

---

# APPUNTI DI GEOMETRIA 2

---

Anno Accademico 2020/2021

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUI BEEP BOOP”



# INDICE

---

INDICE    ii

I	TOPOLOGIA GENERALE	1
1	SPAZI TOPOLOGICI	3
1.1	Spazio topologico	3
1.1.1	Distanza e spazi metrici	4
1.1.2	Finezza: confronto di topologia	6
1.1.3	Base della topologia	7
1.1.4	Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità	9
1.1.5	Intorni	10
1.2	Funzioni continue	11
1.3	Omeomorfismi	13
1.4	Topologia indotta	14
1.5	Sottospazio topologico	14
1.5.1	Immersione	16
1.6	Prodotti topologici	17
1.7	Assiomi di separazione: $T_1$ e Hausdorff	20
1.8	Proprietà topologica	24
2	CONNESSIONE E COMPATTEZZA	27
2.1	Connessione	27
2.2	Compattezza	37
3	GRUPPI TOPOLOGICI	45
3.1	Gruppi topologici	45
4	TOPOLOGIA QUOZIENTE	51
4.1	Topologia Quoziente	51
4.1.1	Identificazione	52
4.1.2	Quozienti tipici	54
4.1.3	Quoziente $T_2$	55
5	AZIONI DI GRUPPO	57
5.1	Azione di un gruppo su un insieme	57
5.2	Stabilizzatore di un elemento	58
5.3	Azione per omeomorfismi	59

6	SUCCESSIONI	65
6.1	Numerabilità	65
6.2	Successioni	69
6.2.1	Punti di accumulazione	70
6.2.2	Sottosuccessioni	70
6.3	Successioni e compatti	72
6.3.1	Compattezza per successioni	73
6.4	Spazi metrici completi	75
II OMOTOPIA 77		
7	OMOTOPIA	79
7.1	Lemma di incollamento	79
7.2	Componente connessa e componente c.p.a.	80
7.3	Omotopia tra funzioni continue	82
7.4	Equivalenza omotopica	84
7.5	Retratti e retratti di deformazione	89
8	IL GRUPPO FONDAMENTALE	93
8.1	Omotopie fra cammini	93
8.2	Gruppo fondamentale	97
8.2.1	Dipendenza dal punto base	98
8.2.2	Mappe continue e omomorfismo di gruppi	100
8.3	Digressione: Categorie	101
8.3.1	Funtori	102
8.4	Isomorfismi e gruppi fondamentali	104
III FORMA CANONICA DI JORDAN 109		
9	FORMA CANONICA DI JORDAN	111
9.1	Teorema di Cayley-Hamilton	111
9.2	Forma canonica di Jordan	112
9.2.1	Autospazi generalizzati	115
9.2.2	Esistenza della base dell'autospazio generalizzato che dà la forma di Jordan	120
9.2.3	Unicità della forma di Jordan	124
9.2.4	Polinomio minimo e forma di Jordan	124
9.2.5	Impratichiamoci! Forma canonica di Jordan	126
9.3	Funzione esponenziale nei complessi	129
9.3.1	Esponenziale di una matrice quadrata complessa	131
9.3.2	Calcolo dell'esponenziale di una matrice tramite la forma di Jordan	135
9.3.3	Impratichiamoci! Funzione esponenziale nei complessi	137
9.4	Matrici reali e forma di Jordan	138
IV GEOMETRIA PROIETTIVA 141		
10	GEOMETRIA PROIETTIVA	143

10.1	Spazi proiettivi	143
10.2	Sottospazi proiettivi	144
10.3	Coordinate omogenee e sistemi di riferimento proiettivo	145
10.4	Operazioni con i sottospazi	148
10.5	Punti linearmente indipendenti e in posizione generale	150
10.5.1	Impratichiamoci! Punti linearmente indipendenti	151
10.6	Rappresentazione parametrica di un sottospazio proiettivo	152
10.6.1	Coordinate proiettive e punti in posizione generale	153
10.7	Trasformazioni proiettive	154
10.7.1	Gruppo lineare proiettivo	156
10.7.2	Altri aspetti delle trasformazioni proiettive	157
10.7.3	Trasformazioni proiettive in coordinate	159
10.7.4	Punti fissi di proiettività	160
10.7.5	Impratichiamoci! Trasformazioni proiettive	161
10.8	Geometria affine e geometria proiettiva	162
10.8.1	Chiusura proiettiva di un sottospazio affine	165
10.8.2	Un esempio di proiettività	169
10.8.3	Impratichiamoci! Geometria affine e geometria proiettiva	170
10.9	Spazi proiettivi complessi	170
10.9.1	Retta proiettiva complessa	173
10.10	Birapporto	175
10.10.1	Birapporto e trasformazioni proiettive	178
10.10.2	Eserciziamoci! Birapporto	181
10.11	Piano proiettivo duale	181
10.11.1	Fascio di rette	182
10.11.2	Spazi vettoriali duali e spazi proiettivi duali	184
10.11.3	Impratichiamoci! Piano proiettivo duale	185
11	CONICHE PROIETTIVE	187
11.1	Coniche nel piano proiettivo	187
11.1.1	Coniche proiettive	189
11.1.2	Classificazione delle coniche proiettive complesse	191
11.1.3	Classificazione delle coniche proiettive reali	191
11.1.4	Curve algebriche piane affini e chiusura proiettiva	192
11.1.5	Classificazione affine delle coniche nel caso complesso	195
11.1.6	Polinomi omogenei in 2 variabili	196
11.1.7	Intersezione tra una retta ed una curva nel piano proiettivo	197
11.1.8	Intersezione tra una retta ed una curva nel caso affine	199
11.1.9	Retta tangente	199
11.2	Fasce di coniche proiettive	207
11.2.1	Studio delle coniche degeneri di un fascio	208
11.2.2	Parametrizzazione delle coniche nel piano proiettivo	209
11.2.3	Impratichiamoci! Fasce di coniche proiettive	215
V	APPENDICI	217
12	NOTE AGGIUNTIVE	219
12.1	Capitolo 6: successioni	219
12.2	Capitolo 11: forma canonica di Jordan	220

12.2.1	Convergenza	221
12.3	Capitolo 12: geometria proiettiva	221
12.3.1	Regola di Cramer	221



# I

## TOPOLOGIA GENERALE





# SPAZI TOPOLOGICI

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 1.1 SPAZIO TOPOLOGICO

**DEFINIZIONE 1.1.0.** Uno **spazio topologico**  $(X, \mathcal{T})$  è un insieme  $X$  con una famiglia di sottoinsiemi  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  detta **topologia** che soddisfano i seguenti assiomi (detti **assiomi degli aperti**):

1. Il vuoto e l'insieme stesso sono aperti della topologia:  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. L'unione arbitraria di aperti è un aperto: dati  $\{A_i\}_{i \in I}$  tali che  $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$  ( $|I| \leq \infty$ ), allora  $\bigcup_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$ .
3. L'intersezione finita di aperti è aperta: dati  $\{A_i\}_{i \in I}$  tali che  $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$  ( $|I| < \infty$ ), allora  $\bigcap_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$ .

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  si dicono **aperti** della topologia.

**DEFINIZIONE 1.1.1.** Si può definire equivalentemente su  $X$  una topologia  $\mathcal{T}$  usando gli **assiomi dei chiusi**:

1. Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia:  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. L'unione finita di chiusi è un chiuso: dati  $\{C_i\}_{i \in I}$  tale che  $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$  ( $|I| < \infty$ ), allora  $\bigcup_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$ .
3. L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso: dati  $\{C_i\}_{i \in I}$  tale che  $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$  ( $|I| \leq \infty$ ), allora  $\bigcap_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$ .

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  si dicono **chiusi** della topologia.

**OSSERVAZIONE.** Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per soli due sottoinsiemi qualunque, in quanto poi è verificato per induzione.

**ESEMPIO.**

- **Topologia discreta:**  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ , tutti gli insiemi sono aperti.
- **Topologia banale:**  $\mathcal{T} = \emptyset, X$ , gli unici aperti sono banali.

### 1.1.1 Distanza e spazi metrici

**DEFINIZIONE 1.1.2.** Su un insieme  $X$  una funzione  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  è una **distanza** se:

1. **Positività della distanza:**  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. **Simmetria:**  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. **Disuguaglianza triangolare:**  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**DEFINIZIONE 1.1.3.** Uno **spazio metrico**  $(X, d)$  è un insieme su cui è definita una distanza.

**DEFINIZIONE 1.1.4.** Definita la **palla aperta di centro**  $x$  come l'insieme degli elementi di  $X$  che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad (1.1)$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia**  $\mathcal{T}_d$  **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

**ESEMPIO.**

- Su un qualunque insieme  $X$  si può definire la *distanza banale*:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (1.2)$$

In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.

- Su  $X = \mathbb{R}$  si può definire come distanza il *valore assoluto*  $d(x, y) = |x - y|$ , che induce la **topologia Euclidea**  $\mathcal{E}_{ucl}$ , definita con le palle aperte di raggio  $\varepsilon$ :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \quad (1.3)$$

nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su  $X = \mathbb{R}^n$  si può definire come distanza la *norma Euclidea*:  $d(x, y) = \|x - y\|$  che induce la *topologia Euclidea*  $\mathcal{E}_{ucl}$  in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

**ATTENZIONE!** Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme  $X$  nel modo seguente:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in CF) \text{ se } X \setminus A \text{ è finito.}$$

$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso } (C \in CF) \text{ se } C \text{ è finito.}$$

Alcune osservazioni:

- Se un aperto  $A$  è tale se il suo complementare  $\mathcal{C}A$  è finito, si ha che:

$$A = \mathcal{C}(\mathcal{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \quad (1.4)$$

In altre parole  $A$  è aperto è pari ad  $X$  privato al più di un numero finito di punti.

- Se  $X$  è finito, la topologia  $CF$  coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di  $X$  è finito e dunque un aperto.
- Se  $X$  è infinito, ad esempio  $\mathbb{R}$ , la topologia *non* è quella discreta:  $[0, 1]$  per la topologia discreta è un chiuso ma per quella  $CF$  non lo è in quanto *non* è finito.

#### 1.1.1.1 Norme esotiche

Possiamo definire su  $\mathbb{R}^n$  una famiglia di distanze dette **norme**; qui di seguito ne elenchiamo alcune. Definiti i punti  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  abbiamo:

- **Norma infinito**:  $d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$

- **Norma uno**:  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

- **Norma due**:  $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

- **Norma p**:  $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$

Si ha inoltre  $\lim_{p \rightarrow +\infty} d_p = d_\infty$ .

Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \quad (1.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo senza perdere di generalità che  $d_\infty(x, y) = |x_1 - y_1|$ .

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} \geq \sqrt{|x_1 - y_1|^2} = |x_1 - y_1| = d_\infty(x, y) \\ d_2(x, y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_1 - y_1| = n|x_1 - y_1| = nd_\infty(x, y) \end{aligned}$$

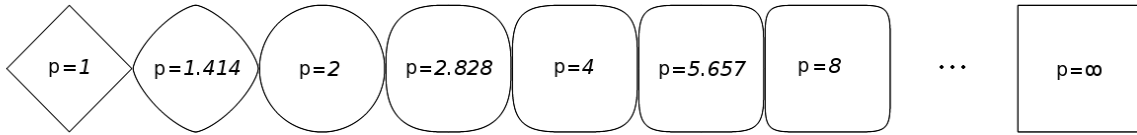
Notiamo che  $|x_i - y_i|$  sono sempre positive, allora sia  $a_i := |x_i - y_i|$ . Segue che  $a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)^2$  perché  $a_i, \dots, a_n \geq 0$ . Allora:

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq a_1 + \dots + a_n \implies d_2 \leq d_1$$

□

Queste disuguaglianze danno le seguenti inclusioni<sup>1</sup>:

$$B_1(\varepsilon) \subseteq B_2(\varepsilon) \subseteq B_\infty(\varepsilon) \subseteq B_1(n\varepsilon) \quad (1.6)$$



Questo ci porta a dire che le topologie indotte da queste distanze sono la stessa.

Preso adesso  $X = \mathcal{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$ , esso è uno spazio vettoriale infinito, con  $0_{\mathcal{C}} \equiv 0_{[0, 1]}$  (cioè la funzione *identicamente nulla*). In questo caso possiamo comunque adattare le norme precedenti con delle “somme infinite”, ovvero degli integrali.

- **Norma infinito:**  $d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$
- **Norma uno:**  $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$
- **Norma due:**  $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$
- **Norma p:**  $d_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx}$

A differenza del caso su  $\mathbb{R}^n$ , ogni norma genera in realtà una topologia distinta!

### 1.1.2 Finezza: confronto di topologia

**DEFINIZIONE 1.1.5.** Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  due topologie di  $X$ . Si dice che  $\mathcal{T}_1$  è **meno fine** di  $\mathcal{T}_2$  se tutti gli aperti della prima topologia sono aperti della seconda:

$$\forall A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2 \quad (1.7)$$

In modo analogo si dice anche che  $\mathcal{T}_2$  è **più fine** di  $\mathcal{T}_1$ .

In altre parole, una topologia più fine ha più aperti rispetto a quella confrontata.

<sup>1</sup>Qui usiamo la notazione  $B_i(r)$  per indicare la palla aperta di raggio  $r$  e centro fissato  $x$  rispetto alla norma  $i$ .

**ESEMPL.**

- La *topologia banale* è la *meno fine* di tutte, dato che ogni topologia contiene  $\emptyset, X$ .
- La *topologia discreta* è la *più fine* di tutte, dato che ogni topologia è contenuta in  $\mathcal{P}(X)$ .
- Su  $\mathbb{R}$  la topologia dei complementari finiti è *meno fine* di quella euclidea. Infatti un aperto  $A \in CF$  su  $\mathbb{R}$  è definito come  $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , cioè:

$$A = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, +\infty)$$

Per  $n$  punti gli  $n + 1$  intervalli ottenuti sono aperti della topologia euclidea; essendo unione di aperti, anche  $A$  è un aperto di  $\mathcal{E}_{ucl}$

**OSSERVAZIONE.** Se definiamo due topologie  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  sono due topologie di un insieme  $X$ , l'intersezione  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$  è anch'essa una topologia di  $X$  e, per costruzione, è *meno fine* di  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ .

## 1.1.3 Base della topologia

**DEFINIZIONE 1.1.6.** Sia  $(X, \mathcal{T})$  uno spazio topologico.  $\mathcal{B}$  è una **base** per  $\mathcal{T}$  se:

1. La base è costituita da aperti per la topologia  $\mathcal{T}$ :  $A \in \mathcal{B} \implies A \in \mathcal{T} (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T})$ .
2. Tutti gli aperti della topologia sono unioni degli aperti delle basi:  $A \in \mathcal{T} \implies \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I: A = \bigcup_{i \in I} B_i$ .

**ATTENZIONE!** La base  $\mathcal{B}$  non è detto che sia una topologia! Ad esempio, le unioni sono aperti della topologia, ma non è detto che siano interni alla base  $\mathcal{B}$ .

**ESEMPL.**

- Nella *topologia euclidea* di  $\mathbb{R}^n$  una base è

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\} \quad (1.8)$$

Infatti,  $\forall x \in A$  aperto  $\exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq A$  per la definizione della topologia; segue che  $A = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$ .

- Nella *topologia euclidea* di  $\mathbb{R}$  una base è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1.9)$$

Un'altra base per  $\mathbb{R}$  nella  $\mathcal{E}_{ucl}$  è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Dato  $x \in \mathbb{R}$ , esiste sempre una successione  $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$  decrescente o crescente tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ , essendo  $\mathbb{Q}$  denso in  $\mathbb{R}^a$ . Allora presa  $a_n \searrow a$  e  $b_n \nearrow b$ , si ha:

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

Questa base con estremi razionali ha *infiniti elementi*, ma in *misura minore* rispetto a quella ad estremi reali.

<sup>a</sup>Per una discussione più approfondita a riguardo, si guardi sez. XXX a pag. XXX.

**TEOREMA 1.1.0. TEOREMA DELLE BASI.** (MANETTI, 3.7)

Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ .  $\mathcal{B}$  è la base di un'unica topologia se e solo se:

1. L'insieme  $X$  deve essere scritto come unione di elementi della famiglia:  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .
2. Per ogni punto dell'intersezione di elementi della famiglia deve esserci un'altro elemento di essa che contiene il punto ed è sottoinsieme dell'intersezione:

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in A \cap B \quad \exists C \in \mathcal{B} : x \in C \subseteq A \cap B \quad (1.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{B}$  la famiglia di sottoinsiemi che verifica i punti 1 e 2. Allora devo trovare una topologia di cui  $\mathcal{B}$  è base. Definiamo  $\mathcal{T}$  tale che:

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathcal{B}$$

Verifichiamo gli assiomi degli aperti su  $\mathcal{T}$ .

- I  $X \in \mathcal{T}$  per ipotesi 1,  $\emptyset \in \mathcal{T}$  perché è l'unione sugli insiemi di indici vuoto ( $I = \emptyset$ ).
- II Sia  $A_i = \bigcup_j B_{ij}$ , con  $B_{ij} \in \mathcal{B}$ . Allora:

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \left( \bigcup_j B_{ij} \right) = \bigcup_{i,j} B_{ij} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{T}$$

- III Sia  $A, B \in \mathcal{T}$ , cioè  $A = \bigcup_i A_i$  e  $B = \bigcup_j B_j$  con  $A_i, B_j \in \mathcal{B}$ . Allora:

$$A \cap B = \left( \bigcup_i A_i \right) \cap \left( \bigcup_j B_j \right) = \bigcup_{i,j} \left( \underbrace{A_i \cap B_j}_{\in \mathcal{T} \text{ per l'ipotesi 2}} \right) \in \mathcal{T}$$

□

**ESEMPIO.** Sia  $X = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Verifichiamo che  $\mathcal{B}$  soddisfa il teorema appena enunciato.

1.  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n)$ .
2. Preso  $[a, b) \cap [c, d)$  si ha che esso è  $\emptyset$  o è  $[e, f)$ , con  $e = \max\{a, c\}$ ,  $f = \min\{b, d\}$ ; in entrambi i casi l'intersezione è elemento di  $\mathcal{B}$ .

Esiste dunque una topologia su  $\mathbb{R}$  che ha base  $\mathcal{B}$ ; questa *non* è base per la topologia Euclidea, ad esempio, dato che gli intervalli semiaperti non sono inclusi in  $\mathcal{E}_{ucl}$ .

Notiamo inoltre che  $(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ a + \frac{1}{n}, b \right)$ , dunque la topologia definita  $\mathcal{B}$  comprende gli aperti della topologia Euclidea:  $\mathcal{E}_{ucl}$  è meno fine di questa topologia.

#### 1.1.4 Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e un sottoinsieme  $A \subseteq X$ , si ha:

- $A$  *aperto* della topologia se  $A \in \mathcal{T}$ .
- $A$  *chiuso* della topologia se  $\mathcal{C}A = X \setminus A \in \mathcal{T}$ .

**ATTENZIONE!** Essere aperto oppure essere chiuso *non si escludono a vicenda!* Un insieme può essere aperto, chiuso, entrambi o nessuno dei due. Ad esempio, il vuoto e l'insieme stesso sono aperti e chiusi allo stesso tempo, dato che per ipotesi sono aperti i loro complementari  $\mathcal{C}\emptyset = X \setminus \emptyset = X$  e  $\mathcal{C}X = X \setminus X = \emptyset$  sono anch'essi aperti.

**DEFINIZIONE 1.1.7.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . La **chiusura**  $\bar{A}$  di  $A$  è il più piccolo chiuso contenente  $A$ :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C \quad (1.11)$$

PROPRIETÀ:

- $A \subseteq \bar{A}$ .
- $\bar{A}$  è un chiuso in quanto intersezione (arbitraria) di chiusi.
- $A$  è un chiuso  $\iff A = \bar{A}$ .

**DEFINIZIONE 1.1.8.** Un punto  $x$  è **aderente** ad  $A$  se  $x \in \bar{A}$ .

**DEFINIZIONE 1.1.9.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . L'**interno**  $A^\circ$  di  $A$  è il più grande aperto contenuto in  $A$ :

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ aperto}}} B \quad (1.12)$$

PROPRIETÀ:

- $A^\circ \subseteq A$ .
- $A^\circ$  è un aperto in quanto unione (arbitraria) di aperti.
- $A$  è un aperto  $\iff A = A^\circ$ .

**DEFINIZIONE 1.1.10.** Un punto  $x$  è **interno** ad  $A$  se  $x \in A^\circ$ .

**DEFINIZIONE 1.1.11.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . La **frontiera**  $\partial A$  di  $A$  sono i punti della chiusura di  $A$  non contenuti nel suo interno o, in altri termini, i punti aderenti sia ad  $A$  sia al suo complementare.

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} \quad (1.13)$$

PROPRIETÀ:

- $\partial A \subseteq \bar{A}$ .
- $\partial A$  è un chiuso.

**DEFINIZIONE 1.1.12.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ .  $A$  è **denso** in  $X$  se  $\bar{A} = X$  o, in altri termini, tutti i punti di  $X$  sono aderenti ad  $A$ .

**ESEMPIO.** Il più piccolo chiuso contenente  $\mathbb{Q}$  è  $\mathbb{R}$ , poiché ogni reale è aderente ai razionali. Dunque  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.5 Intorni

**DEFINIZIONE 1.1.13.** Sia  $X$  spazio topologico e  $x \in X$ .  $V$  è un **intorno** di  $x$  se  $\exists A$  aperto tale che  $x \in A \subseteq V$  o, in altri termini, se  $x$  è interno ad  $U$ . Definiamo inoltre la **famiglia degli intorni** di  $x$   $I(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ :

$$I(x) = \{V \subseteq X \mid V \text{ è intorno di } x\} \quad (1.14)$$

**OSSERVAZIONE.** Dato  $A \subseteq X$ , per ogni  $x \in A$  tale che  $A$  è intorno di  $x$  si può definire un aperto  $A_x \subseteq A$ , con  $x \in A_x$ . L'unione arbitraria di questi  $A_x$  risulta essere contenuta in  $A$  e pari al suo interno. Dunque, si può definire l'interno di  $A$  come  $A^\circ = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$ ; segue che  $A$  è aperto se e solo se  $A$  è intorno di ogni punto in  $A$ .

**LEMMA 1.1.0. PROPRIETÀ DEGLI INTORNI.** (MANETTI, 3.20, 3.21)

1. Si possono estendere gli intorni:  $U \in I(x), U \subseteq V \implies V \in I(x)$
2. Le intersezioni di intorni sono ancora intorni:  $U, V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$
3. Caratterizzazione della chiusura per intorni:  
 $B \subseteq X$ , allora  $x \in \bar{B} \iff \forall U \in I(x) \quad U \cap B \neq \emptyset$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- I L'aperto  $A$  che soddisfa la definizione di  $U \in I(x)$  è per costruzione contenuto anche in  $V$ , dunque  $A$  è un aperto che soddisfa la definizione di  $V$  intorno di  $x$ .
- II Definiti gli aperti  $A_U \subseteq U, A_V \subseteq V$  che soddisfano la definizione di intorni di  $x$ , l'intersezione  $A = A_U \cap A_V$  è un aperto contenente  $x$ . Dato che  $A = A_U \cap A_V \subseteq U \cap V, U \cap V$  per definizione di intorno di  $x$ .



III Per contronominale.

$$\begin{aligned}
 x \notin \bar{B} &\iff x \notin B \wedge x \notin \partial B \\
 &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \overline{B \cap X \setminus B} \\
 &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \partial(X \setminus B) \\
 &\iff x \in (X \setminus B)^0 \\
 &\iff \exists U \in I(x) : x \in U \subseteq X \setminus B \\
 &\iff \exists U \in I(x) : U \cap B = \emptyset
 \end{aligned}$$

□

**DEFINIZIONE 1.1.14.** Sia  $X$  spazio topologico,  $x \in X$  e  $I(x)$  la famiglia degli interni di  $x$ . Una sottofamiglia  $\mathcal{J} \subseteq I(x)$  è un **sistema fondamentale di interni** di  $x$  se  $\forall U \in \mathcal{J} \exists V \in \mathcal{J} : V \subseteq U$ .

## 1.2 FUNZIONI CONTINUE

**DEFINIZIONE 1.2.0.** Siano  $X, Y$  spazi topologici. Una funzione  $f : X \longrightarrow Y$  si dice **continua** se la controimmagine di aperti in  $Y$  è un aperto in  $X$ :

$$\forall A \text{ aperto in } Y, f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \quad (1.15)$$

Alternativamente,  $f$  è continua se la controimmagine di chiusi in  $Y$  è un chiuso in  $X$ .

$$\forall C \text{ chiuso in } Y, f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \quad (1.16)$$

**OSSERVAZIONE.**

- Si ha la definizione di continuità con i chiusi perché la controimmagine si “comporta bene” con i complementari:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

- È sufficiente verificare la definizione per gli aperti una base di  $Y$  perché la controimmagine si “comporta bene” con le unioni di insiemi:

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$$

**LEMMA 1.2.0.** (MANETTI, 3.25)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.  $f$  è continua iff  $\forall A \subseteq X \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che per ogni funzione si ha:

- $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow$ ) Sia  $A \subseteq X$ . Dobbiamo dimostrare che  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . Sappiamo che se un insieme è contenuto in un altro, lo stesso vale per le immagini e le controimmagini. Allora:

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq \overline{f(A)} \\ A &\subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \end{aligned}$$

$f^{-1}(\overline{f(A)})$  è un chiuso (in  $X$  in quanto controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso) che contiene  $A$ . Ma allora anche la chiusura, che è il più piccolo chiuso contenente  $A$ , è contenuta in  $f^{-1}(\overline{f(A)})$ . Segue quindi:

$$\begin{aligned} \overline{A} &\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \\ f(\overline{A}) &\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Sia  $C \subseteq Y$  chiuso e sia  $A = f^{-1}(C)$ . Dobbiamo dimostrare che  $A$  è chiuso in  $X$ . Poiché  $A \subseteq \overline{A}$  è vero per definizione, dimostriamo che  $\overline{A} \subseteq A$ . Per ipotesi:

$$\begin{aligned} f(\overline{A}) &\subseteq \overline{f(A)} \\ f(\overline{f^{-1}(C)}) &\subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C \end{aligned}$$

Applicando nuovamente la controimmagine:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C)})) \subseteq f^{-1}(C) = A \end{aligned}$$

Dunque la controimmagine  $A$  di un chiuso  $C$  è un chiuso. □

**TEOREMA 1.2.0.** MANETTI, 3.26 La composizione di funzioni continue è continua.

$$f : Y \longrightarrow Z, \quad g : X \longrightarrow Y \text{ continue} \implies f \circ g : X \longrightarrow Z \text{ continua} \quad (1.17)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La controimmagine della composizione di funzioni  $f \circ g$  è definita come  $f^{-1}(f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1}$ . Allora  $A$  aperto in  $Z \implies f^{-1}(A)$  aperto  $\implies g^{-1}(f^{-1}(A))$  aperto. □

**DEFINIZIONE 1.2.1.** (MANETTI, 3.27)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione. Dato  $x \in X$   $f$  è **continua** in  $x$  se:

$$\forall U \in \mathcal{I}(f(x)) \exists V \in \mathcal{I}(x) : f(V) \subseteq U \quad (1.18)$$

Questa è la generalizzazione della definizione tradizionale della continuità affrontata in *Analisi UNO*.

**TEOREMA 1.2.1.** (MANETTI, 3.28)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.  $f$  è continua per aperti  $\iff f$  è continua in  $x \forall x \in X$ .

**DIMOSTRAZIONE.**  $\implies$ ) Sia  $x \in X$  e  $U \in I(f(x))$ . Per definizione di intorno  $\exists A$  aperto in  $Y$  tale che  $f(x) \in A \subseteq U$ . Basta porre  $V = f^{-1}(A)$ : per continuità è aperto in  $X$  e, dato che  $x \in f^{-1}(A)$  perché  $f(x) \in A$ , allora  $V$  è intorno di  $x$ . Segue che  $f(V) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$ .

$\impliedby$ ) Sia  $A \subseteq Y$  aperto. Dobbiamo dimostrare che  $f^{-1}(A)$  sia aperto. Preso  $x \in f^{-1}(A)$  si ha che  $f(x) \in A$ ; dunque  $A$  è, in quanto aperto, intorno di  $f(x)$ . Allora, poiché  $f$  è continua in  $x$ ,  $\exists V \in I(x)$  tale che  $f(V) \subseteq A$ .

Segue che  $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$ , cioè  $f^{-1}(A)$  è intorno di  $x$  poiché contiene un intorno  $V$  dello stesso punto. Dunque  $f^{-1}(A)$  aperto perché è intorno di ogni suo punto.  $\square$

**DEFINIZIONE 1.2.2.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.

- $f$  è **aperta** se  $\forall A$  aperto in  $X$   $f(A)$  è aperto in  $Y$ .
- $f$  è **chiusa** se  $\forall C$  chiuso in  $X$   $f(C)$  è chiuso in  $Y$ .

**OSSERVAZIONE.** È sufficiente verificare la definizione di funzione aperta per gli aperti di una base di  $X$  perché l'immagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$$

**ATTENZIONE!** Una funzione  $f$  aperta che non sia omeomorfismo non è necessariamente una funzione aperta. Si prenda  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  (la proiezione sulla prima coordinata):

- $f$  è *continua* per ovvi motivi.
- $f$  è *aperta*. Infatti, presa una base su  $\mathbb{R}^2$  come  $\{B_\varepsilon(x, y)\}$ , si ha che  $f(B_\varepsilon(x, y)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  che sono aperti in  $\mathbb{R}$ .
- $f$  *non* è *chiusa*. Prendiamo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$  e definiamo la funzione

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua; vediamo facilmente come } C = g^{-1}(\{1\}) \text{ e, essendo } (x, y) \longmapsto xy$$

1 chiuso in  $\mathbb{R}$ ,  $C$  è controimmagine continua di un chiuso e dunque chiuso.

Si ha dunque  $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , che tuttavia non è un chiuso della topologia Euclidea in quanto non contiene infiniti punti (una base della  $\mathcal{E}_{ucl}$  è formata da intervalli, che dunque contengono infiniti punti).

**DEFINIZIONE 1.3.0.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione.  $f$  è un **omeomorfismo** se è *biunivoca*, *continua* e la sua inversa è *continua*; più precisamente, esiste  $g : Y \rightarrow X$  continua tale per cui  $g \circ f = Id_X$  e  $f \circ g = Id_Y$ .  
Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra i due; in notazione  $X \cong Y$ .

**INTUITIVAMENTE...** Possiamo immaginare l'omeomorfismo come una *deformazione* che *piega* e *allunga* uno spazio senza formare *strappi* ( $f$  continua), creare *nuovi punti* ( $f$  iniettiva), *sovrapposizioni* ( $f$  suriettiva) o *incollamenti* ( $f^{-1}$  continua): in questo modo si può trasformare lo spazio in un altro che mantenga le stesse *proprietà topologiche* dell'originale.

Si vede allora facilmente che un *quadrato* ed un *cerchio* sono omeomorfi, mentre una *sfera* ed un *toro* (la versione "topologica" di una ciambella col buco, si veda pag. ??) non lo sono, dato che non posso creare né far sparire quel buco; allo stesso modo una *retta* non è omeomorfa ad un *punto*, dato che non posso "accumulare" tutti i punti della retta in uno solo!

Seppur questa "visualizzazione" è una buona intuizione del funzionamento degli omeomorfismi, **non è completamente accurata**. Ad esempio, un *nastro di Möbius* (per la si veda ??) con un mezzo-giro ed uno con tre mezzi-giri sono omeomorfi, ma con la nostra intuizione non si arriva a dire perché.

**LEMMA 1.3.0.** (MANETTI, 3.31)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione *continua*. Allora vale:

1.  $f$  omeomorfismo  $\iff f$  aperta e biettiva.
2.  $f$  omeomorfismo  $\iff f$  chiusa e biettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la prima condizione, la seconda è analoga.

$\implies$ ) Un omeomorfismo è biettiva per definizione. Dimostriamo dunque che  $f$  sia aperta, cioè  $\forall A \in X$  aperto  $f(A) \in Y$  è aperto. Ma definita  $g : Y \longrightarrow X$  l'inversa continua dell'omeomorfismo  $f$  (cioè  $f^{-1} = g$ ), si ha che  $\forall A \in X$   $g^{-1}(A) = f(A)$  è aperto.  
 $\impliedby$ )  $f$  è già biettiva e continua per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che l'inversa  $g : Y \longrightarrow X$  sia continua, cioè  $\forall A \in X$  aperto  $g^{-1}(A) \in Y$  è aperto. Ma  $g^{-1}(A) = f(A)$  che è aperto perché  $f$  è aperta.  $\square$

## 1.4 TOPOLOGIA INDOTTA

**DEFINIZIONE 1.4.0.** Dati:

- Uno spazio topologico  $X$ .
- Un insieme  $Y$ .
- Una funzione  $f : Y \longrightarrow X$

Allora su  $Y$  si può definire la **topologia indotta** come la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono  $f$  continua.

## 1.5 SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO

**DEFINIZIONE 1.5.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e  $Y \subseteq X$  un suo sottoinsieme. Su  $Y$  si può definire la seguente *topologia di sottospazio*:

$$U \subseteq Y \text{ aperto in } Y \iff \exists V \subseteq X \text{ aperto in } X (V \in \mathcal{T}) : U = V \cap Y \quad (1.19)$$

Definita l'**inclusione**  $i : \begin{matrix} Y & \hookrightarrow & X \\ y & \longmapsto & y \end{matrix}$ , la topologia di sottospazio è la topologia indotta da  $i$ , cioè la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono continua l'inclusione.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la continuità dell'inclusione. Se  $A$  aperto in  $X$ ,  $i^{-1}(A) = A \cap Y$  (tutti gli elementi di  $A$  contenuti in  $Y$ ) è aperto in  $Y$  per definizione.  $\square$

**DEFINIZIONE 1.5.1.** Sia  $X$  uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e  $Y \subseteq X$  un suo sottoinsieme. Allora:

- $A \subseteq Y$  **aperto** in  $Y \iff A = U \cap Y$  con  $U$  aperto in  $X$ .
- $C \subseteq Y$  **chiuso** in  $Y \iff C = U \cap Y$  con  $U$  chiuso in  $X$ .
- Se  $\mathcal{B}$  è una base della topologia di  $X \implies \mathcal{B}' := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$  è base della topologia di sottospazio.

**OSSERVAZIONE.** Se  $A \subseteq Y$  è aperto della topologia di  $X$ , allora  $A$  è aperto in  $Y$  poiché  $A = A \cap Y$ .

**ESEMPLI.** Sia  $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$  in topologia Euclidea.

- $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  è aperto in  $Y$  in quanto è già aperto in  $X$ .
- $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  è chiuso in  $Y$  in quanto è già chiuso in  $X$ .
- $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  è aperto in  $Y$  in quanto si ha, ad esempio,  $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap Y$ .

**LEMMA 1.5.0.** (MANETTI, 3.55)

Sia  $A \subseteq Y \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico e  $Y$  sottospazio topologico. Definiamo:

- $\mathcal{cl}_Y(A)$  = chiusura di  $A$  in  $Y$ .
- $\mathcal{cl}_X(A)$  = chiusura di  $A$  in  $X$ .

Allora  $\mathcal{cl}_Y(A) = \mathcal{cl}_X(A) \cap Y$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Preso  $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid C \text{ chiuso in } X \text{ e } A \subseteq C\}$ , per definizione di chiusura si ha:

$$\mathcal{cl}_X(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

Ora sia  $\mathcal{C}' = \{C \cap Y \mid C \in \mathcal{C}\}$ . Allora, usando i chiusi del sottospazio:

$$\mathcal{cl}_Y(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}'} (C \cap Y) = \left( \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap Y = \mathcal{cl}_X(A) \cap Y = \mathcal{cl}_Y(A)$$

$\square$

## 1.5.1 Immersione

**DEFINIZIONE 1.5.2.** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  funzione tra  $X, Y$  spazi topologici. Se:

- $f$  continua.
- $f$  iniettiva

Allora  $f$  è un'**immersione** se e solo se ogni aperto in  $X$  è controimmagine di un aperto di  $Y$  per  $f$ , cioè se e solo se si ha che:

$$B \subseteq X \text{ è aperto in } X \iff B = f^{-1}(A), A \text{ aperto in } Y \quad (1.20)$$

**OSSERVAZIONE.** Per costruzione  $f$  è immersione se la topologia su  $X$  è la topologia indotta, dunque la meno fine che rende  $f$  continua.

Se sull'immagine  $f(X) \subseteq Y$  mettiamo la topologia di sottospazio di  $Y$ , si ha che

$$f : X \longrightarrow Y \text{ immersione} \iff f_{\bullet} : X \longrightarrow f(X) \text{ è omeomorfismo}$$

**ESEMPIO.** Esempio di *non* immersione.

$$\begin{aligned} [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Notiamo innanzitutto che  $f([0, 1)) = S^1$ . Si ha:

- $f_{\bullet}$  è continua per ovvi motivi
- $f_{\bullet}$  iniettiva, dato che l'unico caso problematico poteva essere  $t = 1$  che *non* nel dominio (si avrebbe avuto infatti  $f_{\bullet}(0) = f_{\bullet}(1)$ ).
- $f_{\bullet}$  suriettiva per costruzione.

Tuttavia  $f_{\bullet}$  *non* è immersione, dato che  $f_{\bullet}^{-1}$  non è continua. Preso  $P = (1, 0) \in S^1$ ,  $f_{\bullet}^{-1}$  non è continua in  $P$ . Infatti, gli intorni di 0 in  $[0, 1)$  sono del tipo  $U = [0, \varepsilon)$ , dunque dovrei trovare  $\forall U$  un intorno  $V$  di  $P \in S^1$  :  $f_{\bullet}^{-1}(V) \subseteq U$ .

Tuttavia, solo la parte superiore di  $V \in I(P)$  ha la controimmagine interna ad  $U$ : la parte inferiore, poiché sono le immagini di punti prossimi all'estremo 1 del dominio, non hanno controimmagini in  $U$ . Pertanto, non abbiamo l'omeomorfismo di  $f_{\bullet}$  e dunque l'immersione.

**DEFINIZIONE 1.5.3.** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  funzione tra  $X, Y$  spazi topologici.

- $f$  si dice **immersione aperta** se  $f$  è chiusa.
- $f$  si dice **immersione chiusa** se  $f$  è aperta.

**LEMMA 1.5.1.** (MANETTI, 3.59)

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  funzione *continua* tra  $X, Y$  spazi topologici.

1.  $f$  iniettiva e aperta  $\implies f$  è immersione (aperta)
2.  $f$  iniettiva e chiusa  $\implies f$  è immersione (chiusa)

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il caso chiuso, il caso aperto è analogo. Preso  $C \subseteq X$  chiuso, sappiamo che  $f(C)$  è chiuso in  $Y$ , ma possiamo sempre dire che  $f(C) = f(C) \cap f(X)$  in quanto  $f(C) \subseteq f(X)$ . Dunque  $f(C)$  è un chiuso del sottospazio  $f(X)$ . Segue che ogni chiuso di  $C$  è un chiuso dell'immagine di  $f$ , dunque  $f_\bullet : X \longrightarrow f(X)$  è:

- Continua perché lo è  $f$ .
- Biunivoca perché  $f_\bullet$  è iniettiva in quanto lo è  $f$  e suriettiva per definizione.
- Chiusa per costruzione.

$f_\bullet$  è dunque omeomorfismo ed  $f$  è immersione (chiusa).  $\square$

## 1.6 PRODOTTI TOPOLOGICI

**DEFINIZIONE 1.6.0.** Siano  $P, Q$  spazi topologici e  $P \times Q$  il suo prodotto cartesiano. Definite le **proiezioni**:

$$\begin{aligned} p : P \times Q &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} q : P \times Q &\longrightarrow Q \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned} \quad (1.23)$$

La **topologia prodotto**  $\mathcal{P}$  è la topologia *meno fine* fra quelli che rendono  $p$  e  $q$  continue. In particolare, ricordando l'osservazione 1.2, la topologia prodotto è l'intersezione di tutte le topologia che rendono continue  $p$  e  $q$ .

**TEOREMA 1.6.0.** (MANETTI, 3.61)

1. Una *base* della topologia  $\mathcal{P}$  è data dagli insiemi della forma  $U \times V$  dove  $U \subseteq P$  aperto,  $V \subseteq Q$  aperto.
2.  $p, q$  sono aperte; inoltre  $\forall (x, y) \in P \times Q$  le restrizioni:

$$\begin{aligned} p| : P \times \{y\} &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} q| : \{x\} \times Q &\longrightarrow Q \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned} \quad (1.25)$$

Sono omeomorfismi.

3. Data  $f : X \longrightarrow P \times Q$  con  $X$  spazio topologico, si ha che:

$$f \text{ continua} \iff f_1 = p \circ f, f_2 = q \circ f \text{ continue} \quad (1.26)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

I Dimostriamo che:

- A) La famiglia  $\{U \times V\}$  è base per una topologia  $\mathcal{T}$ .
- B)  $P$  è meno fine di  $\mathcal{T}$ .
- C)  $\mathcal{T}$  è meno fine di  $P$ .

In questo modo avremo che la topologia  $\mathcal{T}$  è la topologia prodotto  $\mathcal{P}$  e ne

conosceremo una base.

- a) Segue dal teorema delle basi 1.1 (Manetti, 3.7). Infatti
- i.  $P \times Q$  appartiene alla famiglia  $\{U \times V\}$ , dato che per definizione gli insiemi stessi  $P$  e  $Q$  sono aperti.
  - ii. L'intersezione di due elementi della famiglia appartiene alla famiglia:  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ .
- b) Per definizione  $\mathcal{P}$  è la meno fine fra tutte le topologie sul prodotto. Dunque, per dimostrare A) basta vedere che  $p, q$  sono continue rispetto alla topologia  $\mathcal{T}$ .  
Preso la proiezione  $p$ , sia  $U \subseteq P$  aperto. Si ha che  $p^{-1}(U) = U \times Q$  è aperto in  $\mathcal{T}$  in quanto è prodotto di aperti; in particolare sta nella base! Dunque  $p$  è continua, e un ragionamento analogo vale per  $q$ .
- c) Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di  $\mathcal{T}$  è anche aperto di  $\mathcal{P}$ .  
Presi  $U \subseteq P, V \subseteq Q$  allora:

$$U \times V = (U \cap P) \times (V \cap Q) = (U \times P) \cap (V \times Q) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

Poichè  $p, q$  sono continue e  $U, V$  sono aperti, anche  $p^{-1}(U), q^{-1}(V)$  sono aperti; segue che la loro intersezione è aperta e dunque  $U \times V$  è aperto della topologia  $\mathcal{T}$ .

- II Dimostriamo il caso con  $p|$ , dato che il caso con  $q|$  è analogo. Preso un aperto della base  $U \times V$ , studiamo gli aperti del sottospazio  $P \times \{y\}$ .

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \notin V \\ U \times \{y\} & \text{se } y \in V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio  $P \times \{y\}$  sono tutte e solo le unioni di  $U \times \{y\}$ , al variare di  $U$  di aperti dello spazio  $P$ . Si ha dunque:

$$p|(U \times \{y\}) = U$$

Dunque, essendo  $p|$  continua perché restrizione della proiezione (che è continua per definizione), biettiva per costruzione e aperta per i risultati appena ottenuti si ha che  $P \times \{y\}$  e  $P$  sono omeomorfi, cioè  $p|$  è omeomorfismo.

Per dimostrare che  $p$  sia aperta, preso  $A$  aperto in  $P \times Q$ , si ha:

$$p(A) = p\left[\bigcup_{y \in Q} (A \cap P \times \{y\})\right] = \bigcup_{y \in Q} p(A \cap P \times \{y\}) \quad (1.27)$$

Per i ragionamenti della prima parte,  $A \cap P \times \{y\}$  è aperto di  $P \times \{y\}$  e sappiamo dunque che  $p|(A \cap P \times \{y\})$  è aperto: ne segue che  $p(A \cap P \times \{y\})$  è aperto in  $P$  al variare di  $y$ . Allora anche  $p(A)$  è aperto (in quanto è unione di aperti) e dunque  $p$  è aperta.

- III  $\Rightarrow$ ) Poiché  $f : X \longrightarrow P \times Q$ ,  $p : P \times Q \longrightarrow P$  e  $q : P \times Q \longrightarrow Q$  sono continue, le composizioni  $f_1 = p \circ f : X \longrightarrow P$ ,  $f_2 = q \circ f : X \longrightarrow Q$  sono banalmente continue.  $\Leftarrow$ ) Dobbiamo dimostrare che  $f$  sia continua.



Sia  $A = U \times V \subseteq P \times Q$  aperto della base:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)) = f^{-1}(p^{-1}(U)) \cap f^{-1}(q^{-1}(V)) \\ &= (pf)^{-1}(U) \cap (qf)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Per ipotesi  $pf, qf$  sono continue, dunque loro controimmagini di aperti sono ancora aperti; inoltre, essendo la loro intersezione un aperto, segue l'implicazione.  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.6.0.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $X \times Y$  il prodotto. Allora:

1. Date le basi  $\mathcal{B}$  della topologia di  $X$  e  $\mathcal{C}$  della topologia di  $Y$ , allora:

$$\mathcal{D} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{C}\} \quad (1.28)$$

è una base per la topologia prodotto.

2. Dati  $x \in X, y \in Y$ , siano  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un sistema fondamentale di intorni di  $x$  e  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$  un sistema fondamentale di intorni di  $y$ . Poniamo  $W_{ij} := U_i \times V_j \subseteq X \times Y$ . Allora:

$$\mathcal{W} = \{W_{ij}\}_{j \in J} \quad (1.29)$$

è un sistema fondamentale di intorni di  $(x, y) \in X \times Y$ .

3. Se  $A \subseteq X, B \subseteq Y$ , allora  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ . In particolare, il prodotto di chiusi è chiuso.

**DIMOSTRAZIONE.**

- I Segue dalla dimostrazione dal primo punto del teorema 1.4 ((MANETTI, 3.61)).
- II Per definizione di sistema fondamentale di intorni si ha:

$$\begin{aligned} \forall U \in I(x) \exists U_i \in \mathcal{U} : U_i \subseteq U \\ \forall V \in I(y) \exists V_j \in \mathcal{V} : V_j \subseteq V \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ) Per ogni intorno  $U$  di  $x$  e  $V$  di  $y$ , si ha  $W \in I(x, y)$ . Inoltre, presi gli intorni  $U_i$  e  $V_j$  definiti come sopra, si ha che  $W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$  per definizione di topologia prodotto; segue che, per ogni intorno  $W$  di questa forma esiste  $W_{ij}$  tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$$

$\Leftarrow$ ) Prendiamo un intorno  $W \in I(x, y)$ , esiste un aperto  $W' \subseteq W$ . Poiché  $W'$  appartiene al prodotto  $X \times Y$ , si ha che  $W' = \bigcup_k U_k \times V_k$  con  $U_k$  e  $V_k$  aperti di  $X$  e  $Y$ . Preso allora  $(x, y) \in W'$ , esiste gli aperti  $U_k$  e  $V_k$  che contengono rispettivamente  $x$  e  $y$ .

Segue dunque che  $U_k \in I(x)$  e  $V_k \in I(y)$  e dunque dal sistema fondamentale di intorni si ha che  $\exists U_i \in \mathcal{U}, V_j \in \mathcal{V}$  tali che  $U_i \subseteq U_k, V_j \subseteq V_k$ . Allora definito  $W_{ij} = U_i \times V_j$ , si ha per ogni intorno  $W$  di esiste  $W_{ij}$  tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U_k \times V_k \subseteq W' \subseteq W$$

## III

$$\begin{aligned}
(xy) \in \overline{A \times B} &\iff \forall W \in I(x, y) \quad W \cap (A \times B) \neq \emptyset \\
&\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset \\
&\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset \\
&\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad U \cap A \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset \\
&\iff \forall U \in I(x) \quad U \cap A \neq \emptyset, \forall V \in I(y) \quad V \cap B \neq \emptyset \\
&\iff x \in \overline{A} \wedge y \in \overline{B} \iff (x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}
\end{aligned}$$

In particolare, se  $A$  e  $B$  sono chiusi, avendo che  $A = \overline{A}$  e  $B = \overline{B}$ , otteniamo:

$$A \times B = \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$$

□

**OSSERVAZIONE.** Il prodotto di un numero **finito** di spazi topologici è pari al prodotto di due spazi:

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

In particolare una base di aperti di  $X_1 \times \dots \times X_n$  è data da:

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \text{ aperto in } X_i\}$$

## 1.7 ASSIOMI DI SEPARAZIONE: T1 E HAUSDORFF

**DEFINIZIONE 1.7.0.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso, in particolare se e solo se tutti i punti sono chiusi.

In termini di intorni,  $X$  è **T1** se presi due punti distinti  $x$  e  $y$  esiste un intorno per il punto  $x$  che non contiene  $y$  e viceversa:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{array}{ll} \exists U \in I(x) & y \notin U \\ \exists V \in I(y) & x \notin V \end{array} \quad (1.30)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che la definizione di **T1** implica quella per intorni e viceversa.

$\implies$ ) Siano  $x, y \in X \quad x \neq y$ . Per ipotesi  $\{x\}$  è chiuso, dunque  $V = X \setminus \{x\}$  è aperto. Poiché  $y \neq x$ , allora  $y \notin \{x\} \implies y \in V$ , ed essendo  $V$  aperto,  $V \in I(y)$ . Dunque  $V$  è intorno di  $y$  e banalmente  $x \notin V$ .

$\impliedby$ ) Dobbiamo dimostrare che  $\forall x \quad \{x\}$  è chiuso, cioè  $A = X \setminus \{x\}$  è aperto. Sia  $y \in A$ :  $y \notin \{x\} \implies y \neq x$ . Per ipotesi allora esiste un intorno  $V$  di  $y$  tale che  $x \notin V$ . Necessariamente si ha che  $V \subseteq A$ , dunque  $A$  è anch'esso intorno di  $y$ . Per l'arbitrarietà di  $y$ ,  $A$  è intorno di ogni suo punto, dunque  $A$  è aperto. □

**OSSERVAZIONE.**

1.  $X$  è **T1** se e solo se per ogni punto  $x \in X$  si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U \quad (1.31)$$

2. Ogni spazio metrico è **T1**

**DIMOSTRAZIONE.**

I  $\implies$ ) Se  $X$  è **T1**, allora  $\forall \{y\} \subseteq X$  è chiuso. Fissato  $x$ , prendiamo  $y \in \bigcap_{U \in I(x)} U$ . Allora  $\forall U \in I(x)$   $\{y\} \cap U \neq \emptyset$ . Da ciò segue che  $x \in \overline{\{y\}} = \{y\}$ , cioè  $y = x$ . Allora  $\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$ .

$\impliedby$ ) Per dimostrare che  $X$  è **T1** è sufficiente dimostrare che  $\{x\}$  è chiuso, dato che ogni insieme finito in  $X$  si può vedere come unione finita di singoletti  $\{x\}$  e per gli assiomi dei chiusi otteniamo un chiuso. In particolare, ci basta dimostrare che  $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$ , essendo l'altra implicazione ovvia per definizione.

Sia  $y \in \overline{\{x\}}$ . Per definizione di chiusura  $\forall V \in I(y)$   $V \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset \implies \forall V \in I(y)$   $V \cap \{x\} \neq \emptyset \implies \{x\} \subseteq V$ , cioè l'intersezione dei  $V$  deve incontrare  $\{x\}$ :

$$\bigcap_{V \in I(y)} V \cap \{x\} = \{x\}$$

Per ipotesi,  $\bigcap_{V \in I(y)} V = \{y\}$ , dunque  $\{y\} \cap \{x\} = \{x\} \implies y \in \{x\} \implies \overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$  e vale le ipotesi.

- II Se  $X$  è metrico e  $x \in X$ , il sistema fondamentale di intorni di  $X$  sono gli intorni centrati in  $X$  di raggio arbitrario, cioè  $B_\varepsilon(x)$ . Allora:

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}$$

E per la proposizione precedente si ha che  $X$  metrico è **T1**. □

**DEFINIZIONE 1.7.1.** Uno spazio topologico  $X$  si dice di **Hausdorff** o **T2** se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{matrix} : U \cap V = \emptyset \quad (1.32)$$

**OSSERVAZIONE.**

1.  $X$  è di **Hausdorff** se e solo se per ogni punto  $x \in X$  si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U} \quad (1.33)$$

2. Essere **Hausdorff** implica essere **T1**, ma non il viceversa.  
3. Ogni spazio metrico è di **Hausdorff**.

**DIMOSTRAZIONE.**

- I  $\Rightarrow$ ) Sia  $X$  di **Hausdorff**. Fissato  $x$ , sia  $y \in \overline{U}$ , con  $U \in I(x)$ . Per definizione di  $\overline{U}$ ,  $\forall V \in I(y) \quad V \cap U \neq \emptyset$ . Se  $y \neq x$ , si avrebbe un assurdo, dato che  $\nexists V \in I(y) : U \cap V = \emptyset$  e dunque  $X$  non sarebbe di **Hausdorff**.
- $\Leftarrow$ ) Dobbiamo dimostrare che  $X$  è di **Hausdorff**. Sia  $x \neq y$ . Allora  $y \notin \{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$ . Allora, per definizione di chiusura si ha che  $\forall U \in I(x) \exists V \in I(y) : V \cap U = \emptyset$ . Segue dunque la tesi.
- II Avendo per ogni coppia di punti distinti due intorni disgiunti in quanto **Hausdorff**, banalmente i due intorni verificano la definizione di **T1** per intorni. Il viceversa *non* è vero: prendendo la topologia dei complementari finiti  $CF$  su uno spazio  $X$  *non* finito, essa è **T1** ma non **Hausdorff**.
- III Presi  $x \neq y$ , allora  $d(x, y) = d > 0$ . Dunque, per disuguaglianza triangolare si ha sempre che:

$$B_{d/4}(Y) \cap B_{d/4}(Y) = \emptyset$$

□

**PROPOSIZIONE 1.7.0.** 1.21(MANETTI, 3.6.8)Sottospazi e prodotti di spazi di **Hausdorff** sono **Hausdorff**.**DIMOSTRAZIONE.**

- Sia  $Y \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico,  $Y$  con la topologia di sottospazio. Prendiamo  $x, y \in Y$  con  $x \neq y$ .  
 $X$  di **Hausdorff** implica che  $\exists U, V \subseteq X$  intorni rispettivamente di  $x$  e  $y$  tali che  $U \cap V = \emptyset$ . Basta prendere allora  $U \cap Y, V \cap Y$ : sono intorni sempre di  $x$  e  $y$  in  $Y$  che restano comunque disgiunti.
- Sia  $X \times Y$  con  $X, Y$  spazi topologici. Prendiamo  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ . Questo significa che  $x_1 \neq x_2$  oppure  $y_1 \neq y_2$ .  
Scegliamo senza perdita di generalità  $x_1 \neq x_2$ . Essendo  $X$  di **Hausdorff**,  $\exists U_1, U_2$  (intorni) aperti in  $X$  tali che  $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 : U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Allora:

$$\begin{aligned} U_1 \times Y \text{ intorno di } (x_1, y_1) &\implies U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = (U_1 \cap U_2) \times (Y \cap Y) = \emptyset \\ U_2 \times Y \text{ intorno di } (x_2, y_2) & \end{aligned}$$

□

**TEOREMA 1.7.0.** (MANETTI, 3.6.9)Sia  $X$  spazio topologico. La **diagonale**  $\Delta \subseteq X \times X$  è l'insieme delle coppie che hanno uguali componenti:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \quad (1.34)$$

Si ha:

 $X$  di **Hausdorff**  $\iff \Delta$  chiuso in  $X \times X$ .**DIMOSTRAZIONE.**  $\Rightarrow$ ) Dobbiamo dimostrare che  $\Delta$  è chiuso, cioè  $X \times X \setminus \Delta$  aperto,

ovvero  $X \times X \setminus \Delta$  è intorno di ogni suo punto.

Preso  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta \implies x \neq y$  dato che *non* appartiene alla diagonale. Essendo  $X$  di **Hausdorff**,  $\exists U, V : x \in U, y \in V$  (intorni) aperti disgiunti. Allora  $U \times V \cap \Delta = \emptyset$ : se così non fosse, ci potrebbero essere dei valori della diagonale che appartengono ad  $U \times V$ , cioè esisterebbe almeno una coppia  $(x', y')$  tale che  $x' = y'$ , ovvero gli intorni non sarebbero disgiunti. Allora  $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$ .

$\Leftarrow$ ) Siano  $x, y \in X, x \neq y$ . Allora  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ , che è aperto per ipotesi. Necessariamente esiste un aperto della base della topologia prodotto che contiene la coppia:  $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$ . Per gli stessi ragionamenti dell'altra implicazione, si ha che  $x \in U, y \in V$  con  $U, V$  aperti (e dunque intorni) disgiunti. Segue che  $X$  è di **Hausdorff**.  $\square$

#### PROPOSIZIONE 1.7.1.

1. Siano  $f, g : X \longrightarrow Y$  continue,  $Y$  di **Hausdorff**. Sia  $C$  il luogo dei punti dove  $f$  e  $g$  coincidono:

$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \quad (1.35)$$

Allora  $C$  è chiuso.

2. Sia  $f : X \longrightarrow X$  continua,  $X$  di **Hausdorff**. Sia  $F_{ix}(f)$  il luogo dei **punti fissi** di  $f$  e  $g$  coincidono:

$$F_{ix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\} \quad (1.36)$$

Allora  $F_{ix}(f)$  è chiuso.

3. Siano  $f, g : X \longrightarrow Y$  continue,  $Y$  di **Hausdorff** e  $A \subseteq X$  denso in  $X$ . Allora

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x) \implies \forall x \in X \quad f(x) = g(x) \quad (1.37)$$

4. Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua,  $Y$  di **Hausdorff**. Sia  $\Gamma_f$  il **grafico** di  $f$  le insieme delle coppie  $(x, f(x))$  formate dai punti del dominio e le corrispondenti immagini tramite  $f$ .

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \quad (1.38)$$

Allora  $\Gamma_f$  è chiuso in  $X \times Y$ .

#### DIMOSTRAZIONE.

- I Definiamo la funzione  $h : X \longrightarrow X \times Y$   

$$x \longmapsto (f(x), g(x))$$
. Essa è continua perché le componenti sono continue; considerata la diagonale  $\Delta_Y$  di  $Y \times Y$ , si ha che  $C = h^{-1}(\Delta_Y)$  è la controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso e quindi chiuso.
- II Basta porre al punto  $1 \ g = Id_X$ .
- III Per ipotesi  $A \subseteq h^{-1}(\Delta_Y)$ . In quanto  $A$  è denso in  $X$ ,  $\overline{A} = X$ . Dunque:

$$X = \overline{A} \subseteq \overline{h^{-1}(\Delta_Y)} = h^{-1}(\Delta_Y)$$

Questo è vero in quanto  $Y$  è di **Hausdorff** e la diagonale  $\Delta_Y$  è un chiuso: segue che  $h^{-1}(\Delta_Y)$  è chiuso e dunque pari alla sua chiusura. Si ha la tesi.

IV Definiamo la funzione continua  $l : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$  . Allora  $\Gamma_f = l^{-1}(\Delta_Y)$  è un chiuso.

□

### 1.8 PROPRIETÀ TOPOLOGICA

**DEFINIZIONE 1.8.0.** Una **proprietà topologica**  $P$  è una caratteristica degli spazi topologici per cui se ogni spazio  $X$  che possiede quella proprietà  $P$  è omeomorfo ad uno spazio  $Y$ , allora anche  $Y$  ha quella proprietà (e viceversa):

$$X \cong Y \implies [X \text{ ha } P \iff Y \text{ ha } P] \quad (1.39)$$

In altre parole, una proprietà topologica è **invariante** rispetto agli omeomorfismi.

