme limitato, utilizzando l'M-test di Weierstrass. Se  $S \subseteq \mathbb{C}$  è un sottoinsieme limitato, sicuramente esso è sottoinsieme di un disco nel piano complesso di centro l'origine e raggio  $\varepsilon$ . Dunque,  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : |z| < \varepsilon \forall z \in S$ . Allora varrà:

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{\varepsilon^n}{n!}$$

Passando alle serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} < \infty$$

Allora la funzione esponenziale converge uniformemente su  $S$ , dunque:

$$e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

È continua. □

<sup>a</sup>Si può parlare di convergenza assoluta in spazi topologici dotati di una *norma*; si ha che la convergenza implica la convergenza "classica" se lo spazio è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

<sup>b</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 276, si può trovare la definizione della convergenza uniforme e alcune osservazioni a riguardo.

**PROPOSIZIONE 10.5.0.** L'esponenziale in campo complesso gode delle seguenti proprietà:

1.  $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ .
2.  $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ .
3. Se  $t \in \mathbb{R}$ , si ha  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

**DIMOSTRAZIONE.**I Dati  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
e^z \cdot e^w &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \stackrel{a}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}}_{n=k+m} = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Binomio di Newton}} \\
&\implies e^z \cdot e^w = e^{z+w}
\end{aligned}$$

II  $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ .

III Si ha:

$$\begin{aligned}
e^{it} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (t)^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (t)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos t + i \sin t
\end{aligned}$$

□

<sup>a</sup>Il prodotto è lecito in quanto si ha la convergenza assoluta della serie.**OSSERVAZIONI.**

- $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \implies |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$   
L'argomento di  $e^z$  è, per costruzione,  $y = \operatorname{Im} z$ .
- $e^{2\pi i} = 1$ , mentre  $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ .
- $e^z \neq 0$ , dunque  $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists z \in \mathbb{C} : e^z = w$ , cioè  $e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Infatti, se  $w = x + iy$  si può scrivere in forma polare come:

$$w = |w|(\cos y + i \sin y)$$

Notiamo che:

- ◇  $w = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$ , dunque anche il modulo è zero se e solo se  $x$  e  $y$  sono entrambi zero.
- ◇  $|w| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$ , dunque per suriettività dell'esponenziale reale  $\exists a \in \mathbb{R}$  tale per cui  $e^a = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- ◇ L'argomento di  $w$  è  $\arg(w) = y$
- ◇  $(\cos y + i \sin y) = e^{iy}$ .

Allora, esiste  $z = a + iy$  tale che:

$$w = x + iy = |w|(\cos y + i \sin y) = e^a (\cos y + i \sin y) = e^{a+iy} = e^z$$

10.5.1 *Esponenziale di una matrice quadrata complessa***DEFINIZIONE 10.5.1.** ESPONENZIALE DI UNA MATRICE QUADRATA COMPLESSA.

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$ . Definiamo l'**esponenziale di una matrice quadrata complessa** come:

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{A^k}{k!}}_{\text{matrice } n \times n} \quad e^A \in \mathbb{C}^{n, n} \quad (10.40)$$

Questa serie di matrici converge se e solo se convergono *tutte* le serie che danno origine ai suoi  $n^2$  elementi. Per dimostrare la convergenza, usiamo una norma particolare.

**DEFINIZIONE 10.5.2.** NORMA INFINITO DI UNA MATRICE.

La **norma infinito di una matrice**  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  è:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i, j=1, \dots, n} |a_{ij}| \quad (10.41)$$

**LEMMA 10.5.0.** PROPRIETÀ DELLA NORMA INFINITO DI UNA MATRICE.

Date le matrici  $n \times n$   $A$  e  $B$ :

1.  $\|A + B\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}$ .
2.  $\|A \cdot B\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty}$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- I  $\forall i, j \quad |a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}| \leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}$ . Per l'arbitrarietà di  $i$  e  $j$ , vale la tesi.
- II Sia  $C = AB$ . Allora:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \\ \Rightarrow |c_{ij}| &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty} \quad \forall i, j \Rightarrow \|C\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty} \quad \square \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che l'esponenziale di una matrice complessa sia ben definito. Consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \|A^2\|_{\infty} &\leq n \|A\|_{\infty}^2 \\ \|A^3\|_{\infty} &\leq n \|A^2 \cdot A\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty}^2 \|A\|_{\infty} \leq n^2 \|A\|_{\infty}^3 \end{aligned}$$

Per induzione in questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right\|_{\infty} &\leq \sum_{k=0}^N \frac{\|A^k\|_{\infty}}{k!} \leq \sum_{k=0}^N \frac{n^{k-1} \|A\|_{\infty}^k}{k!} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \frac{(n \|A\|_{\infty})^k}{k!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n \|A\|_{\infty})^k}{k!} = \frac{1}{n} e^{n \|A\|_{\infty}} \end{aligned}$$



Allora  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  converge assolutamente, pertanto  $e^A$  è ben definito.  $\square$

**ATTENZIONE!** In generale si ha  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ ! Infatti, il prodotto di matrici non è *commutativo*, pertanto in generale non vale la formula del *binomio di Newton*, necessaria nella dimostrazione della proprietà di cui sopra.

**ESEMPIO.** Siano  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$A$  è una *matrice diagonale*, dunque  $e^A$  è facile da calcolare; infatti, presa una qualunque matrice diagonale  $D$ :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^D = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_n} \end{pmatrix} \quad (10.42)$$

Dunque, nel nostro caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Invece,  $B$  è *nilpotente* di ordine due, dato che  $B^2 = O$ . Allora, scrivendo la serie che caratterizza  $e^B$ , tutti i termini successivi al secondo sono nulli! Pertanto:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!} = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora:

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

D'altro canto, abbiamo che:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificheremo successivamente (pag. 190), quando mostreremo come calcolare in generale l'esponenziale di una matrice, che  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ .

**LEMMA 10.5.1.** Se  $A, B \in \mathbb{C}^{n, n}$  *commutano*, cioè  $AB = BA$ , allora:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad (10.43)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è assolutamente analoga a quella vista per dimostrare la proprietà parallela dell'esponenziale dei numeri complessi (lemma 10.3, pag. 184), dato che, se commutano, vale il *binomio di Newton matriciale*:

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i \cdot B^{k-i} \quad (10.44)$$

□

**OSSERVAZIONE.** *Matrici simili hanno esponenziali simili.* Più precisamente, se  $A = P^{-1}BP$  per una opportuna matrice ortogonale  $P$ , allora  $e^A = P^{-1}e^B P$ , cioè  $e^A$  e  $e^B$  sono simili tramite la stessa matrice  $P$  di  $A$  e  $B$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si ha:

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}BP \\ A^2 &= (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^2P \end{aligned}$$

Per induzione in questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} A^k &= P^{-1}B^kP \\ \Rightarrow e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}B^kP}{k!} = P^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} P = P^{-1}e^B P \end{aligned}$$

□

**TEOREMA 10.5.0.** Si ha:

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)} \quad (10.45)$$

In particolare,  $e^A$  è sempre una matrice invertibile.

**DIMOSTRAZIONE.** Una qualunque matrice  $A$  complessa è simile alla sua forma di Jordan  $J$ . La traccia di matrici simili, per commutatività interna della traccia<sup>a</sup>, è uguale:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(J) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

Per la dimostrazione precedente,  $e^A$  è simile a  $e^J$ ; in particolare, i determinanti sono uguali:

$$\det(e^A) = \det(e^J)$$

Allora è sufficiente dimostrare che  $\det(e^J) = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}$ .  $J$  è una matrice triangolare superiore. Le osservazioni seguenti sono vere anche per una qualsiasi matrice triangolare superiore:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \forall k \geq 1 \quad J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^J = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto sulle colonne, dunque vale  $\det(e^J) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}$  come cercato. In particolare, questo prodotto, in quanto *prodotto di esponenziali*, non è mai nullo e dunque il determinante è *diverso da zero*.  $\square$

<sup>a</sup>Per ogni matrice  $A$  di dimensioni  $n \times m$  e  $B$  di dimensioni  $m \times n$  si ha  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

### 10.5.2 Calcolo dell'esponenziale di una matrice tramite la forma di Jordan

Abbiamo già calcolato alcuni esponenziali di matrici in diverse delle precedenti dimostrazioni, sfruttando tuttavia sempre matrici particolari:

■ **Matrice diagonale:**

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_n} \end{pmatrix} \quad (10.47)$$

■ **Matrice nilpotente:** se la matrice è nilpotente di ordine  $k$  ( $B^k = O$ ) si calcolano i primi  $k$  termini della serie caratterizzante  $e^B$ :

$$e^B = \sum_{i=0}^{i-1} \frac{B^i}{i!} = I + B + \dots + \frac{B^{k-1}}{(k-1)!} \quad (10.48)$$

In generale, tuttavia, come possiamo calcolare l'esponenziale di una generica matrice  $A$ ? A questo proposito ci viene in aiuto la tanto faticata forma di Jordan. Il seguente processo costruttivo ci permette di calcolare, in modo (relativamente) facile, un qualsiasi esponenziale  $e^A$ .

1.  $A$  è simile alla sua forma di Jordan  $J$ :

$$A = PJP^{-1}$$

Con  $P$  è la matrice del cambiamento di base che presenta, nelle colonne, la base che mette  $A$  in forma di Jordan. Sappiamo allora che per la stessa matrice  $P$  gli esponenziali sono simili:

$$e^A = Pe^JP^{-1}$$

Allora è sufficiente calcolare  $P$ ,  $J$  e  $e^J$ .

2.  $J$  è una matrice a blocchi diagonali, dunque la potenza  $k$ -esima è una matrice con le potenze  $k$ -esime dei blocchi sulla diagonale:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{\mathbf{B}_r} \end{pmatrix} J^k = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{\mathbf{B}_r^k} \end{pmatrix}$$

Dunque usando la definizione, segue che, l'esponenziale è anch'essa una matrice a blocchi:

$$e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{B_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \boxed{e^{B_r}} \end{pmatrix}$$

Dunque, per calcolare l'esponenziale di una matrice in forma di Jordan basta saper calcolare l'esponenziale di un blocco di Jordan.

3. Notiamo che un blocco di ordine  $p$  si può sempre scomporre in una matrice diagonale  $\lambda I_p$  e una matrice nilpotente  $N$  di soli 1.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I_p + N$$

Poiché  $N$  e  $\lambda I_p$  commutano, vale:

$$e^{\mathbf{B}} = e^{\lambda I + N} = e^{\lambda I} e^N \quad (10.49)$$

Dunque basta calcolare  $e^{\lambda I}$  e  $e^N$ , ma sono due matrici di sappiamo già come calcolare l'esponenziale:

- $e^{\lambda I}$  è una *matrice diagonale*:

$$e^{\lambda I} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda I \quad (10.50)$$

- $e^N$  è una *matrice nilpotente* di ordine  $p$ :

$$e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = I + N + \dots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \quad (10.51)$$

**ESEMPIO.** Riprendiamo l'esempio di pagina 187. Prendiamo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e consideriamo  $C = A + B = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  
 $C$  ha autovalori 1 e 2 ed è diagonalizzabile con  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; una base di autovettori di  $C$  è  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$  e la matrice del cambiamento di basi è  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Allora,

considerata l'inversa  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$C = PDP^{-1} \implies e^C = Pe^DP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -e + e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} (I + B) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^C$$

### 10.5.3 Impraticchiamoci! Funzione esponenziale nei complessi

**ESERCIZIO.** ESERCIZIO 4, SCRITTO FEBBRAIO 2018

Sia  $A = e^{\lambda I} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcolare  $\exp(A) = e^A$ .

**SOLUZIONE.** Il polinomio minimo è  $C_A(t) = (t+1)^2$ , l'unico autovalore della matrice è  $\lambda = -1$  con molteplicità  $m_\lambda = 2$ . Troviamo la forma di Jordan.

$$V_\lambda = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(x, y) \mid x - 2y = 0\} = \langle (2, 1) \rangle$$

Poiché  $\dim V_\lambda = 1$ , segue che la forma di Jordan è un unico blocco di ordine  $p = 2$ :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora una matrice  $P$ , e dunque una base  $\mathcal{B}$ , che mette  $A$  in forma di Jordan ( $A = PJP^{-1}$ ). Poiché abbiamo un unico autovalore,  $(A - \lambda I)^2 = O$  e  $\text{Im}(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)$ . Studiamo  $S_2 = \ker(A + I) \cap \text{Im}(A + I)^{p-1} = \text{Im}(A + I)$ ; esso ha  $\dim S_2 = 1$  e per trovarne una base basta prendere una colonna di  $A + I$ :

$$v_2 = (2, 1) =$$

Per costruire  $v_1$  è sufficiente prendere  $(-1, 0)$ :

$$v_2 = (2, 1) = (A + I)(-1, 0)$$

$$v_1 = (-1, 0)$$

Una base che mette  $A$  in forma di Jordan è dunque  $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 0)\}$  e dunque abbiamo  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inversa è, noto il determinante  $\det P = 1$ :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo  $e^J$ :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -I + N$$

Dunque:

$$\begin{aligned} e^J &= e^{-I+N} = e^{-I} e^N = e^{-1} I (I + N) = e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow e^A &= e^{-1} P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un metodo alternativo per calcolare la base  $\mathcal{B}$  che rende  $A$  in forma di Jordan è il seguente. Nota la forma di Jordan  $J$  consideriamo l'applicazione lineare  $f$  associata ad essa rispetto alla base  $\mathcal{B}$  e l'applicazione  $g = f + Id$ ; esse devono soddisfare:

$$\begin{cases} f(v_1) = -v_1 \\ f(v_2) = v_1 - v_2 \end{cases} \quad \begin{cases} g(v_1) = 0 \\ g(v_2) = v_1 \end{cases}$$

Cerchiamo dei vettori tali che:

$$\begin{aligned} v_2 &\in \ker(A + I)^2 \setminus \ker(A + I) \\ v_1 &\in \ker(A + I) \end{aligned}$$

Poichè  $v_2 \in \ker(A + I)^2 = V$ , basta prendere un vettore della base canonica di  $V$ , ad esempio  $e_1 = (1, 0, 0)$ , che non appartenga a  $\ker(A + I)$ . Allora:

$$\begin{aligned} v_2 &:= e_1 = (1, 0) \\ v_1 &= g(v_2) = (A + I)v_2 = g(v_2) = (-2, -1) \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice  $P$  risulta:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che usando questa matrice  $P$  si arriva comunque allo stesso esponenziale visto prima.

In questo problema si può anche evitare il calcolo della forma di Jordan. Infatti, notando che la matrice  $B = A + I$  è nilpotente di ordine 2, ovvero  $B^2 = O$ , e commuta con  $-I$ . Allora possiamo calcolare  $e^A$  in questo modo:

$$e^A = e^{B-I} = e^B \cdot e^{-I} = e^{-1} (I + B) = e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

## 10.6 MATRICI REALI E FORMA DI JORDAN

Abbiamo studiato le forme di Jordan in  $\mathbb{C}^{n,n}$ , dato che abbiamo la sicurezza dell'esistenza di tutti gli autovalori e dunque anche della forma di Jordan. E se la matrice fosse a valori reali, possiamo parlare di forma di Jordan in  $\mathbb{R}^{n,n}$ ?

Dato che la forma di Jordan associata ad una matrice ha sulla diagonale gli autovalori di  $A$  con molteplicità e al di fuori di essa o zero o uno, possiamo fare la seguente osservazione.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $J$  la forma di Jordan di  $A$ . Allora  $J$  è reale se e solo se gli autovalori di  $A$  sono reali.

Supponiamo che  $A$  abbia autovalori reali e  $J$  sia la sua forma di Jordan. Allora  $\exists P \in GL(n, \mathbb{C})$  tale che esse siano simili per  $P$  in campo complesso:  $A = PJP^{-1}$ . In realtà, si può dimostrare come  $A$  e  $J$  siano simili come matrici reali, cioè  $\exists Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tale che  $A = QJQ^{-1}$

**TEOREMA 10.6.0.** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{n, n}$  tali che  $\exists P \in GL(n, \mathbb{C}) : A = PBP^{-1}$ . Allora  $\exists Q \in GL(n, \mathbb{R}) : A = QBQ^{-1}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Innanzitutto,  $A = PBP^{-1}$  se e solo se  $AP = PB$ . Consideriamo le soluzioni  $X$ , matrice  $n \times n$  a coefficienti reali, del sistema lineare omogeneo in  $n^2$  equazioni in  $n^2$  incognite.

$$AX = XB$$

Sia  $W \subseteq \mathbb{C}^{n, n}$  il sottospazio *vettoriale* delle soluzioni (*complesse*) del sistema. Sappiamo già che  $P \in W$ , dunque  $W \neq \{O\}$ .

Sia allora  $k = \dim W \geq 1$  e sia  $C_1, \dots, C_k \in \mathbb{C}^{k, k}$  una base di  $W$ . Esse sono matrici complesse, dunque possiamo scomporla nella sua parte reale e immaginaria.

$$\forall j = 1, \dots, k \quad C_j = X_j + iY_j, \quad X_j, Y_j \in \mathbb{R}^{n, n}$$

Mostriamo che anche  $X_j$  e  $Y_j$  sono soluzioni del sistema. Dunque, presa  $C_j$ :

$$\begin{array}{ccc} AC_j & = & C_j B \\ \parallel & & \parallel \\ A(X_j + iY_j) & & (X_j + iY_j)B \\ \parallel & & \parallel \\ AX_j + AY_j & & X_j B + iY_j B \end{array}$$

Le matrici  $AX_j$ ,  $AY_j$ ,  $X_j B$  e  $Y_j B$  sono tutte in  $\mathbb{R}^{n, n}$ . Due matrici complesse scomposte come in precedenza sono uguali se e solo se la parte reale e l'argomento sono uguali:

$$\begin{aligned} AX_j &= X_j B \\ AY_j &= Y_j B \end{aligned}$$

Ma allora  $X_j, Y_j \in W \forall j$ ; poiché  $C_1, \dots, C_k$  è una base di  $W$ , allora lo generano. Per costruzione  $C_j = X_j + iY_j$ , dunque anche  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k$  generano  $W$  (come spazio vettoriale *complesso*).

Sicuramente  $\{X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k\}$  contiene una base di  $W$ , cioè  $\exists D_1, \dots, D_k$  base  $\mathcal{D}$  di  $W$  con  $D_j \in \mathbb{R}^{n, n} \forall j$ .

Dalle condizioni in cui ci siamo posti, la matrice  $Q$  cercata deve soddisfare i seguenti requisiti:

- $Q \in W$ .
- $Q \in \mathbb{R}^{n, n}$ .
- $Q$  invertibile.

Rispetto alla base  $\mathcal{D}$ , Ogni  $D \in W$  è della forma:

$$D = t_1 D_1 + \dots + t_k D_k \quad \text{con } t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}^{n, n}$$

Nel caso di matrici reali, i coefficienti  $t_1, \dots, t_k$  saranno *tutti reali*. Poniamo:

$$f(t_1, \dots, t_k) := \det(t_1 D_1 + \dots + t_k D_k)$$

La funzione, di variabili  $t_1, \dots, t_k$ , è un polinomio che presenta *solo coefficienti reali* (essendo  $D_1, \dots, D_k$  matrici reali) e non è *identicamente nulla* (Per ipotesi  $P \in W$  è

invertibile, dunque  $\det P \neq 0$ ). In particolare, esistono dei valori *reali*  $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_k$  per cui  $f$  non si annulla<sup>a</sup>, cioè esiste la matrice reale:

$$Q := \hat{t}_1 D_1 + \dots + \hat{t}_k D_k$$

Che soddisfa la tesi. □

---

<sup>a</sup>Infatti, presa una combinazione lineare degli elementi di una base come  $\mathcal{D}$  con coefficienti reali non nulli, allora essa non sarà mai nulla.





# GEOMETRIA PROIETTIVA



## GEOMETRIA PROIETTIVA

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Abbiamo già trattato lo *spazio proiettivo reale* e le sue caratteristiche nel Capitolo 5 e Capitolo 9. In questo, ci dedicheremo a generalizzare il concetto per un *qualsiasi* spazio vettoriale su campo  $\mathbb{K}$ , utilizzando gli strumenti dell'algebra lineare.

Parliamo dunque di **Geometria proiettiva**: come in topologia studiavamo le proprietà degli spazi topologici invarianti per omeomorfismi, lo scopo della geometria proiettiva è studiare quelle degli **spazi proiettivi** invarianti per **proiettività**.

## 11.1 SPAZI PROIETTIVI

**DEFINIZIONE 11.1.0.** SPAZIO PROIETTIVO.

Sia  $\mathbb{K}$  un campo e  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione *finita* su  $\mathbb{K}$ . Lo **spazio proiettivo** associato a  $V$  è l'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^n(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim} \quad (11.1)$$

Dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza data su  $V \setminus \{0\}$  definita dall'azione del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ :

$$\forall v, w \in V \setminus \{0\} \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : v = \lambda w \quad (11.2)$$

Lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n(V)$  si dice anche il **proiettivizzato** di  $V$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che è una relazione di equivalenza:

- **RIFLESSIVA:**  $v \sim v$ ? Basta porre  $\lambda = 1$ , in quanto  $x = 1 \cdot x$ .
- **SIMMETRICA:** Per ipotesi  $y = \lambda x$ , allora  $x = \frac{1}{\lambda} y$  ( $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ).
- **TRANSITIVA:** Poichè  $y = \lambda x$ ,  $z = \mu y$ , segue  $z = \mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$  e  $\mu\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . □

**DEFINIZIONE 11.1.1.** DIMENSIONE DI UNO SPAZIO PROIETTIVO.

La **dimensione** di  $\mathbb{P}^n(V)$  è:

$$\dim \mathbb{P}^n(V) = \dim V - 1 \quad (11.3)$$

Se  $V = \{0\}$ , allora  $\mathbb{P}^n(V) = \emptyset$  e si pone  $\dim \emptyset := -1$ .

**DEFINIZIONE 11.1.2.** PROIEZIONE AL QUOZIENTE E CLASSE.

Si denota con  $\pi : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$  la **proiezione al quoziente** e con  $[v] \in \mathbb{P}^n(V)$  la **classe** di  $v \in V \setminus \{0\}$ .

**OSSERVAZIONE.** Si ha una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(V) &\leftrightarrow \{\text{sottospazi vettoriali 1-dimensionali di } V\} \\ [v] &\leftrightarrow \mathcal{L}(v) \end{aligned} \quad (11.4)$$

In altre parole, possiamo pensare a  $\mathbb{P}^n(V)$  come l'insieme delle **rette vettoriali** in  $V$ .

**DEFINIZIONE 11.1.3.** ALTRE NOMENCLATURE PROIETTIVE.

- Se  $\dim V = 1$ , allora  $\mathbb{P}^n(V)$  è un **punto** e  $\dim \mathbb{P}^n(V) = 0$ .
- Se  $\dim \mathbb{P}^n(V) = 1$ , si parla di **retta proiettiva**.
- Se  $\dim \mathbb{P}^n(V) = 2$ , si parla di **piano proiettivo**.
- Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , si parla rispettivamente di **spazio proiettivo reale** o di **spazio proiettivo complesso**.

Gli esempi più frequenti di spazi proiettivi si ottengono considerando  $V = \mathbb{K}^{n+1}$ .

**DEFINIZIONE 11.1.4.** SPAZIO PROIETTIVO NUMERICO.

Lo **spazio proiettivo numerico** o **spazio proiettivo standard** è lo spazio proiettivo su  $\mathbb{K}^{n+1}$ :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^{n+1}) \quad (11.5)$$

Essi sono spazi di dimensione  $\dim \mathbb{P}^n = n$ .

## 11.2 SOTTOSPAZI PROIETTIVI

Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio vettoriale. Allora  $W \setminus \{0\} \subseteq V \setminus \{0\}$  è chiuso rispetto alla relazione di equivalenza  $\sim$  precedentemente definita e  $\mathbb{P}^n(W)$  è naturalmente un sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n(V)$ .

**DEFINIZIONE 11.2.0.** SOTTOSPAZIO PROIETTIVO.

Se  $W \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale, allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è detto **sottospazio proiettivo**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(W) &= \pi(W \setminus \{0\}) = \{[w] \in \mathbb{P}^n(V) \mid w \in W\} \\ &= \{\text{sottospazi vettoriale 1-dimensione di } V \text{ contenuti in } W\} \end{aligned}$$

La dimensione del sottospazio proiettivo è  $\dim \mathbb{P}^n(W) = \dim W - 1$ .

- Se  $W = \{0\}$ , allora  $\mathbb{P}^n(W) = \emptyset$ .
- Se  $\dim W = 1$ , allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è un punto, che indichiamo con  $[w]$  per un  $w \in W$ .

- Se  $\dim W = 2$  ( $\dim \mathbb{P}^n(W) = 1$ ), allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è **retta proiettiva** in  $\mathbb{P}^n(V)$ .
- Se  $\dim W = 3$  ( $\dim \mathbb{P}^n(W) = 2$ ), allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è **piano proiettivo** in  $\mathbb{P}^n(V)$ .
- Se  $\dim \mathbb{P}^n(W) = \dim \mathbb{P}^n(V) - 1$ , allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è **iperpiano (proiettivo)** in  $\mathbb{P}^n(V)$ .

**DEFINIZIONE 11.2.1. CODIMENSIONE.**

Si definisce la **codimensione** di  $\mathbb{P}^n(W)$  sottospazio proiettivo come:

$$\text{Codim } \mathbb{P}^n(W) = \dim \mathbb{P}^n(V) - \dim \mathbb{P}^n(W) \quad (11.6)$$

**ESEMPIO.** Gli iperpiani sono sottospazi di codimensione 1.

## 11.3 COORDINATE OMOGENEE E SISTEMI DI RIFERIMENTO PROIETTIVO

Consideriamo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^{n+1})$ . Se  $v = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ , denotiamo la corrispondente classe in questa forma:

$$[v] = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \quad x_i \in \mathbb{K} \quad (11.7)$$

**OSSERVAZIONI.**

1. Le  $x_i$  non possono mai essere tutte nulle, dato che  $v \neq 0$ .
2. Due classi sono uguali se le componenti sono tutte in proporzione per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{K}$ .<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} (x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n) &\iff (x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : y_0 = \lambda x_0, \dots, y_n = \lambda x_n \end{aligned}$$

<sup>a</sup>La notazione con  $i$  : viene utilizzata per mettere in evidenza che la relazione fra classi e vettori è di proporzione.

**ESEMPLI.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} (1 : 1 : 2) &= (-2 : -2 : -4) \\ (1 : 0 : 2) &= \left(\frac{1}{3} : 0 : \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE 11.3.0. RIFERIMENTO PROIETTIVO E COORDINATE OMOGENEE.**

Sia  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  una base di  $V$ , con  $\dim V = n + 1$ . Se  $v \in V \setminus \{0\}$ , si ha:

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n, \text{ con } x_i \in \mathbb{K}$$

Diciamo che  $(x_0 : \dots : x_n)$  sono le **coordinate omogenee** di  $[v] \in \mathbb{P}^n(V)$  definite dalla base  $\mathcal{B}$  e scriviamo:

$$[v] = (x_0 : \dots : x_n) \quad (11.8)$$

La base  $\mathcal{B}$  definisce su  $\mathbb{P}^n(V)$  un **sistema di riferimento proiettivo**, cioè ad ogni punto vengono assegnate delle coordinate omogenee.

**OSSERVAZIONI.**

- Le coordinate omogenee non possono *mai* essere *tutte nulle*.
- Le coordinate omogenee sono definite *solo a meno di multipli*.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ha delle coordinate omogenee “naturalì” date dalla base canonica di  $\mathbb{K}^{n+1}$ .
- Basi *multiple* definiscono lo stesso riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}^n(V)$ , cioè le stesse coordinate omogenee.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l’ultimo punto. Siano:

$$\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\} \quad \mathcal{B}' = \{\mu e_0, \dots, \mu e_n\}$$

Con  $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Si ha:

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = \frac{x_0}{\mu} (\mu e_0) + \dots + \frac{x_n}{\mu} (\mu e_n)$$

Passando allo spazio proiettivo:

$$\underbrace{(x_0 : \dots : x_n)}_{\text{coordinate omogenee rispetto a } \mathcal{B}} = \underbrace{\left( \frac{x_0}{\mu} : \dots : \frac{x_n}{\mu} \right)}_{\text{coordinate omogenee rispetto a } \mathcal{B}'}$$

□

**DEFINIZIONE 11.3.1.** PUNTI FONDAMENTALI E PUNTO UNITÀ.

Data la base  $\mathcal{B}$ , i punti:

$$\begin{aligned} P_0 &= [e_0] = (1 : 0 : \dots : 0) \\ P_1 &= [e_1] = (0 : 1 : \dots : 0) \\ &\dots \\ P_n &= [e_n] = (0 : 0 : \dots : 1) \end{aligned} \tag{11.9}$$

Sono detti **punti fondamentali** o **punti coordinati**, mentre il punto:

$$U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n] = (1 : 1 : \dots : 1)$$

È detto **punto unità**.

**11.3.0.1** Descrizione dei sottospazi proiettivi in coordinate

Siano  $(x_0 : \dots : x_n)$  coordinate omogenee su  $\mathbb{P}^n(V)$ , indotte da una base  $\mathcal{B}$ , e consideriamo l’equazione lineare omogenea:

$$\textcircled{*} \quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

Con  $a_i \in \mathbb{K}$  non tutti nulli.

- In  $V$  l’equazione omogenea rappresenta un *iperpiano vettoriale*  $H$ .
- I punti  $P = [v] \in \mathbb{P}^n(V)$ , le cui coordinate soddisfano l’equazioni, sono quelli tali per cui  $v \in H$ , cioè sono tutti e soli i punti dell’iperpiano proiettivo  $\mathbb{P}^n(H) \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ . L’equazione lineare  $\textcircled{*}$  è l’**equazione (cartesiana) dell’iperpiano proiettivo**  $\mathbb{P}^n(H)$ .

**DEFINIZIONE 11.3.2. IPERPIANO COORDINATO.**

Gli iperpiani di equazione cartesiana  $x_i = 0$ , cioè tutti i punti la cui  $i$ -esima coordinata omogenea è nulla, si dicono  **$i$ -esimi iperpiani coordinati**.