**OSSERVAZIONE.** Per verificare che  $P$  è una proprietà topologica dati due spazi omeomorfi  $X \cong Y$ , basta in realtà verificare solo che se  $X$  ha la proprietà  $P$  allora anche  $Y$  la ha. Invece, si può verificare che due spazi **non** sono omeomorfi trovando una proprietà topologica che non condividono tra di loro.

**ESERCIZIO.** (MANETTI, 3.56)

Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $Y$  di **Hausdorff**. Se esiste  $f : X \longrightarrow Y$  continua e iniettiva, allora  $X$  è di **Hausdorff**.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Essendo  $f$  iniettiva,  $f(x) \neq f(y) \in Y$ : in quanto  $Y$  è di **Hausdorff**,  $\exists U, V$  (intorni) aperti disgiunti in  $Y$  che contengono rispettivamente  $f(x)$  e  $f(y)$ .

Per continuità di  $f$  le controimmagini di questi intorni aperti sono aperti e per iniettività sono ancora disgiunti:  $\exists f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  (intorni) aperti disgiunti che contengono rispettivamente  $x$  e  $y$ . Segue che  $X$  è di **Hausdorff**. □

**PROPOSIZIONE 1.8.0.** Essere di **Hausdorff** è una proprietà topologica, ovvero:

$$X \cong Y \implies [X \text{ è di Hausdorff} \implies Y \text{ è di Hausdorff}] \quad (1.40)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  un omeomorfismo tra i due spazi. Allora  $f$  è per definizione continua e iniettiva. Per l'esercizio 1.1 (MANETTI, 3.56) segue che  $X$  di **Hausdorff**  $\implies Y$  di **Hausdorff**. □

**TEOREMA 1.8.0.**  $X, Y$  di **Hausdorff**  $\iff X \times Y$  di **Hausdorff**.

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Si veda la proprietà (MANETTI, 3.6.8).

$\Leftarrow$ ) Si fissi  $y_0 \in Y$ . Definita la funzione  $f : X \longrightarrow X \times Y$ ,  
$$x \longmapsto (x, y_0)$$
, essa è continua ed iniettiva, dunque per l'esercizio 1.1 (MANETTI, 3.56) segue che  $X$  è di **Hausdorff**.  
Definito  $x_0 \in X$  e  $f : Y \longrightarrow X \times Y$ ,  
$$y \longmapsto (x_0, y)$$
, allo stesso modo si verifica che  $Y$  è di **Hausdorff**.

□





# CONNESSIONE E COMPATTEZZA

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 2.1 CONNESSIONE

**DEFINIZIONE 2.1.0.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **connesso** se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono  $\emptyset$ ,  $X$ .  
Uno spazio non *connesso* si dice **sconnesso** oppure **non connesso**.

**LEMMA 2.1.0.** (MANETTI, 4.2)

Sono condizioni equivalenti:

1.  $X$  è *sconnesso*.
2.  $X = A \cup B$  con  $A$ ,  $B$  aperti, non vuoti, disgiunti.
3.  $X = A \cup B$  con  $A$ ,  $B$  chiusi, non vuoti, disgiunti.

**DIMOSTRAZIONE.**

$2 \iff 3$ ) Sono equivalenti: se  $A$  è aperto e disgiunto da  $B$  tale che  $X = A \cup B$  significa che  $B = \mathcal{C}A = X \setminus A$  e dunque chiuso; analogamente per  $B$  aperto si ha che  $A$  è chiuso: allora  $A$ ,  $B$  chiusi e aperti propri.

$1 \implies 2$ ) Esiste  $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$  con  $A$  aperto e chiuso. Allora basta porre  $B = \mathcal{C}A = X \setminus A$ : essendo il complementare di  $A$  è aperto e chiuso, sono disgiunti e tali per cui  $B \neq X$ ,  $B \neq \emptyset$ .  $A$  e  $B$  soddisfano la tesi.

$1 \implies 2$ )  $A$  aperto,  $B$  aperto  $\implies A$  chiuso perché  $A = \mathcal{C}X = X \setminus B$ . Inoltre  $A$  non vuoto,  $B$  non vuoto  $\implies A \neq X$ . Dunque  $A$  è aperto, chiuso e  $A \neq \emptyset$ ,  $X$  e pertanto soddisfa la tesi: esiste un sottoinsieme aperto e chiuso che non il vuoto o l'insieme stesso.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Il lemma 2.1 (MANETTI, 4.2) ci dice che è sufficiente trovare solo due aperti (o chiusi) che soddisfano la condizione di cui sopra per affermare la sconnessione.

Viceversa, per dimostrare la connessione, dobbiamo dimostrare che per ogni coppia di aperti (o chiusi) non vuoti, la cui unione è  $X$ , essi non siano disgiunti.

**ESEMPIO.** Esempi di spazi topologici *sconnessi* in topologia Euclidea.

- $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .
- $X = [0, 1] \cup (2, 3)$ .

**LEMMA 2.1.1.** (MANETTI, 4.4)

Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$  con  $A$  aperto e chiuso. Sia  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  *connesso*. Allora  $Y \cap A = \emptyset$  (cioè  $Y \subseteq Y \setminus A$ ) oppure  $Y \subseteq A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo  $Y \cap A$ : esso è intersezione di due aperti e chiusi per ipotesi ( $Y$  è aperto e chiuso perché *connesso*), cioè è aperto e chiuso. Essendo  $Y$  *connesso*, un suo sottoinsieme aperto e chiuso o è l'insieme vuoto oppure è l'insieme stesso, cioè  $Y \cap A = \emptyset$  (cioè  $Y \subseteq Y \setminus A$ ) oppure  $Y \cap A = Y$  (cioè  $Y \subseteq A$ ).  $\square$

**TEOREMA 2.1.0.** (MANETTI, 4.6)

Con la topologia Euclidea,  $X = [0, 1]$  è *connesso*.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $X = [0, 1] = C \cup D$  con:

- $C, D$  entrambi chiusi.
- $C, D$  entrambi aperti.

Dobbiamo dimostrare che  $C, D$  *non* sono disgiunti, ovvero  $C \cap D \neq \emptyset$ . Supponiamo sia  $0 \in C$  e poniamo  $d = \inf D$ . Essendo  $D$  un chiuso,  $d \in \overline{D} = D$ .

- Se  $d = 0$ ,  $d \in C \cap D \neq \emptyset$ .
- Se  $d > 0$  allora  $[0, d] \subseteq C$  perché *non sta* in  $D$ . Il passaggio alla chiusura mantiene l'inclusione, dunque  $[0, d] \subseteq \overline{C} = C$ . Segue che  $d \in C$  e dunque  $C \cap D \neq \emptyset$ .  $\square$

**TEOREMA 2.1.1.** (MANETTI, 4.7)

L'immagine continua di un *connesso* è un *connesso*:

$$f : X \longrightarrow Y \text{ continua, } X \text{ connesso} \implies f(X) \text{ connesso} \quad (2.1)$$

**TEOREMA 2.1.2.** Sia  $Z \subseteq f(X)$ ,  $Z$  aperto, chiuso in  $f(X)$  non vuoto. Per dimostrare che  $f(X)$  sia *connesso* ci è sufficiente dimostrare che  $Z = f(X)$ : in questo modo gli unici aperti e chiusi sono i sottoinsiemi impropri:

- $Z$  aperto:  $\exists A$  aperto in  $Y : Z = A \cap f(X)$ .
- $Z$  chiuso:  $\exists C$  chiuso in  $Y : Z = C \cap f(X)$ .

Allora:

- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \implies f^{-1}(Z)$  è uguale alla controimmagine continua di un aperto in  $Y$ , cioè è uguale ad un aperto di  $X$ .
- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(C) \implies f^{-1}(Z)$  è uguale alla controimmagine

ne continua di un chiuso in  $Y$ , cioè è uguale ad un chiuso di  $X$   
 Segue che  $f^{-1}(Z)$  è aperto e chiuso in  $X$ . Notiamo inoltre che, essendo  $Z \neq \emptyset$ , allora  $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$ : essendo  $X$  connesso per ipotesi, necessariamente  $f^{-1}(Z) = X$ .

**OSSERVAZIONE.** Dal teorema precedente segue che essere *connesso* è una proprietà topologica! Infatti, se vale per una qualunque funzione continua  $f : X \longrightarrow Y$ , allora varrà anche per omeomorfismi tra  $X$  e  $Y$ ; in particolare, si avrà per suriettività che  $f(X) = Y$  connesso.

**DEFINIZIONE 2.1.1.** Un **arco** o **cammino**  $\alpha$  da un punto  $x$  a un punto  $y$  in uno spazio topologico  $X$  è una funzione continua che parametrizza un *percorso* finito fra gli estremi  $x$  e  $y$ :

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ continua : } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \quad (2.2)$$

**DEFINIZIONE 2.1.2.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **connesso per archi** o **c.p.a.** o *path-connected* se per ogni coppia di punti in  $X$  esiste un arco che li collega:

$$\forall x, y \in X \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ continua : } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \quad (2.3)$$

**TEOREMA 2.1.3.** (MANETTI, 4.7)

$X$  **c.p.a.**  $\implies X$  *connesso*.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X = A \cup B$ , con  $A, B$  aperti non vuoti. Vogliamo dimostrare che  $A \cap B \neq \emptyset$ . Essendo non vuoti, prendiamo  $a \in A, b \in B$ . In quanto  $X$  è **c.p.a.**, esiste il cammino (continuo)  $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$  tale che  $\alpha(a) = a, \alpha(1) = b$ .

Studiamo la controimmagine di  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(X) &= \alpha^{-1}(A \cup B) = [0, 1] \\ [0, 1] &= \alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B) \end{aligned}$$

$\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)$  sono entrambi aperti e non vuoti in quanto controimmagini (continue) di aperti non vuoti ( $0 \in \alpha^{-1}(A), 1 \in \alpha^{-1}(B)$ ).

Poiché  $[0, 1]$  è connesso, allora le controimmagini trovate non sono disgiunte. Segue allora:

$$\exists t \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) \implies \alpha(t) \in \alpha(\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)) \subset \alpha(\alpha^{-1}(A)) \cap \alpha(\alpha^{-1}(B)) = A \cap B$$

□

**DEFINIZIONE 2.1.3.** Dati due cammini in uno spazio  $X$ :

$$\begin{aligned}\alpha : [0, 1] &\longrightarrow X & \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \\ \beta : [0, 1] &\longrightarrow X & \beta(0) = y, \beta(1) = z\end{aligned}$$

Allora possiamo creare un cammino  $\alpha * \beta$  con la **congiunzione di cammini**:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

**LEMMA 2.1.2.** Sia  $A, B$  **c.p.a.**,  $A \cap B \neq \emptyset \implies A \cup B$  **c.p.a.**

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $x, y \in A$  oppure  $x, y \in B$  esiste per ipotesi un arco che li collega. Dobbiamo allora trovare un arco in  $A \cup B$  da  $x$  a  $y \forall x \in A, y \in B$ . Preso  $z \in A \cap B$ , per ipotesi esistono due cammini ad esso:

$$\begin{aligned}\alpha : [0, 1] &\longrightarrow A & \alpha(0) = x, \alpha(1) = z \\ \beta : [0, 1] &\longrightarrow B & \beta(0) = z, \beta(1) = y\end{aligned}$$

Usando la *giunzione di cammini*, si ha:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Il cammino  $\alpha * \beta : [0, 1] \longrightarrow A \cup B$  è quello richiesto.  $\square$

**OSSERVAZIONE.**

- Usando la giunzione di cammini, si ha che:

$$X \text{ è c.p.a.} \iff \exists z \in X : \forall x \in X \quad \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X : \alpha(0) = z, \alpha(1) = x$$

In altre parole, uno spazio è **c.p.a.** se e solo se esiste un punto per cui ogni altro punto è collegato tramite un arco.

- Per ogni arco  $\alpha$  esiste l'arco inverso, percorso al contrario:  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ .

**DEFINIZIONE 2.1.4.** In  $\mathbb{R}^n$ , un **segmento**  $\overline{PQ}$  è la combinazione lineare tra i punti  $P$  e  $Q$ , parametrizzato come:

$$\overline{PQ} = \{P + tQ \mid t \in [0, 1]\} \quad (2.6)$$

**DEFINIZIONE 2.1.5.** Un sottoinsieme  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  è **convesso** se per ogni coppia di punti esiste un segmento che li collega contenuto interamente in  $Y$ .

$$\forall P, Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \quad (2.7)$$

**DEFINIZIONE 2.1.6.** Un sottoinsieme  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  è **stellato** per  $P$  se esiste un  $P \in Y$  tale che per ogni altro punto esiste un segmento che li collega contenuto interamente in  $Y$ .

$$\exists P \in Y : \forall Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \quad (2.8)$$

**ESEMPIO.**

- Gli intervalli aperti e semiaperti sono **c.p.a.**, dunque sono *connessi*: l'arco  $\alpha$  è banalmente il segmento pari all'intervallo aperto.
- Preso  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *convesso*, qualunque segmento è anche per costruzione un arco:  $X$  è anche **c.p.a.** e dunque *connesso*.
- $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  non è *convesso* (per  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  non si hanno segmenti interni ad  $X$ ) ma è **c.p.a.** (basta prendere un cammino che “giri attorno” all'origine) e dunque è *connesso*.
- Preso  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *stellato* per  $P \in X$ , qualunque segmento con  $P$  è anche per costruzione un arco:  $X$  è anche **c.p.a.** per l'osservazione 2.3 e dunque *connesso*.
- Ogni insieme *convesso* è anche *stellato* per  $P$ , basta fissare un qualunque punto come nostro  $P$ . In generale, un insieme è convesso se e solo se è stellato per ogni suo punto.

Vediamo ora che conseguenze hanno questi teoremi in  $\mathbb{R}$  con la topologia Euclidea.

**TEOREMA 2.1.4.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $I$  è un intervallo, ovvero  $I$  è *convesso*.
2.  $I$  è **c.p.a.**.
3.  $I$  è *connesso*.

**DIMOSTRAZIONE.**

- 1)  $\implies$  2) Siccome  $I$  è convesso  $\implies I$  stellato  $\implies I$  **c.p.a.**  $\implies I$  *connesso*.
- 2)  $\implies$  3) Vale in generale che **c.p.a.**  $\implies$  *connesso*.
- 3)  $\implies$  1) Per contronominale mostriamo che  $I$  non intervallo  $\implies I$  sconnesso.  $I$  non intervallo significa che

$$\begin{aligned} & \exists a < b < c, a, c \in I, b \notin I \\ b \notin I & \implies I = \left( \underbrace{I \cap (-\infty, b)}_{\in a} \right) \cup \left( \underbrace{I \cap (b, +\infty)}_{\in c} \right) \end{aligned}$$

ovvero  $I$  è unione di aperti, non vuoti e disgiunti  $\implies I$  sconnesso.  $\square$

**OSSERVAZIONE.**

- Come conseguenza immediata di questo teorema si ha il **teorema di esistenza degli zeri** per funzioni continue da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , infatti se l'immagine continua di un connesso è un connesso, per tali funzioni vale che l'immagine continua di un intervallo è un intervallo.
- Per  $n \geq 1$  la sfera  $S^n := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$  è **c.p.a.**, infatti  $\forall x, y \in S^n$  si trova sempre un arco come intersezione di  $S^n$  e del piano  $H$  passante per il centro della sfera,  $x$  e  $y$ .

Vediamo ora un risultato per funzioni continue da  $S^n$  in  $\mathbb{R}$

**TEOREMA 2.1.5.** Sia  $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $\exists x \in S^n : f(x) = f(-x)$ . In particolare  $f$  non è iniettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Costruiamo una funzione  $g(x) = f(x) - f(-x)$ , essa è continua perché somma di funzioni continue. Siccome  $S^n$  è connesso allora  $g(S^n) \subseteq \mathbb{R}$  è connesso  $\implies$  per il teorema precedente  $g(S^n)$  è un intervallo. Si considerino un punto  $y \in S^n$  arbitrario e le sue immagini  $g(y)$  e  $g(-y)$ : esse appartengono all'intervallo dell'immagine  $g(S^n)$ , quindi se ne può considerare il loro punto medio:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [g(y) - g(-y)] &= \frac{1}{2} [f(y) - f(-y) - f(y) + f(-y)] = 0 \\ \implies \exists x \in S^n : g(x) &= 0, \text{ ovvero } f(x) = f(-x) \end{aligned}$$

$\square$

Come conseguenza di questo teorema si ha che un aperto di  $\mathbb{R}$  non sarà mai omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , vediamo più precisamente.

**TEOREMA 2.1.6.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ . Se  $I, U$  sono aperti allora  $I$  non è omeomorfo a  $U$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri un omeomorfismo  $g : U \longrightarrow I$ . Siccome  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto allora esiste una palla aperta di raggio  $\varepsilon$  contenuta in  $U$ , se ne considera il bordo  $S^n \subseteq U$ . Si considera dunque la restrizione  $g|_{S^n} : S^n \longrightarrow I$ , che per il teorema precedente non è iniettiva. Dunque  $g$  non è un omeomorfismo.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Il teorema appena visto è un caso particolare del **TEOREMA DELL'INVARIANZA DELLA DIMENSIONE**, che cita:

Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$  aperti. Se  $U \cong V \implies n = m$ . Equivalentemente  $n \neq m \implies U \not\cong V$

**TEOREMA 2.1.7.** Siano  $\{X_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottoinsiemi di uno spazio topologico  $X$ . Se ogni  $X_i$  è connesso e  $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$  allora  $\bigcup_{i \in I} X_i$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $Z \subseteq Y := \bigcup_{i \in I} X_i$  un aperto, chiuso non vuoto. Vogliamo dimostrare che  $Z = X$ , cosicché  $X$  risulti connesso. Basta l'inclusione  $Y \subseteq Z$ .  
Si considera l'intersezione di  $Z$  e di un connesso, dunque essa sarà banale

$$X_i \cap Z = \begin{cases} \emptyset \\ X_i \end{cases}$$

Dimostriamo ora che non è vuota, infatti siccome  $Z$  non è vuoto ed è contenuto nell'unione ci sarà un connesso per cui l'intersezione non è vuota:

$$\begin{aligned} Z \neq \emptyset, Z \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i &\implies \exists i_0 : X_{i_0} \cap Z \neq \emptyset \\ X_{i_0} \text{ è connesso} &\implies X_{i_0} \cap Z = X_{i_0} \implies X_{i_0} \subseteq Z \\ \text{Siccome } \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset &\implies \exists x \in \bigcap_{i \in I} X_i \implies x \in X_{i_0} \subseteq Z \implies x \in Z \\ \text{Siccome } x \in \bigcap_{i \in I} X_i &\implies \forall i \in I, X_i \cap Z \neq \emptyset \end{aligned}$$

Quindi per  $\forall i, X_i \subseteq Z \implies Y \subseteq Z \implies Y = Z$ , quindi  $Y$  è connesso perché l'unico aperto e chiuso non vuoto è banale ( $Y$ ).  $\square$

**TEOREMA 2.1.8.**  $X, Y$  sono spazi topologici connessi  $\iff X \times Y$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.**  $\Leftarrow$ ) Si sfrutta la continuità delle proiezioni e che l'immagine continua di un connesso è connessa:

$$\begin{aligned} p : X \times Y &\longrightarrow X \text{ continua e suriettiva} \implies p(X \times Y) = X \text{ connesso} \\ q : X \times Y &\longrightarrow Y \text{ continua e suriettiva} \implies q(X \times Y) = Y \text{ connesso} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ) Si vuole sfruttare il teorema sull'unione di connessi, prestando attenzione che la loro intersezione non sia vuota, quindi si scrive il prodotto come unione di connessi già noti:  $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$ , infatti  $X \times \{y\} \cong X$  che per ipotesi è connesso, tuttavia

$$\bigcap_{y \in Y} X \times \{y\} = \emptyset !$$

Cerchiamo dunque di unire un insieme in modo tale che l'intersezione non sia vuota:

sia  $x_0 \in X$  e  $Y_{x_0} = \{x_0\} \times Y$  e poniamo  $X_y = X \times \{y\}$  e si ha quanto voluto:

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{y \in Y} X_y \cup Y_{x_0} \text{ e } X_y \cap Y_{x_0} = (x_0, y) \\ &\implies \bigcap_{y \in Y} (X_y \cup Y_{x_0}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Dunque  $X \times Y$  è unione di connessi la cui intersezione non è vuota, quindi per il teorema precedente è connesso.  $\square$

Approfondiamo ora la differenza fra essere spazio connesso o **c.p.a.** mostrando esempi di un tipo ma non dell'altro. Prima però dimostreremo un teorema sulla caratterizzazione di un insieme denso che ci tornerà utile.

**TEOREMA 2.1.9.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$  un suo sottoinsieme, allora:

$$A \text{ è denso} \iff \forall U \subseteq X \text{ aperto e } U \neq \emptyset, U \cap A \neq \emptyset$$

**DIMOSTRAZIONE.**  $\implies$ ) Se  $A$  è denso allora  $\overline{A} = X$ . Supponiamo che  $\exists V$  aperto :  $V \cap A = \emptyset$ . Siccome  $V$  è aperto allora  $X \setminus V$  è chiuso, inoltre  $V \cap A = \emptyset$ , quindi  $A \subseteq X \setminus V$ . Essendo  $A$  contenuto in un chiuso allora lo sarà anche la sua chiusura, siccome è il più piccolo chiuso che lo contiene:

$$\overline{A} = X \subseteq X \setminus V \implies V = \emptyset$$

Ne segue che l'unico aperto che non interseca  $A$  è l'insieme vuoto.

$\Leftarrow$ ) Consideriamo un chiuso  $K \supseteq A$ . Siccome è chiuso allora il suo complementare  $X \setminus K$  è aperto. Per ipotesi dunque si ha che  $V \cap A \neq \emptyset$  oppure  $V = \emptyset$ , passando al complementare si ottiene che:

$$A \subseteq K \implies X \setminus K \subseteq X \setminus A \implies V \subseteq X \setminus A \implies V \cap A = \emptyset \implies V = \emptyset \implies K = X \implies \overline{A} = X$$

L'ultima implicazione è dovuta al fatto che ogni chiuso che contiene  $A$  si è dimostrato essere solo  $X$  per cui esso sarà la sua chiusura.  $\square$

**TEOREMA 2.1.10.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $Y \subseteq X$  connesso, allora

$$\forall W: Y \subseteq W \subseteq \overline{Y} \implies W \text{ connesso}$$

In particolare la chiusura di un connesso è connessa.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $W$  è connesso si considera un suo sottoinsieme  $Z \subseteq W$  aperto, chiuso e non vuoto e si mostra che è pari a  $W$ .

$$\begin{aligned} Z \subseteq W \text{ aperto} &\implies \exists A \subseteq X \text{ aperto} : Z = W \cap A \\ Z \subseteq W \text{ chiuso} &\implies \exists C \subseteq X \text{ chiuso} : Z = W \cap C \end{aligned}$$



Si vuole sfruttare il fatto che  $Y$  è connesso:

$$Z \cap Y = A \cap W \cap Y \stackrel{!}{=} A \cap Y \text{ aperto in } Y \quad Z \cap Y = C \cap W \cap Y \stackrel{!}{=} C \cap Y \text{ aperto in } Y$$

Dove il passaggio indicato con (!) è dovuto al fatto che  $Y \subseteq W$ . Per poter sfruttare la connessione di  $Y$  e dedurre che  $Z \cap Y = Y$  dobbiamo prima provare che tale intersezione non è vuota e per farlo sfruttiamo il teorema precedente:

$$Y \text{ denso in } W, \text{ infatti } \mathcal{cl}_W(Y) = \mathcal{cl}_X(Y) \cap W = \overline{Y} \cap W = W$$

$$Z \text{ aperto in } W \implies Z \cap Y \neq \emptyset \implies Z \cap Y = Y \implies Y \subseteq Z$$

Tuttavia  $Y$  è denso in  $W$  e  $Z$  è chiuso in  $W$  che contiene  $Y$ , quindi

$$\mathcal{cl}_W(Y) = W \subseteq Z \implies W = Z \implies W \text{ connesso}$$

□

Vediamo ora degli esempi di spazi connessi ma non **c.p.a.**.

**ESEMPIO.** SENO DEL TOPOLOGO

Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$  con la topologia euclidea e  $Y = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ , detto anche **seno del topologo**. Esso è **c.p.a.** perché per connettere due punti basta percorrere la curva stessa del grafico. Quindi  $Y$  è connesso, dunque per teorema 27  $\overline{Y}$  è connesso. Tuttavia  $\overline{Y}$  non è **c.p.a.** in quanto  $\overline{Y} = Y \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$  ed i punti sull'asse delle  $y$  e sulla curva  $Y$  non si possono connettere tramite un arco continuo.

**ESEMPIO.** LA PULCE ED IL PETTINE

Si consideri il “pettine” come il seguente sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  con la topologia euclidea:

$$Y = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \{(r, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

Presi due punti su  $Y$  si possono collegare fra loro scendendo alla base del pettine  $[0, 1]$  e risalendo sui “denti” di ascissa razionale. Quindi  $Y$  è **c.p.a.**, allora  $Y$  è connesso e  $\overline{Y} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Si consideri ora la “pulce”, ovvero un punto  $P$  di ascissa irrazionale ed ordinata 1, ad esempio  $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ . Sia  $Z = Y \cap P$ , per il teorema precedente segue che  $Z$  è connesso, infatti:

$$Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y} = [0, 1] \times [0, 1]$$

Tuttavia  $Z$  non è **c.p.a.**, infatti preso un cammino  $\alpha : [0, 1] \longrightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^2$  tale che  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  con  $\alpha(0) = (0, 0)$  e  $\alpha(1) = P$ , per continuità  $y(t) \neq 0 \implies x(t) \in \mathbb{Q}$ , che non è vero per  $P$  che ha ascissa irrazionale, dunque non esiste un cammino continuo che colleghi l'origine e  $P$ . dunque  $Z$  non è **c.p.a.**

**OSSERVAZIONE.** L'immagine continua di uno spazio **c.p.a.** è **c.p.a.**, ovvero dato  $X$  **c.p.a.**,  $f : X \longrightarrow Y$  continua, allora  $f(X)$  è **c.p.a.**

Dati  $a, b \in X$  si vuole trovare un cammino fra  $f(a)$  e  $f(b)$  in  $f(X)$ . Si consideri la

composizione seguente fra il cammino  $\alpha$  fra  $a$  e  $b$  con la funzione  $f$  stessa. Siccome ha come dominio  $[0, 1]$  ed è continua essendo composizione di funzione continue è in effetti un cammino fra le due immagini:

$$f \circ \alpha : [0, 1] \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y$$

L'intuizione geometrica che ci ha portati alla definizione di connessione è stata "di quanti pezzi è fatto uno spazio?". Se uno spazio è connesso è fatto di un solo "pezzo", cerchiamo ora di definire cosa sono i "pezzi" e come sono fatti.

**DEFINIZIONE 2.1.7.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $C \subseteq X$ . Si dice che  $C$  è una **componente connessa** se

- $C$  è connesso.
- $C$  è **massimale**, ovvero  $C \subseteq A$ ,  $A$  connesso  $\implies C = A$ .

Scelto  $x \in X$  si può definire la **componente connessa di un punto**, ovvero  $C(x) = \bigcup \{C \mid C \text{ connesso}, x \in C\}$

La componente connessa di un punto è effettivamente una componente connessa, infatti è connessa perché unione di connessi con intersezione non vuota ( $x$  stesso) e se  $C(x) \subseteq A \implies x \in A \implies A \subseteq C(x) \implies A = C(x)$ .

Vediamo ora qualche proprietà delle componenti connesse, in particolare che sono chiuse e formano una partizione.

**TEOREMA 2.1.11.** Sia  $X$  uno spazio topologico, allora:

1. le componenti connesse sono chiuse.
2. le componenti connesse formano una partizione di  $X$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- I Sia  $C$  una componente connessa. Per ogni insieme vale che  $C \subseteq \overline{C}$ , ma  $C$  è connesso, quindi  $\overline{C}$  è connesso. Siccome  $C$  è massimale allora  $C = \overline{C}$ , ovvero è chiuso.
- II Per dimostrare che le componenti connesse formano una partizione di  $X$  dobbiamo mostrare che  $X$  è unione disgiunta delle componenti connesse. Prima di tutto dimostriamo che sono un ricoprimento

$$\forall x \in X, x \in C(x) \implies X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Mostriamo ora che sono disgiunti prendendo due componenti connesse  $C$  e  $D$  ed analizzando il caso in cui la loro intersezione non è vuota, in particolare sfruttiamo la massimalità:

$$C \cap D \neq \emptyset \implies C \cup D \text{ connesso} \implies C = C \cup D = D$$

□

**ESEMPIO.** Sia  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  con la topologia Euclidea. Le componenti connesse di  $\mathbb{Q}$  sono i punti, quindi i punti sono chiusi in  $\mathbb{Q}$ , il che è una riconferma dato che sappiamo che

$\mathbb{Q}$  è Hausdorff. Tuttavia non possono essere aperti altrimenti avremmo la topologia discreta!

Inoltre siccome  $\mathbb{Q}$  ha più di una componente connessa significa che non è connesso! Invece  $\mathbb{R}$  è connesso grazie all'assioma di completezza.

**OSSERVAZIONE.** Dati due spazi omeomorfi si ha che hanno lo stesso numero di componenti connesse in quanto l'immagine continua di connessi è connessa. Quindi il **numero di componenti connesse** ci fornisce un criterio per determinare quando due spazi non sono omeomorfi!

## 2.2 COMPATTEZZA

**DEFINIZIONE 2.2.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Un **ricoprimento aperto** di  $X$  è una famiglia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  di aperti di  $X$  tali che  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ .

Un **sottoricoprimento**  $\mathcal{B}$  di un ricoprimento aperto  $\mathcal{A}$  è una famiglia di aperti di  $\mathcal{A}$  la cui unione è ancora tutto  $X$ .

**ESEMPLI.** RICOPRIMENTI APERTI

- $\mathbb{R} = (-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$  è un ricoprimento aperto
- $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, -n)$  è un ricoprimento aperto
- $\mathbb{R} = \bigcup_{p \text{ primo}} (-p, p)$  è un ricoprimento aperto

**DEFINIZIONE 2.2.1.** RICOPRIMENTO APERTO

Uno spazio topologico  $X$  si dice **compatto** se dato un qualsiasi ricoprimento aperto  $\mathcal{A}$  si può sempre estrarre un sottoricoprimento *finito*  $\mathcal{B}$ .

L'importanza della definizione risiede nel fatto che non si chiede che esista un ricoprimento  $\mathcal{A}$  finito, infatti basterebbe banalmente  $X$  stesso che è aperto, bensì che da  $\mathcal{A}$  si possa sempre estrarre un numero finito di aperti che ricopra ancora  $X$ .

**ESEMPLI.** SPAZI NON COMPATTI

- $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea: si consideri il ricoprimento aperto  $\mathbb{R} = (-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$ , esso non ammette sottoricoprimento finito.
- Gli intervalli aperti o semiaperti della forma  $[a, b)$  hanno come ricoprimento aperto  $\mathcal{A} = \left\{ \left[ a, b - \frac{1}{n} \right) \right\}$  che non ammette un sottoricoprimento finito.

**TEOREMA 2.2.0.** L'immagine continua di un compatto è un compatto, ovvero dati  $X, Y$  spazi topologici,  $f : X \longrightarrow Y$  continua, allora

$$X \text{ compatto} \implies f(X) \text{ compatto}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si considera un ricoprimento aperto di  $f(X)$  e se ne vuole trovare un sottoricoprimento finito tramite le controimmagini, sfruttando così la compattezza di  $X$ .

Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  ricoprimento di  $f(X)$ , allora  $\forall i \in I, A_i \subseteq Y$  aperto e  $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq f(X)$ .

Si considerino ora le controimmagini, che saranno aperte perché  $f$  è continua:  $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A_i)\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Tuttavia  $X$  è compatto, quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito

$$X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n) \implies f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \implies f(X) \text{ compatto}$$

□

Da questo teorema segue che essere compatti è una proprietà topologica.

**TEOREMA 2.2.1.** L'intervallo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  con la topologia euclidea è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$  con  $A_i$  aperti in  $\mathbb{R}$ , quindi  $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ .

Sia  $X = \{t \in \mathbb{R} \mid [0, t] \text{ è coperto da un numero finito di } A_i\}$ . Mostriamo che non è vuoto

$$t = 0, [0, 0] = \{0\} \subseteq A_{i=0} \implies 0 \in X \implies X \neq \emptyset$$

Siccome  $X$  non è vuoto per la completezza dei reali ne posso considerare l'estremo superiore  $b = \sup X$ . Ci sono due casi:  $b > 1$  e  $b \leq 1$ , dimostriamo che il primo è possibile e che il secondo è assurdo sfruttando le proprietà dell'estremo superiore:

- $b > 1 \implies \exists t \in X: 1 < t < b \implies [0, 1] \subseteq [0, t] \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$
- $b \leq 1 \implies b \in [0, 1] \implies \exists A_0 \in \mathcal{A}: b \in A_0$ , visto che  $\mathcal{A}$  è un ricoprimento aperto  $A_0$  è aperto, dunque contiene  $b$  con tutto un suo intorno, ovvero  $\exists \delta > 0: B_\delta(b) = (b - \delta, b + \delta) \subseteq A_0$ . Mostriamo ora che  $A_0$  non copre solo  $[0, b]$  ma va oltre, quindi si ottiene l'assurdo che  $b \neq \sup X$ . Sia dunque  $0 < h < \delta$ , allora

$$[0, b+h] = [0, t] \cup [t, b+h] \subseteq \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n}_{t \in X} \cup \underbrace{A_0}_{B_\delta(b) \subseteq A_0}$$

Quindi  $b+h$  è coperto da un numero finito di aperti, il che implica che  $b+h \in X$ , il che è assurdo perché  $b = \sup X$ .

□

Notiamo che questo teorema implica che un intervallo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  è compatto, infatti è omeomorfo a  $[0, 1]$  e la compattezza è una proprietà topologica. Vediamo ora un esempio di spazio compatto che non abbia la topologia euclidea.

**ESEMPIO.** Uno spazio  $X$  con la topologia cofinita è compatto.

Ricordiamo che gli aperti nella topologia cofinita sono i sottoinsiemi il cui complementare è finito, quindi un ricoprimento aperto sarà della forma:

$$\mathcal{A} = \{A_i\}, A_0 = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

Si considerino gli  $A_i$  che contengano i punti  $x_i$  che non sono in  $A_0$ , ovvero:

$$A_i \in \mathcal{A}: x_i \in A_i \implies X = A_0 \cup A_1 \cup A_n$$

**OSSERVAZIONE.** Notiamo che se  $X$  è finito allora  $X$  è compatto per qualsiasi topologia, in quanto se la sua cardinalità è finita allora lo sarà anche quella del suo insieme delle parti, dai cui elementi scelgo gli aperti di una topologia. Dunque i casi interessanti di spazi compatti sono quelli il cui insieme di sostegno non è finito. Inoltre se  $X$  ha la topologia discreta vale anche il viceversa ovvero

$$X \text{ top. discreta} \implies (X \text{ compatto} \iff X \text{ finito})$$

Sia  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$ ,  $A_x := \{x\}$ , che è aperto in quanto  $X$  ha la topologia discreta. Siccome  $X$  è compatto allora esiste un sottoricoprimento finito, ovvero un numero finito di aperti di  $\mathcal{A}$  che lo ricopra, ossia  $X = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \implies X$  finito.

**TEOREMA 2.2.2.** MANETTI 4.41.1

Un chiuso in un compatto è un compatto, ovvero se  $X$  è uno spazio topologico compatto,  $C \subseteq X$  chiuso allora  $C$  è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di  $X$ , sia  $C \subseteq X$  chiuso, allora  $A := X \setminus C$  è aperto in  $X$ .

Sia  $\mathcal{A}' = \{A_i, A\}$  ricoprimento aperto di  $X$ . Siccome  $X$  è compatto esiste un suo sottoricoprimento finito

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A \implies C = X \setminus A = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

ovvero  $C$  è compatto. □

**OSSERVAZIONE.** MANETTI, 4.41.2 L'unione finita di compatti è un compatto, ovvero se  $K_1, \dots, K_n$  sono compatti allora  $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$  è compatto, infatti basta prendere l'unione dei sottoricoprimenti finiti.

Vediamo ora che relazione c'è fra le due proprietà topologiche di essere uno spazio  $T_2$  e compatto.

**TEOREMA 2.2.3.** MANETTI, 4.48

Un compatto in un Hausdorff è chiuso, ovvero se  $X$  è di Hausdorff,  $K \subseteq X$  è compatto allora  $K$  è chiuso.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $K$  è chiuso mostriamo che il suo complementare è aperto, ovvero che è intorno di ogni suo punto, in modo tale da poter usare agilmente l'essere  $T_2$ .

$$\begin{aligned} K \text{ chiuso} &\iff X \setminus K \text{ aperto} \iff \exists A \subseteq X \setminus K \text{ aperto} : x_0 \in A \\ A &\subseteq X \setminus K \iff A \cap K = \emptyset \end{aligned}$$

Per poter sfruttare che  $X$  è  $T_2$  scriviamo  $A$  come intorno di  $x_0$  e  $K$  come intorno di  $y$ :

$$x_0 \in X \setminus K, y \in K \xrightarrow{!} x \neq y \Rightarrow \exists U_y \in I(x_0), \exists V_y \in I(y): U_y \cap V_y = \emptyset$$

$$\text{Sia } V = \bigcup_{y \in K} V_y \Rightarrow V \supseteq K \xrightarrow{!!} V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

$$\begin{aligned} \text{Sia } U &= U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n} \in I(x_0) \\ \Rightarrow V_{y_i} \cap U_{y_i} &= \emptyset \Rightarrow V \cap K = \emptyset \Rightarrow U \subseteq X \setminus K \end{aligned}$$

dove (!) indica che  $X$  è  $T_2$  e (!!) che  $K$  è compatto. □

**TEOREMA 2.2.4.** MANETTI, 4.42

Un sottospazio  $K \subseteq \mathbb{R}$  è compatto  $\iff K$  chiuso e limitato.

**DIMOSTRAZIONE.**  $\implies$ ) Siccome  $\mathbb{R}$  è  $T_2$  e  $K$  è compatto allora per il teorema precedente  $K$  è chiuso.

Per vedere che è limitato consideriamo un ricoprimento aperto  $\mathcal{A} = \{(-n, n) \cap K\}_{n \in \mathbb{N}}$  di  $K$ . Siccome è compatto allora esiste un sottoricoprimento finito, ovvero:

$$K \subseteq (-n_1, n_1) \cup \dots \cup (-n_m, n_m) \implies K \subseteq (-M, M), M := \max m_i$$

quindi  $K$  è limitato.

$\Leftarrow$ )  $K$  è limitato, quindi  $K \subseteq [-n, n]$ , che è compatto e  $K$  è chiuso per ipotesi, dunque per il teorema 2.15 è compatto. □

**OSSERVAZIONE.** Da notare che il teorema precedente non afferma che gli unici compatti di  $\mathbb{R}$  sono gli intervalli chiusi e limitati, ma anche una loro unione finita potrebbe esserlo.

**TEOREMA 2.2.5.** MANETTI, 4.43

Sia  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $X$  compatto e  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea. Se  $f$  è continua allora ammette massimo e minimo.

**DIMOSTRAZIONE.**  $f$  continua e  $X$  compatto  $\implies f(X)$  compatto, e per il teorema precedente ciò equivale al fatto che  $f(X)$  è chiuso e limitato.

$$\left. \begin{aligned} f(x) \text{ limitata} &\implies \sup \{f(x)\} < +\infty \\ f(x) \text{ chiusa} &\implies \sup \{f(x)\} = \max \{f(x)\} \end{aligned} \right\} \implies f(x) \text{ ammette massimo.}$$

Analogamente per il minimo. □

**OSSERVAZIONE.** Per poter parlare di massimo e minimo c'è bisogno di un ordinamento sul codominio, mentre il dominio  $X$  potrebbe anche non averne uno!

Vogliamo ora vedere come si comporta la compattezza rispetto al prodotto, prima però va dimostrato un lemma che ci tornerà utile nella dimostrazione del teorema.

**LEMMA 2.2.0. TUBE LEMMA**

Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $Y$  compatto,  $x_0 \in X$ ,  $A \subseteq X \times Y$ :  $A$  aperto e  $\{x_0\} \times Y \subseteq A$ . Allora  $\exists U \subseteq X$  con  $x_0 \in U$ , aperto tale che  $\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq A$

**DIMOSTRAZIONE.**  $A$  aperto in  $X \times Y \implies A = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$  aperti della base, quindi  $\{U_i \times V_i\}$  è un ricoprimento aperto di  $\{x_0\} \times Y \cong Y$  compatto, dunque esiste un sottoricoprimento finito  $\{x_0\} \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \dots \cup (U_n \times V_n)$ . Se necessario si eliminano gli aperti che sono disgiunti da  $\{x_0\} \times Y$  e poniamo  $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$ , allora

$$\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \dots \cup (U_n \times V_n) \subseteq A$$

□

**TEOREMA 2.2.6. MANETTI, 4.49.2**

$X, Y$  compatti  $\iff X \times Y$  è compatto.

**DIMOSTRAZIONE.**  $\Leftarrow$ ) Si considerino le proiezioni, che sono funzioni continue. Essendo  $X \times Y$  compatto allora le immagini delle proiezioni saranno compatte, ed essendo le proiezioni suriettive allora  $X, Y$  sono compatti.

$\implies$ ) Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  un ricoprimento aperto di  $X \times Y$ , cerchiamo un sottoricoprimento finito.

Per sfruttare la compattezza di  $Y$  notiamo che  $Y \cong \{x\} \times Y \subseteq A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n} = A_x$ , che possiamo pensare come sottoricoprimento "verticale" finito. Notiamo inoltre che gli  $A_{x_i}$  dipendono dalla  $\{x\}$  scelta.

Per il Tube Lemma dimostrato sopra allora

$$\exists U_x \subseteq X \text{ aperto} : \{x\} \times Y \subseteq U_x \times Y \subseteq A_x = A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}$$

Tuttavia  $X$  è compatto, dunque  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$  unione finita, sfruttando le proiezioni si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned} X \times Y &= p^{-1}(X) = p^{-1}(U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}) = (U_{x_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{x_n} \times Y) \subseteq \\ &\subseteq (A_{x_1,1} \cup \dots \cup A_{x_1,n_1}) \cup \dots \cup (A_{x_m,1} \cup \dots \cup A_{x_m,n_m}) \end{aligned}$$

□

Sfruttiamo ora che il prodotto di compatti è compatto per generalizzare il teorema 2.17 allo spazio  $\mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA 2.2.7.  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto  $\iff K$  chiuso e limitato.****DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ )  $K$  è compatto in  $\mathbb{R}^n$  che è un Hausdorff, quindi  $K$  è chiuso per il teorema 2.16. Per dimostrare che è limitato consideriamo un ricoprimento di palle aperte centrate

nell'origine e si sfrutta subito che  $K$  è compatto

$$K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(\mathbf{0}) \implies K \subseteq B_{n_1}(\mathbf{0}) \cup \dots \cup B_{n_m}(\mathbf{0}) \subseteq B_M(\mathbf{0})$$

con  $M = \max n_i$ .

$\Leftarrow$ )  $K$  è limitato, quindi  $K \subseteq [-a, a]^n$  che è compatto perché prodotto di compatti, ma  $K$  è anche chiuso, quindi per il teorema 2.15 è compatto.  $\square$

In realtà vale un teorema più generale, che si dimostrerà poi nel corso di Istituzioni di Analisi.

**TEOREMA:** Sia  $X$  uno spazio metrico completo, allora  $K \subseteq X$  compatto  $\iff K$  chiuso e totalmente limitato, ovvero  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $K$  è contenuto in un'unione finita di palle di raggio  $\varepsilon$ . In  $\mathbb{R}^n$  vale limitato  $\iff$  totalmente limitato, ma ad esempio considerato lo spazio metrico

$$\mathcal{C}([0, 1]) := \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \right\}, \text{ con } d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

Una palla di centro  $\mathbf{0}$  e raggio 1 quale  $B_1(\mathbf{0}) = \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}, -1 \leq f(x) \leq 1 \right\}$  è chiusa e limitata, tuttavia in  $\mathcal{C}([0, 1])$  non è compatta.

**TEOREMA 2.2.8.** MANETTI 4. 52

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua con  $X$  compatto e  $Y$   $T_2$ , allora  $f$  è chiusa.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $f$  è chiusa consideriamo  $C \subseteq X$  chiuso e mostriamo che  $f(C)$  è chiuso sfruttando rispettivamente i teoremi 2.15, 2.13 e 2.16:

$$C \subseteq X \text{ chiuso in compatto} \implies C \text{ compatto} \implies f(C) \text{ compatto in } T_2 \implies f(C) \text{ chiuso}$$

$\square$

In generale vale il teorema di Kuratowski-Mrówka, che dice che  $Y$  è compatto se e solo se per qualsiasi spazio topologico  $X$  la proiezione  $p_X : X \times Y \longrightarrow X$  è chiusa, ne dimostreremo una versione più debole.

**TEOREMA 2.2.9.** MANETTI, 4.49.1

Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $Y$  compatto, allora la proiezione  $p : X \times Y \longrightarrow X$  è chiusa.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che  $p$  è chiusa mostriamo che preso un  $C \subseteq X \times Y$  chiuso allora  $p(C) \subseteq X$  è chiuso, ovvero che il suo complementare  $X \setminus p(C)$  è intorno di ogni suo punto.

Se  $p(C) = X$  allora è già chiuso, se invece  $p(C) \neq X$  allora  $\exists x_0 \in X \setminus p(C)$ , dimostriamo che quest'ultimo insieme è intorno di  $x_0$ . Si consideri la fibra di  $x_0$ :

$$p^{-1}(\{x_0\}) = \{x_0\} \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus C = A$$

con  $A$  aperto perché complementare di un chiuso.



Si rientra dunque nelle ipotesi del Tube lemma e si ottiene che

$$\exists U \subseteq X \text{ aperto} : p^{-1}(U) = U \times Y \subseteq A \implies U \cap p(C) = \emptyset \implies x_0 \in U \subseteq X \setminus p(C)$$

□



# GRUPPI TOPOLOGICI

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 3.1 GRUPPI TOPOLOGICI

Conoscendo le strutture di gruppo e spazio topologico su un insieme vogliamo vedere come possono essere compatibili fra loro.

**DEFINIZIONE 3.1.0.** Un insieme  $G$  si dice gruppo topologico se

- $G$  è un gruppo
- $G$  è uno spazio topologico
- Le operazioni sono continue, ovvero le mappe:

$$\begin{array}{ccc} \mu : G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} i : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \qquad (3.1)$$

Sono funzioni continue.

Vediamo ora degli esempi noti di gruppi topologici.

**ESEMPL.**

- $(\mathbb{R}^n, +, \mathcal{E}_{ucl}), (\mathbb{C}^n, +, \mathcal{E}_{ucl})$
- $(\mathbb{R}^*, \bullet, \mathcal{E}_{ucl}), (\mathbb{R}^*, \bullet, \mathcal{E}_{ucl})$  con la topologia indotta di sottospazio
- $(M_{n,m}(\mathbb{R}), \bullet, \mathcal{E}_{ucl})$  con la topologia indotta di sottospazio di  $\mathbb{R}^{n,m}$ , ad esempio  $[0, 1]$

**OSSERVAZIONE.** I gruppi topologici  $GL(n, \mathbb{R})$  e  $GL(n, \mathbb{C})$  sono aperti di  $M_{n,n}$ .

Infatti considerata la funzione determinante  $\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  essa è continua in quanto per calcolare il determinante si opera solo con somme e prodotti. Si ha che

$GL(n, \mathbb{R})$  è il complementare dell'insieme delle matrici che hanno determinante nullo, il quale è un chiuso in quanto controimmagine di un chiuso quale  $\{0\}$  di una funzione continua. Dunque tale gruppo topologico è aperto, analogamente per  $\mathbb{C}$ .

Vediamo ora altri sottoinsiemi di  $M_{n,n}$ :

- $SL$  dato da  $\{\det A = 1\}$  è il *gruppo speciale lineare*
- $O$  determinato dall'equazione  $A^t A = I$  è il *gruppo ortogonale*
- $SO = O \cap SL$  è il *gruppo speciale ortogonale*
- $U$  determinato dall'equazione  $A^{t*} \bar{A} = I$  è il *gruppo unitario*
- $SU = U \cap SL$  è il *gruppo speciale unitario*

Ci sono delle operazioni sulle matrici che sono continue:

- *moltiplicazione matriciale*: continua perché definita tramite somme e prodotti di elementi delle matrici
- *inversa*: è una funzione che ad una matrice  $A$  associa  $\frac{1}{\det A}$  per prodotti e somme di elementi della matrice, dunque è continua

**OSSERVAZIONE.** Per i gruppi topologici in generale vale la moltiplicazione destra e sinistra sono omeomorfismi:

$$\begin{aligned} L_h : G &\longrightarrow G & e & R_h : G \longrightarrow G \\ g &\longmapsto hg & g &\longmapsto gh \\ (L_h)^{-1} &= L_{h^{-1}} & e & (R_h)^{-1} = R_{h^{-1}} \end{aligned}$$

Ne segue che un gruppo topologico è **omogeneo**, ovvero

$$\forall g, h \in G \exists \varphi : G \longrightarrow G \text{ omeomorfismo t.c. } \varphi(g) = h$$

infatti basta porre  $\varphi = L_{hg^{-1}}$  oppure  $\varphi = R_{g^{-1}h}$

Il seguente teorema ci permette di caratterizzare i gruppi topologici Hausdorff grazie alla chiusura dell'elemento neutro.

**TEOREMA 3.1.0.** Sia  $G$  un gruppo topologico,  $e \in G$  il suo elemento neutro, si ha che

$$G \text{ } T_2 \iff \{e\} \text{ chiuso}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ )  $G \text{ } T_2 \implies G \text{ } T_1 \implies$  tutti i punti sono chiusi, in particolare anche  $\{e\}$ .

$\impliedby$ ) Per dimostrare che  $G \text{ } T_2$  si utilizza la caratterizzazione con la diagonale chiusa, sfruttando l'omogeneità dei gruppi topologici:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh^{-1} \end{aligned} \quad , \quad (g, h) = (h, g) \iff g = h \iff \varphi((g, h)) = gh^{-1} = e$$

$$\implies \Delta_G = \varphi^{-1}(\{e\})$$

Per ipotesi  $\{e\}$  è chiusa, quindi  $\Delta_G$  è chiuso e dunque  $G \text{ } T_2$ . □

**OSSERVAZIONE.**  $GL(n, \mathbb{R})$  è sconnesso. Mostriamo che è unione di due aperti non vuoti disgiunti sfruttando la funzione determinante  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ , infatti essendo continua le controimmagini di aperti saranno aperti:

$$\begin{aligned} \det^{-1}((0, +\infty)) &= GL^+(n, \mathbb{R}) \\ \det^{-1}((-\infty, 0)) &= GL^-(n, \mathbb{R}) \end{aligned} \implies GL(n, \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \sqcup GL^-(n, \mathbb{R})$$

Dimostriamo un lemma che generalizza il teorema 2.8 e che ci sarà utile nella dimostrazione successiva sulla connessione di alcuni gruppi topologici.

**LEMMA 3.1.0. MANETTI 4.18**

Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua. Se  $f$  è suriettiva aperta o chiusa,  $Y$  è connesso e le fibre sono connesse, ovvero se  $\forall y \in Y$   $f^{-1}(y)$  è connesso, allora  $X$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $f$  sia aperta e consideriamo  $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$  aperti (per  $f$  chiusa si considerano dei chiusi e si procede in modo analogo) t.c.  $X = A_1 \cup A_2$ . Per dimostrare che  $X$  è connesso mostriamo che  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ :

$$\begin{aligned} f \text{ aperta} &\implies f(A_1), f(A_2) \text{ aperti} \\ f \text{ suriettiva} &\implies f(X) = Y \implies f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) = Y \\ Y \text{ connesso} &\implies f(A_1) \cap f(A_2) \neq \emptyset \implies \exists y_0 \in f(A_1) \cap f(A_2) \implies \begin{cases} f^{-1}(y_0) \cap A_1 \neq \emptyset \\ f^{-1}(y_0) \cap A_2 \neq \emptyset \end{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} (f^{-1}(y_0) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y_0) \cap A_2) = f^{-1}(y_0) \\ \text{fibre connesse} \end{array} \right. &\implies f^{-1}(y_0) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \implies A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \end{aligned}$$

□

**TEOREMA 3.1.1.**  $\forall n \geq 1$ ,  $GL^+(n, \mathbb{R})$  e  $GL(n, \mathbb{C})$  sono connessi.

**DIMOSTRAZIONE.** Si procede per induzione su  $n$  per  $GL^+(n, \mathbb{R})$ , il caso  $GL(n, \mathbb{C})$  è analogo.

$$n = 1) \quad \begin{cases} GL^+(1, \mathbb{R}) = (0, +\infty) \\ GL(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{cases} \quad \text{connessi.}$$

$n > 1$ ) Supponiamo che  $GL^+(n-1, \mathbb{R})$  sia connesso e dimostriamo che lo è anche  $GL(n, \mathbb{R})$ . Cerchiamo dunque una funzione continua da  $GL^+(n, \mathbb{R})$  a  $GL(n-1, \mathbb{R})$  che soddisfi le ipotesi del lemma precedente. Pertanto si considera la funzione prima

$$\text{colonna } p : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{che mappa la prima colonna di } A. \text{ Siccome } \mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n-1}$$

allora  $p$  è una proiezione, dunque per il punto 2 della proposizione 1.4 è aperta.

Restringiamo ora  $p$  a  $GL^+(n, \mathbb{R})$  nel modo seguente  $p : GL^+(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  che è una funzione continua, suriettiva e aperta, inoltre  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è connesso per  $n > 1$ . Calcoliamo ora le fibre e mostriamo che sono tutte omeomorfe fra loro e connesse, quindi prima ne troviamo una, mostriamo che è connessa poi dimostriamo che sono

tutte omeomorfe. A questo scopo consideriamo il seguente vettore e la sua fibra

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \implies p^{-1}(y_0) = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

con  $(*, \dots, *) \in \mathbb{R}^{n-1}$  arbitrario in quanto non influisce nel calcolo del determinante e con  $A \in \text{GL}^+(n-1, \mathbb{R})$ , da cui segue che  $p^{-1}(y_0) = \mathbb{R}^{n-1} \times \text{GL}^+(n-1, \mathbb{R})$ , dunque  $p^{-1}(y_0)$  è connesso visto che i due fattori lo sono per ipotesi.

Mostriamo ora che tutte le fibre sono omeomorfe a  $p^{-1}(y_0)$ . Sia  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e sia  $A \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$  tale che  $p(A) = y$ , ovvero  $y$  è la prima colonna di  $A$ . In generale vale la

relazione  $p(AB) = Ap(B)$  e la moltiplicazione sinistra  $L_A : \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$   
 $B \longmapsto AB$

è un omeomorfismo. Dimostriamo che vale  $p^{-1}(y) = L_A(p^{-1}(y_0)) = Ap^{-1}(y_0)$ , in modo tale da avere tutte le fibre omeomorfe fra loro:

$$\supseteq) B \in p^{-1}(y_0) \implies B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \implies p(AB) = Ap(B) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = p(A) = y$$

$$\subseteq) C \in p^{-1}(y) \implies C = \begin{pmatrix} y & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Poniamo } B = A^{-1}C &\implies p(B) = p(A^{-1}C) = A^{-1}p(C) = A^{-1}y = A^{-1}p(A) = \\ &= p(A^{-1}A) = p(I) = y_0 \end{aligned}$$

$$\text{Siccome } C = AB \implies B \in p^{-1}(y_0)$$

Quindi siccome tutte le fibre sono tutte omeomorfe ad una fibra connessa allora sono tutte connesse e valgono le ipotesi del lemma precedente, per cui  $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$  è connesso.  $\square$

**COROLLARIO 3.1.0.**  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  e  $\text{SL}(n, \mathbb{C})$  sono connessi.

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$  e  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  sono connessi, basta considerare la seguente funzione:

$$\begin{aligned} f : \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{SL}(n, \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{\det A} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{\det A} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siccome  $f$  è continua e suriettiva e  $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$  è connesso allora  $f(\text{GL}^+) = \text{SL}$  è connesso.  $\square$

**COROLLARIO 3.1.1.**  $O$  non è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $O$  è sottogruppo di  $GL$  e la connessione è una proprietà topologica allora  $O$  non è connesso. In particolare si può dividere in base a  $\det = +1$  e  $\det = -1$ .  $\square$

**TEOREMA 3.1.2.**  $SO(n)$ ,  $U(n)$  e  $SU(n)$  sono compatti e connessi.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che sono *compatti* essendo sottospazi di  $\mathbb{R}^{n \times n}$  per il teorema 2.20 basta dimostrare che sono chiusi e limitati. In particolare essendo definiti tramite equazioni che sono luoghi di zeri di polinomi in  $a_{ij}$  allora sono chiusi:

$$SO(n) : \begin{cases} A^t A = I \\ \det A = 1 \end{cases}, \quad U(n) : A^t \bar{A} = I, \quad SU(n) : \begin{cases} A^t \bar{A} = I \\ \det A = 1 \end{cases}$$

Siccome  $SU(n) \subseteq U(n) \subseteq SO(n)$  basta dimostrare che  $SO(n)$  è limitato:

$$A \in SO(n) \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1, \forall i = 1, \dots, n \implies \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = n \implies SO(n) \subseteq S_{\sqrt{n}} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$$

dove  $S_{\sqrt{n}}$  è la sfera di raggio  $\sqrt{n}$ , dunque  $SO(n)$  è limitato. Ne segue che anche  $U(n)$  e  $SU(n)$  lo sono, dunque sono tutti chiusi e limitati in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , quindi compatti.

Per dimostrare che sono *connessi* si procede analogamente al teorema precedente sfruttando il lemma che lo precede. Si consideri  $p : SO(n) \longrightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  funzione prima colonna, essa è continua, suriettiva e chiusa in quanto è un compatto (appena dimostrati) in un  $T_2$ , e le sue fibre sono connesse  $p^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$  con  $A \in SO(n-1)$ , dunque per il lemma precedente  $SO(n)$  è connesso.  $\square$

**OSSERVAZIONE.**  $GL$  e  $SL$  non sono compatti perché non sono limitati, inoltre  $GL$  è aperto e non chiuso.





# TOPOLOGIA QUOZIENTE

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 4.1 TOPOLOGIA QUOZIENTE

Torniamo ora a parlare di costruzioni topologiche, in particolare ci domandiamo quale sia la topologia più adatta per un insieme quoziente. Ne diamo prima una definizione come topologia indotta da una funzione fra uno spazio topologico ed un insieme, poi vedremo altre definizioni equivalenti tramite una funzione fra spazi topologici e con insiemi quozienti.

Accenniamo fin da subito che la situazione è *duale* rispetto a quella dei sottospazi, analizzati nella sezione 1.5.

**DEFINIZIONE 4.1.0.** Dato  $X$  uno spazio topologico,  $Y$  un insieme e  $f : X \longrightarrow Y$  funzione suriettiva, la **topologia quoziente** su  $Y$  indotta da  $f$  è la topologia *più fine* che rende  $f$  continua.

Analizziamo ora chi sono i suoi aperti:  $A \subseteq Y$  aperto  $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$  aperto. Notiamo che l'implicazione  $\implies$  è necessaria perchè  $f$  sia continua, mentre l'implicazione  $\impliedby$  è quella che caratterizza la topologia quoziente, infatti se si considera un insieme  $B \subseteq Y$  che non è aperto allora la sua controimmagine  $f^{-1}(B) \subseteq X$  non sarà aperta, dunque la topologia su  $Y$  è la più fine.

Per verificare che un sottoinsieme sia aperto in  $Y$  con la topologia quoziente bisogna verificare che la sua controimmagine è aperta.

Vediamo ora un esempio che giustifica la terminologia "topologia quoziente".

**ESEMPIO.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Posto  $Y = X/\sim$  insieme quoziente e  $\pi : X \longrightarrow Y$  **proiezione al quoziente**, la topologia quoziente su  $Y$  è quella che rende la proiezione continua.

**RICORDIAMO...** Il primo teorema fondamentale di isomorfismo per gli *insiemi*, altresì chiamato decomposizione canonica.

Data una qualsiasi funzione suriettiva  $f : X \longrightarrow Y$  vi è la seguente relazione di equivalenza:  $\forall x, y \in X, x \sim y \iff f(x) = f(y)$ , inoltre  $\exists! h : X/\sim \longrightarrow Y$  biunivoca tale che  $f = h \circ \pi$ , baste porre  $h([x]) := f(x)$ , in modo tale che il diagramma commuti. Mostriamo che è ben definita e biunivoca.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! h & \\ X/\sim & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} [x] = [y] &\iff x \sim y \iff f(x) = f(y) \iff h([x]) = h([y]) \implies h \text{ ben definita e iniettiva} \\ f \text{ suriettiva} &\implies h \text{ suriettiva} \end{aligned}$$

#### 4.1.1 Identificazione

Tenendo a mente il concetto di immersione illustrato a pagina 16 illustriamo il concetto duale di identificazione.

**DEFINIZIONE 4.1.1.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  una funzione continua e suriettiva;  $f$  si dice **identificazione** se  $Y$  ha la topologia quoziente indotta da  $f$ .

In generale è difficile determinare quando una data funzione è un'identificazione, quindi ne cerchiamo una condizione sufficiente.

**TEOREMA 4.1.0.** MANETTI, 5.4

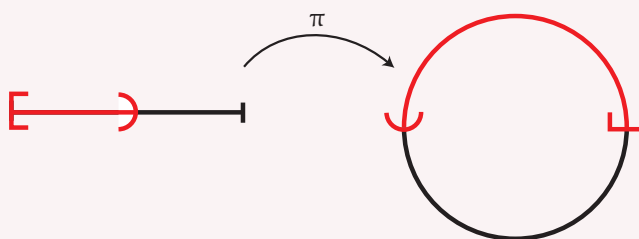
Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua, suriettiva e chiusa (o aperta), allora  $f$  è un'identificazione chiusa (o aperta).

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $f$  sia aperta. Dimostrare che è un'identificazione è equivalente al mostrare che  $A \subseteq Y$  aperto  $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$  aperto. L'implicazione  $\implies$  è garantita dalla continuità di  $f$ , per quanto riguarda l'implicazione opposta  $\impliedby$  invece siccome  $f$  è suriettiva allora  $f(f^{-1}(A)) = A$  e siccome  $f$  è aperta allora anche  $A$  è aperto.  $\square$

Vediamo ora un esempio di identificazione chiusa e non aperta.

**ESEMPIO.** Si consideri  $f : [0, 2\pi] \longrightarrow S^1$   
 $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ . è una funzione continua, suriettiva e chiusa (compatto in  $T_2$ ), dunque è un'identificazione chiusa.

Tuttavia  $f$  non è aperta, infatti dato  $A = [0, 1] \subseteq [0, 2\pi]$  aperto, ma  $f(A)$  non è aperto in  $S^1$ .



**OSSERVAZIONE.** Gli omeomorfismi sono identificazioni chiuse e aperte.

Vediamo ora che relazione c'è fra le identificazioni ed i quozienti dati da relazioni di equivalenza.

**TEOREMA 4.1.1.** PROPRIETÀ UNIVERSALE DELLE IDENTIFICAZIONI, MANETTI, 5.6

Dati  $X, Y, Z$  spazi topologici,  $g$  una qualsiasi funzione continua,  $f$  identificazione con le mappe come in figura, allora

$\exists! h$  continua :  $g = h \circ f \iff (\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y))$   
ovvero se e solo se  $g$  è costante sulle fibre di  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & \nearrow \exists! h & \\ Z & & \end{array}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Idealmente se  $f$  fosse invertibile definiremmo  $h = g \circ f^{-1}$ . Tuttavia l'invertibilità di  $f$  non è fra le ipotesi, quindi si sfrutta al meglio l'ipotesi della suriettività e si considera una controimmagine tramite  $f$  e se ne fa l'immagine tramite  $g$ , ovvero  $y \in Y$ ,  $h(y) := g(x)$  con  $x \in f^{-1}(y)$ . Con questa costruzione  $h$  è ben definita siccome  $g$  sarà costante sulle fibre di  $f$ .

Verifichiamo che  $h$  è continua tramite la definizione:

$$U \subseteq Z \text{ aperto}, h^{-1}(U) \subseteq Y \iff f^{-1}(h^{-1}(U)) \subseteq X \text{ aperto} \iff g^{-1}(U) \subseteq X \text{ aperto}$$

Siccome  $g$  è continua allora lo è anche  $h$ . □

Come conseguenza si ha che data  $f$  continua,  $\sim$  relazione di equivalenza e  $X/\sim$  spazio topologico con la topologia quoziente indotta dalla proiezione  $\pi$  si ha che  $\exists g$  continua  $\iff (x \sim y \implies f(x) = f(y))$ , ovvero  $\pi$  è costante sulle fibre di  $f$ .

In particolare se  $\sim$  è la relazione d'equivalenza indotta da  $f$ , ovvero se si è nelle ipotesi del primo teorema fondamentale di isomorfismo degli insiemi allora  $(x \sim y \iff f(x) = f(y)) \implies \exists! \bar{f}$  biettiva, continua. Dunque vale

$$\bar{f} \text{ omeomorfismo} \iff f \text{ identificazione} \quad (4.1)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ X/\sim & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Riprendiamo l'esempio precedente ed esaminiamolo in termini di spazio quoziente.

**ESEMPIO.**  $D^n/\sim \cong S^n$

$$f : D^1 = [0, 2\pi] \longrightarrow S^1, \quad f \text{ identificazione} \implies S^1 \cong [0, 2\pi]/\sim, \text{ con } \sim \text{ tale che}$$

$$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

$$\text{sia costante sulle fibre di } f: s \sim t \iff \begin{cases} \cos s = \cos t \\ \sin s = \sin t \end{cases} \iff s = t \text{ oppure } s = 0, t = 2\pi$$

Si può generalizzare in dimensione  $n$  con  $f : D^n \longrightarrow S^n$   
 $x \longmapsto (2x\sqrt{1-\|x\|^2}, 2\|x\|^2 - 1)$  iden-

tificazione, dunque  $D^n/\sim \cong S^n$  per la relazione  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1 \end{cases}$   
ovvero ogni punto è in relazione con sé stesso e tutti i punti sul bordo sono identificati.

## 4.1.2 Quozienti tipici

Vedremo ora degli esempi di spazi quoziente usati frequentemente.

4.1.2.1 Contrazione di  $A$  ad un punto

Sia  $X$  uno spazio topologico,  $A \subseteq X$ ,  $\forall x, y \in X$   $x \sim y \iff x = y$  oppure  $x, y \in A$ , ovvero ogni punto è in relazione con sé stesso e tutti i punti di  $A$  sono in relazione fra loro, dunque quozientando si "contraggono" ad un unico punto.

**ESEMPIO.**  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Cerchiamo ora di generalizzare l'esempio precedente. Ricordiamo che relazione c'è fra i dischi e le sfere:

$$\begin{aligned} D^n &= \text{disco in } \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ S^{n-1} &= \text{bordo di } D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

Considerando  $\sim$  come la contrazione di  $S^{n-1}$  ad un punto, si ha che  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

**ATTENZIONE!** Anche se  $X$  è  $T_2$  non è detto che  $X/A$  è  $T_2$ !

Se  $A$  non è chiuso allora  $X/A$  non è neanche  $T_1$ , infatti  $\pi^{-1}([A]) = A$  non chiuso implica che  $[A]$  non lo è, quindi per la caratterizzazione degli spazi  $T_1$  (vedasi  $X/A$  non è  $T_1$ ).

Tuttavia se  $X$  è  $T_2$ ,  $K \subseteq X$  è compatto allora  $X/K$  è  $T_2$

## 4.1.2.2 Cono su uno spazio

**DEFINIZIONE 4.1.2.** Sia  $X$  uno spazio topologico, si definisce **cilindro** su  $X$  lo spazio  $X \times [0, 1]$ .

Il **cono** su  $X$  invece è il quoziente  $X \times [0, 1]/X \times \{1\}$  oppure  $X \times [0, 1]/X \times \{0\}$ .

**OSSERVAZIONE.** Un cono è sempre c.p.a. rispetto al "vertice".

**ESEMPIO.** Cono su  $S^n \cong D^{n+1}$

$$n = 0) S^0 = \{-1, 1\} = X \rightsquigarrow X \times [0, 1] \rightsquigarrow X \times [0, 1]/X \times \{1\} \cong D^1$$

$$n = 1) S^1 = X \rightsquigarrow X \times [0, 1] \rightsquigarrow X \times [0, 1]/X \times \{1\} \cong D^2 \quad f : S^n \times [0, 1] \longrightarrow D^{n+1} \quad \text{è continua,}$$

$$(\mathbf{x}, t) \longmapsto t\mathbf{x}$$

suriettiva, chiusa (compatto in  $T_2$ ), dunque  $f$  è identificazione.

Verifichiamo che la relazione di equivalenza indotta da  $f$  è proprio quella di contrazione:

$$(\mathbf{x}, t) \sim (\mathbf{y}, s) \iff f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{y}, s) \iff t\mathbf{x} = s\mathbf{y} \iff \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{y}, t = s \\ t = s = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } t \neq 0 \implies \mathbf{x} = \frac{s}{t}\mathbf{y}, \text{ ma } \|\mathbf{x}\| = 1 \implies \underbrace{\left|\frac{s}{t}\right| \|\mathbf{y}\|}_{=1} = 1 \implies \left|\frac{s}{t}\right| = 1 \implies s = t \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

## 4.1.2.3 Retta con 2 origini

Analizziamo un particolare spazio topologico che spesso fungerà da controesempio, in particolare per le varietà topologiche (vedi sezione): la retta con 2 origini.

Sia  $X = \mathbb{R} \times \{a, b\}$  Vogliamo definire una relazione di equivalenza che lasci "separate" solo le origini:

$$(x, \alpha) \sim (y, \beta) \iff \begin{cases} x = y, \alpha = \beta \\ x = y \neq 0 \end{cases}$$

## PROPRIETÀ

1.  $Y := X/\sim$  è c.p.a., infatti se i punti  $(x, \alpha)$  e  $(y, \beta)$  sono tali che  $x \neq 0 \neq y$  basta prendere il segmento  $\overline{xy}$  sulla retta  $\mathbb{R} \times \{a\}$  e proiettarlo. Per unire  $(0, a)$  e  $(0, b)$  basta unire entrambi con un cammino al punto  $(1, a) = (1, b)$
2.  $Y$  non è  $T_2$ : tutti gli intorno di  $(0, a)$  si intersecano con tutti gli intorno di  $(0, b)$
3.  $Y$  è localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}$ , infatti ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$
4.  $\exists K_1, K_2 \subseteq Y$  compatti t.c.  $K_1 \cap K_2$  non è compatto: basta prendere  $K_1 = \pi([-1, 1] \times \{a\})$  e  $K_2 = \pi([-1, 1] \times \{b\})$  compatti in  $Y$ , ma  $K_1 \cap K_2 = \{(-1, 0), (0, 1)\}$  non è compatto in  $Y$

4.1.3 Quoziente  $T_2$ 

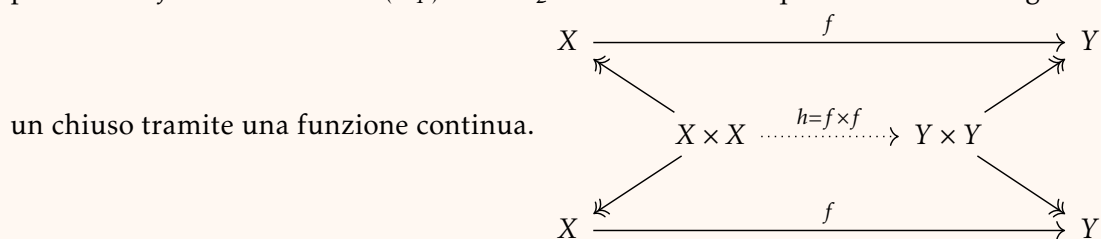
Cerchiamo ora delle condizioni per avere un quoziente Hausdorff.

**TEOREMA 4.1.2.** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua e identificazione con  $X$  compatto e  $T_2$ , allora sono equivalenti:

1.  $Y$  è  $T_2$
2.  $f$  chiusa
3.  $K = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$  chiuso in  $X \times X$

**DIMOSTRAZIONE.**  $1 \implies 3$ ) Si vuole utilizzare la caratterizzazione di essere  $T_2$  con la chiusura della diagonale  $\Delta_Y$ , ovvero il teorema 1.5. Bisogna dunque vedere  $K$  come controimmagine continua di  $\Delta_Y$ : si consideri  $h := f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$  continua  
 $(x_1, x_2) \longmapsto (f(x_1), f(x_2))$

perché lo è  $f$ . Inoltre  $K = h^{-1}(\Delta_Y)$  e  $Y$  è  $T_2 \implies K$  chiuso in quanto controimmagine di



$3 \implies 2$ ) Per dimostrare che  $f$  è chiusa bisogna far vedere che  $\forall C \subseteq X, C$  chiuso  $\implies f(C) \subseteq Y$  chiuso, ma  $f$  è identificazione  $\iff f^{-1}(f(C)) \subseteq X$  chiuso. Notiamo che

$f^{-1}(f(C)) = p_1(K \cap p_2^{-1}(C))$ , infatti

$$p_2^{-1}(C) = X \times C \implies K \cap p_2^{-1}(C) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_2) \in C\}$$

$$p_2 \text{ continua e } C \text{ chiuso} \implies p_2^{-1}(C) \text{ chiuso}$$

$$K \text{ chiuso} \implies p_2^{-1}(C) \cap K \text{ chiuso}$$

$$X \text{ compatto e } T_2 \implies p_1 \text{ chiuso} \implies p_1(K \cap p_2^{-1}(C)) \text{ chiuso}$$

$2 \implies 1$ ) Serve il teorema di Wallace, pertanto non affronteremo la dimostrazione.  $\square$

## AZIONI DI GRUPPO

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

### 5.1 AZIONE DI UN GRUPPO SU UN INSIEME

**DEFINIZIONE 5.1.0.** Sia  $G$  un gruppo e  $X$  un insieme. Si definisce il *gruppo simmetrico* sull'insieme  $X$  come  $S(X) := \{ f : X \longrightarrow X \mid f \text{ biunivoca} \}$ . Un'azione di  $G$  su  $X$  è

- $\Phi : G \longrightarrow S(X)$  morfismo di gruppi, ovvero  $\Phi(g.h) = \Phi(g)\Phi(h)$
- $\varphi : G \times X \longrightarrow X$  t.c.  $e.x = x, \forall x \in X$  e  $g.(h.x) = (gh).x$   
 $(g, x) \longmapsto g.x$

Se ho  $\Phi$  definisco  $\varphi(g, x) = \underbrace{\Phi(g)}_{\in S(X)}(x)$ .

Se ho  $\varphi$  definisco  $\Phi(g) : X \longrightarrow X$   
 $x \longmapsto \varphi(g, x)$

**DEFINIZIONE 5.1.1.** Su  $X$  definiamo una relazione che dimostreremo essere di equivalenza:  $x \sim y \iff \exists g \in G : y = g.x$

Dimostriamo che è una relazione di equivalenza:

- riflessiva:  $x = e.x$
- simmetrica:  $y = g.x \implies x = g^{-1}.y$
- transitiva:  $y = g.x, z = h.y \implies z = (hg).x$

**DEFINIZIONE 5.1.2.** Le classi di equivalenza date da questa relazione sono dette *orbite*

$$[x] = G.x = \{y \in X \mid \exists y : y = g.x\} = \{g.x \mid g \in G\}$$

L'insieme quoziente detto *spazio delle orbite* si scrive come  $X/G$

Vediamo ora un esempio di azione e di orbite.

**ESEMPIO.** 1.  $X = \mathbb{R}^n, G = GL(n, \mathbb{R}), \varphi(A, \mathbf{v}) = A\mathbf{v}$  è la moltiplicazione matrice per vettore.  
 Analizziamo le orbite:  $G \cdot \mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$ , ovvero il vettore nullo è un'orbita. Siano ora  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{w}$ . Esiste  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ :  $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ ? Sì, se  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, G \cdot \mathbf{v} = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ .  
 Quindi  $\mathbb{R}^n/GL(n, \mathbb{R}) = \{a, b\}$  con  $a = [\mathbf{0}]$  e  $b = [\mathbf{v}], \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

## 5.2 STABILIZZATORE DI UN ELEMENTO

**DEFINIZIONE 5.2.0.** Lo **stabilizzatore di un elemento** è l'insieme degli elementi di  $G$  che fissano  $x$ :

$$H_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \quad (5.1)$$

$H_x$  è un *sottogruppo di isotropia* di  $x$ . Inoltre, se  $H_x$  è banale, allora l'azione è **libera**.

**DIMOSTRAZIONE.**  $H_x$  è chiuso rispetto all'azione:

- $1_G \in H_x$  per definizione dell'azione  $g \cdot (1_G \cdot x) = x \forall x$ .
- $\forall g, h \in H_x$ , allora  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$ .

□

**OSSERVAZIONE.** L'insieme  $G/H_x$  dei laterali sinistri di  $H_x$  in  $G$  è in corrispondenza biunivoca con l'orbita  $O(x)$ . Inoltre, se  $G$  è finito, la cardinalità dell'orbita è pari all'indice di  $H_x$  in  $G$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia data:

$$\begin{aligned} \alpha : G/H_x &\longrightarrow O(x) \\ g \cdot H_x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Mostriamo che  $\alpha$  è ben definita e biunivoca.

1. *Ben definizione:* se  $g \cdot H_x = \tilde{g} \cdot H_x$  allora  $g^{-1}\tilde{g} = h \in H_x \implies \tilde{g} = gh \in H_x$ . Si ha:

$$\alpha(\tilde{g} \cdot H_x) = \tilde{g} \cdot x = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = \alpha(g \cdot H_x)$$

Poiché  $g \cdot H_x = \tilde{g} \cdot H_x \implies g \cdot x = \tilde{g} \cdot x$  la funzione è ben definita.

2. *Iniettività:*

$$\begin{aligned} \alpha(g_1 \cdot H_x) = \alpha(g_2 \cdot H_x) &\implies g_1 \cdot x = g_2 \cdot x \implies g_2^{-1} \cdot (g_1 \cdot x) = g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) \\ &\implies (g_2^{-1} \cdot g_1) \cdot x = 1_G \cdot x = x \end{aligned}$$

Ne segue che  $(g_2^{-1}g_1) \in H_x \implies g_2^{-1}g_1 = h \in H_x \implies g_1 \cdot H_x = g_2 \cdot H_x$ .

3. *Suriettività:* se  $y \in O(x)$ , per definizione  $\exists g \in G : y = g \cdot x$ , cioè  $y = \alpha(g \cdot H_x)$ . Ne consegue, dal teorema di Lagrange, che  $|O(x)| = [G : H_x] = \frac{|G|}{|H_x|}$ .

□



**OSSERVAZIONE.** Punti nella stessa orbita hanno stabilizzatori **coniugati**:

$$x_2 = g \cdot x_1 \implies H_{x_2} = g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1} \quad (5.2)$$

**DIMOSTRAZIONE.**  $\subseteq$ ) Sia  $h \in H_{x_2}$ . Si ha:

$$h \cdot x_2 = x_2 \implies h \cdot (g \cdot x_1) = g \cdot x_1 \implies (g^{-1} h g) \cdot x_1 = x_1$$

Segue che  $\forall h \in H_{x_2} \ g^{-1} h g \in H_{x_1}$ , ma allora  $h = g (g^{-1} h g) g^{-1} \in g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1}$ . Pertanto per l'arbitrarietà di  $h$  si ha  $H_{x_2} \subseteq g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1}$

$\supseteq$ ) Sia  $h \in H_{x_1}$  e consideriamo  $ghg^{-1}$ . Se moltiplico (con l'azione  $\cdot$ ) per  $x_2$ :

$$(ghg^{-1}) \cdot x_2 = (ghg^{-1}) \cdot g \cdot x_1 = (gh) \cdot (g^{-1} g) \cdot x_1 = (gh) \cdot x_1 = g \cdot (h) \cdot x_1 = g \cdot x_1 = x_2$$

Pertanto  $\forall h \in H_{x_1} \ (ghg^{-1}) \cdot x_2 = x_2$  e per l'arbitrarietà di  $h$  si ha  $g \cdot H_{x_1} \cdot g^{-1} \subseteq H_{x_2}$   $\square$

### 5.3 AZIONE PER OMEOMORFISMI

**DEFINIZIONE 5.3.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G$  un gruppo che agisce su  $X$ . Diciamo che  $G$  **agisce per omeomorfismi** se  $\forall g \in G$  l'applicazione:

$$\begin{aligned} \theta_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned} \quad (5.3)$$

è un *omeomorfismo*.

Questo è equivalente a chiedere che l'azione sia data da un *omomorfismo* di gruppi:

$$\Phi : G \longrightarrow \{\text{omeomorfismi } X \rightarrow X\} \leq S(X) \quad (5.4)$$

**ESERCIZIO.**  $G$  agisce per omeomorfismi se e solo se  $\theta_g$  è continua  $\forall g \in G$ .

**DIMOSTRAZIONE.** ...  $\square$

**PROPOSIZIONE 5.3.0.**

1. Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G$  un gruppo che agisce su  $X$  per omeomorfismo. Sia  $\pi$  la proiezione dall'insieme allo spazio delle orbite  $X/G$ :

$$\pi : X \longrightarrow X/G \quad (5.5)$$

Allora  $\pi$  è aperta e, se  $G$  è finito,  $\pi$  è anche chiusa.

2. Sia  $X$  di **Hausdorff** e  $G$  gruppo finito che agisce su  $X$  per omeomorfismi. Allora  $X/G$  è di Hausdorff.

**DIMOSTRAZIONE.**

- I Sia  $A \subseteq X$  un aperto. Vogliamo dimostrare che  $\pi(A)$  è aperto in  $X/G$ . Un aperto della topologia quoziente è tale se la controimmagine dell'aperto nel quoziente è un aperto: si deve allora dimostrare che  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è aperto in  $X$ . Ogni elemento di  $A$  è contenuto in un'orbita, dunque  $\pi(A)$  contiene le orbite degli  $x \in A$ ; la controimmagine  $\pi^{-1}(\pi(A))$  risulta dunque pari all'unione di *tutte* le orbite in  $X$  che intersecano l'insieme  $A$ :

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g.A$$

Ma allora  $g.A = \{g.x \mid x \in A\}$  è un aperto  $\forall g \in G$  poiché un omeomorfismo porta aperti in aperti; l'unione di aperti è aperta, dunque  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è aperto in  $X$  cioè  $\pi(A)$  è aperto in  $X/G$ .

Preso  $C$  chiuso, dobbiamo allo stesso modo dimostrare  $\pi(C)$  chiuso in  $X/G$ , cioè  $\pi^{-1}(\pi(C))$  chiuso in  $X$ . Usando lo stesso ragionamento, otteniamo che:

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g.C$$

Con  $g.C = \{g.x \mid x \in C\}$  chiuso per omeomorfismo. In particolare, essendo  $G$  finito, segue che l'unione dei  $g.C$  è finita e dunque anch'essa è un chiuso. Segue dunque  $\pi^{-1}(\pi(C))$  chiuso in  $X$  e  $\pi(C)$  chiuso in  $X/G$ .

- II Siano  $p, q \in X/G$  distinti. Vogliamo dimostrare che esistono intorni di  $p$  e  $q$  disgiunti.

Siano  $x, y \in X$  tali che  $\pi(x) = p$  e  $\pi(y) = q$  e consideriamo il gruppo finito  $G = \{g_1 = 1_G, g_2, \dots, g_n\}$ . Le orbite di  $x$  e  $y$  sono diverse: se così non fosse, si avrebbe  $\pi(x) = \pi(y)$  e cioè  $p = q$ , il che è assurdo! Allora:

$$g_i.x \neq g_j.y \quad \forall i, j$$

Definiti gli (intorni) aperti  $U \in I(x)$  e  $V \in I(y)$  disgiunti (in quanto  $X$  di **Hausdorff**), possiamo considerare gli altri (intorni) aperti disgiunti  $g_i.U \in I(g_i.x)$ ,  $g_i.V \in I(g_i.y)$ .

Allora:

$$\tilde{U} := \bigcup_i g_i.U \quad \tilde{V} := \bigcup_i g_i.V \quad (5.6)$$

Sono entrambi aperti. Vogliamo costruire  $U \in I(x)$  e  $V \in I(y)$  in modo che siano (intorni) aperti disgiunti tali che, costruiti come sopra  $\tilde{U}, \tilde{V}$ , si abbia  $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ . Così, passando al quoziente con  $\pi$ , si otterranno degli intorni  $\pi(\tilde{U})$  di  $p$  e  $\pi(\tilde{V})$  di  $q$  che soddisfano  $\pi(\tilde{U}) \cap \pi(\tilde{V}) = \emptyset$ .

- Costruiamo  $U$  e  $V$ :  $\forall i$  sappiamo che  $x \neq g_i.y$  in  $X$  (in quanto le orbite di  $x$  e  $y$  sono distinte. In quanto  $X$  è di **Hausdorff**, si ha che  $\forall i \exists U_i, V_i$  (intorni) aperti disgiunti tali che  $x \in U_i$  e  $g_i.y \in V_i$ . Notiamo che  $y \in g_i^{-1}.V_i$ ; allora definiamo

$$U := \bigcap_{i=1}^n U_i \in I(x) \quad V := \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}.V_i \in I(y)$$

- Ricaviamo  $\widetilde{U}$  e  $\widetilde{V}$ :  $\forall i$  (e quindi per ogni elemento di  $G$ ) abbiamo:

$$U \cap (g_i \cdot V) \subseteq U_i (g_i \cdot g_i^{-1} \cdot V_i) = U_i \cap V_i = \emptyset \implies U \cap (g_i \cdot V) = \emptyset$$

Allora  $\forall i, j$  abbiamo:

$$(g_i \cdot U) \cap (g_j \cdot V) = (g_i \cdot U) \cap (g_i g_i^{-1} g_j \cdot V) = g_i \cdot (U \cap (g_i^{-1} g_j) \cdot V)$$

Ma  $g_i^{-1} g_j \in G$ , dunque  $U \cap (g_i^{-1} g_j) \cdot V = \emptyset$ . Segue che:

$$(g_i \cdot U) \cap (g_j \cdot V) = \emptyset \implies \left( \bigcup_i g_i \cdot U \right) \cap \left( \bigcup_i g_i \cdot V \right) = \emptyset \implies \widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \emptyset$$

□

**ESEMPIO.**  $(\mathbb{Z}, +)$  agisce in  $\mathbb{R}$  per **traslazione**:

$$m \cdot x = x + m \quad (5.7)$$

Se mettiamo ad  $\mathbb{R}$  la topologia Euclidea, allora l'azione è per omeomorfismi, dato che fissato  $m \in \mathbb{Z}$ :  $\theta_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  è continua.

$$x \longmapsto x + m$$

- **Orbite:**  $O(x) = \{x + m \mid m \in \mathbb{Z}\}$  rappresenta tutti i numeri che hanno mantissa uguale (ad esempio, preso  $x = 1.5$ , nella sua orbita abbiamo 1.5, 2.5, -1.5, 25.5, ...).
- **Stabilizzatore:**  $H_x = \{m \in \mathbb{Z} \mid x + m = x\} = \{0\}$  è banale, dunque l'azione è libera.
- **Spazio delle orbite:**  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è insiemisticamente in corrispondenza biunivoca con  $[0, 1)$ , in particolare un sistema di rappresentanti di  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sono le orbite al variare di  $x \in [0, 1)$ . Inoltre, lo spazio delle orbite è compatto essendo immagine continua di un compatto ( $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). Si può dimostrare che è omeomorfo a  $S^1$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo  $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}$

$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

- $f$  è continua.
- $f$  è suriettiva.
- $f(t_1) = f(t_2) \iff t_1 - t_2 \in \mathbb{Z} \iff t_1, t_2$  nella stessa orbita  $\iff \pi(t_1) = \pi(t_2)$

Allora la relazione di equivalenza indotta da  $f$  è quella dell'azione di  $\mathbb{Z}$  su  $\mathbb{R}$ .

Inoltre,  $f$  induce  $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$  continua per le proprietà della topologia quoziente e che rende commutativo il diagramma a lato. Infatti  $\bar{f}$  è biunivoca in quanto suriettiva (lo è  $f$ ) ed iniettiva (per conseguenza del sistema di rappresentanti che si ha su  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ).

Inoltre, essendo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  compatto ed  $S^1$  di Hausdorff,  $\bar{f}$  è chiusa e dunque  $\bar{f}$  è l'omeomorfismo cercato. Per questo motivo, si ha anche che  $f$  è un'identificazione aperta. □

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists \bar{f} & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & & \end{array}$$

**DIGRESSIONE.** Si può sempre vedere  $\mathbb{R}^2$  come lo spazio dei complessi  $\mathbb{C}$ . Allora  $S^1 \in$

$\mathbb{C} \implies S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ . La funzione di prima si può anche riscrivere come:

$$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \leftrightarrow \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \leftrightarrow e^{2\pi i t} \quad (5.8)$$

**ESEMPIO.**  $G = GL(n, \mathbb{R})$  agisce su  $\mathbb{R}^n$  con l'azione di moltiplicazione matrice per vettore:

$$A \cdot \underline{v} = A\underline{v} \quad (5.9)$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato  $A \in G$ :  $\theta_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  è continua.  
 $\underline{v} \longmapsto A\underline{v}$

- *Orbite*: definite  $O(\underline{v}) = \{A\underline{v} \mid A \in G\}$  ci sono solo due orbite,  $[0]$  e  $[\underline{v}]$  con  $\underline{v} \neq 0$ , dato che ogni vettore può essere scritto come prodotto di un vettore per un'opportuna matrice di cambiamento di base.
- *Spazio delle orbite*:  $\mathbb{R}^n/G = \{[0], [\underline{v}]\}$ . Considerando la proiezione al quoziente  $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/G$ , si ha che  $\pi^{-1}([\underline{v}]) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , che è un aperto ma *non* è un chiuso. Per definizione di aperto della topologia quoziente  $\{[\underline{v}]\}$  è aperto ma non chiuso in  $\mathbb{R}^n/G$ , dunque non tutti i punti nello spazio delle orbite sono chiusi. Segue che  $\mathbb{R}^n/G$  non è **T1** e tanto meno è di **Hausdorff**.

**ESEMPIO.**  $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , inteso come gruppo moltiplicativo, agisce su  $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  con l'azione di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad (5.10)$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato  $\lambda \in G$ :  $\theta_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$   
 $\underline{x} \longmapsto \lambda \underline{x}$   
 è continua.

- *Orbite*:  $O(\underline{x}) = \{\lambda \underline{x} \mid \lambda \in G\}$  rappresentano tutte le rette vettoriali passanti per l'origine in  $\mathbb{R}^{n+1}$  a cui sono state tolte l'origine.
- *Spazio delle orbite*:  $\frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{G} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è lo **spazio proiettivo reale**, spazio topologico rispetto alla topologia quoziente indotta dall'azione.  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è di **Hausdorff** e *compatto*.

**DEFINIZIONE 5.3.1.** Lo **spazio proiettivo reale**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  (o  $\mathbb{RP}^n$ ) di dimensione  $n$  è lo spazio topologico delle rette vettoriali passanti origine in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , a cui sono state tolte l'origine. È definito come lo spazio quoziente rispetto all'azione del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{R}^*$ :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{R}^*} \quad (5.11)$$

**PROPOSIZIONE 5.3.1.**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è di **Hausdorff**, *compatto* e **c.p.a.**.

**DIMOSTRAZIONE.** I Dati  $p, q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ,  $p \neq q$  essi sono della forma  $p = [\underline{x}]$  e  $q = [\underline{y}]$ .

Allora:

$$[\underline{x}] \neq [\underline{y}] \quad \mathcal{L}_0(\underline{x}) \neq \mathcal{L}_0(\underline{y})$$

Con  $\mathcal{L}_0(\underline{x})$ ,  $\mathcal{L}_0(\underline{y})$  le rette vettoriali descritte da  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ .

Prendiamo gli (intorni) aperti disgiunti  $U \setminus 0 \in I(\underline{x})$ ,  $V \setminus 0 \in I(\underline{y})$  in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

Allora, passando al quoziente,  $\pi(U \setminus 0)$  e  $\pi(V \setminus 0)$  formano due fasci di rette a forma di “doppio cono infinito” con vertice nell’origine; questi due coni sono (intorni) aperti in quanto

$$\pi^{-1}(\pi(U \setminus 0)) = U \setminus 0 \quad \pi^{-1}(\pi(V \setminus 0)) = V \setminus 0$$

Inoltre sono intorni disgiunti di  $p$  e  $q$ , dunque  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è di **Hausdorff**.

II Per dimostrare che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è compatto, mostreremo che  $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , dato che  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  è compatto.

Notiamo che, presa l’orbita di un vettore  $\underline{v}$ , si ha:

$$[\underline{v}] = \{\lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\} = \left\{ \underbrace{\lambda}_{=\mu \in \mathbb{R}^*} \underbrace{\left\| \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \right\|}_{\in S^1} \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \right\} = \{\mu \underline{x} \mid \mu \in \mathbb{R}^*\} = [\underline{x}]$$

Dunque ogni orbita dello spazio proiettivo reale si può scrivere come l’orbita di un vettore appartenente alla sfera  $S^n$ . Segue che non solo  $\pi$  è suriettiva, ma anche  $\pi|_{S^n}$  è suriettiva, cioè  $\pi|_{S^n}(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ; segue dunque che  $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Dato che  $S^n$  è compatto e **c.p.a.**, segue che anche lo spazio proiettivo reale è compatto e **c.p.a.** (in quanto immagine continua tramite  $\pi$  di  $S^n$ ).

□



# SUCCESIONI

---

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 6.1 NUMERABILITÀ

**DEFINIZIONE 6.1.0.** Un insieme  $X$  è **numerabile** se è finito oppure esiste una biezionone tra l'insieme  $X$  e i naturali  $\mathbb{N}$ .

**DEFINIZIONE 6.1.1.** Uno spazio topologico  $X$  è **a base numerabile** se esiste una base  $\mathcal{B}$  della topologia tale che  $\mathcal{B}$  sia numerabile. Si dice anche che  $X$  soddisfa il **secondo assioma di numerabilità**.

**DEFINIZIONE 6.1.2.** Uno spazio topologico  $X$  è *primo-numerabile* se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile. Si dice anche che  $X$  soddisfa il **primo assioma di numerabilità**.

### OSSERVAZIONE.

1. Il secondo assioma di numerabilità implica il primo.
2. Se  $X$  è finito,  $X$  soddisfa sempre i due assiomi.
3. Se  $X$  è spazio metrico,  $X$  è sempre *primo-numerabile*.
4. Se  $X$  è *a base numerabile*, ogni sottospazio  $Y$  di  $X$  è *a base numerabile*. In particolare  $Y$  è *primo-numerabile*.
5. Se  $X$  e  $Y$  sono *a base numerabile*, allora  $X \times Y$  è *a base numerabile*. In particolare  $X \times Y$  è *primo-numerabile*.
6. Non è vero che il quoziente di  $X$  spazio *a base numerabile* (o *primo-numerabile*) è sempre *a base numerabile* (o *primo-numerabile*).

**DIMOSTRAZIONE.**

- I Se  $X$  ha base numerabile  $\mathcal{B}$  e  $x \in X$ , allora  $\{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$  è un sistema fondamentali di intorni di  $x$  ed è chiaramente numerabile.
- II Ogni base e sistema fondamentale di intorni contiene necessariamente un numero finito di elementi.
- III Preso  $x \in X$ , allora  $\{B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un sistema fondamentale di intorni ed è numerabile.
- IV Se  $\mathcal{B}$  è una base numerabile per  $X$ ,  $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$  è base numerabile per  $Y$ .
- V Se  $\mathcal{B}_X$  è una base numerabile per  $X$  e  $\mathcal{B}_Y$  base numerabile per  $Y$ , allora  $\{A \times B \mid A \in \mathcal{B}_X, B \in \mathcal{B}_Y\}$  è base di  $X \times Y$  numerabile: il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili rimane numerabile.
- VI La contrazione di  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{R}$  ad un punto, cioè il quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , non è primo-numerabile nè tanto meno a base numerabile, pur essendo  $\mathbb{R}$  a base numerabile in quanto metrico<sup>a</sup>.

□

<sup>a</sup>Nelle “Note aggiuntive”, a pag. 219, si può trovare la dimostrazione di ciò.

**ESEMPIO.**  $\mathbb{R}$  con la topologia Euclidea è a base numerabile. Presa infatti:

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

- È numerabile (è definita con i razionali  $\mathbb{Q}$ , che sono numerabili)
- È una base perché, dati  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ :

$$(x, y) = \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ x < a < b < y}} (a, b)$$

**PROPOSIZIONE 6.1.0.** Sia  $X$  a base numerabile. Allora ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un sottoricoprimento numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{A}$  un ricoprimento aperto di  $X$ ,  $\mathcal{B}$  una base numerabile per  $X$  e  $x \in X$ . Allora  $\exists U_x \in \mathcal{A}$  tale che  $x \in U_x$ . Essendo  $\mathcal{B}$  base,  $\exists B_x \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B_x \subseteq U_x$ . Abbiamo così determinato un sottoinsieme numerabile della base  $\mathcal{B}$ :

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B_x \mid x \in X\}$$

Allora esiste in particolare  $E \subseteq X$  numerabile tale che:

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B_x \mid x \in E\}$$

Se consideriamo ora  $\widetilde{\mathcal{A}} := \{U_x \mid x \in E\}$ , notiamo che:

- $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$ .
- $\widetilde{\mathcal{A}}$  è numerabile perché lo è  $E$ .
- $X = \bigcup_{B_x \in \widetilde{\mathcal{B}}} B_x = \bigcup_{x \in E} B_x \subseteq \bigcup_{x \in E} U_x$ .

Segue che  $\widetilde{\mathcal{A}}$  è un sottoricoprimento numerabile di  $A$ .

□



**DEFINIZIONE 6.1.3.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme  $E$  denso e numerabile.

**ESEMPLI.**

- Se  $X$  è numerabile, allora è separabile perché l'insieme stesso è un sottoinsieme numerabile e denso.
- $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea è separabile perché si ha  $E = \mathbb{Q}^n$  denso in  $\mathbb{R}^n$ .

**LEMMA 6.1.0.** Se  $X$  è a base numerabile, allora è separabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{B}$  una base numerabile. Per ogni  $U \in \mathcal{B}$  sia  $x_U \in U$  un punto e sia:

$$E = \{x_U \mid U \in \mathcal{B}\}$$

- $E$  è numerabile perché lo è  $\mathcal{B}$ : abbiamo preso un punto per ogni elemento della base numerabile.
- $E$  è denso: se  $A \subseteq X$  è aperto non vuoto, allora  $\exists U \in \mathcal{B}$  tale che  $x_U \in U \subseteq A \implies x_U \in A \implies E \cap A \neq \emptyset$ .

□

**PROPOSIZIONE 6.1.1.** Se  $X$  è spazio metrico,  $X$  è sempre primo-numerabile ed è:

$$a \text{ base numerabile} \iff separabile$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Sempre vera per ogni spazio anche non metrico (lemma 6.1).

$\impliedby$ ) Sia  $E \subseteq X$  sottoinsieme numerabile e denso e consideriamo:

$$\mathcal{B} = \{B_{1/n}(e) \mid e \in E, n \in \mathbb{N}\}$$

Questo insieme è numerabile: mostriamo che sia una base. Per far ciò fissiamo  $U \subseteq X$  aperto e prendiamo  $x \in U$ : vogliamo trovare un aperto di  $\mathcal{B}$  contenuto in  $U$  contenente  $x$ .<sup>a</sup>

Sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $B_{1/n}(x) \subseteq U$ . Cerchiamo opportuni  $e \in E$ ,  $m \in \mathbb{N}$  tale che:

$$x \in B_{1/m}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$$

Consideriamo la palla  $B_{1/2n}(x)$ . Siccome  $E$  è denso in  $X$ ,  $\exists e \in E \cap B_{1/2n}(x)$ .

Prendiamo ora la palla  $B_{1/2n}(e) \in \mathcal{B}$ :

- *contiene*  $x$  perché se  $e \in B_{1/2n}(x) \implies d(e, x) < \frac{1}{2n} \implies x \in B_{1/2n}(e)$
- $B_{1/2n}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$ ; infatti, preso  $y \in B_{1/2n}(e)$  si ha:

$$d(x, y) \leq d(x, e) + d(e, y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$\implies y \in B_{1/n}(x) \subseteq U.$$

Segue la tesi. □

<sup>a</sup>Gli elementi della base sono già aperti banalmente. Per l'arbitrarietà di  $x$ , troviamo un ricoprimento aperto di  $U$  costituito da aperti di  $\mathcal{B}$  contenuto interamente in  $U$ , cioè  $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ .

**ESEMPIO.** Si può vedere che  $\mathbb{R}^n$  è base numerabile anche perché è uno spazio metrico ed è separabile.

**ATTENZIONE!** Un insieme con una certa topologia può essere a base numerabile (o primo-numerabile), ma non necessariamente rispetto ad un'altra!

**ESEMPIO.** RETTA DI SORGENFREY.

Consideriamo  $X = \mathbb{R}$  con la topologia avente come base:

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \quad (6.1)$$

Mostriamo  $\mathcal{B}$  è base per una topologia, è separabile, primo-numerabile ma *non* è a base numerabile.

- *Base per una topologia:* usiamo il teorema delle basi (Manetti, 3.7), pag. 8.

I  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  è ovvio.

II Prendiamo  $A = [a, b)$ ,  $B = [c, d)$  e consideriamo:

$$\forall x \in A \cap B = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$$

Allora basta prendere  $C = A \cap B \in \mathcal{B}$  per soddisfare  $x \in C \subseteq A \cap B$ .

- *Separabile:*  $E = \mathbb{Z}$  è numerabile ed è denso perché vale sempre  $[a, b) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ , dunque ogni aperto non vuoto interseca  $E$ ; segue che  $X$  è separabile.
- *Primo-numerabile:* s  $a \in \mathbb{R}$  allora  $\left\{ \left[ a, a + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un sistema fondamentale di intorno di  $a$  numerabile. Preso  $U$  intorno di  $a$ ,  $\exists b > a$  tale che  $[a, b) \subseteq U$ ; inoltre,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $a + \frac{1}{n} < b$ , cioè:

$$\left[ a, a + \frac{1}{n} \right) \subseteq [a, b) \subseteq U$$

- *Non a base numerabile:* presa una base  $\widetilde{\mathcal{B}}$  per  $X$ , mostriamo che non è numerabile. Sia  $x \in \mathbb{R}$ . Allora:

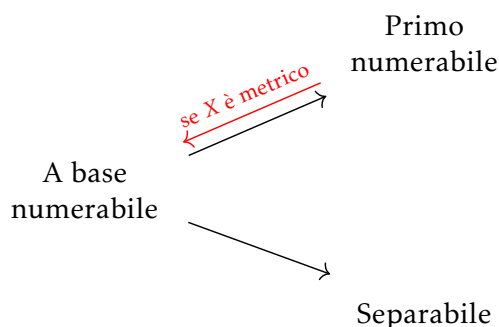
$$[x, \infty) = \bigcup_{y > x} [x, y)$$

È aperto. In particolare, esiste un aperto dipendente dal punto  $x$ , cioè  $U(x) = [x, b) \in \widetilde{\mathcal{B}}$  (per un certo  $b > x$ ) per cui  $x \in U(x) \subseteq [x, \infty)$ .

Notiamo che se  $x \neq y$ , allora  $U(x) \neq U(y)$ : preso  $y > x$ , segue che  $x \notin [y, \infty) \supseteq U(y) \implies x \notin U(y) \implies U(x) \neq U(y)$ . L'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{B}} \\ x & \longmapsto & U(x) \end{array} \quad (6.2)$$

è iniettiva, dunque  $\widetilde{\mathcal{B}}$  non è in iniezione con i naturali e pertanto  $\widetilde{\mathcal{B}}$  non è numerabile.



## 6.2 SUCCESIONI

**DEFINIZIONE 6.2.0.** Una **successione** in uno spazio topologico  $X$  è una funzione:  $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$  che indichiamo con  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}$ .

**DEFINIZIONE 6.2.1.** Sia  $\{a_n\}$  una successione in  $X$ . Diciamo che  $\{a_n\}$  **converge** a  $p \in X$  se  $\forall U \in I(p) \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U, \forall n \geq n_0$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $X$  è di **Hausdorff**, una successione convergente ha un **unico** limite.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\{a_n\}$  converga a  $p$  e  $q$ . Mostriamo che  $p = q$ . Siano  $U \in I(p)$  e  $V \in I(q)$ .

- Siccome  $\{a_n\}$  converge a  $p$ ,  $\exists n_0$  tale che  $a_n \in U \forall n \geq n_0$ .
  - Siccome  $\{a_n\}$  converge a  $q$ ,  $\exists n_1$  tale che  $a_n \in V \forall n \geq n_1$ .
- $$\implies a_n \in U \cap V \forall n \geq \max_{n_0, n_1} \implies U \cap V \neq \emptyset \implies p = q$$

L'ultima implicazione deriva dal fatto che  $X$  è di **Hausdorff**. Infatti, se in **Hausdorff**  $p \neq q \implies U \cap V = \emptyset$ , vale anche la sua negazione:  $U \cap V \neq \emptyset \implies p = q$ .  $\square$

**DEFINIZIONE 6.2.2.** Se  $X$  è di **Hausdorff** e  $\{a_n\}$  è convergente, ha senso parlare del **limite** della successione:

$$p = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (6.3)$$

Se  $X$  non è di **Hausdorff**, la stessa successione può convergere a più punti, dunque non esiste il limite della successione.

**ESEMPI.**

- Se  $X$  ha la topologia banale  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ , l'unico intorno di qualunque punto è  $X$ . Allora ogni successione  $\{a_n\}$  in  $X$  converge sempre ad un qualunque punto  $p$ .
- Se  $X$  ha la topologia discreta,  $\{a_n\}$  successione in  $X$  converge a  $p \iff \exists n_0 : a_n = p, \forall n \geq n_0$ , cioè se la successione è finitamente costante. Infatti, nella topologia discreta anche il singoletto  $\{p\}$  è intorno di  $p$ , dunque eventualmente la successione avrà solo termini nel singoletto.

**OSSERVAZIONE.** Se  $X$  spazio metrico:

$$a_n \text{ CONVERGE A } p \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad (6.4)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ )  $U = B_\varepsilon(p)$  è l'intorno di convergenza che soddisfa l'implicazione.

$\impliedby$ ) Sia  $U \in I(p)$ . Allora  $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(p) \subseteq U$ . Ma allora, dato che per le ipotesi  $\exists n_0 : d(p, a_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ , cioè  $a_n \in B_\varepsilon(p) \subseteq U \implies a_n \in U \forall n \geq n_0$ .  $\square$

### 6.2.1 Punti di accumulazione

**DEFINIZIONE 6.2.3.** Un punto  $p \in X$  è **punto di accumulazione per la successione**  $\{a_n\}$  se:

$$\forall U \in I(p), \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n \in U \quad (6.5)$$

**ESERCIZIO.** Se  $X$  è spazio metrico, allora:

$$p \text{ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER } a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad (6.6)$$

**DEFINIZIONE 6.2.4.** Un punto  $p \in X$  è **punto di accumulazione per il sottoinsieme**  $B \subseteq X$  se:

$$\forall U \in I(p), \exists b \in B : b \in U \setminus \{p\} \quad (6.7)$$

L'insieme dei punti di accumulazione per il sottoinsieme  $B$  è chiamato **derivato** di  $B$ .

**ESERCIZIO.** Data la successione  $\{a_n\}$  in  $X$  e definito  $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ :

- $p \in X$  punto di accumulazione per la successione non è mai punto di accumulazione per l'insieme  $A$ .
- $p \in X$  punto di accumulazione per l'insieme  $A$  in generale non è punto di accumulazione per la successione; se  $X$  è metrico allora vale l'implicazione

### 6.2.2 Sottosuccessioni

**DEFINIZIONE 6.2.5.** Una **sottosuccessione** di  $\{a_n\}$  è la composizione di  $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$  con un'applicazione *strettamente crescente*  $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$   $n \longmapsto k(n)$ . Si indica con  $\{a_{k_n}\}$ .

**LEMMA 6.2.0.**  $\textcircled{A}$  Sia  $\{a_n\}$  una successione su  $X$  e  $p \in X$ . Valgono le seguenti implicazioni:

$$\textcircled{1} \{a_n\} \text{ converge a } p \quad (6.8)$$

$\Downarrow$

$$\textcircled{2} \{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \quad (6.9)$$

$$\Downarrow \textcircled{*}$$

$$\textcircled{3} \quad p \text{ è un punto di accumulazione per } \{a_n\} \quad (6.10)$$

$$\Downarrow \textcircled{**}$$

$$\textcircled{4} \quad p \in \overline{A} \text{ dove } A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \quad (6.11)$$

**DIMOSTRAZIONE.**  $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$  La sottosuccessione convergente è la successione stessa.

$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$  Sia  $\{a_{k(n)}\}$  una sottosuccessione convergente a  $p$  e sia  $U \in I(p)$ .

Se  $a_{k(n)}$  converge a  $p$  si ha che  $\exists n_0 : a_{k(n)} \in U, \forall n \geq n_0$ . Poichè  $k(n)$  è strettamente crescente,  $\exists n_1 : k(n) \geq N, \forall n \geq n_1$ . Allora preso:

$$n = \max\{n_0, n_1\}$$

Abbiamo che  $a_{k(n)} \in U, k(n) \geq N$ .<sup>a</sup> Segue che  $p$  è punto di accumulazione per  $\{a_n\}$ .

$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{4}$   $p \in \overline{A} \iff \forall U \in I(p) \quad A \cap U \neq \emptyset$ . Allora sia  $U$  intorno di  $p$ : voglia che  $U \cap A \neq \emptyset$ . Essendo  $p$  punto di accumulazione per  $\{a_n\}$ ,  $\exists n \quad a_n \in U \implies U \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

<sup>a</sup>L'intorno  $U$  è arbitrario.

**LEMMA 6.2.1.** Sia  $X$  primo-numerabile,  $\{a_n\}$  successione in  $X$  e  $p \in X$ . Allora vale anche il viceversa di  $\textcircled{*}$ , cioè:

$$\{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \iff p \text{ è di accumulazione per } \{a_n\} \quad (6.12)$$

**DIMOSTRAZIONE.**  $\implies$ ) Vale per  $\textcircled{*}$ .

$\impliedby$ ) Sia  $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  sistema fondamentale di intorni di  $p$  numerabile per ipotesi ( $X$  primo-numerabile). Consideriamo i seguenti insiemi:

$$\widetilde{U}_m := U_1 \cap \dots \cap U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

■  $\widetilde{U}_m$  è intorno di  $p$ , in quanto intersezione *finita* di intorni di  $p$ .

■  $\widetilde{U}_m = U_1 \cap \dots \cap U_m \supseteq U_1 \cap \dots \cap U_m \cap U_{m+1} = \widetilde{U}_{m+1}$ .

Segue che  $\{\widetilde{U}_m\}$  è ancora un sistema fondamentale di intorni (numerabile) di  $p$ , infatti,

se  $V$  è intorno di  $p$ ,  $\exists m : V \supseteq U_m \supseteq \widetilde{U}_m$ .

A meno di sostituire  $U_m$  con  $\widetilde{U}_m$ , possiamo supporre che  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$

Costruiamo una sottosuccessione di  $\{a_n\}$  convergente a  $p$ . Sicuramente:

■  $\exists k(1) \in \mathbb{N} : a_{k(1)} \in U_1$ .

■  $\exists k(2) \geq k(1) + 1 : a_{k(2)} \in U_2$ .

E così via:  $\forall m \exists k(m) \geq k(m-1) + 1$  tale che  $a_{k(m)} \in U_m$ , ottenendo una sottosuccessione  $\{a_{k(m)}\}$ . Notiamo in particolare che:

☺ Se  $m_2 \geq m_1$ , allora  $a_{k(m_2)} \in U_{m_2} \subseteq U_{m_1}$ .

Mostriamo che  $\{A_{k(n)}\}$  converge a  $p$ .

Sia  $V$  intorno di  $p$ . Dal sistema fondamentale di intorni  $\exists m_0$  tale che  $U_{m_0} \subseteq V$ . Da ☺ si ha che  $\forall m \geq m_0$   $a_{k(m)} \in U_{m_0} \subseteq V$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 6.2.0.** CARATTERIZZAZIONE DELLA CHIUSURA IN TERMINI DI SUCCESSIONI.

Sia  $X$  uno spazio topologico *primo-numerabile*. Sia  $Y \subseteq X$  e  $p \in X$ . Sono equivalenti

- Esiste una successione in  $Y$  convergente a  $p$ .
- $p$  è di accumulazione per una successione in  $Y$ .
- $p \in \overline{Y}$

**DIMOSTRAZIONE.**

①  $\Rightarrow$  ② Non è necessario che  $X$  sia primo-numerabile, è immediato dal lemma 6.2 (pag. 70).

②  $\Rightarrow$  ③ Non è necessario che  $X$  sia primo-numerabile. Se  $p$  di accumulazione per  $\{a_n\}$  con  $a_n \in Y \forall n \Rightarrow A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ . Allora segue dal lemma 6.2 (pag. 70) che  $p \in A = \overline{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{Y}$

③  $\Rightarrow$  ① Sia  $\{U_n\}$  un sistema fondamentale di intorni di  $p$  tale che  $U_n \supseteq U_{n+1} \forall n$ . Allora:

$$p \in \overline{Y} \Rightarrow \forall n \ Y \cap U_n \neq \emptyset \Rightarrow \forall n \ \exists y_n \in Y \cap U_n$$

In modo analogo a ☺ (pag. 71), se  $n_2 \geq n_1$ , allora  $y_{n_2} \in U_{n_2} \subseteq U_{n_1}$ . Allora  $\{y_n\}$  è una successione in  $Y$ , mostriamo che converge a  $p$ .

Sia  $V$  intorno di  $p$ . Dal sistema fondamentale di intorni  $\exists n_0$  tale che  $U_{n_0} \subseteq V$ . Dal ragionamento analogo a ☺ si ha che  $\forall n \geq n_0$   $y_n \in U_{n_0} \subseteq V$ .  $\square$

### 6.3 SUCCESSIONI E COMPATTI

**PROPOSIZIONE 6.3.0.** (MANETTI, 4.46)

Sia  $X$  spazio topologico e sia  $K_n \subseteq X \forall n \in \mathbb{N}$  un sottospazio chiuso, *compatto* e non vuoto. Supponiamo inoltre che:

$$K_n \supseteq K_{n+1} \forall n \Rightarrow K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

Allora:  $\bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Iniziamo in  $K_1$ . Consideriamo  $A_n := K_1 \setminus K_n$ :

- $K_n$  chiuso in  $X \Rightarrow K_n$  chiuso in  $K_1$ . Allora  $A_n$  complementare di un chiuso, dunque aperto in  $K_1 \forall n \geq 1$ .
- $K_n \supseteq K_{n+1} \Rightarrow A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \geq 1$ .

Sia allora  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = A_N = K_1 \setminus \underbrace{K_N}_{\neq \emptyset} \subsetneq K_1$$

Allora nessuna unione *finita* degli  $A_n$  ricopre  $K_1$ , cioè  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subsetneq K_1$ , altrimenti  $\{A_n\}$  sa-

rebbe un ricoprimento aperto di  $K_1$  che *non* ammette sottoricoprimento finito (assurdo, in quanto  $K_1$  è *compatto*!).

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} K_1 \setminus K_n = K_1 \setminus \left( \bigcap_{n \geq 1} K_n \right) \subsetneq K_1 \implies \bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$$

□

**LEMMA 6.3.0.** In uno spazio topologico *compatto*  $X$  ogni successione in  $X$  ha punti di accumulazione.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{a_n\}$  successione in  $X$ ; per definizione:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per } \{a_n\} \iff \forall U \in I(p), \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n \in U$$

Per  $N$  fissato sia  $A_N := \{a_n \mid n \geq N\} \subseteq X$ . Allora:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per } \{a_n\} \iff \forall U \in I(p), \forall N \in \mathbb{N} U \cap A_N \neq \emptyset \iff \forall N \in \mathbb{N}, p \in \overline{A_N} := C_N$$

Dunque  $\{\text{punti di accumulazione di } \{a_n\}\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} C_N$  e:

$$\{a_n\} \text{ ha punti di accumulazione} \iff \bigcap_{N \in \mathbb{N}} C_N \neq \emptyset$$

- $A_B \neq \emptyset$  per definizione, dunque  $C_N$  è un chiuso non vuoto.
- $X$  è compatto,  $C_N$  chiuso in  $X$  compatto  $\implies C_N$  *compatto*.

Poiché  $A_N = \{a_n \mid n \geq N\} \supseteq A_{N+1} = \{a_n \mid n \geq N+1\}$ , si ha:

$$C_N = \overline{A_N} \subseteq \overline{A_{N+1}} = C_{N+1}$$

Abbiamo trovato una successione di compatti contenuto l'uno nel successivo. Allora per la proposizione 6.4 (pag. 72, (MANETTI, 4.46)). si ha che  $\bigcap_{n \geq 1} C_N \neq \emptyset$ . Segue che esiste un punto di accumulazione per la successione. □

### 6.3.1 Compattezza per successioni

**DEFINIZIONE 6.3.0.** Sia  $X$  spazio topologico.  $X$  si dice **compatto per successioni** se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

**OSSERVAZIONE.** Per il lemma 6.2 (▲) (pag. 70), se  $X$  è compatto per successioni allora ogni successione in  $X$  ha un punto di accumulazione.

**LEMMA 6.3.1.** Sia  $X$  *primo-numerabile*. Allora:

1.  $X$  compatto per successioni  $\iff$  Ogni successione in  $X$  ha un punto di accumulazione.
2.  $X$  compatto  $\implies X$  compatto per successioni.

**DIMOSTRAZIONE.**

- I  $\implies$ ) Vale per l'osservazione precedente.  
 $\impliedby$ ) Vale per il lemma 6.3, pag. 71: se ogni successione ha un punto di accumulazione in  $X$  primo numerabile, allora ogni sottosuccessione ammette una sottosuccessione convergente a  $p$ , cioè  $X$  è compatto per successioni.  
 II Se  $X$  è compatto, allora ogni successione in  $X$  ha dei punti di accumulazione e per il punto 1) segue che  $X$  è compatto per successioni.  $\square$

**PROPOSIZIONE 6.3.1. CARATTERIZZAZIONE DELLA COMPATTEZZA IN TERMINI DI SUCCESSIONI**

Sia  $X$  uno spazio topologico a base numerabile. Allora sono equivalenti:

1.  $X$  compatto.
2.  $X$  compatto per successioni
3. Ogni successione in  $X$  ammette un punto di accumulazione.

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo già che  $2) \iff 3)$  e  $1) \implies 2)$  dal lemma precedente. Dobbiamo dimostrare  $2) \implies 1)$ . Dimostriamo per contronominale ( $\neg 1) \implies \neg 2$ ): se  $X$  non è compatto, allora  $X$  non è compatto per successioni, cioè esiste una sottosuccessione in  $X$  che non ha alcuna sottosuccessione convergente.