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , cioè una *retta proiettiva* ( $\dim \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = 1$ ), i sottospazi proiettivi sono:

- $\emptyset$ .
- I punti, che in questo caso sono gli iperpiani.
- Tutto  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ .

Il punto  $(a : b)$  ha equazione cartesiana:

$$bx_0 - ax_1 = 0 \quad (11.10)$$

Ovvero l'equazione della retta in  $\mathbb{K}^2$  generata dal vettore  $(a, b)$ , ottenuta pertanto dal determinante  $\begin{vmatrix} a & b \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = 0$ .

**ATTENZIONE!** In  $\mathbb{P}^n(V)$  un sottospazio proiettivo di *dimensione zero* è un singolo punto  $[v] = \mathbb{P}^n(\mathcal{L}(v))$ .

Più in generale: fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $V$ , ogni *sottospazio vettoriale*  $W$  di  $V$  può essere visto, in *coordinate* rispetto alla base, come l'*insieme delle soluzioni* di un *sistema lineare omogeneo*.

$$Ax = 0$$

Dove  $A = (a_{ij})$  è di dimensioni  $t \times (n+1)$  a elementi in  $\mathbb{K}$ , mentre si ha:

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

$$\textcircled{*} \begin{cases} a_{1,0}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{t,0}x_0 + \dots + a_{t,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (11.12)$$

Il sistema  $\textcircled{*}$  dà delle *equazioni cartesiane* per il sottospazio proiettivo  $\mathbb{P}^n(W)$  nelle coordinate omogenee  $(x_0 : \dots : x_n)$ .

Posto dunque  $t$  come il numero delle *equazioni*, notiamo che:

$$\begin{aligned} \dim W &= n+1 - \text{rk } A \\ \text{Codim } W &= \text{rk } A \\ \parallel \\ \dim V - \dim W &= \dim \mathbb{P}^n(V) - \dim \mathbb{P}^n(W) = \text{Codim } \mathbb{P}^n(W) \\ \implies t &\geq \text{rk } (A) = \text{Codim } \mathbb{P}^n(W) \end{aligned}$$

Scartando delle equazioni possiamo sempre ricondurci ad un sistema in cui:

$$t = \text{rk } A = \text{Codim } \mathbb{P}^n(W) \quad (11.13)$$

**INTUITIVAMENTE...** Per facilitare la visualizzazione degli spazi proiettivi possiamo pensare allo spazio  $\mathbb{K}^{n+1}$  come lo **spazio affine**  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^{n+1})$  in cui sia fissato un punto  $O$  come origine: in questo modo, le classi di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  corrispondono alle *rette affini passanti per  $O$*  (identificate con le rette vettoriali di  $\mathbb{K}^{n+1}$ ):

$$(x_0 : \dots : x_n) \leftrightarrow \begin{array}{l} \text{retta affine di } \mathcal{A}(\mathbb{K}^{n+1}) \text{ formata} \\ \text{dai punti } (tx_0, \dots, tx_n) \text{ al variare di } t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Approfondiremo formalmente la relazione tra gli spazi affini e gli spazi proiettivi più avanti, a pag. 11.8.

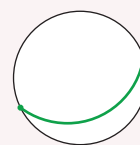
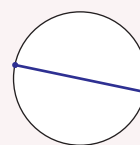
### ESEMPI.

- Il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  ha, come sottospazi *non banali*, i punti e le rette.
  - ◇ Una *retta proiettiva* viene da un *piano*, che nel riferimento *affine* possiamo prendere passante per l'origine:  $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ .
  - ◇ Un *punto* servono due equazioni, in sostanza vedendolo come *intersezione di due rette proiettive*; ad esempio,  $(1 : 0 : 0)$  ha equazioni  $x_1 = x_2 = 0$ , mentre  $(1 : 2 : 3)$  ha equazioni  $\begin{cases} x_1 = 2x_0 \\ x_2 = 3x_0 \end{cases}$

- Nel piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , le *rette proiettive* vengono da *piani vettoriali*, mentre nel modello affine di  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$  essi sono passanti per l'origine; utilizzando la *sfera unitaria* ai quali identifichiamo i punti antipodali in una relazione di equivalenza, la retta proiettiva si visualizza facilmente come l'*intersezione* della sfera in un *cerchio massimo*.

In questo modo, considerando la *semisfera superiore*, la **proiezione** dell'intersezione su di essa sul disco unitario  $D$  è la rappresentazione della retta proiettiva sul *modello piano* ben noto. Dunque, guardando le rette proiettive nel *modello piano*, se ne hanno di *tre tipi*:

1. La *retta* con equazione  $z = 0$ , ovvero al piano  $xy$  in  $\mathbb{R}^3$ : sul modello piano corrisponde al **bordo del disco  $D$**  (cioè  $S^1$ ).
2. Le *rette* con equazione  $ax + by = 0$ , ovvero ai *piani perpendicolari* in  $\mathbb{R}^3$  passanti per le rette con quell'equazione  $ax + by = 0$ : sul modello piano corrisponde a **diametri colleganti due punti** sul bordo.
3. Nel caso generale  $ax + by + cz = 0$ , proiettando l'*arco di cerchio massimo* viene un **arco di ellisse** in  $D$ .



### 11.4 OPERAZIONI CON I SOTTOSPAZI

Se  $W_1, W_2 \subseteq V$  sono sottospazi vettoriali, allora  $W_1 \cap W_2$  è un sottospazio vettoriale e si ha che l'**intersezione** dei corrispondenti spazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo.

$$\mathbb{P}^n(W_1 \cap W_2) = \mathbb{P}^n(W_1) \cap \mathbb{P}^n(W_2)$$



**OSSERVAZIONE.** Si ha:

$$\mathbb{P}^n(W_1) \cap \mathbb{P}^n(W_2) = \emptyset \iff W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

In tal caso diciamo che i due sottospazi sono **sghembi** o **disgiunti**.

Come per i sottospazi vettoriali, in generale l'**unione** di due sottospazi proiettivi *non* è un sottospazio proiettivo.

**DEFINIZIONE 11.4.0.** SOTTOSPAZIO GENERATO DA UN SOTTOINSIEME.

Sia  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  un sottoinsieme non vuoto. Il **sottospazio generato** da  $S$ , denotato con  $\langle S \rangle$ , è l'intersezione in  $\mathbb{P}^n(V)$  di tutti i sottospazi proiettivi contenenti  $S$ , ed è il più piccolo sottospazio contenente  $S$ .

- $\langle S \rangle = S \iff S$  è un sottospazio proiettivo.
- Se  $S = \{P_1, \dots, P_m\}$  è finito, scriviamo  $\langle P_1, \dots, P_m \rangle$  per il sottospazio generato da  $P_1, \dots, P_m$ .

**DEFINIZIONE 11.4.1.** SOTTOSPAZIO SOMMA.

Dati due sottospazi proiettivi  $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ , cioè:

$$T_i = \mathbb{P}^n(W_i) \quad W_i \subseteq V, \quad i = 1, 2$$

Allora il sottospazio generato da  $T_1 \cup T_2$  è denotato con  $T_1 + T_2 = \langle T_1, T_2 \rangle$  e si chiama **sottospazio somma**. In particolare, si ha:

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(W_1 + W_2) \quad (11.14)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\subseteq$ )  $\mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$  è un sottospazio proiettivo che contiene, in quanto  $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ ,  $W_2 \subseteq W_1 + W_2$  vettorialmente, sia  $T_1 = \mathbb{P}^n(W_1)$  sia  $T_2 = \mathbb{P}^n(W_2)$ . In particolare, contiene la loro unione<sup>a</sup>, dunque  $\langle T_1, T_2 \rangle \subseteq \mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$ .

$\supseteq$ ) Abbiamo che  $T_i \subseteq \langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(U)$ , con  $U$  un sottospazio vettoriale di  $V$ . In particolare, si ha che  $W_1, W_2 \subseteq U$ , da cui  $W_1 + W_2 \subseteq U$ . Passando allo spazio proiettivo:

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(U) \subseteq \mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$$

<sup>a</sup>Ricordiamo che non è essa un sottospazio, ma un sottoinsieme. □

**PROPOSIZIONE 11.4.0.** FORMULA DI GRASSMANN PROIETTIVA.

Siano  $T_1, T_2$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(V)$ . Si ha:

$$\dim \langle T_1, T_2 \rangle + \dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 \quad (11.15)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Posti  $T_i = \mathbb{P}^n(W_i)$ , con  $W_i \subseteq V$  sottospazi vettoriali. Dalla *formula di Grassmann vettoriale*:

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Sottraendo 1 a tutte le dimensioni, otteniamo le dimensioni dei corrispondenti spazi proiettivi e dunque la formula proiettiva.  $\square$

**COROLLARIO 11.4.0.** Siano  $T_1, T_2$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(V)$  con  $\dim \mathbb{P}^n(P) = n$ . Allora:

$$\dim(T_1 \cap T_2) \geq \dim T_1 + \dim T_2 - n \quad (11.16)$$

In particolare  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  se  $\dim T_1 + \dim T_2 \geq n$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

$$\dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 - \dim \langle T_1, T_2 \rangle \geq \dim T_1 + \dim T_2 - n$$

Chiaramente, se  $\dim T_1 + \dim T_2 \geq n$ , allora  $\dim(T_1 \cap T_2) \geq 0$  e dunque  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

**ESEMPIO.** Nel piano proiettivo, due rette sono *sempre incidenti*. Infatti, le rette hanno dimensione 1, mentre  $\dim \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = 2$ , dunque vale  $1 + 1 \leq 2$ , pertanto due rette si incontrano sempre.

**OSSERVAZIONE.** Se consideriamo l'insieme *finito di punti*, possiamo considerare lo spazio  $S$  generato da  $P_1, \dots, P_m$ , cioè  $S = \langle P_1, \dots, P_m \rangle$ ; inoltre, si ha:

$$\dim S \leq m - 1$$

Infatti, se  $P_i = [v_i]$  con  $v_i \in V$ , allora:

$$S = \mathbb{P}^n(\underbrace{\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)}_{\dim \mathcal{L} \leq m})$$

## 11.5 PUNTI LINEARMENTE INDIPENDENTI E IN POSIZIONE GENERALE

**DEFINIZIONE 11.5.0.** PUNTI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Siano  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}^n(V)$ . Diciamo che i punti  $P_1, \dots, P_m$  sono **linearmente indipendenti** se, scelti  $v_1, \dots, v_m \in V \setminus \{0\}$  tali che  $P_i = [v_i] \forall i$ , i vettori  $v_1, \dots, v_m$  sono *linearmente indipendenti* in  $V$ .

Se così non è, diciamo che  $P_1, \dots, P_m$  sono linearmente dipendenti.

**OSSERVAZIONI.**

- La definizione è *ben posta*. Dati  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , si ha che:

$$v_1, \dots, v_m \text{ sono indipendenti} \iff \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_m v_m \text{ sono indipendenti.}$$

- Se  $\dim \mathbb{P}^n(V) = n$ ,  $\mathbb{P}^n(V)$  contiene al più  $n + 1$  punti indipendenti.
- $P_1, \dots, P_m$  sono indipendenti se e solo se  $\dim \langle P_1, \dots, P_m \rangle = m - 1$ .

**ESEMPLI.**

- Due punti  $P, Q$  sono indipendenti se e solo se  $P \neq Q$ . Infatti, se  $P = [v]$  e  $Q = [w]$ , allora:

$$P \text{ e } Q \text{ sono indipendenti} \iff v \text{ e } w \text{ sono indipendenti} \iff v \approx w \iff P \neq Q$$

In tal caso  $\langle P, Q \rangle$  è l'unico *retta* contenente  $P$  e  $Q$ , che indicheremo anche con  $\overline{PQ}$ .

- Tre punti  $P_1, P_2, P_3$  sono indipendenti se e solo se sono *distinti* e *non* sono *allineati*, cioè appartenenti alla stessa retta. In tal caso  $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$  è l'unico *piano* contenente i tre punti.

**DEFINIZIONE 11.5.1.** PUNTI IN POSIZIONE GENERALE.

Dati dei punti  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}^n(V)$ , diciamo che sono **in posizione generale** se vale una delle due condizioni seguenti:

- $m \leq n + 1$  e i punti sono *linearmente indipendenti*.
- $m > n + 1$  e ogni scelta di  $n + 1$  punti tra loro sono linearmente indipendenti.

**ESEMPIO.**

- Se  $n = 1$ , cioè  $\mathbb{P}^n(V)$  è una *retta proiettiva*, allora  $P_1, \dots, P_m$  sono in posizione generale se e solo se  $P_1, \dots, P_m$  sono *tutti distinti*.
- Se  $n = 2$ , cioè  $\mathbb{P}^n(V)$  è una *piano proiettivo*, allora  $P_1, \dots, P_m$  sono in posizione generale se e solo se  $P_1, \dots, P_m$  sono a 3 a 3 *non allineati*.

## 11.5.1 Impraticciamoci! Punti linearmente indipendenti

**ESERCIZIO.** F.F.P., 2.1.

Si mostri che i punti del piano proiettivo reale:

$$\left(\frac{1}{2} : 1 : 1\right) \quad \left(1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right) \quad (2 : -1 : 2)$$

Sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

**SOLUZIONE.** Per verificare che i 3 punti sono allineati, dobbiamo verificare che i corrispondenti vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono dipendenti. Riscriviamo i seguenti punti per facilitarci i calcoli:

$$\left(\frac{1}{2} : 1 : 1\right) = (1 : 2 : 2) \quad \left(1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right) = (3 : 1 : 4)$$

Verifichiamolo la dipendenza con il determinante.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione della retta è data dall'equazione del piano vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  generate da 2

dei 3 vettori:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = x_0(8-2) - x_1(4-6) + x_2(1-6) = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2$$

Verifichiamo che contenga anche il terzo:

$$6 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 = 0$$

### 11.6 RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DI UN SOTTOSPAZIO PROIETTIVO

Sia  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  un sottospazio proiettivo di dimensione  $m$ . Allora esistono sempre  $m+1$  punti  $P_0, \dots, P_m \in S$  linearmente indipendenti che generano  $S$ . Infatti, se  $S = \mathbb{P}^n(W)$  con  $W \subseteq V$  sottospazio vettoriale di dimensione  $m+1$ , possiamo scegliere una base  $\{w_0, \dots, w_m\}$  di  $W$  tale per cui:

$$P_i = [w_i] \in S$$

Sono linearmente indipendenti (perché lo sono i vettori della base) e generano  $S$ . Allora, tutti e soli i punti di  $S$  sono della forma:

$$[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m] \quad \lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$$

Supponiamo ora di aver fissato una base  $\{e_0, \dots, e_n\}$  di  $V$  e quindi di aver considerato il corrispondente *riferimento proiettivo*. In coordinate vettoriali di  $V$ , un punto di  $W$  è  $x = (x_0, \dots, x_n)$  se e solo se:

$$x = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m$$

Il punto  $P_i$  in  $V$  avrà coordinate  $(P_{0,i}, \dots, P_{n,i}) \forall i = 1, \dots, m$ , dunque il generico vettore  $x$  di  $W$  è espresso da:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 P_{0,0} + \lambda_1 P_{0,1} + \dots + \lambda_m P_{0,m} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 P_{n,0} + \lambda_1 P_{n,1} + \dots + \lambda_m P_{n,m} \end{cases} \quad (11.17)$$

Anche i punti di  $S$  sono date da queste coordinate, dunque questa viene definita la **rappresentazione parametrica** del sottospazio  $S$ , con  $(\lambda_0 : \dots : \lambda_m)$  le coordinate omogenee di  $\mathbb{P}^n(W)$  date dalla base  $\{w_0, \dots, w_m\}$ .

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  consideriamo i punti:

$$A = (1 : 0 : -1 : 4) \quad B = (2 : 3 : 0 : 5)$$

Allora, la rappresentazione parametrica del sottospazio  $S$  con  $(\lambda : \mu)$  è:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + 2\mu \\ x_1 = 3\mu \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 4\lambda - 5\mu \end{cases}$$

## 11.6.1 Coordinate proiettive e punti in posizione generale

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathbb{P}^n(V)$  con un riferimento proiettivo fissato. Consideriamo i punti fondamentali  $P_0, \dots, P_n$  e il punto unità  $U$ .

- $P_0, \dots, P_n, U$  sono  $n+2$  punti.
- $P_0, \dots, P_n, U$  sono in posizione generale: essendo  $P_i = [e_i]$  con  $e_0, \dots, e_n$  base di  $V$ , allora  $P_0, \dots, P_n$  sono indipendenti. Se sostituiamo l' $i$ -esimo punto con  $U = [e_1 + \dots + e_n]$ , allora:

$$P_0, \dots, \check{P}_i, \dots, U$$

Sono indipendenti  $\forall i = 0, \dots, n$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Indichiamo con  $\check{P}_i$  il punto che sostituiamo.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  una base che induce un riferimento proiettivo su  $\mathbb{P}^n(V)$ .

Per ogni  $i$  sia  $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  e consideriamo  $v_i = \lambda_i e_i$ . Allora  $\mathcal{B}' = \{v_0, \dots, v_n\}$  è ancora una base e i punti fondamentali del riferimento indotto da  $\mathcal{B}'$  sono gli stessi del riferimento indotto da  $\mathcal{B}$ . Infatti:

$$[e_i] = [v_i] = P_i$$

Però i due riferimenti sono **diversi**; dato  $v$  espresso nella base  $\mathcal{B}$ :

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$$

La sua classe in  $\mathbb{P}^n(V)$ , rispetto a  $\mathcal{B}$ , è:

$$[v] = (x_0 : \dots : x_n)$$

Possiamo partire dall'espressione di  $v$  nella base  $\mathcal{B}$  a quella nella base  $\mathcal{B}'$ , moltiplicando e dividendo ogni  $e_i$  per il corrispettivo  $\lambda_i$ :

$$v = \frac{x_0}{\lambda_0} (\lambda_0 e_0) + \dots + \frac{x_n}{\lambda_n} (\lambda_n e_n) = \frac{x_0}{\lambda_0} v_0 + \dots + \frac{x_n}{\lambda_n} v_n$$

Passiamo dunque alla base  $\mathcal{B}'$  alla classe in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ :

$$[v] = \left( \frac{x_0}{\lambda_0} : \dots : \right)$$

Notiamo che effettivamente il punto  $[v]$  non cambia, ma i riferimenti *non* sono multipli e quindi sono diversi!

- Conoscere i punti fondamentali *non basta* a determinare la base  $\mathcal{B}$ .
- Riferimenti proiettivi *diversi* possono avere gli *stessi* punti fondamentali.

**OSSERVAZIONE.** Supponiamo di avere  $n+2$  punti  $P_0, \dots, P_{n+1}$  in  $\mathbb{P}^n(V)$ , cioè  $\forall i = 0, \dots, n+1 \exists v_i \in V : P_i = [v_i]$ . Allora:

$$P_0, \dots, P_{n+1} \text{ sono in posizione generale} \iff v_0, \dots, v_n \text{ sono indipendenti e} \\ v_{n+1} = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n \text{ con } a_i \neq 0 \forall i = 0, \dots, n$$

Infatti, se  $v_0, \dots, v_n$  è una base (in quanto sono indipendenti),  $v_0, \dots, \check{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}$  sono indipendenti se e solo se  $a_i \neq 0$ .

**TEOREMA 11.6.0.** Sia  $\mathbb{P}^n(V)$  di dimensione  $n$ . Dati  $n+2$  punti  $P_0, \dots, P_{n+1}$  in *posizione generale*, esiste una base  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  di  $V$  tale che:

$$P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], P_{n+1} = [e_0 + \dots + e_n] \quad (11.18)$$

Inoltre, se  $\mathcal{B}' = \{f_0, \dots, f_n\}$  è un'altra base di  $V$  che soddisfa la condizione sopra, allora  $\mathcal{B}'$  è proporzionale a  $\mathcal{B}$ , cioè  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : f_i = \lambda e_i \forall i = 0, \dots, n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $P_i = [v_i]$  al variare di  $i = 0, \dots, n+1$ . I punti  $P_0, \dots, P_n$  sono indipendenti<sup>a</sup>, dunque per definizione  $v_0, \dots, v_n$  è una base di  $V$ . Definiamo:

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Ma allora, per l'osservazione precedente,  $\lambda_i \neq 0 \forall i$  perché i punti sono in posizione generale.

Consideriamo  $e_0 = \lambda_0 v_0, e_1 = \lambda_1 v_1, \dots, e_n = \lambda_n v_n$ . Si ha che  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  è una base di  $V$  perché  $\lambda_i \neq 0 \forall i$ . Segue che:

$$\begin{aligned} [e_i] &= [v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n \\ [e_0 + \dots + e_n] &= [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = [v_{n+1}] = P_{n+1} \end{aligned}$$

Adesso, sia  $\mathcal{B}' = \{f_0, \dots, f_n\}$  come da ipotesi. Allora  $[f_i] = P_i = [e_n] \forall i = 0, \dots, n$ , cioè  $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : f_i = \mu_i e_i \forall i = 0, \dots, n$ . Inoltre, soddisfa anche  $[f_0 + \dots + f_n] = P_{n+1}$ , pertanto:

$$[f_0 + \dots + f_n] = [e_0 + \dots + e_n]$$

In altre parole,  $\exists \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che:

$$\begin{aligned} f_0 + \dots + f_n &= \mu(e_0 + \dots + e_n) \\ \parallel \\ \mu_0 e_0 + \dots + \mu_n e_n \end{aligned}$$

$e_0, \dots, e_n$  è una base: per l'unicità della scrittura deve essere  $\mu = \mu_0 = \dots = \mu_n$ , cioè  $f_i = \mu e_i \forall i = 0, \dots, n$ .  $\square$

<sup>a</sup>Perché se  $N+2$  punti sono in posizione generale, presi  $n+1$  punti fra di loro sono indipendenti.

## 11.7 TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

**DEFINIZIONE 11.7.0.** TRASFORMAZIONE PROIETTIVA E PROIETTIVITÀ.

Un'applicazione  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  tra spazi proiettivi si dice **trasformazione proiettiva** o **isomorfismo proiettivo** se  $\exists \varphi : V \longrightarrow V'$  isomorfismo che induce un

altro isomorfismo lineare:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^n(V) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(V') \\ [v] &\longmapsto [\varphi(v)]\end{aligned}\tag{11.19}$$

Tale per cui  $f = \widetilde{\varphi}$ .

Se  $V = V'$ , diciamo che  $f$  è una **proiettività** di  $\mathbb{P}^n(V)$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

■  **$\widetilde{\varphi}$  è ben definita:**

1.  $\varphi(v) \neq 0$  perché  $v \neq 0$  e  $\varphi$  è iniettiva, pertanto  $\ker \varphi = \{0\}$  e dunque l'unico vettore mappato a 0 tramite  $\varphi$  è solo 0.
2. Se  $[v] = [w]$ , allora  $w \sim v$ , cioè  $w = \lambda v$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ; segue che per linearità di  $\varphi$   $\varphi(w) = \lambda \varphi(v) \implies [\varphi(w)] = [\varphi(v)]$

■  **$\widetilde{\varphi}$  è iniettiva:** se  $\widetilde{\varphi}([v]) = \widetilde{\varphi}([w])$ , allora

$$[\varphi(v)] = [\varphi(w)] \implies \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(w) = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v)$$

Poichè  $\varphi$  è iniettiva, segue che  $w = \lambda v$  e dunque  $[v] = [w]$ .

■  **$\widetilde{\varphi}$  è suriettiva:** infatti, se  $[w] \in \mathbb{P}^n(V')$ , essendo  $\varphi$  suriettiva esiste un vettore  $v$  tale che  $w = \varphi(v)$ . Segue che  $[w] = [\varphi(v)] = \widetilde{\varphi}([v])$ . □

Dato che spazi vettoriali della stessa dimensione sono sempre isomorfi, due spazi proiettivi della stessa dimensione sono sempre isomorfi e  $\mathbb{P}^n(V)$  è sempre isomorfo a  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , con  $\dim V = n + 1$ .

**LEMMA 11.7.0.** Siano  $\varphi, \psi : V \longrightarrow V'$  isomorfismi. Allora:

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \psi = \lambda \varphi\tag{11.20}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\Leftarrow$ ) Se  $v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , allora  $\psi(v) = \lambda \varphi(v)$ . Segue:

$$\implies \widetilde{\psi}([v]) = [\psi(v)] = [\lambda \varphi(v)] = \widetilde{\varphi}([v])$$

$\Rightarrow$ ) Sia  $h := \varphi^{-1} \circ \psi : V \longrightarrow V$  automorfismo. Vogliamo mostrare che  $h = \lambda Id_V$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Se  $v \in V \setminus \{0\}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}([v]) &= \psi([v]) \\ \parallel &\parallel \\ [\varphi(v)] &= [\psi(v)]\end{aligned} \implies \lambda_v \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(v) = \lambda_v \psi(v) \implies h(v) = \varphi^{-1}(\varphi(v)) = \lambda_v v$$

Segue che  $v$  è autovettore di  $h \forall v \in V \setminus \{0\}$ , in particolare ogni vettore non nullo è autovettore di  $h$ . Segue che  $h$  è diagonalizzabile e ha un unico autovalore  $\lambda$ . Infatti, presi  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , si avrebbero i seguenti autovalori indipendenti:

$$v_1 \in V_{\lambda_1} \setminus \{0\} \quad v_2 \in V_{\lambda_2} \setminus \{0\}$$

E considerato che:

$$\begin{aligned} h(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ h(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ h(v_1 + v_2) &= \lambda(v_1 + v_2) \implies \lambda(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ h(v_1 + v_2) &= h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

Da cui segue, in quanto  $v_1, v_2, v_1 + v_2 \neq 0$ , che  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  e quindi è unico. Allora,  $h = \lambda Id_V$  e pertanto  $\varphi = \lambda \psi$ .  $\square$

### 11.7.1 Gruppo lineare proiettivo

**OSSERVAZIONE.** Consideriamo  $\mathbb{P}^n(V)$  e l'insieme delle proiettività  $\mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ .

- La *composizione* di proiettività è una *proiettività* (banalmente *indotta* dalla composizione delle applicazioni lineari).
- Poichè  $Id_{\mathbb{P}^n(V)} = \widetilde{Id}_V \implies$  L'identità  $Id_{\mathbb{P}^n(V)}$  è una *proiettività*.
- Se  $\widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ , allora  $\widetilde{\varphi}^{-1} = f^{-1} : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ . In altre parole, l'*inversa* di una proiettività è ancora una proiettività.

L'insieme delle proiettività risulta un **gruppo** rispetto alla *composizione*.

**DEFINIZIONE 11.7.1. GRUPPO LINEARE PROIETTIVO.**

Il **gruppo lineare proiettivo**  $\mathbb{PGL}_n(V)$  è il gruppo delle proiettività dello spazio vettoriale  $V$  con operazione la composizione di proiettività ed elemento neutro  $Id_{\mathbb{P}^n(V)}$ .

#### 11.7.1.1 Descrizione matriciale del gruppo lineare proiettivo

Consideriamo gli isomorfismi  $\mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ : sappiamo che la matrice associata agli isomorfismi è una matrice invertibile, cioè si ha una *isomorfismo di gruppi* fra l'insieme degli isomorfismi in  $\mathbb{K}^{n+1}$  al *gruppo generale lineare*  $GL(n+1, \mathbb{K})$ :

$$\left\{ \text{isomorfismi } \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \right\} \leftrightarrow GL(n+1, \mathbb{K})$$

E con il gruppo lineare proiettivo si può fare? Consideriamo:

$$\begin{aligned} \phi : GL(n+1, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \\ \varphi_A &\longmapsto \widetilde{\varphi}_A \end{aligned} \tag{11.21}$$

$\phi$  è *omomorfismo* di gruppi *suriiettivo*, ma non *iniettivo*. Infatti, il nucleo non è *triviale*:

$$\ker \phi = \{ \varphi_A \mid \varphi_A = Id_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})} = \widetilde{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}} \} = \{ \varphi_A \mid \varphi = \lambda I, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \} = \{ \varphi_A \mid A = \lambda I, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \}$$

Tuttavia, possiamo per il Teorema dell'isomorfismo per i gruppi considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} GL(n+1, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists \bar{f} & \\ \frac{GL(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}} & & \end{array}$$



E si ha pertanto l'isomorfismo:

$$\mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \cong \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}} = \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I\}}$$

Si può anche considerare l'isomorfismo tra  $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$  e  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ , e riscrivere l'isomorfismo trovato come:

$$\mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \cong \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\mathbb{K} \setminus \{0\}}$$

**ESEMPIO.** Consideriamo la seguente proiettività della *retta proiettiva*  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (x_0 : x_1) &\longmapsto (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1) \end{aligned}$$

Considerato il gruppo lineare proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})}{\{\lambda I\}}$ , per definizione di  $f$  si ha  $f = \widetilde{\varphi}$ . In particolare, la matrice associata a  $\varphi$  è:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

E dunque possiamo scrivere l'applicazione lineare  $\varphi$  come:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &\longmapsto A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E dunque  $f$  si può anche scrivere come:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ [v] &\longmapsto [Av] \end{aligned}$$

Notiamo che se la matrice associata a  $\varphi$  fosse  $2A$ , per *proporzionalità* si avrebbe comunque la proiettività  $f$ . In modo analogo,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  induce la *stessa proiettività*  $f$  di  $A$ .

### 11.7.2 Altri aspetti delle trasformazioni proiettive

**OSSERVAZIONE.** Se  $f$  è una proiettività di  $\mathbb{P}^n(V)$  e  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  un sottospazio proiettivo, allora  $f(S)$  è ancora un sottospazio proiettivo della stessa dimensione di  $S$ . Se  $S = \mathbb{P}^n(W)$  e consideriamo per definizione  $f = \widetilde{\varphi}$  con  $\varphi : V \longrightarrow V$ , allora:

$$\forall [v] \in S \quad f([v]) = \widetilde{\varphi}([v]) = [\varphi(v)], \quad \varphi(v) \in W$$

$$f(S) = \mathbb{P}^n(\varphi(W)) \tag{11.22}$$

#### DEFINIZIONE 11.7.2. PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI.

Due sottoinsiemi  $A, B$  di  $\mathbb{P}^n(V)$  si dicono **proiettivamente equivalenti** se  $\exists f$  proietti-

vità di  $\mathbb{P}^n(V)$  tale che:

$$B = f(A) \quad (11.23)$$

**ESEMPIO.** Due sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(V)$  della *stessa* dimensione sono sempre *proiettivamente equivalenti*.