- $X$  non compatto  $\implies \exists \tilde{\mathcal{A}}$  ricoprimento aperto di  $X$  che non ha sottoricoprimenti finiti.
- $X$  a base numerabile  $\implies \exists \mathcal{A}$  sottoricoprimento di  $\tilde{\mathcal{A}}$  che sia numerabile.

Poiché ogni sottoricoprimento di  $\mathcal{A}$  è anche un sottoricoprimento di  $\tilde{\mathcal{A}}$ , significa che  $\mathcal{A}$  non ha sottoricoprimenti finiti. Definiamo:

$$\mathcal{A} := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Allora:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{j=1}^n A_j \subsetneq X \implies \exists x_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$$

Costruisco così una successione  $\{x_n\}$  successione in  $X$  tale per cui:

$$\odot x_n \notin A_j \quad \forall j \leq n.$$

Mostriamo che  $\{x_n\}$  non ha sottosuccessioni convergenti. Sia  $\{x_{k(n)}\}$  una sottosuccessione arbitraria di  $\{x_n\}$  e sia  $p \in X$ , mostriamo che essa non converga ad un qualunque  $p$ .

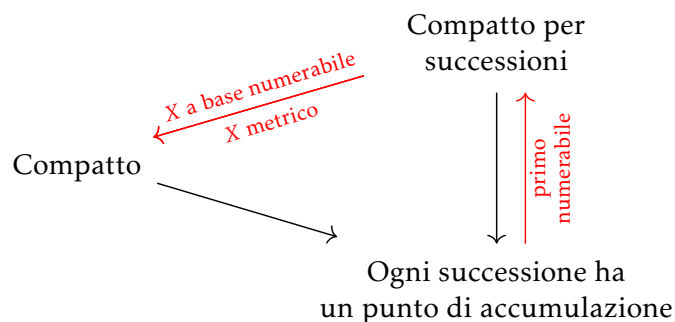
- $\mathcal{A}$  è un (sotto)ricoprimento di  $X \implies \exists N : p \in A_N$
- Da  $\odot$  (pag. 74) abbiamo che  $x_n \notin A_N \quad \forall n \geq N$  (dato che  $x_n \notin A_j \quad \forall j \leq n$ , in particolare in  $A_N$  per ogni  $n \geq N$ ); si ha allora  $x_{k(n)} \notin A_N \quad \forall n : k(n) \geq N$ .

Essendo  $k(n)$  crescente,  $\exists n_0 : k(n) \geq N \quad \forall n \geq n_0$ . Segue che se  $n \geq n_0$  allora  $x_{k(n)} \notin A_N$ . Poiché  $A_N$  è intorno di  $p$ , segue che  $\{x_{k(n)}\}$  non converge a  $p$ .  $\square$



**TEOREMA 6.3.0.** Sia  $X$  spazio metrico. Allora:

$$X \text{ compatto} \iff X \text{ compatto per successioni} \quad (6.13)$$



#### 6.4 SPAZI METRICI COMPLETI

**DEFINIZIONE 6.4.0.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una successione  $\{a_n\}$  si dice **di Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, a_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0 \quad (6.14)$$

**DEFINIZIONE 6.4.1.** Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

#### OSSERVAZIONE.

1. Ogni successione *convergente* è di *Cauchy*.
2. Una successione di Cauchy è *convergente* se e solo se ha punti di accumulazione.
3. Una successione di Cauchy è *convergente* se ha una *sottosuccessione convergente*.
4. Se  $X$  è *compatto*, allora ogni successione di Cauchy è *convergente*.
5. Se  $X$  è spazio metrico *compatto*, allora  $X$  è spazio metrico *completo*; non è vero il viceversa.

#### DIMOSTRAZIONE.

I Se  $a_n \rightarrow p$  per  $n \rightarrow +\infty$  significa che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, p) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Considerati  $n, m \geq n_0$  si ha:

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(p, a_m) < 2\varepsilon \quad (6.15)$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  vale la convergenza.

II  $\implies$ ) Sempre vera per 6.2  $\blacktriangle$  (pag. 70).

$\impliedby$ ) Sia  $\{a_n\}$  una successione di Cauchy e sia  $p$  un punto di accumulazione. Sia  $\varepsilon > 0$ : dalla definizione di successione di Cauchy  $\exists n_0$  tale per cui  $d(a_n, a_m) <$

$\varepsilon \forall n, m \geq n_0$ .

Essendo  $p$  di accumulazione,  $\exists n_1 \geq n_0$  tale per cui  $d(p, a_{n_1}) < \varepsilon$ . Allora, se  $n \geq n_0$  si ha:

$$d(a_n, p) \leq d(a_n, a_{n_1}) + d(a_{n_1}, p) < 2\varepsilon$$

Dunque  $\{a_n\}$  converge a  $p$ .

- III Poiché  $X$  è metrico,  $X$  è primo-numerabile, dunque avere un punto di accumulazione è equivalente ad avere una sottosuccessione convergente.
- IV Se  $X$  è compatto, ogni successione ha punti di accumulazione, in particolare quelle di Cauchy: per il punto 2) tutte le successioni di Cauchy risultano allora convergenti.
- V Segue dal punto 4). Un controesempio del viceversa è  $\mathbb{R}^n$ , dato che è completo ma non è compatto (si veda il teorema seguente). □

**TEOREMA 6.4.0.**  $\mathbb{R}^n$  in metrica euclidea è uno spazio metrico completo.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{a_n\}$  di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$ . Mostriamo che  $\{a_n\}$  è eventualmente limitata<sup>a</sup>. Poiché la successione di Cauchy è definita per ogni  $\varepsilon$ , fissiamo  $\varepsilon = 1$ . Allora:

$$\exists n_0 : \|a_n - a_m\| \leq 1 \quad \forall n, m \geq n_0$$

Sia  $M := \max_{n_0, \dots, n_0} \|a_n\|$ . Se  $n \geq n_0$  si ha:

$$\|a_n\| = \|a_n - a_{n_0} + a_{n_0}\| \leq \|a_n - a_{n_0}\| + \|a_{n_0}\| \leq 1 + M$$

Questo significa che  $\{a_n\} \subseteq \overline{B_{1+M}(0)}$ . Questa palla chiusa è uno spazio metrico *indotto* in  $\mathbb{R}^n$  e compatto, cioè è uno *spazio metrico completo*. Allora la successione di Cauchy, trovandosi in uno spazio metrico completo, converge in esso, e dunque converge anche in  $\mathbb{R}^n$ . □

<sup>a</sup>Supponendo chiaramente che la successione sia ben definita, ci interessa solamente che la successione sia limitata dopo un  $n_0$ : prima di ciò ho un numero finito di termini  $a_0, \dots, a_{n_0} < \infty$  e posso chiaramente prendere una palla (chiusa) che li contenga, ad esempio di raggio  $M+1$  con  $M$  definito come nella dimostrazione.

**ATTENZIONE!** La **completezza** *non* è una proprietà topologica! Per esempio,  $\mathbb{R}$  e  $(0, 1)$  con metrica euclidea sono omeomorfi rispetto alla topologia indotta dalla metrica, ma  $\mathbb{R}$  abbiamo appena dimostrato che è completo, mentre  $(0, 1)$  si può vedere che non lo è!

# II

## OMOTOPIA



# OMOTOPIA

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 7.1 LEMMA DI INCOLLAMENTO

### LEMMA 7.1.0. LEMMA DI INCOLLAMENTO

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $X = A \cup B$ . Siano  $f : A \longrightarrow Y$  e  $g : B \longrightarrow Y$  continue tali che  $f(x) = g(x) \ \forall x \in A \cap B$ , cioè  $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ .

Consideriamo l'**incollamento**  $h : X \longrightarrow Y$  definito da:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases} \quad (7.1)$$

Se  $A$  e  $B$  sono entrambi aperti in  $X$ , oppure se  $A$  e  $B$  sono entrambi chiusi in  $X$ , allora  $h$  è continua.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $A$  e  $B$  aperti. Sia  $U \subseteq Y$  aperto. Allora:

$$h^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\subseteq B} \cup \underbrace{g^{-1}(U)}_{\subseteq A}$$

Essendo  $f, g$  continue, segue che  $f^{-1}(U)$  è aperto in  $A$  e  $g^{-1}(U)$  è aperto in  $B$ . In quanto  $A, B$  aperti, per definizione di aperto del sottospazio<sup>a</sup>  $f^{-1}(U)$  e  $g^{-1}(U)$  sono aperti su  $X \implies h^{-1}(U)$  aperto.

Il caso di  $A$  e  $B$  chiuso è esattamente analogo. □

<sup>a</sup>Poichè un aperto del sottospazio è dato dall'intersezione del sottospazio con un aperto di  $X$ , se abbiamo che anche il sottospazio è aperto di  $X$ , l'intersezione è aperta: in questo caso ogni aperto del sottospazio è anche aperto di  $X$ .

## 7.2 COMPONENTE CONNESSA E COMPONENTE C.P.A.

Riprendiamo la trattazione delle componenti connesse e **c.p.a.** introdotte nel Capitolo 2.

**DEFINIZIONE 7.2.0.** Una **componente connessa** di  $X$  spazio topologico è uno spazio  $C \subseteq X$  *connesso* tale per cui:

$$C \subseteq A \subseteq X \text{ con } A \text{ connesso} \implies C = A \quad (7.2)$$

### OSSERVAZIONE.

- Le componenti connesse formano una *partizione* di  $X$ .
- Se  $x \in X$  si può definire la componente connessa che contiene  $x$ :

$$C(x) = \bigcup \{C \subseteq X \mid x \in C, C \text{ connesso}\} \quad (7.3)$$

item Le componenti connesse possono essere viste come classi di equivalenza per la seguente relazione di equivalenza su  $X$ :

$$x, y \in X \quad x \sim_C y \iff \exists C \subseteq X \text{ connesso} : x, y \in C \quad (7.4)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Innanzitutto mostriamo che la relazione è di equivalenza:

- **RIFLESSIVA:**  $x \sim_C x$  è vero, dato che  $\{x\}$  è sempre un connesso.
- **SIMMETRICA:** ovvia dalla definizione.
- **TRANSITIVA:** Supponiamo  $x \sim_C y$ ,  $y \sim_C z$ . Allora  $\exists C, D \subseteq X$  connessi tale che  $x, y \in C$  e  $y, z \in D$ . Allora  $C \cup D$  contiene sia  $x$  che  $z$ . Inoltre, essendo  $y \in C \cap D \implies C \cap D \neq \emptyset$ , dunque  $C \cup D$  è un connesso: vale  $x \sim_C z$ .

Mostriamo che le classi di equivalenza sono le componenti connesse per  $x$ .

$\subseteq$ ) Se  $C \subseteq X$  è una componente connessa, allora  $\forall x, y \in C$  si ha  $x \sim_C y$ , cioè  $C$  è interamente contenuta in  $C_0 = [x] = [y]$  classe di equivalenza per  $\sim_C$ :  $C \subseteq C_0$ .

$\supseteq$ ) Sia  $z \in C_0$  classe di equivalenza e sia  $x \in C$  componente connessa. Allora:  $x \sim_C z \implies \exists T \subseteq X$  connesso :  $x, z \in T$ .

Consideriamo  $C \cup T$ .  $C$  e  $T$  sono connessi,  $x \in C \cap T \implies C \cap T \neq \emptyset$ :  $C \cup T$  è ancora connessa. In quanto  $C$  è componente connessa, dato che  $C \subseteq C \cup T$  per definizione segue che  $C = C \cup T$ , cioè  $T \subseteq C$ . Ma allora  $z \in C$  e segue che  $C_0 \subseteq C$ .

□

**DEFINIZIONE 7.2.1.** Una **componente c.p.a.** di  $X$  è una classe di equivalenza per la relazione  $\sim_A$  così definita:

$$x, y \in X \quad x \sim_A y \iff \exists \alpha \text{ CAMMINO IN } X : \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \quad (7.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Mostriamo che sia una relazione di equivalenza:

- **RIFLESSIVA:**  $x \sim_A x$  è vero, dato che esiste sempre il **cammino costante** nel punto  $x$ :

$$\begin{array}{ccc} c_x : I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & x \end{array} \quad (7.6)$$

- **SIMMETRICA:** se  $x \sim_A y$  sappiamo che  $\exists \alpha : I \longrightarrow X$  tale per cui  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(1) = y$ . Possiamo definire il **cammino inverso**:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\alpha} : I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \alpha(1-t) \end{array} \quad (7.7)$$

◇  $\bar{\alpha}$  è continuo, perché composizione di applicazioni continue:

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \xrightarrow{\alpha} X \\ t & \longmapsto & 1-t \longmapsto \alpha(1-t) \end{array}$$

◇  $\bar{\alpha}(0) = \alpha(1) = y$ ,  $\bar{\alpha}(1) = \alpha(0) = x$ .

Allora il cammino  $\bar{\alpha}$  definisce  $y \sim_A x$ .

- **TRANSITIVA:** Supponiamo  $x \sim_A y$ ,  $y \sim_A z$ . Allora  $\exists \alpha, \beta : I \longrightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(1) = y$ ,  $\beta(0) = y$ ,  $\beta(1) = z$ . Usando la **giunzione di cammini**:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (7.8)$$

In particolare:

$$\begin{cases} (\alpha * \beta)(0) = \alpha(0) \\ (\alpha * \beta)(1) = \beta(1) \end{cases}$$

Poichè  $\alpha * \beta$  soddisfa le ipotesi del lemma di incollamento, essa è continua e collega con un cammino unico  $x$  e  $z$ , dunque vale  $x \sim_A z$ .

□

#### OSSERVAZIONE.

1. Le componenti **c.p.a.** formano una partizione di  $X$
2. Sia  $C \subseteq X$  un sottospazio **c.p.a.** per cui vale che  $C \subseteq A \subseteq X$  con  $A$  **c.p.a.**  $\implies C = A$ , allora  $C$  è una componente **c.p.a.**.
3. In generale le componenti **c.p.a.** non sono né aperte né chiuse.
4. Se  $A$  è una componente **c.p.a.**, allora  $A$  è **c.p.a.** e dunque *connessa*:  $A$  è allora interamente contenuta in una componente connessa, cioè le componenti connesse sono unioni di componenti **c.p.a.**.

**DIMOSTRAZIONE. INSERIRE DIM PUNTO 2**

□

**ESEMPIO.** Ricordiamo l'esempio della *pulce e il pettine*, cioè lo spazio  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  descritto da:

$$\begin{aligned} X &= Y \cup \{p\} \\ Y &= (I \times \{0\}) \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} (\{r\} \times I) \\ p &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

Questo spazio  $X$  è connesso, non **c.p.a.**: infatti, le componenti **c.p.a.** sono due,  $Y$  e  $\{p\}$ .

### 7.3 OMOTOPIA TRA FUNZIONI CONTINUE

**INTUITIVAMENTE...** Dati due spazi topologici  $X, Y$  e due funzioni  $f, g : X \longrightarrow Y$ , si ha un'**omotopia** tra le due funzioni se una funzione può essere “*deformata in modo continuo*” nell'altra (e viceversa).

Per far ciò vogliamo trovare una famiglia di funzioni  $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$  tale che ogni funzione  $f_t : X \longrightarrow Y$  sia continua e vari “*con continuità*” al variare di  $t \in [0, 1]$  fra  $f_0 = f$  e  $f_1 = g$ .

**DEFINIZIONE 7.3.0.** Due funzioni continue  $f, g : X \longrightarrow Y$  si dicono **omotope** se  $\exists F : X \times I \longrightarrow Y$  continua tale che:

$$F(x, 0) = f(x) \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X \quad (7.9)$$

La funzione  $F$  è detta **omotopia** tra  $f$  e  $g$ ; denotiamo che le funzioni sono omotope con  $f \sim g$ .

Inoltre, definiamo gli elementi della famiglia di funzioni  $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$  nel seguente modo:

$$\forall t \quad f_t := F(\bullet, t) : X \longrightarrow Y \quad : f_0 = f, f_1 = g \quad (7.10)$$

**OSSERVAZIONE.** Ricordando la definizione di *segmento* (30, 2.5), la funzione:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \overline{PQ} \\ t &\longmapsto tA + (1-t)B \end{aligned}$$

È biunivoca ed, in particolare, è omeomorfismo.

**ESEMPIO.** Dato un sottospazio  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso, allora spazio topologico  $X$  e per ogni funzione  $f, g : X \longrightarrow Y$  continua, allora  $f$  e  $g$  sono *omotope*.



**DIMOSTRAZIONE.** L'omotopia è:

$$F : X \times I \longrightarrow Y, F(x, t) = (1-t)f(x) + tf(x)$$

- $F$  è ben definita. Se  $x \in X$  abbiamo  $f(x), g(x) \in Y$  convesso: esiste allora  $\overline{f(x)g(x)} \subseteq Y$ , cioè  $(1-t)f(x) + tg(x) \in Y \forall x \in X, t \in I$ .
- $F$  è continua perché composizione di funzioni continue:

$$\begin{aligned} X \times I &\longrightarrow Y \times Y \times I \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto (f(x), g(x), t) \longmapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

- $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ .

□

**OSSERVAZIONE.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  (non necessariamente convesso!) e  $f, g : X \longrightarrow Y$  continua tale che  $\overline{f(x)g(x)} \subseteq Y \forall x \in X$ . Allora  $f$  è omotopa a  $g$  con la stessa omotopia  $F$  definita nel caso di  $Y$  convesso.

**ATTENZIONE!** Nel parlare di omotopie è estremamente importante verificare che siano ben definite! Infatti, prendiamo ad esempio  $Y = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  e le funzioni costanti in  $p$  e in  $q$ , rispettivamente  $f : X \longrightarrow S^1$  e  $g : X \longrightarrow S^1$ .  

$$\begin{array}{ccc} f : X & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & p \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} g : X & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & q \end{array}$$

Considerata  $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x) = (1-t)p + tq$ , essa non è ben definita in  $Y$ : presi due punti della sfera  $S^1$  il segmento non è mai contenuto in essa!

**LEMMA 7.3.0.** Siano  $X, Y$  due spazi topologici. L'omotopia è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da  $X$  a  $Y$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- **RIFLESSIVA:** Sia  $f : X \longrightarrow Y$  continua. Consideriamo:

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

Tale che  $F(x, t) = f(x)$ . Essa è:

- ◇ Continua perché lo è  $f$ .
- ◇  $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x) \forall x \in X$ .

Allora  $f \sim f$ .

- **SIMMETRICA:** Supponiamo  $f \sim g$ , cioè  $\exists F : X \times I \longrightarrow Y$  tale che:

$$F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$$

Consideriamo  $G : X \times I \longrightarrow Y$  tale che  $G(x, t) = F(x, 1-t)$ . Essa è:

- ◇ Continua perché composizione di funzioni continue.
- ◇  $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x), G(x, 1) = F(x, 0) = f(x) \forall x \in X$ .

Allora  $g \sim f$ .

■ TRANSITIVA: Siano  $f, g, h : X \longrightarrow Y$  continue,  $f \sim g$  e  $g \sim h$ , cioè:

$$\begin{aligned} \exists F : X \times I &\longrightarrow Y, \quad G : X \times I \longrightarrow Y \\ F(x, 0) &= f(x) \quad G(x, 0) = g(x) \\ F(x, 1) &= g(x) \quad G(x, 1) = h(x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Consideriamo  $H : X \times I \longrightarrow Y$  :

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x, 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

◇  $H$  è continua per il lemma di incollamento:

\* È ben definita per  $t = \frac{1}{2}$ .

\*  $H$  è continua separatamente su  $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$  e  $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , entrambi chiusi.

◇  $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x) \quad \forall x \in X$ .

Allora  $f \sim h$ .

□

**LEMMA 7.3.1. COMPOSIZIONE DI OMOTOPIE (MANETTI 10.13)**

Siano  $X, Y, Z$  spazi topologici e siano  $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$  continue ed omotope,  $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$  continue ed omotope. Allora  $g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2 : X \longrightarrow Z$  sono omotope:

$$f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2 \implies g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2 \quad (7.11)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo che:

■  $\exists F : X \times I \longrightarrow Y$  continua tale che  $F(x, 0) = f_1(x)$ ,  $F(x, 1) = f_2(x) \quad \forall x \in X$ .

■  $\exists G : Y \times I \longrightarrow Z$  continua tale che  $G(y, 0) = g_1(y)$ ,  $G(y, 1) = g_2(y) \quad \forall y \in Y$ .

Sia  $H : X \times I \longrightarrow Z$  data da  $H(x, t) = G(F(x, t), t)$ .

■  $H$  è continua perché composizione di funzioni continue.

■  $H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_1(x), 0) = g_1(f_1(x)) \quad \forall x \in X$ .

■  $H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = G(f_2(x), 1) = g_2(f_2(x)) \quad \forall x \in X$ .

Allora  $H$  è l'omotopia cercata.

□

## 7.4 EQUIVALENZA OMOTOPICA

**DEFINIZIONE 7.4.0.** Siano  $X, Y$  due spazi topologici. Diciamo che  $X$  e  $Y$  sono **omotopicamente equivalenti**, o che hanno lo stesso **tipo di omotopia**, se esistono due applicazioni continue:

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \longrightarrow X \quad (7.12)$$

Tali che:

$$g \circ f \sim Id_X \quad \text{e} \quad f \circ g \sim Id_Y \quad (7.13)$$

In tal caso  $f$  e  $g$  si dicono **equivalenze omotopiche**.

**OSSERVAZIONE.**

1. Se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi, allora sono anche omotopicamente equivalenti.
2. Consideriamo  $X = \mathbb{R}^n$  in topologia Euclidea e  $Y = \{1 \text{ punto}\}$ . Allora  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti.

**DIMOSTRAZIONE.**

- I L'omotopia è una relazione riflessiva, dunque se abbiamo  $h = k$  e  $h \sim h$ , allora si ha  $h \sim k$ . Nel caso di un isomorfismo, preso  $f$  e la sua inversa  $g$ , possiamo affermare:

$$\begin{cases} g \circ f = Id_X \\ f \circ g = Id_Y \end{cases} \implies \begin{cases} g \circ f \sim Id_X \\ f \circ g \sim Id_Y \end{cases}$$

- II Consideriamo:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y = \{1 \text{ punto}\} & g : Y = \{1 \text{ punto}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n & \\ & \text{punto} \longmapsto g(\text{punto}) = \underline{0} & \end{array} \quad (7.14)$$

$f$  e  $g$  sono continue, inoltre:

$$f \circ g : Y = \{1 \text{ punto}\} \longrightarrow Y = \{1 \text{ punto}\} \implies f \circ g = Id_Y$$

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n & \implies g \circ f = O_{\mathbb{R}^n} (\text{applicazione nulla}) & \\ \underline{x} \longmapsto \underline{0} & & \end{array}$$

Per l'osservazione 1) da  $f \circ g = Id_Y$  a  $f \circ g \sim Id_Y$ .

Abbiamo che  $g \circ f = O_{\mathbb{R}^n}$  è omotopa a  $Id_{\mathbb{R}^n}$ , poiché  $\mathbb{R}^n$  è convesso e due applicazioni continue a valori in  $\mathbb{R}^n$  sono sempre omotope, come dimostrato nell'esempio 7.2, pag. 82. Una di queste, ad esempio, è la seguente:

$$F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\bar{x}, t) = t \cdot \bar{x}$$

- $F$  è continua.
- $F(\bar{x}, 0) = \bar{0} = (g \circ f)(\bar{x})$ .
- $F(\bar{x}, 1) = \bar{x} = Id_{\mathbb{R}^n}(\bar{x})$ .

□

**ATTENZIONE!** Se  $n > 0$ ,  $\mathbb{R}^n$  e  $\{1 \text{ punto}\}$  non sono omeomorfi, dato che non possono essere in corrispondenza biunivoca.

**ESERCIZIO.** Essere omotopicamente equivalenti è una relazione di equivalenza sull'insieme degli spazi topologici.

**DIMOSTRAZIONE.**

- **RIFLESSIVA:**  $X \sim X \iff \exists f, g$  continue per cui  $g \circ f \sim Id_X, f \circ g \sim Id_X$ . Ponendo  $f \equiv Id_X \equiv g$  vale banalmente  $g \circ f = f \circ g = Id_X \sim Id_X$ .
- **SIMMETRICA:** Da  $X \sim Y$  sappiamo che  $\exists f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow X$  continue per cui  $g \circ f \sim Id_X, f \circ g \sim Id_Y$ ; se vogliamo mostrare  $Y \sim X$  dobbiamo cercare

$h : Y \longrightarrow X$ ,  $k : X \longrightarrow Y$  per cui  $k \circ h \sim Id_Y$ ,  $h \circ k \sim Id_X$ . Ponendo  $h \equiv g$  e  $k \equiv h$ , esse soddisfano la richiesta.

■ TRANSITIVA: Da  $X \sim Y$  e  $Y \sim Z$ :

◇  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : Y \longrightarrow X$  continue tali che  $g \circ f \sim Id_X$ ,  $f \circ g \sim Id_Y$ .

◇  $h : Y \longrightarrow Z$ ,  $k : Z \longrightarrow Y$  continue tali che  $k \circ h \sim Id_Y$ ,  $h \circ k \sim Id_Z$ .

Vogliamo trovare  $a : X \longrightarrow Z$ ,  $b : Z \longrightarrow X$  continue tali che  $b \circ a \sim Id_X$ ,  $a \circ b \sim Id_Z$ . Se definiamo:

$$a := h \circ f : X \longrightarrow Z$$

$$b := g \circ k : Z \longrightarrow X$$

Si ha allora:

$$b \circ a = (g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f$$

$$a \circ b = (h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k$$

Dalla composizione di funzioni omotope:

$$\begin{array}{lcl} f \sim f & & \\ k \circ h \sim Id_Y & \Rightarrow & (k \circ h) \circ f \sim Id_Y \circ f \\ & & \Rightarrow g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ Id_Y \circ f \\ & & g \sim g \\ & & g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ Id_Y \circ f \\ & & \parallel \qquad \parallel \\ & & b \circ a \sim g \circ f \\ & & \qquad \wr \\ & & Id_X \end{array}$$

$\Rightarrow b \circ a \sim Id_X$ . In modo analogo:

$$\begin{array}{lcl} k \sim k & & \\ f \circ g \sim Id_Y & \Rightarrow & (f \circ g) \circ k \sim Id_Y \circ k \\ & & \Rightarrow h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ Id_Y \circ k \\ & & h \sim h \\ & & h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ Id_Y \circ k \\ & & \parallel \qquad \parallel \\ & & a \circ b \sim h \circ k \\ & & \qquad \wr \\ & & Id_Z \end{array}$$

$\Rightarrow a \circ b \sim Id_Z$ .

□

**DEFINIZIONE 7.4.1.** Uno spazio topologico è **contraibile** o *contrattile* se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

**ESEMPI.**

1.  $\mathbb{R}^n$  è contraibile: si veda l'osservazione precedente.
2. Dall'esempio seguente, per transitività del tipo di equivalenza, si può affermare che *tutti* i  $\mathbb{R}^n$  sono tutti omotopicamente equivalenti tra di loro.
3. Ogni sottospazio  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *convesso* di è contraibile.
4. Ogni sottospazio  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  *stellato* di è contraibile.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l'esempio 4): l'esempio 3) è automaticamente dimostrato perché un convesso è stellato per ogni suo punto.

Sia  $P_0 \in X$  il punto rispetto al quale  $X$  è stellato e consideriamo l'inclusione del singoletto  $\{P_0\}$  in  $X$  e la funzione costante da  $X$  al punto, entrambe costanti:

$$i : \{P_0\} \hookrightarrow X \quad g : X \longrightarrow \{P_0\}$$

Allora consideriamo:

- $g \circ i : \{P_0\} \longrightarrow \{P_0\}$  è pari all'identità  $Id_{\{P_0\}}$  del singoletto e dunque ovviamente omotopa ad essa.
- $\varphi := i \circ g : X \longrightarrow X$   
 $P \longmapsto P_0$  è una funzione costante. Vogliamo dimostrare che  $\varphi$  è

omotopa a  $Id_X$ . Siccome  $X$  è stellato rispetto a  $P_0$ ,  $\forall P \in X$  si ha  $\overline{PP_0} \subseteq X$ . Allora definiamo la funzione:

$$F : X \times I \longrightarrow X \\ (P, t) \longmapsto tP + (1-t)P_0$$

Ha senso definire ciò proprio perché su  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ci sono le operazioni di somma e prodotto per scalari. Oltre ad essere ben definita per quanto detto prima ( $F(P, t) \in X$ ),  $F$  è continua e  $F(P, 0) = P_0 = \varphi(P)$ ,  $F(P, 1) = P = Id_X(P)$ . Si ha l'omotopia cercata. □

**ESEMPIO.**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è nè convesso, nè stellato.

**LEMMA 7.4.0.** Se  $X$  è contraibile, allora  $X$  è **c.p.a.**.

**DIMOSTRAZIONE.** Con il seguente diagramma ricordiamo le funzioni in gioco con la comprimibilità.

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ \{1 \text{ punto}\} & \xrightarrow{\quad} & X \\ & f \text{ (costante)} & \end{array}$$

Necessariamente dobbiamo mappare  $g$  ad un punto di  $X$ , ad esempio  $x_0$ .

Il singoletto e  $X$  sono in equivalenze omotopica, in particolare da ciò si ha una funzione

costante in  $x_0$ :

$$\varphi := g \circ f : X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto x_0$$

In quanto  $f$  e  $g$  sono in equivalenza omotopica, si ha che  $\varphi \sim Id_X$ , cioè esiste un omotopia fra le due funzioni:

$$F : X \times I \longrightarrow X \text{ continua : } F(x, 0) = \varphi(x) = x_0, F(x, 1) = Id_X(x) = x \quad \forall x \in X$$

Fissato  $x \in X$  sia  $\alpha : I \longrightarrow X$  dato da  $\alpha(t) = F(x, t)$ :

- $\alpha$  è continua perché lo è  $f$ .
- $\alpha(0) = F(x, 0) = x_0, \alpha(1) = F(x, 1) = x$ .

Segue che  $\alpha$  è un cammino da  $x_0$  a un qualunque punto  $x$  in  $X$ , dunque  $X$  è **c.p.a.**.  $\square$

**ESERCIZIO.** Se  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti, allora:

1.  $X$  è **c.p.a.**  $\iff Y$  è **c.p.a.**.
2.  $X$  è connesso  $\iff Y$  è connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $f, g$  le equivalenze omotopiche.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

I Se consideriamo  $f \circ g \sim Id_Y$ , l'omotopia che la definisce è:

$$F : Y \times I \longrightarrow Y : F(y, 0) = f(g(y)), F(y, 1) = y \quad \forall y \in Y$$

Possiamo usare  $F$  per costruire, ad  $y \in Y$  fissato, un arco in  $Y$  che collega  $y$  ad un punto di  $f(X) \subseteq Y$ . Infatti, consideriamo  $\alpha : I \longrightarrow Y$  dato da  $\alpha(t) = F(y, t)$ :

- $\alpha$  è continua perché lo sono  $f$  e  $g$ .
- $\alpha(0) = F(y, 0) = f(g(y)) \in f(X) \subseteq Y, \alpha(1) = F(y, 1) = y$ .

$\implies$ ) Supponendo  $X$  **c.p.a.**, allora  $f(X)$  è **c.p.a.**. Per i ragionamenti appena fatti abbiamo che ogni punto di  $Y$  ha un arco che lo collega ad un punto di  $f(X)$ , dunque per giunzione di cammini anche  $Y$  è **c.p.a.**.

$\impliedby$ ) Supponendo che  $Y$  sia **c.p.a.**, applicando all'equivalenza omotopica  $g : Y \longrightarrow X$  un procedimento analogo a  $\implies$ ) si ha che  $X$  è **c.p.a.**<sup>a</sup>.

II Sia  $X$  connesso (ma non **c.p.a.**, altrimenti ricadiamo nel punto 1) dell'esercizio), mentre supponiamo che  $Y$  si può scrivere come unione disgiunta di due aperti  $A$  e  $B$ :  $Y = A \cup B$ . Ma allora:

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Per continuità di  $f$  anche  $f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(B)$  sono aperti disgiunti in  $X$  connesso. Segue che necessariamente uno dei due deve essere vuoto<sup>b</sup>, ad esempio  $f^{-1}(A) = \emptyset$ , cosicché  $X = f^{-1}(B)$ .

Per i ragionamenti visti nel punto 1) possiamo trovare un arco che collega un qualsiasi punto  $y \in Y$  con  $f(g(y)) \in f(X)$ . In particolare, dato che  $f \circ g$  mappa  $Y$

in  $B$ , si avrà  $f(g(y)) \in B$ : ma allora  $y \in B$  necessariamente, dato che se fosse in  $A$  i due aperti non sarebbero disgiunti! Per l'arbitrarietà di  $y$  segue che  $A = \emptyset$  e dunque anche  $Y$  è connesso.  
Il viceversa è analogo.

□

<sup>a</sup>In realtà è sufficiente, per i ragionamenti visti sopra, dire che se  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti, allora  $X$  è **c.p.a.**  $\iff f(X)$  è **c.p.a.**.

<sup>b</sup>In quanto se non fosse così,  $X$  non sarebbe connesso.

**ESEMPIO.** Le sfere  $S^n \forall n \geq 1$  sono spazi topologici **c.p.a.** non contraibili.

## 7.5 RETRATTI E RETRATTI DI DEFORMAZIONE

**DEFINIZIONE 7.5.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$  un suo sottospazio. Diciamo che  $A$  è un **retrato** di  $X$  se:

$$\exists r : X \longrightarrow A \text{ continua : } r|_A = Id_A, \text{ cioè : } r(a) = a \forall a \in A \quad (7.15)$$

In tal caso  $r$  è detta **retrazione**.

**OSSERVAZIONE.** Se  $r$  è una retrazione, per costruzione è suriettiva, dunque  $A$  **eredita** da  $X$  tutte le proprietà topologiche che si trasmettono per mappe continue (ad esempio connesso, **c.p.a.**, compatto).

### ESEMPLI.

- Dato  $x_0 \in X$ ,  $\{x_0\}$  è sempre un retratto: infatti la mappa costante  $X \longrightarrow (x_0)$  soddisfa banalmente le ipotesi di retrazione.
- Presi  $X = [0, 1]$ ,  $A = (0, 1]$  non è un retratto di  $X$  (non è compatto!).
- Presi  $X = [0, 1]$ ,  $A = \{0, 1\}$  non è un retratto (non è connesso!).

### ESEMPIO. LA RETRAZIONE RADIALE.

Sia  $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $A = S^{n-1} \subseteq X$ . Vogliamo definire una retrazione di  $X$  su  $A$ , cioè una funzione continua  $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow A = S^{n-1}$  tale che  $r|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$ . Definiamo allora la **retrazione radiale**:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ \underline{x} &\longmapsto r(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned} \quad (7.16)$$

- $r$  è ben definita perché  $\underline{x} \neq 0 \implies \|\underline{x}\| \neq 0$ .
- $r$  continua.
- Se  $\underline{x} \in S^{n-1}$ , allora  $\|\underline{x}\| = 1$ , cioè  $\forall \underline{x} \in S^{n-1} \quad r(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \underline{x}$ .

**DEFINIZIONE 7.5.1.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq X$  un suo sottospazio. Diciamo che  $A$  è un **retrato di deformazione** se:

- $r|_A = Id_A$ , cioè  $r$  è un retratto.

- Se  $i : A \hookrightarrow X$  è l'inclusione di  $A$  in  $X$ , allora  $i \circ r : X \longrightarrow X$  è omotopa all'identità di  $X$  ( $i \circ r \sim Id_X$ ).

**OSSERVAZIONE.** Se  $A$  è un retratto di deformazione di  $X$ , allora  $A$  e  $X$  hanno lo stesso tipo di omotopia.

**DIMOSTRAZIONE.**

- $r : X \longrightarrow A$  e  $i : A \hookrightarrow X$  sono continue.
- $i \circ r \sim Id_X$  per ipotesi.
- $r \circ i : A \longrightarrow A$  è la restrizione di  $r$  ad  $A$  che, per ipotesi, è proprio l'identità di  $A$ , cioè  $r \circ i = r|_A = Id_A$  e banalmente sono omotope.

□

**ESEMPIO.** Mostriamo che  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è un retratto di deformazione. Sfruttiamo la retrazione radiale definita a pag. 89:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ \underline{x} &\longmapsto r(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

Considero ora l'inclusione, definendo per comodità  $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$i : S^{n-1} \longrightarrow X$$

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow X \\ \underline{x} &\longmapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

$$\tilde{r} := \begin{aligned} i \circ r : X &\longrightarrow X \\ \underline{x} &\longmapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

Vogliamo che  $\tilde{r}$  sia omotopa a  $Id_X$ . Osserviamo che  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = X$  il segmento da  $\underline{x}$  a  $\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$  non contiene, per costruzione, l'origine: allora esso è interamente contenuto in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = X$ . Dunque, riprendendo l'osservazione di pag. 83 definiamo l'omotopia:

$$\begin{aligned} F : X \times I &\longrightarrow X \\ (\underline{x}, t) &\longmapsto (1-t)\underline{x} + t \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

Infatti  $F$  è ben definita, continua e  $F(\underline{x}, 0) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \tilde{r}(\underline{x})$ ,  $F(\underline{x}, 1) = \underline{x} = Id_X(\underline{x})$ .

**COROLLARIO 7.5.0.** In generale vale che  $S^{n-1}$  è retratto di deformazione di  $\mathbb{R}^n \setminus \{1 \text{ punto}\}$ ; in particolare hanno lo stesso tipo di omotopia.

**INTUITIVAMENTE...** Se l'omeomorfismo permette di deformare uno spazio *mantenendo certe qualità*, l'equivalenza omotopica risulta essere una forma **più debole** di trasformazione, in cui posso sempre deformare uno spazio *perdendo* tuttavia certe qualità.



Riprendendo l'intuizione (non sempre corretta) di omeomorfismo enunciata nel Capitolo 1, possiamo vedere allora l'equivalenza omotopica come una deformazione che *piega* e *allunga* uno spazio senza formare *strappi* ( $f$  continua) ma che *permette* fino ad un certo punto *sovrapposizioni* e *incollamenti* (ad esempio, non posso far sparire alcuni fori né ammassare indiscriminatamente troppi punti).

Dunque, sotto queste condizioni, posso rendere la *retta* un *punto*, mentre il *piano* senza un punto si può trasformare in una *circonferenza*. Allo stesso tempo però, non posso “concentrare” la *sfera* in uno solo *punto*.

Ancor più che con il ragionamento intuitivo sull'omeomorfismo è necessario esercitare **estrema cautela** nell'applicare questa nozione euristica di omotopia.

**DEFINIZIONE 7.5.2.** Un **bouquet di  $n$  circonferenze** è uno spazio topologico ottenuto unendo in un punto  $n$  copie di  $S^1$ .

**ESEMPLI.** ALTRI ESEMPLI DI EQUIVALENZE OMOTOPICHE.

1.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di un *bouquet di due circonferenze*: si può ottenere attraverso una composizione (continua) di retrazioni radiali e lineari.
2.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{n \text{ punti}\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di un *bouquet di  $n$  circonferenze*.
3.  $\mathbb{R}^3 \setminus \{1 \text{ retta}\}$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{1 \text{ punto}\}$  per retrazioni lineari, dunque ha la stessa omotopia di  $S^1$  per i ragionamenti precedenti.
4. Per  $\mathbb{R}^3 \setminus \{2 \text{ rette}\}$  dobbiamo distinguere a seconda della relazione fra le due rette.
  - Se le rette sono **disgiunte**,  $X$  è sempre omeomorfo a:

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} \setminus \{x = y = 1\} = \widetilde{X}$$

Cioè lo spazio  $\mathbb{R}^3$  privato di due rette perpendicolari al piano e distinte. Considerato ora il piano  $Y = \{\text{piano } xy\} \setminus \{(0,0), (1,1)\}$ , questo risulta un retrato di deformazione di  $\widetilde{X}$  con retrazione:

$$r : \begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \longrightarrow & Y \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, 0) \end{array}$$

Infatti la funzione è sempre ben definita e continua e, considerata la restrizione di  $r$  ad  $Y$ , segue che banalmente che è l'identità di  $Y$  in quanto tutti i punti di  $Y$  hanno già la forma  $(x, y, 0)$ . Guardando invece  $\widetilde{r} = i \circ r$  con  $i : Y \hookrightarrow \widetilde{X}$ , un'omotopia con  $Id_{\widetilde{X}}$  è:

$$F : \widetilde{X} \times I \longrightarrow \widetilde{X} : F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$$

Infatti  $F$  è banalmente ben definita continua, con  $F(\underline{x}, 0) = (x, y, 0) = \widetilde{r}(\underline{x})$  e  $F(\underline{x}, 1) = (x, y, z) = Id_{\widetilde{X}}(\underline{x})$ .

Segue che  $\widetilde{X}$ , e dunque anche  $X$  per omeomorfismo, ha la stessa omotopia di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$  e di un *bouquet di due circonferenze*.

- Se le due rette sono incidenti, a meno di omeomorfismi si intersecano nell'origine. Consideriamo dunque  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{r_1 \cup r_2\}$  e lo spazio  $A = S^2 \setminus$

$\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ . Se prendiamo la retrazione:

$$\begin{array}{ccc} r : X & \longrightarrow & A \\ \underline{x} & \longmapsto & \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{array}.$$

e l'omotopia:

$$\widetilde{r} := \begin{array}{ccc} i \circ r : X & \longrightarrow & X \\ \underline{x} & \longmapsto & \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{array}$$

Si verifica in modo analogo a come visto nel caso della sfera e dello spazio privato dell'origine (esempio a pagina 7.6), trattando con una *retrazione radiale* ben definita e la sua omotopia nota, che  $A$  è retracts di deformazione di  $X$ . Segue allora che hanno lo stesso tipo di omotopia.

# IL GRUPPO FONDAMENTALE

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 8.1 OMOTOPIE FRA CAMMINI

Ove non specificato diversamente, useremo  $I$  per indicare l'intervallo  $[0, 1]$ .

**DEFINIZIONE 8.1.0.** Siano  $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$  due cammini da  $a$  a  $b$ , cioè con *stessi estremi*.

Allora  $\alpha \beta$  sono **cammini omotopi** se  $\exists F : I \times I \longrightarrow X$  tale che:

$$\begin{cases} F(t, 0) = \alpha(t) \\ F(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \text{ è omotopia tra } \alpha \text{ e } \beta$$

$$\begin{cases} F(0, s) = a \\ F(1, s) = b \end{cases} \quad \forall s \in I \text{ } F(\bullet, s) \text{ è sempre un cammino tra } a \text{ e } b$$
(8.1)

$F$  è detta **omotopia di cammini** o **omotopia a estremi fissi**.

**DEFINIZIONE 8.1.1.** Indichiamo con  $\Omega(X; a, b)$  l'insieme dei cammini in  $X$  da  $a$  a  $b$ .

**OSSERVAZIONE.** L'omotopia di cammini è una relazione di equivalenza su  $\Omega(X; a, b)$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- RIFLESSIVA:  $\alpha \sim \alpha$ ?. Presa  $F(t, s) = \alpha(t)$ , essa è ben definita, continua e:

$$F(t, 0) = \alpha(t), F(t, 1) = \alpha(t), F(0, s) = \alpha(0) = a, F(1, s) = \alpha(1) = b$$

Cioè è omotopia di cammini tra  $\alpha$  e se stessa.

- **SIMMETRICA:** Da  $\alpha \sim \beta$  sappiamo che esiste  $F$  omotopia di cammini per cui:

$$F(t, 0) = \alpha(t), F(t, 1) = \beta(t), F(0, s) = a, F(1, s) = b$$

Per avere  $\beta \sim \alpha$ , basta prendere  $\widetilde{F}(t, s) = F(t, 1 - s)$ : essa è ben definita, continua e:

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(t, 0) &= F(t, 1) = \beta(t), \quad \widetilde{F}(t, 1) = F(t, 0) = \alpha(t) \\ \widetilde{F}(0, s) &= F(0, s) = a, \quad \widetilde{F}(1, s) = F(1, s) = b\end{aligned}$$

Cioè è omotopia di cammini tra  $\beta$  e  $\alpha$ .

- **TRANSITIVA:** Da  $\alpha \sim \beta$  abbiamo:

$$\begin{cases} F(t, 0) = \alpha(t) \\ F(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \begin{cases} F(0, s) = a \\ F(1, s) = b \end{cases}$$

Mentre da  $\beta \sim \gamma$ :

$$\begin{cases} G(t, 0) = \beta(t) \\ G(t, 1) = \gamma(t) \end{cases} \quad \begin{cases} G(0, s) = a \\ G(1, s) = b \end{cases}$$

Definita allora la seguente funzione:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(t, 2s - 1) & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Essa è ben definita, continua per il lemma di incollamento e tale per cui:

$$\begin{aligned}H(t, 0) &= F(t, 0) = \alpha(t), \quad H(t, 1) = G(t, 1) = \gamma(t) \\ H(0, s) &= a, \quad H(1, s) = b\end{aligned}$$

Cioè è omotopia di cammini tra  $\alpha$  e  $\gamma$ .

□

**RICORDIAMO...** Abbiamo già definito due “operazioni” fra insiemi di cammini, senza averle necessariamente formalizzate:

- **PRODOTTO DI CAMMINI:**  $\Omega(X; a, b) \times \Omega(X; b, c) \longrightarrow \Omega(X; a, c)$   
 $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha * \beta$
- **Inversione di cammini:**  $\Omega(X; a, b) \longrightarrow \Omega(X; b, a)$   
 $\alpha \longmapsto \overline{\alpha}$

**OSSERVAZIONE.** Si ha  $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ . Infatti:

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1 - t) \implies \overline{\overline{\alpha}}(t) = \overline{\alpha}(1 - t) = \alpha(t)$$

**LEMMA 8.1.0.** COMPOSIZIONI DI OMOTOPIE DI CAMMINI (KOSNIOWSKI, 14.2)

Dati  $\alpha, \alpha' \in \Omega(X; a, b)$  e  $\beta, \beta' \in \Omega(X; b, c)$ , parlando in termini di omotopie di cammini:

$$\alpha \sim \alpha' \text{ e } \beta \sim \beta' \implies \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \quad (8.2)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Esistono  $F, G : I \times I \longrightarrow X$  tali che:

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t) & F(0, s) &= a \\ F(t, 1) &= \alpha'(t) & F(1, s) &= b \\ G(t, 0) &= \beta(t) & G(0, s) &= b \\ G(t, 1) &= \beta'(t) & G(1, s) &= c \end{aligned} \quad \forall t, s \in I$$

Consideriamo  $H : I \times I \longrightarrow X$  data da:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t-1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- $H$  è ben definita per  $t = \frac{1}{2}$
- $H$  è continua per il lemma di incollamento, essendo definito sui chiusi  $[0, \frac{1}{2}] \times I$  e  $[\frac{1}{2}, 1] \times I$  è continua su di essi.
- $H(t, 0) = (\alpha * \beta)(t)$
- $H(t, 1) = (\alpha' * \beta')(t)$  } =  $\forall t \in I$  è omotopia
- $H(0, s) = F(0, 0) = a$
- $H(1, s) = G(1, 0) = c$  } =  $\forall s \in I$  ha estremi fissi

$H$  è l'omotopia a estremi fissi cercata. □

**LEMMA 8.1.1.** CAMBIAMENTO DI PARAMETRI (MANETTI, 11.3)

Sia  $\alpha : I \longrightarrow X$  un cammino e  $\varphi : I \longrightarrow I$  una funzione continua tale che  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(1) = 1$ . Allora  $\alpha \circ \varphi \sim \alpha$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $F : I \times I \longrightarrow X$  data da  $F(t, s) = \alpha(s\varphi(t) + (1-s)t)$ .

- $s\varphi(t) + (1-s)t$  è una combinazione lineare che è contenuta in  $I \subseteq \mathbb{R} \forall t, s \in I$  per convessità dell'intervallo  $I$ , da cui segue che  $F$  è ben definita.
- $F$  continua perché composizione di funzioni continue.
- $F(t, 0) = \alpha(t)$
- $F(t, 1) = \alpha(\varphi(t))$
- $F(0, s) = \alpha(0)$
- $F(1, s) = \alpha(s + 1 - s) = \alpha(1)$

$H$  è l'omotopia a estremi fissi cercata tra  $\alpha$  e  $\alpha \circ \varphi$ . □

**DEFINIZIONE 8.1.2.** Il **cammino costante**  $C_a$  nel punto  $a$  è un cammino che non si sposta mai da esso, cioè è descritto da una funzione costante nel punto:

$$\begin{aligned} C_a : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto a \end{aligned} \quad (8.3)$$

**PROPOSIZIONE 8.1.0.** (MANETTI, 11.4 E 11.6)

Sia  $X$  spazio topologico e si considerino i cammini:

$$\alpha \in \Omega(X; a, b) \quad \beta \in \Omega(X; b, c) \quad \gamma \in \Omega(X; c, d)$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. ASSOCIATIVITÀ:  $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$ .
2. RAPPORTO COI CAMMINI COSTANTI:  $C_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * C_b$ .
3. INVERSO:  $\alpha * \bar{\alpha} \sim C_a$  e  $\bar{\alpha} * \alpha \sim C_a$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

I Scriviamo i due cammini:

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \beta(4t-1) & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$((\alpha * (\beta * \gamma)))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(4t-2) & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma(2t-3) & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

I due cammini differiscono per una *riparametrizzazione*  $\phi : I \longrightarrow I$  di  $\alpha * (\beta * \gamma)$  definita in questo modo:

$$\begin{cases} 2s = 4t \\ 4s - 2 = 4t - 2 \\ 4s - 3 = 4t - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} s = 2t & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ s = t + \frac{1}{4} & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ s = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 2t & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ t + \frac{1}{4} & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

- $\phi$  è ben definita e continua per lemma di incollamento.
- $\phi(0) = 0$  e  $\phi(1) = 1$ .
- $((\alpha * (\beta * \gamma)))(\phi(t)) = ((\alpha * \beta) * \gamma)(t)$ .

Per il lemma del cambiamento di variabile i due cammini sono omotopi.

II Scriviamo i due cammini:

$$(C_a * \alpha)(t) = \begin{cases} a & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$(\alpha * C_b)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ b & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

I due cammini differiscono per delle *riparametrizzazioni* di  $\alpha$   $\phi : I \longrightarrow I$  e

$\psi : I \longrightarrow I$  definite così:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2t-1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} 2t & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

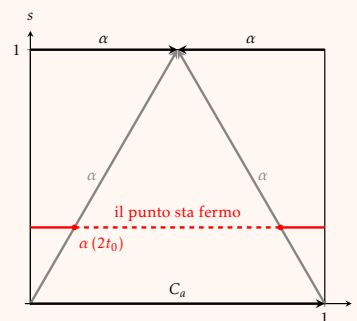
- $\phi$  e  $\psi$  son ben definite e continue per lemma di incollamento.
- $\phi(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$  e  $\phi(1) = 1$ ,  $\psi(1) = 1$ .
- $(C_a * \alpha)(t) = \alpha(\phi(t))$  e  $(\alpha * C_b)(t) = \alpha(\psi(t))$ .

Per il lemma del cambiamento di variabile i due cammini sono entrambi omotopi a  $\alpha$ , si hanno quindi le equivalenze omotopiche cercate.

III È sufficiente dimostrare che  $\alpha * \bar{\alpha} \sim C_a$ . Possiamo immaginare di rappresentare tutte le parametrizzazioni di cammini definiti da un omotopia sul piano  $I \times I$ , con  $t$  sulle ascisse e  $s$  sulle ordinate.

In questo modo i punti  $a$  di inizio e  $b$  di fine sono rappresentati dai segmenti verticali in  $t = 0$  e in  $t = 1$ , mentre i cammini  $\alpha$  di inizio e  $\beta$  fine sono segmenti orizzontali in  $s = 0$  e  $s = 1$ . Dunque, all'interno di  $I \times I$  possiamo trovare (fissato  $s$ ) tutti i cammini  $F(\bullet, s)$  di estremi  $a$  e  $b$  compresi tra i cammini  $\alpha$  e  $\beta$ : essi sono rappresentati da segmenti orizzontali.

Nel nostro caso, possiamo considerare il punto  $a$  di inizio e il punto  $b$  di fine del cammino  $\alpha$ . Nei due cammini "esterni" o il cammino non si sposta mai da  $a$  ( $C_a$ ), oppure percorre tutto il cammino  $\alpha$  fino a  $b$  (che è raggiunto per  $t = \frac{1}{2}$ ) e torna poi indietro per lo stesso cammino ( $\alpha * \bar{\alpha}$ ). Tuttavia, dobbiamo considerare anche cammini che percorrono  $\alpha$  fino ad un punto  $c$  intermedio fra  $a$  e  $b$ , stanno fermi in  $c$  per poi tornare indietro. Definiamo la seguente omotopia:



$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s) & \text{se } \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \alpha(2-2t) & \text{se } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (8.4)$$

Verifichiamo che lo sia:

- $F$  è ben definita grazie alla ben definizione di  $\alpha$ : tutti i valori di  $F$  risultano interni ad  $X$ .
- $F$  è continua per il lemma di incollamento.
- $F(t, 0) = \alpha(0) = C_a(t)$ ,  $F(t, 1) = \alpha * \bar{\alpha}(t)$  e  $F(0, s) = a = F(1, s)$ .

In questo modo teniamo conto della possibilità del cammino di "fermarsi" per un certo tempo in un particolare punto  $\alpha(s)$ .

□

**DEFINIZIONE 8.2.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico e fissiamo un punto  $x_0 \in X$ . I **lacci** o **cappi** sono i cammini chiusi in  $X$ , cioè tutti i cammini il cui punto iniziale e finale coincidono. Il loro insieme si denota dunque come  $\Omega(X; x_0, x_0)$ .

**OSSERVAZIONE.** Possiamo notare come  $\forall \alpha, \beta \in \Omega(X; x_0, x_0)$  si ha:

$$\alpha * \beta \in \Omega(X; x_0, x_0) \quad \bar{\alpha} \in \Omega(X; x_0, x_0)$$

Allora, se quozientiamo l'insieme dei lacci rispetto alla relazione di equivalenza data dall'omotopia di cammini, esso possiede una struttura di *gruppo*:

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega(X; x_0, x_0)}{\sim} \quad (8.5)$$

Preso un laccio  $\alpha$ , indichiamo la sua classe di equivalenza in  $\pi_1(X, x_0)$  con  $[\alpha]$ . Allora:

- Il prodotto di cammini dà un'operazione ben definita su  $\pi_1(X, x_0)$  grazie al lemma 8.1 (Kosniowski, 14.2):

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta] \quad (8.6)$$

- L'operazione appena definita è associativa per il primo punto della proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6).
- $[C_{x_0}]$  è l'elemento neutro, sempre per la proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6):

$$[C_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] \cdot [C_{x_0}] \quad (8.7)$$

- $[\bar{\alpha}]$  è l'inverso di  $[\alpha]$ , cioè  $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$ , per la proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6):

$$[\bar{\alpha}] \cdot [\alpha] = [C_{x_0}] = [\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] \quad (8.8)$$

**ATTENZIONE!** La proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6) ci garantisce che la composizione di cammini omotopi è omotopa ( $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$ ), dunque possiamo parlare della *classe*  $[\alpha * \beta * \gamma]$ . Tuttavia, al di fuori del quoziente non ha senso  $\alpha * \beta * \gamma$ ! L'ordine con cui congiungiamo i cammini dà luogo a due cammini certamente omotopi, *ma non uguali*, dato che la parametrizzazione varia<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Questo si vede chiaramente nella dimostrazione della proposizione.

**DEFINIZIONE 8.2.1.** Dato uno spazio topologico  $X$  e fissato un punto (detto **punto base**)  $x_0$ , il **gruppo fondamentale** con punto base  $x_0$  è il gruppo  $\pi_1(X, x_0)$  definito nell'osservazione precedente. Si chiama anche **primo gruppo fondamentale** o **gruppo di Poincaré**.

### 8.2.1 Dipendenza dal punto base

**TEOREMA 8.2.0.** Il gruppo fondamentale dipende *solo* dalla componente *c.p.a.* contenente il punto base  $x$ .

In altre parole, se  $x, y \in X$  appartengono alla stessa componente **c.p.a.**, preso un arco  $\gamma$  da  $x$  a  $y$  e costruito:

$$\begin{aligned} \gamma_{\#} : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\longmapsto [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{aligned} \quad (8.9)$$



È ben definito ed è un *isomorfismo* di gruppi, cioè:

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y) \quad (8.10)$$

**RICORDIAMO...** Una funzione fra due gruppi  $f : (G, \cdot_G) \longrightarrow (H, \cdot_H)$  è un **omomorfismo di gruppi** se:

$$f(a \cdot_G b) = f(a) \cdot_H f(b) \quad \forall a, b \in G$$

Se  $f$  è *biettiva*, allora parliamo di **isomorfismo di gruppi**.

**DIMOSTRAZIONE.**

- $\gamma_\#$  è ben definito in quanto la classe  $[\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$  è ben definita per la composizione dei cammini ed è la classe di equivalenza di un coppia di  $y$  ( $\bar{\gamma}$  parte da  $y$  e raggiunge  $x$ , con  $\alpha$  compie un cammino chiuso in  $x$  per tornare al punto di partenza  $y$ ).
- $\gamma_\#$  è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} \gamma_\#([\alpha] * [\beta]) &= \gamma_\#([\alpha * \beta]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * C_x * \beta * \gamma] \\ &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \cdot [\bar{\gamma} * \beta * \gamma] = \gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta]) \end{aligned}$$

Infatti, anche l'elemento neutro viene mappato all'elemento neutro del codominio:

$$\gamma_\#([C_x]) = [\bar{\gamma} * C_x * \gamma] = [\bar{\gamma} * \gamma] = [C_y]$$

- Possiamo associare in modo analogo al cammino  $\bar{\gamma}$  il cammino:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_\# : \pi_1(X, y) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}] \end{aligned}$$

In modo assolutamente analogo a come visto sopra, si vede che è un omeomorfismo; verifichiamo ora che  $\gamma_\#$  e  $\bar{\gamma}_\#$  siano l'uno l'inverso dell'altro:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_\#(\gamma_\#([\alpha])) &= \bar{\gamma}_\#([\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]) = [\gamma * \bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma}] = [C_x * \alpha * C_x] = [\alpha] \\ \gamma_\#(\bar{\gamma}_\#([\alpha])) &= \gamma_\#([\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]) = [\bar{\gamma} * \gamma * \alpha * \bar{\gamma} * \gamma] = [C_y * \alpha * C_y] = [\alpha] \end{aligned}$$

Segue che allora  $\gamma_\#$  è biettiva. □

**OSSERVAZIONE.**

- Se due punti  $x_1$  e  $x_2$  stanno in componenti connesse per archi diverse, *non* c'è alcuna relazione tra  $\pi_1(X, x_1)$  e  $\pi_1(X, x_2)$ .
- Se  $X$  è **c.p.a.**, il suo gruppo fondamentale è *unico* a meno di isomorfismo.

**ESEMPIO.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  un sottospazio convesso e  $y_0 \in Y$ . Allora  $\pi_1(Y, y_0) = 0$  è **banale**; in particolare, allora  $\pi_1(\mathbb{R}^n, y_0)$  è banale per ogni  $n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$ . Vogliamo mostrare che  $[\alpha] = [C_{y_0}]$ , cioè che  $\alpha \sim C_{y_0}$ . Consideriamo  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tale che:

$$F(t, s) = s(\alpha(t)) + (1-s)y_0$$

- $F$  risulta ben definita: è una combinazione convessa al variare di  $s \in [0, 1]$  tra  $\alpha(t) \in Y$  (per  $t$  fissato) e  $y_0 \in Y$ .
- $F$  è continua perché composizione di applicazioni continue.
- $F(t, 0) = y_0 = C_{y_0}(t)$ ,  $F(t, 1) = \alpha(t)$ .
- $F(0, s) = s\alpha(0) + (1-s)y_0 = sy_0 + (1-s)y_0 = y_0$ ,  $F(1, s) = s\alpha(1) + (1-s)y_0 = sy_0 + (1-s)y_0 = y_0$ .