**TEOREMA 11.7.0.** Siano  $\mathbb{P}^n(V)$  e  $\mathbb{P}^n(V')$  di dimensione  $n$ . Siano:

- $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}^n(V)$   $n+2$  punti in posizione generale.
- $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}^n(V')$   $n+2$  punti in posizione generale.

Allora  $\exists!$   $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  trasformazione proiettiva tale che  $f(P_i) = Q_i \forall i = 0, \dots, n+1$ .

In particolare: se una proiettività fissa  $n+2$  punti ( $f(P_i) = P_i \forall i = 0, \dots, n+1$ ) in posizione generale, allora è l'identità.

**DIMOSTRAZIONE.**

- **Esistenza:** Siano,  $\forall i$ :

- ◇  $P_i = [v_i] \ v_i \in V$ .
- ◇  $Q_i = [w_i] \ w_i \in V'$ .

Sappiamo, dall'osservazione a pag. 11.6, che:

- ◇  $v_0, \dots, v_n$  è base di  $V$ , con  $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$  con  $\lambda_i \neq 0 \forall i$ .
- ◇  $w_0, \dots, w_n$  è base di  $V'$ , con  $w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n$  con  $\mu_i \neq 0 \forall i$ .

A meno di cambiare i rappresentanti dei punti, possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\lambda_i = \mu_i = 1$ . Si ha dunque:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_0 + \dots + v_n \\ w_{n+1} &= w_0 + \dots + w_n \end{aligned}$$

Sia  $\varphi : V \longrightarrow V'$  l'applicazione lineare tale per cui  $\varphi(v_i) = w_i \forall i = 0, \dots, n$ . Per linearità:

$$\varphi(v_{n+1}) = \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) = w_0 + \dots + w_n = w_{n+1}$$

Poiché  $\text{Im } \varphi$  contiene una base per costruzione,  $\varphi$  è suriettiva. In particolare, essendo endomorfismo ( $\dim V = \dim V'$ ),  $\varphi$  è anche *isomorfismo*.

Allora  $f := \widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  è una *trasformazione proiettiva* e:

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i \forall i = 0, \dots, n+1$$

- **Unicità:** sia  $g : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  un'altra trasformazione proiettiva tale che  $g(P_i) = Q_i \forall i = 0, \dots, n+1$ . Per definizione, esiste  $\psi : V \longrightarrow V'$  isomorfismo per cui  $g = \widetilde{\psi}$  e:

$$[\psi(v_i)] = [w_i] \forall i$$

Si ha che  $\exists a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\psi(v_i) = a_i w_i$ . Allora:

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+1} w_{n+1} & = & \psi(v_{n+1}) & = & \psi(v_0 + \dots + v_n) \\ \parallel & & & & \parallel \\ a_{n+1} (w_0 + \dots + w_n) & & & & \psi(v_0) + \dots + \psi(v_n) \\ \parallel & & & & \parallel \\ a_{n+1} w_0 + \dots + a_{n+1} w_n & & & & a_0 w_0 + \dots + a_n w_n \end{array}$$

Poiché  $w_0, \dots, w_n$  è base, la scrittura è unica. Segue che  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n+1} = a$ . Allora:

$$\begin{aligned} \psi(v_i) &= a w_i = a \varphi(v_i) \\ \implies \psi &= a \varphi \\ \implies g &= \tilde{\psi} = \tilde{\varphi} = f \end{aligned}$$

□

#### ESEMPLI.

- In una *retta proiettiva* (dim 1), una proiettività è determinata dalle immagini di 3 punti distinti, dato che è equivalente alla condizione di “punti in posizione generale”.
- In un *piano proiettivo* (dim 2), una proiettività è determinata dalle immagini di 4 punti, a 3 a 3 non allineati.
- Se  $A, B \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  sono insiemi finiti, ciascuno contenente  $k$  punti in posizione generale, con  $k \leq n+2$ , allora  $A$  e  $B$  sono sempre proiettivamente equivalenti.

**ESEMPIO.** Approfondiamo l'ultimo esempio. In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  (dim 2), si prenda  $A = \{P_1, P_2\}$ ,  $B = \{Q_1, Q_2\}$  con  $P_1 \neq P_2$ ,  $Q_1 \neq Q_2$ . Ho due punti distinti sia in  $A$  e  $B$ , dunque esiste sempre una proiettività  $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$  tale che  $f(A) = B$ .

Se invece  $A$  e  $B$  contengono 3 punti, se i 3 punti in  $A$  sono *allineati* mentre i 3 punti in  $B$  non lo sono, allora  $A$  e  $B$  non sono proiettivamente equivalenti.

#### 11.7.3 Trasformazioni proiettive in coordinate

Supponiamo di avere fissato dei riferimenti proiettivi su  $\mathbb{P}^n(V)$  e  $\mathbb{P}^n(V')$ , dati da delle basi  $\mathcal{B}$  di  $V$  e  $\mathcal{B}'$  di  $V'$ , e sia  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  una trasformazione proiettiva.

Sappiamo che  $f = \tilde{\varphi}$  con  $\varphi : V \longrightarrow V'$  isomorfismo lineare.

Sia  $A \in \text{GL}(n+1, \mathbb{K})$  la matrice associata a  $\varphi$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ . Abbiamo visto che  $\varphi$  è determinata solo a meno di multipli: chiaramente, lo stesso è vero anche per  $A$ .

Siano allora:

$$\begin{aligned} P &= (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(V) \\ f(P) &= (y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^n(V') \end{aligned}$$

Allora  $\exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\rho y = Ax$ .

#### OSSERVAZIONE. CAMBIAMENTI DI COORDINATE.

Se in  $\mathbb{P}^n(V)$  abbiamo due riferimenti proiettivi, uno dalla base  $\mathcal{B}$ , e uno dalla base  $\mathcal{B}'$ , sia  $M$  la matrice del cambiamento di base in  $V$  tale che:

$$x' = Mx$$

Con  $x$  in coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}$  e  $x'$  in coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ . Allora, se  $P \in \mathbb{P}^n(V)$  ha coordinate:

$$(x_0 : \dots : x_n) \text{ rispetto a } \mathcal{B} \quad (x'_0 : \dots : x'_n) \text{ rispetto a } \mathcal{B}'$$

Esiste  $\rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\rho x' = Mx$ .

#### 11.7.4 Punti fissi di proiettività

**DEFINIZIONE 11.7.3.** PUNTO FISSO.

Sia  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$  una proiettività. Un **punto fisso** è un punto  $P \in \mathbb{P}^n(V)$  tale che:

$$f(P) = P \quad (11.24)$$

Sia  $\varphi : V \longrightarrow V$  un automorfismo tale che  $f = \widetilde{\varphi}$ , e sia  $P = [v]$ , con  $v \in V \setminus \{0\}$ . Allora:

$$\begin{aligned} f(P) = [\varphi(v)] &= [v] \\ \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(v) &= \lambda v \\ \iff v \text{ è un autovettore per } \varphi \end{aligned}$$

In particolare,  $\varphi$  è invertibile, dunque *non* ha l'autovettore *nullo*. Segue che i punti fissi di  $f$  sono tutti e soli i punti  $[v]$  con  $v$  autovettore di  $\varphi$ .

#### OSSERVAZIONI.

1. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , allora ogni proiettività ha almeno un punto fisso, dato che  $\varphi$  ha sempre almeno un autovettore.
2. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\dim \mathbb{P}^n(V) = n$ , allora  $\dim V = n + 1$ . Il polinomio caratteristico  $C_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$  ha grado  $n + 1$ . Se  $n$  è *pari*,  $\varphi$  ha almeno un autovalore, dato che il polinomio caratteristico ha grado  $n + 1$  *dispari*: infatti, o è di grado *uno* (e quindi ha banalmente soluzione) oppure, in quanto si può decomporre in fattori a coefficienti reali al più di grado *due*, ammetterà *sempre* almeno un fattore di grado *uno*.

3. Portiamo un controesempio al caso  $n$  dispari. Sia  $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  associata a  $f$  è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico *non* ha radici *reali*:

$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1$$

Segue che  $A$  non ha autovettori reali e pertanto  $f$  *non* ha punti fissi.

4. In generale, l'insieme dei punti fissi di  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$  è dato da:

$$\{\mathbb{P}^n(V_\lambda) \mid \lambda \text{ autovalore di } \varphi\}$$

Questo è un insieme di sottospazi proiettivi a 2 a 2 disgiunti.

**DEFINIZIONE 11.7.4.** INSIEME FISSO.

Se  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  è un sottospazio, diciamo che  $S$  è **fisso** per  $f$  proiettività se:

$$f(S) = S \quad (11.25)$$

11.7.5 *Impratichiamoci! Trasformazioni proiettive*

**ESERCIZIO.** In  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  determinare la proiettività  $f$  tale che:

$$f(2:1) = (1:1) \quad f(1:2) = (0:1) \quad f(1:-1) = (1:0)$$

**SOLUZIONE.** Notiamo che i punti:

$$(2:1) \quad (1:2) \quad (1:-1) \text{ e } (1:1) \quad (0:1) \quad (1:0)$$

Sono distinti, dunque sono in posizione generale e la proiettività è garantita. Prendiamo la generica matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  associata a  $\varphi$  indotta da  $f$  e consideriamo  $\rho y = Ax$ :

$$\begin{cases} \rho y_0 = ax_0 + bx_1 \\ \rho y_1 = cx_0 + dx_1 \end{cases}$$

Imponiamo il passaggio per  $f(2:1) = (1:1)$ :

$$\begin{cases} \rho = 1a + b \\ \rho = 2c + d \end{cases} \implies 2a + b = 2c + d$$

In sostanza, *eliminiamo* il parametro  $\rho$  per ottenere un'equazione lineare *omogenea* tra gli elementi della matrice.

Facciamo lo stesso con i rimanenti punti  $f(1:2) = (0:1)$  e  $f(1:-1) = (1:0)$ , utilizzando rispettivamente  $\mu y = Ax$  e  $\alpha y = Ax$ :

$$\begin{cases} 0 = a + 2b \\ \rho = c + 2d \end{cases} \implies a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = a - b \\ 0 = c - d \end{cases} \implies c - d = 0$$

Costruiamo così un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 incognite  $a, b, c, d$ , con una matrice dei coefficienti di rango 3:

$$\begin{cases} 2a + b = 2c + d \\ a + 2b = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2c \\ b = -c \\ c = c \\ d = c \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ c & c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A meno di multipli,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  è la matrice cercata. Segue dunque che la proiettività cercata è:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (x_0 : x_1) &\longmapsto (2x_0 - x_1 : x_0 + x_1) \end{aligned}$$

### 11.8 GEOMETRIA AFFINE E GEOMETRIA PROIETTIVA

Abbiamo già accennato all'esistenza di una relazione che intercorre fra *geometria affine* e *geometria proiettiva*. Diamo innanzitutto qualche richiamo dei concetti della geometria affine.

#### DEFINIZIONE 11.8.0. SPAZIO AFFINE.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $\mathbb{K}$ . Uno **spazio affine** di dimensione  $n$  su  $V$  (con spazio vettoriale associato  $V$  di dimensione  $n$ ) è un insieme  $\mathcal{A}(V)$  non vuoto di *punti* (elementi) tale che sia data un'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(V) \times \mathcal{A}(V) &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

Che alla coppia di punti  $(P, Q)$  associa il vettore di  $V$  con punto iniziale  $P$  e punto finale  $Q$  e tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

1.  $\forall P \in \mathcal{A}(V), \forall v \in V$  esiste un unico punto  $Q \in \mathcal{A}(V)$  tale che  $\overrightarrow{PQ} = v$ .
2.  $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}(V)$  terna di punti di  $\mathcal{A}(V)$  si ha  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

#### DEFINIZIONE 11.8.1. RIFERIMENTO AFFINE E COORDINATE AFFINI.

Un **referimento affine**  $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$  sullo spazio  $\mathcal{A}(V)$  è assegnato fissando un punto  $O \in \mathcal{A}(V)$  detta **origine** ed una base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  di  $V$ . Dunque, per ogni  $P \in \mathcal{A}(V)$  si ha la  $n$ -upla  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  dette *coordinate affini* del punto  $P \in \mathcal{A}(V)$  (uniche per riferimento affine fissato) tale per cui:

$$P = \overrightarrow{OV} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad (11.26)$$

Per i nostri scopi, parleremo spesso degli spazi affini di dimensione  $n$  su  $\mathbb{K}$ .

#### DEFINIZIONE 11.8.2. AFFINITÀ.

Un'**affinità** o **trasformazione lineare affine** di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un'applicazione:

$$\varphi : \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \quad (11.27)$$

Della forma  $\varphi(x) = Ax + b$  con  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  un'applicazione lineare invertibile e  $b$  una *traslazione*.

#### DEFINIZIONE 11.8.3. SOTTOSPAZIO AFFINE.

Un **sottospazio affine** di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un *traslato* di un sottospazio vettoriale  $W \subseteq \mathbb{K}^n$ :

$$S = W + x_0 = \{w + x_0 \mid w \in W, x_0 \in \mathcal{A}(W)\} \quad (11.28)$$

**OSSERVAZIONI.**

- $W$  è l'unico traslato di  $S$  per l'origine ( $x_0 = O$ ) e si dice **sottospazio direttore** di  $S$ , cioè ne dà appunto la *direzione*. Si definisce  $\dim S := \dim W$ .
- Un punto in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un sottospazio affine di dimensione 0 ( $W = \{0\}$ ; dopotutto non ha particolarmente senso parlare di direzione del punto).
- Una **retta affine**  $r$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un sottospazio affine di dim 1:  $W = \mathcal{L}(v)$ , cioè  $r$  si può individuare assegnando un punto  $P \in r$  e un qualsiasi vettore  $v$  *parallelo* alla retta  $r$ .
- Un **piano affine**  $\pi$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un sottospazio affine di dim 2:  $W = \mathcal{L}(v, w)$ , cioè  $\pi$  si può individuare assegnando un punto  $P \in r$  e una coppia di vettori l.i. *paralleli* al piano  $\pi$ .
- Un **iperpiano affine** è un sottospazio di dimensione  $n + 1$ .
- Due sottospazi affini della stessa dimensione si dicono **paralleli** se hanno lo stesso sottospazio direttore.

**ESEMPIO.** Consideriamo  $r = W + x_0$  retta affine, che ha dunque  $\dim r = \dim W = 1$ .  $W$  è la retta vettoriale in  $\mathbb{K}^n$ , mentre un qualunque  $v \in W \setminus \{0\}$  è la *direzione* della retta.

Un sottospazio affine  $S \subseteq \mathbb{K}^n$  può essere descritti con equazioni cartesiane oppure in forma parametrica.

**Equazioni cartesiane.**  $S$  è visto come l'insieme delle *soluzioni* del seguente sistema lineare:

$$Ax = b \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \quad (11.29)$$

Con  $b$  che descrive la traslazione dovuta a  $x_0 \in \mathcal{A}(W)$ . In tal caso  $W$  è il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$Ax = 0 \quad (11.30)$$

**Forma parametrica.** Supponiamo  $\dim S = \dim W = m$ . Siano  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$  i vettori di una base di  $W$ ; rispetto ad una base di  $\mathbb{K}^n$ , e dunque rispetto ad un sistema di riferimento affine con origine  $O$ , essi sono espressi nelle componenti:

$$v_i = (V_{i,1}, \dots, V_{i,n}) \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$$

Consideriamo  $S = W + c$ , con il punto  $c = (C_1, \dots, C_n)$  rispetto allo stesso sistema affine di prima.

I punti  $x$  di  $S$  in forma parametrica sono dati da:

$$x = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m + c \quad t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K} \quad (11.31)$$

Da cui otteniamo il sistema  $n \times (m + 1)$  seguente:

$$\begin{cases} X_1 = t_1 V_{1,1} + \dots + t_m V_{m,1} + C_1 \\ \vdots \\ X_n = t_1 V_{1,n} + \dots + t_m V_{m,n} + C_n \end{cases} \quad (11.32)$$

**ESEMPIO.** La retta  $r$  ( $\dim W = 1$ ) passante per  $c$  con direzione  $v$  è descritto parametricamente da:

$$\begin{cases} X_1 = tV_1 + c_1 \\ \vdots \\ X_n = tV_n + c_n \end{cases}$$

Consideriamo ora lo spazio proiettivo numerico:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^{n+1})$$

E i punti in coordinate omogenee  $(x_0 : \dots : x_n)$  rispetto ad un dato sistema di riferimento proiettivo. Consideriamo il seguente sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n$ :

$$U_0 := \{P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\} \quad (11.33)$$

La condizione  $x_0 \neq 0$  è *ben posta*; infatti, se  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , allora  $x_0 \neq 0 \iff \lambda x_0 \neq 0$ .

Consideriamo anche il suo complementare, che è l'iperpiano coordinato rispetto alla prima coordinata omogenea:

$$\mathbb{P}^n \setminus U_0 = H_0 = \{P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \{P = (0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n\} \quad (11.34)$$

Sia  $P \in U_0$ : allora essendo  $a_0 \neq 0$  si ha  $P = (a_0 : \dots : a_n) = \left(1 : \frac{a_1}{a_0} : \dots : \frac{a_n}{a_0}\right)$ . In particolare,  $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$  sono univocamente determinate da  $P$ .

**ESEMPIO.** Sia  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{\text{rette vettoriali in } \mathbb{R}^3\}$  con punti di componenti  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Allora  $H_0$  è una retta proiettiva in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e risulta:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{P = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \{P = (0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^n\} \\ &= \{\text{rette vettoriali di } \mathbb{R}^3 \text{ contenute nel piano affine } x_0 = 0\} \end{aligned}$$

Infatti, prendiamo  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$  e consideriamo il piano  $x_0 = 1$ , parallelo al piano  $x_0 = 0$ . Se  $r \subseteq \mathbb{R}^3$  è una retta vettoriale che *non* appartiene al piano affine  $\{x_0 = 0\}$  ( $r \not\subseteq \{x_0 = 0\}$ ),  $r$  interseca il piano  $x_0 = 1$  in un solo punto! In particolare, se  $r$  ha direzione  $(a_0, a_1, a_2)$ , il punto nel piano  $\{x_0 = 1\}$  avrà coordinate  $\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}\right)$ .

Possiamo identificare  $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$  con  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ . Consideriamo le due funzioni seguenti:

$$\begin{aligned} j = j_0 : \quad \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) &\longrightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^n & \phi : \quad U_0 \subseteq \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \\ (X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (1 : x_1 : \dots : X_n) & (x_0 : \dots : X_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{aligned} \quad (11.35)$$

- $\phi$  è ben definita, dato che  $x_0 \neq 0$  per definizione di  $U_0$ .
- $j$  e  $\phi$  sono l'una l'inversa dell'altra:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) &\xrightarrow{j} U_0 \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \\ (X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (1 : X_1 : \dots : X_n) \longmapsto (X_1, \dots, X_n) \\ \\ U_0 &\xrightarrow{\phi} \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{j} U_0 \\ (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \longmapsto \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right) = (x_0 : \dots : x_n) \end{aligned}$$



Si ha dunque che  $j$  e  $\phi$  sono *biunivoche*. In questo modo identifichiamo  $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$  con  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ , mentre l'iperpiano  $H_0$  corrisponde allo spazio proiettivo di dimensione  $n-1$ ; si ha dunque:

$$\mathbb{P}^n = U_0 \sqcup H_0 = \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \sqcup \mathbb{P}^{n-1} \quad (11.36)$$

La coppia  $(U_0, j)$  è detta **carta affine** di  $\mathbb{P}^n$ .

In altre parole,  $\mathbb{P}^n$  si può vedere come un'estensione o *ampliamento* dello spazio affine  $\mathbb{K}^n$ . Diciamo allora che:

- I punti di  $H_0$  sono detti **punti impropri** o **punti all'infinito**.
- $H_0$  è detto **iperpiano improprio** o **iperpiano all'infinito**.
- I punti di  $U_0 = \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  sono detti **punti propri**.

**INTUITIVAMENTE...** In molti casi, possiamo liberamente parlare di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  come lo spazio vettoriale  $\mathbb{K}^n$  inteso in senso *geometrico* come insieme di punti con un punto qualunque come origine.

**ESEMPIO.** Consideriamo la retta proiettiva  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ . L'iperpiano all'infinito è:

$$H_0 = \{P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 = 0\} = \{(0 : 1)\}$$

Mentre invece l'insieme dei punti propri è:

$$U_0 = \{P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 \neq 0\} = \{(0 : 1)\}$$

In particolare, si ha la corrispondenza biunivoca  $U_0 \xrightarrow{1:1} \mathbb{K}$ :

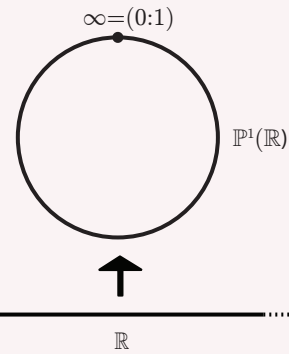
$$(x_0 : x_1) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right) \mapsto \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K}$$

In altre parole, si può vedere la retta proiettiva come il campo  $\mathbb{K}$  con l'aggiunto di un unico punto, l'*infinito*  $\infty$ .

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \cup (0 : 1) = \mathbb{K} \cup \{\infty\} \quad (11.37)$$

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , essendo  $S^1 \setminus \{1 \text{ punto}\} \cong \mathbb{R}$ , si ha:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^1 \quad (11.38)$$



### 11.8.1 Chiusura proiettiva di un sottospazio affine

**DEFINIZIONE 11.8.4.** CHIUSURA PROIETTIVA.

Sia  $r \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  una retta affine. La **chiusura proiettiva** di  $r$  è il sottospazio proiettivo  $\bar{r} \subseteq \mathbb{P}^n$  generato da  $r \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ .

**PROPOSIZIONE 11.8.o.**  $\bar{r}$  è una *retta proiettiva* e si ha:

$$\bar{r} = r \cup P_\infty \quad (11.39)$$

Dove  $P_\infty = \bar{r} \cap H_0$  è detto *punto all'infinito* o *punto improprio* della retta  $r$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  la direzione di  $r$  e  $w \in r$  un punto della retta. Allora  $r$  ha descrizione parametrica in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ :

$$\begin{cases} X_1 = tv_1 + w_1 \\ \vdots \\ X_n = tv_n + w_n \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

Consideriamo la retta proiettiva  $R \subseteq \mathbb{P}^n$  con descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = tv_1 + sw_1 \\ \vdots \\ x_n = tv_n + sw_n \end{cases} \quad (s:t) \in \mathbb{P}^1$$

$R$  è la retta proiettiva per i punti:

$$t = 0 : (1 : w_1 : \dots : w_n) \quad t = 1 : (0 : v_1 : \dots : v_n) = P_\infty$$

Ponendo  $s = 1$  otteniamo:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = tv_1 + w_1 \\ \vdots \\ x_n = tv_n + w_n \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

Al variare di  $t \in \mathbb{K}$ , questi sono tutti e soli i punti di  $j(r) \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ . Si ha dunque che  $R$  è una retta proiettiva contenente  $r$ :

$$\begin{aligned} R &= r \cup P_\infty \\ P_\infty &= R \cap H_0 = \{(0 : v_1 : \dots : v_n)\} \end{aligned}$$

$R$  è necessariamente il più piccolo sottospazio proiettivo contenente  $r$ , dato che è la retta più un solo punto. Pertanto,  $R = \bar{r}$ .  $\square$

**OSSERVAZIONI.**

1. Il punto improprio di  $r$  è:

$$P_\infty = (0 : v_1 : \dots : v_n)$$

E corrisponde esattamente alla *direzione*  $v = (v_1, \dots, v_n)$  di  $r$ . Poiché  $P_\infty = [v]$  con  $v$  la direzione di  $r$ , ne segue che l'iperpiano improprio di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è:

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus \{P_\infty\} = \{\text{rette vettoriali in } \mathbb{K}^n\} = \\ &= \{\text{direzioni delle rette affini in } \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)\} \end{aligned}$$

2. Due rette affini  $r_1, r_2 \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  hanno lo stesso punto improprio se e solo hanno la stessa direzione, cioè se sono *parallele*.

Se  $r_1 \neq r_2$  e  $r_1$  e  $r_2$  sono parallele, allora  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ , ma  $\overline{r_1} \cap \overline{r_2} = P_\infty$  in  $\mathbb{P}^n$ . Ciò ci porta a dire che due rette parallele  $r_1$  e  $r_2$  si incontrano sempre all'infinito!

3. Se  $n = 2$ , cioè operando in  $\mathbb{P}^2$ , due rette distinte  $r_1, r_2 \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  sono o incidenti o parallele, ma in  $\mathbb{P}^2$  si intersecano sempre.
4. Viceversa: sia  $l \subseteq \mathbb{P}^n$  una retta proiettiva. Abbiamo due casi:
  - $l \subseteq H_0, l \cap U_0 = \emptyset$ .
  - $l \not\subseteq H_0 \implies l + H_0 = \mathbb{P}^n$ .

Infatti, si ha che  $l + H_0$  è un sottospazio proiettivo che contiene strettamente  $H_0$ , dato che  $l \not\subseteq H_0$ , e usando la formula di Grassmann otteniamo:

$$\dim(l + H_0) = \dim l + \dim H_0 - \dim(l \cap H_0) = 1 + n - 1 + 0 = n = \dim \mathbb{P}^n \implies l + H_0 = \mathbb{P}^n$$

Sempre dalla formula di Grassmann:

$$\dim(l \cap H_0) = 0 \implies l \cap H_0 = \{1 \text{ punto}\} = \{Q\}$$

Cioè  $l \cap U_0 = l \setminus \{Q\}$ . In altre parole,  $l$  è una retta affine in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  con un punto improprio  $Q$  e necessariamente  $l$  è la chiusura proiettiva di  $l \setminus \{Q\}$ .

5. Sia  $n = 2$ , cioè operiamo in  $\mathbb{P}^2$ . Una retta  $r \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  è descritta da un'equazione lineare:

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad (11.40)$$

Con la corrispondenza biunivoca fra le coordinate  $(x, y)$  vettoriali e  $(X_1, X_2)$  affini. Abbiamo tuttavia anche la corrispondenza con le coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^2$ , rispettivamente  $(x: y: z)$  e  $(0: x_2: x_3)$ .

Chiamiamo  $(x: y: z)$  le coordinate omogenee su  $\mathbb{P}^2$  con:

$$H_0 = \{P = (x: y: z) \in \mathbb{P}^2 \mid z = 0\} = \{P = (x: y: 0) \in \mathbb{P}^2\}$$

Allora la chiusura proiettiva  $\bar{r} \subseteq \mathbb{P}^2$  di  $r$  ha in  $\mathbb{P}^2$  l'equazione lineare omogenea seguente:

$$ax + by + cz = 0 \quad (11.41)$$

Infatti, per  $z = 1$  si ottiene l'equazione di  $r$ , mentre ponendo  $z = 0$  (cioè il passaggio per  $H_0$ ) troviamo il punto improprio  $P_\infty$  di  $r$ :

$$\begin{cases} z = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases} \quad P_\infty = (-b: a: 0)$$

La direzione della retta  $ax + by + c = 0$  è data dal punto improprio  $P_\infty$  e corrisponde al vettore  $(-b, a: 0)$ .

Generalizziamo ora il concetto di chiusura proiettiva a un generico sottospazio affine.

**DEFINIZIONE 11.8.5.** CHIUSURA PROIETTIVA DI UN SOTTOSPAZIO.

Dato  $S \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  un sottospazio affine con  $S \neq \emptyset$ , la **chiusura proiettiva**  $\bar{S} \subseteq \mathbb{P}^n$  di  $S$  è il sottospazio proiettivo generato da  $S$ . Esso ha dimensione  $\dim \bar{S} = \dim S = m$ .

**Equazioni cartesiane.** Se  $S$  come sottospazio affine è dato in forma cartesiana dal sistema

lineare  $h \times (n+1)$  seguente:

$$Ax + b = 0 \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$$

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1 + \dots + a_{1,n}X_n + b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}X_1 + \dots + a_{h,n}X_n + b_h = 0 \end{cases}$$

Allora  $\bar{S}$  è descritto dal sistema lineare omogeneo  $h \times (n+1)$  in  $(x_0, \dots, x_n)$  seguente:

$$(A \mid b)x = 0 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n$$

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1x_0 = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \dots + a_{h,n}x_n + b_hx_0 = 0 \end{cases}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Studiamo le dimensioni di  $S$  e  $\bar{S}$  usando i sistemi cartesiani appena definiti:

$$\dim S = \dim \mathbb{K}^n - \text{rk}(A) = n - \text{rk}(A)$$

$$\dim \bar{S} = \dim \mathbb{P}^n - \text{rk}(A \mid b) - 1 = (n+1 - \text{rk}(A \mid b)) - 1 = n - \text{rk}(A \mid b)$$

Per Rouché-Capelli vale  $\text{rk } A = \text{rk}(A \mid b)$  in quanto  $S \neq \emptyset$ . In questo modo abbiamo dimostrato che  $\dim \bar{S} = \dim S$ .  $\square$

I *punti impropri* del sottospazio affine  $S$  sono dati da  $\bar{S} \cap H_0$ , con  $\bar{S}$  la chiusura proiettiva di  $S$  e  $H_0$  l'iperpiano improprio. Dal sistema  $(*)$  si ha che  $\bar{S} \cap H_0$  è dato da:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \dots + a_{h,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Esso corrisponde al sistema lineare omogeneo in  $\mathbb{K}^n$   $Ax = 0$  associato al sistema lineare  $Ax + b = 0$  che definisce  $S$ . In altre parole,  $\bar{S} \cap H_0$  corrisponde al *sottospazio vettoriale direttore*  $W \subseteq \mathbb{K}^n$  e vale  $\bar{S} \cap H_0 = \mathbb{P}^n(W)$  direzione di  $S$ . La sua dimensione per definizione di direzione è:

$$\dim(\bar{S} \cap H_0) = \dim S - 1 = \dim \bar{S} - 1$$

**Equazioni parametriche.** Se  $S$  ( $\dim S = m$ ) è data in *forma parametrica* e il sottospazio direttore  $W \subseteq \mathbb{K}^n$  ha una base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  (tali che  $v_i = (V_{i,1}, \dots, V_{i,n}) \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  per un dato sistema di riferimento affine), posto  $c \in S$  ricordiamo che l'espressione parametrica

di  $S$  è:

$$X = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m + c \quad t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} X_1 = t_1 V_{1,1} + \dots + t_m V_{m,1} + C_1 \\ \vdots \\ X_n = t_1 V_{1,n} + \dots + t_m V_{m,n} + C_n \end{cases}$$

Allora,  $\bar{S}$  è il sottospazio generato dagli  $m+1$  punti *indipendenti*:

$$(0: v_{i,1}: \dots: v_{i,n}) \quad i = 1, \dots, m \quad (1: c_1: \dots: c_n) \quad (11.42)$$

Pertanto,  $\bar{S}$  ha descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x_0 = t_0 \\ x_1 = t_1 v_{1,1} + \dots + t_m v_{m,1} + t_0 C_1 \\ \vdots \\ x_n = t_1 v_{1,n} + \dots + t_m v_{m,n} + t_0 C_n \end{cases}$$

Con  $(t_0: \dots: t_m) \in \mathbb{P}^m$ .

### 11.8.2 Un esempio di proiettività

Vediamo un esempio di proiettività di  $\mathbb{P}^1$ .

**ESEMPIO.** Si consideri  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$  con  $\infty = (0: 1)$ . Sia  $f$  una proiettività (dunque biunivoca) definita come:

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$(x_0: x_1) \longmapsto (ax_0 + bx_1: cx_0 + dx_1)$$

Si ha che  $f(0: 1) = (b: d)$ , mentre la sua controimmagine è  $f(-b: a) = (0: 1)$ ; infatti, siccome le coordinate sono omogenee, basta porre  $ax_0 + bx_1 = 0$ .

Sia  $t = \frac{x_1}{x_0}$  la coordinata affine su  $\mathbb{K}$ , se  $x_0 \neq 0$  tutti i punti  $(x_0: x_1)$  si possono scrivere come  $(x_0: x_1) = (1: \frac{x_1}{x_0}) = (1: t)$ , il che corrisponde al punto  $t \in \mathbb{K}$ . Vediamo ora come si comporta l'immagine grazie a queste osservazioni se  $ax_0 + bx_1 \neq 0$ :

$$f(x_0: x_1) = (ax_0 + bx_1: cx_0 + dx_1) = \left(1: \frac{cx_0 + dx_1}{ax_0 + bx_1}\right) = \left(1: \frac{x_0(c + d\frac{x_1}{x_0})}{x_0(a + b\frac{x_1}{x_0})}\right) = \left(1: \frac{dt + c}{bt + a}\right)$$

Dunque la proiettività  $f$  corrisponde alla trasformazione:

$$F: \mathbb{K} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\} \quad \text{con } F(t) = \begin{cases} \frac{dt+c}{bt+a}, & t \in \mathbb{K}, t \neq -\frac{a}{b} \\ \infty, & t = -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{b}, & t = \infty \end{cases}$$

Dove per  $t = -\frac{a}{b}$  si ottiene  $f(-b: a) = (0: 1) = \infty$ , mentre la prima equazione è detta *trasformazione lineare fratta*, che è definita sulla retta affine tranne dove si annulla il denominatore.

Notiamo che  $F$  diventa un'affinità  $F : \mathbb{K} \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}$   
 $t \longmapsto \alpha t + \beta$  se e solo se il denominatore  
 diventa una costante ponendo  $b = 0$ , ovvero se è della forma  $F(t) = \alpha$ , il che significa che  
 la proiettività fissa il punto all'infinito, ovvero  $f(0:1) = (0:1)$ , mentre la parte affine  
 viene mandata in sé stessa.  
 Questo ragionamento si può vedere anche in dimensione superiore.

### 11.8.3 Impraticchiamoci! Geometria affine e geometria proiettiva

**ESERCIZIO.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora, preso  $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea e  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  con la topologia quoziente, mostrare che  $U_0$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  e che  $j : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_0$  è un omeomorfismo.

**SOLUZIONE.** ...

### 11.9 SPAZI PROIETTIVI COMPLESSI

**RICORDIAMO...** Nel caso di  $\mathbb{R}^n$  si è già visto che lo spazio proiettivo reale è un quoziente del tipo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$ , dunque è dotato in maniera naturale di una topologia. Si può anche vedere come *quoziente della sfera*  $S^n$  dove si identificano i punti antipodali grazie alla *suriezione*  $\pi : S^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ; è anche una *varietà topologica compatta* di dimensione  $n$ . Inoltre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$  e abbiamo analizzato il piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Anche nel caso complesso per  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$  si ha in maniera naturale una topologia quoziente data dalla topologia euclidea su  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}$ . Vogliamo vedere che è una *varietà topologica compatta* di dimensione  $2n$ . Infatti, mentre  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è localmente euclideo di dimensione  $n$ , si ha che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  localmente si comporta come  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ , dunque la dimensione topologica è  $2n$ .

**TEOREMA 11.9.0.**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è una varietà topologica di dimensione  $2n$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **connesso**: è quoziente di  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , che è connesso.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **compatto**: per avere la tesi, si vuole vedere lo spazio come *quoziente di un compatto* o *immagine tramite una funzione continua di un compatto*. Ricordiamo la relazione di equivalenza:

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : w = \lambda z$$

Vogliamo ora *restringerci alla sfera complessa* (la cui dimensione è data da  $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \supset S^{2n+1}$ ) e dimostrare che ogni *punto del quoziente* è equivalente ad un *punto della sfera*. Per fare ciò si sfrutta la corrispondenza fra numeri complessi e

reali e la norma:

$$z_j = x_j + iy_j \implies z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \longleftrightarrow (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2}$$

$$\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (|x_j|^2 + |y_j|^2) \quad \wedge \quad \|\lambda z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda z_j|^2} = |\lambda| \|z\|, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Se  $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \implies \|z\| \neq 0$  e se  $\lambda = \frac{1}{\|z\|}$  si ha  $\underbrace{\frac{1}{\|z\|}}_{\in S^{2n+1}} \cdot z \sim z$ . Notiamo allora che

$\pi(S^{2n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , dunque  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è compatto.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è di **Hausdorff**: partiamo con una considerazione che segue dal punto precedente. Nel caso reale, i punti sulla sfera sono equivalenti solo se *antipodali*, nel caso complesso  $S^{2n+1}$  invece si ha, dati  $z, w \in S^{2n+1}$ :

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: w = \lambda z$$

Siccome  $w, z \in S^{2n+1}$  hanno norma unitaria  $1 = \|w\| = \|\lambda z\| = |\lambda| \|z\| = |\lambda|$ . Essendoci *infiniti* numeri di norma 1 in  $\mathbb{C}$ , allora ci sono *infiniti* numeri nella stessa classe, e quindi i punti  $\lambda z \in S^{2n+1}$  sono tutti equivalenti.

Consideriamo ora  $\pi_0 = \pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Per dimostrare che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è di Hausdorff, è sufficiente dimostrare che  $\pi_0$  è un'identificazione *chiusa* per il teorema 4.3 (pag. 55).

Sia  $C \subset S^{2n+1}$  un chiuso. Allora  $\pi_0(C)$  è chiuso in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \iff \pi_0^{-1}(\pi_0(C))$  è chiuso in  $S^{2n+1}$ . Notiamo che:

$$\pi_0(z) \sim \pi_0(w) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = 1: w = \lambda z$$

In effetti la relazione di equivalenza su  $S^{2n+1}$  viene da un'azione del gruppo  $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$  rispetto al prodotto con elemento neutro 1:

$$F : S^1 \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$$

$$(\lambda, z) \longmapsto \lambda z$$

◇  $F$  è un'applicazione continua.

◇  $S^1 \times S^{2n+1}$  è compatto e **Hausdorff**.

$F$  è *chiusa* in quanto funzione continua da un compatto in **Hausdorff**.

Dato un chiuso  $C \subseteq S^{2n+1}$ , prendendo la controimmagine dell'immagine agisco sui punti di  $C$  con tutti gli elementi di  $S^1$ , cioè prendo tutte le orbite che intersecano  $C$ , ottenendo quanto segue:

$$\pi_0^{-1}(\pi_0(C)) = F(\underbrace{S^1 \times C}_{\text{chiuso in } S^1 \times S^{2n+1}}) \subseteq S^{2n+1}$$

Segue che  $\pi_0^{-1}(\pi_0(C))$  chiuso e  $\pi_0(C)$  chiuso in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , cioè  $\pi_0$  è applicazione chiusa e  $\pi_0$  identificazione per il teorema 4.1 (Manetti 5.4, 50).

Pertanto  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è anche quoziente di  $S^{2n+1}$ . Siccome  $S^{2n+1}$  è un compatto in un **Hausdorff** e  $\pi_0$  è un'identificazione *chiusa* allora  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **Hausdorff** per il teorema già citato in precedenza.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **localmente euclideo di dimensione  $2n$** : per dimostrarlo sfruttiamo le costruzioni introdotte a pag. 218. Consideriamo la famiglia di insiemi:

$$U_j := \{z_j \neq 0\} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus H_j, \text{ con } H_j \text{ } j\text{-esimo iperpiano coordinato.}$$

Per semplicità sia  $j = 0$ .

Si consideri la proiezione al quoziente  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  e la controimmagine  $\pi^{-1}(U_0) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \mid z_0 \neq 0\}$ , aperto in  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  in quanto abbiamo tolto un iperpiano. Segue che  $U_0$  è aperto in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  e lo stesso vale per tutti gli  $U_j$ . Si considerano le seguenti mappe biunivoche, una inversa dell'altra:

$$\begin{aligned} j : \quad \mathbb{C}^n &\longrightarrow U_0 & \phi : \quad U_0 &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (1 : z_1 : \dots : z_n) & (z_0 : \dots : z_n) &\longmapsto \left( \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right) \end{aligned}$$

Mostriamo che  $j$  e  $\phi$  siano omeomorfismi; siccome sono già biunivoche e una inversa dell'altra basta dimostrare che sono entrambe *continue*.

Per mostrare che  $j$  è continua sfruttiamo il diagramma a lato, ovvero la fattorizzazione di  $j$  in  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  tramite:

$$\tilde{j}((z_1, \dots, z_n)) = (1, z_1, \dots, z_n)$$

E la proiezione  $\pi$ , che in questo caso opera nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \\ \tilde{j} \nearrow & & \searrow \pi \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{j} & U_0 \end{array}$$

$$\pi((1, z_1, \dots, z_n)) = (1 : z_1 : \dots : z_n)$$

Siccome  $\tilde{j}$  e  $\pi$  sono continue, allora anche la loro composizione  $j$  lo è.

Per la continuità dell'inversa  $\phi$  si procede con la fattorizzazione della controimmagine  $\pi^{-1}$  tramite una restrizione dell'inversa di  $\pi$  a  $\pi^{-1}U_0$ :

$$p := \pi|_{\pi^{-1}(U_0)} : \pi^{-1}(U_0) \longrightarrow U_0$$

E tramite  $\hat{\phi}$ :

$$\hat{\phi}(z_0, \dots, z_n) = \left( \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_0) \subset \mathbb{C}^{n+1} & \\ p \swarrow & & \searrow \hat{\phi} \\ U_0 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Entrambe sono *continue*: la prima è la restrizione di una funzione continua e la seconda, essendo ben definita ( $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ ), risulta banalmente continua: inoltre, quest'ultima lavora solo con vettori e non con classi di equivalenza!



Per dimostrare che  $\phi$  è continua sfruttiamo le proprietà della topologia quoziente (vedasi 4.1.1), dimostrando che  $p$  è un'identificazione: è già continua e suriettiva, dunque basta solo che sia aperta o chiusa per il teorema 4.1.

Osserviamo che  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è anch'essa un quoziente dato dall'azione del gruppo  $^a G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  rispetto al prodotto per la moltiplicazione su  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . In particolare, è un'azione per omeomorfismi. Infatti, fissato  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \theta_\lambda : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto \lambda z \end{aligned}$$

È continua: per la proposizione 5.1 si ha che  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è un'applicazione aperta, pertanto anche  $p$  che è una sua restrizione ad un aperto è aperta. Dalle considerazioni di cui sopra  $p$  è un'identificazione. Ne segue che  $U_0$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  omeomorfo a  $\mathbb{C}^n$  e quindi a  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Allo stesso modo,  $\forall j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $U_j$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  omeomorfo a  $\mathbb{C}^n$  tramite la mappa-

$$\begin{aligned} \phi_j : U_j &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_0 : \dots : z_n) &\longmapsto \left( \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \end{aligned}$$

Siccome in *coordinate omogenee* c'è sempre un elemento *non* nullo (si lavora su  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ) allora ogni punto sta in uno degli aperti  $U_j$ , cioè:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U_0 \cup \dots \cup U_n \implies \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è *localmente euclideo* di dimensione  $2n$ , dunque è una *varietà topologica compatta*. □

<sup>a</sup>Questo vale in generale per gli spazi proiettivi, si veda .

#### OSSERVAZIONI.

- Su un campo  $\mathbb{K}$  qualsiasi si ha sempre la mappa  $\phi_j$ , una corrispondenza biunivoca fra i sottoinsiemi  $U_j$  (complementari di un iperpiano coordinato) e  $\mathbb{K}^n$  (senza aspetto topologico): vale sempre che lo spazio proiettivo è unione di tali  $U_j$ . In particolare, nel caso reale, tali  $U_j$  sono *aperti* ed il ragionamento è *analogo* a quello fatto poc'anzi nel caso complesso.
- Non abbiamo dimostrato che è a base numerabile perché, essendo compatto, segue dal teorema 9.1 (pag. 134), inoltre si potrebbe dimostrare facilmente "a mano" sfruttando che gli aperti  $U_j$  sono a base numerabile, dunque anche la loro unione finita lo è.

##### 11.9.1 Retta proiettiva complessa

Cosa succede per la *retta proiettiva complessa*? Essa è una varietà topologica compatta di dimensione 2 (dunque una *superficie topologica compatta*) che abbiamo già classificato! Scopriamo di che superficie si tratta. Si ha:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{(0:1)\} \text{ con } U_0 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad (11.43)$$

In altre parole, la retta proiettiva complessa è un *piano* unito ad un *punto*. Dimostriamo ora che è omeomorfa a  $S^2$ , detta anche **sfera di Riemann**, e analizziamo poi la differenza con il piano proiettivo reale.

**TEOREMA 11.9.1.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$

**INTUITIVAMENTE...** Per ottenere la sfera si può pensare di *richiudere* il piano  $\mathbb{R}^2$  su se stesso, aggiungendo il punto all'infinito  $\{(0: 1)\}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Costruiamo l'omeomorfismo con  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  sfruttando la *proiezione stereografica*. Consideriamo:

$$\begin{array}{ccccccc} S^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow{p_N} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{k} & \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & U_0 \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & F|_{S^2 \setminus \{N\}} \end{array}$$

Con  $p_N : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  la *proiezione stereografica* dal polo nord  $N = (0, 0, 1)$ ,

$$\begin{array}{ccc} k : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} j : \mathbb{C} & \longrightarrow & U_0 \\ w & \longmapsto & (1: w) \end{array}.$$

Allora definiamo una funzione  $F$  su  $S^2 \setminus \{N\}$ :

$$F|_{S^2 \setminus \{N\}} := j \circ k \circ p$$

Poniamo  $F(N) := (0: 1)$  in quanto sono gli unici punti rimasti da dover “mappare”, ricordando che  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{(0: 1)\}$ .

Siccome  $j$ ,  $k$ ,  $p$  sono *tutti* omeomorfismi, allora la loro composizione  $F|_{S^2 \setminus \{N\}}$  è biunivoca e continua su  $S^2 \setminus \{N\}$ .

Perché  $F$  sia continua in tutti i suoi punti basta verificarla che lo sia in un intorno (aperto) contenente  $N$  perché valga il lemma di incollamento. Sfruttiamo la proiezione stereografica dal polo sud  $S = (0, 0, -1)$  scegliamo l'aperto  $S^2 \setminus \{S\}$ , intorno di  $N$ . Dobbiamo mostrare la continuità di  $F|_{S^2 \setminus \{S\}}$ .

Scriviamo le due proiezioni stereografiche, sia da  $N$ , sia da  $S$ : fissato un punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  sulla sfera, allora consideriamo le semirette uscenti da  $N$  e da  $S$  che passano per  $P_0$ :

$$\begin{array}{ccc} NP_0: \begin{cases} x = 0 + tx_0 \\ y = 0 + ty_0 \\ z = 1 + t(z_0 - 1) \end{cases} & P_0 - N & SP_0: \begin{cases} x = 0 + tx_0 \\ y = 0 + ty_0 \\ z = -1 + t(z_0 + 1) \end{cases} & P_0 - S \end{array}$$

Per trovare le immagini delle proiezioni stereografiche intersechiamo le due semirette con il piano  $xy$ , cioè poniamo  $z = 0$ :

$$N : 1 + t(z_0 - 1) = 0 \implies t = \frac{1}{1 - z_0} \quad S : -1 + t(z_0 + 1) = 0 \implies t = \frac{1}{1 + z_0}$$

Notiamo che i denominatori non si annullano in entrambi i casi per la definizione delle proiezioni stereografiche sulla sfera meno  $N$  ed  $S$  rispettivamente.

Ne segue che l'immagine di  $\mathbb{R}^2$  tramite la mappa standard  $k$  è:

$$N : \left( \frac{x_0}{1-z_0}, \frac{y_0}{1-z_0} \right) \mapsto w = \frac{x_0}{1-z_0} + i \frac{y_0}{1-z_0} \in \mathbb{C} \quad S : \left( \frac{x_0}{1+z_0}, \frac{y_0}{1+z_0} \right) \mapsto u = \frac{x_0}{1+z_0} + i \frac{y_0}{1+z_0} \in \mathbb{C}$$

Si ha che  $w = \frac{1}{\bar{u}}$  e, viceversa,  $u = \frac{1}{\bar{w}}$ ; infatti, quando  $P_0 \in S^2 \setminus \{N, S\}$  allora  $w, u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Verifichiamolo usando le proprietà dei numeri complessi:

$$\frac{1}{\bar{u}} = \frac{1}{\frac{x_0}{1+z_0} - i \frac{y_0}{1+z_0}} = \frac{1+z_0}{x_0 - iy_0} \stackrel{!}{=} \frac{(x_0 + iy_0)(1+z_0)}{x_0^2 + y_0^2} \stackrel{!!}{=} \frac{(x_0 + iy_0)(1+z_0)}{1-z_0^2} = \frac{x_0 + iy_0}{1-z_0} = w$$

dove l'uguaglianza (!) vale perché, in quanto  $P_0 \neq N, S$  allora  $x_0 + iy_0 \neq 0$ , mentre quella (!!) segue dal fatto che il punto sta sulla sfera, per cui  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \implies x_0^2 + y_0^2 = 1 - z_0^2$ . Abbiamo dunque ottenuto  $F|_{S^2 \setminus \{N, S\}}$  come una composizione di mappe:

$$\begin{array}{ccccccc} S^2 \setminus \{N, S\} & \xrightarrow{p_N} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{k} & \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & U_0 \\ & & & & & \nearrow & \\ & & & & & F|_{S^2 \setminus \{N, S\}} & \end{array}$$

Dove  $j(w) = (1 : w) = \left(1 : \frac{1}{\bar{u}}\right) = (\bar{u} : 1)$ , lavorando in coordinate omogenee. Inoltre,  $F$  si estende in modo continuo su  $S^2 \setminus \{S\}$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} S^2 \setminus \{S\} & \xrightarrow{p_S} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{k} & \mathbb{C} & \xrightarrow{c} & \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & U_0 \\ P \longmapsto & & & & u & \longmapsto & \bar{u} & \longmapsto & (\bar{u} : 1) \end{array}$$

Con  $c$  coniugio dei complessi (che è un omeomorfismo). In questo modo  $F|_{S^2 \setminus \{S\}}$  è composizione di omeomorfismi e quindi continua.

Dunque  $F$  è continua, chiusa (in quanto funzione da  $S^2$  compatto in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  **Hausdorff**) e biunivoca, pertanto  $F$  è un *omeomorfismo*.  $\square$

<sup>a</sup>Le equazioni sono scritte in *forma parametrica*, pertanto abbiamo evidenziato il punto per cui passano e la direzione.

**OSSERVAZIONE.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \neq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Notiamo che  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  e  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono entrambe compattificazioni del piano, ma in modo *profondamente diverso*!

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ , è l'unione di un **piano** con un **punto all'infinito** ed abbiamo appena dimostrato essere omeomorfo alla *sfera di Riemann*  $S^2$ .
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \cup S^1$ , è il piano unito alla retta impropria  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ; topologicamente, esso è l'**interno del disco** omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  unito al bordo  $S^1$  con la relazione di equivalenza per i punti antipodali. Per il teorema di classificazione delle superfici compatte (pag. 143), sappiamo che  $S^2 \not\cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Nei nostri precedenti studi di Topologia abbiamo messo in primo piano lo studio delle *proprietà topologiche*, quegli aspetti di uno spazio topologico che si preservano sotto *omeomorfismi*. Anche nella Geometria Proiettiva risulta di fondamentale importanza la ricerca di **invarianti** rispetto alle proiettività.

Nella geometria Euclidea del piano diverse trasformazioni mantengono relazioni metriche come distanze, angoli e rapporti di distanze, ma passando alla *retta proiettiva* la maggior parte di queste vengono *distorte*. Tuttavia, già nella matematica del tardo periodo greco si trovò che un *rapporto di rapporto di distanze* sul piano si preservava tramite certe trasformazioni.

Questo concetto, approfondito e generalizzato (separandolo completamente dalla *distanza Euclidea*) nell'ottica della Geometria proiettiva nel *secolo XIX*, diventò il **birapporto**, risultando uno degli invarianti proiettivi più usati.

**DEFINIZIONE 11.10.0. BIRAPPORTO.**

Sia  $\mathbb{P}^1(V)$  una retta proiettiva, ovvero  $\dim V = 2$ .

Siano  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$  dei punti con  $P_1, P_2, P_3$  distinti. Il **birapporto** dei punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (ordinati) è:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\} \text{ con } \beta = \infty \text{ se } y_0 = 0 \quad (11.44)$$

Dove  $(y_0 : y_1)$  sono le coordinate di  $P_4$  nel riferimento proiettivo in cui  $P_1$  e  $P_2$  sono i punti fondamentali e  $P_3$  il punto unità, cioè  $P_1 = (1 : 0), P_2 = (0 : 1), P_3 = (1 : 1)$ .

**OSSERVAZIONI.**

1.  $y_0, y_1 \in \mathbb{K} \implies \beta \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
2.  $\beta$  è ben definito perché  $P_1, P_2, P_3$  sono distinti e quindi sono in posizione generale<sup>a</sup>, ovvero determinano in maniera univoca il riferimento proiettivo per il teorema 11.1, pag. 208.
3. Per ipotesi i primi tre punti sono distinti, mentre non si fanno ipotesi sul quarto punto; vediamo cosa succede in alcuni casi speciali:

$$\begin{aligned} P_4 = P_1 &\iff (y_0 : y_1) = (1 : 0) &\iff \beta = 0 \\ P_4 = P_2 &\iff (y_0 : y_1) = (0 : 1) &\iff \beta = \infty \\ P_4 = P_3 &\iff (y_0 : y_1) = (1 : 1) &\iff y_0 = y_1 &\iff \beta = 1 \end{aligned}$$

Dunque  $\beta \in \{0, 1, \infty\}$  esattamente quando  $P_4$  coincide con uno dei primi 3 punti.

Quindi, se  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono distinti, allora  $\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ .

Viceversa se  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$  e  $P_4 = (1 : a)$  allora  $\beta = a$ , dunque  $\beta$  assume tutti i valori possibili in  $\mathbb{K}$ .

<sup>a</sup>In una retta proiettiva essere distinti equivale ad essere in posizione generale.

Vogliamo ora scoprire come si calcola il birapporto non solo nel sistema di riferimento della definizione, ma in uno qualunque.

**TEOREMA 11.10.0.** Siano  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$  dei punti nella retta proiettiva con  $P_1, P_2, P_3$  distinti. Supponiamo che  $P_i = (\lambda_i : \mu_i), i = 1, \dots, 4$ . Allora:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}} \quad (11.45)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poichè  $P_1 \neq P_2$ , si ha che  $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$  sono una base di  $\mathbb{K}^2$ . Siano ora:

$$(*) \quad a, b \in \mathbb{K}: (\lambda_3, \mu_3) = a(\lambda_1, \mu_1) + b(\lambda_2, \mu_2) = (a\lambda_1, a\mu_1) + (b\lambda_2, b\mu_2)$$

In sostanza, facciamo una *combinazione lineare* e portiamo dentro gli scalari. Per costruzione con questi vettori ottengo la base che dà il riferimento proiettivo con  $P_1, P_2$  punti fondamentali e  $P_3$  punto unità (riscalando in modo tale che sia la somma degli altri due vettori). Per ottenere  $P_4$ , scrivo il corrispettivo vettore come una combinazione lineare dei vettori della base:

$$(*) \quad \exists c, d \in \mathbb{K}: (\lambda_4, \mu_4) = c(a\lambda_1, a\mu_1) + d(b\lambda_2, b\mu_2)$$

Segue che  $P_4$  ha coordinate  $(c: d)$  nel nuovo riferimento proiettivo e quindi  $\beta = \frac{d}{c}$ . Per non appesantire la scrittura useremo come la seguente notazione per i determinanti:

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix}$$

Notiamo che la prima combinazione lineare  $(*)$  dà il seguente sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite  $a, b$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_3 \\ \mu_1 a + \mu_2 b = \mu_3 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con il metodo di Cramer<sup>a</sup> si ottiene:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}$$

La seconda combinazione lineare  $(*)$  invece dà un sistema lineare in  $c, d$ , dove sostituisco i valori di  $a, b$  trovati:

$$\begin{cases} (a\lambda_1)c + (b\lambda_2)d = \lambda_4 \\ (a\mu_1)c + (b\mu_2)d = \mu_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}} \lambda_1 c + \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}} \lambda_2 d = \lambda_4 \\ \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}} \mu_1 c + \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}} \mu_2 d = \mu_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\delta_{32}\lambda_2)c + (\delta_{13}\lambda_2)d = \delta_{12}\lambda_4 \\ (\delta_{32}\mu_2)c + (\delta_{13}\mu_2)d = \delta_{12}\mu_4 \end{cases}$$

Applicando ancora Cramer, poiché il determinante è lineare in ogni colonna, possiamo estrarre i  $\delta_{ij}$  dalle colonne e riscriverli *riordinando gli indici*: scambiamo l'ordine delle colonne cambiando il segno, ma facendolo sia al numeratore, sia al denominatore, i segni si semplificano e lo stesso vale per  $d$ :

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{12}\lambda_4 & \delta_{13}\lambda_2 \\ \delta_{12}\mu_4 & \delta_{13}\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{32}\lambda_1 & \delta_{13}\lambda_2 \\ \delta_{32}\mu_1 & \delta_{13}\mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{\delta_{12}\delta_{13}\delta_{42}}}{\cancel{\delta_{32}\delta_{13}\delta_{12}}} = \frac{-\delta_{24}}{\delta_{23}} = \frac{\delta_{24}}{\delta_{23}}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{32}\lambda_1 & \delta_{12}\lambda_4 \\ \delta_{32}\mu_1 & \delta_{12}\mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{32}\lambda_2 & \delta_{12}\lambda_2 \\ \delta_{32}\mu_2 & \delta_{12}\mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{\delta_{32}\delta_{12}\delta_{14}}}{\cancel{\delta_{32}\delta_{13}\delta_{12}}} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{13}}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{d}{c} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{13}} \cdot \frac{\delta_{23}}{\delta_{24}}$$



<sup>a</sup>Nelle “Note aggiuntive”, a pag. 276, si possono trovare alcuni brevi cenni al metodo di Cramer.

**OSSERVAZIONE.** Il birapporto può anche essere definito tramite questa formula, che è *ben definita*: supponendo di moltiplicare i punti per uno scalare, la stessa costante appare al numeratore e al denominatore, dunque si semplifica, pertanto il birapporto così definito *non dipende* dalla scelta delle coordinate omogenee. Inoltre, al denominatore il primo determinante è sempre diverso da 0 perché *i punti sono distinti*, mentre il secondo determinante al denominatore è *nullo* se e solo  $P_2 = P_4$ , ottenendo la definizione originale.

**TIPS & TRICKS!** Se tutti e 4 i punti sono diversi da  $(0:1)$ , ovvero se  $\forall i, \lambda_i \neq 0$   $P_i = (1:z_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  allora:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} \quad (11.46)$$

Infatti,  $P_i = (\lambda_i: \mu_i) = (1: z_i)$ , cioè  $z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$ ; per la linearità delle colonne si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1} & \frac{\mu_4}{\lambda_4} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_4 (z_4 - z_1)$$

Procedendo allo stesso modo con gli altri determinanti e applicando la definizione equivalente di *birapporto*, si ottiene il risultato di sopra in quando i  $\lambda$  si semplificano.

### 11.10.1 Birapporto e trasformazioni proiettive

**RICORDIAMO...** Date due rette proiettive  $\mathbb{P}^1(V)$  e  $\mathbb{P}^1(V')$  ( $\dim \mathbb{P}^1(V) = 1 = \dim \mathbb{P}^1(V')$ ), e  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(V)$  distinti e  $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(V')$  distinti, esiste sempre ed è unica una trasformazione proiettiva  $d: \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$  tale che  $f(P_i) = Q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  grazie al teorema 11.2, pag. 212.

Ci interessa ora provare un risultato più generale: l'esistenza di una proiettività con 4 punti *non tutti in posizione generale*.

**TEOREMA 11.10.1.** Siano  $\mathbb{P}^1(V)$  e  $\mathbb{P}^1(V')$  due rette proiettive, con:

- $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$  (di cui i primi 3 distinti).
- $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}^1(V')$  (di cui i primi 3 distinti).

Allora  $\exists$  trasformazione proiettiva  $f: \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$  tale che:

$$f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, \dots, 4 \iff \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \quad (11.47)$$

Cioè se il birapporto delle quaterne è **invariante per proiettività**.