Segue che  $F$  è un'omotopia tra  $C_{y_0}$  e  $\alpha$ , dunque segue la tesi.  $\square$

**DEFINIZIONE 8.2.2.** Uno spazio topologico  $X$  è **semplicemente connesso** se è **c.p.a.** e ha gruppo fondamentale **banale**.

**ESEMPI.**

- $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso.
- Ogni convesso di  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso.

### 8.2.2 Mappe continue e omomorfismo di gruppi

**NOTAZIONE** Indichiamo con  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  una funzione continua  $f : X \longrightarrow Y$  tale che  $f(x_0) = y_0$ .

**OSSERVAZIONE.** Consideriamo  $f : X \longrightarrow Y$  continua e due cammini  $\alpha$  in  $X$  da  $a$  a  $b$  e  $\beta$  in  $X$  da  $b$  a  $c$ .

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\alpha} & X \xrightarrow{f} Y \\ & \searrow & \uparrow f \circ \alpha \\ & & I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\beta} & X \xrightarrow{f} Y \\ & \searrow & \uparrow f \circ \beta \\ & & I \end{array}$$

Si ha che:

1.  $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ .
2.  $f \circ \bar{\alpha} = f \circ \alpha$ .
3. Se  $\alpha \sim \alpha'$ , allora  $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ .

**PROPOSIZIONE 8.2.0.** Dati  $X, Y$  spazi topologici, due punti  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  e una funzione  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  continua, si può definire associare un omomorfismo tra i corrispettivi gruppi fondamentali:

$$\begin{array}{ccc} f_* : \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] & \longmapsto & [f \circ \alpha] \end{array} \quad (8.11)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

- $f_*$  è ben definita: infatti,  $f \circ \alpha \in \Omega(Y; y_0, y_0)$  e se  $[a] = [a']$ ,  $\alpha \sim \alpha'$ . Per il punto 3 dell'osservazione precedente, si ha  $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ , cioè  $[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha']$ .
- $f_*$  è un omeomorfismo di gruppi: infatti, presi  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ , si ha:

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] \cdot [\beta]) &= f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] \stackrel{1}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = \\ &= f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta]) \end{aligned}$$

$$\text{Inoltre: } f_*([C_{x_0}]) = [f \circ C_{x_0}] = [C_{y_0}].$$

□

## 8.3 DIGRESSIONE: CATEGORIE

**DEFINIZIONE 8.3.0.** Una **categoria**  $\mathcal{C}$  consiste di:

- Una **classe**  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , i cui elementi sono dati **oggetti** di  $\mathcal{C}$ .
- Per ogni *coppia* di oggetti  $X$  e  $Y$  di  $\mathcal{C}$  una classe  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , i cui elementi sono detti **morfismi** da  $X$  a  $Y$ .
- Per ogni *terna* di oggetti  $X, Y, Z$  un'operazione binaria detta **composizione** di morfismi:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned} \quad (8.12)$$

Tali che questi oggetti soddisfino i seguenti assiomi:

1. **ASSOCIATIVITÀ:** Per ogni  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ,  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$  si ha:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ in } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \quad (8.13)$$

2. **IDENTITÀ:** Per ogni oggetto  $X$  esiste un **morfismo identità**  $Id_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  tale che:

$$\begin{aligned} f \circ Id_X &= f & Id_X \circ g &= g \\ \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & & \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) & \end{aligned} \quad (8.14)$$

Si dimostra che  $Id_X$  è unico per ogni oggetto  $X$ .

**DEFINIZIONE 8.3.1.** Un morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  si dice **isomorfismo** se:

$$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \text{ tale che } g \circ f = Id_X \quad f \circ g = Id_Y \quad (8.15)$$

In tal caso  $g$  è unico e si pone  $g = f^{-1}$ .

Inoltre, due oggetti  $X$  e  $Y$  sono **isomorfi** se  $\exists f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  isomorfismo.

**ESEMPLI.** ESEMPLI DI CATEGORIE

- **SET**    **Oggetti:** insiemi.  
          **Morfismi:** applicazioni tra insiemi.
- **GR** <sup>a</sup>    **Oggetti:** gruppi.  
          **Morfismi:** omomorfismi di gruppi.

- **VECT** $_{\mathbb{K}}$  su campo  $\mathbb{K}$     **Oggetti:** spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ .  
**Morfismi:** applicazioni lineari.
- **TOP**    **Oggetti:** spazi topologici.  
**Morfismi:** applicazioni continue.
- **TOP\***    **Oggetti:** spazi topologici con punto base  $(X, x_0)$ .  
**Morfismi:** applicazione continue  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ .
- **KTOP**    **Oggetti:** spazi topologici.  
**Morfismi:** classi di omotopia di funzioni continue da  $X$  a  $Y$ .<sup>b</sup>
- Preso uno spazio topologico  $X$ , si può considerare la categoria  $\mathcal{C}$  seguente:  
**Oggetti:** aperti di  $X$ .  
**Morfismi:** inclusioni.  
Nello specifico, se  $U, V \subseteq X$  aperti, allora:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } U \not\subseteq V \\ \{i\} & \text{se } U \xhookrightarrow{i} V \end{cases}$$

<sup>a</sup>Indicata anche con **GRP**.

<sup>b</sup>La composizione in **KTOP** è garantita dalla composizione di omotopie, cioè dal lemma 7.3 (Manetti 10.13).

**ATTENZIONE!** Come si evince dall'esempio 6, i morfismi delle categorie possono anche *non* essere funzioni!

### 8.3.1 Funtori

**DEFINIZIONE 8.3.2.** Siano  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  due categorie. Un **funtore**  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  consiste di due funzioni:

1. Una *funzione sugli oggetti*  $F : \text{Ob}(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ .  

$$x \longmapsto F(x)$$
2. Una *funzione sui morfismi* che, a seconda della sua costruzione, definisce due tipi di funtori:
  - Parliamo di **funtore covariante**<sup>a</sup> se, per ogni coppia di oggetti  $X, Y$  in  $\mathcal{A}$ , si ha un'applicazione:

$$\begin{aligned} F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned} \quad (8.16)$$

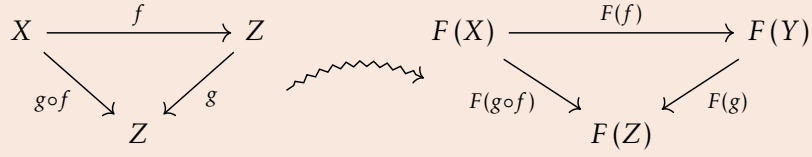
Che preserva i morfismi identità e la composizione:

◇ IDENTITÀ:  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$

$$F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)} \quad (8.17)$$

◇ COMPOSIZIONE:  $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (8.18)$$



- Parliamo di **funtore controvariante** se, per ogni coppia di oggetti  $X, Y$  in  $\mathcal{A}$ , si ha un'applicazione:

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(Y), F(X)) \quad (8.19)$$

$$f \longmapsto F(f)$$

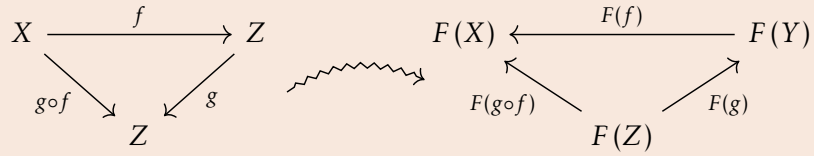
Che preserva i morfismi identità, mentre inverte la direzione della composizione:

◇ IDENTITÀ:  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ :

$$F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)} \quad (8.20)$$

◇ COMPOSIZIONE:  $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$ :

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \quad (8.21)$$



<sup>a</sup>In letteratura, il *funtore covariante* spesso viene indicato anche solo come *funtore*.

**OSSERVAZIONE.** Un funtore porta:

- Isomorfismi in isomorfismi,
- Oggetti isomorfi in oggetti isomorfi.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  è isomorfismo in  $\mathcal{A}$ ,  $\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X)$  tale che  $g = f^{-1}$ , cioè  $g \circ f = \text{Id}_X$ ,  $f \circ g = \text{Id}_Y$ . Ma allora, se  $F$  è covariante:

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$$

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\text{Id}_Y) = \text{Id}_{F(Y)}$$

$F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(X), F(Y))$  è isomorfismo con inversa  $F(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(Y), F(X))$ . Se  $F$  è controvariante:

$$F(g) \circ F(f) = F(f \circ g) = F(\text{Id}_Y) = \text{Id}_{F(Y)}$$

$$F(f) \circ F(g) = F(g \circ f) = F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$$

$F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(Y), F(X))$  è isomorfismo con inversa  $F(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(X), F(Y))$ . □

**ESEMPI.**

$$1. \quad F : \underline{\mathbf{GR}} \longrightarrow \underline{\mathbf{SET}}$$

**Oggetti:**  $(G, \cdot) \mapsto G$

**Morfismi:**  $f : G \longrightarrow H \mapsto f : G \longrightarrow H$

Questo *funtore covariante* si chiama anche **funtore dimenticante**, in quanto associa un gruppo all'insieme su cui si basa.

$$F : \underline{\mathbf{TOP}} \longrightarrow \underline{\mathbf{SET}}$$

**Oggetti:**  $(G, \mathcal{T}) \mapsto G$

**Morfismi:**  $f : G \longrightarrow H \mapsto f : G \longrightarrow H$

In modo analogo, si definisce il funtore dimenticante fra **TOP** e **SET**, che associa lo spazio topologico all'insieme sui cui abbiamo definito la topologia.

$$2. \quad F : \underline{\mathbf{VECT}}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \underline{\mathbf{VECT}}_{\mathbb{K}}$$

**Oggetti:**  $V \mapsto V^* = \{ \text{applicazioni lineari } V \longrightarrow \mathbb{K} \}$

**Morfismi:**  $f : V \longrightarrow W \text{ lineare} \mapsto f^t : W^* \longrightarrow V^*$   
 $\varphi \longmapsto \varphi \circ f$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$$

Questo *funtore controvariante* è chiamata **funzione trasposta**.

$$3. \quad F : \underline{\mathbf{TOP}}^* \longrightarrow \underline{\mathbf{GR}}$$

**Oggetti:**  $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$

**Morfismi:**  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \mapsto f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$   
 $[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$

Questo funtore *covariante* si basa sull'omomorfismo tra gruppi fondamentali indotto da  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la funtorialità dell'ultimo esempio.

■ **IDENTITÀ:**  $\forall (X, x_0) \in \text{Ob}(\underline{\mathbf{TOP}}^*)$ :

$$F(Id_X) = (Id_X)_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \implies Id_{\pi_1(X, x_0)}$$

$$[\alpha] \longmapsto [Id_X \circ \alpha] = [\alpha]$$

■ **COMPOSIZIONE:**  $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$

Vogliamo che  $F(g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ :

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(g_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha])$$

□

#### 8.4 ISOMORFISMI E GRUPPI FONDAMENTALI

**COROLLARIO 8.4.0.** Se  $f : X \longrightarrow Y$  è un omeomorfismo, allora:

$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$  è isomorfismo di gruppi,  $\forall x_0 \in X$ .

**RICORDIAMO...** Se  $g \circ f$  è una funzione biunivoca, allora  $f$  è iniettiva e  $g$  è suriettiva.

**COROLLARIO 8.4.1.** Sia  $A \subseteq X$  è un retratto con retrazione  $r : X \longrightarrow A$ , e sia  $i : A \hookrightarrow X$ . Si ha che:

- $\forall a \in A \quad i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$  è un omomorfismo *iniettivo*.
- $\forall a \in A \quad r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a)$  è un omomorfismo *suriettivo*.

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo dalla definizione che  $r|_A = Id_A$ ; poiché  $r \circ i : A \longrightarrow X$ ,  
 $x \longmapsto r(x)$ ,  
 si ha  $r \circ i = r|_A = Id_A$ . Allora, passando con il funtore all'omomorfismo di gruppi:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(A, a) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, a) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(A, a) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & r_* \circ i_* & & \end{array}$$

Notiamo che  $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (Id_A)_*$ , cioè  $r_* \circ i_*$  è biettiva. In particolare, ne consegue, per quanto detto poco sopra, che  $i_*$  è iniettiva e  $r_*$  suriettiva.  $\square$

**TEOREMA 8.4.0.** (KOSNIOWSKI, 15.12)

Siano  $f, g : X \longrightarrow Y$  continue, omotope e  $x_0 \in X$ . Allora esiste un *isomorfismo di gruppi*:

$$\varphi : \pi_1(Y, f(x_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, g(x_0)) \quad (8.22)$$

Tale che:

$$g_* = \varphi \circ f_* \quad (8.23)$$

Più precisamente, data l'omotopia  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tra  $f$  e  $g$ , allora:

$$\gamma := F(x_0, t) : I \longrightarrow Y \quad (8.24)$$

È un arco da  $F(x_0, 0) = f(x_0)$  a  $F(x_0, 1) = g(x_0)$ ; dunque:

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{\#} : \pi_1(Y, f(x_0)) & \longrightarrow & \pi_1(X, g(x_0)) \\ [\alpha] & \longmapsto & [\bar{\omega} * \alpha * \omega] \end{array} \quad (8.25)$$

è un *isomorfismo di gruppi* e si ha:

$$g_* = \gamma_{\#} \circ f_* \quad (8.26)$$

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ f_* \swarrow & & \searrow g_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\gamma_{\#}} & \pi_1(X, g(x_0)) \end{array}$$

**COROLLARIO 8.4.2.** Se  $f : X \longrightarrow X$  è una funzione omotopa all'identità, allora:

$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$  è isomorfismo di gruppi,  $\forall x_0 \in X$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Data l'omotopia  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tra  $f$  e  $Id_X$ , allora:

$$\gamma := F(x_0, t) : I \longrightarrow Y$$

È un arco da  $F(x_0, 0) = f(x_0)$  a  $F(x_0, 1) = x_0$ ; dunque, per il teorema precedente segue che

$$\gamma_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$$

è un isomorfismo di gruppi e si ha:

$$f_* = \gamma_\# \circ (Id_X)_* = \gamma_\# \circ Id_{\pi_1(X, x_0)} = \gamma_\#$$

In particolare, ne segue che  $f_* = \gamma_\#$  è isomorfismo.  $\square$

**RICORDIAMO...** Siano  $A, B, C, D$  degli insiemi e  $f, g, h$  delle applicazioni come nel diagramma seguente:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Tali per cui  $g \circ f, h \circ g$  sono biunivoche. Segue che  $f$  è biunivoca.

- $f$  è iniettiva perché  $g \circ f$  è iniettiva.
- $f$  è suriettiva: preso  $b \in B$  e il corrispettivo  $g(b) \in C$ , dal fatto che  $g \circ f$  è biunivoca segue che  $\exists a \in A : g(f(a))(g \circ f)(a) = g(b)$ . Essendo  $h \circ g$  biunivoca,  $g$  è iniettiva, dunque  $b = f(a) \implies f$  suriettiva e segue allora la tesi.

**TEOREMA 8.4.1. INVARIANZA OMOTOPICA DEL GRUPPO FONDAMENTALE (MANETTI, 11.22)**

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \longrightarrow Y$  un'equivalenza omotopica. Allora  $\forall x_0 \in X$  si ha che:

$$f : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \quad (8.27)$$

È isomorfismo di gruppi.

**DIMOSTRAZIONE.** In quanto  $f : X \longrightarrow Y$  è un'equivalenza omotopica, necessariamente  $\exists g : Y \longrightarrow X$  continua tale che:

$$g \circ f \sim Id_X \quad f \circ g \sim Id_Y$$

Su  $g \circ f \sim Id_X$  applichiamo il teorema precedente.

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ (g \circ f)_* \swarrow & & \searrow (Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}^a \\ \pi_1(X, g(f_0)) & \xrightarrow[\text{isomorfismo di gruppi}]{\gamma_\#} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$



Per il corollario appena visto, poiché  $g \circ f \sim Id_X$ , segue che  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  è isomorfismo di gruppi. Allora consideriamo lo schema seguente.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{g_* \circ f_* = (g \circ f)_*} & & \\
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, g(f(x_0))) \\
 & & \searrow \tilde{f}_* \circ g_* & & \downarrow \tilde{f}_* \\
 & & & & \pi_1(X, f(g(f(x_0))))
 \end{array}$$

Sapendo che  $f \circ g \sim Id_Y$ , possiamo dimostrare in modo analogo (usando come punto base  $f(x_0) \in Y$ ) che  $\tilde{f}_* \circ g_* = (\tilde{f} \circ g)_*$  è isomorfismo di gruppi.

Applicando il ragionamento insiemistico ricordato in precedenza (pag. 106) segue che  $f_*$  è un omomorfismo biiettivo, cioè un isomorfismo.  $\square$

<sup>a</sup>Si veda a pag. 104.

**COROLLARIO 8.4.3.** Se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici **c.p.a.** e omotopicamente equivalenti, allora hanno gruppi fondamentali isomorfi.

**DIMOSTRAZIONE.** Dal teorema appena dimostrato sappiamo che se due spazi sono omotopicamente equivalenti, il gruppo fondamentale di  $X$  rispetto ad un qualunque punto base in  $X$  è isomorfo a quello di  $Y$  rispetto  $f(x_0)$ . In particolare, se gli spazi sono **c.p.a.**, il loro gruppo fondamentale è *unico* a meno di omomorfismi. Segue che il gruppo fondamentale di  $X$  è isomorfo all'unico gruppo fondamentale di  $Y$ .  $\square$

**COROLLARIO 8.4.4.** Sia  $X$  uno spazio topologico contraibile. Allora  $X$  è semplicemente connesso.

**DIMOSTRAZIONE.**  $X$  contraibile significa che  $X$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $\{1 \text{ punto}\}$ . Segue che, per il corollario precedente, il gruppo fondamentale di  $X$  è banale:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(\{1 \text{ punto}\}) = 0$$

Essendo  $X$  contraibile,  $X$  è anche **c.p.a.**, dunque vale la tesi.  $\square$

**COROLLARIO 8.4.5.** Sia  $i : A \hookrightarrow X$  un retratto di deformazione. Allora  $\forall a \in A$ :

$$i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a) \quad r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a) \quad (8.28)$$

Sono isomorfismi di gruppi.



# III

## FORMA CANONICA DI JORDAN



# FORMA CANONICA DI JORDAN

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 9.1 TEOREMA DI CAYLEY-HAMILTON

[...]

**TEOREMA 9.1.o.** Sia  $A \in \mathbb{K}^{n, n}$  e  $m_A(t)$  il suo polinomio minimo. Allora, preso  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$m_A(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ è un autovalore di } A \quad (9.1)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Segue dal teorema di Cayley-Hamilton perché  $m_A(\lambda) = 0 \implies C_A(\lambda) = 0 \implies \lambda$  autovalore.

$\impliedby$ ) Sia  $\lambda$  un autovalore di  $A$  con autovettore associato  $\underline{v}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} A\underline{v} &= \lambda \underline{v} \\ A^2 \underline{v} &= A(A\underline{v}) = A(\lambda \underline{v}) = \lambda A\underline{v} = \lambda^2 \underline{v} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si arriva a  $A^k \underline{v} = \lambda^k \underline{v}$ . Preso un generico polinomio  $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ , esso si può esprimere come:

$$p = \sum_{i=0}^d c_i t_i \quad c_i \in \mathbb{K}$$

Allora  $p(A) = \sum_{i=0}^d c_i A^i$  e dunque:

$$p(A)\underline{v} = \left( \sum_{i=0}^d c_i A^i \right) \underline{v} = \sum_{i=0}^d c_i (A^i \underline{v}) = \sum_{i=0}^d c_i (\lambda^i \underline{v}) = \underbrace{\left( \sum_{i=0}^d c_i \lambda^i \right)}_{\in \mathbb{K}} \underline{v} = p(\lambda) \underline{v}$$

Consideriamo ora un polinomio  $p \in I_A$ . Per sua definizione  $p(A) = 0$ ; in particolare, da quanto scritto sopra:

$$0 \underline{v} = p(\lambda) \underline{v}$$

Ed essendo  $v$  un autovettore,  $v \neq 0$ ; dall'equazione sopra necessariamente segue  $p(\lambda) = 0$ . In particolare, essendo  $p \in I_A$  generato dal polinomio minimo  $m_A$  (cioè  $p(t) = m_A(t)q(t)$  con  $q(t) \neq 0$ ), segue che  $m_A(\lambda) = 0$ .  $\square$

## 9.2 FORMA CANONICA DI JORDAN

D'ora in poi, se non altresì specificato, considereremo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , cioè tratteremo di matrici  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  e endomorfismi fra spazi vettoriali complessi.

**OSSERVAZIONE.** Poichè  $\mathbb{C}$  è **algebricamente chiuso**, ogni polinomio  $p \in \mathbb{C}[t]$  si fattorizza completamente come prodotto di fattori lineari:

$$C_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r} \text{ con } m_i \text{ molteplicità algebrica di } \lambda_i \quad (9.2)$$

Nel caso del polinomio minimo, si ha:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{h_1} \dots (t - \lambda_r)^{h_r} \text{ con } 1 \leq h_i \leq m_i \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (9.3)$$

Come altra conseguenza, ogni matrice  $n \times n$  ammette  $n$  autovalori complessi, contati con la loro molteplicità.

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  una matrice associata a un endomorfismo  $f : V \longrightarrow V$ . Se  $f$  è diagonalizzabile, esiste una base in cui la matrice di  $f$  è diagonale. Anche quando tuttavia la matrice non è diagonalizzabile, vogliamo cercare una base in cui la matrice di  $f$  è *particolarmente semplice*.

**DEFINIZIONE 9.2.0.** Un **blocco di Jordan**  $J = J_k(\lambda)$ , di autovalore  $\lambda \in \mathbb{C}$  e dimensione  $K$ , è una matrice quadrata  $k \times k$  con sulla diagonale solo l'autovalore e sopra ogni elemento della diagonale 1:

$$J = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

**OSSERVAZIONE.**

- $J$  è determinato da  $\lambda$  e  $k$ .
- Il polinomio caratteristico di  $J$  è  $C_J(t) = (t - \lambda)^k$ , cioè  $\lambda$  è l'unico autovalore di  $J$  con molteplicità algebrica  $k$ .

**OSSERVAZIONE.** Definiamo il blocco di Jordan di dimensione  $k$  con autovalore zero, necessario per calcolare l'autospazio  $V_\lambda$ :

$$N = J - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Si ha che  $\text{rk } N = k - 1 \implies \dim V_\lambda = \dim \ker N = k - \text{rk } N = 1$ , cioè  $J$  non è mai diagonalizzabile se  $k > 1$ , dato che  $1 = \dim V_\lambda \leq m_\lambda = k$ .

Se la base  $\mathcal{B}$  dello spazio  $V$  (in cui stiamo operando con l'endomorfismo associato a  $J$ ) è  $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$ , notiamo che  $\underline{e}_1$  è l'unico autovettore di  $N$  e  $V_\lambda = \mathcal{L}(\underline{e}_1)$ . Si vede che  $J$  agisce in modo particolare sui vettori di  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{cases} J\underline{e}_1 = \lambda \underline{e}_1 \\ J\underline{e}_2 = \underline{e}_1 + \lambda \underline{e}_2 \\ \dots \\ J\underline{e}_k = \underline{e}_{k-1} + \lambda \underline{e}_k \end{cases}$$

Anche  $N$  agisce in modo altrettanto particolare sui vettori di  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{cases} N\underline{e}_1 = \underline{0} \\ N\underline{e}_2 = \underline{e}_1 \\ \dots \\ N\underline{e}_k = \underline{e}_{k-1} \end{cases}$$

Cioè, cominciando da  $\underline{e}_k$  e applicando  $N$  ripetutamente otteniamo gli altri vettori della base.

$$\underline{e}_1 \xleftarrow{N} \underline{e}_2 \xleftarrow{N} \dots \xleftarrow{N} \underline{e}_{k-1} \xleftarrow{N} \underline{e}_k$$

Ad esempio, con  $N^2$  si ha:

$$\begin{cases} N^2 \underline{e}_1 = \underline{0} \\ N^2 \underline{e}_2 = N(N\underline{e}_2) = N\underline{e}_1 = \underline{0} \\ \dots \\ N^2 \underline{e}_k = N(N\underline{e}_k) = N\underline{e}_{k-1} = \underline{0} \end{cases}$$





**OSSERVAZIONE.** Una matrice *diagonale* è in forma di Jordan, con un unico blocco di ordine 1 (cioè senza alcun 1 nell'elemento sopra).

**OSSERVAZIONE.** Se  $A$  è in forma di Jordan, sulla diagonale compaiono tutti gli autovalori con la loro *molteplicità*. Dunque, se  $\lambda$  è un autovalore, la somma delle *dimensioni* dei blocchi relativi a  $\lambda$  è uguale alla *molteplicità algebrica*  $m_\lambda$  di  $\lambda$ .

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \quad (9.6)$$

**TEOREMA 9.2.0. ESISTENZA E UNICITÀ DELLA FORMA DI JORDAN** Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dim  $n$  e  $f$  un endomorfismo di  $V$ . Allora *esiste* una base di  $V$  in cui la matrice di  $f$  è in forma di Jordan. Inoltre, la forma di Jordan è *unica* a meno dell'ordine dei blocchi.

*In termini matriciali*, ogni  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  è simile ad una matrice in forma di Jordan, unica a meno dell'ordine dei blocchi:

$$J = P^{-1}AP \quad (9.7)$$

$P$  è la matrice del cambiamento di base che presenta, nelle colonne, la base che mette  $A$  in forma di Jordan.

### 9.2.1 Autospazi generalizzati

Per dimostrare il teorema appena enunciato, faremo uso di un concetto nuovo: quello di *autospazio generalizzato*. Prima di definirlo, ricordiamo alcune proprietà legate agli endomorfismi che ci torneranno utili.

**DEFINIZIONE 9.2.2.** Un sottospazio vettoriale  $V$  si dice **invariante** per un endomorfismo  $f$  se:

$$f(V) \subseteq V \quad (9.8)$$

Se  $A$  è la matrice associata all'endomorfismo rispetto ad una base fissata, si scrive anche  $AV \subseteq V$ .

**OSSERVAZIONE.** Supponiamo che  $V = U \oplus W$ , con  $U$  e  $W$  sottospazi di  $V$ ; supponiamo inoltre i due sottospazi  $U$  e  $W$  siano **invarianti** per  $f$  endomorfismo, dunque  $f(U) \subseteq U$  e  $f(W) \subseteq W$ . Prese una base  $\mathcal{B}_U$  di  $U$  e una base  $\mathcal{B}_W$  di  $W$ , la base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$  è una base di  $V$  e la matrice di  $f$  rispetto a questa base è a blocchi.

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right)$$

- $B$  è quadrata, di ordine  $\dim U$  ed è la matrice associata a  $f|_U : U \longrightarrow U$  rispetto a  $\mathcal{B}_U$ .
- $C$  è quadrata, di ordine  $\dim W$  ed è la matrice associata a  $f|_W : W \longrightarrow W$  rispetto a  $\mathcal{B}_W$ .

**DEFINIZIONE 9.2.3.** Data una funzione  $f : V \longrightarrow V$  e  $A$  una matrice associata ad  $f$ ; sia  $\lambda$  un autovalore di  $f$  (di cui ne esiste almeno uno perché in  $\mathbb{C}$ ),  $V_\lambda = \ker(f - \lambda Id) = \ker(A - \lambda I)$  l'autospazio di  $\lambda$  e  $m_\lambda$  la molteplicità algebrica di  $\lambda$ . Allora l'autospazio generalizzato di  $\lambda$  è:

$$\widetilde{V} = \ker(f - \lambda Id)^{m_\lambda} = \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda} \quad (9.9)$$

**LEMMA 9.2.0. PROPRIETÀ DEGLI AUTOSPAZI GENERALIZZATI**

1.  $V_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$ .
2.  $\widetilde{V}_\lambda$  è invariante per  $A$ , cioè  $A\widetilde{V}_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$ .
3.  $\dim \widetilde{V}_\lambda = m_\lambda$ .
4.  $f|_{\widetilde{V}_\lambda} : \widetilde{V}_\lambda \longrightarrow \widetilde{V}_\lambda$  ha polinomio caratteristico  $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ .
5. Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sono tutti gli autovalori di  $A$ , si ha:

$$V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_r} \quad (9.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo un autovalore  $\lambda$  di  $A$ . Analizziamo le potenze  $(A - \lambda I)$ , i loro nuclei e le loro immagini.

I Se  $\underline{v} \in \ker(A - \lambda I)^h$ , allora, per definizione:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^h \underline{v} &= \underline{0} \\ \implies (A - \lambda I)^{h+1} \underline{v} &= (A - \lambda I)(A - \lambda I)^h \underline{v} = \underline{0} \\ \implies \underline{v} &\in \ker(A - \lambda I)^{h+1} \\ \implies \ker(A - \lambda I)^h &\subseteq \ker(A - \lambda I)^{h+1} \end{aligned}$$

Al crescere di  $h$ :

$$\{0\} \subseteq \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^2 \subseteq \dots \quad (*) \quad (9.11)$$

Cioè il nucleo della potenza  $h$  è contenuto in tutti quelli successivi. In particolare:

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda} \implies V_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$$

Dimostrando così la prima proprietà.

II In modo analogo, se  $\underline{w} \in \text{Im}(A - \lambda I)^h$ , per definizione  $\exists \underline{v} \in (A - \lambda I)^h$  tale che:

$$\begin{aligned} \underline{w} &= (A - \lambda I)^h \underline{v} = (A - \lambda I)^{h-1} ((A - \lambda I) \underline{v}) \\ \implies \underline{w} &\in \text{Im}(A - \lambda I)^{h-1} \\ \implies \text{Im}(A - \lambda I)^{h-1} &\supseteq \text{Im}(A - \lambda I)^h \end{aligned}$$

Al crescere di  $h$ :

$$V \supseteq \text{Im}(A - \lambda I) \supseteq \text{Im}(A - \lambda I)^2 \supseteq \dots \quad (*) \quad (9.12)$$

Cioè l'immagine della potenza  $h$  contiene tutte quelle successive.

Possiamo mostrare come tutti gli spazi finora visti (nuclei e immagini delle potenze  $(A - \lambda I)^h$ ) sono invarianti:

- Se  $\underline{v} \in \ker(A - \lambda I)^h$ :

$$\begin{aligned}\underline{0} &= A\underline{0} = A\left((A - \lambda I)^h \underline{v}\right) \stackrel{a}{=} (A - \lambda I)^h A\underline{v} \\ \implies A\underline{v} &\in \ker(A - \lambda I)^h \\ \implies A\left(\ker(A - \lambda I)^h\right) &\subseteq \ker(A - \lambda I)^h\end{aligned}$$

Abbiamo appena dimostrato l'invarianza dello spazio  $\widetilde{V}_\lambda$ .

- Se  $\underline{w} \in \text{Im}(A - \lambda I)^h$  esiste  $\underline{v}$  tale che:

$$\begin{aligned}\underline{w} &= (A - \lambda I)^h \underline{v} \implies A\underline{w} = A(A - \lambda I)^h \underline{v} \stackrel{b}{=} (A - \lambda I)^h (A\underline{v}) \\ \implies A\underline{w} &\in \text{Im}(A - \lambda I)^h \\ \implies A\left(\text{Im}(A - \lambda I)^h\right) &\subseteq \text{Im}(A - \lambda I)^h\end{aligned}$$

III Per trovare la dimensione dell'autospazio generalizzato, sappiamo che:

$$\begin{aligned}\ker(A - \lambda I)^h &\subseteq \ker(A - \lambda I)^{h+1} \\ \text{Im}(A - \lambda I)^h &\supseteq \text{Im}(A - \lambda I)^{h+1}\end{aligned}$$

Allora, se consideriamo il teorema nullità più rango sulle applicazioni  $(A - \lambda I)^h$  e  $(A - \lambda I)^{h+1}$  in  $V$ :

$$\begin{aligned}\dim \ker(A - \lambda I)^h + \dim \text{Im}(A - \lambda I)^h & \\ \parallel & \\ n = \dim V & \\ \parallel & \\ \dim \ker(A - \lambda I)^{h+1} + \dim \text{Im}(A - \lambda I)^{h+1} &\end{aligned}$$

Ne consegue che:

$$\ker(A - \lambda I)^h = \ker(A - \lambda I)^{h+1} \iff \text{Im}(A - \lambda I)^h = \text{Im}(A - \lambda I)^{h+1} \quad (9.13)$$

Siccome  $V$  ha dimensione finita, la successione crescente (\*) dei nuclei delle potenze (eq. I, pag. 116) ad un certo punto deve *stabilizzarsi*, cioè deve esserci un'uguaglianza per tutti gli elementi successivi<sup>c</sup>. Denotiamo con  $p$  il più piccolo intero tale che:

$$\ker(A - \lambda I)^p = \ker(A - \lambda I)^{p+1}$$

Mostriamo che  $\forall h \geq p$  valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\ker(A - \lambda I)^h &= \ker(A - \lambda I)^p \\ \text{Im}(A - \lambda I)^h &= \text{Im}(A - \lambda I)^p\end{aligned}$$

È sufficiente mostrarlo per i nuclei, dato che vale anche per le immagini per nullità più rango.

Sia  $\underline{v} \in \ker(A - \lambda I)^h \supseteq (A - \lambda I)^h$  con  $h \geq p + 2$ .<sup>d</sup> Allora:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= (A - \lambda I)^p \underline{v} = (A - \lambda I)^{p+1} \underbrace{\left( (A - \lambda I)^{h-p-1} \underline{v} \right)}_{\in \ker(A - \lambda I)^h = \ker(A - \lambda I)^p} \\ \implies \underline{0} &= (A - \lambda I)^p \left( (A - \lambda I)^{h-p-1} \underline{v} \right) = (A - \lambda I)^{h-1} \underline{v} \\ \implies \underline{v} &\in \ker(A - \lambda I)^{h-1} \end{aligned}$$

Iterando in questo modo, otterremo  $v \in \ker(A - \lambda I)^{p+1} = \ker(A - \lambda I)^p$ . Dunque, come conseguenza del termine stabilizzatore, tutti i sottospazi  $\ker(A - \lambda I)^k$  (con  $k < p$ ) sono strettamente contenuti in quelli successivi fino al termine  $p$ -esimo, mentre  $\text{Im}(A - \lambda I)^k$  contengono strettamente quelli successivi fino al  $p$ -esimo.

$$\{0\} \subsetneq \ker(A - \lambda I) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda I)^p \quad (9.14)$$

$$V \supsetneq \text{Im}(A - \lambda I) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(A - \lambda I)^p \quad (9.15)$$

- Si ha  $p \geq 1$  : se fosse  $p = 0$ , si avrebbe  $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$  e dunque nessun autovettore o autovalore.
- SI ha  $\dim \ker(A - \lambda I)^p \geq p$  : poiché nella successione abbiamo delle inclusioni strette, fra un termine e il suo successivo la dimensione deve aumentare di almeno 1.

Mostriamo ora che i termini  $p$ -esimi delle due successioni sono in somma diretta, in particolare dobbiamo solo dimostrare:

$$\ker(A - \lambda I)^p \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p = \{0\}$$

Infatti, preso  $\underline{u} \in \ker(A - \lambda I)^p \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p$ ,  $\exists \underline{v} \in V : \underline{u} = (A - \lambda I)^p \underline{v}$ . Ma:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= (A - \lambda I)^p \underline{u} = (A - \lambda I)^p (A - \lambda I)^p \underline{v} = (A - \lambda I)^{2p} \underline{v} \\ \implies \underline{v} &\in \ker(A - \lambda I)^{2p} = \ker(A - \lambda I)^p \implies \underline{u} = \underline{0} \end{aligned}$$

Per nullità più rango si ha  $\dim \ker(A - \lambda I)^p + \dim \text{Im}(A - \lambda I)^p = \dim V$ ; segue che:

$$V = \ker(A - \lambda I)^p \oplus \text{Im}(A - \lambda I)^p \quad (9.16)$$

In particolare sappiamo che, per l'osservazione a pag. 115, rispetto ad una base di  $V$  opportuna la matrice associata  $A$  è a *blocchi*, di cui i due non nulli sono uno *codificato* dalla restrizione dell'endomorfismo a  $\ker(A - \lambda I)^p$ , mentre l'altro dalla restrizione a  $\text{Im}(A - \lambda I)^p$ . Consideriamo allora queste due restrizioni ai sottospazi:

$$\varphi : \ker(A - \lambda I)^p \longrightarrow \ker(A - \lambda I)^p$$

$$\psi : \text{Im}(A - \lambda I)^p \longrightarrow \text{Im}(A - \lambda I)^p$$

Facciamo le seguenti considerazioni.

- $\lambda$  è l'unico autovalore di  $\varphi$ . Definiamo la matrice  $B$  associata a  $\varphi$ . Sappiamo che  $(A - \lambda I)^p$  annulla tutti i vettori di  $\ker(A - \lambda I)^p$ . Dunque, la *restrizione* di  $A - \lambda I$  su di esso, ovvero  $B - \lambda I$  (associata all'applicazione  $\varphi - \lambda Id$ ), è *endomorfismo nilpotente* di ordine  $p$ .

In altre parole, l'applicazione  $(\varphi - \lambda Id)^p$  si annulla se valutata su un vettore (non nullo)  $\underline{v}$  appartenente al dominio  $\ker(A - \lambda I)^p$ . Ciò equivale a dire che:

$$(B - \lambda I)^p \underline{v} = \underline{0}$$

Ma ciò significa:  $(B - \lambda I)^p = \underline{0}$ .

Preso allora il polinomio  $p(t) = (t - \lambda)^p$  appartiene all'ideale di  $B$  (cioè all'ideale di  $\varphi$ ), in particolare  $\lambda$  è autovalore di  $\varphi$  (perché  $p(\lambda) = 0 \implies m_B(\lambda) = 0$ ).

Conseguentemente, se supponiamo di avere  $\mu$  come altro autovalore di  $\varphi$ , si ha che  $m_B(\mu) = 0 \implies p(\mu) = 0 \implies (\mu - \lambda)^p \implies \mu = \lambda$ . Si ha dunque l'unicità.

- **$\lambda$  non è autovalore di  $\psi$ .** Infatti, sia  $\underline{v} \in \text{Im}(A - \lambda I)$  per cui  $\lambda$  è il suo autovalore. Allora:

$$\begin{aligned} \psi(\underline{v}) &= \lambda \underline{v} \stackrel{e}{\iff} A\underline{v} = \lambda \underline{v} \iff (A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0} \\ &\implies \underline{v} \in \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda)^p \\ &\implies \underline{v} \in \ker(A - \lambda I)^p \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p = \{0\} \end{aligned}$$

Ma sapendo che  $\ker(A - \lambda I)^p \cap \text{Im}(A - \lambda I)^p = \{0\} = \{0\}$ , si ha  $\underline{v} = \underline{0}$ , dunque non può  $\lambda$  autovalore di  $\psi$ .

Riprendendo l'osservazione a pag. 115, scelte delle opportune basi, definiamo  $\mathbf{B}$  la matrice associata a  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  la matrice associata a  $\psi$  in modo da avere la matrice  $A$  associata a  $f$  a blocchi.

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right)$$

Usiamo questa matrice per calcolare il polinomio caratteristico:<sup>f</sup>

$$C_A(t) = C_B(t) C_C(t)$$

- $C_B(t)$  è il polinomio caratteristico di  $\mathbf{B}$ , il cui unico autovalore è  $\lambda$ ; grazie all'osservazione a pag. 9.1, possiamo dire che la molteplicità algebrica di  $\lambda$  come autovalore di  $\mathbf{B}$  è esattamente la dimensione dello spazio  $\mathbf{B}$ . Il polinomio caratteristico risulta:

$$(t - \lambda)^{\dim \ker(A - \lambda I)^p}$$

- $C_C(t)$ , in quanto  $\psi$  non ha l'autovalore  $\lambda$ , non è divisibile per  $t - \lambda$ :  $(t - \lambda) \nmid C_C(t)$ .

Segue che la molteplicità algebrica di  $\lambda$  come autovalore della matrice  $\mathbf{B}$  è la stessa di quella come autovalore della matrice  $A$ :

$$m_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I)^p \geq p$$

Da cui segue:

$$\ker(A - \lambda I)^p = \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda} = \widetilde{V}_\lambda$$

Dunque, sapendo che  $\dim \widetilde{V}_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I)^p = m_\lambda$ , segue la proprietà 3.

- IV Notiamo che l'endomorfismo  $\varphi$  definito nella dimostrazione precedente altro non è che  $f|_{\widetilde{V}_\lambda} : \widetilde{V}_\lambda \longrightarrow \widetilde{V}_\lambda$ , e abbiamo visto come il suo polinomio caratteristico debba essere  $(t - \lambda)_\lambda^m$ . Si conclude il punto 4.
- V Non dimostreremo quest'ultimo punto. □

<sup>a</sup> $A$  e  $A - \lambda I$  commutano.

<sup>b</sup>Si veda la nota precedente.

<sup>c</sup>Infatti, ogni inclusione potrebbe essere stretta e dunque la dimensione di questi sottospazi può aumentare; tuttavia, essendo  $V$  finito questi sottospazio non possono avere dimensione maggiore di  $n$ .

<sup>d</sup>Poiché  $p$  è tale per cui  $\ker(A - \lambda I)^p = \ker(A - \lambda I)^{p+1}$ , il caso  $h = p + 1$  è banalmente vero.

<sup>e</sup> $A|_V$  segue dalla definizione di  $\psi$  come restrizione dell'endomorfismo  $f$ .

<sup>f</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 220, si può trovare la dimostrazione della formula del determinante di una matrice a blocchi, su cui si basa la seguente formula.

Riassumendo, sappiamo ora che gli autospazi generalizzati sono invarianti e sono in somma diretta tra loro.

$$V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_r} \quad (9.17)$$

Ora, per trovare una base che mette la matrice  $A$  associata ad  $f$  in forma di Jordan, basta farlo in ogni autospazio generalizzato  $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ , in cui l'unico autovalore è  $\lambda_i$  per le osservazioni precedenti. In sostanza, quello che vogliamo fare è compiere una "separazione degli autovalori".

Per calcolare l'autospazio generalizzato dovremmo calcolare  $\widetilde{V}_\lambda = (A - \lambda I)^{m_\lambda}$ , ma basterà calcolare invece  $\widetilde{V}_\lambda = (A - \lambda I)^p$ .

Nella sezione seguente dimostreremo l'esistenza della base di  $\widetilde{V}_\lambda$  che dà la forma di Jordan.

### 9.2.2 Esistenza della base dell'autospazio generalizzato che dà la forma di Jordan

Prima di procedere dimostriamo un lemma che servirà più avanti.

**LEMMA 9.2.1.** Siano  $f : U \longrightarrow V$  e  $g : V \longrightarrow W$  due applicazioni lineari. Si ha:

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \ker(g \circ f) - \dim \ker f \quad (9.18)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

Sia  $h := g|_{\operatorname{Im} f} : \operatorname{Im} f \longrightarrow W$ . Si ha:

$$\dim \ker h = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} h$$

Ma  $\ker h = \operatorname{Im} f \cap \ker g$  e  $\operatorname{Im} h = g(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im}(g \circ f)$ , dunque:

$$\begin{aligned} \ker h &= \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} h \\ \dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g) &= \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f) \end{aligned}$$

Per dimostrare la seconda uguaglianza, abbiamo:

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} f &= \dim U - \dim \ker f \\ \dim \operatorname{Im} (g \circ f) &= \dim U - \dim \ker (g \circ f) \\ \implies \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} (g \circ f) &= \dim \ker (g \circ f) - \dim \ker f\end{aligned}$$

□

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordando la successione delle immagini (equazione 9.14):

$$V \supseteq \operatorname{Im} (A - \lambda I) \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im} (A - \lambda I)^p$$

Intersechiamo ogni termine con  $V_\lambda = \ker (A - \lambda I)$ :

$$\ker (A - \lambda I) \cap V \supseteq \ker (A - \lambda I) \cap \operatorname{Im} (A - \lambda I) \supseteq \dots \supseteq \ker (A - \lambda I) \cap \operatorname{Im} (A - \lambda I)^p$$

E poniamo:

$$S_i := \ker (A - \lambda I) \cap \operatorname{Im} (A - \lambda I)^{i-1} \quad (9.19)$$

In particolare, notiamo che:

- $S_1 = \ker (A - \lambda I) \cap V = \ker (A - \lambda I) = V_\lambda$ .
- $S_{p+1} = \ker (A - \lambda I) \cap \operatorname{Im} (A - \lambda I)^p = \{0\}$  perché  $\ker (A - \lambda I) \subsetneq \ker (A - \lambda I)^p$  e dunque  $S_{p+1} \subseteq \ker (A - \lambda I)^p \cap \operatorname{Im} (A - \lambda I)^p = \{0\}$ .
- Può benissimo capitare che  $S_i = S_{i+1}$ .

Riscriviamo con questa nuova denominazione la successione creata.

$$V_\lambda = S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_p \quad (9.20)$$

Costruiamo la base di  $\widetilde{V}_\lambda$ .

Innanzitutto, scegliamo una base  $\{x_1^1, \dots, x_r^1\}$  del sottospazio più piccolo  $S_p$ . Per costruzione,  $x_i^1 \in \operatorname{Im} (A - \lambda I)^{p-1}$ , cioè:

$$\forall i = 1, \dots, r \exists x_i^p \in V \quad x_i^1 = (A - \lambda I)^{p-1} x_i^p$$

È lecito definire i vettori “intermedi” fra  $x_i^p$  e  $x_i^1$ , ottenuti da moltiplicazioni successive della matrice  $A - \lambda I$  al vettore  $x_i^p$ :

$$\begin{aligned}x_i^{p-1} &:= (A - \lambda I) x_i^p \\ x_i^{p-2} &:= (A - \lambda I) x_i^{p-1} = (A - \lambda I)^2 x_i^p \\ &\dots\end{aligned} \quad (9.21)$$

Per capire meglio le relazioni fra questi vettori ed altri che vedremo successivamente nella dimostrazione, utilizziamo il seguente schema [1]:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_i^p & & & & & & \\
\downarrow A-\lambda I & & & & & & \\
x_i^{p-1} & y_j^{p-1} & & & & & \\
\downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & & & & \\
x_i^{p-2} & y_j^{p-2} & z_k^{p-2} & & & & \\
\downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
\downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & & & \\
x_i^2 & y_j^2 & z_k^2 & \dots & a_t^2 & & \\
\downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & \downarrow A-\lambda I & & \downarrow A-\lambda I & & \\
x_i^1 & y_j^1 & z_k^1 & \dots & a_t^1 & b_u^1 &
\end{array}$$

Notiamo che i vettori  $\{x_i^1, \dots, x_i^p\}$  dà origine ad un *blocco di Jordan*  $J_p(\lambda)$  di dimensione  $p$  e relativo all'autovalore  $\lambda$ , poiché questi vettori soddisfano la costruzione vista nell'osservazione di pag. 113: infatti, si ha  $x_i^1 \in S_p \subseteq V_\lambda$ , dunque  $x_i^1$  è un autovettore di  $V_\lambda$  e gli altri vettori sono ottenuti dall'applicazione ripetuta di una matrice all'ultimo vettore della base<sup>a</sup>. Lo stesso vale  $\forall i = 1, \dots, r$ .

Consideriamo ora lo spazio  $S_{p-1}$ , che ricordiamo contiene  $S_{p-1}$  cioè  $(S_p \subseteq S_{p-1})$ . Vogliamo completare  $\{x_1^1, \dots, x_r^1\}$  ad una base di  $S_{p-1}$  con dei vettori  $y_1^1, \dots, y_s^1$ :

$$\{x_1^1, \dots, x_r^1, y_1^1, \dots, y_s^1\}$$

Per costruzione,  $y_j^1 \in S_{p-1} \subseteq \text{Im}(A - \lambda I)^{p-2}$ , dunque:

$$\forall j = 1, \dots, s \exists y_1^{p-1} \in V \quad y_j^1 = (A - \lambda I)^{p-2} y_j^{p-1}$$

Per ogni  $j$  otteniamo  $p - 1$  vettori  $\{j_i^1, \dots, j_i^{p-1}\}$  tali che  $y_j^s \in V_\lambda$  e  $j_i^{i-1} := (A - \lambda I)y_j^i$   $\forall i = 2, \dots, p - 1$ . Analogamente al caso precedente, questo gruppo di vettori dà origine ad un *blocco di Jordan* di ordine  $p - 1$ .

Procediamo in questo modo: prendiamo la base ottenuta per  $S_i$  e la completiamo ad una di  $S_{i-1} \supseteq S_i$ ; poiché ogni vettore aggiunto appartiene a  $\text{Im}(A - \lambda I)^{i-2}$ , applicando  $i - 2$  volte la matrice  $A_\lambda I$  al vettore  $z_k^{i-1}$  (fino ad ottenere  $z_k^1$ ) otteniamo un'insieme di vettori che generano un blocco di Jordan di dimensioni  $i$  e di autovalore  $\lambda$ .

Chiaramente, poiché potrebbe anche accadere che  $S_{i-1} = S_i$ , si prosegue senza aggiungere vettori alla base e si passa al sottospazio successivo.

Arriviamo con queste iterazioni fino a  $S_2 = V_\lambda \cap \text{Im}(A - \lambda I)$ : completiamo la base da  $S_3$  ad una di  $S_2$  aggiungendo i vettori  $\{a_1^1, \dots, a_t^1\}$ . Sappiamo che  $\exists a_t^2 : a_t^1 = (A - \lambda I)^{p-2} a_t^2$ , dunque abbiamo i due vettori che formano il blocco di Jordan di dimensione 2.

Infine, completiamo ad una base di  $S_1$  aggiungendo i vettori  $\{b_1^1, \dots, b_u^1\}$ . In questo caso, non abbiamo bisogno di calcolare altri vettori  $b_u^i \forall u$  (al variare di  $i$ ) come prima, in



quanto i vettori, per definizione di  $S_1$ , appartengono anche a  $\ker(A - \lambda I)$ . Allora,  $\forall u \ b_u^1$  generano blocchi di Jordan di dimensione 1.

Al variare di  $i, j, k, \dots, t, u$  abbiamo costruito un insieme di vettori tutti appartenenti a  $\widetilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ : nello schema precedente essi sono tutti i vettori appartenenti a tutte le colonne, da quella di  $x_i$  a quella di  $b_u$ .

**Vogliamo contare quanti sono questi vettori.** Innanzitutto, dobbiamo considerare che lo schema, per compattezza, rappresenta *solo una colonna* per ciascun  $x_i, y_j, \dots$ , ma in realtà c'è una colonna analoga alla prima *per ogni vettore* della base di  $S_p$ , una colonna analoga alla seconda per ogni vettore della base di  $S_{p-1}$  e così via. In pratica, abbiamo  $\dim S_p = r$  colonne con  $x_i$ ,  $\dim S_{p-1} - \dim S_p = s$  colonne con  $y_j$  e così via.

Contiamo adesso gli elementi per righe. L'ultima riga, quella di  $x_i^1, y_j^1 z_k^1 \dots, a_t^1, b_u^1$  al variare di  $i, j, k, \dots, t, u$ , sono per costruzione i vettori di una base di  $S_1$ , e quindi il loro numero sono  $\dim S_1$ .

Sulla penultima riga non abbiamo i vettori  $b_u$  e i vettori  $x_i^2, y_j^2 z_k^2 \dots, a_t^2$  presenti sono in numero uguale ai vettori  $x_i^1, y_j^1 z_k^1 \dots, a_t^1$  al variare di  $i, j, k, \dots, t$ , base di  $S_2$  e quindi ne abbiamo  $\dim S_2$ .

Proseguendo così, il numero di vettori della  $i$ -esima riga è pari alla dimensione dello spazio  $S_i$ ; in totale l'insieme è formato da  $N$  vettori, con:

$$N = \sum_{i=1}^p \dim S_i \quad (9.22)$$

Usando il lemma 9.2 (pag. 120), otteniamo che:

$$\begin{aligned} \dim S_i &= \dim(\ker(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^{i-1}) = \\ &= \dim \ker(A - \lambda I)^i - \dim \ker(A - \lambda I)^{i-1} \\ &\implies \\ N = \sum_{i=1}^p \dim S_i &= \sum_{i=1}^p (\dim \ker(A - \lambda I)^i - \dim \ker(A - \lambda I)^{i-1}) = \\ &= \dim \ker(A - \lambda I)^p - \dim \ker(A - \lambda I)^0 = \\ &= \dim \ker(A - \lambda I)^p = \widetilde{V}_\lambda \end{aligned}$$

L'insieme dei vettori, che ricordiamo essere tutti contenuti in  $\widetilde{V}_\lambda$ , ha *cardinalità* pari alla *dimensione dell'autospazio generalizzato*. Ci resta dunque da dimostrare che i vettori siano *linearmente indipendenti* per verificare che essi siano a tutti gli effetti la base cercata di  $\widetilde{V}_\lambda$ .

Per dimostrarlo, prendiamo la combinazione lineare seguente:

$$\sum_i \alpha_i x_i^p + \sum_i \beta_i x_i^{p-1} + \dots + \sum_i \gamma_i y_j^{p-1} + \dots + \sum_u \delta_u b_u^1 = 0$$

Applicando  $(A - \lambda I)^{p-1}$  tutti i termini si annullano eccetto  $x_i^p$  e coefficienti al variare di  $i$ , ovvero:

$$\sum_i \alpha_i (A - \lambda I) x_i^p = 0 \implies \sum_i \alpha_i x_i^1 = 0$$

Poichè  $x_i^1$  al variare di  $i$  sono *linearmente indipendenti* (sono base di  $S_p$ !), i loro coefficienti devono necessariamente *tutti* nulli:  $\alpha_i = 0 \forall i$ . La combinazione lineare sopra diventa:

$$\sum_i \beta_i x_i^{p-1} + \dots + \sum_j \gamma_j y_j^{p-1} + \dots + \sum_u \delta_u b_u^1 = 0$$

Applicando  $(A - \lambda I)^{p-2}$ , nella combinazione lineare rimangono solo  $x_i^{p-1}$  e  $y_j^{p-1}$  al variare di  $i$  e  $j$  con i loro coefficienti. Complessivamente, i vettori formano la base già vista di  $S_{p-1}$ , dunque i coefficienti risultano nulli:  $\beta_i = 0, \gamma_j = 0 \forall i, j$ .

Allo stesso modo, applicando  $(A - \lambda I)^{p-3}, \dots$  si vede che tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli, ovvero i vettori dell'insieme sono **linearmente indipendenti**.  $\square$

<sup>a</sup>Chiaramente ciò non implica che il blocco di Jordan in esame sia proprio  $A$ !  $A$  ha sempre ordine  $n \times n$ , mentre il blocco ottenuto dalla base in questione ha ordine  $p \times p$ , con  $p \leq n$ .

### 9.2.3 Unicità della forma di Jordan

**DIMOSTRAZIONE.** Per ultima cosa osserviamo come la forma di Jordan di  $A$  sia unica. Sulla sua diagonale compaiono, per definizione, gli *autovalori con molteplicità*: questo dipende esclusivamente dalle radici del polinomio caratteristico e dunque da  $A$  stessa. Per un dato autovalore  $\lambda$ , abbiamo ottenuto dei blocchi di Jordan corrispondenti agli spazi  $S_k$  di dimensione  $k$  e di numero pari ai vettori aggiunti per completare la base dello spazio  $S_{k+1}$  passo per passo (ovvero  $\dim S_{k+1} - \dim S_k$ , dato che ogni vettore aggiunto  $x_i^1$  genera la successione  $x_i^1, \dots, x_i^k$ ). Poiché il *numero dei blocchi* dipende esclusivamente da  $A - \lambda I$ , dunque da  $A$  stessa, e *non* dal procedimento, la forma di Jordan di  $A$  è unica.  $\square$

Il corollario seguente è immediato.

**COROLLARIO 9.2.0.** Due matrici in forma di Jordan sono simili se e solo se hanno gli stessi blocchi (a meno dell'ordine).

### 9.2.4 Polinomio minimo e forma di Jordan

**PROPOSIZIONE 9.2.0.** Sia  $A$  una matrice complessa  $n \times n$  e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  gli autovalore distinti di  $A$  e, per ogni  $i = 1, \dots, r$ , sia  $p_i$  l'ordine del più grande blocco di Jordan di  $A$  relativo a  $\lambda_i$ . Allora il polinomio minimo di  $A$  è:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \dots (t - \lambda_r)^{p_r} \quad (9.23)$$

L'osservazione che qui facciamo ci servirà nella dimostrazione della proposizione.

**OSSERVAZIONE.** Se  $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ , allora:

$$p(A)q(A) = q(A)p(A) \quad (9.24)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre che  $A$  sia già in forma di Jordan. Consideriamo  $A - \lambda_1 I$ , rappresentata in figura: ha, nella parte rossa, dei blocchi di

Jordan relativi all'autovalore zero. Poichè la parte rossa è una sottomatrice nilpotente di ordine  $p_1$ , ne consegue che  $(A - \lambda_1 I)^{p_1}$  ha la matrice nulla nella parte zero.

In generale,  $(A - \lambda_i I)^{p_i}$  è nullo nel blocco  $m_i \times m_i$  corrispondente a  $\lambda_i$ .

$$\begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\phantom{0}} \end{pmatrix}$$

Ne segue che  $(A - \lambda_1 I)^{p_1} \dots (A - \lambda_r I)^{p_r}$  è la matrice nulla, perché ha ogni blocco nullo. Ciò significa che il seguente polinomio si annulla su  $A$  e dunque appartiene al suo ideale:

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \dots (t - \lambda_r)^{p_r} \in I_A$$

Perciò il polinomio minimo divide  $f$ :  $m_A(t) \mid f(t)$ .

Consideriamo ora  $(A - \lambda_1 I)^h$  con  $h < p_1$ : come abbiamo visto nello studio delle proprietà dei blocchi di Jordan, esso ha nel primo blocco una colonna uguale a  $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ , diciamo ad esempio la colonna  $s \in \{1, \dots, m_1\}$ .

Posto  $d_i \geq 1$ ,  $(A - \lambda_i I)^{d_i}$  nel posto  $(1, 1)$  ha  $(\lambda_1 - \lambda_i)^{d_i} \neq 0$  se  $i = 2, \dots, r$ . Infatti,  $A$  (presa in forma di Jordan) è triangolare superiore e ha  $\lambda_1$  al posto  $(1, 1)$ ; allo stesso modo  $A - \lambda_i I$  è triangolare superiore e ha  $\lambda_1 - \lambda_i$  al posto  $(1, 1)$ .

Ne consegue che  $\prod_{i=2}^r (A - \lambda_i I)^{d_i}$  ha un numero  $\neq 0$  nel posto  $(1, 1)$ . Allora, utilizzando l'osservazione ad inizio sezione che garantisce la commutatività del prodotto:

$$(A - \lambda_1 I)^h \prod_{i=2}^r (A - \lambda_i I)^{d_i} = \prod_{i=2}^r (A - \lambda_1 I)^{d_i} (A - \lambda_i I)^h$$

Rappresentando visivamente il prodotto di queste due matrici:

$$\begin{pmatrix} * \neq 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al posto  $(1, s)$  otteniamo il valore  $* \neq 0$ , dunque il prodotto complessivo è diverso da zero. Si ha:

$$(t - \lambda_1)^h \prod_{i=2}^r (t - \lambda_i)^{d_i} \notin I_A \text{ se } h < p_1$$

Segue che qualunque blocco di Jordan di ordine non massimo fa sì che il polinomio scritto sopra non appartenga all'ideale di  $A$ , e dunque il più piccolo polinomio che è diviso da  $m_A(t)$  (al quale dunque deve coincidere necessariamente) è  $f(t)$  visto sopra.  $\square$

**COROLLARIO 9.2.1.** Sia  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$ . Allora  $A$  è **diagonalizzabile** se e solo se il suo polinomio minimo ha tutte radici di molteplicità 1.