**OSSERVAZIONE.** Consideriamo i primi 3 punti e scegliamone dei rappresentanti per cui:

$$v_1, v_2, v_3 \in V: P_i = [v_i], i = 1, 2, 3 \text{ e } v_3 = v_1 + v_2$$

In altri termini,  $\{v_1, v_2\}$  è base di  $V$  che dà il riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}^1(V)$  in cui  $P_1 = (1: 0)$ ,  $P_2 = (0: 1)$ ,  $P_3 = (1: 1)$ . Sia  $P_4 = [v_4]$  con  $v_4 = av_1 + bv_2$ . Allora  $P_4 = (a: b)$  e  $\beta(P_i) = \frac{b}{a}$ .

Allo stesso modo per l'altra quaterna, siano:

$$v'_1, v'_2, v'_3 \in V': Q_i = [v'_i], i = 1, 2, 3 \text{ con } v'_3 = v'_1 + v'_2$$

Siccome  $P_1, P_2, P_3$  e  $Q_1, Q_2, Q_3$  sono in posizione generale, allora *esiste ed è unica* una trasformazione proiettiva  $f: \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$  tale che  $f(P_i) = Q_i$ .

Inoltre,  $f = \tilde{\varphi}$  con  $\varphi: V \longrightarrow V'$  applicazione lineare tale che  $\varphi(v_1) = v'_1$ ,  $\varphi(v_2) = v'_2$ , cioè porta una base di  $V$  in una base di  $V'$ ; segue che  $\varphi(v_4) = \varphi(av_1 + bv_2) = av'_1 + bv'_2$  e pertanto  $f(P_4) = [\varphi(v_4)] = (a: b)$  nel riferimento in  $\mathbb{P}^1(V')$ .

#### DIMOSTRAZIONE.

$\implies$ ) Siccome  $f$  è unica e  $f(P_4) = Q_4 \implies Q_4 = (a: b)$  nel riferimento in cui  $Q_1 = (1: 0)$ ,  $Q_2 = (0: 1)$ ,  $Q_3 = (1: 1) \implies \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{b}{a} = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$ .

$\impliedby$ ) Se  $\beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{b}{a}$ , allora distinguiamo i casi in cui il birapporto è in  $\mathbb{K}$  o infinito:

- $\frac{b}{a} \in \mathbb{K} \implies Q_4 = (1: \frac{b}{a}) = (a: b) = f(P_4)$
- $\frac{b}{a} = \infty \implies a = 0 \implies Q_4 = (0: 1) = f(P_4)$

□

**COROLLARIO 11.10.0.** Siano  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  e siano i punti  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  di cui i primi 3 distinti, e  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  di cui i primi 3 distinti. Allora  $\exists$  proiettività  $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  tale che:

$$f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, \dots, 4 \iff \beta(P_i) = \beta(Q_i) \quad (11.48)$$

Cioè se il birapporto delle quaterne è **invariante per proiettività**.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathcal{S} = \{\text{quaterne ordinate di punti distinti in } \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$ . Prese due quaterne  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \in \mathcal{S}$ , esse sono *proiettivamente equivalenti* se  $\exists f$  proiettività tale che  $f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, 2, 3, 4$  e quindi, in base al teorema precedente, è vero se le due quaterne hanno lo stesso birapporto.

Notiamo che quella appena data è una **relazione di equivalenza**, tale per cui le classi di equivalenza *proiettiva* di 4 punti *distinti e ordinati* in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  sono in corrispondenza biunivoca con il campo  $\mathbb{K}$  escluso 0 e 1 visto che sono 4 punti distinti<sup>a</sup>, val a dire:

$$\frac{\mathcal{S}}{\sim} \longleftrightarrow \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$$

Si ha dunque che ad ogni quaterna di punti distinti associamo il suo *birapporto* (l'applicazione è *suriettiva*) e per ogni elemento nel campo troviamo una *quaterna di punti distinti* con tale birapporto (quozientando, l'applicazione è *iniettiva*)

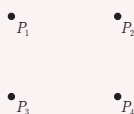
<sup>a</sup>Si veda l'analisi dei casi del birapporto con 2 punti uguali a pag. 230

**OSSERVAZIONE.** In dimensione maggiore generalmente il birapporto *non è definito*, a meno che i 4 punti non siano *allineati* su una retta proiettiva  $r$ .

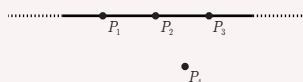
**ESEMPIO.**

Nel piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  consideriamo due quaterne di punti distinti  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  e  $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ . Scelta una quaterna, le disposizioni possibili sono le seguenti:

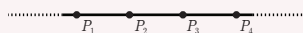
- In **posizione generale**, cioè a 3 a 3 non allineati.



- 3 punti allineati su una retta.

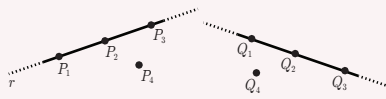


- 4 punti allineati su una retta.



Se i punti  $P_i$  sono proiettivamente equivalenti ai punti  $Q_i$ , allora tali posizioni *devono essere mantenute*: le proiettività mandano *rette in rette, posizioni generali in posizioni generali*. Per contronominale, se si verificano casi diversi per le due quaterne possiamo affermare che *non* sono proiettivamente equivalenti.

1. Sia  $P_i$ , sia  $Q_i$  sono in *posizione generale*. Siccome abbiamo 4 punti e  $4 = \dim \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) + 2$ , allora  $\exists!$  proiettività  $f$  di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  tale che  $f(P_i) = Q_i, i = 1, \dots, 4$ , dunque hanno lo stesso *birapporto* e sono sempre *proiettivamente equivalenti*.
2.  $P_1, P_2, P_3$  **allineati ma non  $P_4$** , e lo stesso per i  $Q_i$ ; in altre parole,  $P_1, P_2, P_3 \in r$  retta proiettiva e  $Q_1, Q_2, Q_3 \in s$  retta proiettiva.



Vogliamo dimostrare che anche in questo caso le quaterne sono proiettivamente equivalenti, estendendo la proiettività fra i tre punti al quarto.

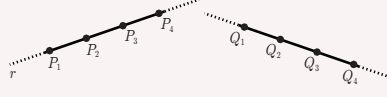
Scegliamo dei rappresentanti  $P_i = [v_i], i = 1, 2, 3, 4, v_i \in \mathbb{K}^3$  tale che  $v_3 = v_1 + v_2$ , lecito in quando i punti non sono allineati. Si ha che  $\{v_1, v_2, v_4\}$  è una base di  $\mathbb{K}^3$ :  $P_4 \notin r$  significa che  $v_4$  non è linearmente dipendente da  $v_1, v_2$ . Allo stesso modo sia  $Q_i = [w_i], i = 1, 2, 3, 4, w_i \in \mathbb{K}^3$  tale che  $w_3 = w_1 + w_2$  con  $\{w_1, w_2, w_4\}$  base di  $\mathbb{K}^3$ . Definiamo  $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$  lineare tale che:

$$\varphi(v_1) = w_1, \varphi(v_2) = w_2, \varphi(v_4) = w_4$$



Allora  $\varphi(v_3) = \varphi(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 = w_3$  e dunque  $f = \tilde{\varphi} : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è una proiettività che manda  $P_i$  in  $Q_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, 4$ .

3. **Tutti i punti sono allineati.**



Essendo allineati, allora è definito il loro birapporto. Se le due quaterne sono proiettivamente equivalenti, sia  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  la proiettività: essa porta una quaterna nell'altra e necessariamente una retta nell'altra, ovvero  $f(r) = s$ ; in altre parole, la restrizione alle due rette  $f|_r : r \longrightarrow s$  porta  $P_i$  in  $Q_i$ ,  $\forall i \implies \beta(P_i) = \beta(Q_i)$ .

Viceversa, se  $\beta(P_i) = \beta(Q_i)$  allora  $\exists g : r \longrightarrow s$  trasformazione proiettiva che manda  $P_i$  in  $Q_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, 4$ .

Si ha che  $g$  si estende in maniera non unica ad una proiettività di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ . Infatti, dati:

- $r = \mathbb{P}^n(U)$ ,  $U \subset \mathbb{K}^3$ .
- $s = \mathbb{P}^n(W)$ ,  $W \subset \mathbb{K}^3$ .

Con  $U$  e  $W$  piani vettoriali, si ha che  $g = \tilde{\psi}$  con  $\psi : U \longrightarrow W$  è un isomorfismo lineare. Vogliamo estenderla ad un *automorfismo lineare*  $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$  scegliendo basi con due vettori nel piano ed uno esterno, ovvero  $u_1, u_2 \in U$  base di  $U$  e  $u_3 \notin U$ . Dunque  $\{\psi(u_1), \psi(u_2)\}$  è una base di  $W$  e  $w_3 \notin W \implies \{u_1, u_2, u_3\}$  base di  $\mathbb{K}^3$  e  $\{\psi(u_1), \psi(u_2), \psi(u_3)\}$  un'altra base. Ponendo  $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$  tale che:

- $\varphi(u_1) := \psi(u_1)$ .
- $\varphi(u_2) := \psi(u_2)$ .
- $\varphi(u_3) := w_3$

Si ha  $f = \tilde{\varphi}$ . Dunque, i punti sono *proiettivamente equivalenti* se e solo se hanno lo stesso birapporto.

### 11.10.2 Eserciziamoci! Birapporto

**ESERCIZIO.** Verificare che se  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono tutti diversi da  $(1 : 0)$ , cioè  $P_i = (w_i : 1)$ ,  $\forall i = 1, \dots, 4$  allora vale:

$$\beta = \frac{(w_2 - w_1)(w_3 - w_2)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)} \quad (11.49)$$

**SOLUZIONE.** ...

### 11.1.1 PIANO PROIETTIVO DUALE

Una **retta** in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  ha equazione:

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad (11.50)$$

Essa è un'equazione **lineare omogenea** in coordinate omogenee, dunque è determinata dai coefficienti  $a_0, a_1, a_2$  dell'equazione con la proprietà che devono essere *non tutti nulli*;

inoltre, fissati i coefficienti, l'equazione è determinata *a meno di costante moltiplicativa non nulla*. Dunque si può associare a  $r$  un **punto** del piano proiettivo dato dai coefficienti delle coordinate omogenee:

$$(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \quad (11.51)$$

Si ha una *corrispondenza biunivoca* fra le rette in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  e  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{rette in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\} & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \\ r: a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 & \longleftrightarrow & (a_0 : a_1 : a_2) \end{array}$$

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$$l_i: x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \longleftrightarrow (1 : 1 : 2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

**DEFINIZIONE 11.11.0.** PIANO PROIETTIVO DUALE.

Inteso  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  come lo spazio che *parametrizza le rette* in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , lo chiamiamo **piano proiettivo duale** e lo denotiamo con  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ .

In prima istanza, questo significa semplicemente che si interpreta un punto del *piano duale* come un punto *associato* ad una *retta* di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

#### 11.11.1 Fascio di rette

**DEFINIZIONE 11.11.1.** FASCIO DI RETTE.

Un **fascio di rette**  $\mathcal{F}$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è l'insieme delle rette di equazione:

$$\mathcal{F}: \lambda l_1 + \mu l_2 = 0, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \quad (11.52)$$

Dove  $l_1, l_2$  sono due rette fissate e distinte.

**OSSERVAZIONE.** Possiamo pensare al fascio di rette come una **collezione di rette**, le cui equazioni si ottengono come *combinazione lineare* delle due rette del fascio con  $\lambda, \mu$  come **parametri**.

**ESEMPIO.** Consideriamo le rette  $l_1: x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$  e  $l_2: 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0$ . Il fascio di rette determinato da  $l_1, l_2$  è

$$(\lambda + 3\mu)x_0 + (\lambda - 2\mu)x_1 + 2(\lambda + 2\mu)x_2 = 0$$

- $(\lambda : \mu) = (1 : 0) \rightarrow l_1.$
- $(\lambda : \mu) = (0 : 1) \rightarrow l_2.$
- $(\lambda : \mu) = (1 : 1): 4x_0 - x_1 + 6x_2 = 0.$

**OSSERVAZIONE.** Abbiamo detto che ad ogni retta corrisponde un punto del piano proiettivo duale. Il fascio  $\mathcal{F}$  corrisponde, sul piano duale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ , alla **retta** passante per i

punti corrispondenti a  $l_1$  e  $l_2$ :

$$l_1: a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \longrightarrow (a_0: a_1: a_2)$$

$$l_2: b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \longrightarrow (b_0: b_1: b_2)$$

$$\mathcal{F}: (\lambda a_0 + \mu b_0)x_0 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2 = 0 \longrightarrow (\lambda a_0 + \mu b_0: \lambda a_1 + \mu b_1: \lambda a_2 + \mu b_2)$$

In altri termini,  $(\lambda a_0 + \mu b_0: \lambda a_1 + \mu b_1: \lambda a_2 + \mu b_2)$  rappresenta la retta per i due punti duali in forma parametrica.

**ESEMPIO.** Prendiamo:

$$l_1 \longleftrightarrow (1: 1: 2) = Q_1$$

$$l_2: 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \longleftrightarrow (3: -2: 4) = Q_2 \quad \mathcal{F} \longleftrightarrow (\lambda + 3\mu: \lambda - 2\mu: 2(\lambda + 2\mu))$$

Il fascio rappresenta la retta  $\overline{Q_1 Q_2}$  in forma parametrica.

**OSSERVAZIONE.** Siccome due rette distinte nel piano si intersecano in un punto solo, consideriamo  $P := l_1 \cap l_2$ . Allora:

- Ogni retta del fascio passa per  $P$  perché è lì che la combinazione lineare si annulla.
- $P$  è l'unico punto comune a tutte le rette del fascio  $\mathcal{F}$ .
- Viceversa, ogni retta per  $P$  appartiene al fascio  $\mathcal{F}$ .

Ciò significa che  $\mathcal{F}$  è la famiglia delle rette per il punto fissato  $P$ , che è detto **punto base del fascio**.

**ESEMPIO.** Consideriamo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} l_1: x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \\ l_2: 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x_0 = -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \implies -5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x_0 = 4x_1 \\ x_2 = -\frac{5}{2}x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Otteniamo, a meno di multipli, il punto  $P = (8: 2: -5) = l_1 \cap l_2$ . Tale fascio  $\mathcal{F}$  corrisponde alla retta in  $(\mathbb{P}^2)^*$  per i punti  $Q_1 = (1: 1: 2)$  e

$Q_2 = (3: -2: 4)$  che, scritta in forma parametrica, corrisponde a  $(\lambda + 3\mu: \lambda - 2\mu: 2(\lambda + 2\mu))$ . Cerchiamo ora l'equazione cartesiana della retta  $\overline{Q_1 Q_2}$  nelle coordinate  $(a_0: a_1: a_2)$ :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8a_0 + 2a_1 - 5a_2 = 0$$

Notiamo che i coefficienti della retta ottenuta sono esattamente le **coordinate omogenee** di  $P$ , intersezione delle due rette!

Più in generale, fissato un punto base  $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , l'insieme delle rette per  $P$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ :

$$\mathcal{F}_P = \{\text{rette per } P \text{ in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\} \quad (11.53)$$

È un fascio di rette corrispondente a una **retta** nel piano proiettivo duale  $(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))^*$ . Se le

coordinate del punto sono  $P = (c_0 : c_1 : c_2)$ , la retta corrispondente nel piano proiettivo duale  $(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))^*$  ha equazione cartesiana:

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \quad (11.54)$$

Infatti, data una retta  $r$  qualsiasi di equazione  $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ , il punto  $P$  appartiene a  $r$ , cioè  $P \in r$ , se e solo se vale l'equazione precedente  $c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0$ .

Per scrivere il fascio  $\mathcal{F}$  in forma *parametrica* scelgo due rette distinte passanti per  $P$ .

**OSSERVAZIONE.** INTERPRETAZIONE AFFINE DEL FASCIO DI RETTE PROIETTIVE.

Se interpretiamo  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2) = U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  e consideriamo il fascio di rette proiettive  $\mathcal{F}$  con punto base  $P$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , abbiamo due possibilità:  $P$  è punto base *proprio* o *all'infinito*.

- Se  $P$  è un **punto proprio**, allora  $P \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  e  $\mathcal{F}$  corrisponde al *rette affini* in  $\mathbb{K}^2$  per il punto  $P$  (passando dalla chiusura proiettiva della retta proiettiva a quella affine).
- Se  $P$  invece è un *punto improprio*, esso corrisponde ad una *direzio*ne di rette nel piano affine e  $\mathcal{F}$  corrisponde a tutte le rette affini che hanno questa direzione fissata, ovvero è un **fascio di rette parallele**.

Il caso proiettivo è interessante perché la distinzione fra questi due tipi di fasci è data solo dal fatto se il punto  $P$  è proprio o improprio.

### 11.11.2 Spazi vettoriali duali e spazi proiettivi duali

Sappiamo che  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è il proiettivizzato di  $\mathbb{K}^3$ , ovvero  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{K}^3)$ . Inoltre, in *Geometria Uno*, abbiamo definito gli **spazi vettoriali duali** come<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^3)^* &= \{\text{forme lineari } \alpha \text{ su } \mathbb{K}^3\} \\ \alpha : \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \alpha(x_0, x_1, x_2) &= ax_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \end{aligned} \quad (11.55)$$

Quando consideriamo la retta  $r: a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ ,  $r$  è il proiettivizzato del **nucleo** di  $\alpha$ , il quale è un *piano vettoriale*  $\ker \alpha \subset \mathbb{K}^3$  la cui equazione è appunto  $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ . In altre parole, si ha una corrispondenza fra i *punti della retta proiettiva duale* e le *classi proiettive* delle forme lineari  $[\alpha]$ :

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}^2)^* &= \mathbb{P}^2(\mathbb{K}^3)^* \\ r &\longleftrightarrow [\alpha] \end{aligned} \quad (11.56)$$

Infatti,  $\alpha$  è una forma lineare *non nulla* determinata *a meno di multipli*. Si ha che  $\{x_0, x_1, x_2\}$  è una base di  $(\mathbb{K}^3)^*$  che induce le coordinate proiettive  $(a_0 : a_1 : a_2)$  su  $(\mathbb{P}^2)^*$ . Pertanto, tale *interpretazione astratta* diventa operativa fissando la *base duale* delle forme lineari: scrivo  $\alpha$  come combinazione lineare della base, e i coefficienti saranno le data dalle *coordinate proiettive associate*. Generalizziamo ulteriormente ad uno spazio vettoriale qualunque.

**DEFINIZIONE 11.11.2.** SPAZIO PROIETTIVO DUALE.

Dato uno spazio vettoriale  $V$ , il suo *spazio proiettivo associato*  $\mathbb{P}^n(V)$  ed il suo *spazio vettoriale duale*  $V^* = \{\text{forme lineari } \alpha : V \longrightarrow \mathbb{K}\}$ , si definisce lo **spazio proiettivo**

<sup>1</sup>A differenza della notazione vista in *Geometria Uno*, qui consideriamo gli indici delle coordinate da 0 a 2.

**duale** di  $\mathbb{P}^n(V)$ :

$$\mathbb{P}^n(V)^* = \mathbb{P}^n(V^*) \quad (11.57)$$

Poichè  $\dim V^* = \dim V$ , allora  $\mathbb{P}^n(V)^* = \mathbb{P}^n(V)$ .

In particolare, si ha la corrispondenza biunivoca:

$$\mathbb{P}^n(V)^* \longleftrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}^n(V)\}$$

$$[\alpha] \longleftrightarrow \mathbb{P}(\ker \alpha) \subset \mathbb{P}^n(V)$$

In coordinate, ad un piano di equazione  $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$  associamo il punto  $(a_0 : \dots : a_n)$ , nello stesso modo in cui ad un vettore associamo i coefficienti della scrittura secondo una tale base.

### 11.11.3 Impraticchiamoci! Piano proiettivo duale

**ESERCIZIO.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  scrivere in forma parametrica il fascio delle rette per il punto base  $P$  di coordinate  $(1 : -1 : 4)$ .

**SOLUZIONE.** Scegliamo 2 rette distinte, a nostro piacere, che passano per il punto  $P$ ; ad esempio,  $l_1 : x_0 + x_1 = 0$  e  $l_2 : 4x_0 - x_2 = 0$ . Il fascio sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \lambda(x_0 + x_1) + \mu(4x_0 - x_2) &= 0 \\ (\lambda + 4\mu)x_0 + \lambda x_1 - \mu x_2 &= 0, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \end{aligned}$$

Se facciamo variare  $\lambda$  e  $\mu$  otteniamo tutte le rette di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che passano per  $P$ .



## CONICHE PROIETTIVE

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Nella geometria Euclidea le **coniche** sono curve ottenute dall’intersezione di un *cono* con un *piano*. Nel piano affine  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  si generalizzano (inclusendo anche casi degeneri) studiando le *forme quadratiche* e classificandole *a meno di rototraslazione*. Vogliamo estendere ulteriormente il al *piano proiettivo* di queste coniche, tenendo dunque conto del ruolo svolto dalla *retta all’infinito*.

## 12.1 CONICHE NEL PIANO PROIETTIVO

Consideriamo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  con coordinate omogenee  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Indichiamo con  $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  l’*anello dei polinomi* in  $x_0, x_1, x_2$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ . Se  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  è un polinomio *qualsiasi*, l’equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  non dà una condizione *ben definita* in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ : ad esempio,  $x_0 + 1 = 0$  non ha senso perché  $x_0$  è determinato solo a meno di multipli. Cerchiamo dunque dei polinomi che ha senso studiare in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

**DEFINIZIONE 12.1.0.** POLINOMIO OMOGENEO.

Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  un polinomio. Si dice che  $F$  è un **polinomio omogeneo** se tutti i monomi a coefficienti *non* nulli hanno lo *stesso* grado.

**ESEMPL.**

- $F = x_0^3 + x_0x_1^2 - 3x_1x_2x_3 \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  è un polinomio omogeneo di grado 3.
- $G = x_0^3 - x_1x_2 + 1$  non è un polinomio omogeneo.

**OSSERVAZIONE.** Se  $\deg F = 1$ , cioè  $F = a_0x_0 + \dots + a_nx_n + b$ , allora  $F$  è omogeneo se e solo se  $b = 0$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  è omogeneo di grado  $d$  allora:

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n) \quad (12.1)$$

Infatti,  $F$  è somma di monomi di grado  $d$  del tipo  $ax_0^{i_0}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$  con  $\sum_{j=0}^n i_j = d$  e si ha che  $a(\lambda x_0)^{i_0}(\lambda x_1)^{i_1}\dots(\lambda x_n)^{i_n} = \lambda^{i_0+\dots+i_n}(ax_0^{i_0}\dots x_n^{i_n}) = \lambda^d(ax_0^{i_0}\dots x_n^{i_n})$ .

Torniamo al piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  con le coordinate omogenee  $(x_0 : x_1 : x_2)$  e consideriamo  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  un polinomio omogeneo nelle coordinate omogenee di grado  $d$ . Se abbiamo un punto  $P = (c_0 : c_1 : c_2) \in \mathbb{P}^2$ , allora tutte le possibili scelte per le coordinate di  $P$  sono  $(\lambda c_0 : \lambda c_1 : \lambda c_2)$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Valutando  $F$  in  $P$ , otteniamo  $F(\lambda c_0, \lambda c_1, \lambda c_2) = \lambda^d F(c_0, c_1, c_2)$ : in altre parole,  $F$  si annulla in una scelta di coordinate se e solo se si annulla in qualsiasi scelta di coordinate, cioè:

$$F(c_0, c_1, c_2) = 0 \iff F(\lambda c_0, \lambda c_1, \lambda c_2) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Pertanto, l'equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  è ben posta in  $\mathbb{P}^2$ .

**ESEMPIO.**  $x_0^2 - x_1x_2 = 0$  definisce un sottoinsieme del piano proiettivo.

**DEFINIZIONE 12.1.1.** CURVA ALGEBRICA PIANA PROIETTIVA.

Una **curva algebrica piana proiettiva**  $C$  di  $\mathbb{P}^2$  è il luoghi degli zeri dato da un polinomio omogeneo  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ :

$$C = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\} \quad (12.2)$$

La curva è definita a meno di multipli: se  $G = \lambda F$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ,  $G$  e  $F$  descrivono la stessa curva.

Diciamo che la curva  $C$  è **reale** se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (e quindi  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ), **complessa** se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (e quindi  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ).

**DEFINIZIONE 12.1.2.** EQUAZIONE DI UNA CURVA.

L'**equazione** di una curva  $C$  è il polinomio  $F$  (a meno di multipli) che la descrive.

**DEFINIZIONE 12.1.3.** SUPPORTO DI UNA CURVA.

Il **supporto** di una curva  $C$  descritta da un polinomio  $F$  (a meno di multipli) è l'insieme dove il polinomio si annulla.

L'equazione determina il supporto, ma in generale non vale il contrario.

**DEFINIZIONE 12.1.4.** GRADO DI UNA CURVA.

Il **grado** della curva  $C$  è il grado dell'equazione  $F$ .

**ESEMPIO.** Preso il polinomio  $F(x_0, x_1, x_2) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ , la curva  $C$  descrive una retta.



**DEFINIZIONE 12.1.5.** RETTE E CONICHE PROIETTIVE.

- Le **rette proiettive** sono curve di grado 1.
- Le **coniche proiettive** sono curve di grado 2.

D'ora in poi ci restringeremo ai casi  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**DEFINIZIONE 12.1.6.** CURVA IRRIDUCIBILE.

Una curva  $C$  è **irriducibile** se lo è la sua equazione  $F$ . Altrimenti si considera la sua fattorizzazione in irriducibili:

$$F = F_1^{m_1} \cdot \dots \cdot F_r^{m_r} \quad (12.3)$$

Siccome ogni fattore irriducibile  $F_i$  è omogeneo, ognuno definisce una curva  $C_i: F_i = 0$ , dette **componenti irriducibili** della curva  $C$ .

Se  $m_i > 1$  diciamo che  $C_i$  è una componente di **molteplicità**  $m_i$  in  $C$

**ESEMPL.**

- Le rette, essendo curve di grado 1, sono *sempre* **irriducibili**.  
Le coniche sono curve di grado 2. Dunque, considerata una conica  $C$  di equazione  $F = 0$ , ci sono 3 possibilità:
  1.  $C$  è **irriducibile**.
  2.  $C$  è il prodotto di fattori lineari distinti e non multipli:

$$F = L_1 \cdot L_2 \quad (12.4)$$

Con  $L_i$  forme lineari *non* proporzionali. Pertanto,  $C$  è una **coppia di rette distinte** (ad es.  $C: F = x_0 x_1 \implies C$  unione delle rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ ).

3.  $C$  è data da fattori lineari associati, cioè  $F$  è un quadrato a meno di uno scalare:

$$F = \lambda L^2, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad (12.5)$$

Allora  $C$  è una **retta doppia**: la retta è la sola componente irriducibile ed è di molteplicità 2 (ad es.  $C: F = x_0^2$ ).

## 12.1.1.1 Coniche proiettive

**DEFINIZIONE 12.1.7.** CONICA.

Una **conica**  $C$  di  $\mathbb{P}^2$  è il luoghi degli zeri dato da un polinomio omogeneo  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  di grado 2 in  $x_0, x_1, x_2$  a coefficienti *reali* o *complessi*.

$$F = a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

In generale, i polinomi omogenei di grado 2 sono *forme quadratiche*. Pertanto, vogliamo associare alla forma la corrispondente matrice simmetrica. Per evitare di dividere per 2 i termini misti, ci è lecito immaginarli già nella forma  $2a_{01}, 2a_{02}, 2a_{12}$ , ottenendo così:

$$F = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Allora la matrice simmetrica  $3 \times 3$  associata alla forma quadratica è:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} \in S(\mathbb{K}^{3,3}) \quad (12.6)$$

Ed è tale per cui  $F = x^t A x$  con  $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  il vettore delle coordinate omogenee.

**DEFINIZIONE 12.1.8.** RANGO DELLA CONICA.

Il **rango** della conica  $C$  è il rango della matrice associata  $A$ .

**OSSERVAZIONE.** Come già osservato, l'equazione della conica  $C$  determina  $F$  solo a meno di multipli, dunque anche la matrice  $A$  è determinata *a meno di multipli*. Tuttavia, il rango rimane ben definito in quanto  $\text{rk}(\lambda A) = \text{rk}(A)$ ,  $\forall \lambda \neq 0$ . Inoltre, il rango *non* può essere 0 perché essendo l'equazione di una conica il polinomio *non* può essere nullo (non descriveremmo una conica!).

Vogliamo studiare le coniche e le curve di grado maggiore a meno di equivalenza proiettiva, allo stesso modo in cui abbiamo classificato le coniche in  $\mathbb{R}^2$  a meno di rototraslazioni. Sia dunque  $f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$  una proiettività, la cui matrice associata  $M \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$  è tale per cui  $x' = Mx$ . Allora  $f$  porta la conica  $C: F = 0$  nella conica  $\widetilde{C}: \widetilde{F} = 0$ , dove  $\widetilde{F}$  si ottiene sostituendo in  $f$  il vettore  $x = M^{-1}x'$ .

**ESEMPIO.** Sia  $C: x_0 x_1 = 0$  una coppia di rette e  $f$  una proiettività tale che:

$$f(x_0: x_1: x_2) = (x_0 + x_1: x_0 - 2x_1: x_2)$$

Scriviamo, usando la matrice associata alla proiettività, il vettore immagine  $x'_i$  in funzione di  $x_i$  e poi ricaviamo  $x_i$  in funzione di  $x'_i$ .

$$f: \begin{cases} x'_0 = x_0 + x_1 \\ x'_1 = x_0 - 2x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} -3x_1 = x'_1 - x'_0 \implies x_1 = \frac{1}{3}(x'_0 - x'_1) \\ x_0 = x'_0 - x_1 = x'_0 - \frac{1}{3}(x'_0 - x'_1) = \frac{1}{3}(2x'_0 + x'_1) \end{cases}$$

$$f^{-1}: \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}(2x'_0 + x'_1) \\ x_1 = \frac{1}{3}(x'_0 - x'_1) \\ x_2 = x'_2 \end{cases}$$

In sostanza abbiamo ottenuto l'espressione dell'inversa di  $f$ ; quindi, la trasformata di  $C$  tramite  $f$  è  $(2x'_0 + x'_1)(x'_0 - x'_1) = 0$ , che è ancora una coppia di rette. In particolare, notiamo che esse sono le immagini tramite  $f$  delle rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ , a meno dei fattori moltiplicativi  $\frac{1}{3}$ .

Osserviamo che la proiettività manda il supporto della prima conica nel supporto della seconda conica e che, trasformando la conica tramite una proiettività, trasformiamo la forma quadratica  $F$  tramite un cambiamento di coordinate di  $\mathbb{K}^3$ .

Dunque, se  $A$  è la matrice associata a  $C$  e  $\widetilde{A}$  è la matrice associata alla trasformata  $\widetilde{C}$  tramite  $f$ , allora  $A$  e  $\widetilde{A}$  sono **congruenti**. Infatti, il *cambiamento di coordinate* su uno spazio vettoriale per la forma quadratica è dato da  $\widetilde{A} = M^t A M$  con  $M \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$  con  $M$  una matrice associata della proiettività, interpretata come matrice del cambiamento di base. Viceversa, date due coniche  $C_1$  e  $C_2$  le cui matrici associate (simmetriche)  $A_1$  e  $A_2$  sono congruenti, allora  $C_1$  e  $C_2$  sono *proiettivamente equivalenti*: questo perché, in generale, forme quadratiche congruenti differiscono per un cambiamento di base.

Otteniamo così la seguente corrispondenza:

$$C_1 \text{ e } C_2 \text{ equivalenti} \iff A_1 \text{ e } A_2 \text{ congruenti}$$

Pertanto lo studio delle coniche, a meno di equivalenze proiettive, passa per lo studio delle matrici congruenti.

### 12.1.1.2 Classificazione delle coniche proiettive complesse

**RICORDIAMO...** Nel campo dei complessi ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango.

$$A_1 \text{ e } A_2 \text{ congruenti} \iff \text{rk } A_1 = \text{rk } A_2$$

In generale, vale solo che se le matrici simmetriche sono congruenti allora hanno lo stesso rango (ma non il viceversa!).

Allora, a meno di equivalenza proiettiva, ci sono solo 3 possibili coniche: quelle di rango 1, rango 2 e rango 3.

**TEOREMA 12.1.0.** CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PROIETTIVE COMPLESSE.

1. Due coniche in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.
2. **Forma canonica:** ogni conica di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle tre coniche seguenti:

<u>rk 3:</u> $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Conica irriducibile
<u>rk 2:</u> $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$	Coppia di rette distinte
<u>rk 1:</u> $x_0^2 = 0$	Retta doppia

v

### 12.1.1.3 Classificazione delle coniche proiettive reali

Sia  $C$  una conica in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con matrice associata  $A$ , simmetrica reale  $3 \times 3$ . Come abbiamo detto, poiché la matrice non è complessa, non è sufficiente il rango per la congruenza: affinché sia congruente ad un'altra matrice simmetrica serve anche la **segnatura**.

**OSSERVAZIONE.** Siccome  $A$  è determinata a meno di multipli, in principio la segnatura potrebbe cambiare. Vediamo cosa succede effettivamente.

Se  $A$  ha segnatura  $(p, q)$  con  $p$  il numero di autovalori positivi e  $q$  il numero di autovalori negativi, allora  $\lambda A$  può avere segnatura  $(p, q)$  se  $\lambda > 0$  oppure  $(q, p)$  se  $\lambda < 0$ .

Quindi, la segnatura di una conica è definita solo "a meno del segno", nel senso che  $(p, q) = (q, p)$ .

**TEOREMA 12.1.1.** CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PROIETTIVE REALI.

1. Due coniche in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno la stessa segnatura a meno del segno; dalla segnatura si deduce anche il rango.
2. Ogni conica in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è proiettivamente equivalente a una ed una sola delle

seguenti coniche, con segnature distinte a meno del segno:

<u>rk 3</u>	(3, 0)/(0, 3)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Conica irriducibile senza punti reali (supporto vuoto)
	(1, 2)/(2, 1)	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	Conica irriducibile a punti reali, contiene infiniti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
<u>rk 2</u>	(2, 0)/(0, 2)	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Coppia di rette non reali con 1 punto reale (0: 0: 1)
	(1, 1)	$x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$	Conica irriducibile a punti reali, coppia di rette reali distinte
<u>rk 1</u>	(1, 0)	$x_0^2 = 0$	Retta doppia

#### 12.1.4 Curve algebriche piane affini e chiusura proiettiva

Siccome abbiamo interpretato il piano proiettivo come un'estensione di quello affine, possiamo confrontare la classificazione delle curve nel piano proiettivo con la *classificazione nel caso affine*.

##### DEFINIZIONE 12.1.9. CURVA ALGEBRICA PIANA AFFINE.

Una **curva algebrica piana affine**  $C$  di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  è il luogo degli zeri dato da un polinomio omogeneo  $f \in \mathbb{K}[x, y]$ :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{P}^2 \mid f(x, y) = 0\} \quad (12.7)$$

La curva è definita a meno di multipli: se  $g = \lambda f$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ,  $g$  e  $f$  descrivono la stessa curva.

Diciamo che la curva  $C$  è **reale** se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (e quindi  $C \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ ), **complessa** se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (e quindi  $C \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ ).

##### DEFINIZIONE 12.1.10. EQUAZIONE DI UNA CURVA.

L'**equazione** di una curva  $C$  è il polinomio  $f$  (a meno di multipli) che la descrive.

##### DEFINIZIONE 12.1.11. SUPPORTO DI UNA CURVA.

Il **supporto** di una curva  $C$  descritta da un polinomio  $f$  (a meno di multipli) è l'insieme dove il polinomio si annulla.

L'equazione determina il supporto, ma in generale non vale il contrario.

##### DEFINIZIONE 12.1.12. GRADO DI UNA CURVA.

Il **grado** della curva  $C$  è il grado dell'equazione  $f$ .

##### DEFINIZIONE 12.1.13. CURVA IRRIDUCIBILE.

Una curva  $C$  è **irriducibile** se lo è la sua equazione  $f$ . Altrimenti si considera la sua fattorizzazione in irriducibili:

$$f = f_1^{m_1} \cdot \dots \cdot f_r^{m_r} \quad (12.8)$$

Siccome ogni fattore irriducibile  $f_i$  è omogeneo, ognuno definisce una curva  $C_i: f_i = 0$ , dette **componenti irriducibili** della curva  $C$ .

Se  $m_i > 1$  diciamo che  $C_i$  è una componente di **molteplicità**  $m_i$  in  $C$

**DEFINIZIONE 12.1.14.** RETTE E CONICHE AFFINI.

- Le **rette affini**  $ax + by + c = 0$  sono curve di grado 1.
- Le **coniche affini**  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$  sono curve di grado 2.

#### 12.1.4.1 Omogeneizzazione di un polinomio

Vediamo ora qual è il legame fra curve affini e proiettive utilizzando la *chiusura proiettiva*. Ricordiamo che  $\mathbb{K}^2 = U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  con  $(x, y) \in \mathbb{K}^2$  che corrispondono a  $x = \frac{x_1}{x_0}$  e  $y = \frac{x_2}{x_0}$ , dato  $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

Sia  $C$  una curva affine di equazione  $f(x, y) = 0$ . Vogliamo associare a  $f$  un polinomio omogeneo nelle coordinate  $x_0, x_1, x_2$  dello stesso grado di  $f$ . Consideriamo dunque il polinomio  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  così definito: se  $d = \deg f$ , allora:

$$F := x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \quad (12.9)$$

Esso è a tutti gli effetti un polinomio dello stesso grado di  $f$ . Infatti,  $F$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$ : considerato un monomio in  $f$ , della forma  $ax^i y^j$ , allora  $i + j$  se ne ottiene uno di grado  $d$  in  $x_0, x_1, x_2$ :

$$ax^i y^j \implies x_0^d a \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^i \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^j = ax_0^{d-i-j} x_1^i x_2^j$$

Ripetendo questa procedura per ogni monomio si ottiene un polinomio omogeneo  $f$  di grado  $d$  come desiderato. Notiamo che, operativamente, l'omogeneizzazione consiste nel cambiare nome alle variabili  $x$  e  $y$  e moltiplicare per un'opportuna potenza di  $x_0$  in modo tale che il monomio sia di grado  $d$ .

**ESEMPIO.** Vogliamo omogeneizzare il polinomio  $f = x^3 - 2xy + 3y + 1$ . Prima di tutto si cambia il nome delle variabili e si ottiene  $x_1^3 - 2x_1x_2 + 3x_2 + 1$ . Moltiplicando ciascun monomio per l'opportuna potenza di  $x_0$ , il polinomio omogeneizzato rispetto a  $x_0$  sarà  $F = x_1^3 - 2x_0x_1x_2 + 3x_0^2x_2 + x_0^3$ .

**OSSERVAZIONE.** Possiamo “deomogeneizzare” un polinomio omogeneo  $F(x_0, x_1, x_2)$ : ponendo  $x_0 = 1$  si riottiene il polinomio di partenza  $f(x_1, x_2)$ .

#### 12.1.4.2 Chiusura proiettiva

**DEFINIZIONE 12.1.15.** CHIUSURA PROIETTIVA DI UNA CURVA AFFINE.

La curva  $\overline{C}$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  definita da  $F = 0$  si dice **chiusura proiettiva** della curva affine  $C$  di equazione  $f = 0$ .

Se  $P = (1 : x : y) \in U_0$  allora  $f(x, y) = F(P)$  e in particolare  $\overline{C} \cap U_0 = C$ .

**DEFINIZIONE 12.1.16.** PUNTI IMPROPRI DI UNA CURVA.

I *punti impropri* o *punti all'infinito* della curva  $C$  sono dati dall'intersezione della

chiusura proiettiva con la *retta impropria*, ovvero da  $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\}$

**ESEMPIO.** CHIUSURA PROIETTIVA DI UNA RETTA.

Se  $C$  è una retta  $ax + by + c = 0$ , allora la *chiusura proiettiva* di  $C$  è  $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$  ed il *punto improprio* di  $C$  è  $(0: -b: a)$ , che corrisponde alla direzione della retta  $C$ .

**ESEMPL.** Consideriamo in  $\mathbb{R}^2$  le coniche:

$$C_1: y = x^2 \quad \text{Parabola}$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Circonferenza}$$

$$C_3: x^2 - y^2 = 1 \quad \text{Iperbole}$$

Consideriamo ora le loro *chiusure proiettive reali* tramite l'omogeneizzazione, cioè le coniche proiettive  $\overline{C}_i$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$$\overline{C}_1: x_0 x_1 = x_1^2$$

$$\overline{C}_2: x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$$

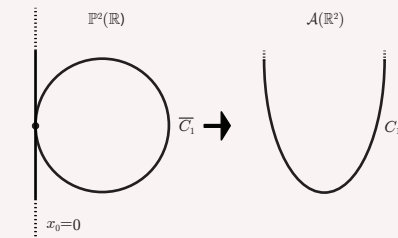
$$\overline{C}_3: x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$$

Scrivendo le matrici associate e guardandone la segnatura, si vede che *tutte e tre* hanno segnatura  $(2, 1)/(1, 2)$  e quindi tutte proiettivamente equivalenti (per la classificazione delle coniche nel piano proiettivo reale) ad una *conica irriducibile a punti reali* in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Consideriamo ora i loro punti impropri:

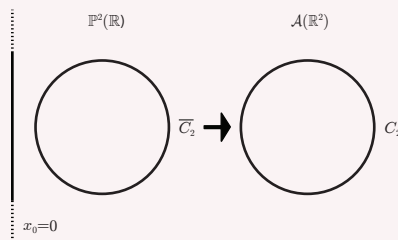
- PARABOLA:  $\overline{C}_1 \cap \{x_0 = 0\}: (0: 0: 1)$ , dunque un solo punto improprio, ovvero la direzione  $(0, 1)$  dell'asse  $y = \mathcal{L}(0, 1)$ , quindi è l'asse della parabola
- CIRCONFERENZA:  $\overline{C}_2 \cap \{x_0 = 0\}: x_0 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$  ma non si possono avere tutte le coordinate omogenee nulle, dunque non ci sono punti impropri
- IPERBOLE:  $\overline{C}_3 \cap \{x_0 = 0\}: x_1^2 - x_2^2 = 0$ , dunque ci sono due punti impropri quali  $(0: 1: 1)$  e  $(0: 1: -1)$ , a cui corrispondono le direzioni degli asintoti dell'iperbole

Notiamo che le chiusure proiettive viste sono tutte proiettivamente equivalenti, ma hanno 3 posizioni diverse rispetto alla *retta impropria*:

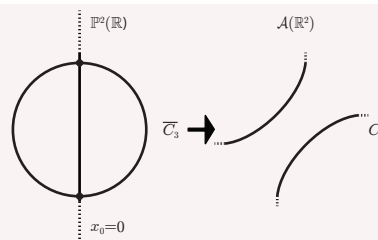
1.  $\overline{C}_1$  è "*tangente*" alla retta impropria.



2.  $\overline{C}_2$  è "*disgiunta*" dalla retta impropria.



3.  $\overline{C}_3$  è "secante" rispetto alla retta impropria.

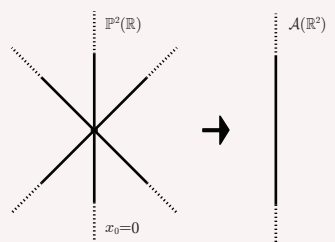


**ESEMPIO.** In  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  consideriamo la coppia di rette *parallele* distinte  $x(x+1)=0$  e la coppia di rette *incidenti* distinte  $xy=0$ .

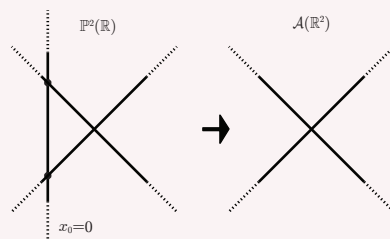
Prendendo le chiusure proiettive si ottiene  $x_1(x_1+x_0)=0$  e  $x_1x_2=0$ , entrambe coppie di rette distinte reali in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con segnatura  $(1,1)$ .

Dunque sono proiettivamente equivalenti fra loro ma hanno posizione diversa rispetto alla retta impropria.

- La prima ha un solo punto improprio  $(0:0:1)$ , che è la *direzione comune* delle due rette parallele nel piano affine.



- La seconda ha due punti impropri  $(0:0:1)$  e  $(0:1:0)$ , che sono le direzioni delle due rette nel piano affine.



Ragionando in questo modo dalla classificazione delle coniche proiettive si può mettere in relazione la classificazione delle coniche affini  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  (a meno di rototraslazione), prestando attenzione alla posizione rispetto alla retta impropria.

### 12.1.5 Classificazione affine delle coniche nel caso complesso

**PROPOSIZIONE 12.1.0.** CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE AFFINI COMPLESSE. Ogni conica in  $\mathbb{C}^2$  si può ridurre con una trasformazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \quad (12.10)$$

Con  $b \in \mathbb{C}^2$  e  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  ad una delle cinque coniche:

1.	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	■ Rango 3. ■ Due punti impropri <i>distinti</i> .
2.	$y - x^2 = 0$	■ Rango 3. ■ Un <i>unico</i> punto improprio.
3.	$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0$	Coppia di rette distinte <i>incidenti</i> : ■ Rango 2. ■ Due punti impropri <i>distinti</i> .
4.	$x(x + 1) = 0$	Coppia di rette distinte <i>parallele</i> : ■ Rango 2. ■ Un <i>unico</i> punto improprio.
5.	$x^2 = 0$	Retta doppia

### 12.1.6 Polinomi omogenei in 2 variabili

I polinomi omogenei in *due variabili* si comportano per alcuni aspetti come polinomi in *una sola variabile*.

Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0x_1]$  un polinomio omogeneo di grado  $d$ , costituito da  $d + 1$  monomi:

$$F = a_0x_0^d + a_1x_0^{d-1}x_1 + a_2x_0^{d-2}x_1^2 + \dots + a_{d-1}x_0x_1^{d-1} + a_dx_1^d$$

Ricordiamo che vedendo  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ , allora  $F$  ha degli zeri su  $\mathbb{P}^1$ , ovvero  $F(P) = 0$  è ben posto per  $P = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ .

#### DEFINIZIONE 12.1.17. ANNULARSI IN UN PUNTO.

Diciamo che  $F$  si **annulla in**  $P = (a : b)$  **all'ordine**  $m$  se  $(ax_1 - bx_0)^m$  è la massima potenza di  $ax_1 - bx_0$  che divide  $F$ .

#### PROPOSIZIONE 12.1.1.

1.  $F$  si annulla in un punto  $P = (a : b) \in \mathbb{P}^1 \iff ax_1 - bx_0 \mid F$ .
2. Se  $d = \deg F$ ,  $F$  ha al più  $d$  zeri su  $\mathbb{P}^1$  contati con molteplicità.
3. Se  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ , allora  $F$  si fattorizza come prodotto di forme lineari e ha esattamente  $d$  zeri in  $\mathbb{P}^1$  contati con molteplicità.<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Questo punto è analogo al caso in una variabile per cui, in  $\mathbb{C}$ , ogni polinomio si fattorizza come prodotto di polinomi di grado 1 ed ha tutti gli zeri ben definiti.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $x_0 \nmid F$ ; ciò è vero se e solo se  $a_d \neq 0$  o, alternativamente,  $F(0 : 1) \neq 0$ . Poniamo:

$$f := F(1, t) \in \mathbb{K}[t] = a_0 + a_1t + \dots + a_{d-1}t^{d-1} + a_dt^d \quad (12.11)$$

Esso è un polinomio nella sola variabile  $t$ , dato che abbiamo posto  $x_0 = 1$  e  $x_1 = t$ , ed è ancora di grado  $d$  perché  $a_d \neq 0 \implies \deg f = \deg F = d$ . Inoltre:

- $F$  è l'omogeneizzato di  $f$  rispetto a  $x_0$ :

$$F = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

- Gli zeri di  $F$  sono tutti e soli della forma  $(1 : \lambda)$  con  $\lambda$  radice di  $f$ , dato che *deomogeneizzando* passiamo da 2 variabili in 1 variabile, infatti  $F(1, \lambda) = f(\lambda)$ .



Pertanto, le proprietà di  $F$  che vogliamo dimostrare seguono da quelle di  $f$  che conosciamo già.

- I  $F$  si annulla in  $(1: \lambda) = (a: b)^a \iff f(\lambda) = 0 \iff t - \lambda \mid f \iff x_1 - \lambda x_0 \mid F$ .
- II È immediato dal punto 1, perché se  $F$  si annulla in  $P_i = (a_i: b_i)$  distinti con molteplicità  $m_i$ , allora:

$$(a_i x_1 - b_i x_0)^{m_i} \mid F, \forall i = 1, \dots, r$$

Siccome i punti  $P_i$  sono distinti, allora i polinomi sono *primi fra loro* al variare di  $i$ , dunque anche il loro prodotto deve dividere  $F$ :

$$\prod_{i=1}^r (a_i x_1 - b_i x_0)^{m_i} \mid F \implies \sum_{i=1}^r m_i \leq d = \deg F$$

- III Segue immediatamente dal caso complesso in una variabile; infatti,  $f$  si scrive come:

$$f = c(t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x_1 - \lambda_r x_0)^{m_r}$$

Siccome  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso,  $F = c(x_1 - \lambda_1 x_0)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x_1 - \lambda_r x_0)^{m_r}$ , cioè si fattorizza completamente con forma lineari. Non solo questo polinomio divide  $F$  ma, a meno di costante, ho l'*uguaglianza*, per cui il numero di zeri contati con molteplicità è pari al suo grado.

Se invece  $x_0 \mid F$ , allora  $F = x_0^r G$  per un certo  $r$ , con  $G$  un polinomio omogeneo di grado  $d - r$  tale per cui  $x_0 \nmid G$ . Allora i risultati trovati valgono per  $G$  e, tenendo conto che  $F$  si annulla in  $(0: 1)$  con molteplicità  $r$ , segue la tesi della proposizione.  $\square$

---

<sup>a</sup>Con  $\lambda = \frac{b}{a}$ .

### 12.1.7 Intersezione tra una retta ed una curva nel piano proiettivo

Sia  $C$  una curva in  $\mathbb{P}^2$  di grado  $d$  ed equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  e sia  $r \subset \mathbb{P}^2$  una retta proiettiva. Vogliamo intersecare la retta  $r$  con il supporto di  $C$ .

**TIPS & TRICKS!** Per studiare l'intersezione di due sottoinsiemi può essere comodo esprimere uno dei due sottoinsiemi in *forma parametrica* e sostituire i risultati trovati nelle equazioni dell'altro.

Scriviamo una parametrizzazione per  $r$ ; per farlo sono necessari servono 2 punti distinti  $a, b \in r$ . In questo modo, ogni punto di  $r$  si scrive come combinazione lineare di altri due punti noti della retta e dei loro vettori:

$$P = \lambda A + \mu B = [\lambda v + \mu w] \quad (12.12)$$

Dove  $v$  è un vettore che rappresenta  $A$  ( $A = [v]$ ) e  $w$  è un rappresentante per  $B$  ( $B = [w]$ ), con  $v, w \in \mathbb{K}^3$  e  $(\lambda: \mu) \in \mathbb{P}^1$ . Allora  $C \cap r$  è dato da  $F(\lambda v + \mu w) = 0$ ; dato che vogliamo trovare il punto di intersezione descritto dai parametri  $(\lambda: \mu)$ , possiamo vedere questa sostituzione come un polinomio  $G$  in  $\lambda$  e  $\mu$ , cioè  $G(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}[\lambda, \mu]$ :

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda v_0 + \mu w_0, \lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2) \quad (12.13)$$

In particolare, abbiamo due possibilità:

1.  $r \subseteq C$ : la retta è contenuta nella conica, quindi *ogni punto della retta* soddisfa l'equazione; il polinomio è *identicamente nullo*, ovvero  $G \equiv 0$

2.  $r \not\subset C$ : la retta *non* è contenuta nella conica, allora  $G$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$  in  $\lambda$  e  $\mu$  le cui radici. Le radici di  $G$  sono i *punti di intersezione*  $r \cap C$ .

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sia  $C: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ ,  $r_1: x_1 = x_2$  e  $r_2: x_0 + x_1 = 0$ ; vogliamo calcolare le intersezioni  $r_i \cap C$ :

- $r_1: x_1 = x_2 \rightarrow x_0^2 = 0$  e  $r_1 \cap C = \{(0: 1: 1)\}$  molteplicità 2
- $r_2: x_1 = -x_0 \rightarrow 2x_0^2 = x_2^2 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt{2}x_0$   $x_0 = 1 \implies x_1 = -1, x_2 = \pm\sqrt{2}$   
 $\implies$  due punti di intersezione  $(1: -1: \sqrt{2})$  e  $(1: -1: -\sqrt{2})$

**DEFINIZIONE 12.1.18.** MOLTEPLICITÀ DI INTERSEZIONE.

Se  $(\lambda_0: \mu_0) \in \mathbb{P}^1$  è una radice di  $G$  di molteplicità  $m$  (ovvero è il massimo esponente della forma lineare che divide  $G$ ), allora diciamo che  $C$  e  $r$  hanno **molteplicità di intersezione**  $m$  nel punto  $P = \lambda_0 A + \mu_0 B$ . Poniamo:

- $m = 0$  se  $P \notin C \cap r$ .
- $m = \infty$  se  $P \in r$  e  $r \subset C$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $r \not\subset C$ , allora l'intersezione è finita:

$$C \cap r = \{P_1, \dots, P_n\}$$

Sia  $m_i$  la molteplicità di intersezione in  $P_i$ ; il numero di questi punti di intersezione è minore del grado della curva:

$$\#(C \cap r) \leq \deg C \quad (12.14)$$

Più precisamente,  $\sum_{i=1}^n m_i \leq \deg C$ ; infatti, le radici di  $G(\lambda, \mu) = 0$  danno i punti di intersezione della curva con la retta e può avere al più  $d$  soluzioni, tante quante il grado della curva (anche se contate con molteplicità per la proposizione 12.2).

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , possiamo dire che la somma delle molteplicità è esattamente  $d$ :

$$\sum_{i=1}^n m_i = \deg C \quad (12.15)$$

In particolare, la retta e la curva si intersecano *sempre* nel *piano proiettivo complesso*, ovvero  $C \cap R \neq \emptyset$ .

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $d$  è **dispari** allora possiamo ancora concludere che la retta e la curva si intersecano sempre in quanto  $G$  deve annullarsi almeno in un punto reale, e quindi  $C \cap r \neq \emptyset$ .

**ESEMPIO.** Se  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  è una conica ( $\deg C = 2$ ) ed  $r$  è una retta non contenuta in  $C$ , ovvero  $r \not\subset C$ , allora:

$$r \cap C = \begin{cases} \nearrow & \{2 \text{ punti con molteplicità } 1\} \\ \searrow & \{1 \text{ punto con molteplicità } 2\} \end{cases} \quad (12.16)$$

Se la conica  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ed  $r$  è una retta non contenuta in  $C$ , ovvero  $r \not\subset C$ , allora c'è

anche la possibilità che l'intersezione sia *vuota*, cioè  $C \cap r = \emptyset$  (ad es.  $C: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$  e  $r_3: x_2 = 0$ ).

**TIPS & TRICKS!** Se una conica  $C$  contiene tre punti *allineati*, allora  $C$  contiene una retta, è riducibile (l'equazione della retta divide quella della conica) e  $\text{rk } C \leq 2$ .

**OSSERVAZIONE.** Si può dimostrare che:

1. La molteplicità di intersezione fra  $C$  e  $r$  in  $P$  non dipende dalla parametrizzazione scelta per  $r$ .
2. La molteplicità di intersezione è **invariante** per *proiettività*.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l'ultimo punto Sia  $f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$  una proiettività e  $C'$  la trasformata di  $C$  tramite  $f$  con  $C: F(x_0, x_1, x_2) = 0$  e  $f: x' = Mx$ . Allora  $f^{-1}: x = M^{-1}x'$  e  $C': F'(x') = F(M^{-1}x') = 0$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$ . Le proiettività portano curve algebriche in curve algebriche, ovvero  $r' = f(r)$  è una retta e  $P' = f(P)$ . Pertanto, la molteplicità di intersezione fra  $C$  e  $r$  in  $P$  è uguale alla molteplicità di intersezione fra  $C'$  e  $r'$  in  $P'$ .  $\square$

### 12.1.8 Intersezione tra una retta ed una curva nel caso affine

Sia  $C$  una curva in  $\mathbb{K}^2$  di equazione  $f(x, y) = 0$  e sia  $r$  una retta affine. Scegliamo una parametrizzazione per  $r$ :

$$r: \begin{cases} x = tv_1 + w_1 \\ y = tv_2 + w_2 \end{cases} \quad (12.17)$$

Per intersecare  $C$  ed  $r$  sostituiamo la parametrizzazione di  $r$  nell'equazione di  $C$  ed otteniamo un polinomio nell'unico parametro  $t$ :

$$g(t) := f(tv_1 + w_1, tv_2 + w_2) \in \mathbb{K}[t] \quad (12.18)$$

In modo analogo al caso proiettivo, le radici di  $g$  corrispondono ai *punti di intersezione* e definiamo la **molteplicità di intersezione** di  $C$  ed  $r$  in un punto  $P = t_0v + w$  come la molteplicità di  $t_0$  come radice di  $g(t)$ .

**OSSERVAZIONI.**

1. La molteplicità di intersezione non dipende dalla scelta di parametrizzazione della retta  $r$ .
2. La molteplicità di intersezione è **invariante** per *affinità*.
3. La *molteplicità affine* è pari a quella proiettiva. Per precisare, sia  $P \in C \cap r$ ,  $\overline{C}$  la chiusura proiettiva di  $C$  in  $\mathbb{P}^2 \supset \mathbb{K}^2$  ed  $\overline{r}$  la chiusura proiettiva di  $r$  in  $\mathbb{P}^2$ ; allora la molteplicità di intersezione tra  $C$  e  $r$  in  $P$  è uguale alla molteplicità di intersezione fra  $\overline{C}$  e  $\overline{r}$  in  $P$ .

### 12.1.9 Retta tangente

**DEFINIZIONE 12.1.19.** RETTA TANGENTE AD UNA CURVA IN UN PUNTO

Sia  $C$  una curva piana (affine o proiettiva) ed  $r$  una retta (affine o proiettiva). Diciamo

che  $r$  è **tangente** a  $C$  in un punto  $P$  se la *molteplicità di intersezione* fra  $C$  ed  $r$  in  $P$  è *maggiore di 1*.

**ESEMPIO.** Sia  $C$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  una conica di equazione  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$  e una retta di equazione  $r_1: x_1 - x_2 = 0$ ; poiché l'intersezione è solo il punto  $r_1 \cap C = \{(0: 1: 1)\} = P$ , allora  $r_1$  è tangente a  $C$  in  $P$  e “coincide” con la tangente nel senso geometrico.

La conica  $C_1$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  si ottiene deomogeneizzando  $C$  rispetto alla variabile *non* nulla  $x_2$  (in questo caso in  $P$  si ha che  $x_0 = 0$ ), per cui:

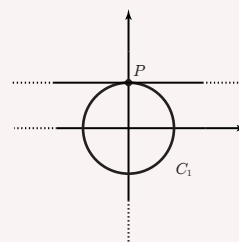
$$x = \frac{x_0}{x_2} \quad y = \frac{x_1}{x_2}$$

Dunque  $C_1$  ha equazione:

$$\left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 1 = 0$$

È pari quindi alla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  con  $P = (0, 1)$ . In questo caso la tangente in  $P$  è chiaramente la retta  $y = 1$ .

Passando alle coordinate proiettive diventa  $\frac{x_1}{x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ . Notiamo come la *chiusura proiettiva* della *tangente affine* sia proprio la *tangente proiettiva*.



**ESEMPIO.** Sia  $C$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  la curva di equazione  $f: y^2 = x^2 + x^3 = x^2(x+1)$ , una **cubica** in quanto ha grado 3.

Vogliamo calcolare quali sono le rette tangenti nel punto  $P = (-1, 0) \in C$ . Consideriamo pertanto il fascio di rette passanti per  $P$  e le intersechiamo con la cubica per determinare quali sono tangente con la definizione; guardiamo dunque quali hanno molteplicità di intersezione maggiore di 1.