**DIMOSTRAZIONE.** Per la proposizione precedente, la molteplicità delle radici del polinomio minimo corrisponde alla dimensione del più grande blocco di Jordan di  $A$  relativo a  $\lambda_i$ .

Segue chiaramente che se  $m_{\lambda_i} = 1 \forall i$  l'ordine di tutti i blocchi è 1, dunque  $A$  è diagonalizzabile.

Viceversa, se  $A$  è diagonalizzabile, tutti i blocchi sono di dimensione 1 e questa, per la stessa proposizione di prima, corrisponde alla molteplicità delle radici del polinomio caratteristico.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** La forma di Jordan determina il polinomio minimo e il polinomio caratteristico, ma *non* vale il viceversa. Per esempio, prendiamo le seguenti matrici:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Queste due matrici hanno forme di Jordan *diverse*, ma hanno entrambe:

$$C_A = (t-2)^7 \quad m_A = (t-2)^3 \dim V_2 = 3$$

### 9.2.5 Impraticchiamoci! Forma canonica di Jordan

**TIPS & TRICKS!** ALCUNE NOZIONI UTILI PER IL CALCOLO DELLA BASE E DELLA FORMA DI JORDAN.

1. Per calcolare l'autospazio generalizzato  $\widetilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda}$  è sufficiente calcolare, se conosco il massimo ordine  $p$  dei blocchi di Jordan relativi a  $\lambda$ :

$$\widetilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda I)^p \quad (9.25)$$

2. Si ha, per le osservazioni fatte nella dimostrazione precedente:

$$\dim S_i - \dim S_{i+1} = \# \text{ blocchi di Jordan di dimensione } i \quad (9.26)$$

3. L'autospazio  $V_\lambda = S_1$  ha come base tutti i vettori aggiunti a partire dalla base di  $S_p$ , compresi i vettori di quest'ultima base; poiché per ognuno di questi vettori abbiamo, per costruzione, un blocco di Jordan relativo a  $\lambda$ , il numero di questi vettori corrisponde al *numero totale di blocchi di Jordan*, cioè la *molteplicità geometrica di  $\lambda$* :

$$\dim V_\lambda = \# \text{ blocchi di Jordan relativi a } \lambda \quad (9.27)$$

4. Per l'osservazione a pag. 115:

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \quad (9.28)$$

5. Per l'osservazione a pag. 124, l'esponente di  $t - \lambda$  nel polinomio minimo  $m_A$  è la dimensione del blocco più grande relativo a  $\lambda$ .

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \quad (9.29)$$

6. Se conosco già le dimensioni dei blocchi di Jordan di  $\lambda$ :

$$a_1 \leq \dots \leq a_r = p$$

mi basta calcolare i sottospazi:

$$S_{a_1} \supseteq \dots \supseteq S_{a_r} = S_p$$

7. Se  $A$  ha un'unico autovalore  $\lambda$ , allora  $V = \tilde{V}_\lambda$  e  $(A - \lambda I)^p = 0$ . In particolare segue che:

$$\begin{aligned} \forall \underline{v} \in \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \quad \exists \underline{u} \in (A - \lambda I)^{p-1} : (A - \lambda I)^{p-1} \underline{u} &= \underline{v} \\ \implies \underline{0} = (A - \lambda I)^p \underline{u} = (A - \lambda I) \underline{v} \\ \implies \underline{v} \in \ker(A - \lambda I) \\ \implies \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \subseteq \ker(A - \lambda I) \\ \implies S_p = \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \cap \ker(A - \lambda I) &= \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \end{aligned}$$

Pertanto, nel caso  $S_p$  non c'è bisogno di intersecare con  $V_\lambda$ ! Questo tuttavia non si applica agli altri  $S_i$ , dato che non vale la relazione  $\text{Im}(A - \lambda I)^i \subseteq \ker(A - \lambda I)$ .

8. Se so che per  $\lambda$  tutti i blocchi di Jordan hanno la stessa dimensione  $p$ , possiamo calcolare direttamente  $S_p = \text{Im}(A - \lambda I)^{p-1} \cap V_\lambda$ .

**ESERCIZIO.** Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcolare la sua forma di Jordan e la base per cui essa è in tale forma.

**SOLUZIONE.** Il suo polinomio caratteristico è  $C_A(t) = (t - 2)^3$  e  $\lambda = 2$  è l'unico autovalore, con molteplicità algebrica  $m_\lambda = 3$ . Studiamo l'autospazio:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Il rango è  $\text{rk}(A - 2I) = 1$  e la molteplicità geometrica è pertanto  $\dim V_2 = 2$ . Notiamo che le possibili forme di Jordan di una matrice  $3 \times 3$  con unico autovalore 2 sono:

3 blocchi,  $\dim V_2 = 3$  2 blocchi,  $\dim V_2 = 2$  1 blocco,  $\dim V_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Come osservato precedentemente, la molteplicità geometrica di  $\lambda$  dà il numero di blocchi di Jordan della matrice, pertanto ho sicuramente due blocchi di Jordan e, avendo fatto tutti i casi, sappiamo senza altri calcoli che il blocco massimo ha ordine  $p = 2$ . La situazione in termini di spazi  $S_i$ , è:

$$V_2 = S_1 \supseteq S_2 = \text{Im}(A - 2I)$$

Avendo un unico autovalore, nel caso  $S_2$  non abbiamo bisogno di calcolare l'intersezione con l'autospazio. Dunque, cerchiamo una base di  $S_2 = \text{Im}(A - 2I)$ . Sappiamo già che la sua base è di un solo vettore, dato che  $\text{rk}(A - 2I) = 1 = \dim \text{Im}(A - 2I)$ . Essendo l'immagine, possiamo prendere un vettore colonna della matrice  $A - 2I$ , che definiremo  $x_1^1$ ; ad esempio, prendiamo la prima colonna:

$$x_1^1 = (6, 0, 9)$$

Per la scelta effettuata, per costruire  $x_1^2$  ci è sufficiente prendere il vettore  $(1, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= (6, 0, 9) = (A - 2I)(1, 0, 0) \\ x_1^2 &= (1, 0, 0) \end{aligned}$$

Allora  $\{x_1^1, x_1^2\}$  dà il blocco di Jordan di ordine 2.

Completiamo  $\{x_1^1\}$  ad una base di  $V_2$ . Esplicitando l'autospazio:

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \{3x + 3y + 2z = 0\}$$

Possiamo scegliere ad esempio  $(-1, 1, 0)$ , ottenendo allo stesso tempo il vettore che dà il blocco di ordine 1 di Jordan. La base che rende  $A$  in forma di Jordan è:

$$\{(6, 0, 9), (1, 0, 0), (-1, 1, 0)\}$$

#### **ESERCIZIO.** ESERCIZIO 4, SCRITTO LUGLIO 2018

Sia  $A$  matrice quadrata complessa  $6 \times 6$ . Dire quali delle seguenti affermazioni possono verificarsi, motivando la risposta.

1. Il polinomio minimo di  $A$  è  $(t - 2)^5$ , l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3.
2. Il polinomio minimo di  $A$  è  $(t - 2)(t - 3)^3$ , l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3.
3.  $A$  ha polinomio caratteristico è  $(t - 2)^6$  e  $A^2 - A - I = O$ .
4.  $A^2 - A - I = O$  e  $A$  ha autovalori *non* reali.

#### **SOLUZIONE.**

- I  $A$  ha un unico autovalore 2, di molteplicità algebrica 6, dunque il più grande blocco di Jordan nella forma di Jordan di  $A$  ha dimensione 5; poiché la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è la molteplicità geometrica, segue che il numero di blocchi relativi a 2 sono 3.

*Non si può dunque verificare*, in quanto con la condizione di avere un blocco di dimensione 5 non ci può essere più di un solo blocco di dimensione 1.

- II  $A$  ha autovalori 2 e 3, di molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 3, dunque il più grande blocco di Jordan nella forma di Jordan di  $A$  riferito a 2 ha dimensione

1, mentre quello riferito a 3 è 3; poiché la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è la molteplicità geometrica, segue che il numero di blocchi relativi a 2 sono 3.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

III Si ha:

$$\begin{cases} \blacksquare f(t) = t^2 - t - 1 \\ \blacksquare f(A) = O \end{cases} \Rightarrow f(t) \in I_A$$

Tuttavia  $f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_1)$ . Dunque, consideriamo:

$$m_A(t) \mid f(t) \Rightarrow m_A(t) = \begin{cases} t - \lambda_1 \\ t - \lambda_2 \\ f(t) \end{cases}$$

Inoltre,  $m_A(t) \mid C_A(t) = (t - 2)^6$ .

Notiamo che:

$$f(2) = 4 - 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Poiché  $\lambda = 2$  è l'unico autovalore di  $A$  ed  $f \in I_A$ , si avrebbe  $f(2) = 0$ , cioè abbiamo un assurdo.

IV Si ha  $f(t) = t^2 - t - 1 \in I_A$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ sono entrambe non reali.}$$

Allora  $f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_1)$  e, per le osservazioni del punto precedente:

$$m_A(t) = \begin{cases} t - \lambda_1 \\ t - \lambda_2 \\ f(t) \end{cases}$$

Allora, gli autovalori di  $A$  possono essere solo  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , dunque  $A$  non può avere autovalori complessi.

### 9.3 FUNZIONE ESPONENZIALE NEI COMPLESSI

La **funzione esponenziale**  $e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) si può *caratterizzare* in diversi modi; sia con il concetto di limite:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Oppure come il valore della serie di potenze:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Vogliamo ora definire una funzione analoga anche in campo complesso.

**DEFINIZIONE 9.3.0.** Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Definiamo come **funzione esponenziale sui numeri complessi** la seguente serie:

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (9.30)$$

Essa è una funzione continua

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che sia ben definita la funzione mostrando la convergenza della serie. In realtà possiamo mostrare che la serie **converge assolutamente**<sup>a</sup> Dunque, con i complessi consideriamo il *modulo*  $|\cdot|$ :

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \quad (9.31)$$

Questa serie nei reali converge ad  $e^{|z|}$ : la serie pertanto converge assolutamente e dunque la funzione è ben definita; se  $z \in \mathbb{R}$  allora l'esponenziale è in tutto e per tutto quello noto nei reali.

Studiamo ora la continuità, dimostrando che **converga uniformemente**<sup>b</sup> in qualunque sottoinsieme limitato, utilizzando l'M-test di Weierstrass. Se  $S \subseteq \mathbb{C}$  è un sottoinsieme limitato, sicuramente esso è sottoinsieme di un disco nel piano complesso di centro l'origine e raggio  $\varepsilon$ . Dunque,  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : |z| < \varepsilon \forall z \in S$ . Allora varrà:

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{\varepsilon^n}{n!}$$

Passando alle serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} < \infty$$

Allora la funzione esponenziale converge uniformemente su  $S$ , dunque  $e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  è continua.  $\square$

<sup>a</sup>Si può parlare di convergenza assoluta in spazi topologici dotati di una *norma*; si ha che la convergenza implica la convergenza "classica" se lo spazio è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

<sup>b</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 221, si può trovare la definizione della convergenza uniforme e alcune osservazioni a riguardo.

**PROPOSIZIONE 9.3.0.** L'esponenziale in campo complesso gode delle seguenti proprietà:

1.  $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ .
2.  $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ .
3. Se  $t \in \mathbb{R}$ , si ha  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

**DIMOSTRAZIONE.**



I Dati  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
 e^z \cdot e^w &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \stackrel{a}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Binomio di Newton}} \\
 &\implies e^z \cdot e^w = e^{z+w}
 \end{aligned}$$

II  $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ .

III Si ha:

$$\begin{aligned}
 e^{it} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (t)^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (t)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos t + i \sin t
 \end{aligned}$$

□

<sup>a</sup>Il prodotto è lecito in quanto si ha la convergenza assoluta della serie.

#### OSSERVAZIONE.

- $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \implies |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$   
L'argomento di  $e^z$  è, per costruzione,  $y = \operatorname{Im} z$
- $e^{2\pi i} = 1$ , mentre  $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$
- $e^z \neq 0$ , dunque  $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists z \in \mathbb{C} : e^z = w$ , cioè  $e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Infatti, se  $w = x + iy$  si può scrivere in forma polare come:

$$w = |w|(\cos y + i \sin y)$$

Notiamo che:

- ◇  $w = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$ , dunque anche il modulo è zero se e solo se  $x$  e  $y$  sono entrambi zero.
- ◇  $|w| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$ , dunque per suriettività dell'esponenziale reale  $\exists a \in \mathbb{R}$  tale per cui  $e^a = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- ◇ L'argomento di  $w$  è  $\arg(w) = y$
- ◇  $(\cos y + i \sin y) = e^{iy}$ .

Allora, esiste  $z = a + iy$  tale che:

$$w = x + iy = |w|(\cos y + i \sin y) = e^a (\cos y + i \sin y) = e^{a+iy} = e^z$$

#### 9.3.1 Esponenziale di una matrice quadrata complessa

**DEFINIZIONE 9.3.1.** Sia  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$ . Definiamo l'**esponenziale di una matrice quadrata**

complessa come:

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{A^k}{k!}}_{\text{matrice } n \times n} \quad e^A \in \mathbb{C}^{n, n} \quad (9.32)$$

Questa serie di matrici converge se e solo se convergono *tutte* le serie che danno origine ai suoi  $n^2$  elementi. Per dimostrare la convergenza, usiamo una norma particolare.

**DEFINIZIONE 9.3.2.** La **norma infinito di una matrice**  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  è:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i, j=1, \dots, n} |a_{ij}| \quad (9.33)$$

**LEMMA 9.3.0.** PROPRIETÀ DELLA NORMA INFINITO DI UNA MATRICE.

Date le matrici  $n \times n$   $A$  e  $B$ :

1.  $\|A + B\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}$ .
2.  $\|A \cdot B\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty}$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- I  $\forall i, j \quad |a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}| \leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}$ . Per l'arbitrarietà di  $i$  e  $j$ , vale la tesi.
- II Sia  $C = AB$ . Allora:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \\ \Rightarrow |c_{ij}| &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty} \quad \forall i, j \Rightarrow \|C\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty} \end{aligned}$$

□

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che l'esponenziale di una matrice complessa sia ben definito. Consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A^2}{2!} \right\|_{\infty} &\leq n \|A\|_{\infty}^2 \\ \left\| \frac{A^3}{3!} \right\|_{\infty} &\leq n \|A^2 \cdot A\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty}^2 \|A\|_{\infty} \leq n^2 \|A\|_{\infty}^3 \end{aligned}$$

Per induzione in questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right\|_{\infty} &\leq \sum_{k=0}^N \frac{\|A^k\|_{\infty}}{k!} \leq \sum_{k=0}^N \frac{n^{k-1} \|A\|_{\infty}^k}{k!} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \frac{(n \|A\|_{\infty})^k}{k!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n \|A\|_{\infty})^k}{k!} = \frac{1}{n} e^{n \|A\|_{\infty}} \end{aligned}$$

Allora  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  converge assolutamente, pertanto  $e^A$  è ben definito.  $\square$

**ATTENZIONE!** In generale si ha  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ ! Infatti, il prodotto di matrici non è *commutativo*, pertanto in generale non vale la formula del *binomio di Newton*, necessaria nella dimostrazione della proprietà di cui sopra.

**ESEMPIO.** Siano  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$A$  è una *matrice diagonale*, dunque  $e^A$  è facile da calcolare; infatti, presa una qualunque matrice diagonale  $D$ :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^D = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_n} \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

Dunque, nel nostro caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Invece,  $B$  è *nilpotente* di ordine due, dato che  $B^2 = O$ . Allora, scrivendo la serie che caratterizza  $e^B$ , tutti i termini successivi al secondo sono nulli! Pertanto:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!} = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora:

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

D'altro canto, abbiamo che:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificheremo successivamente (pag. 136), quando mostreremo come calcolare in generale l'esponenziale di una matrice, che  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ .

**LEMMA 9.3.1.** Se  $A, B \in \mathbb{C}^{n, n}$  *commutano*, cioè  $AB = BA$ , allora:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad (9.35)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è assolutamente analoga a quella vista per dimostrare la proprietà parallela dell'esponenziale dei numeri complessi (lemma 9.2, pag. 130), dato che, se commutano, vale il *binomio di Newton matriciale*:

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i \cdot B^{k-i} \quad (9.36)$$

□

**OSSERVAZIONE.** *Matrici simili hanno esponenziali simili.* Più precisamente, se  $A = P^{-1}BP$  per una opportuna matrice ortogonale  $P$ , allora  $e^A = P^{-1}e^B P$ , cioè  $e^A$  e  $e^B$  sono simili tramite la stessa matrice  $P$  di  $A$  e  $B$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si ha:

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}BP \\ A^2 &= (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^2P \end{aligned}$$

Per induzione in questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} A^k &= P^{-1}B^kP \\ \Rightarrow e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}B^kP}{k!} = P^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} P = P^{-1}e^B P \end{aligned}$$

□

**TEOREMA 9.3.0.** Si ha:

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)} \quad (9.37)$$

In particolare,  $e^A$  è sempre una matrice invertibile.

**DIMOSTRAZIONE.** Una qualunque matrice  $A$  complessa è simile alla sua forma di Jordan  $J$ . La traccia di matrici simili, per commutatività interna della traccia<sup>a</sup>, è uguale:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(J) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

Per la dimostrazione precedente,  $e^A$  è simile a  $e^J$ ; in particolare, i determinanti sono uguali:

$$\det(e^A) = \det(e^J)$$

Allora è sufficiente dimostrare che  $\det(e^J) = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}$ .  $J$  è una matrice triangolare superiore. Le osservazioni seguenti sono vere anche per una qualsiasi matrice triangolare superiore:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \forall k \geq 1 \quad J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^J = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto sulle colonne, dunque vale  $\det(e^J) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}$  come cercato. In particolare, questo prodotto, in quanto *prodotto di esponenziali*, non è mai nullo e dunque il determinante è *diverso da zero*.  $\square$

<sup>a</sup>Per ogni matrice  $A$  di dimensioni  $n \times m$  e  $B$  di dimensioni  $m \times n$  si ha  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

### 9.3.2 Calcolo dell'esponenziale di una matrice tramite la forma di Jordan

Abbiamo già calcolato alcuni esponenziali di matrici in diverse delle precedenti dimostrazioni, sfruttando tuttavia sempre matrici particolari:

■ **Matrice diagonale:**

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_n} \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

■ **Matrice nilpotente:** se la matrice è nilpotente di ordine  $k$  ( $B^k = O$ ) si calcolano i primi  $k$  termini della serie caratterizzante  $e^B$ :

$$e^B = \sum_{i=0}^{i-1} \frac{B^i}{i!} = I + B + \dots + \frac{B^{k-1}}{(k-1)!} \quad (9.40)$$

In generale, tuttavia, come possiamo calcolare l'esponenziale di una generica matrice  $A$ ? A questo proposito ci viene in aiuto la tanto faticata forma di Jordan. Il seguente processo costruttivo ci permette di calcolare, in modo (relativamente) facile, un qualsiasi esponenziale  $e^A$ .

1.  $A$  è simile alla sua forma di Jordan  $J$ :

$$A = PJP^{-1}$$

Con  $P$  è la matrice del cambiamento di base che presenta, nelle colonne, la base che mette  $A$  in forma di Jordan. Sappiamo allora che per la stessa matrice  $P$  gli esponenziali sono simili:

$$e^A = Pe^JP^{-1}$$

Allora è sufficiente calcolare  $P$ ,  $J$  e  $e^J$ .

2.  $J$  è una matrice a blocchi diagonali, dunque la potenza  $k$ -esima è una matrice con le potenze  $k$ -esime dei blocchi sulla diagonale:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{\mathbf{B}_r} \end{pmatrix} J^k = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{\mathbf{B}_r^k} \end{pmatrix}$$

Dunque usando la definizione, segue che, l'esponenziale è anch'essa una matrice a blocchi:

$$e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{B_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \boxed{e^{B_r}} \end{pmatrix}$$

Dunque, per calcolare l'esponenziale di una matrice in forma di Jordan basta saper calcolare l'esponenziale di un blocco di Jordan.

3. Notiamo che un blocco di ordine  $p$  si può sempre scomporre in una matrice diagonale  $\lambda I_p$  e una matrice nilpotente  $N$  di soli 1.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I_p + N$$

Poiché  $N$  e  $\lambda I_p$  commutano, vale:

$$e^B = e^{\lambda I + N} = e^{\lambda I} e^N \quad (9.41)$$

Dunque basta calcolare  $e^{\lambda I}$  e  $e^N$ , ma sono due matrici di sappiamo già come calcolare l'esponenziale:

- $e^{\lambda I}$  è una *matrice diagonale*:

$$e^{\lambda I} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda I \quad (9.42)$$

- $e^N$  è una *matrice nilpotente* di ordine  $p$ :

$$e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = I + N + \dots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \quad (9.43)$$

**ESEMPIO.** Riprendiamo l'esempio di pagina 133. Prendiamo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e consideriamo  $C = A + B = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  
 $C$  ha autovalori 1 e 2 ed è diagonalizzabile con  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; una base di autovettori di  $C$  è  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$  e la matrice del cambiamento di basi è  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Allora,

considerata l'inversa  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$C = PDP^{-1} \implies e^C = Pe^DP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -e + e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} (I + B) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^C$$

### 9.3.3 Impratichiamoci! Funzione esponenziale nei complessi

**ESERCIZIO.** ESERCIZIO 4, SCRITTO FEBBRAIO 2018

Sia  $A = e^{\lambda I} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcolare  $\exp(A) = e^A$

**SOLUZIONE.** Il polinomio minimo è  $C_A(t) = (t+1)^2$ , l'unico autovalore della matrice è  $\lambda = -1$  con molteplicità  $m_\lambda = 2$ . Troviamo la forma di Jordan.

$$V_\lambda = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(x, y) \mid x - 2y = 0\} = \langle (2, 1) \rangle$$

Poiché  $\dim V_\lambda = 1$ , segue che la forma di Jordan è un unico blocco di ordine  $p = 2$ :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora una matrice  $P$ , e dunque una base  $\mathcal{B}$ , che mette  $A$  in forma di Jordan ( $A = PJP^{-1}$ ). Poiché abbiamo un unico autovalore,  $(A - \lambda I)^2 = O$  e  $\text{Im}(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)$ . Studiamo  $S_2 = \ker(A + I) \cap \text{Im}(A + I)^{p-1} = \text{Im}(A + I)$ ; esso ha  $\dim S_2 = 1$  e per trovarne una base basta prendere una colonna di  $A + I$ :

$$v_2 = (2, 1) =$$

Per costruire  $v_1$  è sufficiente prendere  $(-1, 0)$ :

$$v_2 = (2, 1) = (A + I)(-1, 0)$$

$$v_1 = (-1, 0)$$

Una base che mette  $A$  in forma di Jordan è dunque  $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 0)\}$  e dunque abbiamo  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inversa è, noto il determinante  $\det P = 1$ :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo  $e^J$ :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -I + N$$

Dunque:

$$\begin{aligned} e^J &= e^{-I+N} = e^{-I} e^N = e^{-1} I (I + N) = e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow e^A &= e^{-1} P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un metodo alternativo per calcolare la base  $\mathcal{B}$  che rende  $A$  in forma di Jordan è il seguente. Nota la forma di Jordan  $J$  consideriamo l'applicazione lineare  $f$  associata ad essa rispetto alla base  $\mathcal{B}$  e l'applicazione  $g = f + Id$ ; esse devono soddisfare:

$$\begin{cases} f(v_1) = -v_1 \\ f(v_2) = v_1 - v_2 \end{cases} \quad \begin{cases} g(v_1) = 0 \\ g(v_2) = v_1 \end{cases}$$

Cerchiamo dei vettori tali che:

$$\begin{aligned} v_2 &\in \ker(A + I)^2 \setminus \ker(A + I) \\ v_1 &\in \ker(A + I) \end{aligned}$$

Poichè  $v_2 \in \ker(A + I)^2 = V$ , basta prendere un vettore della base canonica di  $V$ , ad esempio  $e_1 = (1, 0, 0)$ , che non appartenga a  $\ker(A + I)$ . Allora:

$$\begin{aligned} v_2 &:= e_1 = (1, 0) \\ v_1 &= g(v_2) = (A + I)v_2 = g(v_2) = (-2, -1) \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice  $P$  risulta:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che usando questa matrice  $P$  si arriva comunque allo stesso esponenziale visto prima.

In questo problema si può anche evitare il calcolo della forma di Jordan. Infatti, notando che la matrice  $B = A + I$  è nilpotente di ordine 2, ovvero  $B^2 = O$ , e commuta con  $-I$ . Allora possiamo calcolare  $e^A$  in questo modo:

$$e^A = e^{B-I} = e^B \cdot e^{-I} = e^{-1} (I + B) = e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

#### 9.4 MATRICI REALI E FORMA DI JORDAN

Abbiamo studiato le forme di Jordan in  $\mathbb{C}^{n,n}$ , dato che abbiamo la sicurezza dell'esistenza di tutti gli autovalori e dunque anche della forma di Jordan. E se la matrice fosse a valori reali, possiamo parlare di forma di Jordan in  $\mathbb{R}^{n,n}$ ?

Dato che la forma di Jordan associata ad una matrice ha sulla diagonale gli autovalori di  $A$  con molteplicità e al di fuori di essa o zero o uno, possiamo fare la seguente osservazione.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $J$  la forma di Jordan di  $A$ . Allora  $J$  è reale se e solo se gli autovalori di  $A$  sono reali.



Supponiamo che  $A$  abbia autovalori reali e  $J$  sia la sua forma di Jordan. Allora  $\exists P \in GL(n, \mathbb{C})$  tale che esse siano simili per  $P$  in campo complesso:  $A = PJP^{-1}$ . In realtà, si può dimostrare come  $A$  e  $J$  siano simili come matrici reali, cioè  $\exists Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tale che  $A = QJQ^{-1}$ .

**TEOREMA 9.4.0.** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  tali che  $\exists P \in GL(n, \mathbb{C}) : A = PBP^{-1}$ . Allora  $\exists Q \in GL(n, \mathbb{R}) : A = QBQ^{-1}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Innanzitutto,  $A = PBP^{-1}$  se e solo se  $AP = PB$ . Consideriamo le soluzioni  $X$ , matrice  $n \times n$  a coefficienti reali, del sistema lineare omogeneo in  $n^2$  equazioni in  $n^2$  incognite.

$$AX = XB$$

Sia  $W \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$  il sottospazio *vettoriale* delle soluzioni (*complesse*) del sistema. Sappiamo già che  $P \in W$ , dunque  $W \neq \{O\}$ .

Sia allora  $k = \dim W \geq 1$  e sia  $C_1, \dots, C_k \in \mathbb{C}^{n,n}$  una base di  $W$ . Esse sono matrici complesse, dunque possiamo scomporla nella sua parte reale e immaginaria.

$$\forall j = 1, \dots, k \quad C_j = X_j + iY_j, \quad X_j, Y_j \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Mostriamo che anche  $X_j$  e  $Y_j$  sono soluzioni del sistema. Dunque, presa  $C_j$ :

$$\begin{array}{ccc} AC_j & = & C_j B \\ \parallel & & \parallel \\ A(X_j + iY_j) & & (X_j + iY_j)B \\ \parallel & & \parallel \\ AX_j + AY_j & & X_j B + iY_j B \end{array}$$

Le matrici  $AX_j$ ,  $AY_j$ ,  $X_j B$  e  $Y_j B$  sono tutte in  $\mathbb{R}^{n,n}$ . Due matrici complesse scomposte come in precedenza sono uguali se e solo se la parte reale e l'argomento sono uguali:

$$\begin{aligned} AX_j &= X_j B \\ AY_j &= Y_j B \end{aligned}$$

Ma allora  $X_j, Y_j \in W \quad \forall j$ ; poiché  $C_1, \dots, C_k$  è una base di  $W$ , allora lo generano. Per costruzione  $C_j = X_j + iY_j$ , dunque anche  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k$  generano  $W$  (come spazio vettoriale *complesso*).

Sappiamo sicuramente che  $\{X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k\}$  contiene una base di  $W$ , cioè  $\exists D_1, \dots, D_k$  base  $\mathcal{D}$  di  $W$  con  $D_j \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \forall j$ .

Dalle condizioni in cui ci siamo posti, la matrice  $Q$  cercate deve soddisfare i seguenti requisiti:

- $Q \in W$ .
- $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ .
- $Q$  invertibile.

Rispetto alla base  $\mathcal{D}$ , Ogni  $D \in W$  è della forma:

$$D = t_1 D_1 + \dots + t_k D_k \quad \text{con } t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}^{n,n}$$

Nel caso di matrici reali, i coefficienti  $t_1, \dots, t_k$  saranno *tutti reali*. Poniamo:

$$f(t_1, \dots, t_k) := \det(t_1 D_1 + \dots + t_k D_k)$$

La funzione, di variabili  $t_1, \dots, t_k$ , è un polinomio che presenta *solo coefficienti reali* (essendo  $D_1, \dots, D_k$  matrici reali) e non è *identicamente nulla* (Per ipotesi  $P \in W$  è invertibile, dunque  $\det P \neq 0$ ). In particolare, esistono sicuramente dei valori *reali*  $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_k$  per cui  $f$  non si annulla<sup>a</sup>, cioè esiste la matrice reale:

$$Q := \hat{t}_1 D_1 + \dots + \hat{t}_k D_k$$

Che soddisfa la tesi. □

---

<sup>a</sup>Infatti, presa una combinazione lineare degli elementi di una base come  $\mathcal{D}$  con coefficienti reali non nulli, allora essa non sarà mai nulla.

# IV

## GEOMETRIA PROIETTIVA



## GEOMETRIA PROIETTIVA

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 10.1 SPAZI PROIETTIVI

Abbiamo già approfondito lo **spazio proiettivo reale** e le sue caratteristiche sia *topologicamente* nel Capitolo 5, sia come *varietà topologica* nel ?? In questo capitolo, ci dedicheremo a *generalizzare* il concetto per un *qualsiasi* spazio vettoriale su campo  $\mathbb{K}$ , utilizzando gli strumenti dell'algebra lineare.

**DEFINIZIONE 10.1.0.** SPAZIO PROIETTIVO.

Sia  $\mathbb{K}$  un campo e  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione *finita* su  $\mathbb{K}$ . Lo **spazio proiettivo** associato a  $V$  è l'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^n(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim} \quad (10.1)$$

Dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza data su  $V \setminus \{0\}$  definita dall'azione del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ :

$$\forall v, w \in V \setminus \{0\} \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : v = \lambda w \quad (10.2)$$

Lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n(V)$  si dice anche il **proiettivizzato** di  $V$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che è una relazione di equivalenza:

- **RIFLESSIVA:**  $v \sim v$ ? Basta porre  $\lambda = 1$ , in quanto  $x = 1 \cdot x$ .
- **SIMMETRICA:** Per ipotesi  $y = \lambda x$ , allora  $x = \frac{1}{\lambda} y$  ( $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ).
- **TRANSITIVA:** Poichè  $y = \lambda x$ ,  $z = \mu y$ , segue  $z = \mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$  e  $\mu\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . □

**DEFINIZIONE 10.1.1.** DIMENSIONE DI UNO SPAZIO PROIETTIVO.

La **dimensione** di  $\mathbb{P}^n(V)$  è:

$$\dim \mathbb{P}^n(V) = \dim V - 1 \quad (10.3)$$

Se  $V = \{0\}$ , allora  $\mathbb{P}^n(V) = \emptyset$  e si pone  $\dim \emptyset := -1$ .

**DEFINIZIONE 10.1.2.** PROIEZIONE AL QUOZIENTE E CLASSE.

Si denota con  $\pi : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$  la **proiezione al quoziente** e con  $[v] \in \mathbb{P}^n(V)$  la **classe** di  $v \in V \setminus \{0\}$ .

**OSSERVAZIONE.** Si ha una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(V) &\leftrightarrow \{\text{sottospazi vettoriali 1-dimensionali di } V\} \\ [v] &\leftrightarrow \mathcal{L}(v) \end{aligned} \quad (10.4)$$

In altre parole, possiamo pensare a  $\mathbb{P}^n(V)$  come l'insieme delle **rette vettoriali** in  $V$ .

**DEFINIZIONE 10.1.3.** ALTRE NOMENCLATURE PROIETTIVE.

- Se  $\dim V = 1$ , allora  $\mathbb{P}^n(V)$  è un **punto** e  $\dim \mathbb{P}^n(V) = 0$ .
- Se  $\dim \mathbb{P}^n(V) = 1$ , si parla di **retta proiettiva**.
- Se  $\dim \mathbb{P}^n(V) = 2$ , si parla di **piano proiettivo**.
- Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , si parla rispettivamente di **spazio proiettivo reale** o di **spazio proiettivo complesso**.

Gli esempi più frequenti di spazi proiettivi si ottengono considerando  $V = \mathbb{K}^{n+1}$ .

**DEFINIZIONE 10.1.4.** SPAZIO PROIETTIVO NUMERICO.

Lo **spazio proiettivo numerico** o **spazio proiettivo standard** è lo spazio proiettivo su  $\mathbb{K}^{n+1}$ :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^{n+1}) \quad (10.5)$$

Essi sono spazi di dimensione  $\dim \mathbb{P}^n = n$ .

## 10.2 SOTTOSPAZI PROIETTIVI

Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio vettoriale. Allora  $W \setminus \{0\} \subseteq V \setminus \{0\}$  è chiuso rispetto alla relazione di equivalenza  $\sim$  precedentemente definita e  $\mathbb{P}^n(W)$  è naturalmente un sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n(V)$ .

**DEFINIZIONE 10.2.0.** SOTTOSPAZIO PROIETTIVO.

Se  $W \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale, allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è detto **sottospazio proiettivo**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(W) &= \pi(W \setminus \{0\}) = \{[w] \in \mathbb{P}^n(V) \mid w \in W\} \\ &= \{\text{sottospazi vettoriale 1-dimensione di } V \text{ contenuti in } W\} \end{aligned}$$

La dimensione del sottospazio proiettivo è  $\dim \mathbb{P}^n(W) = \dim W - 1$ .

- Se  $W = \{0\}$ , allora  $\mathbb{P}^n(W) = \emptyset$ .
- Se  $\dim W = 1$ , allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è un punto, che indichiamo con  $[w]$  per un  $w \in W$ .

- Se  $\dim W = 2$  ( $\dim \mathbb{P}^n(W) = 1$ ), allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è **retta proiettiva** in  $\mathbb{P}^n(V)$ .
- Se  $\dim W = 3$  ( $\dim \mathbb{P}^n(W) = 2$ ), allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è **piano proiettivo** in  $\mathbb{P}^n(V)$ .
- Se  $\dim \mathbb{P}^n(W) = \dim \mathbb{P}^n(V) - 1$ , allora  $\mathbb{P}^n(W)$  è **iperpiano (proiettivo)** in  $\mathbb{P}^n(V)$ .

**DEFINIZIONE 10.2.1. CODIMENSIONE.**

Si definisce la **codimensione** di  $\mathbb{P}^n(W)$  sottospazio proiettivo come:

$$\text{Codim } \mathbb{P}^n(W) = \dim \mathbb{P}^n(V) - \dim \mathbb{P}^n(W) \quad (10.6)$$

**ESEMPIO.** Gli iperpiani sono sottospazi di codimensione 1.

## 10.3 COORDINATE OMOGENEE E SISTEMI DI RIFERIMENTO PROIETTIVO

Consideriamo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^{n+1})$ . Se  $v = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ , denotiamo la corrispondente classe in questa forma:

$$[v] = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \quad x_i \in \mathbb{K} \quad (10.7)$$

**OSSERVAZIONI.**

1. Le  $x_i$  non possono mai essere tutte nulle, dato che  $v \neq 0$ .
2. Due classi sono uguali se le componenti sono tutte in proporzione per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{K}$ .<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} (x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n) &\iff (x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : y_0 = \lambda x_0, \dots, y_n = \lambda x_n \end{aligned}$$

<sup>a</sup>La notazione con  $i$  : viene utilizzata per mettere in evidenza che la relazione fra classi e vettori è di proporzione.

**ESEMPLI.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} (1 : 1 : 2) &= (-2 : -2 : -4) \\ (1 : 0 : 2) &= \left(\frac{1}{3} : 0 : \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE 10.3.0. RIFERIMENTO PROIETTIVO E COORDINATE OMOGENEE.**

Sia  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  una base di  $V$ , con  $\dim V = n + 1$ . Se  $v \in V \setminus \{0\}$ , si ha:

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n, \text{ con } x_i \in \mathbb{K}$$

Diciamo che  $(x_0 : \dots : x_n)$  sono le **coordinate omogenee** di  $[v] \in \mathbb{P}^n(V)$  definite dalla base  $\mathcal{B}$  e scriviamo:

$$[v] = (x_0 : \dots : x_n) \quad (10.8)$$

La base  $\mathcal{B}$  definisce su  $\mathbb{P}^n(V)$  un **sistema di riferimento proiettivo**, cioè ad ogni punto vengono assegnate delle coordinate omogenee.

**OSSERVAZIONI.**

- Le coordinate omogenee non possono *mai* essere *tutte nulle*.
- Le coordinate omogenee sono definite *solo a meno di multipli*.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ha delle coordinate omogenee “naturalì” date dalla base canonica di  $\mathbb{K}^{n+1}$ .
- Basi *multiple* definiscono lo stesso riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}^n(V)$ , cioè le stesse coordinate omogenee.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l’ultimo punto. Siano:

$$\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\} \quad \mathcal{B}' = \{\mu e_0, \dots, \mu e_n\}$$

Con  $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Si ha:

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = \frac{x_0}{\mu} (\mu e_0) + \dots + \frac{x_n}{\mu} (\mu e_n)$$

Passando allo spazio proiettivo:

$$\underbrace{(x_0 : \dots : x_n)}_{\text{coordinate omogenee rispetto a } \mathcal{B}} = \underbrace{\left( \frac{x_0}{\mu} : \dots : \frac{x_n}{\mu} \right)}_{\text{coordinate omogenee rispetto a } \mathcal{B}'}$$

□

**DEFINIZIONE 10.3.1.** PUNTI FONDAMENTALI E PUNTO UNITÀ.

Data la base  $\mathcal{B}$ , i punti:

$$\begin{aligned} P_0 &= [e_0] = (1 : 0 : \dots : 0) \\ P_1 &= [e_1] = (0 : 1 : \dots : 0) \\ &\dots \\ P_n &= [e_n] = (0 : 0 : \dots : 1) \end{aligned} \tag{10.9}$$

Sono detti **punti fondamentali** o **punti coordinati**, mentre il punto:

$$U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n] = (1 : 1 : \dots : 1)$$

È detto **punto unità**.

**10.3.0.1** Descrizione dei sottospazi proiettivi in coordinate

Siano  $(x_0 : \dots : x_n)$  coordinate omogenee su  $\mathbb{P}^n(V)$ , indotte da una base  $\mathcal{B}$ , e consideriamo l’equazione lineare omogenea:

$$\textcircled{*} \quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

Con  $a_i \in \mathbb{K}$  non tutti nulli.

- In  $V$  l’equazione omogenea rappresenta un *iperpiano vettoriale*  $H$ .
- I punti  $P = [v] \in \mathbb{P}^n(V)$ , le cui coordinate soddisfano l’equazioni, sono quelli tali per cui  $v \in H$ , cioè sono tutti e soli i punti dell’iperpiano proiettivo  $\mathbb{P}^n(H) \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ . L’equazione lineare  $\textcircled{*}$  è l’**equazione (cartesiana) dell’iperpiano proiettivo**  $\mathbb{P}^n(H)$ .



**DEFINIZIONE 10.3.2. IPERPIANO COORDINATO.**

Gli iperpiani di equazione cartesiana  $x_i = 0$ , cioè tutti i punti la cui  $i$ -esima coordinata omogenea è nulla, si dicono  **$i$ -esimi iperpiani coordinati**.

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , cioè una *retta proiettiva* ( $\dim \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = 1$ ), i sottospazi proiettivi sono:

- $\emptyset$ .
- I punti, che in questo caso sono gli iperpiani.
- Tutto  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ .

Il punto  $(a : b)$  ha equazione cartesiana:

$$bx_0 - ax_1 = 0 \quad (10.10)$$

Ovvero l'equazione della retta in  $\mathbb{K}^2$  generata dal vettore  $(a, b)$ , ottenuta pertanto dal determinante  $\begin{vmatrix} a & b \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = 0$ .

**ATTENZIONE!** In  $\mathbb{P}^n(V)$  un sottospazio proiettivo di *dimensione zero* è un singolo punto  $[v] = \mathbb{P}^n(\mathcal{L}(v))$ .

Più in generale: fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $V$ , ogni *sottospazio vettoriale*  $W$  di  $V$  può essere visto, in *coordinate* rispetto alla base, come l'*insieme delle soluzioni* di un *sistema lineare omogeneo*.

$$Ax = 0$$

Dove  $A = (a_{ij})$  è di dimensioni  $t \times (n+1)$  a elementi in  $\mathbb{K}$ , mentre si ha:

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

$$\textcircled{*} \begin{cases} a_{1,0}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{t,0}x_0 + \dots + a_{t,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (10.12)$$

Il sistema  $\textcircled{*}$  dà delle *equazioni cartesiane* per il sottospazio proiettivo  $\mathbb{P}^n(W)$  nelle coordinate omogenee  $(x_0 : \dots : x_n)$ .

Posto dunque  $t$  come il numero delle *equazioni*, notiamo che:

$$\begin{aligned} \dim W &= n+1 - \text{rk } A \\ \text{Codim } W &= \text{rk } A \\ \parallel \\ \dim V - \dim W &= \dim \mathbb{P}^n(V) - \dim \mathbb{P}^n(W) = \text{Codim } \mathbb{P}^n(W) \\ \implies t &\geq \text{rk } (A) = \text{Codim } \mathbb{P}^n(W) \end{aligned}$$

Scartando delle equazioni possiamo sempre ricondurci ad un sistema in cui:

$$t = \text{rk } A = \text{Codim } \mathbb{P}^n(W) \quad (10.13)$$

**INTUITIVAMENTE...** Per facilitare la visualizzazione degli spazi proiettivi possiamo pensare allo spazio  $\mathbb{K}^{n+1}$  come lo **spazio affine**  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^{n+1})$  in cui sia fissato un punto  $O$  come origine: in questo modo, le classi di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  corrispondono alle *rette affini passanti per  $O$*  (identificate con le rette vettoriali di  $\mathbb{K}^{n+1}$ ):

$$(x_0 : \dots : x_n) \leftrightarrow \begin{array}{l} \text{retta affine di } \mathcal{A}(\mathbb{K}^{n+1}) \text{ formata} \\ \text{dai punti } (tx_0, \dots, tx_n) \text{ al variare di } t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Approfondiremo formalmente la relazione tra gli spazi affini e gli spazi proiettivi più avanti, a pag. 10.8.

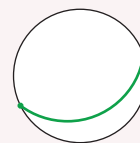
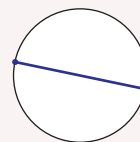
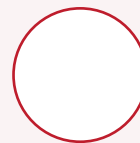
#### ESEMPL.

- Il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  ha, come sottospazi *non banali*, i punti e le rette.
  - ◇ Una *retta proiettiva* viene da un *piano*, che nel riferimento *affine* possiamo prendere passante per l'origine:  $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ .
  - ◇ Un *punto* servono due equazioni, in sostanza vedendolo come *intersezione di due rette proiettive*; ad esempio,  $(1 : 0 : 0)$  ha equazioni  $x_1 = x_2 = 0$ , mentre  $(1 : 2 : 3)$  ha equazioni  $\begin{cases} x_1 = 2x_0 \\ x_2 = 3x_0 \end{cases}$

- Nel piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , le *rette proiettive* vengono da *piani vettoriali*, mentre nel modello affine di  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$  essi sono passanti per l'origine; utilizzando la *sfera unitaria* ai quali identifichiamo i punti antipodali in una relazione di equivalenza, la retta proiettiva si visualizza facilmente come l'*intersezione* della sfera in un *cerchio massimo*.

In questo modo, considerando la *semisfera superiore*, la **proiezione** dell'intersezione su di essa sul disco unitario  $D$  è la rappresentazione della retta proiettiva sul *modello piano* ben noto. Dunque, guardando le rette proiettive nel *modello piano*, se ne hanno di *tre tipi*:

1. La *retta* con equazione  $z = 0$ , ovvero al piano  $xy$  in  $\mathbb{R}^3$ : sul modello piano corrisponde al **bordo del disco  $D$**  (cioè  $S^1$ ).
2. Le *rette* con equazione  $ax + by = 0$ , ovvero ai *piani perpendicolari* in  $\mathbb{R}^3$  passanti per le rette con quell'equazione  $ax + by = 0$ : sul modello piano corrisponde a **diametri colleganti due punti** sul bordo.
3. Nel caso generale  $ax + by + cz = 0$ , proiettando l'*arco di cerchio massimo* viene un **arco di ellisse** in  $D$ .



#### 10.4 OPERAZIONI CON I SOTTOSPAZI

Se  $W_1, W_2 \subseteq V$  sono sottospazi vettoriali, allora  $W_1 \cap W_2$  è un sottospazio vettoriale e si ha che l'**intersezione** dei corrispondenti spazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo.

$$\mathbb{P}^n(W_1 \cap W_2) = \mathbb{P}^n(W_1) \cap \mathbb{P}^n(W_2)$$

**OSSERVAZIONE.** Si ha:

$$\mathbb{P}^n(W_1) \cap \mathbb{P}^n(W_2) = \emptyset \iff W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

In tal caso diciamo che i due sottospazi sono **sghembi** o **disgiunti**.

Come per i sottospazi vettoriali, in generale l'**unione** di due sottospazi proiettivi *non* è un sottospazio proiettivo.

**DEFINIZIONE 10.4.0.** SOTTOSPAZIO GENERATO DA UN SOTTOINSIEME.

Sia  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  un sottoinsieme non vuoto. Il **sottospazio generato** da  $S$ , denotato con  $\langle S \rangle$ , è l'intersezione in  $\mathbb{P}^n(V)$  di tutti i sottospazi proiettivi contenenti  $S$ , ed è il più piccolo sottospazio contenente  $S$ .

- $\langle S \rangle = S \iff S$  è un sottospazio proiettivo.
- Se  $S = \{P_1, \dots, P_m\}$  è finito, scriviamo  $\langle P_1, \dots, P_m \rangle$  per il sottospazio generato da  $P_1, \dots, P_m$ .

**DEFINIZIONE 10.4.1.** SOTTOSPAZIO SOMMA.

Dati due sottospazi proiettivi  $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ , cioè:

$$T_i = \mathbb{P}^n(W_i) \quad W_i \subseteq V, \quad i = 1, 2$$

Allora il sottospazio generato da  $T_1 \cup T_2$  è denotato con  $T_1 + T_2 = \langle T_1, T_2 \rangle$  e si chiama **sottospazio somma**. In particolare, si ha:

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(W_1 + W_2) \quad (10.14)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\subseteq$ )  $\mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$  è un sottospazio proiettivo che contiene, in quanto  $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ ,  $W_2 \subseteq W_1 + W_2$  vettorialmente, sia  $T_1 = \mathbb{P}^n(W_1)$  sia  $T_2 = \mathbb{P}^n(W_2)$ . In particolare, contiene la loro unione<sup>a</sup>, dunque  $\langle T_1, T_2 \rangle \subseteq \mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$ .

$\supseteq$ ) Abbiamo che  $T_i \subseteq \langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(U)$ , con  $U$  un sottospazio vettoriale di  $V$ . In particolare, si ha che  $W_1, W_2 \subseteq U$ , da cui  $W_1 + W_2 \subseteq U$ . Passando allo spazio proiettivo:

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(U) \subseteq \mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$$

<sup>a</sup>Ricordiamo che non è essa un sottospazio, ma un sottoinsieme. □

**PROPOSIZIONE 10.4.0.** FORMULA DI GRASSMANN PROIETTIVA.

Siano  $T_1, T_2$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(V)$ . Si ha:

$$\dim \langle T_1, T_2 \rangle + \dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 \quad (10.15)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Posti  $T_i = \mathbb{P}^n(W_i)$ , con  $W_i \subseteq V$  sottospazi vettoriali. Dalla *formula di Grassmann vettoriale*:

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Sottraendo 1 a tutte le dimensioni, otteniamo le dimensioni dei corrispondenti spazi proiettivi e dunque la formula proiettiva.  $\square$

**COROLLARIO 10.4.0.** Siano  $T_1, T_2$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(V)$  con  $\dim \mathbb{P}^n(P) = n$ . Allora:

$$\dim(T_1 \cap T_2) \geq \dim T_1 + \dim T_2 - n \quad (10.16)$$

In particolare  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  se  $\dim T_1 + \dim T_2 \geq n$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

$$\dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 - \dim \langle T_1, T_2 \rangle \geq \dim T_1 + \dim T_2 - n$$

Chiaramente, se  $\dim T_1 + \dim T_2 \geq n$ , allora  $\dim(T_1 \cap T_2) \geq 0$  e dunque  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

**ESEMPIO.** Nel piano proiettivo, due rette sono *sempre incidenti*. Infatti, le rette hanno dimensione 1, mentre  $\dim \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = 2$ , dunque vale  $1 + 1 \leq 2$ , pertanto due rette si incontrano sempre.

**OSSERVAZIONE.** Se consideriamo l'insieme *finito di punti*, possiamo considerare lo spazio  $S$  generato da  $P_1, \dots, P_m$ , cioè  $S = \langle P_1, \dots, P_m \rangle$ ; inoltre, si ha:

$$\dim S \leq m - 1$$

Infatti, se  $P_i = [v_i]$  con  $v_i \in V$ , allora:

$$S = \mathbb{P}^n(\underbrace{\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)}_{\dim \mathcal{L} \leq m})$$

## 10.5 PUNTI LINEARMENTE INDIPENDENTI E IN POSIZIONE GENERALE

**DEFINIZIONE 10.5.0.** PUNTI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Siano  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}^n(V)$ . Diciamo che i punti  $P_1, \dots, P_m$  sono **linearmente indipendenti** se, scelti  $v_1, \dots, v_m \in V \setminus \{0\}$  tali che  $P_i = [v_i] \forall i$ , i vettori  $v_1, \dots, v_m$  sono *linearmente indipendenti* in  $V$ .

Se così non è, diciamo che  $P_1, \dots, P_m$  sono linearmente dipendenti.

**OSSERVAZIONI.**

- La definizione è *ben posta*. Dati  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , si ha che:

$$v_1, \dots, v_m \text{ sono indipendenti} \iff \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_m v_m \text{ sono indipendenti.}$$

- Se  $\dim \mathbb{P}^n(V) = n$ ,  $\mathbb{P}^n(V)$  contiene al più  $n + 1$  punti indipendenti.
- $P_1, \dots, P_m$  sono indipendenti se e solo se  $\dim \langle P_1, \dots, P_m \rangle = m - 1$ .

**ESEMPLI.**

- Due punti  $P, Q$  sono indipendenti se e solo se  $P \neq Q$ . Infatti, se  $P = [v]$  e  $Q = [w]$ , allora:

$$P \text{ e } Q \text{ sono indipendenti} \iff v \text{ e } w \text{ sono indipendenti} \iff v \approx w \iff P \neq Q$$

In tal caso  $\langle P, Q \rangle$  è l'unico *retta* contenente  $P$  e  $Q$ , che indicheremo anche con  $\overline{PQ}$ .

- Tre punti  $P_1, P_2, P_3$  sono indipendenti se e solo se sono *distinti* e *non* sono *allineati*, cioè appartenenti alla stessa retta. In tal caso  $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$  è l'unico *piano* contenente i tre punti.

**DEFINIZIONE 10.5.1.** PUNTI IN POSIZIONE GENERALE.

Dati dei punti  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}^n(V)$ , diciamo che sono **in posizione generale** se vale una delle due condizioni seguenti:

- $m \leq n + 1$  e i punti sono *linearmente indipendenti*.
- $m > n + 1$  e ogni scelta di  $n + 1$  punti tra loro sono linearmente indipendenti.

**ESEMPIO.**

- Se  $n = 1$ , cioè  $\mathbb{P}^n(V)$  è una *retta proiettiva*, allora  $P_1, \dots, P_m$  sono in posizione generale se e solo se  $P_1, \dots, P_m$  sono *tutti distinti*.
- Se  $n = 2$ , cioè  $\mathbb{P}^n(V)$  è una *piano proiettivo*, allora  $P_1, \dots, P_m$  sono in posizione generale se e solo se  $P_1, \dots, P_m$  sono a 3 a 3 *non allineati*.

10.5.1 *Impratichiamoci! Punti linearmente indipendenti***ESERCIZIO.** F.F.P., 2.1.

Si mostri che i punti del piano proiettivo reale:

$$\left(\frac{1}{2} : 1 : 1\right) \quad \left(1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right) \quad (2 : -1 : 2)$$

Sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

**SOLUZIONE.** Per verificare che i 3 punti sono allineati, dobbiamo verificare che i corrispondenti vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono dipendenti. Riscriviamo i seguenti punti per facilitarci i calcoli:

$$\left(\frac{1}{2} : 1 : 1\right) = (1 : 2 : 2) \quad \left(1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right) = (3 : 1 : 4)$$

Verifichiamolo la dipendenza con il determinante.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione della retta è data dall'equazione del piano vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  generate da 2

dei 3 vettori:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = x_0(8-2) - x_1(4-6) + x_2(1-6) = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2$$

Verifichiamo che contenga anche il terzo:

$$6 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 = 0$$

### 10.6 RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DI UN SOTTOSPAZIO PROIETTIVO

Sia  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  un sottospazio proiettivo di dimensione  $m$ . Allora esistono sempre  $m+1$  punti  $P_0, \dots, P_m \in S$  linearmente indipendenti che generano  $S$ . Infatti, se  $S = \mathbb{P}^n(W)$  con  $W \subseteq V$  sottospazio vettoriale di dimensione  $m+1$ , possiamo scegliere una base  $\{w_0, \dots, w_m\}$  di  $W$  tale per cui:

$$P_i = [w_i] \in S$$

Sono linearmente indipendenti (perché lo sono i vettori della base) e generano  $S$ . Allora, tutti e soli i punti di  $S$  sono della forma:

$$[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m] \quad \lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$$

Supponiamo ora di aver fissato una base  $\{e_0, \dots, e_n\}$  di  $V$  e quindi di aver considerato il corrispondente *riferimento proiettivo*. In coordinate vettoriali di  $V$ , un punto di  $W$  è  $x = (x_0, \dots, x_n)$  se e solo se:

$$x = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m$$

Il punto  $P_i$  in  $V$  avrà coordinate  $(P_{0,i}, \dots, P_{n,i}) \forall i = 1, \dots, m$ , dunque il generico vettore  $x$  di  $W$  è espresso da:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 P_{0,0} + \lambda_1 P_{0,1} + \dots + \lambda_m P_{0,m} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 P_{n,0} + \lambda_1 P_{n,1} + \dots + \lambda_m P_{n,m} \end{cases} \quad (10.17)$$

Anche i punti di  $S$  sono date da queste coordinate, dunque questa viene definita la **rappresentazione parametrica** del sottospazio  $S$ , con  $(\lambda_0 : \dots : \lambda_m)$  le coordinate omogenee di  $\mathbb{P}^n(W)$  date dalla base  $\{w_0, \dots, w_m\}$ .

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  consideriamo i punti:

$$A = (1 : 0 : -1 : 4) \quad B = (2 : 3 : 0 : 5)$$

Allora, la rappresentazione parametrica del sottospazio  $S$  con  $(\lambda : \mu)$  è:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + 2\mu \\ x_1 = 3\mu \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 4\lambda - 5\mu \end{cases}$$

## 10.6.1 Coordinate proiettive e punti in posizione generale

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathbb{P}^n(V)$  con un riferimento proiettivo fissato. Consideriamo i punti fondamentali  $P_0, \dots, P_n$  e il punto unità  $U$ .

- $P_0, \dots, P_n, U$  sono  $n+2$  punti.
- $P_0, \dots, P_n, U$  sono in posizione generale: essendo  $P_i = [e_i]$  con  $e_0, \dots, e_n$  base di  $V$ , allora  $P_0, \dots, P_n$  sono indipendenti. Se sostituiamo l' $i$ -esimo punto con  $U = [e_1 + \dots + e_n]$ , allora:

$$P_0, \dots, \check{P}_i, \dots, U$$

Sono indipendenti  $\forall i = 0, \dots, n$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Indichiamo con  $\check{P}_i$  il punto che sostituiamo.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  una base che induce un riferimento proiettivo su  $\mathbb{P}^n(V)$ .

Per ogni  $i$  sia  $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  e consideriamo  $v_i = \lambda_i e_i$ . Allora  $\mathcal{B}' = \{v_0, \dots, v_n\}$  è ancora una base e i punti fondamentali del riferimento indotto da  $\mathcal{B}'$  sono gli stessi del riferimento indotto da  $\mathcal{B}$ . Infatti:

$$[e_i] = [v_i] = P_i$$

Però i due riferimenti sono **diversi**; dato  $v$  espresso nella base  $\mathcal{B}$ :

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$$

La sua classe in  $\mathbb{P}^n(V)$ , rispetto a  $\mathcal{B}$ , è:

$$[v] = (x_0 : \dots : x_n)$$

Possiamo partire dall'espressione di  $v$  nella base  $\mathcal{B}$  a quella nella base  $\mathcal{B}'$ , moltiplicando e dividendo ogni  $e_i$  per il corrispettivo  $\lambda_i$ :

$$v = \frac{x_0}{\lambda_0} (\lambda_0 e_0) + \dots + \frac{x_n}{\lambda_n} (\lambda_n e_n) = \frac{x_0}{\lambda_0} v_0 + \dots + \frac{x_n}{\lambda_n} v_n$$

Passiamo dunque alla base  $\mathcal{B}'$  alla classe in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ :

$$[v] = \left( \frac{x_0}{\lambda_0} : \dots : \right)$$

Notiamo che effettivamente il punto  $[v]$  non cambia, ma i riferimenti *non* sono multipli e quindi sono diversi!

- Conoscere i punti fondamentali *non basta* a determinare la base  $\mathcal{B}$ .
- Riferimenti proiettivi *diversi* possono avere gli *stessi* punti fondamentali.

**OSSERVAZIONE.** Supponiamo di avere  $n+2$  punti  $P_0, \dots, P_{n+1}$  in  $\mathbb{P}^n(V)$ , cioè  $\forall i = 0, \dots, n+1 \exists v_i \in V : P_i = [v_i]$ . Allora:

$$P_0, \dots, P_{n+1} \text{ sono in posizione generale} \iff v_0, \dots, v_n \text{ sono indipendenti e} \\ v_{n+1} = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n \text{ con } a_i \neq 0 \forall i = 0, \dots, n$$

Infatti, se  $v_0, \dots, v_n$  è una base (in quanto sono indipendenti),  $v_0, \dots, \check{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}$  sono indipendenti se e solo se  $a_i \neq 0$ .

**TEOREMA 10.6.0.** Sia  $\mathbb{P}^n(V)$  di dimensione  $n$ . Dati  $n+2$  punti  $P_0, \dots, P_{n+1}$  in *posizione generale*, esiste una base  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  di  $V$  tale che:

$$P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], P_{n+1} = [e_0 + \dots + e_n] \quad (10.18)$$

Inoltre, se  $\mathcal{B}' = \{f_0, \dots, f_n\}$  è un'altra base di  $V$  che soddisfa la condizione sopra, allora  $\mathcal{B}$  è proporzionale a  $\mathcal{B}'$ , cioè  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : f_i = \lambda e_i \forall i = 0, \dots, n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $P_i = [v_i]$  al variare di  $i = 0, \dots, n+1$ . I punti  $P_0, \dots, P_n$  sono indipendenti<sup>a</sup>, dunque per definizione  $v_0, \dots, v_n$  è una base di  $V$ . Definiamo:

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Ma allora, per l'osservazione precedente,  $\lambda_i \neq 0 \forall i$  perché i punti sono in posizione generale.

Consideriamo  $e_0 = \lambda_0 v_0, e_1 = \lambda_1 v_1, \dots, e_n = \lambda_n v_n$ . Si ha che  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$  è una base di  $V$  perché  $\lambda_i \neq 0 \forall i$ . Segue che:

$$\begin{aligned} [e_i] &= [v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n \\ [e_0 + \dots + e_n] &= [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = [v_{n+1}] = P_{n+1} \end{aligned}$$

Adesso, sia  $\mathcal{B}' = \{f_0, \dots, f_n\}$  come da ipotesi. Allora  $[f_i] = P_i = [e_n] \forall i = 0, \dots, n$ , cioè  $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : f_i = \mu_i e_i \forall i = 0, \dots, n$ . Inoltre, soddisfa anche  $[f_0 + \dots + f_n] = P_{n+1}$ , pertanto:

$$[f_0 + \dots + f_n] = [e_0 + \dots + e_n]$$

In altre parole,  $\exists \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che:

$$\begin{aligned} f_0 + \dots + f_n &= \mu(e_0 + \dots + e_n) \\ \parallel \\ \mu_0 e_0 + \dots + \mu_n e_n \end{aligned}$$

$e_0, \dots, e_n$  è una base: per l'unicità della scrittura deve essere  $\mu = \mu_0 = \dots = \mu_n$ , cioè  $f_i = \mu e_i \forall i = 0, \dots, n$ .  $\square$

<sup>a</sup>Perché se  $N+2$  punti sono in posizione generale, presi  $n+1$  punti fra di loro sono indipendenti.

## 10.7 TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

**DEFINIZIONE 10.7.0.** TRASFORMAZIONE PROIETTIVA E PROIETTIVITÀ.

Un'applicazione  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  tra spazi proiettivi si dice **trasformazione proiettiva** o **isomorfismo proiettivo** se  $\exists \varphi : V \longrightarrow V'$  isomorfismo che induce un



altro isomorfismo lineare:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^n(V) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(V') \\ [v] &\longmapsto [\varphi(v)]\end{aligned}\tag{10.19}$$

Tale per cui  $f = \widetilde{\varphi}$ .

Se  $V = V'$ , diciamo che  $f$  è una **proiettività** di  $\mathbb{P}^n(V)$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

■  **$\widetilde{\varphi}$  è ben definita:**

1.  $\varphi(v) \neq 0$  perché  $v \neq 0$  e  $\varphi$  è iniettiva, pertanto  $\ker \varphi = \{0\}$  e dunque l'unico vettore mappato a 0 tramite  $\varphi$  è solo 0.
2. Se  $[v] = [w]$ , allora  $w \sim v$ , cioè  $w = \lambda v$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ; segue che per linearità di  $\varphi$   $\varphi(w) = \lambda \varphi(v) \implies [\varphi(w)] = [\varphi(v)]$

■  **$\widetilde{\varphi}$  è iniettiva:** se  $\widetilde{\varphi}([v]) = \widetilde{\varphi}([w])$ , allora

$$[\varphi(v)] = [\varphi(w)] \implies \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(w) = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v)$$

Poichè  $\varphi$  è iniettiva, segue che  $w = \lambda v$  e dunque  $[v] = [w]$ .

■  **$\widetilde{\varphi}$  è suriettiva:** infatti, se  $[w] \in \mathbb{P}^n(V')$ , essendo  $\varphi$  suriettiva esiste un vettore  $v$  tale che  $w = \varphi(v)$ . Segue che  $[w] = [\varphi(v)] = \widetilde{\varphi}([v])$ . □

Dato che spazi vettoriali della stessa dimensione sono sempre isomorfi, due spazi proiettivi della stessa dimensione sono sempre isomorfi e  $\mathbb{P}^n(V)$  è sempre isomorfo a  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , con  $\dim V = n + 1$ .

**LEMMA 10.7.0.** Siano  $\varphi, \psi : V \longrightarrow V'$  isomorfismi. Allora:

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \psi = \lambda \varphi\tag{10.20}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\Leftarrow$ ) Se  $v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , allora  $\psi(v) = \lambda \varphi(v)$ . Segue:

$$\implies \widetilde{\psi}([v]) = [\psi(v)] = [\lambda \varphi(v)] = \widetilde{\varphi}([v])$$

$\Rightarrow$ ) Sia  $h := \varphi^{-1} \circ \psi : V \longrightarrow V$  automorfismo. Vogliamo mostrare che  $h = \lambda Id_V$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Se  $v \in V \setminus \{0\}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}([v]) &= \psi([v]) \\ \parallel &\parallel \\ [\varphi(v)] &= [\psi(v)]\end{aligned} \implies \lambda_v \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(v) = \lambda_v \psi(v) \implies h(v) = \varphi^{-1}(\varphi(v)) = \lambda_v v$$

Segue che  $v$  è autovettore di  $h \forall v \in V \setminus \{0\}$ , in particolare ogni vettore non nullo è autovettore di  $h$ . Segue che  $h$  è diagonalizzabile e ha un unico autovalore  $\lambda$ . Infatti, presi  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , si avrebbero i seguenti autovalori indipendenti:

$$v_1 \in V_{\lambda_1} \setminus \{0\} \quad v_2 \in V_{\lambda_2} \setminus \{0\}$$

E considerato che:

$$\begin{aligned} h(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ h(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ h(v_1 + v_2) &= \lambda(v_1 + v_2) \implies \lambda(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ h(v_1 + v_2) &= h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

Da cui segue, in quanto  $v_1, v_2, v_1 + v_2 \neq 0$ , che  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  e quindi è unico. Allora,  $h = \lambda Id_V$  e pertanto  $\varphi = \lambda \psi$ .  $\square$

### 10.7.1 Gruppo lineare proiettivo

**OSSERVAZIONE.** Consideriamo  $\mathbb{P}^n(V)$  e l'insieme delle proiettività  $\mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ .

- La *composizione* di proiettività è una *proiettività* (banalmente *indotta* dalla composizione delle applicazioni lineari).
- Poichè  $Id_{\mathbb{P}^n(V)} = \widetilde{Id}_V \implies$  L'identità  $Id_{\mathbb{P}^n(V)}$  è una *proiettività*.
- Se  $\widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ , allora  $\widetilde{\varphi}^{-1} = f^{-1} : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ . In altre parole, l'*inversa* di una proiettività è ancora una proiettività.

L'insieme delle proiettività risulta un **gruppo** rispetto alla *composizione*.

**DEFINIZIONE 10.7.1. GRUPPO LINEARE PROIETTIVO.**

Il **gruppo lineare proiettivo**  $\mathbb{PGL}_n(V)$  è il gruppo delle proiettività dello spazio vettoriale  $V$  con operazione la composizione di proiettività ed elemento neutro  $Id_{\mathbb{P}^n(V)}$ .

#### 10.7.1.1 Descrizione matriciale del gruppo lineare proiettivo

Consideriamo gli isomorfismi  $\mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ : sappiamo che la matrice associata agli isomorfismi è una matrice invertibile, cioè si ha una *isomorfismo di gruppi* fra l'insieme degli isomorfismi in  $\mathbb{K}^{n+1}$  al *gruppo generale lineare*  $GL(n+1, \mathbb{K})$ :

$$\left\{ \text{isomorfismi } \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \right\} \leftrightarrow GL(n+1, \mathbb{K})$$

E con il gruppo lineare proiettivo si può fare? Consideriamo:

$$\begin{aligned} \phi : GL(n+1, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \\ \varphi_A &\longmapsto \widetilde{\varphi}_A \end{aligned} \tag{10.21}$$

$\phi$  è *omomorfismo* di gruppi *suriettivo*, ma non *iniettivo*. Infatti, il nucleo non è *triviale*:

$$\ker \phi = \{ \varphi_A \mid \varphi_A = Id_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})} = \widetilde{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}} \} = \{ \varphi_A \mid \varphi = \lambda I, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \} = \{ \varphi_A \mid A = \lambda I, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \}$$

Tuttavia, possiamo per il Teorema dell'isomorfismo per i gruppi considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} GL(n+1, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists \bar{f} & \\ \frac{GL(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}} & & \end{array}$$

E si ha pertanto l'isomorfismo:

$$\mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \cong \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}} = \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I\}}$$

Si può anche considerare l'isomorfismo tra  $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$  e  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ , e riscrivere l'isomorfismo trovato come:

$$\mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \cong \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\mathbb{K} \setminus \{0\}}$$

**ESEMPIO.** Consideriamo la seguente proiettività della *retta proiettiva*  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (x_0 : x_1) &\longmapsto (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1) \end{aligned}$$

Considerato il gruppo lineare proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})}{\{\lambda I\}}$ , per definizione di  $f$  si ha  $f = \widetilde{\varphi}$ . In particolare, la matrice associata a  $\varphi$  è:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

E dunque possiamo scrivere l'applicazione lineare  $\varphi$  come:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &\longmapsto A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E dunque  $f$  si può anche scrivere come:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ [v] &\longmapsto [Av] \end{aligned}$$

Notiamo che se la matrice associata a  $\varphi$  fosse  $2A$ , per *proporzionalità* si avrebbe comunque la proiettività  $f$ . In modo analogo,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  induce la *stessa proiettività*  $f$  di  $A$ .

### 10.7.2 Altri aspetti delle trasformazioni proiettive

**OSSERVAZIONE.** Se  $f$  è una proiettività di  $\mathbb{P}^n(V)$  e  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  un sottospazio proiettivo, allora  $f(S)$  è ancora un sottospazio proiettivo della stessa dimensione di  $S$ . Se  $S = \mathbb{P}^n(W)$  e consideriamo per definizione  $f = \widetilde{\varphi}$  con  $\varphi : V \longrightarrow V$ , allora:

$$\forall [v] \in S \quad f([v]) = \widetilde{\varphi}([v]) = [\varphi(v)], \quad \varphi(v) \in W$$

$$f(S) = \mathbb{P}^n(\varphi(W)) \tag{10.22}$$

#### DEFINIZIONE 10.7.2. PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI.

Due sottoinsiemi  $A, B$  di  $\mathbb{P}^n(V)$  si dicono **proiettivamente equivalenti** se  $\exists f$  proietti-

vità di  $\mathbb{P}^n(V)$  tale che:

$$B = f(A) \quad (10.23)$$

**ESEMPIO.** Due sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(V)$  della *stessa* dimensione sono sempre *proiettivamente equivalenti*.

**TEOREMA 10.7.0.** Siano  $\mathbb{P}^n(V)$  e  $\mathbb{P}^n(V')$  di dimensione  $n$ . Siano:

- $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}^n(V)$   $n+2$  punti in posizione generale.
- $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}^n(V')$   $n+2$  punti in posizione generale.

Allora  $\exists!$   $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  trasformazione proiettiva tale che  $f(P_i) = Q_i \forall i = 0, \dots, n+1$ .

In particolare: se una proiettività fissa  $n+2$  punti ( $f(P_i) = P_i \forall i = 0, \dots, n+1$ ) in posizione generale, allora è l'identità.

**DIMOSTRAZIONE.**

- **Esistenza:** Siano,  $\forall i$ :

- ◇  $P_i = [v_i] \ v_i \in V$ .
- ◇  $Q_i = [w_i] \ w_i \in V'$ .

Sappiamo, dall'osservazione a pag. 10.6, che:

- ◇  $v_0, \dots, v_n$  è base di  $V$ , con  $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$  con  $\lambda_i \neq 0 \forall i$ .
- ◇  $w_0, \dots, w_n$  è base di  $V'$ , con  $w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n$  con  $\mu_i \neq 0 \forall i$ .

A meno di cambiare i rappresentanti dei punti, possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\lambda_i = \mu_i = 1$ . Si ha dunque:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_0 + \dots + v_n \\ w_{n+1} &= w_0 + \dots + w_n \end{aligned}$$

Sia  $\varphi : V \longrightarrow V'$  l'applicazione lineare tale per cui  $\varphi(v_i) = w_i \forall i = 0, \dots, n$ . Per linearità:

$$\varphi(v_{n+1}) = \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) = w_0 + \dots + w_n = w_{n+1}$$

Poiché  $\text{Im } \varphi$  contiene una base per costruzione,  $\varphi$  è suriettiva. In particolare, essendo endomorfismo ( $\dim V = \dim V'$ ),  $\varphi$  è anche *isomorfismo*.

Allora  $f := \widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  è una *trasformazione proiettiva* e:

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i \forall i = 0, \dots, n+1$$

- **Unicità:** sia  $g : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  un'altra trasformazione proiettiva tale che  $g(P_i) = Q_i \forall i = 0, \dots, n+1$ . Per definizione, esiste  $\psi : V \longrightarrow V'$  isomorfismo per cui  $g = \widetilde{\psi}$  e:

$$[\psi(v_i)] = [w_i] \forall i$$

Si ha che  $\exists a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\psi(v_i) = a_i w_i$ . Allora:

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{n+1} w_{n+1} & = & \psi(v_{n+1}) & = & \psi(v_0 + \dots + v_n) \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 a_{n+1} (w_0 + \dots + w_n) & & & & \psi(v_0) + \dots + \psi(v_n) \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 a_{n+1} w_0 + \dots + a_{n+1} w_n & & & & a_0 w_0 + \dots + a_n w_n
 \end{array}$$

Poiché  $w_0, \dots, w_n$  è base, la scrittura è unica. Segue che  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n+1} = a$ . Allora:

$$\begin{aligned}
 \psi(v_i) &= a w_i = a \varphi(v_i) \\
 \implies \psi &= a \varphi \\
 \implies g = \tilde{\psi} = \tilde{\varphi} = f
 \end{aligned}$$

□

#### ESEMPLI.

- In una *retta proiettiva* (dim 1), una proiettività è determinata dalle immagini di 3 punti distinti, dato che è equivalente alla condizione di “punti in posizione generale”.
- In un *piano proiettivo* (dim 2), una proiettività è determinata dalle immagini di 4 punti, a 3 a 3 non allineati.
- Se  $A, B \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  sono insiemi finiti, ciascuno contenente  $k$  punti in posizione generale, con  $k \leq n+2$ , allora  $A$  e  $B$  sono sempre proiettivamente equivalenti.

**ESEMPIO.** Approfondiamo l'ultimo esempio. In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  (dim 2), si prenda  $A = \{P_1, P_2\}$ ,  $B = \{Q_1, Q_2\}$  con  $P_1 \neq P_2$ ,  $Q_1 \neq Q_2$ . Ho due punti distinti sia in  $A$  e  $B$ , dunque esiste sempre una proiettività  $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$  tale che  $f(A) = B$ .

Se invece  $A$  e  $B$  contengono 3 punti, se i 3 punti in  $A$  sono *allineati* mentre i 3 punti in  $B$  non lo sono, allora  $A$  e  $B$  non sono proiettivamente equivalenti.

#### 10.7.3 Trasformazioni proiettive in coordinate

Supponiamo di avere fissato dei riferimenti proiettivi su  $\mathbb{P}^n(V)$  e  $\mathbb{P}^n(V')$ , dati da delle basi  $\mathcal{B}$  di  $V$  e  $\mathcal{B}'$  di  $V'$ , e sia  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$  una trasformazione proiettiva.

Sappiamo che  $f = \tilde{\varphi}$  con  $\varphi : V \longrightarrow V'$  isomorfismo lineare.

Sia  $A \in \text{GL}(n+1, \mathbb{K})$  la matrice associata a  $\varphi$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ . Abbiamo visto che  $\varphi$  è determinata solo a meno di multipli: chiaramente, lo stesso è vero anche per  $A$ .

Siano allora:

$$\begin{aligned}
 P &= (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(V) \\
 f(P) &= (y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^n(V')
 \end{aligned}$$

Allora  $\exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\rho y = Ax$ .

#### OSSERVAZIONE. CAMBIAMENTI DI COORDINATE.

Se in  $\mathbb{P}^n(V)$  abbiamo due riferimenti proiettivi, uno dalla base  $\mathcal{B}$ , e uno dalla base  $\mathcal{B}'$ , sia  $M$  la matrice del cambiamento di base in  $V$  tale che:

$$x' = Mx$$

Con  $x$  in coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}$  e  $x'$  in coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ . Allora, se  $P \in \mathbb{P}^n(V)$  ha coordinate:

$$(x_0 : \dots : x_n) \text{ rispetto a } \mathcal{B} \quad (x'_0 : \dots : x'_n) \text{ rispetto a } \mathcal{B}'$$

Esiste  $\rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\rho x' = Mx$ .

#### 10.7.4 Punti fissi di proiettività

**DEFINIZIONE 10.7.3.** PUNTO FISSO.

Sia  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$  una proiettività. Un **punto fisso** è un punto  $P \in \mathbb{P}^n(V)$  tale che:

$$f(P) = P \quad (10.24)$$

Sia  $\varphi : V \longrightarrow V$  un *automorfismo* tale che  $f = \widetilde{\varphi}$ , e sia  $P = [v]$ , con  $v \in V \setminus \{0\}$ . Allora:

$$\begin{aligned} f(P) = [\varphi(v)] &= [v] \\ \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(v) &= \lambda v \\ \iff v \text{ è un autovettore per } \varphi \end{aligned}$$

In particolare,  $\varphi$  è invertibile, dunque *non* ha l'autovettore *nullo*. Segue che i punti fissi di  $f$  sono tutti e soli i punti  $[v]$  con  $v$  autovettore di  $\varphi$ .

#### OSSERVAZIONI.

1. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , allora ogni proiettività ha almeno un punto fisso, dato che  $\varphi$  ha sempre almeno un autovettore.
2. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\dim \mathbb{P}^n(V) = n$ , allora  $\dim V = n + 1$ . Il *polinomio caratteristico*  $C_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$  ha grado  $n + 1$ . Se  $n$  è *pari*,  $\varphi$  ha almeno un autovalore, dato che il polinomio caratteristico ha grado  $n + 1$  *dispari*: infatti, o è di grado *uno* (e quindi ha banalmente soluzione) oppure, in quanto si può decomporre in fattori a coefficienti reali al più di grado *due*, ammetterà *sempre* almeno un fattore di grado *uno*.

3. Portiamo un controesempio al caso  $n$  dispari. Sia  $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  associata a  $f$  è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico *non* ha radici *reali*:

$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1$$

Segue che  $A$  non ha autovettori reali e pertanto  $f$  *non* ha punti fissi.

4. In generale, l'*insieme* dei punti fissi di  $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$  è dato da:

$$\{\mathbb{P}^n(V_\lambda) \mid \lambda \text{ autovalore di } \varphi\}$$

Questo è un insieme di sottospazi proiettivi a 2 a 2 disgiunti.

**DEFINIZIONE 10.7.4.** INSIEME FISSO.

Se  $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$  è un sottospazio, diciamo che  $S$  è **fisso** per  $f$  proiettività se:

$$f(S) = S \quad (10.25)$$

10.7.5 *Impratichiamoci! Trasformazioni proiettive*

**ESERCIZIO.** In  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  determinare la proiettività  $f$  tale che:

$$f(2:1) = (1:1) \quad f(1:2) = (0:1) \quad f(1:-1) = (1:0)$$

**SOLUZIONE.** Notiamo che i punti:

$$(2:1) \quad (1:2) \quad (1:-1) \text{ e } (1:1) \quad (0:1) \quad (1:0)$$

Sono distinti, dunque sono in posizione generale e la proiettività è garantita. Prendiamo la generica matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  associata a  $\varphi$  indotta da  $f$  e consideriamo  $\rho y = Ax$ :

$$\begin{cases} \rho y_0 = ax_0 + bx_1 \\ \rho y_1 = cx_0 + dx_1 \end{cases}$$

Imponiamo il passaggio per  $f(2:1) = (1:1)$ :

$$\begin{cases} \rho = 1a + b \\ \rho = 2c + d \end{cases} \implies 2a + b = 2c + d$$

In sostanza, *eliminiamo* il parametro  $\rho$  per ottenere un'equazione lineare *omogenea* tra gli elementi della matrice.

Facciamo lo stesso con i rimanenti punti  $f(1:2) = (0:1)$  e  $f(1:-1) = (1:0)$ , utilizzando rispettivamente  $\mu y = Ax$  e  $\alpha y = Ax$ :

$$\begin{cases} 0 = a + 2b \\ \rho = c + 2d \end{cases} \implies a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = a - b \\ 0 = c - d \end{cases} \implies c - d = 0$$

Costruiamo così un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 incognite  $a, b, c, d$ , con una matrice dei coefficienti di rango 3:

$$\begin{cases} 2a + b = 2c + d \\ a + 2b = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2c \\ b = -c \\ c = c \\ d = c \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ c & c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A meno di multipli,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  è la matrice cercata. Segue dunque che la proiettività cercata è:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (x_0 : x_1) &\longmapsto (2x_0 - x_1 : x_0 + x_1) \end{aligned}$$

### 10.8 GEOMETRIA AFFINE E GEOMETRIA PROIETTIVA

Abbiamo già accennato all'esistenza di una relazione che intercorre fra *geometria affine* e *geometria proiettiva*. Diamo innanzitutto qualche richiamo dei concetti della geometria affine.

#### DEFINIZIONE 10.8.0. SPAZIO AFFINE.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $\mathbb{K}$ . Uno **spazio affine** di dimensione  $n$  su  $V$  (con spazio vettoriale associato  $V$  di dimensione  $n$ ) è un insieme  $\mathcal{A}(V)$  non vuoto di *punti* (elementi) tale che sia data un'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(V) \times \mathcal{A}(V) &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

Che alla coppia di punti  $(P, Q)$  associa il vettore di  $V$  con punto iniziale  $P$  e punto finale  $Q$  e tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

1.  $\forall P \in \mathcal{A}(V), \forall v \in V$  esiste un unico punto  $Q \in \mathcal{A}(V)$  tale che  $\overrightarrow{PQ} = v$ .
2.  $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}(V)$  terna di punti di  $\mathcal{A}(V)$  si ha  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

#### DEFINIZIONE 10.8.1. RIFERIMENTO AFFINE E COORDINATE AFFINI.

Un **referimento affine**  $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$  sullo spazio  $\mathcal{A}(V)$  è assegnato fissando un punto  $O \in \mathcal{A}(V)$  detta **origine** ed una base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  di  $V$ . Dunque, per ogni  $P \in \mathcal{A}(V)$  si ha la  $n$ -upla  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  dette *coordinate affini* del punto  $P \in \mathcal{A}(V)$  (uniche per riferimento affine fissato) tale per cui:

$$P = \overrightarrow{OV} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad (10.26)$$

Per i nostri scopi, parleremo spesso degli spazi affini di dimensione  $n$  su  $\mathbb{K}$ .

#### DEFINIZIONE 10.8.2. AFFINITÀ.

Un'**affinità** o **trasformazione lineare affine** di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un'applicazione:

$$\varphi : \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \quad (10.27)$$

Della forma  $\varphi(x) = Ax + b$  con  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  un'applicazione lineare invertibile e  $b$  una *traslazione*.

#### DEFINIZIONE 10.8.3. SOTTOSPAZIO AFFINE.

Un **sottospazio affine** di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un *traslato* di un sottospazio vettoriale  $W \subseteq \mathbb{K}^n$ :

$$S = W + x_0 = \{w + x_0 \mid w \in W, x_0 \in \mathcal{A}(W)\} \quad (10.28)$$



**OSSERVAZIONI.**

- $W$  è l'unico traslato di  $S$  per l'origine ( $x_0 = O$ ) e si dice **sottospazio direttore** di  $S$ , cioè ne dà appunto la *direzione*. Si definisce  $\dim S := \dim W$ .
- Un punto in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un sottospazio affine di dimensione 0 ( $W = \{0\}$ ; dopotutto non ha particolarmente senso parlare di direzione del punto).
- Una **retta affine**  $r$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un sottospazio affine di dim 1:  $W = \mathcal{L}(v)$ , cioè  $r$  si può individuare assegnando un punto  $P \in r$  e un qualsiasi vettore  $v$  *parallelo* alla retta  $r$ .
- Un **piano affine**  $\pi$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  è un sottospazio affine di dim 2:  $W = \mathcal{L}(v, w)$ , cioè  $\pi$  si può individuare assegnando un punto  $P \in r$  e una coppia di vettori l.i. *paralleli* al piano  $\pi$ .
- Un **iperpiano affine** è un sottospazio di dimensione  $n + 1$ .
- Due sottospazi affini della stessa dimensione si dicono **paralleli** se hanno lo stesso sottospazio direttore.

**ESEMPIO.** Consideriamo  $r = W + x_0$  retta affine, che ha dunque  $\dim r = \dim W = 1$ .  $W$  è la retta vettoriale in  $\mathbb{K}^n$ , mentre un qualunque  $v \in W \setminus \{0\}$  è la *direzione* della retta.

Un sottospazio affine  $S \subseteq \mathbb{K}^n$  può essere descritti con equazioni cartesiane oppure in forma parametrica.

**Equazioni cartesiane.**  $S$  è visto come l'insieme delle *soluzioni* del seguente sistema lineare:

$$Ax = b \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \quad (10.29)$$

Con  $b$  che descrive la traslazione dovuta a  $x_0 \in \mathcal{A}(W)$ . In tal caso  $W$  è il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$Ax = 0 \quad (10.30)$$

**Forma parametrica.** Supponiamo  $\dim S = \dim W = m$ . Siano  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$  i vettori di una base di  $W$ ; rispetto ad una base di  $\mathbb{K}^n$ , e dunque rispetto ad un sistema di riferimento affine con origine  $O$ , essi sono espressi nelle componenti:

$$v_i = (V_{i,1}, \dots, V_{i,n}) \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$$

Consideriamo  $S = W + c$ , con il punto  $c = (C_1, \dots, C_n)$  rispetto allo stesso sistema affine di prima.

I punti  $x$  di  $S$  in forma parametrica sono dati da:

$$x = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m + c \quad t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K} \quad (10.31)$$

Da cui otteniamo il sistema  $n \times (m + 1)$  seguente:

$$\begin{cases} X_1 = t_1 V_{1,1} + \dots + t_m V_{m,1} + C_1 \\ \vdots \\ X_n = t_1 V_{1,n} + \dots + t_m V_{m,n} + C_n \end{cases} \quad (10.32)$$

**ESEMPIO.** La retta  $r$  ( $\dim W = 1$ ) passante per  $c$  con direzione  $v$  è descritto parametricamente da:

$$\begin{cases} X_1 = tV_1 + c_1 \\ \vdots \\ X_n = tV_n + c_n \end{cases}$$

Consideriamo ora lo spazio proiettivo numerico:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^{n+1})$$

E i punti in coordinate omogenee  $(x_0 : \dots : x_n)$  rispetto ad un dato sistema di riferimento proiettivo. Consideriamo il seguente sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n$ :

$$U_0 := \{P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\} \quad (10.33)$$

La condizione  $x_0 \neq 0$  è *ben posta*; infatti, se  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , allora  $x_0 \neq 0 \iff \lambda x_0 \neq 0$ .

Consideriamo anche il suo complementare, che è l'iperpiano coordinato rispetto alla prima coordinata omogenea:

$$\mathbb{P}^n \setminus U_0 = H_0 = \{P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \{P = (0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n\} \quad (10.34)$$

Sia  $P \in U_0$ : allora essendo  $a_0 \neq 0$  si ha  $P = (a_0 : \dots : a_n) = \left(1 : \frac{a_1}{a_0} : \dots : \frac{a_n}{a_0}\right)$ . In particolare,  $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$  sono univocamente determinate da  $P$ .

**ESEMPIO.** Sia  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{\text{rette vettoriali in } \mathbb{R}^3\}$  con punti di componenti  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Allora  $H_0$  è una retta proiettiva in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e risulta:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{P = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \{P = (0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^n\} \\ &= \{\text{rette vettoriali di } \mathbb{R}^3 \text{ contenute nel piano affine } x_0 = 0\} \end{aligned}$$

Infatti, prendiamo  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$  e consideriamo il piano  $x_0 = 1$ , parallelo al piano  $x_0 = 0$ . Se  $r \subseteq \mathbb{R}^3$  è una retta vettoriale che *non* appartiene al piano affine  $\{x_0 = 0\}$  ( $r \not\subseteq \{x_0 = 0\}$ ),  $r$  interseca il piano  $x_0 = 1$  in un solo punto! In particolare, se  $r$  ha direzione  $(a_0, a_1, a_2)$ , il punto nel piano  $\{x_0 = 1\}$  avrà coordinate  $\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}\right)$ .

Possiamo identificare  $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$  con  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ . Consideriamo le due funzioni seguenti:

$$\begin{aligned} j = j_0 : \quad \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) &\longrightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^n & \phi : \quad U_0 \subseteq \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \\ (X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (1 : x_1 : \dots : X_n) & (x_0 : \dots : X_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{aligned} \quad (10.35)$$

- $\phi$  è ben definita, dato che  $x_0 \neq 0$  per definizione di  $U_0$ .
- $j$  e  $\phi$  sono l'una l'inversa dell'altra:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) &\xrightarrow{j} U_0 \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \\ (X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (1 : X_1 : \dots : X_n) \longmapsto (X_1, \dots, X_n) \\ \\ U_0 &\xrightarrow{\phi} \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{j} U_0 \\ (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \longmapsto \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right) = (x_0 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

Si ha dunque che  $j$  e  $\phi$  sono *biunivoche*. In questo modo identifichiamo  $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$  con  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ , mentre l'iperpiano  $H_0$  corrisponde allo spazio proiettivo di dimensione  $n-1$ ; si ha dunque:

$$\mathbb{P}^n = U_0 \sqcup H_0 = \mathcal{A}(\mathbb{K}^n) \sqcup \mathbb{P}^{n-1} \quad (10.36)$$

La coppia  $(U_0, j)$  è detta **carta affine** di  $\mathbb{P}^n$ .

In altre parole,  $\mathbb{P}^n$  si può vedere come un'estensione o *ampliamento* dello spazio affine  $\mathbb{K}^n$ . Diciamo allora che:

- I punti di  $H_0$  sono detti **punti impropri** o **punti all'infinito**.
- $H_0$  è detto **iperpiano improprio** o **iperpiano all'infinito**.
- I punti di  $U_0 = \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  sono detti **punti propri**.

**INTUITIVAMENTE...** In molti casi, possiamo liberamente parlare di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  come lo spazio vettoriale  $\mathbb{K}^n$  inteso in senso *geometrico* come insieme di punti con un punto qualunque come origine.

**ESEMPIO.** Consideriamo la retta proiettiva  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ . L'iperpiano all'infinito è:

$$H_0 = \{P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 = 0\} = \{(0 : 1)\}$$

Mentre invece l'insieme dei punti propri è:

$$U_0 = \{P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 \neq 0\} = \{(0 : 1)\}$$

In particolare, si ha la corrispondenza biunivoca  $U_0 \xrightarrow{1:1} \mathbb{K}$ :

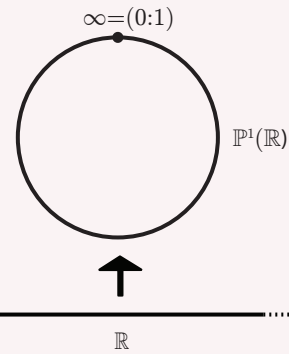
$$(x_0 : x_1) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right) \mapsto \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K}$$

In altre parole, si può vedere la retta proiettiva come il campo  $\mathbb{K}$  con l'aggiunto di un unico punto, l'*infinito*  $\infty$ .

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \cup (0 : 1) = \mathbb{K} \cup \{\infty\} \quad (10.37)$$

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , essendo  $S^1 \setminus \{1 \text{ punto}\} \cong \mathbb{R}$ , si ha:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^1 \quad (10.38)$$



### 10.8.1 Chiusura proiettiva di un sottospazio affine

**DEFINIZIONE 10.8.4.** CHIUSURA PROIETTIVA.

Sia  $r \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  una retta affine. La **chiusura proiettiva** di  $r$  è il sottospazio proiettivo  $\bar{r} \subseteq \mathbb{P}^n$  generato da  $r \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ .

**PROPOSIZIONE 10.8.0.**  $\bar{r}$  è una *retta proiettiva* e si ha:

$$\bar{r} = r \cup P_\infty \quad (10.39)$$

Dove  $P_\infty = \bar{r} \cap H_0$  è detto *punto all'infinito* o *punto improprio* della retta  $r$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  la direzione di  $r$  e  $w \in r$  un punto della retta. Allora  $r$  ha descrizione parametrica in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ :

$$\begin{cases} X_1 = tv_1 + w_1 \\ \vdots \\ X_n = tv_n + w_n \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

Consideriamo la retta proiettiva  $R \subseteq \mathbb{P}^n$  con descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = tv_1 + sw_1 \\ \vdots \\ x_n = tv_n + sw_n \end{cases} \quad (s:t) \in \mathbb{P}^1$$

$R$  è la retta proiettiva per i punti:

$$t = 0 : (1 : w_1 : \dots : w_n) \quad t = 1 : (0 : v_1 : \dots : v_n) = P_\infty$$

Ponendo  $s = 1$  otteniamo:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = tv_1 + w_1 \\ \vdots \\ x_n = tv_n + w_n \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

Al variare di  $t \in \mathbb{K}$ , questi sono tutti e soli i punti di  $j(r) \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ . Si ha dunque che  $R$  è una retta proiettiva contenente  $r$ :

$$\begin{aligned} R &= r \cup P_\infty \\ P_\infty &= R \cap H_0 = \{(0 : v_1 : \dots : v_n)\} \end{aligned}$$

$R$  è necessariamente il più piccolo sottospazio proiettivo contenente  $r$ , dato che è la retta più un solo punto. Pertanto,  $R = \bar{r}$ .  $\square$

**OSSERVAZIONI.**

1. Il punto improprio di  $r$  è:

$$P_\infty = (0 : v_1 : \dots : v_n)$$

E corrisponde esattamente alla *direzione*  $v = (v_1, \dots, v_n)$  di  $r$ . Poiché  $P_\infty = [v]$  con  $v$  la direzione di  $r$ , ne segue che l'iperpiano improprio di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è:

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \{\text{rette vettoriali in } \mathbb{K}^n\} = \\ &= \{\text{direzioni delle rette affini in } \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)\} \end{aligned}$$

2. Due rette affini  $r_1, r_2 \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  hanno lo stesso punto improprio se e solo hanno la stessa direzione, cioè se sono *parallele*.

Se  $r_1 \neq r_2$  e  $r_1$  e  $r_2$  sono parallele, allora  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$ , ma  $\overline{r_1} \cap \overline{r_2} = P_\infty$  in  $\mathbb{P}^n$ . Ciò ci porta a dire che due rette parallele  $r_1$  e  $r_2$  si incontrano sempre all'infinito!

3. Se  $n = 2$ , cioè operando in  $\mathbb{P}^2$ , due rette distinte  $r_1, r_2 \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  sono o incidenti o parallele, ma in  $\mathbb{P}^2$  si intersecano sempre.
4. Viceversa: sia  $l \subseteq \mathbb{P}^n$  una retta proiettiva. Abbiamo due casi:
  - $l \subseteq H_0, l \cap U_0 = \emptyset$ .
  - $l \not\subseteq H_0 \implies l + H_0 = \mathbb{P}^n$ .

Infatti, si ha che  $l + H_0$  è un sottospazio proiettivo che contiene strettamente  $H_0$ , dato che  $l \not\subseteq H_0$ , e usando la formula di Grassmann otteniamo:

$$\dim(l + H_0) = \dim l + \dim H_0 - \dim(l \cap H_0) = 1 + n - 1 + 0 = n = \dim \mathbb{P}^n \implies l + H_0 = \mathbb{P}^n$$

Sempre dalla formula di Grassmann:

$$\dim(l \cap H_0) = 0 \implies l \cap H_0 = \{1 \text{ punto}\} = \{Q\}$$

Cioè  $l \cap U_0 = l \setminus \{Q\}$ . In altre parole,  $l$  è una retta affine in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  con un punto improprio  $Q$  e necessariamente  $l$  è la chiusura proiettiva di  $l \setminus \{Q\}$ .

5. Sia  $n = 2$ , cioè operiamo in  $\mathbb{P}^2$ . Una retta  $r \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  è descritta da un'equazione lineare:

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad (10.40)$$

Con la corrispondenza biunivoca fra le coordinate  $(x, y)$  vettoriali e  $(X_1, X_2)$  affini. Abbiamo tuttavia anche la corrispondenza con le coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^2$ , rispettivamente  $(x: y: z)$  e  $(0: x_2: x_3)$ .

Chiamiamo  $(x: y: z)$  le coordinate omogenee su  $\mathbb{P}^2$  con:

$$H_0 = \{P = (x: y: z) \in \mathbb{P}^2 \mid z = 0\} = \{P = (x: y: 0) \in \mathbb{P}^2\}$$

Allora la chiusura proiettiva  $\bar{r} \subseteq \mathbb{P}^2$  di  $r$  ha in  $\mathbb{P}^2$  l'equazione lineare omogenea seguente:

$$ax + by + cz = 0 \quad (10.41)$$

Infatti, per  $z = 1$  si ottiene l'equazione di  $r$ , mentre ponendo  $z = 0$  (cioè il passaggio per  $H_0$ ) troviamo il punto improprio  $P_\infty$  di  $r$ :

$$\begin{cases} z = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases} \quad P_\infty = (-b: a: 0)$$

La direzione della retta  $ax + by + c = 0$  è data dal punto improprio  $P_\infty$  e corrisponde al vettore  $(-b, a: 0)$ .

Generalizziamo ora il concetto di chiusura proiettiva a un generico sottospazio affine.

**DEFINIZIONE 10.8.5.** CHIUSURA PROIETTIVA DI UN SOTTOSPAZIO.

Dato  $S \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  un sottospazio affine con  $S \neq \emptyset$ , la **chiusura proiettiva**  $\bar{S} \subseteq \mathbb{P}^n$  di  $S$  è il sottospazio proiettivo generato da  $S$ . Esso ha dimensione  $\dim \bar{S} = \dim S = m$ .

**Equazioni cartesiane.** Se  $S$  come sottospazio affine è dato in forma cartesiana dal sistema

lineare  $h \times (n+1)$  seguente:

$$Ax + b = 0 \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$$

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1 + \dots + a_{1,n}X_n + b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}X_1 + \dots + a_{h,n}X_n + b_h = 0 \end{cases}$$

Allora  $\bar{S}$  è descritto dal sistema lineare omogeneo  $h \times (n+1)$  in  $(x_0, \dots, x_n)$  seguente:

$$(A \mid b)x = 0 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n$$

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1x_0 = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \dots + a_{h,n}x_n + b_hx_0 = 0 \end{cases}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Studiamo le dimensioni di  $S$  e  $\bar{S}$  usando i sistemi cartesiani appena definiti:

$$\dim S = \dim \mathbb{K}^n - \text{rk}(A) = n - \text{rk}(A)$$

$$\dim \bar{S} = \dim \mathbb{P}^n - \text{rk}(A \mid b) - 1 = (n+1 - \text{rk}(A \mid b)) - 1 = n - \text{rk}(A \mid b)$$

Per Rouché-Capelli vale  $\text{rk } A = \text{rk}(A \mid b)$  in quanto  $S \neq \emptyset$ . In questo modo abbiamo dimostrato che  $\dim \bar{S} = \dim S$ .  $\square$

I *punti impropri* del sottospazio affine  $S$  sono dati da  $\bar{S} \cap H_0$ , con  $\bar{S}$  la chiusura proiettiva di  $S$  e  $H_0$  l'iperpiano improprio. Dal sistema  $(*)$  si ha che  $\bar{S} \cap H_0$  è dato da:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \dots + a_{h,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Esso corrisponde al sistema lineare omogeneo in  $\mathbb{K}^n$   $Ax = 0$  associato al sistema lineare  $Ax + b = 0$  che definisce  $S$ . In altre parole,  $\bar{S} \cap H_0$  corrisponde al *sottospazio vettoriale direttore*  $W \subseteq \mathbb{K}^n$  e vale  $\bar{S} \cap H_0 = \mathbb{P}^n(W)$  direzione di  $S$ . La sua dimensione per definizione di direzione è:

$$\dim(\bar{S} \cap H_0) = \dim S - 1 = \dim \bar{S} - 1$$

**Equazioni parametriche.** Se  $S$  ( $\dim S = m$ ) è data in *forma parametrica* e il sottospazio direttore  $W \subseteq \mathbb{K}^n$  ha una base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  (tali che  $v_i = (V_{i,1}, \dots, V_{i,n}) \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$  per un dato sistema di riferimento affine), posto  $c \in S$  ricordiamo che l'espressione parametrica

di  $S$  è:

$$X = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m + c \quad t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} X_1 = t_1 V_{1,1} + \dots + t_m V_{m,1} + C_1 \\ \vdots \\ X_n = t_1 V_{1,n} + \dots + t_m V_{m,n} + C_n \end{cases}$$

Allora,  $\bar{S}$  è il sottospazio generato dagli  $m+1$  punti *indipendenti*:

$$(0: v_{i,1}: \dots: v_{i,n}) \quad i = 1, \dots, m(1: c_1: \dots: c_n) \quad (10.42)$$

Pertanto,  $\bar{S}$  ha descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x_0 = t_0 \\ x_1 = t_1 v_{1,1} + \dots + t_m v_{m,1} + t_0 C_1 \\ \vdots \\ x_n = t_1 v_{1,n} + \dots + t_m v_{m,n} + t_0 C_n \end{cases}$$

Con  $(t_0: \dots: t_m) \in \mathbb{P}^m$ .

### 10.8.2 Un esempio di proiettività

Vediamo un esempio di proiettività di  $\mathbb{P}^1$ .

**ESEMPIO.** Si consideri  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathcal{A}(\mathbb{K}) \cup \{\infty\}$  con  $\infty = (0: 1)$ . Sia  $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$  una proiettività (dunque *biunivoca*) definita come  $f(x_0: x_1) = (ax_0 + bx_1: cx_0 + dx_1)$ . Si ha che  $f(0: 1) = (b: d)$ , mentre la sua controimmagine è  $f(-b: a) = (0: 1)$ ; infatti, siccome le coordinate sono omogenee, basta porre  $ax_0 + bx_1 = 0$ .

Sia  $t = \frac{x_1}{x_0}$  la coordinata affine su  $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ . Se  $x_0 \neq 0$ , tutti i punti  $(x_0: x_1)$  si possono scrivere come  $(x_0: x_1) = (1: \frac{x_1}{x_0}) = (1: t)$ , che corrispondono al punto  $t \in \mathbb{K}$ . Vediamo ora come si comporta l'immagine grazie a queste osservazioni se  $ax_0 + bx_1 \neq 0$ :

$$f(x_0: x_1) = (ax_0 + bx_1: cx_0 + dx_1) = \left(1: \frac{cx_0 + dx_1}{ax_0 + bx_1}\right) = \left(1: \frac{x_0(c + d\frac{x_1}{x_0})}{x_0(a + b\frac{x_1}{x_0})}\right) = \left(1: \frac{dt + c}{bt + a}\right)$$

Dunque la proiettività  $f$  corrisponde alla trasformazione  $F: \mathbb{K} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$

$$\text{con } F(t) = \begin{cases} \frac{dt+c}{bt+a}, & t \in \mathbb{K}, t \neq -\frac{a}{b} \\ \infty, & t = -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{b}, & t = \infty \end{cases} \quad \text{dove per } t = -\frac{a}{b} \text{ si ottiene } f(-b: a) = (0: 1) = \infty. \text{ La}$$

prima equazione è detta *trasformazione lineare fratta*, che è definita sulla retta affine tranne dove si annulla il denominatore.

Notiamo che  $F$  diventa un'affinità  $F: \mathcal{A}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{K})$  se e solo se il denominatore  $t \longmapsto \alpha t + \beta$

diventa una costante ponendo  $b = 0$ , cioè se è della forma  $F(t) = \alpha$ . Ciò significa che la proiettività fissa il punto all'infinito ( $f(0: 1) = (0: 1)$ ), mentre la parte affine viene

mandata in sè stessa.

Questo ragionamento si può vedere anche in dimensione superiore.

### 10.8.3 Impraticchiamoci! Geometria affine e geometria proiettiva

**ESERCIZIO.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora, preso  $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea e  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  con la topologia quoziente, mostrare che  $U_0$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  e che  $j : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_0$  è un omeomorfismo.

**SOLUZIONE.** ...

## 10.9 SPAZI PROIETTIVI COMPLESSI

**RICORDIAMO...** Nel caso di  $\mathbb{R}^n$  si è già visto che lo spazio proiettivo reale è un quoziente del tipo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$ , dunque è dotato in maniera naturale di una topologia.

Si può anche vedere come *quoziente della sfera*  $S^n$  dove si identificano i punti antipodali grazie alla suriezione  $\pi : S^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ; è anche una *varietà topologica compatta* di dimensione  $n$ . Inoltre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$  e abbiamo analizzato il piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Anche nel caso complesso per  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$  si ha in maniera naturale una topologia quoziente data dalla topologia euclidea su  $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}$ .

Vogliamo vedere che è una *varietà topologica compatta* di dimensione  $2n$ . Infatti, mentre  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è localmente euclideo di dimensione  $n$ , si ha che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  localmente si comporta come  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ , dunque la dimensione topologica è  $2n$ .

**TEOREMA 10.9.0.**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è una varietà topologica di dimensione  $2n$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **connesso**: è quoziente di  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , che è connesso.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **compatto**: per avere la tesi, si vuole vedere lo spazio come *quoziente di un compatto* o *immagine tramite una funzione continua di un compatto*. Ricordiamo la relazione di equivalenza:

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : w = \lambda z$$

Vogliamo ora *restringerci alla sfera complessa* (la cui dimensione è data da  $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \supset S^{2n+1}$ ) e dimostrare che ogni *punto del quoziente* è equivalente ad un *punto della sfera*. Per fare ciò si sfrutta la corrispondenza fra numeri complessi e reali e la norma:

$$z_j = x_j + iy_j \implies z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \iff (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2}$$

$$\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (|x_j|^2 + |y_j|^2) \quad \wedge \quad \|\lambda z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda z_j|^2} = |\lambda| \|z\|, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$



Se  $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \implies \|z\| \neq 0$  e se  $\lambda = \frac{1}{\|z\|}$  si ha  $\underbrace{\frac{1}{\|z\|}}_{\in S^{2n+1}} \cdot z \sim z$ . Notiamo allora che

$\pi(S^{2n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , dunque  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è compatto.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è di **Hausdorff**: partiamo con una considerazione che segue dal punto precedente. Nel caso reale, i punti sulla sfera sono equivalenti solo se *antipodali*, nel caso complesso  $S^{2n+1}$  invece si ha, dati  $z, w \in S^{2n+1}$ :

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: w = \lambda z$$

Siccome  $w, z \in S^{2n+1}$  hanno norma unitaria  $1 = \|w\| = \|\lambda z\| = \lambda \|z\| = |\lambda|$ . Essendoci *infiniti* numeri di norma 1 in  $\mathbb{C}$ , allora ci sono *infiniti* numeri nella stessa classe, e quindi i punti  $\lambda z \in S^{2n+1}$  sono tutti equivalenti.

Consideriamo ora  $\pi_0 = \pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Per dimostrare che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è di Hausdorff, è sufficiente dimostrare che  $\pi_0$  sia una identificazione chiusa: in questo modo, per il teorema basta dimostrare che  $\pi_0$  è un'identificazione *chiusa*. Sia  $C \subset S^{2n+1}$  un chiuso. Allora  $\pi_0(C)$  è chiuso in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \iff \pi_0^{-1}(\pi_0(C))$  è chiuso in  $S^{2n+1}$ . Notiamo che:

$$\pi_0(z) \sim \pi_0(w) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = 1 : w = \lambda z$$

In effetti la relazione di equivalenza su  $S^{2n+1}$  viene da un'azione del gruppo  $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$  rispetto al prodotto con elemento neutro 1:

$$\begin{aligned} F : S^1 \times S^{2n+1} &\longrightarrow S^{2n+1} \\ (\lambda, z) &\longmapsto \lambda z \end{aligned}$$

- ◇  $F$  è un'applicazione continua.
- ◇  $S^1 \times S^{2n+1}$  è compatto e **Hausdorff**.

$F$  è *chiusa* in quanto funzione continua da un compatto in **Hausdorff**.

Dato un chiuso  $C \subseteq S^{2n+1}$ , prendendo la controimmagine dell'immagine agisco sui punti di  $C$  con tutti gli elementi di  $S^1$ , cioè prendo tutte le orbite che intersecano  $C$ , ottenendo quanto segue:

$$\pi_0^{-1}(\pi_0(C)) = F(\underbrace{S^1 \times C}_{\text{chiuso in } S^1 \times S^{2n+1}}) \subseteq S^{2n+1}$$

Segue che  $\pi_0^{-1}(\pi_0(C))$  chiuso e  $\pi_0(C)$  chiuso in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , cioè  $\pi_0$  è applicazione chiusa e  $\pi_0$  identificazione per il teorema.

Pertanto  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è anche quoziente di  $S^{2n+1}$ . Siccome  $S^{2n+1}$  è un compatto in un **Hausdorff** per e siccome  $\pi_0$  è un'identificazione *chiusa* allora  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **Hausdorff** per il teorema già citato in precedenza.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è **localmente euclideo di dimensione  $2n$** : per dimostrarlo sfruttiamo la costruzione. Consideriamo la famiglia di insiemi:

$$U_j := \{z_j \neq 0\} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus H_j, \text{ con } H_j \text{ } j\text{-esimo iperpiano coordinato.}$$

Per semplicità sia  $j = 0$ .

Si consideri la proiezione al quoziente  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  e la controimmagine  $\pi^{-1}(U_0) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \mid z_0 \neq 0\}$ , aperto in  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  in quanto abbiamo tolto un iperpiano. Segue che  $U_0$  è aperto in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  e lo stesso vale per tutti gli  $U_j$ . Ricordando la costruzione si considerano le seguenti mappe biunivoche, una inversa dell'altra:

$$\begin{aligned} j : \quad \mathbb{C}^n &\longrightarrow U_0 & \phi : \quad U_0 &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (1 : z_1 : \dots : z_n) & (z_0 : \dots : z_n) &\longmapsto \left( \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right) \end{aligned}$$

Mostriamo che  $j$  e  $\phi$  siano omeomorfismi; siccome sono già biunivoche e una inversa dell'altra basta dimostrare che sono entrambe *continue*.

Per mostrare che  $j$  è continua sfruttiamo il diagramma a lato, ovvero la fattorizzazione di  $j$  in  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  tramite:

$$\tilde{j}((z_1, \dots, z_n)) = (1, z_1, \dots, z_n)$$

E la proiezione  $\pi$ , che in questo caso opera nel seguente modo:

$$\pi((1, z_1, \dots, z_n)) = (1 : z_1 : \dots : z_n)$$

Siccome  $\tilde{j}$  e  $\pi$  sono continue, allora anche la loro composizione  $j$  lo è.

Per la continuità dell'inversa  $\phi$  si procede con la fattorizzazione della controimmagine  $\pi^{-1}$  tramite una restrizione dell'inversa di  $\pi$  a  $\pi^{-1}U_0$ :

$$p := \pi|_{\pi^{-1}(U_0)} : \pi^{-1}(U_0) \longrightarrow U_0$$

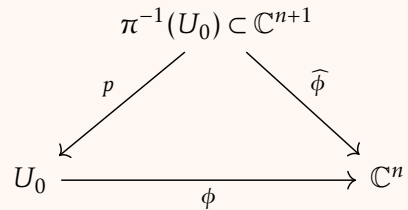
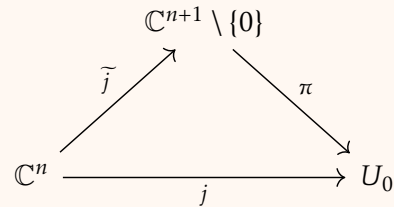
E tramite  $\hat{\phi}$ :

$$\hat{\phi}(z_0, \dots, z_n) = \left( \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right)$$

Entrambe sono *continue*: la prima è la restrizione di una funzione continua e la seconda, essendo ben definita ( $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ ), risulta banalmente continua: inoltre, quest'ultima lavora solo con vettori e non con classi di equivalenza!

Per dimostrare che  $\phi$  è continua sfruttiamo le proprietà della topologia quoziente (vedasi 4.1.1), dimostrando che  $p$  è un'*identificazione*: è già *continua* e *suriettiva*, dunque basta solo che sia aperta o chiusa per il teorema 4.1.

Osserviamo che  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è anch'essa un quoziente dato dall'azione del gruppo  ${}^a G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  rispetto al prodotto per la moltiplicazione su



$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . In particolare, è un'azione per omeomorfismi. Infatti, fissato  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \theta_\lambda : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto \lambda z \end{aligned}$$

È continua: per la proposizione 5.1 si ha che  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è un'applicazione aperta, pertanto anche  $p$  che è una sua restrizione ad un aperto è aperta. Dalle considerazioni di cui sopra  $p$  è un'identificazione. Ne segue che  $U_0$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  omeomorfo a  $\mathbb{C}^n$  e quindi a  $\mathbb{R}^{2n}$ . Allo stesso modo,  $\forall j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $U_j$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  omeomorfo a  $\mathbb{C}^n$  tramite la mappa-

$$\begin{aligned} \phi_j : U_j &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_0 : \dots : z_n) &\longmapsto \left( \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \end{aligned}$$

Siccome in *coordinate omogenee* c'è sempre un elemento *non* nullo (si lavora su  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ) allora ogni punto sta in uno degli aperti  $U_j$ , cioè:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U_0 \cup \dots \cup U_n \implies \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è *localmente euclideo* di dimensione  $2n$ , dunque è una *varietà topologica compatta*. □

<sup>a</sup>Questo vale in generale per gli spazi proiettivi, si veda .

#### OSSERVAZIONI.

- Su un campo  $\mathbb{K}$  qualsiasi si ha sempre la mappa  $\phi_j$ , una corrispondenza biunivoca fra i sottoinsiemi  $U_j$  (complementari di un iperpiano coordinato) e  $\mathbb{K}^n$  (senza aspetto topologico): vale sempre che lo spazio proiettivo è unione di tali  $U_j$ . In particolare, nel caso reale, tali  $U_j$  sono *aperti* ed il ragionamento è *analogo* a quello fatto poc'anzi nel caso complesso.
- Non abbiamo dimostrato che è a base numerabile perché essendo compatto segue dal teorema , inoltre si potrebbe dimostrare facilmente "a mano" sfruttando che gli aperti  $U_j$  sono a base numerabile, dunque anche la loro unione finita lo è.

#### 10.9.1 Retta proiettiva complessa

Cosa succede per la *retta proiettiva complessa*? Essa è una varietà topologica compatta di dimensione 2 (dunque una *superficie topologica compatta*) che abbiamo già classificato! Scopriamo di che superficie si tratta. Si ha:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{(0:1)\} \text{ con } U_0 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad (10.43)$$

In altre parole, la retta proiettiva complessa è un *piano* unito ad un *punto*. Dimostriamo ora che è omeomorfa a  $S^2$ , detta anche **sfera di Riemann** , e analizziamo poi la differenza con il piano proiettivo reale.

**TEOREMA 10.9.1.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$

**INTUITIVAMENTE...** Per ottenere la sfera si può pensare di *richiudere* il piano  $\mathbb{R}^2$  su se stesso, aggiungendo il punto all'infinito  $\{(0:1)\}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Costruiamo l'omeomorfismo con  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  sfruttando la *proiezione stereografica*. Consideriamo:

$$S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{p_N} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{k} \mathbb{C} \xrightarrow{j} U_0$$

$\searrow \quad \nearrow$   
 $F_{|_{S^2 \setminus \{N\}}}$

Con  $p_N : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  la *proiezione stereografica* dal polo nord  $N = (0, 0, 1)$ ,

$$k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{e} \quad j : \mathbb{C} \longrightarrow U_0$$

$$(x, y) \longmapsto x + iy \quad \quad w \longmapsto (1: w)$$

$S^2 \setminus \{N\}$ :

$$F_{|_{S^2 \setminus \{N\}}} := j \circ k \circ p$$

Poniamo  $F(N) := (0:1)$  in quanto sono gli unici punti rimasti da dover “mappare”, ricordando che  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{(0:1)\}$ .

Siccome  $j, k, p$  sono *tutti* omeomorfismi, allora la loro composizione  $F_{|_{S^2 \setminus \{N\}}}$  è biunivoca e continua su  $S^2 \setminus \{N\}$ .

Perché  $F$  sia continua in tutti i suoi punti basta verificarla che lo sia in un intorno (aperto) contenente  $N$ . Sfruttiamo la proiezione stereografica dal polo sud  $S = (0, 0, -1)$  scegliamo l'aperto  $S^2 \setminus \{S\}$ , intorno di  $N$ . Dobbiamo mostrare la continuità di  $F_{|_{S^2 \setminus \{S\}}}$ .

Scriviamo le due proiezioni stereografiche, sia da  $N$ , sia da  $S$ : fissato un punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  sulla sfera, allora consideriamo le semirette uscenti da  $N$  e da  $S$  che passano per  $P_0$  <sup>a</sup>:

$$NP_0 : \begin{cases} x = 0 + tx_0 \\ y = 0 + ty_0 \\ z = 1 + t(z_0 - 1) \end{cases} \quad P_0 - N \quad \quad SP_0 : \begin{cases} x = 0 + tx_0 \\ y = 0 + ty_0 \\ z = -1 + t(z_0 + 1) \end{cases} \quad P_0 - S$$

Per trovare le immagini delle proiezioni stereografiche intersechiamo le due semirette con il piano  $xy$ , cioè poniamo  $z = 0$ :

$$N : 1 + t(z_0 - 1) = 0 \implies t = \frac{1}{1-z_0} \quad \quad S : -1 + t(z_0 + 1) = 0 \implies t = \frac{1}{1+z_0}$$

Notiamo che i denominatori non si annullano in entrambi i casi per la definizione delle proiezioni stereografiche sulla sfera meno  $N$  ed  $S$  rispettivamente.

Ne segue che l'immagine di  $\mathbb{R}^2$  tramite la mappa standard  $k$  è:

$$N : \left( \frac{x_0}{1-z_0}, \frac{y_0}{1-z_0} \right) \mapsto w = \frac{x_0}{1-z_0} + i \frac{y_0}{1-z_0} \in \mathbb{C} \quad \quad S : \left( \frac{x_0}{1+z_0}, \frac{y_0}{1+z_0} \right) \mapsto u = \frac{x_0}{1+z_0} + i \frac{y_0}{1+z_0} \in \mathbb{C}$$

Si ha che  $w = \frac{1}{u}$  e, viceversa,  $u = \frac{1}{w}$ ; infatti, quando  $P_0 \in S^2 \setminus \{N, S\}$  allora  $w, u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Verifichiamolo usando le proprietà dei numeri complessi:

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{x_0}{1+z_0} - i \frac{y_0}{1+z_0}} = \frac{1+z_0}{x_0 - iy_0} \stackrel{!}{=} \frac{(x_0 + iy_0)(1+z_0)}{x_0^2 + y_0^2} \stackrel{!!}{=} \frac{(x_0 + iy_0)(1+z_0)}{1-z_0^2} = \frac{x_0 + iy_0}{1-z_0} = w$$

dove l'uguaglianza (!) vale perché, in quanto  $P_0 \neq N, S$  allora  $x_0 + iy_0 \neq 0$ , mentre quella (!!) segue dal fatto che il punto sta sulla sfera, per cui  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \implies x_0^2 + y_0^2 = 1 - z_0^2$ . Abbiamo dunque ottenuto  $F|_{S^2 \setminus \{N, S\}}$  come una composizione di mappe:

$$\begin{array}{ccccccc} S^2 \setminus \{N, S\} & \xrightarrow{p_N} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{k} & \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & U_0 \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & F|_{S^2 \setminus \{N, S\}} & \end{array}$$

Dove  $j(w) = (1 : w) = \left(1 : \frac{1}{u}\right) = (\bar{u} : 1)$ , lavorando in coordinate omogenee. Inoltre,  $F$  si estende in modo continuo su  $S^2 \setminus \{S\}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} S^2 \setminus \{S\} & \xrightarrow{p_S} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{k} & \mathbb{C} & \xrightarrow{c} & \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & U_0 \\ P & \longmapsto & & \longmapsto & u & \longmapsto & \bar{u} & \longmapsto & (\bar{u} : 1) \end{array}$$

Con  $c$  coniugio dei complessi (che è un omeomorfismo). In questo modo  $F|_{S^2 \setminus \{S\}}$  è composizione di omeomorfismi e quindi continua.