Il fascio di rette per  $P$  è:

$$r: \begin{cases} x = -1 + tv_1 \\ y = tv_2 \end{cases}$$

Con  $(v_1, v_2)$  direzione di  $r$ . Sostituiamo la parametrizzazione di  $r$  nell'equazione di  $C$ , costruendo la funzione  $g(t)$ :

$$t^2 v^2 = (tv_1 - 1)^2 tv_1$$

$$g(t) = (tv_1 - 1)^2 tv_1 - t^2 v_2^2 = t[v_1(t^2 v_1^2 + 1 - 2tv_1) - tv_2^2] = t[v_1^3 t^2 - t(2v_1^2 + v_2^2) + v_1]$$

Analizziamo cosa abbiamo trovato:

- $t = 0$  è sempre una soluzione: per costruzione abbiamo preso la retta che passava per  $P$ , dunque  $P$  è banalmente intersezione di una retta di *qualsiasi* direzione con la cubica.
- La molteplicità di intersezione fra  $C$  e  $r$  in  $P$  è la massima potenza di  $t$  che divide  $g$ ; pertanto è  $m$  se  $t^m$  è la massima potenza di  $t$  che divide  $g$ .  
In questo caso, quand'è che la molteplicità di intersezione è maggiore di 1? Nell'equazione che abbiamo scritto almeno  $t^2$  deve dividere  $g$ : l'unica possibilità

per questa curva di poter raccogliere un'altro  $t$  è avere  $v_1 = 0$ . Allora  $r$  è la retta verticale che passa per  $P$  e abbiamo determinato che esiste ed è l'unica tangente in  $P$ .

Vediamo ora un caso in cui la retta tangente ad un punto non è unica. Consideriamo la stessa cubica ma *cambiamo il punto*, prendendo l'origine  $Q = (0, 0) \in C$ .

Scriviamo il fascio di rette per  $Q$ :

$$q: \begin{cases} x = tw_1 \\ y = tw_2 \end{cases}$$

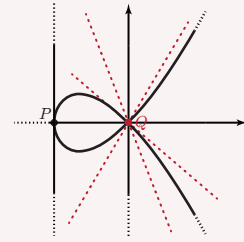
Con  $(w_1, w_2)$  direzione. Analogamente a prima:

$$h(t) = t^2 w_1^2 + t^3 w_1 - t^2 w_2^2 = t^2 (w_1^2 - w_2^2 + tw_1^3)$$

Troviamo così che  $t^2$  si può sempre raccogliere, dunque in questo caso la molteplicità di intersezione fra le rette e  $Q$  è sempre almeno 2. In particolare, ogni retta per  $Q$  ha intersezione maggiore di 2, dunque è *tangente*.

Osserviamo che nel punto  $Q$  la curva si auto-interseca: ogni retta per l'origine interseca la curva almeno due volte, quindi è tangente. Fra queste, ci sono due *direzioni speciali* per cui la molteplicità è 3:

- $w_1^2 - w_2^2 = 0 \implies w_1 = w_2 \implies \mathcal{L}(1, 1): y = x.$
- $w_1 = -w_2 \implies \mathcal{L}(1, -1): y = -x.$



### 12.1.9.1 Caso affine

Sia  $C: f(x, y) = 0$  in  $\mathbb{K}^2$  e  $P = (x_0, y_0)$ . Osserviamo che possiamo sempre scrivere il polinomio come un polinomio centrato in  $x_0, y_0$ , cioè come polinomio in  $x - x_0$  e  $y - y_0$  invece che come polinomio in  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} (x - x_0 + x_0)^i (y - y_0 + y_0)^j \stackrel{!}{=} \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ \implies f(x_0, y_0) &= b_{00} = f(P) \implies f = f(P) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \text{termini di grado} > 1 \end{aligned}$$

Nel passaggio indicato con (!) si stanno sottintendendo conti con il binomio di Newton.

#### DEFINIZIONE 12.1.20. DERIVATE PARZIALI.

Dato un polinomio  $f = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{K}[x, y]$ , le **derivate parziali** di  $f$  sono i seguenti polinomi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \sum_{i,j} a_{ij} i x^{i-1} y^j \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \sum_{i,j} a_{ij} j x^i y^{j-1} \quad (12.19)$$

Si verifica che  $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $P \in C$ , segue dai ragionamenti precedenti  $f = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) +$

termini di grado  $> 1$ . Applicando la definizione di derivata parziale si hanno:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i,j} a_{ij} i (x - x_0)^{i-1} (y - y_0)^j \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i,j} a_{ij} j (x - x_0)^i (y - y_0)^{j-1}$$

Valutando in  $P = (x_0, y_0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = a_{10} = \alpha \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = a_{01} = \beta$$

□

**DEFINIZIONE 12.1.21. GRADIENTE.**

Il **gradiente**  $\nabla f$  è il vettore con componenti le derivate parziali:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (12.20)$$

Il gradiente valutato in  $P = (x_0, y_0)$  è  $\nabla f(P) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ .

**Tangente e derivate parziali** Sia  $r$  la retta per  $P$  con direzione  $v = (v_1, v_2)$  e descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

Allora:

$$g(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) = \alpha tv_1 + \beta tv_2 + \text{termini in } t \text{ di grado } \geq 2 = (\alpha v_1 + \beta v_2)t + \text{termini in } t \text{ di grado } \geq 2$$

Si hanno dunque due possibilità, che dipendono dal coefficiente di  $t$ :

1.  $\alpha = \beta = 0$ , ovvero  $\nabla f = 0$ : il *coefficiente* è nullo indipendentemente dalla retta. Allora,  $\forall r$  retta per  $P$ ,  $t^2 \mid g(t)$ : la molteplicità di intersezione è  $\geq 2$  e ogni retta per  $P$  è tangente a  $C$  in  $P$ .
2.  $\nabla f(P) = (\alpha, \beta) \neq 0$ : il coefficiente di  $t$  determina in maniera *univoca* la direzione della retta, che è quella **ortogonale** a  $(\alpha, \beta)$ . Ciò implica che  $\exists!$  retta tangente a  $C$  in  $P$  ed è quella di direzione  $(-\beta, \alpha)$  con equazione  $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$ , ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) = 0 \quad (12.21)$$

**DEFINIZIONE 12.1.22. PUNTO SINGOLARE.**

Sia  $C$  una curva affine in  $\mathbb{K}^2$  di equazione  $f(x, y) = 0$ . Un punto  $P \in C$  è detto *non singolare* o **liscio** se  $\nabla f(P) \neq 0$ . Altrimenti  $P$  è detto **punto singolare**.

Una curva  $C$  è detta **singolare** se ha almeno un punto singolare, altrimenti è detta curva *non singolare* o **liscia**.

Abbiamo visto prima che se  $P$  è *non singolare* esiste ed è unica la tangente a  $C$  in  $P$ . Essa ha equazione  $\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) = 0$  e, essendo non singolare, almeno uno dei due coefficienti non è nullo.

Se invece  $P$  è *singolare* allora ogni retta per  $P$  è tangente a  $C$  in  $P$ .

## 12.1.9.2 Caso proiettivo

Vogliamo analizzare la tangenza nel *caso proiettivo*. Tuttavia, prima di trattare di punti singolare o tangenti, ci servirà una proprietà dei polinomi omogenei, detta **relazione di Eulero** sui polinomi omogenei. Essa vale per un qualsiasi numero di variabili a coefficienti in un campo qualsiasi e mette in relazione un polinomio omogeneo con sue derivate parziali, che per costruzione sono polinomi omogenei di un grado inferiore.

**TEOREMA 12.1.2. RELAZIONE DI EULERO**

Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  polinomio omogeneo di grado  $m$  e le sue derivate parziali  $\frac{\partial F}{\partial x_i} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ , polinomi omogenei di grado  $m-1$ . Si ha che:

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = mF \quad (12.22)$$

Nella relazione appena annunciata notiamo che moltiplichiamo ciascuna derivata parziale per  $x_i$ . Ciò è necessario per la *buona definizione* dell'equazione: siccome le derivate parziali sono omogenee di grado  $m-1$ , moltiplichiamo per  $x_i$  affinché la somma sia omogenea di grado  $m$  come il polinomio  $F$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Basta mostrarlo per un monomio  $G = \lambda x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n}$  con  $j_0 + \dots + j_n = m$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Scrivendone le derivate parziali rispetto ad una variabile e poi moltiplicando per  $x_i$  sistemiamo l'esponente  $i$ -esimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i} &= \lambda j_i x_0^{j_0} \dots x_i^{j_i-1} \dots x_n^{j_n} \implies x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = \lambda j_i x_0^{j_0} \dots x_i^{j_i} \dots x_n^{j_n} \\ \implies \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} &= \sum_{i=0}^n \lambda j_i x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n} = \lambda x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n} \cdot \sum_{i=0}^n j_i = mG \end{aligned}$$

□

**PROPOSIZIONE 12.1.2.** Sia  $C$  in  $\mathbb{P}^2$  una curva di equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  con  $F$  polinomio omogeneo di grado  $d$  e  $P \in C$ .  $P$  è *non singolare* se e solo se almeno una delle derivate parziali di  $F$  non è nulla in  $P$ , cioè  $\exists i \in \{0, 1, 2\}$ :  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \neq 0$ .

In tal caso esiste ed è unica la retta tangente a  $C$  in  $P$  ed ha equazione:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_0}(P)}_{\in \mathbb{K}} x_0 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(P)}_{\in \mathbb{K}} x_1 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_2}(P)}_{\in \mathbb{K}} x_2 \quad (12.23)$$

I cui coefficienti sono le derivate parziali di  $F$  valutate in  $P$ .

**DIMOSTRAZIONE.** A meno di proiettività possiamo supporre che  $P = (1 : a : b) \in U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ , cioè che stia nella carta affine  $U_0$  identificata a  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$ :  $P$  corrisponde a  $(a, b) \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$ .

Poniamo  $f(x, y) := F(1, x, y)$  e sia  $C_0$  la curva in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  di equazione  $f(x, y) = 0$  per cui  $C$  è la chiusura proiettiva. Mettiamo in relazione le derivate parziali di  $f$  con quelle

$F$  a partire dalla definizione stessa di  $f$ , valutandole nel punto:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, x, y) \end{cases} \implies (*) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b) \end{cases}$$

Valutiamo la relazione di Eulero sui polinomi omogenei in  $(1, a, b)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(1, a, b) + a \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b) + b \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b) = dF(1, a, b) = 0$$

Si ha  $F(1, a, b) = 0$  perché  $P \in C$ . Riusciamo così a esprimere la derivata parziale rispetto a  $x_0$  in funzione delle altre due:

$$(**) \quad \frac{\partial F}{\partial x_0} = -a \frac{\partial F}{\partial x_1} - b \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

Ne consegue che  $\nabla f(a, b) = 0 \iff \nabla F(1, a, b) = (0, 0, 0)$ ; infatti, se il gradiente  $\nabla f$  si annulla in  $P$  allora si annullano le derivate parziali di  $F$  rispetto a  $x_1, x_2$ , pertanto per la relazione di Eulero anche la terza derivata parziale si annulla. Viceversa, se il gradiente di  $F$  si annulla bastano le relazioni  $(*)$  per avere che anche il gradiente di  $f$  si annulla. Dunque, il punto  $P$  è *non singolare* se e solo se  $\nabla F(1, a, b) \neq \mathbf{0}$ , verificando la prima parte della proposizione.

Supponendo  $P$  non singolare, allora la retta tangente affine a  $C_0$  in  $P$  ha equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

La chiusura proiettiva di tale retta affine dà la retta tangente proiettiva a  $C$  in  $P$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x_1 - ax_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(x_2 - bx_0) = 0$$

Per  $(*)$  si ha che

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b)(x_1 - ax_0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b)(x_2 - bx_0) = 0 \\ \implies & \underbrace{\left(-a \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b) - b \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b)\right)}_{(**)} x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b)x_2 = 0 \\ \implies & \frac{\partial F}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P)x_2 \end{aligned}$$

□

**OSSERVAZIONE.** RETTE TANGENTI: SPAZIO AFFINE E SPAZIO PROIETTIVO A CONFRONTO.

Se  $C$  è una curva affine di equazione  $f(x, y) = 0$ , per trovare i punti singolare di  $C$  bisogna risolvere un sistema con l'equazione della curva e le derivate parziali di  $f$ . L'equazione della curva è necessaria perché potresti avere punti in cui il gradiente si annulla ma *non* appartengono alla curva!

Invece, se  $C$  è una curva proiettiva di equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ , per trovare i punti



singolari di  $C$  bisogna solo risolvere il sistema delle derivate parziali nulle e *non serve* mettere anche l'equazione della curva per via della relazione di Eulero. Infatti, se  $P$  annulla  $\nabla F$ , allora dalla relazione di Eulero si ha che:

$$F(P) = \frac{1}{d} \left( a \frac{\partial F}{\partial x_0}(P) + b \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) + c \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) \right) = 0 \implies P \in C$$

Riassumendo, ecco i sistemi a confronto:

Affine	Proiettivo
$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$

#### ESEMPI.

1. Sia  $C_0: x^2 + x^3 - y^2 = 0$  una curva affine e  $C$  la chiusura proiettiva di  $C_0$  con equazione  $F = x_0x_1^2 + x_1^3 - x_0x_2^2$ . Cerchiamo i punti singolari:

$$\nabla F = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_0x_1 + 3x_1^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_0x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_0 = t \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Il primo non è lecito nel piano proiettivo, dunque  $P = (1: 0: 0)$  è l'unico punto singolare di  $C$  e osserviamo che corrisponde a  $(0, 0) \in \mathbb{K}^2$ .

A pagina 254 avevamo visto il punto  $Q = (-1, 0) \in C_0$ , nel quale la curva affine si auto-intersecava; passando alla chiusura proiettiva,  $Q = (1: -1: 0) \in C$  è *non* singolare. Scriviamo la tangente  $T_Q C$  grazie alle derivate parziali:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) = (2x_0x_1 + 3x_1^2)(Q) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = (-2x_0x_1)(Q) = 0$$

Ne segue che  $T_Q C: x_0 + x_1 = 0$ . Per ottenere la retta affine associata basta porre  $x_0 = 1$ , da cui  $T_Q C_0: x + 1 = 0$ , perfettamente coerente con lo studio fatto nel caso affine.

Avevamo visto che nel punto singolare  $P = (1: 0: 0)$ , tutte le rette per esso hanno molteplicità di intersezione 2 con la curva  $C$  in  $P$ , eccetto due rette speciali di direzione  $(1, \pm 1)$  in cui la molteplicità di intersezione è 3.  $P$  è detto **nodo**.

2. Consideriamo la curva affine  $C_0$  data da  $f(x, y) = y^2 - x^3$  e la chiusura proiettiva  $C$  di equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = x_0x_2^2 - x_1^3$ . Siccome:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = x_2^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = -3x_1^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_0x_2$$

Allora  $P = (1: 0: 0)$  è l'unico punto singolare di  $C$ , che corrisponde all'origine di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$ . Consideriamo il fascio di rette per l'origine in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  e vediamo qual è

la molteplicità di intersezione. Sia la generica retta per l'origine:

$$r: \begin{cases} x = tv_1 \\ y = tv_2 \end{cases} \quad \text{con } v = (v_1, v_2) \text{ direzione di } r$$

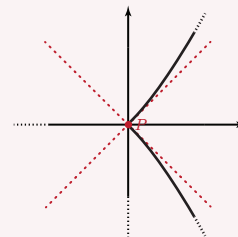
La intersechiamo con  $C_0$ :

$$g(t) = t^2 v_2^2 - t^3 v_1^3 = 0 \implies t^2(v_2^2 - tv_1^3) = 0$$

Segue che la molteplicità di intersezione in  $P$  è 2 se  $v_2 \neq 0$  ed è 3 se  $v_2 = 0$ .

Si noti che i risultati ottenuti sono simili al caso precedente: la differenza sta nel fatto che quasi tutte le rette hanno molteplicità 2 e c'è solo un'unica retta con molteplicità 3 e non *due* come nel caso precedente.

Disegnando la curva affine si nota dunque la presenza di una **cuspid**.



**OSSERVAZIONE.** PUNTI SINGOLARI DELLE CONICHE.

Sia  $C$  una conica proiettiva. Il numero di punti singolari dipende solo dal rango:

- $\text{rk } C = 3 \implies C$  non ha punti singolari.
- $\text{rk } C = 2 \implies C$  ha un punto singolare.
- $\text{rk } C = 1 \implies C$  è una retta doppia e ogni punto di  $C$  è singolare.

Infatti, sia  $A$  la matrice simmetrica associata a  $C$ , allora l'equazione associata a  $C$  e le derivate parziali sono:

$$F = X^t A X = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j \implies \frac{\partial F}{\partial x_h} = \sum_{\substack{j=0 \\ (i=h)}}^2 a_{hj} x_j + \sum_{\substack{i=0 \\ (j=h)}}^2 a_{ih} x_i = 2 \sum_{i=0}^2 a_{ih} x_i$$

Un punto  $P$  rappresentato dal vettore  $v$ , ovvero  $P = [v]$ , è singolare per  $C$  se le derivate

parziali si annullano, cioè se  $\sum_{i=0}^2 a_{hi} v_i = \sum_{i=0}^2 a_{ih} v_i = 0, \forall h = 0, 1, 2$ . In notazione matriciale,

se si pensa al prodotto righe per colonne l'indice di riga di  $a$  è fissato in  $h$  mentre facciamo variare l'indice di colonna  $i$ . Se  $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  è il vettore, porre l' $h$ -esima riga di

$Av$  pari a zero è proprio la condizione cercata  $\sum_{i=0}^2 a_{ih} v_i$ . Ne segue che avere il gradiente

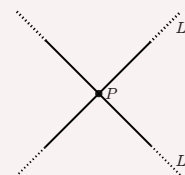
nullo corrisponde a  $Av = 0$ , cioè  $v \in \ker A$ .

Riassumendo, i punti singolari di  $C$  sono dati dai vettori che stanno nel nucleo della matrice  $A$ , che dipende dal rango di  $A$ :

- $\text{rk } A = 3 \implies \ker A = \{0\} \implies C$  non ha punto singolare.
- $\text{rk } A = 2 \implies \dim \ker A = 1 \implies C$  ha un punto singolare.
- $\text{rk } A = 1 \implies F = \lambda L^2 \implies C$  è una retta doppia e ogni punto di  $C$  è singolare; è esattamente la retta proiettiva associata al nucleo di  $A$ :  $L = \mathbb{P}(\ker A)$ .

Analizziamo il caso  $\text{rk } C = 2$  rispetto alla classificazione delle coniche.

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $C = L_1 \cup L_2$  con  $L_1 \neq L_2$  distinte e il punto singolare è il punto di *intersezione* delle due rette, ovvero  $L_1 \cap L_2$ . Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a meno di proiettività si hanno 2 casi in base alla segnatura:



- $(1, 1)$ :  $C = L_1 \cup L_2$  e  $P = L_1 \cap L_2$ .
- $(2, 0)/(0, 2)$ : La forma quadratica si fattorizza su  $\mathbb{C}$  e non su  $\mathbb{R}$ ;  $C$  ha come sostegno un *unico* punto  $P$ , che è proprio il punto singolare.

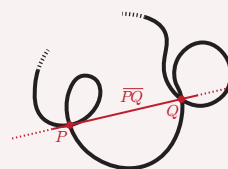
**OSSERVAZIONE.** PUNTI SINGOLARI E CUBICHE.

Nel piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  consideriamo  $C$  una *cubica* di equazione  $F = 0$  con  $\deg F = 3$ . Se la curva  $C$  è *riducibile*, allora il polinomio  $F$  è *riducibile* per definizione, ma siccome il grado è solo 3, allora è necessariamente il prodotto di un polinomio di grado 1 per un altro polinomio di grado 2:

$$F = G \cdot H \text{ con } \deg G = 1 \text{ e } \deg H = 2$$

Il luogo degli zeri di  $F$  è *unione* dei luoghi degli zeri di  $G$  e  $H$ , dunque  $C$  è unione di una retta e di una conica.

Supponiamo invece che  $C$  sia *irriducibile*:  $C$  non può contenere una retta, altrimenti l'equazione della retta *dividerebbe* il polinomio  $F$ . Allora  $C$  ha *al più* un punto singolare. Supponiamo per assurdo ne abbia almeno due, come  $P$  e  $Q$ : potremmo considerare la retta  $r = \overline{PQ}$  che passa per  $P$  e  $Q$  e intersecarla con la curva. Sicuramente  $C \cap r \supseteq \{P, Q\}$  e, siccome  $P$  e  $Q$  sono due punti singolari, allora la molteplicità di intersezione è almeno 2.



Ma ciò non è possibile perché, dallo studio delle intersezioni fra una retta e una curva, sappiamo che dobbiamo contare con molteplicità *fino al grado della curva*: qui ci sono 2 punti con molteplicità 2, ma  $C$  ha grado 3, dunque la retta dovrebbe essere contenuta nella curva, il che è una contraddizione!

**ESEMPIO.** Sia  $F = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$ . Essa dà una curva *senza punti singolari* perché le derivate parziali sono multipli delle coordinate, dunque non possono mai essere tutti nulli

## 12.2 FASCI DI CONICHE PROIETTIVE

**DEFINIZIONE 12.2.0.** FASCIO DI CONICHE.

Siano  $C_1$  e  $C_2$  due coniche *distinte* nel piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  di equazioni  $F_1$  e  $F_2$ , dunque con  $F_1$  e  $F_2$  sono proporzionali. Il **fascio di coniche**  $\mathcal{F}$  generato da  $C_1$  e da  $C_2$  è dato da tutte le coniche di equazione:

$$C_{\lambda, \mu}: \lambda F_1 + \mu F_2 = 0 \text{ con } (\lambda: \mu) \in \mathbb{P}^1 \quad (12.24)$$

Notiamo che se moltiplichiamo  $\lambda$  e  $\mu$  per lo stesso scalare tutta l'equazione viene moltiplicata per lo stesso scalare, riottenendo la stessa conica di prima;  $\lambda$  e  $\mu$  vanno presi in  $\mathbb{P}^1$  e non solo in  $\mathbb{K}$ .

**ESEMPLI.**

1. Siano  $C_1: x_0x_1 = 0$  e  $C_2: (x_0 - x_1)x_2 = 0$  due coniche, entrambe coppie di rette. Il fascio da loro generato è  $C_{\lambda,\mu}: \lambda x_0x_1 + \mu(x_0 - x_1)x_2 = \lambda x_0x_1 + \mu x_0x_2 - \mu x_1x_2 = 0$ .
2. Siano  $C_1: x_0x_1 = 0$  e  $\widetilde{C}_2: x_0x_2 = 0$  due coniche. Il fascio da loro generato è  $C_{\lambda,\mu}: \lambda x_0x_1 + \mu x_0x_2 = x_0(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0$ ; siccome  $x_0 = 0$  appartiene ad entrambe le coniche si può raccogliere.

Dato un fascio di coniche ci si chiede qual è il rango delle coniche del fascio.

**DEFINIZIONE 12.2.1. CONICA DEGENERE.**

Una conica  $C$  in  $\mathbb{P}^2$  si dice **degenerare** quando *non* ha rango massimo, ovvero se  $\text{rk } C < 3$ , dunque quando la matrice non è invertibile.

**DIGRESSIONE.** Si può dimostrare che il rango della conica, “essere riducibili” e “essere degeneri” sono tutte proprietà proiettive. Dalla classificazione delle coniche proiettive (reali o complesse) si vede dunque che una conica è *degenerare* se e solo se è *riducibile*.

**12.2.1 Studio delle coniche degeneri di un fascio**

Dato un fascio, vogliamo vedere quante e quali sono le coniche degeneri del fascio. Supponiamo che  $C_1$  abbia matrice simmetrica associata  $A_1$  e  $C_2$  abbiamo analogamente  $A_2$ . È chiaro che la conica del fascio  $C_{\lambda,\mu}$  generata da  $C_1, C_2$  sarà associata alla combinazione lineare  $\lambda A_1 + \mu A_2$  delle matrici: essa è una matrice  $3 \times 3$  i cui elementi sono 0 o forme lineari in  $\lambda$  e  $\mu$ .

Definiamo  $D(\lambda, \mu) := \det(\lambda A_1 + \mu A_2)$ , polinomio omogeneo in  $\lambda$  e  $\mu$ . Si hanno due possibilità:

- $D(\lambda, \mu) \equiv 0 \implies$  tutte le coniche del fascio sono degeneri.
- $D(\lambda, \mu)$  è omogeneo di grado 3, dunque le coniche degeneri corrispondono agli zeri del polinomio  $D$  su  $\mathbb{P}^1$ . Poiché essi sono al più 3, ci sono *al più 3 coniche degeneri*.

**TIPS & TRICKS!** O tutte le coniche del fascio sono degeneri o sono al massimo 3, quindi se in un fascio ne trovo *quattro* degeneri, allora tutte lo sono!

Nel *caso complesso* gli zeri (contati con molteplicità) sono pari al grado, dunque si ha sempre almeno una conica degenerare. Lo stesso vale anche nel caso reale, essendo il grado del polinomio dispari. Ristudiamo con quest’ottica gli esempi precedenti.

**ESEMPLI.**

1. Il fascio è  $\mathcal{F}_1: 2(\lambda x_0x_1 + \mu x_0x_2 - \mu x_1x_2) = 0$  ed ha matrice  $A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & -\mu \\ \mu & -\mu & 0 \end{pmatrix}$ .

Pertanto  $D(\lambda, \mu) = \det A_{\lambda,\mu} = -\lambda(\mu^2) + \mu(-\lambda\mu) = -2\lambda\mu^2$ . Ci sono solo due zeri di cui uno doppio:  $(\lambda: \mu) = (1: 0)$  oppure  $(0: 1)$ . Questi valori dei parametri ci restituiscono i polinomi di partenza, corrispondono dunque a  $C_1$  e  $C_2$ , che sapevamo già essere degeneri in quanto coppie di rette. Abbiamo dunque scoperto che  $C_1$  e  $C_2$  sono le *uniche coniche degeneri* del fascio.

2. Il fascio è  $\mathcal{F}_2: x_0(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0$ . In questo caso il determinante viene identicamente nullo ( $D \equiv 0$ ). In questo fascio tutte le coniche hanno una retta in comune.

**DEFINIZIONE 12.2.2.** PUNTI BASE DI UN FASCIO DI CONICHE.

I **punti base** di un fascio di coniche sono i punti che appartengono a *tutte* le coniche del fascio:

$$\{\text{punti base}\} = \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \subset \mathbb{P}^2 \quad (12.25)$$

**OSSERVAZIONE.** I punti base di un fascio sono dati dall'intersezione delle due coniche che generano il fascio, cioè  $C_1 \cap C_2$ . Infatti,  $C_1 \cap C_2 \supseteq \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$ . Viceversa se  $P \in C_1 \cap C_2$  allora:

$$F_1(P) = 0 \text{ e } F_2(P) = 0 \implies (\lambda F_1 + \mu F_2)(P) = 0, \forall \lambda, \mu \implies P \in C_{\lambda, \mu}, \forall (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$$

Dunque, per ogni qualunque combinazione lineare presa in  $P$  si annulla, dunque  $P$  è punto comune a tutte le coniche del fascio, cioè un punto base.

Vediamo i punti base degli esempi precedenti.

**ESEMPLI.**

1. Per ottenere i punti base del fascio si intersecano le coniche che lo generano:

$$\begin{cases} x_0 x_1 = 0 \\ (x_0 - x_1) x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = x_1 = 0 \\ x_0 = x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Intersecando due rette *non* coincidenti si possono ottenere al più 4 punti, ma se ne ottengono meno se qualcuno di questi punti coincide con altri. In questo caso si hanno 3 punti base:  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ .

2. I punti base sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} x_0 x_1 = 0 \\ x_0 x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$  è una retta appartenente a *tutte* le coniche del fascio, dunque si ha una *retta di punti base*. L'altro punto base è  $P = (1 : 0 : 0)$ ; notiamo che quest'ultimo è il punto base del fascio di rette  $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ , cioè il fascio di rette che contengono  $P$ .

**DIGRESSIONE. NODI E CUSPIDI**

Un **nodo** è un punto  $P$  per cui la retta "generale" per  $P$  ha intersezione 2 con la curva e ce ne sono *esattamente* 2 che hanno intersezione  $> 2$ .

Una **cuspide** è un punto  $P$  in cui la retta "generale" per  $P$  ha intersezione 2 con la curva e ce n'è *una sola* che ha intersezione  $> 2$

## 12.2.2 Parametrizzazione delle coniche nel piano proiettivo

Data l'equazione generale di una conica  $F = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \dots + a_{22}x_2^2$  possiamo associare a  $C$  il punto  $(a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}) \in \mathbb{P}^5$ , in quanto servono sei coordinate per descrivere una conica. Tale punto la determina univocamente: entrambi sono *non* nulli e

determinati *a meno di multipli*.

In questo modo otteniamo una *corrispondenza biunivoca* fra le coniche in  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^5$ :

$$\{\text{coniche in } \mathbb{P}^2\} \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{P}^5$$

Con questa interpretazione, cosa corrisponde un fascio di coniche?

Date  $C_1$  e  $C_2$  coniche, consideriamo il fascio  $\mathcal{F}$  da loro generato: a  $C_1: F = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$  corrisponde ad un punto  $A = (a_{00}: \dots : a_{22}) \in \mathbb{P}^5$  e a  $C_2: G = \sum_{i,j} b_{ij}x_i x_j$  corrisponde un punto  $B = (b_{00}: \dots : b_{22}) \in \mathbb{P}^5$ . La conica  $C_{\lambda,\mu}$  del fascio è la combinazione lineare di  $F$  e  $G$ , dunque i coefficienti dei monomi sono la combinazione lineare dei coefficienti delle equazioni di  $C_1$  e  $C_2$ :

$$c_{\lambda,\mu}: \lambda F + \mu G = \sum_{i,j} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})x_i x_j \longleftrightarrow P_{\lambda,\mu} = (\lambda a_{00} + \mu b_{00}: \dots : \lambda a_{22} + \mu b_{22}) \in \mathbb{P}^5$$

A  $C_{\lambda,\mu}$  associamo il punto  $P_{\lambda,\mu}$ , le cui coordinate omogenee sono combinazioni lineari di  $A$  e  $B$ . Facendo variare  $\lambda$  e  $\mu$ , il punto  $P_{\lambda,\mu}$  descrive in  $\mathbb{P}^5$  una retta  $\overline{AB}$  generata dai punti  $A$  e  $B$ , pertanto *un fascio di coniche corrisponde esattamente ad una retta in  $\mathbb{P}^5$* . Siccome una retta è individuata da due qualsiasi suoi punti, allo stesso modo il fascio è descritto da qualsiasi sue due coniche, pertanto la scelta delle coniche dà solo una *parametrizzazione diversa* del fascio.

Questo ci permette di dare alcune informazioni aggiuntive sui punti base:

**TIPS & TRICKS!** CALCOLO DEI PUNTI BASE CON DUE CONICHE QUALSIASI.

Dato un fascio  $\mathcal{F}$  di coniche, i punti base del fascio sono dati dall'intersezione di *due qualsiasi coniche* del fascio purché siano *distinte*, ovvero da  $C \cap \widetilde{C}$  dove  $C$  e  $\widetilde{C}$  sono due coniche distinte del fascio.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di coniche. Esiste *sempre* una conica  $C$  degenerare in  $\mathcal{F}$ , quindi usiamo  $C$  per calcolare i punti base.

Siccome è degenerare,  $C$  è l'unione di due rette linearmente indipendenti:  $C = l_1 \cup l_2$ . Scegliamo una qualsiasi altra conica  $\widetilde{C}$  del fascio; i punti base del fascio sono dati da  $C \cap \widetilde{C} = (l_1 \cap \widetilde{C}) \cup (l_2 \cap \widetilde{C})$ .

Ne deduciamo che il numero di punti base di un fascio di coniche, se sono finiti, sono 4: infatti, ciascuna delle due rette interseca  $\widetilde{C}$  al più in 2 punti.

**COROLLARIO 12.2.0.** Se due coniche  $C_1$  e  $C_2$  non hanno una retta in comune allora:

$$\#(C_1 \cap C_2) \leq 4 \tag{12.26}$$

**DIMOSTRAZIONE.**  $C_1 \cap C_2$  sono i punti base del fascio generato da  $C_1$  e  $C_2$ . La tesi segue dall'osservazione precedente.  $\square$

**TIPS & TRICKS!** CALCOLO DELL'INTERSEZIONE DELLE CONICHE.

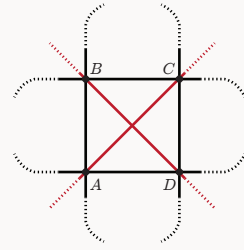
Abbiamo così anche un metodo per calcolare  $C_1 \cap C_2$  dato il fascio  $\mathcal{F}$ . Scriviamo  $D(\lambda, \mu)$ , troviamo una conica degenerare  $\widetilde{C}$  e poi intersechiamo con  $C_1 \cap \widetilde{C}$ . Questo metodo è particolarmente utile nel caso avessimo a che fare con *coniche irriducibili*.

Ci sono diversi tipi di *rappresentazione geometrica* dei fasci di coniche proiettive; vediamo quello più comune.

**PROPOSIZIONE 12.2.0.** Siano  $A, B, C, D$  quattro punti in posizione generale in  $\mathbb{P}^2$ .

La famiglia delle coniche passanti per i quattro punti è un fascio  $\mathcal{F}$  avente come punti base esattamente i quattro punti; geometricamente stiamo fissando  $A, B, C, D$  e considerando le coniche che passano per tutti e quattro.

Inoltre  $\mathcal{F}$  non contiene rette doppie e contiene esattamente 3 coniche degeneri: esse sono le coppie di rette che passano per questi 4 punti:  $\overline{AB} \cup \overline{CD}$ ,  $\overline{AC} \cup \overline{BD}$ ,  $\overline{AD} \cup \overline{BC}$ .



**DIMOSTRAZIONE.** Siccome i 4 punti sono in posizione generale possiamo scegliere delle coordinate in  $\mathbb{P}^2$  tali che i primi 3 sono i punti fondamentali e l'ultimo il punto unità:  $A = (1: 0: 0)$ ,  $B = (0: 1: 0)$ ,  $C = (0: 0: 1)$ ,  $D = (1: 1: 1)$ .

Partiamo dall'equazione di una conica generica e imponiamo che passi per i 4 punti e vediamo le condizioni risultanti sui coefficienti:

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

$$\text{Per } A: a_{00} = 0$$

$$\text{Per } B: a_{11} = 0$$

$$\text{Per } C: a_{22} = 0$$

$$\text{Per } D: 2a_{01} + 2a_{02} + 2a_{12} = 0 \implies a_{12} = -a_{01} - a_{02}$$

$$\implies a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 - (a_{01} + a_{02})x_1x_2 = 0$$

Abbiamo così le equazioni di tutte e sole le coniche che passano per  $A, B, C, D$ . Siccome  $a_{01}$  e  $a_{02}$  sono gli unici parametri rimasti, riscriviamo l'equazione evidenziandoli:  $a_{01}x_1(x_0 - x_2) + a_{02}x_2(x_0 - x_1) = 0$ . Abbiamo così trovato esattamente un fascio di coniche generato dalle due coniche entrambe degeneri:

$$C_1: \underbrace{x_1}_{\overline{AC}} \underbrace{(x_0 - x_2)}_{\overline{BD}} = 0 \quad C_2: \underbrace{x_2}_{\overline{AB}} \underbrace{(x_0 - x_1)}_{\overline{CD}} = 0$$

Abbiamo così dimostrato la prima affermazione.

In questo modo abbiamo già trovato due coniche fra quelle degeneri del fascio; possiamo verificare, intersecando le due coniche (e quindi le quattro rette), che i punti base sono solo  $A, B, C, D$ :

$$\begin{aligned} C_1 \cap C_2 &= (\overline{AC} \cap \overline{AB}) \cup (\overline{AC} \cap \overline{CD}) \cup (\overline{BD} \cap \overline{AB}) \cup (\overline{BD} \cap \overline{CD}) = \\ &= \{A, B, C, D\} \end{aligned}$$

Avremmo potuto evitare questo conto osservando che sono punti base perché per costruzione tutte le coniche passano per questi 4 punti e, essendo finiti, non possono essercene altri.

Per trovare l'ultima conica degeneri scriviamo la matrice associata a meno di multipli

alla conica generica del fascio e calcoliamo le radici del suo determinante:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & -a_{01} - a_{02} \\ a_{02} & -a_{01} - a_{02} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \det M = -a_{01}a_{02}(a_{01} + a_{02}) + a_{02}a_{01}(-a_{01} - a_{02}) = -2a_{01}a_{02}(a_{01} + a_{02})$$

È un polinomio omogeneo in  $a_{01}$  e  $a_{02}$  già fattorizzato in fattori lineari, pertanto si hanno esattamente *tre* coniche degeneri:  $a_{01} = 0$  dà  $C_2$ ,  $a_{02} = 0$  dà  $C_1$ , mentre la terza si ottiene sostituendo nell'equazione del fascio  $a_{02} = -a_{01}$ , da cui si ha l'equazione  $a_{01}x_0x_1 - a_{01}x_0x_2 = 0 \Rightarrow x_0(x_1 - x_2) = 0$ , corrispondente alle rette  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$ . Tutte e tre le coniche degeneri hanno rango 2 e quindi *non* ci sono rette doppie nel fascio.  $\square$

**TIPS & TRICKS!** FASCIO DI CONICHE PER QUATTRO PUNTI IN POSIZIONE GENERALE.

Se dobbiamo scrivere un fascio  $\mathcal{F}$  di coniche per quattro punti procedere come nella dimostrazione può esser lungo; in modo più rapido, scriviamo due delle coniche riducibili con delle rette per i punti:

$$l_1: \overline{AB}, l_2: \overline{CD}, l_3: \overline{AC}, l_4: \overline{BD}$$

Le coniche sono  $C_1: l_1l_2$  e  $C_2: l_3l_4$ ; allora l'equazione del fascio è  $\mathcal{F}: \lambda l_1l_2 + \mu l_3l_4 = 0$ .

Se un punto di  $\mathbb{P}^2$  è un punto base di un fascio, allora appartiene a tutte le coniche di esso. Preso invece un punto *non* base del fascio, quante coniche passano per esso?

**PROPOSIZIONE 12.2.1.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di coniche e sia  $P \in \mathbb{P}^2$ . Se  $P$  *non* è un punto base di  $\mathcal{F}$ , allora esiste ed è unica la conica del fascio che contiene  $P$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo di avere due coniche  $C_1, C_2$  che generano il fascio  $\mathcal{F}$  con  $C_i: f_i = 0$ ; il fascio avrà equazione  $\mathcal{F}: \lambda F_1 + \mu F_2 = 0$ . Il punto  $P$  appartiene alla conica generale del fascio se e solo se l'equazione della conica è soddisfatta nel punto:

$$P \in C_{\lambda, \mu} \iff \lambda F_1(P) + \mu F_2(P) = 0$$

Tale equazione può essere vista come un'equazione in  $(\lambda: \mu)$ .

Siccome  $P$  non è un punto base, allora *non* appartiene all'intersezione delle due coniche, dunque non è possibile che entrambe le equazioni si annullino in  $P$ :

$$P \notin C_1 \cap C_2 \implies (F_1(P), F_2(P)) \neq (0, 0)$$

L'equazione ha un'unica soluzione in  $\mathbb{P}^1$  che sarà proprio  $(\lambda: \mu) = (-F_2(P): F_1(P))$ , ottenendo così i parametri che descrivono l'unica conica del fascio che contiene  $P$ .  $\square$

Dal risultato precedente, possiamo enunciare quando cinque punti determinano una conica proiettiva.

**PROPOSIZIONE 12.2.2.** Dati cinque punti distinti in  $\mathbb{P}^2$  a 4 a 4 *non allineati*<sup>a</sup>, esiste ed è unica la conica  $C$  che li contiene.

<sup>a</sup>È una condizione più debole rispetto all'essere solo in posizione generale, perché potrebbero essercene tre allineati ma non quattro.



**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo sempre scegliere 4 di questi punti in posizione generale. Consideriamo inizialmente  $A, B, C, D$ :

- Sono in posizione generale: siamo a posto.
- Tre sono allineati, per esempio  $A, B, C$ .

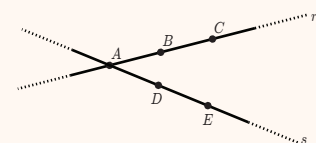
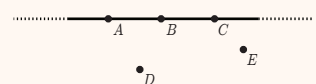
Siccome per ipotesi i quattro punti non sono allineati, allora  $D \notin r, E \notin r$  con  $r$  retta per  $A, B, C$ .

Escludiamo  $C$  e consideriamo  $A, B, D, E$ :

- Sono in posizione generale: siamo a posto.
- Tre sono allineati.

Abbiamo già che  $D, E \notin r$ , dunque i tre punti allineati possono essere  $A, D, E$  oppure  $B, D, E$ . Supponendo siano  $A, D, E$ , scartiamo  $A$  e otteniamo  $B, C, D, E$  in posizione generale.

Possiamo ora applicare la proposizione precedente: sia  $\mathcal{F}$  il fascio delle coniche passanti per  $A, B, C, D$ ; poiché  $E$  non è un punto base per  $\mathcal{F}$  in quanto i punti base sono i cinque punti  $A, B, C, D$ , esiste ed è *unica* la conica  $C$  del fascio che passa per  $E$ .  $C$  è l'unica conica che contiene i cinque punti.  $\square$



Questa dimostrazione dà anche il metodo per trovare la conica che passa per tali 5 punti.

**TIPS & TRICKS!** Per trovare una conica  $\mathcal{C}$  che passa per 5 punti dati  $A, B, C, D, E$  in  $\mathbb{P}^2$  potremmo partire dalla conica generale e imporre il passaggio per 5 punti, ma è un calcolo laborioso. Un metodo più rapido è invece il seguente.

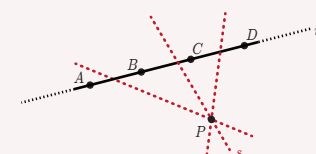
- Scegliere quattro punti in posizione generale  $A, B, C, D$ .
- Scrivere quattro rette e il fascio  $\mathcal{F}$  come nel "Tips & Tricks!" a pag. 266.
- Imporre il passaggio per il quinto punto  $E$  in modo da trovare la conica  $\mathcal{C}$ .

**OSSERVAZIONE.** Il passaggio per un punto di una conica generica dà *equazioni lineari omogenee* sui coefficienti della conica; possiamo pensarlo dunque come un *iperpiano* in  $\mathbb{P}^5$ . È ragionevole aspettarsi che con cinque punti ho cinque iperpiani che, in posizione generale, si intersecano in solo punto.

L'ipotesi sui punti a 4 a 4 non allineati serve a garantire che le condizioni lineari siano *indipendenti*, così da ottenere un punto solo nell'intersezione degli iperpiani.

#### ESEMPIO.

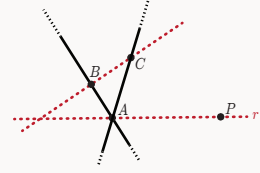
Se abbiamo 5 punti di cui 4 allineati su una retta  $r$ , allora per ogni retta  $s$  che passa per  $P$  la conica  $r \cup s$  contiene i 5 punti, quindi ci sono *infinite coniche* avendo infinite rette  $s$ .



#### PROPOSIZIONE 12.2.3.

Siano 3 punti *non allineati*  $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ , e sia una retta  $r$  che passi per  $A$  ma non per  $B$  e  $C$ , ovvero  $A \in r$  e  $B, C \notin r$ . La famiglia delle coniche che passano per  $A, B, C$  e sono tangenti a  $r$  in  $A$  è un fascio  $\mathcal{F}$ .

I punti base del fascio  $\mathcal{F}$  sono solo  $A, B, C$ ; il fascio *non* contiene rette doppie e ci sono solo due coniche degeneri  $\overline{AB} \cup \overline{AC}$  e  $r \cup \overline{BC}$ .



**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $P \in r$  un punto diverso da  $A$  e  $P \notin \overline{BC}$ .  $A, B, C, P$  sono in posizione generale, perché a tre a tre non allineati. Scegliamo le coordinate proiettive tali che  $A, B, C$  siano i punti coordinati mentre  $P$  il punto unità:  $A = (1: 0: 0), B = (0: 1: 0), C = (0: 0: 1)$ . Allora la retta  $r = \overline{AP}$  ha equazione  $x_1 - x_2 = 0$ .

Si consideri la conica generale:

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

Sappiamo già che il passaggio per i punti coordinati annulla la diagonale della matrice associata:

$$\text{Per } A: a_{00} = 0$$

$$\text{Per } B: a_{11} = 0 \implies F = a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{02}x_0x_2$$

$$\text{Per } C: a_{22} = 0$$

Intersechiamo con  $r: x_1 = x_2$  e sostituiamo in  $F$ :

$$a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{02}x_0x_1 = 0 \implies x_1((a_{01} + a_{02})x_0 + a_{12}x_1) = 0$$

Notiamo che  $x_1 = 0$  è dovuto al fatto che  $A \in r \cap C$ . Ne segue che  $r$  è tangente alla conica in  $A$  se e solo se  $A$  ha molteplicità due, quindi se e solo  $x_1 = 0$  è l'unica soluzione. Necessariamente il coefficiente di  $x_0$  nell'equazione precedente deve essere nullo, cioè  $a_{01} + a_{02} = 0 \implies a_{02} = -a_{01}$ . Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$a_{01}x_0x_1 - a_{01}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0 \implies a_{01}x_0(x_1 - x_2) + a_{12}x_1x_2 = 0$$

Quest'equazione descrive tutte e sole le coniche per  $A, B, C$  e tangenti a  $r$  in  $A$ ; in questo modo abbiamo verificato che è un fascio  $\mathcal{F}$ .

Le coniche che lo generano sono  $C_1: \underbrace{x_0}_{\overline{BC}} \underbrace{(x_1 - x_2)}_r$  e  $C_2: \underbrace{x_1}_{\overline{AC}} \underbrace{x_2}_{\overline{AB}}$ . Intersecando  $C_1$

e  $C_2$  otteniamo i punti base:

$$C_1 \cap C_2 = (\overline{BC} \cup r) \cap (\overline{AC} \cup \overline{AB}) = (\overline{BC} \cap \overline{AC}) \cup (\overline{BC} \cap \overline{AB}) \cup (r \cap \overline{AC}) \cup (r \cap \overline{AB}) = \{C, B, A\}$$

Scriviamo la matrice per verificare che non ci siano altre coniche degeneri e altri punti base:

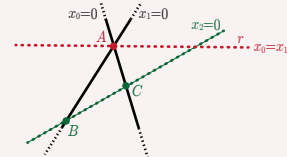
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & -a_{01} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ -a_{01} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \det M = -a_{01}(a_{01}a_{12}) - a_{01}(a_{01}a_{12}) = -2a_{01}^2a_{12}$$

Siccome  $D$  è un polinomio omogeneo di grado 3 si ha una radice doppia, ma le due radici danno le coniche che generano il fascio e dunque le uniche coniche degeneri sono solo  $C_1$  e  $C_2$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Un fascio di questo tipo è il primo esempio a pag. 259.

Consideriamo  $C_1: x_0x_1 = 0$  e  $C_2: (x_0 - x_1)x_2 = 0$ . Allora, la retta  $x_0 - x_1 = 0$  passa per il punto di intersezione delle prime due rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ , quindi siamo nella situazione precedente:  $A$  è il punto di intersezione, mentre  $B$  e  $C$  sono i punti di intersezione di  $x_2 = 0$  con  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ . Dunque  $C_2$  diventa  $r \cup \overline{BC}$ , mentre  $C_1$  è  $\overline{AB} \cup \overline{AC}$ .



Abbiamo già verificato che i punti base sono solo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e che  $C_1$  e  $C_2$  sono le uniche coniche degeneri di  $\mathcal{F}$  ed ora osserviamo che la retta  $r$  è tangente a tutte le coniche del fascio.

### 12.2.3 Impratichiamoci! Fasci di coniche proiettive

**ESERCIZIO.** F.F.P., 2.1.

Nel piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  consideriamo i punti:

$$A = (0: 1: 2), B = (0: 0: 1), C = (2: 1: 2), D = (3: 0: 1)$$

Determinare, se esiste, l'equazione di una conica passante per  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e tangente in  $C$  alla retta  $r$  di equazione  $x_0 - x_2 = 0$  che passa per  $C$ .

**SOLUZIONE.** Controlliamo che i 4 punti siano in posizione generale verificando, con i determinanti, che siano a 3 a 3 non allineati:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies A, B, C \text{ non allineati} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies A, B, D \text{ non allineati}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies B, C, D \text{ non allineati} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies A, C, D \text{ non allineati}$$

Dunque c'è un fascio  $\mathcal{F}$  di coniche per  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Scriviamo l'equazione delle quattro

rette con il determinante formale delle coordinate:

$$\text{Retta } \overline{AB}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_0 = 0$$

$$\text{Retta } \overline{CD}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_0 - x_1(-4) + x_2(-3) = x_0 + 4x_1 - 3x_2 = 0$$

$$\implies C_1: x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_2)$$

$$\text{Retta } \overline{BD}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 = 0$$

$$\text{Retta } \overline{AC}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -x_1(-4) + x_2(-2) = 4x_1 - 2x_2 = 0 \implies 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\implies C_2: x_1(2x_1 - x_2)$$

$$\text{fascio } \mathcal{F}: \lambda x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_2) + \mu x_1(2x_1 - x_2) = 0$$

Queste sono tutte e sole le coniche che passano per  $A$ ,  $D$ . Vogliamo la conica del fascio che è tangente alla retta  $r: x_0 - x_2 = 0$  in  $C$ . Intersechiamo la conica  $C_{\lambda, \mu}$  con la retta  $r$  sostituendo  $x_2 = x_0$  nell'equazione:

$$\lambda x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_0) + \mu x_1(2x_1 - x_0) = 0 \implies \lambda x_0(4x_1 - 2x_0) + \mu x_1(2x_1 - x_0) = 0$$

$$\implies 2\lambda x_0(2x_1 - x_0) + \mu x_1(2x_1 - x_0) = 0 \implies (2x_1 - x_0)(2\lambda x_0 + \mu x_1) = 0$$

Sostituendo  $x_2 = x_0$  stiamo parametrizzando la retta  $r$  come  $(x_0: x_1: x_0)$ . Il passaggio per  $C = (2: 1: 2)$  corrisponde al primo fattore  $x_0 = 2x_1$ . Pertanto, la retta  $r$  è tangente alla conica nel punto  $C$  se e solo se anche l'altra soluzione corrisponde al punto  $C$ , cioè se e solo se  $2\lambda x_0 + \mu x_1$  e  $-x_0 + 2x_1$  sono proporzionali:

$$\det \begin{pmatrix} 2\lambda & \mu \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \iff 4\lambda + \mu = 0 \implies \mu = -4\lambda$$

Ad esempio, per  $\lambda = 1$  e  $\mu = -4$  si ha  $2\lambda x_0 + \mu x_1 = 2x_0 - 4x_1$ . L'equazione della conica sarà  $\mathcal{C}: x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_2) - 4x_1(2x_1 - x_2) = 0 \implies \mathcal{C}: x_0^2 + 4x_0x_1 - 3x_0x_2 - 8x_1^2 + 4x_1x_2 = 0$ , dunque esiste ed è unica la conica cercata.

Controlliamo se la conica fa quello che deve fare. Passa per i punti dati? Sì, infatti:

$$F(A) = F(0, 1, 2) = -8 + 8 = 0 \quad F(B) = F(0, 0, 1) = 0$$

$$F(C) = F(2, 1, 2) = 4 + 8 - 12 - 8 + 8 = 0 \quad F(D) = F(3, 0, 1) = 9 - 9 = 0$$

È tangente a  $r$  in  $C$ ? Scriviamo direttamente la tangente alla conica nel punto  $C = (2: 1: 2)$  con le derivate parziali:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 2x_0 + 4x_1 - 3x_2 \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_0 - 16x_1 + 4x_2 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -3x_0 + 4x_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(2, 1, 2) = 4 + 4 - 6 = 2 \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(2, 1, 2) = 8 - 16 + 4 = -4 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(2, 1, 2) = -6 + 4 = -2$$

$$\implies 2x_0 - 2x_2 = 0 \implies x_0 - x_2 = 0$$

Otteniamo proprio la retta  $r$ .

# VI

## APPENDICI



## NOTE AGGIUNTIVE

*“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”*

*NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

Riportiamo alcune note e dimostrazioni aggiuntive che possono risultare utili al lettore.

## 13.1 CAPITOLO 1: SPAZI TOPOLOGICI

Le seguenti dimostrazioni sulle continuità di funzioni sono tratte da **munkres:2000topology**.

**TEOREMA 13.1.0.** (MUNKRES, 18.2B)

Se  $Z \subseteq X$  è sottospazio, l'inclusione  $i : Z \hookrightarrow X$  è una funzione continua.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A$  è un aperto in  $X$ , allora  $i^{-1}(A) = A \cap Z$  è un aperto in  $Z$  per definizione della topologia di sottospazio.  $\square$

**TEOREMA 13.1.1.** (MUNKRES, 18.2D)

Se  $f : X \longrightarrow Y$  è una funzione continua, allora  $f|_Z : Z \longrightarrow Y$  è continua per ogni sottospazio  $Z \subseteq X$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La funzione  $f|_Z$  è la composizione dell'inclusione  $i : Z \hookrightarrow X$  con la funzione  $f : X \longrightarrow Y$ . Poiché la composizione di funzioni continue è continua (teorema 1.2, pag. 12), segue la tesi.  $\square$

Le seguenti dimostrazioni sulle restrizioni di omeomorfismi è un'elaborazione personale sulle basi dei teoremi precedenti.

**COROLLARIO 13.1.0.** Se  $f : X \longrightarrow Y$  è un omeomorfismo, allora  $f|_Z : Z \longrightarrow f(Z)$  è omeomorfismo per ogni sottospazio  $Z \subseteq X$ . In particolare,  $f_{X \setminus Z} : X \setminus Z \longrightarrow Y \setminus f(Z)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La restrizione di una funzione è sempre una biezione e, per il teorema precedente, è anche continua. Ciò vale sia per  $f$ , sia per l'inversa  $f^{-1}$  e segue dunque la prima tesi. La seconda parte del corollario vale perché, se  $f$  è biettiva, allora:

$$f(X \setminus Z) = f(X) \setminus f(Z) = Y \setminus f(Z)$$

□

**ATTENZIONE!** Non vale il viceversa del teorema precedente: *non è vero* che se  $A, B \subseteq X$  sono omeomorfi, allora  $X \setminus A$  e  $X \setminus B$  sono omeomorfi!

Preso ad esempio  $A = S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$  e  $B = S^1 \times \mathbb{R}$ . Si ha che  $A$  e  $B$  sono omeomorfi (per proiezione dall'origine), ma  $\mathbb{R}^3 \setminus A$  è connesso per archi, mentre  $\mathbb{R}^3 \setminus B$  non è neppure connesso.

### 13.2 CAPITOLO 6: ASSIOMI DI NUMERABILITÀ E SUCCESIONI

La seguente dimostrazione sulla non prima-numerabilità del quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è adattata da **scott:nonum** su Mathematics Stack Exchange.

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri la contrazione di  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{R}$  ad un punto, cioè il quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  e si definisca la classe di equivalenza degli interi come  $[0]$ .

Sia  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  una famiglia di intorni aperti di  $[0]$ ; cerchiamo un intorno aperto di  $[0]$  che non ne contiene nessuno come sottoinsieme, mostrano in tal modo che non formano un sistema fondamentale di intorni di  $[0]$  e pertanto che  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  non è primo-numerabile per  $[0]$ .

Sia  $\pi$  la mappa quoziente. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{Z}$  esiste un  $\varepsilon_{n,k} \in (0, 1)$  tale che:

$$U_n \supseteq \pi \left[ \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (k - \varepsilon_{n,k}, k + \varepsilon_{n,k}) \right]$$

Per  $k \in \mathbb{Z}$  sia  $\delta_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{k,k}$ , e sia:

$$V = \pi \left[ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k - \delta_k, k + \delta_k) \right]$$

Chiaramente  $V$  è un intorno aperto di  $[0]$ , e vogliamo dimostrare che  $U_n \not\subseteq V$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per mostrare ciò, fissiamo  $n \in \mathbb{N}$ ; si ha  $\delta_n < \varepsilon_{n,n}$ , quindi possiamo scegliere un numero reale  $x \in (n + \delta_n, n + \varepsilon_{n,n})$ . Ma allora  $\pi(x) \in U_n \setminus V$ , e dunque  $U_n \not\subseteq V$ . □

### 13.3 CAPITOLO 11: FORMA CANONICA DI JORDAN

La seguente dimostrazione sul determinante di una matrice a blocchi e del suo polinomio caratteristico si basa su integrazioni proprie da **jeanmarie:blockdet** e da **bengrossman:blockdet** su Mathematics Stack Exchange.



**DIMOSTRAZIONE.** Data una matrice quadrata  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right)$  definita dai blocchi  $\mathbf{A}$  di dimensione  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$  di dimensione  $n \times m$ ,  $\mathbf{C}$  di dimensione  $m \times n$  e  $\mathbf{D}$  di dimensione  $m \times m$ . Supponendo  $\mathbf{A}$  blocco invertibile, si può scomporre la matrice nel seguente modo:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \quad (13.1)$$

Calcoliamo il determinante di  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right)$ , notando che  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right)$  e  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right)$  sono triangolari con diagonale di 1.

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) &= \det\left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right)\right) = \\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) = \\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ci serve calcolare il determinante di una *matrice diagonale a blocchi*. Presa allora:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right)$$

Possiamo riscriverla come:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right)$$

Grazie alle formule di Laplace, possiamo calcolare il determinante delle due matrici sfruttando le matrici identità presenti. Ad esempio, sviluppando rispetto le righe o le colonne sulla seconda:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = 1 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-2} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = \dots = 1^n \cdot \det \mathbf{Q} = \det \mathbf{Q}$$

Il risultato è analogo per la prima. Dunque, concludendo:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}) \quad (13.2)$$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D}) \quad (13.3)$$

Come ultima conseguenza, se vogliamo studiare il polinomio caratteristico  $C_A(t)$  di una matrice  $\mathbf{A}$  a blocchi diagonali  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , abbiamo che:

$$C_A(t) = \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} - t\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} - t\mathbf{I} \end{array}\right) = \det(\mathbf{B} - t\mathbf{I}) \det(\mathbf{C} - t\mathbf{I}) = C_B(t) C_C(t) \quad (13.4)$$

□

## 13.3.1 Convergenza

Tutti i ragionamenti qui presenti si applicano anche alle successioni e serie di potenze.

**DEFINIZIONE 13.3.0.** Dato un insieme  $E$  e un successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $f_n : E \longrightarrow X$  con  $X$  metrico, si dice che la successione è uniformemente convergente su  $E$  con limite  $f : E \longrightarrow X$  se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, x \in E d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad (13.5)$$

**DEFINIZIONE 13.3.1.** CRITERIO DI WEIERSTRASS O M-TEST

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni *reali* o *complesse* definite su un insieme  $A$  e che esista una successione di numeri *non negativi*  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  che soddisfino la seguente relazione:

$$\forall n \geq 1, x \in A : |f_n(x)| \leq M_n, \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad (13.6)$$

Allora la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad (13.7)$$

Converge *assolutamente* e *uniformemente* su  $A$

Si usa spesso l'*M-test* assieme al **teorema del limite uniforme**.

**DEFINIZIONE 13.3.2.** Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni *reali* o *complesse* continue sullo spazio topologico  $A$  nel quale sono definite; se la successione converge uniformemente su  $A$  allora il limite converge ad una funzione continua. In particolare, lo stesso si ha nel caso di una serie.

## 13.4 CAPITOLO 12: GEOMETRIA PROIETTIVA

## 13.4.1 Regola di Cramer

**TEOREMA 13.4.0.** REGOLA DI CRAMER.

Si consideri un sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  di  $n$  equazioni lineari in  $n$  incognite, con  $\det A \neq 0$ . Il sistema ha un'unica soluzione  $\mathbf{x}$ , le cui componenti sono:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i = 1, \dots, n \quad (13.8)$$

Con  $A_i$  la matrice ottenuta sostituendo la  $i$ -esima colonna di  $A$  col vettore  $\mathbf{b}$ .

Ad esempio, dato il sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite (in cui  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Possiamo trovare  $x_1$  e  $x_2$  con la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \textcolor{red}{b}_1 & a_{12} \\ \textcolor{red}{b}_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \textcolor{red}{b}_1 \\ a_{21} & \textcolor{red}{b}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