Dunque  $F$  è continua, chiusa (in quanto funzione da  $S^2$  compatto in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  **Hausdorff**) e biunivoca, pertanto  $F$  è un *omeomorfismo*.  $\square$

<sup>a</sup>Le equazioni sono scritte in *forma parametrica*, pertanto abbiamo evidenziato il punto per cui passano e la direzione.

**OSSERVAZIONE.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \neq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Notiamo che  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  e  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono entrambe compattificazioni del piano, ma in modo *profondamente diverso*!

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ , è l'unione di un **piano** con un **punto all'infinito** ed abbiamo appena dimostrato essere omeomorfo alla *sfera di Riemann*  $S^2$ .
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \cup S^1$ , è il piano unito alla retta impropria  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ; topologicamente, esso è l'**interno del disco** omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  unito al bordo  $S^1$  con la relazione di equivalenza per i punti antipodali. Per il teorema di classificazione delle superfici compatte ( ), sappiamo che  $S^2 \not\cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Nei nostri precedenti studi di Topologia abbiamo messo in primo piano lo studio delle *proprietà topologiche*, quegli aspetti di uno spazio topologico che si preservano sotto *omeomorfismi*. Anche nella Geometria Proiettiva risulta di fondamentale importanza la ricerca di **invarianti** rispetto alle proiettività.

Nella geometria Euclidea del piano diverse trasformazioni mantengono relazioni metriche come distanze, angoli e rapporti di distanze, ma passando alla *retta proiettiva* la maggior parte di queste vengono *distorte*. Tuttavia, già nella matematica del tardo periodo greco si trovò che un *rapporto di rapporto di distanze* sul piano si preservava tramite certe

trasformazioni.

Questo concetto, approfondito e generalizzato (separandolo completamente dalla *distanza Euclidea*) nell'ottica della Geometria proiettiva nel *secolo XIX*, diventò il **birapporto**, risultando uno degli invarianti proiettivi più usati.

**DEFINIZIONE 10.10.0. BIRAPPORTO.**

Sia  $\mathbb{P}^1(V)$  una retta proiettiva, ovvero  $\dim V = 2$ .

Siano  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$  dei punti con  $P_1, P_2, P_3$  distinti. Il **birapporto** dei punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (ordinati) è:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\} \text{ con } \beta = \infty \text{ se } y_0 = 0 \quad (10.44)$$

Dove  $(y_0 : y_1)$  sono le coordinate di  $P_4$  nel riferimento proiettivo in cui  $P_1$  e  $P_2$  sono i punti fondamentali e  $P_3$  il punto unità, cioè  $P_1 = (1 : 0), P_2 = (0 : 1), P_3 = (1 : 1)$ .

**OSSERVAZIONI.**

1.  $y_0, y_1 \in \mathbb{K} \implies \beta \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
2.  $\beta$  è ben definito perché  $P_1, P_2, P_3$  sono distinti e quindi sono in posizione generale<sup>a</sup>, ovvero determinano in maniera univoca il riferimento proiettivo per il teorema .
3. Per ipotesi i primi tre punti sono distinti, mentre non si fanno ipotesi sul quarto punto; vediamo cosa succede in alcuni casi speciali:

$$\begin{array}{llll} P_4 = P_1 & \iff & (y_0 : y_1) = (1 : 0) & \iff \beta = 0 \\ P_4 = P_2 & \iff & (y_0 : y_1) = (0 : 1) & \iff \beta = \infty \\ P_4 = P_3 & \iff & (y_0 : y_1) = (1 : 1) & \iff y_0 = y_1 \iff \beta = 1 \end{array}$$

Dunque  $\beta \in \{0, 1, \infty\}$  esattamente quando  $P_4$  coincide con uno dei primi 3 punti. Quindi, se  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono distinti, allora  $\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ .

Viceversa se  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$  e  $P_4 = (1 : a)$  allora  $\beta = a$ , dunque  $\beta$  assume tutti i valori possibili in  $\mathbb{K}$ .

<sup>a</sup>In una retta proiettiva essere distinti equivale ad essere in posizione generale.

Vogliamo ora scoprire come si calcola il birapporto in un sistema di riferimento qualsiasi e non solo quello dato nella definizione.

**TEOREMA 10.10.0.** Siano  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$  dei punti nella retta proiettiva con  $P_1, P_2, P_3$  distinti. Supponiamo che  $P_i = (\lambda_i : \mu_i), i = 1, \dots, 4$ . Allora:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}} \quad (10.45)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poichè  $P_1 \neq P_2$ , si ha che  $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$  sono una base di  $\mathbb{K}^2$ . Siano ora:

$$(*) \quad a, b \in \mathbb{K} : (\lambda_3, \mu_3) = a(\lambda_1, \mu_1) + b(\lambda_2, \mu_2) = (a\lambda_1, a\mu_1) + (b\lambda_2, b\mu_2)$$

In sostanza, facciamo una *combinazione lineare* e portiamo dentro gli scalari. Per costruzione con questi vettori ottengo la base che dà il riferimento proiettivo con  $P_1, P_2$  punti fondamentali e  $P_3$  punto unità (riscalando in modo tale che sia la somma degli altri due vettori). Per ottenere  $P_4$ , scrivo il corrispettivo vettore come una combinazione lineare dei vettori della base:

$$(*) \quad \exists c, d \in \mathbb{K}: (\lambda_4, \mu_4) = c(a\lambda_1, a\mu_1) + d(b\lambda_2, b\mu_2)$$

Segue che  $P_4$  ha coordinate  $(c: d)$  nel nuovo riferimento proiettivo e quindi  $\beta = \frac{d}{c}$ . Per non appesantire la scrittura useremo come la seguente notazione per i determinanti:

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix}$$

Notiamo che la prima combinazione lineare  $(*)$  dà il seguente sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite  $a, b$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_3 \\ \mu_1 a + \mu_2 b = \mu_3 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con il metodo di Cramer<sup>a</sup> si ottiene:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}$$

La seconda combinazione lineare  $(*)$  invece dà un sistema lineare in  $c, d$ , dove sostituisco i valori di  $a, b$  trovati:

$$\begin{cases} (a\lambda_1)c + (b\lambda_2)d = \lambda_4 \\ (a\mu_1)c + (b\mu_2)d = \mu_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}}\lambda_1 c + \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}\lambda_2 d = \lambda_4 \\ \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}}\mu_1 c + \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}\mu_2 d = \mu_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\delta_{32}\lambda_1)c + (\delta_{13}\lambda_2)d = \delta_{12}\lambda_4 \\ (\delta_{32}\mu_1)c + (\delta_{13}\mu_2)d = \delta_{12}\mu_4 \end{cases}$$

Applicando ancora Cramer, poiché il determinante è lineare in ogni colonna, possiamo estrarre i  $\delta_{ij}$  dalle colonne e riscriverli *riordinando gli indici*: scambiamo l'ordine delle colonne cambiamo il segno, ma facendolo sia al numeratore, sia al denominatore, i segni si semplificano e lo stesso vale per  $d$ :

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{12}\lambda_4 & \delta_{13}\lambda_2 \\ \delta_{12}\mu_4 & \delta_{13}\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{32}\lambda_1 & \delta_{13}\lambda_2 \\ \delta_{32}\mu_1 & \delta_{13}\mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{\delta_{12}}\cancel{\delta_{13}}\delta_{42}}{\cancel{\delta_{32}}\cancel{\delta_{13}}\delta_{12}} = \frac{-\delta_{24}}{\delta_{23}} = \frac{\delta_{24}}{\delta_{23}}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{32}\lambda_1 & \delta_{12}\lambda_4 \\ \delta_{32}\mu_1 & \delta_{12}\mu_4 \end{vmatrix}}{\delta_{32}\delta_{13}\delta_{12}} = \frac{\cancel{\delta_{32}}\cancel{\delta_{12}}\delta_{14}}{\cancel{\delta_{32}}\delta_{13}\cancel{\delta_{12}}} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{13}}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{d}{c} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{13}} \cdot \frac{\delta_{23}}{\delta_{24}}$$

□

<sup>a</sup>Nelle "Note aggiuntive", a pag. 221, si possono trovare alcuni brevi cenni al metodo di Cramer.

**OSSERVAZIONE.** Il birapporto può anche essere definito tramite questa formula, che è *ben definita*: supponendo di moltiplicare i punti per uno scalare, la stessa costante appare al numeratore e al denominatore, dunque si semplifica, pertanto il birapporto così definito *non dipende* dalla scelta delle coordinate omogenee. Inoltre, al denominatore il primo determinante è sempre diverso da 0 perché *i punti sono distinti*, mentre il secondo determinante al denominatore è *nullo* se e solo  $P_2 = P_4$ , ottenendo la definizione originale.

**TIPS & TRICKS!** Se tutti e 4 i punti sono diversi da  $(0:1)$ , ovvero se  $\forall i, \lambda_i \neq 0$   $P_i = (1: z_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  allora:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} \quad (10.46)$$

Infatti,  $P_i = (\lambda_i: \mu_i) = (1: z_i)$ , cioè  $z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$ ; per la linearità delle colonne si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1} & \frac{\mu_4}{\lambda_4} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_4 (z_4 - z_1)$$

Procedendo allo stesso modo con gli altri determinanti e applicando la definizione equivalente di *birapporto*, si ottiene il risultato di sopra in quando i  $\lambda$  si semplificano.

#### 10.10.1 Birapporto e trasformazioni proiettive

**RICORDIAMO...** Date due rette proiettive  $\mathbb{P}^1(V)$  e  $\mathbb{P}^1(V')$  ( $\dim \mathbb{P}^1(V) = 1 = \dim \mathbb{P}^1(V')$ ), e  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(V)$  distinti e  $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(V')$  distinti, esiste sempre ed è unica una trasformazione proiettiva  $d: \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$  tale che  $f(P_i) = Q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  grazie al teorema 10.2, pag. 158.

Ci interessa ora provare un risultato più generale: l'esistenza di una proiettività con 4 punti *non tutti in posizione generale*.

**TEOREMA 10.10.1.** Siano  $\mathbb{P}^1(V)$  e  $\mathbb{P}^1(V')$  due rette proiettive, con:

- $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$  (di cui i primi 3 distinti).
- $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}^1(V')$  (di cui i primi 3 distinti).

Allora  $\exists$  trasformazione proiettiva  $f: \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$  tale che:

$$f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, \dots, 4 \iff \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \quad (10.47)$$

Cioè se il birapporto delle quaterne è **invariante per proiettività**.

**OSSERVAZIONE.** Consideriamo i primi 3 punti e scegliamone dei rappresentanti per cui:

$$v_1, v_2, v_3 \in V: P_i = [v_i], i = 1, 2, 3 \text{ e } v_3 = v_1 + v_2$$

In altri termini,  $\{v_1, v_2\}$  è base di  $V$  che dà il riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}^1(V)$  in cui  $P_1 = (1: 0)$ ,  $P_2 = (0: 1)$ ,  $P_3 = (1: 1)$ . Sia  $P_4 = [v_4]$  con  $v_4 = av_1 + bv_2$ . Allora  $P_4 = (a: b)$  e  $\beta(P_i) = \frac{b}{a}$ .



Allo stesso modo per l'altra quaterna, siano:

$$v'_1, v'_2, v'_3 \in V': Q_i = [v'_i], i = 1, 2, 3 \text{ con } v'_3 = v'_1 + v'_2$$

Siccome  $P_1, P_2, P_3$  e  $Q_1, Q_2, Q_3$  sono in posizione generale, allora *esiste ed è unica* una trasformazione proiettiva  $f: \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$  tale che  $f(P_i) = Q_i$ .

Inoltre,  $f = \tilde{\varphi}$  con  $\varphi: V \longrightarrow V'$  applicazione lineare tale che  $\varphi(v_1) = v'_1, \varphi(v_2) = v'_2$ , cioè porta una base di  $V$  in una base di  $V'$ ; segue che  $\varphi(v_4) = \varphi(av_1 + bv_2) = av'_1 + bv'_2$  e pertanto  $f(P_4) = [\varphi(v_4)] = (a: b)$  nel riferimento in  $\mathbb{P}^1(V')$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Siccome  $f$  è unica e  $f(P_4) = Q_4 \implies Q_4 = (a: b)$  nel riferimento in cui  $Q_1 = (1: 0), Q_2 = (0: 1), Q_3 = (1: 1) \implies \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{b}{a} = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$ .

$\impliedby$ ) Se  $\beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{b}{a}$ , allora distinguiamo i casi in cui il birapporto è in  $\mathbb{K}$  o infinito:

- $\frac{b}{a} \in \mathbb{K} \implies Q_4 = \left(1: \frac{b}{a}\right) = (a: b) = f(P_4)$
- $\frac{b}{a} = \infty \implies a = 0 \implies Q_4 = (0: 1) = f(P_4)$

□

**COROLLARIO 10.10.0.** Siano  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  e siano i punti  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  di cui i primi 3 distinti, e  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  di cui i primi 3 distinti. Allora  $\exists$  proiettività  $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  tale che:

$$f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, \dots, 4 \iff \beta(P_i) = \beta(Q_i) \quad (10.48)$$

Cioè se il birapporto delle quaterne è **invariante per proiettività**.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathcal{S} = \{\text{quaterne ordinate di punti distinti in } \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$ . Prese due quaterne  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \in \mathcal{S}$ , esse sono *proiettivamente equivalenti* se  $\exists f$  proiettività tale che  $f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, 2, 3, 4$  e quindi, in base al teorema precedente, è vero se le due quaterne hanno lo stesso birapporto.

Notiamo che quella appena data è una **relazione di equivalenza**, tale per cui le classi di equivalenza *proiettiva* di 4 punti *distinti e ordinati* in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  sono in corrispondenza biunivoca con il campo  $\mathbb{K}$  escluso 0 e 1 visto che sono 4 punti distinti<sup>a</sup>, val a dire:

$$\frac{\mathcal{S}}{\sim} \longleftrightarrow \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$$

Si ha dunque che ad ogni quaterna di punti distinti associamo il suo *birapporto* (l'applicazione è *suriettiva*) e per ogni elemento nel campo troviamo una *quaterna di punti distinti* con tale birapporto (quozientando, l'applicazione è *iniettiva*)

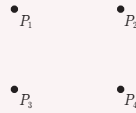
<sup>a</sup>Si veda l'analisi dei casi del birapporto con 2 punti uguali a pag. 176

**OSSERVAZIONE.** In dimensione maggiore generalmente il birapporto *non è definito*, a meno che i 4 punti non siano *allineati* su una retta proiettiva  $r$ .

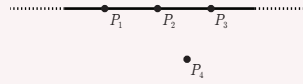
**ESEMPIO.**

Nel piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  consideriamo due quaterne di punti distinti  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  e  $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ . Scelta una quaterna, le disposizioni possibili sono le seguenti:

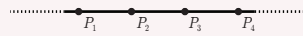
- In **posizione generale**, cioè a 3 a 3 non allineati.



- 3 punti allineati su una retta.

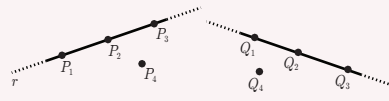


- 4 punti allineati su una retta.



Se i punti  $P_i$  sono proiettivamente equivalenti ai punti  $Q_i$ , allora tali posizioni *devono essere mantenute*: le proiettività mandano *rette in rette, posizioni generali in posizioni generali*. Per contronominale, se si verificano casi diversi per le due quaterne possiamo affermare che *non* sono proiettivamente equivalenti.

1. Sia  $P_i$ , sia  $Q_i$  sono in *posizione generale*. Siccome abbiamo 4 punti e  $4 = \dim \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) + 2$ , allora  $\exists!$  proiettività  $f$  di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  tale che  $f(P_i) = Q_i, i = 1, \dots, 4$ , dunque hanno lo stesso *birapporto* e sono sempre *proiettivamente equivalenti*.
2.  $P_1, P_2, P_3$  **allineati ma non  $P_4$ , e lo stesso per i  $Q_i$** ; in altre parole,  $P_1, P_2, P_3 \in r$  retta proiettiva e  $Q_1, Q_2, Q_3 \in s$  retta proiettiva.

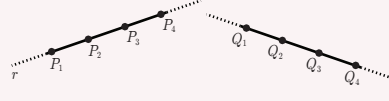


Vogliamo dimostrare che anche in questo caso le quaterne sono proiettivamente equivalenti. Scegliamo dei rappresentanti  $P_i = [v_i], i = 1, 2, 3, 4, v_i \in \mathbb{K}^3$  tale che  $v_3 = v_1 + v_2$ , lecito in quando i punti non sono allineati. Si ha che  $\{v_1, v_2, v_4\}$  è una base di  $\mathbb{K}^3$ :  $P_4 \notin r$  significa che  $v_4$  non è linearmente dipendente da  $v_1, v_2$ . Allo stesso modo sia  $Q_i = [w_i], i = 1, 2, 3, 4, w_i \in \mathbb{K}^3$  tale che  $w_3 = w_1 + w_2$  con  $\{w_1, w_2, w_4\}$  base di  $\mathbb{K}^3$ . Definiamo  $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$  lineare tale che:

$$\varphi(v_1) = w_1, \varphi(v_2) = w_2, \varphi(v_4) = w_4$$

Allora  $\varphi(v_3) = \varphi(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 = w_3$  e dunque  $f = \widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è una proiettività che manda  $P_i$  in  $Q_i, \forall i = 1, 2, 3, 4$ .

3. **Tutti i punti sono allineati.**



Essendo allineati, allora è definito il loro birapporto. Se le due quaterne sono proiettivamente equivalenti, sia  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  la proiettività: essa porta una quaterna nell'altra e necessariamente una retta nell'altra, ovvero  $f(r) = s$ ; in altre parole, la restrizione alle due rette  $f|_r : r \longrightarrow s$  porta  $P_i$  in  $Q_i$ ,  $\forall i \implies \beta(P_i) = \beta(Q_i)$ .

Viceversa, se  $\beta(P_i) = \beta(Q_i)$  allora  $\exists g : r \longrightarrow s$  trasformazione proiettiva che manda  $P_i$  in  $Q_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, 4$ .

Si ha che  $g$  si estende in maniera non unica ad una proiettività di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ . Infatti, dati:

- $r = \mathbb{P}^n(U)$ ,  $U \subset \mathbb{K}^3$ .
- $s = \mathbb{P}^n(W)$ ,  $W \subset \mathbb{K}^3$ .

Con  $U$  e  $W$  piani vettoriali, si ha che  $g = \tilde{\psi}$  con  $\psi : U \longrightarrow W$  è un isomorfismo lineare. Vogliamo estenderla ad un *automorfismo lineare*  $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$  scegliendo basi con due vettori nel piano ed uno esterno, ovvero  $u_1, u_2 \in U$  base di  $U$  e  $u_3 \notin U$ . Dunque  $\{\psi(u_1), \psi(u_2)\}$  è una base di  $W$  e  $w_3 \notin W \implies \{u_1, u_2, u_3\}$  base di  $\mathbb{K}^3$  e  $\{\psi(u_1), \psi(u_2), \psi(u_3)\}$  un'altra base. Ponendo  $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$  tale che:

- $\varphi(u_1) := \psi(u_1)$ .
- $\varphi(u_2) := \psi(u_2)$ .
- $\varphi(u_3) := w_3$

Si ha  $f = \tilde{\varphi}$ . Dunque, i punti sono *proiettivamente equivalenti* se e solo se hanno lo stesso birapporto.

### 10.10.2 Eserciziamoci! Birapporto

**ESERCIZIO.** Verificare che se  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sono tutti diversi da  $(1 : 0)$ , cioè  $P_i = (w_i : 1)$ ,  $\forall i = 1, \dots, 4$  e:

$$\beta = \frac{(w_2 - w_1)(w_3 - w_2)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)} \quad (10.49)$$

### 10.1.1 PIANO PROIETTIVO DUALE

Una **retta** in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  ha equazione:

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad (10.50)$$

Essa è un'equazione **lineare omogenea** in coordinate omogenee, dunque è determinata dai coefficienti  $a_0, a_1, a_2$  dell'equazione con la proprietà che devono essere *non tutti nulli*; inoltre, fissati i coefficienti, l'equazione è determinata *a meno di costante moltiplicativa non nulla*. Dunque si può associare a  $r$  un **punto** del piano proiettivo dato dai coefficienti delle coordinate omogenee:

$$(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \quad (10.51)$$

Si ha una *corrispondenza biunivoca* fra le rette in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  e  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ :

$$\begin{aligned} \{\text{rette in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\} &\longleftrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \\ r: a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 &\longleftrightarrow (a_0: a_1: a_2) \end{aligned}$$

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$$l_i: x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \longleftrightarrow (1: 1: 2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

**DEFINIZIONE 10.11.0.** PIANO PROIETTIVO DUALE.

Inteso  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  come lo spazio che *parametrizza le rette* in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , lo chiamiamo **piano proiettivo duale** e lo denotiamo con  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ .

In prima istanza, questo significa semplicemente che si interpreta un punto del *piano duale* come un punto *associato* ad una *retta* di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

#### 10.11.1 Fascio di rette

**DEFINIZIONE 10.11.1.** FASCIO DI RETTE.

Un **fascio di rette**  $\mathcal{F}$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è l'insieme delle rette di equazione:

$$\mathcal{F}: \lambda l_1 + \mu l_2 = 0, (\lambda: \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \quad (10.52)$$

Dove  $l_1, l_2$  sono due rette fissate e distinte.

**OSSERVAZIONE.** Possiamo pensare al fascio di rette come una **collezione di rette**, le cui equazioni si ottengono come *combinazione lineare* delle due rette del fascio con  $\lambda, \mu$  come **parametri**.

**ESEMPIO.** Consideriamo le rette  $l_1: x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$  e  $l_2: 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0$ . Il fascio di rette determinato da  $l_1, l_2$  è

$$(\lambda + 3\mu)x_0 + (\lambda - 2\mu)x_1 + 2(\lambda + 2\mu)x_2 = 0$$

- $(\lambda: \mu) = (1: 0) \rightarrow l_1$ .
- $(\lambda: \mu) = (0: 1) \rightarrow l_2$ .
- $(\lambda: \mu) = (1: 1): 4x_0 - x_1 + 6x_2 = 0$ .

**OSSERVAZIONE.** Abbiamo detto che ad ogni retta corrisponde un punto del piano proiettivo duale. Il fascio  $\mathcal{F}$  corrisponde, sul piano duale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ , alla **retta** passante per i punti corrispondenti a  $l_1$  e  $l_2$ :

$$l_1: a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \longrightarrow (a_0: a_1: a_2)$$

$$l_2: b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \longrightarrow (b_0: b_1: b_2)$$

$$\mathcal{F}: (\lambda a_0 + \mu b_0)x_0 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2 = 0 \longrightarrow (\lambda a_0 + \mu b_0: \lambda a_1 + \mu b_1: \lambda a_2 + \mu b_2)$$

In altri termini,  $(\lambda a_0 + \mu b_0: \lambda a_1 + \mu b_1: \lambda a_2 + \mu b_2)$  rappresenta la retta per i due punti

duali in forma parametrica.

**ESEMPIO.** Prendiamo:

$$\begin{aligned} l_1 &\longleftrightarrow (1 : 1 : 2) = Q_1 \\ l_2 : 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0 &\longleftrightarrow (3 : -2 : 4) = Q_2 \quad \mathcal{F} \longleftrightarrow (\lambda + 3\mu : \lambda - 2\mu : 2(\lambda + 2\mu)) \end{aligned}$$

Il fascio rappresenta la retta  $\overline{Q_1 Q_2}$  in forma parametrica.

**OSSERVAZIONE.** Siccome due rette distinte nel piano si intersecano in un punto solo, consideriamo  $P := l_1 \cap l_2$ . Allora:

- Ogni retta del fascio passa per  $P$  perché è lì che la combinazione lineare si annulla.
- $P$  è l'unico punto comune a tutte le rette del fascio  $\mathcal{F}$ .
- Viceversa, ogni retta per  $P$  appartiene al fascio  $\mathcal{F}$ .

Ciò significa che  $\mathcal{F}$  è la famiglia delle rette per il punto fissato  $P$ , che è detto **punto base del fascio**.

**ESEMPIO.** Consideriamo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} l_1 : x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \\ l_2 : 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x_0 = -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \implies -5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x_0 = 4x_1 \\ x_2 = -\frac{5}{2}x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Otteniamo, a meno di multipli, il punto  $P = (8 : 2 : -5) = l_1 \cap l_2$ . Tale fascio  $\mathcal{F}$  corrisponde alla retta in  $(\mathbb{P}^2)^*$  per i punti  $Q_1 = (1 : 1 : 2)$  e

$Q_2 = (3 : -2 : 4)$  che, scritta in forma parametrica, corrisponde a  $(\lambda + 3\mu : \lambda - 2\mu : 2(\lambda + 2\mu))$ . Cerchiamo ora l'equazione cartesiana della retta  $\overline{Q_1 Q_2}$  nelle coordinate  $(a_0 : a_1 : a_2)$ :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8a_0 + 2a_1 - 5a_2 = 0$$

Notiamo che i coefficienti della retta ottenuta sono esattamente le **coordinate omogenee** di  $P$ , intersezione delle due rette!

Più in generale, fissato un punto base  $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , l'insieme delle rette per  $P$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ :

$$\mathcal{F}_P = \{\text{rette per } P \text{ in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\} \quad (10.53)$$

È un fascio di rette corrispondente a una **retta** nel piano proiettivo duale  $(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))^*$ . Se le coordinate del punto sono  $P = (c_0 : c_1 : c_2)$ , la retta corrispondente nel piano proiettivo duale  $(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))^*$  ha equazione cartesiana:

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \quad (10.54)$$

Infatti, data una retta  $r$  qualsiasi di equazione  $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ , il punto  $P$  appartiene a  $r$ , cioè  $P \in r$ , se e solo se vale l'equazione precedente  $c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0$ .

Per scrivere il fascio  $\mathcal{F}$  in forma *parametrica* scelgo due rette distinte passanti per  $P$ .

**OSSERVAZIONE.** INTERPRETAZIONE AFFINE DEL FASCIO DI RETTE PROIETTIVE.

Se interpretiamo  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2) = U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  e consideriamo il fascio di rette proiettive  $\mathcal{F}$  con punto base  $P$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , abbiamo due possibilità:  $P$  è punto base *proprio* o *all'infinito*.

- Se  $P$  è un **punto proprio**, allora  $P \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  e  $\mathcal{F}$  corrisponde al *rette affini* in  $\mathbb{K}^2$  per il punto  $P$  (passando dalla chiusura proiettiva della retta proiettiva a quella affine).
- Se  $P$  invece è un *punto improprio*, esso corrisponde ad una *direzio*ne di rette nel piano affine e  $\mathcal{F}$  corrisponde a tutte le rette affini che hanno questa direzione fissata, ovvero è un **fascio di rette parallele**.

Il caso proiettivo è interessante perché la distinzione fra questi due tipi di fasci è data solo dal fatto se il punto  $P$  è proprio o improprio.

#### 10.11.2 Spazi vettoriali duali e spazi proiettivi duali

Sappiamo che  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è il proiettivizzato di  $\mathbb{K}^3$ , ovvero  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{K}^3)$ . Inoltre, in *Geometria Uno*, abbiamo definito gli **spazi vettoriali duali** come<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^3)^* &= \{\text{forme lineari } \alpha \text{ su } \mathbb{K}^3\} \\ \alpha : \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \alpha(x_0, x_1, x_2) &= ax_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \end{aligned} \quad (10.55)$$

Quando consideriamo la retta  $r: a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ,  $r$  è il proiettivizzato del **nucleo** di  $\alpha$ , il quale è un *piano vettoriale*  $\ker \alpha \subset \mathbb{K}^3$  la cui equazione è appunto  $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ . In altre parole, si ha una corrispondenza fra i *punti della retta proiettiva duale* e le *classi proiettive* delle forme lineari  $[\alpha]$ :

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}^2)^* &= \mathbb{P}^2(\mathbb{K}^3)^* \\ r &\longleftrightarrow [\alpha] \end{aligned} \quad (10.56)$$

Infatti,  $\alpha$  è una forma lineare *non nulla* determinata *a meno di multipli*. Si ha che  $\{x_0, x_1, x_2\}$  è una base di  $(\mathbb{K}^3)^*$  che induce le coordinate proiettive  $(a_0 : a_1 : a_2)$  su  $(\mathbb{P}^2)^*$ . Pertanto, tale *interpretazione astratta* diventa operativa fissando la *base duale* delle forme lineari: scrivo  $\alpha$  come combinazione lineare della base, e i coefficienti saranno le data dalle *coordinate proiettive associate*. Generalizziamo ulteriormente ad uno spazio vettoriale qualunque.

**DEFINIZIONE 10.11.2.** SPAZIO PROIETTIVO DUALE.

Dato uno spazio vettoriale  $V$ , il suo *spazio proiettivo associato*  $\mathbb{P}^n(V)$  ed il suo *spazio vettoriale duale*  $V^* = \{\text{forme lineari } \alpha : V \longrightarrow \mathbb{K}\}$ , si definisce lo **spazio proiettivo duale** di  $\mathbb{P}^n(V)$ :

$$\mathbb{P}^n(V)^* = \mathbb{P}^n(V^*) \quad (10.57)$$

Poichè  $\dim V^* = \dim V$ , allora  $\mathbb{P}^n(V)^* = \mathbb{P}^n(V)$ .

<sup>1</sup>A differenza della notazione vista in *Geometria Uno*, qui consideriamo gli indici delle coordinate da 0 a 2.

In particolare, si ha la corrispondenza biunivoca:

$$\mathbb{P}^n(V)^* \longleftrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}^n(V)\}$$

$$[\alpha] \longleftrightarrow \mathbb{P}(\ker \alpha) \subset \mathbb{P}^n(V)$$

In coordinate, ad un piano di equazione  $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$  associamo il punto  $(a_0 : \dots : a_n)$ , nello stesso modo in cui ad un vettore associamo i coefficienti della scrittura secondo una tale base.

### 10.11.3 *Impratichiamoci! Piano proiettivo duale*

**ESERCIZIO.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  scrivere in forma parametrica il fascio delle rette per il punto base  $P$  di coordinate  $(1 : -1 : 4)$ .

**SOLUZIONE.** Scegliamo 2 rette distinte, a nostro piacere, che passano per il punto  $P$ ; ad esempio,  $l_1 : x_0 + x_1 = 0$  e  $l_2 : 4x_0 - x_2 = 0$ . Il fascio sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \lambda(x_0 + x_1) + \mu(4x_0 - x_2) &= 0 \\ (\lambda + 4\mu)x_0 + \lambda x_1 - \mu x_2 &= 0, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1 \end{aligned}$$

Se facciamo variare  $\lambda$  e  $\mu$  otteniamo tutte le rette di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che passano per  $P$ .





# CONICHE PROIETTIVE

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Nella geometria Euclidea le **coniche** sono curve ottenute dall'intersezione di un *cono* con un *piano*. Nel piano affine  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  si generalizzano (inclusendo anche casi degeneri) studiando le *forme quadratiche* e classificandole *a meno di rototraslazione*. Vogliamo estendere ulteriormente il al *piano proiettivo* di queste coniche, tenendo dunque conto del ruolo svolto dalla *retta all'infinito*.

## 11.1 CONICHE NEL PIANO PROIETTIVO

Consideriamo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  con coordinate omogenee  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Indichiamo con  $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  l'*anello dei polinomi* in  $x_0, x_1, x_2$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ . Se  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  è un polinomio *qualsiasi*, l'equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  non dà una condizione *ben definita* in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ : ad esempio,  $x_0 + 1 = 0$  non ha senso perché  $x_0$  è determinato solo a meno di multipli. Cerchiamo dunque dei polinomi che ha senso studiare in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

### DEFINIZIONE 11.1.0. POLINOMIO OMOGENEO.

Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  un polinomio. Si dice che  $F$  è un **polinomio omogeneo** se tutti i monomi a coefficienti *non* nulli hanno lo *stesso* grado.

### ESEMPL.

- $F = x_0^3 + x_0x_1^2 - 3x_1x_2x_3 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$  è un polinomio omogeneo di grado 3.
- $G = x_0^3 - x_1x_2 + 1$  non è un polinomio omogeneo.

**OSSERVAZIONE.** Se  $\deg F = 1$ , cioè  $F = a_0x_0 + \dots + a_nx_n + b$ , allora  $F$  è omogeneo se e solo se  $b = 0$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  è omogeneo di grado  $d$  allora:

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n) \quad (11.1)$$

Infatti,  $F$  è somma di monomi di grado  $d$  del tipo  $ax_0^{i_0}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$  con  $\sum_{j=0}^n i_j = d$  e si ha che  $a(\lambda x_0)^{i_0}(\lambda x_1)^{i_1}\dots(\lambda x_n)^{i_n} = \lambda^{i_0+\dots+i_n}(ax_0^{i_0}\dots x_n^{i_n}) = \lambda^d(ax_0^{i_0}\dots x_n^{i_n})$ .

Torniamo al piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  con le coordinate omogenee  $(x_0 : x_1 : x_2)$  e consideriamo  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  un polinomio omogeneo nelle coordinate omogenee di grado  $d$ . Se abbiamo un punto  $P = (c_0 : c_1 : c_2) \in \mathbb{P}^2$ , allora tutte le possibili scelte per le coordinate di  $P$  sono  $(\lambda c_0 : \lambda c_1 : \lambda c_2)$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Valutando  $F$  in  $P$ , otteniamo  $F(\lambda c_0, \lambda c_1, \lambda c_2) = \lambda^d F(c_0, c_1, c_2)$ : in altre parole,  $F$  si annulla in una scelta di coordinate se e solo se si annulla in qualsiasi scelta di coordinate, cioè:

$$F(c_0, c_1, c_2) = 0 \iff F(\lambda c_0, \lambda c_1, \lambda c_2) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Pertanto, l'equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  è ben posta in  $\mathbb{P}^2$ .

**ESEMPIO.**  $x_0^2 - x_1x_2 = 0$  definisce un sottoinsieme del piano proiettivo.

**DEFINIZIONE 11.1.1.** CURVA ALGEBRICA PIANA PROIETTIVA.

Una **curva algebrica piana proiettiva**  $C$  di  $\mathbb{P}^2$  è il luoghi degli zeri dato da un polinomio omogeneo  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ :

$$C = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\} \quad (11.2)$$

La curva è definita a meno di multipli: se  $G = \lambda F$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ,  $G$  e  $F$  descrivono la stessa curva.

Diciamo che la curva  $C$  è **reale** se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (e quindi  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ), **complessa** se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (e quindi  $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ).

**DEFINIZIONE 11.1.2.** EQUAZIONE DI UNA CURVA.

L'**equazione** di una curva  $C$  è il polinomio  $F$  (a meno di multipli) che la descrive.

**DEFINIZIONE 11.1.3.** SUPPORTO DI UNA CURVA.

Il **supporto** di una curva  $C$  descritta da un polinomio  $F$  (a meno di multipli) è l'insieme dove il polinomio si annulla.

L'equazione determina il supporto, ma in generale non vale il contrario.

**DEFINIZIONE 11.1.4.** GRADO DI UNA CURVA.

Il **grado** della curva  $C$  è il grado dell'equazione  $F$ .

**ESEMPIO.** Preso il polinomio  $F(x_0, x_1, x_2) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ , la curva  $C$  descrive una retta.

**DEFINIZIONE 11.1.5.** RETTE E CONICHE PROIETTIVE.

- Le **rette proiettive** sono curve di grado 1.
- Le **coniche proiettive** sono curve di grado 2.

D'ora in poi ci restringeremo ai casi  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**DEFINIZIONE 11.1.6.** CURVA IRRIDUCIBILE.

Una curva  $C$  è **irriducibile** se lo è la sua equazione  $F$ . Altrimenti si considera la sua fattorizzazione in irriducibili:

$$F = F_1^{m_1} \cdot \dots \cdot F_r^{m_r} \quad (11.3)$$

Siccome ogni fattore irriducibile  $F_i$  è omogeneo, ognuno definisce una curva  $C_i: F_i = 0$ , dette **componenti irriducibili** della curva  $C$ .

Se  $m_i > 1$  diciamo che  $C_i$  è una componente di **molteplicità**  $m_i$  in  $C$

**ESEMPL.**

- Le rette, essendo curve di grado 1, sono *sempre* **irriducibili**.  
Le coniche sono curve di grado 2. Dunque, considerata una conica  $C$  di equazione  $F = 0$ , ci sono 3 possibilità:
  1.  $C$  è **irriducibile**.
  2.  $C$  è il prodotto di fattori lineari distinti e non multipli:

$$F = L_1 \cdot L_2 \quad (11.4)$$

Con  $L_i$  forme lineari *non* proporzionali. Pertanto,  $C$  è una **coppia di rette distinte** (ad es.  $C: F = x_0 x_1 \implies C$  unione delle rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ ).

3.  $C$  è data da fattori lineari associati, cioè  $F$  è un quadrato a meno di uno scalare:

$$F = \lambda L^2, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad (11.5)$$

Allora  $C$  è una **retta doppia**: la retta è la sola componente irriducibile ed è di molteplicità 2 (ad es.  $C: F = x_0^2$ ).

## 11.1.1.1 Coniche proiettive

**DEFINIZIONE 11.1.7.** CONICA.

Una **conica**  $C$  di  $\mathbb{P}^2$  è il luoghi degli zeri dato da un polinomio omogeneo  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  di grado 2 in  $x_0, x_1, x_2$  a coefficienti *reali* o *complessi*.

$$F = a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

In generale, i polinomi omogenei di grado 2 sono *forme quadratiche*. Pertanto, vogliamo associare alla forma la corrispondente matrice simmetrica. Per evitare di dividere per 2 i termini misti, ci è lecito immaginarli già nella forma  $2a_{01}, 2a_{02}, 2a_{12}$ , ottenendo così:

$$F = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Allora la matrice simmetrica  $3 \times 3$  associata alla forma quadratica è:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} \in S(\mathbb{K}^{3,3}) \quad (11.6)$$

Ed è tale per cui  $F = x^t A x$  con  $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  il vettore delle coordinate omogenee.

**DEFINIZIONE 11.1.8. RANGO DELLA CONICA.**

Il **rango** della conica  $C$  è il rango della matrice associata  $A$ .

**OSSERVAZIONE.** Come già osservato, l'equazione della conica  $C$  determina  $F$  solo a meno di multipli, dunque anche la matrice  $A$  è determinata *a meno di multipli*. Tuttavia, il rango rimane ben definito in quanto  $\text{rk}(\lambda A) = \text{rk}(A)$ ,  $\forall \lambda \neq 0$ . Inoltre, il rango *non* può essere 0 perché essendo l'equazione di una conica il polinomio *non* può essere nullo (non descriveremmo una conica!).

Vogliamo studiare le coniche e le curve di grado maggiore a meno di equivalenza proiettiva, allo stesso modo in cui abbiamo classificato le coniche in  $\mathbb{R}^2$  a meno di rototraslazioni.

Sia dunque  $f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$  una proiettività, la cui matrice associata  $M \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$  è tale per cui  $x' = Mx$ . Allora  $f$  porta la conica  $C: F = 0$  nella conica  $\widetilde{C}: \widetilde{F} = 0$ , dove  $\widetilde{F}$  si ottiene sostituendo in  $f$  il vettore  $x = M^{-1}x'$ .

**ESEMPIO.** Sia  $C: x_0 x_1 = 0$  una coppia di rette e  $f$  una proiettività tale che:

$$f(x_0: x_1: x_2) = (x_0 + x_1: x_0 - 2x_1: x_2)$$

Scriviamo, usando la matrice associata alla proiettività, il vettore immagine  $x'_i$  in funzione di  $x_i$  e poi ricaviamo  $x_i$  in funzione di  $x'_i$ .

$$f: \begin{cases} x'_0 = x_0 + x_1 \\ x'_1 = x_0 - 2x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} -3x_1 = x'_1 - x'_0 \implies x_1 = \frac{1}{3}(x'_0 - x'_1) \\ x_0 = x'_0 - x_1 = x'_0 - \frac{1}{3}(x'_0 - x'_1) = \frac{1}{3}(2x'_0 + x'_1) \end{cases}$$

$$f^{-1}: \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}(2x'_0 + x'_1) \\ x_1 = \frac{1}{3}(x'_0 - x'_1) \\ x_2 = x'_2 \end{cases}$$

In sostanza abbiamo ottenuto l'espressione dell'inversa di  $f$ ; quindi, la trasformata di  $C$  tramite  $f$  è  $(2x'_0 + x'_1)(x'_0 - x'_1) = 0$ , che è ancora una coppia di rette. In particolare, notiamo che esse sono le immagini tramite  $f$  delle rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ , a meno dei fattori moltiplicativi  $\frac{1}{3}$ .

Osserviamo che la proiettività manda il supporto della prima conica nel supporto della seconda conica e che, trasformando la conica tramite una proiettività, trasformiamo la forma quadratica  $F$  tramite un cambiamento di coordinate di  $\mathbb{K}^3$ .

Dunque, se  $A$  è la matrice associata a  $C$  e  $\widetilde{A}$  è la matrice associata alla trasformata  $\widetilde{C}$  tramite  $f$ , allora  $A$  e  $\widetilde{A}$  sono **congruenti**. Infatti, il *cambiamento di coordinate* su uno spazio vettoriale per la forma quadratica è dato da  $\widetilde{A} = M^t A M$  con  $M \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$  con  $M$  una matrice associata della proiettività, interpretata come matrice del cambiamento di base. Viceversa, date due coniche  $C_1$  e  $C_2$  le cui matrici associate (simmetriche)  $A_1$  e  $A_2$  sono congruenti, allora  $C_1$  e  $C_2$  sono *proiettivamente equivalenti*: questo perché, in generale, forme quadratiche congruenti differiscono per un cambiamento di base.

Otteniamo così la seguente corrispondenza:

$$C_1 \text{ e } C_2 \text{ equivalenti} \iff A_1 \text{ e } A_2 \text{ congruenti}$$

Pertanto lo studio delle coniche, a meno di equivalenze proiettive, passa per lo studio delle matrici congruenti.

### 11.1.2 Classificazione delle coniche proiettive complesse

**RICORDIAMO...** Nel campo dei complessi ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango.

$$A_1 \text{ e } A_2 \text{ congruenti} \iff \text{rk } A_1 = \text{rk } A_2$$

In generale, vale solo che se le matrici simmetriche sono congruenti allora hanno lo stesso rango (ma non il viceversa!).

Allora, a meno di equivalenza proiettiva, ci sono solo 3 possibili coniche: quelle di rango 1, rango 2 e rango 3.

**TEOREMA 11.1.0.** CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PROIETTIVE COMPLESSE.

1. Due coniche in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.
2. **Forma canonica:** ogni conica di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  è proiettivamente equivalente ad una ed una sola delle tre coniche seguenti:

<u>rk 3:</u> $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Conica irriducibile
<u>rk 2:</u> $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$	Coppia di rette distinte
<u>rk 1:</u> $x_0^2 = 0$	Retta doppia

v

### 11.1.3 Classificazione delle coniche proiettive reali

Sia  $C$  una conica in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con matrice associata  $A$ , simmetrica reale  $3 \times 3$ . Come abbiamo detto, poiché la matrice non è complessa, non è sufficiente il rango per la congruenza: affinché sia congruente ad un'altra matrice simmetrica serve anche la **segnatura**.

**OSSERVAZIONE.** Siccome  $A$  è determinata a meno di multipli, in principio la segnatura potrebbe cambiare. Vediamo cosa succede effettivamente.

Se  $A$  ha segnatura  $(p, q)$  con  $p$  il numero di autovalori positivi e  $q$  il numero di autovalori negativi, allora  $\lambda A$  può avere segnatura  $(p, q)$  se  $\lambda > 0$  oppure  $(q, p)$  se  $\lambda < 0$ .

Quindi, la segnatura di una conica è definita solo "a meno del segno", nel senso che  $(p, q) = (q, p)$ .

**TEOREMA 11.1.1.** CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PROIETTIVE REALI.

1. Due coniche in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno la stessa segnatura a meno del segno; dalla segnatura si deduce anche il rango.
2. Ogni conica in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è proiettivamente equivalente a una ed una sola delle

seguenti coniche, con segnature distinte a meno del segno:

<u>rk 3</u>	(3, 0)/(0, 3)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Conica irriducibile senza punti reali (supporto vuoto)
	(1, 2)/(2, 1)	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	Conica irriducibile a punti reali, contiene infiniti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
<u>rk 2</u>	(2, 0)/(0, 2)	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Coppia di rette non reali con 1 punto reale (0: 0: 1)
	(1, 1)	$x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$	Conica irriducibile a punti reali, coppia di rette reali distinte
<u>rk 1</u>	(1, 0)	$x_0^2 = 0$	Retta doppia

#### 11.1.4 Curve algebriche piane affini e chiusura proiettiva

Siccome abbiamo interpretato il piano proiettivo come un'estensione di quello affine, possiamo confrontare la classificazione delle curve nel piano proiettivo con la *classificazione nel caso affine*.

##### DEFINIZIONE 11.1.9. CURVA ALGEBRICA PIANA AFFINE.

Una **curva algebrica piana affine**  $C$  di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  è il luogo degli zeri dato da un polinomio omogeneo  $f \in \mathbb{K}[x, y]$ :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{P}^2 \mid f(x, y) = 0\} \quad (11.7)$$

La curva è definita a meno di multipli: se  $g = \lambda f$  con  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ,  $g$  e  $f$  descrivono la stessa curva.

Diciamo che la curva  $C$  è **reale** se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (e quindi  $C \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ ), **complessa** se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (e quindi  $C \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ ).

##### DEFINIZIONE 11.1.10. EQUAZIONE DI UNA CURVA.

L'**equazione** di una curva  $C$  è il polinomio  $f$  (a meno di multipli) che la descrive.

##### DEFINIZIONE 11.1.11. SUPPORTO DI UNA CURVA.

Il **supporto** di una curva  $C$  descritta da un polinomio  $f$  (a meno di multipli) è l'insieme dove il polinomio si annulla.

L'equazione determina il supporto, ma in generale non vale il contrario.

##### DEFINIZIONE 11.1.12. GRADO DI UNA CURVA.

Il **grado** della curva  $C$  è il grado dell'equazione  $f$ .

##### DEFINIZIONE 11.1.13. CURVA IRRIDUCIBILE.

Una curva  $C$  è **irriducibile** se lo è la sua equazione  $f$ . Altrimenti si considera la sua fattorizzazione in irriducibili:

$$f = f_1^{m_1} \cdot \dots \cdot f_r^{m_r} \quad (11.8)$$

Siccome ogni fattore irriducibile  $f_i$  è omogeneo, ognuno definisce una curva  $C_i: f_i = 0$ , dette **componenti irriducibili** della curva  $C$ .

Se  $m_i > 1$  diciamo che  $C_i$  è una componente di **molteplicità**  $m_i$  in  $C$

**DEFINIZIONE 11.1.14.** RETTE E CONICHE AFFINI.

- Le **rette affini**  $ax + by + c = 0$  sono curve di grado 1.
- Le **coniche affini**  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$  sono curve di grado 2.

#### 11.1.4.1 Omogeneizzazione di un polinomio

Vediamo ora qual è il legame fra curve affini e proiettive utilizzando la *chiusura proiettiva*. Ricordiamo che  $\mathbb{K}^2 = U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  con  $(x, y) \in \mathbb{K}^2$  che corrispondono a  $x = \frac{x_1}{x_0}$  e  $y = \frac{x_2}{x_0}$ , dato  $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

Sia  $C$  una curva affine di equazione  $f(x, y) = 0$ . Vogliamo associare a  $f$  un polinomio omogeneo nelle coordinate  $x_0, x_1, x_2$  dello stesso grado di  $f$ . Consideriamo dunque il polinomio  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$  così definito: se  $d = \deg f$ , allora:

$$F := x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \quad (11.9)$$

Esso è a tutti gli effetti un polinomio dello stesso grado di  $f$ . Infatti,  $F$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$ : considerato un monomio in  $f$ , della forma  $ax^i y^j$ , allora  $i + j$  se ne ottiene uno di grado  $d$  in  $x_0, x_1, x_2$ :

$$ax^i y^j \implies x_0^d a \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^i \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^j = ax_0^{d-i-j} x_1^i x_2^j$$

Ripetendo questa procedura per ogni monomio si ottiene un polinomio omogeneo  $f$  di grado  $d$  come desiderato. Notiamo che, operativamente, l'omogeneizzazione consiste nel cambiare nome alle variabili  $x$  e  $y$  e moltiplicare per un'opportuna potenza di  $x_0$  in modo tale che il monomio sia di grado  $d$ .

**ESEMPIO.** Vogliamo omogeneizzare il polinomio  $f = x^3 - 2xy + 3y + 1$ . Prima di tutto si cambia il nome delle variabili e si ottiene  $x_1^3 - 2x_1x_2 + 3x_2 + 1$ . Moltiplicando ciascun monomio per l'opportuna potenza di  $x_0$ , il polinomio omogeneizzato rispetto a  $x_0$  sarà  $F = x_1^3 - 2x_0x_1x_2 + 3x_0^2x_2 + x_0^3$ .

**OSSERVAZIONE.** Possiamo “deomogeneizzare” un polinomio omogeneo  $F(x_0, x_1, x_2)$ : ponendo  $x_0 = 1$  si riottiene il polinomio di partenza  $f(x_1, x_2)$ .

#### 11.1.4.2 Chiusura proiettiva

**DEFINIZIONE 11.1.15.** CHIUSURA PROIETTIVA DI UNA CURVA AFFINE.

La curva  $\overline{C}$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  definita da  $F = 0$  si dice **chiusura proiettiva** della curva affine  $C$  di equazione  $f = 0$ .

Se  $P = (1 : x : y) \in U_0$  allora  $f(x, y) = F(P)$  e in particolare  $\overline{C} \cap U_0 = C$ .

**DEFINIZIONE 11.1.16.** PUNTI IMPROPRI DI UNA CURVA.

I *punti impropri* o *punti all'infinito* della curva  $C$  sono dati dall'intersezione della

chiusura proiettiva con la *retta impropria*, ovvero da  $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\}$

**ESEMPIO.** CHIUSURA PROIETTIVA DI UNA RETTA.

Se  $C$  è una retta  $ax + by + c = 0$ , allora la *chiusura proiettiva* di  $C$  è  $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$  ed il *punto improprio* di  $C$  è  $(0: -b: a)$ , che corrisponde alla direzione della retta  $C$ .

**ESEMPL.** Consideriamo in  $\mathbb{R}^2$  le coniche:

$$C_1: y = x^2 \quad \text{Parabola}$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Circonferenza}$$

$$C_3: x^2 - y^2 = 1 \quad \text{Iperbole}$$

Consideriamo ora le loro *chiusure proiettive reali* tramite l'omogeneizzazione, cioè le coniche proiettive  $\overline{C}_i$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$$\overline{C}_1: x_0x_1 = x_1^2$$

$$\overline{C}_2: x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$$

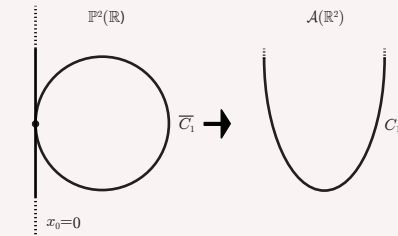
$$\overline{C}_3: x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$$

Scrivendo le matrici associate e guardandone la segnatura, si vede che *tutte e tre* hanno segnatura  $(2, 1)/(1, 2)$  e quindi tutte proiettivamente equivalenti (per la classificazione delle coniche nel piano proiettivo reale) ad una *conica irriducibile a punti reali* in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Consideriamo ora i loro punti impropri:

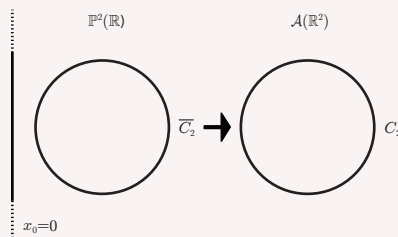
- PARABOLA:  $\overline{C}_1 \cap \{x_0 = 0\}: (0: 0: 1)$ , dunque un solo punto improprio, ovvero la direzione  $(0, 1)$  dell'asse  $y = \mathcal{L}(0, 1)$ , quindi è l'asse della parabola
- CIRCONFERENZA:  $\overline{C}_2 \cap \{x_0 = 0\}: x_0 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$  ma non si possono avere tutte le coordinate omogenee nulle, dunque non ci sono punti impropri
- IPERBOLE:  $\overline{C}_3 \cap \{x_0 = 0\}: x_1^2 - x_2^2 = 0$ , dunque ci sono due punti impropri quali  $(0: 1: 1)$  e  $(0: 1: -1)$ , a cui corrispondono le direzioni degli asintoti dell'iperbole

Notiamo che le chiusure proiettive viste sono tutte proiettivamente equivalenti, ma hanno 3 posizioni diverse rispetto alla *retta impropria*:

1.  $\overline{C}_1$  è "*tangente*" alla retta impropria.

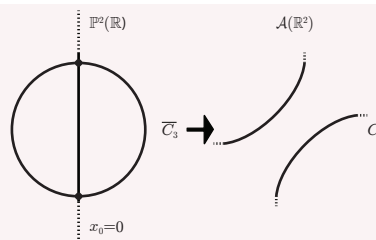


2.  $\overline{C}_2$  è "*disgiunta*" dalla retta impropria.





3.  $\overline{C}_3$  è "secante" rispetto alla retta impropria.

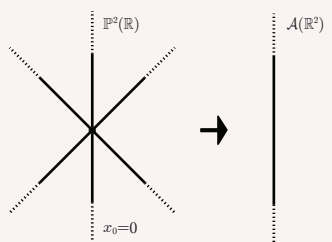


**ESEMPIO.** In  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  consideriamo la coppia di rette *parallele* distinte  $x(x+1)=0$  e la coppia di rette *incidenti* distinte  $xy=0$ .

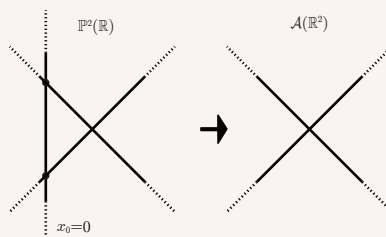
Prendendo le chiusure proiettive si ottiene  $x_1(x_1+x_0)=0$  e  $x_1x_2=0$ , entrambe coppie di rette distinte reali in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con segnatura  $(1,1)$ .

Dunque sono proiettivamente equivalenti fra loro ma hanno posizione diversa rispetto alla retta impropria.

- La prima ha un solo punto improprio  $(0:0:1)$ , che è la *direzione comune* delle due rette parallele nel piano affine.



- La seconda ha due punti impropri  $(0:0:1)$  e  $(0:1:0)$ , che sono le direzioni delle due rette nel piano affine.



Ragionando in questo modo dalla classificazione delle coniche proiettive si può mettere in relazione la classificazione delle coniche affini  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  (a meno di rototraslazione), prestando attenzione alla posizione rispetto alla retta impropria.

#### 11.1.5 Classificazione affine delle coniche nel caso complesso

**PROPOSIZIONE 11.1.0. CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE AFFINI COMPLESSE.** Ogni conica in  $\mathbb{C}^2$  si può ridurre con una trasformazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \quad (11.10)$$

Con  $b \in \mathbb{C}^2$  e  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  ad una delle cinque coniche:

1.	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	■ Rango 3. ■ Due punti impropri <i>distinti</i> .
2.	$y - x^2 = 0$	■ Rango 3. ■ Un <i>unico</i> punto improprio.
3.	$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0$	Coppia di rette distinte <i>incidenti</i> : ■ Rango 2. ■ Due punti impropri <i>distinti</i> .
4.	$x(x + 1) = 0$	Coppia di rette distinte <i>parallele</i> : ■ Rango 2. ■ Un <i>unico</i> punto improprio.
5.	$x^2 = 0$	Retta doppia

### 11.1.6 Polinomi omogenei in 2 variabili

I polinomi omogenei in *due variabili* si comportano per alcuni aspetti come polinomi in *una sola variabile*.

Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0 x_1]$  un polinomio omogeneo di grado  $d$ , costituito da  $d + 1$  monomi:

$$F = a_0 x_0^d + a_1 x_0^{d-1} x_1 + a_2 x_0^{d-2} x_1^2 + \dots + a_{d-1} x_0 x_1^{d-1} + a_d x_1^d$$

Ricordiamo che vedendo  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ , allora  $F$  ha degli zeri su  $\mathbb{P}^1$ , ovvero  $F(P) = 0$  è ben posto per  $P = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ .

#### DEFINIZIONE 11.1.17. ANNULARSI IN UN PUNTO.

Diciamo che  $F$  si **annulla in**  $P = (a : b)$  **all'ordine**  $m$  se  $(ax_1 - bx_0)^m$  è la massima potenza di  $ax_1 - bx_0$  che divide  $F$ .

#### PROPOSIZIONE 11.1.1.

1.  $F$  si annulla in un punto  $P = (a : b) \in \mathbb{P}^1 \iff ax_1 - bx_0 \mid F$ .
2. Se  $d = \deg F$ ,  $F$  ha al più  $d$  zeri su  $\mathbb{P}^1$  contati con molteplicità.
3. Se  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ , allora  $F$  si fattorizza come prodotto di forme lineari e ha esattamente  $d$  zeri in  $\mathbb{P}^1$  contati con molteplicità.<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Questo punto è analogo al caso in una variabile per cui, in  $\mathbb{C}$ , ogni polinomio si fattorizza come prodotto di polinomi di grado 1 ed ha tutti gli zeri ben definiti.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $x_0 \nmid F$ ; ciò è vero se e solo se  $a_d \neq 0$  o, alternativamente,  $F(0 : 1) \neq 0$ . Poniamo:

$$f := F(1, t) \in \mathbb{K}[t] = a_0 + a_1 t + \dots + a_{d-1} t^{d-1} + a_d t^d \quad (11.11)$$

Esso è un polinomio nella sola variabile  $t$ , dato che abbiamo posto  $x_0 = 1$  e  $x_1 = t$ , ed è ancora di grado  $d$  perché  $a_d \neq 0 \implies \deg f = \deg F = d$ . Inoltre:

- $F$  è l'omogeneizzato di  $f$  rispetto a  $x_0$ :

$$F = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

- Gli zeri di  $F$  sono tutti e soli della forma  $(1 : \lambda)$  con  $\lambda$  radice di  $f$ , dato che *deomogeneizzando* passiamo da 2 variabili in 1 variabile, infatti  $F(1, \lambda) = f(\lambda)$ .

Pertanto, le proprietà di  $F$  che vogliamo dimostrare seguono da quelle di  $f$  che conosciamo già.

- I  $F$  si annulla in  $(1: \lambda) = (a: b)^a \iff f(\lambda) = 0 \iff t - \lambda \mid f \iff x_1 - \lambda x_0 \mid F$ .
- II È immediato dal punto 1, perché se  $F$  si annulla in  $P_i = (a_i: b_i)$  distinti con molteplicità  $m_i$ , allora:

$$(a_i x_1 - b_i x_0)^{m_i} \mid F, \forall i = 1, \dots, r$$

Siccome i punti  $P_i$  sono distinti, allora i polinomi sono *primi fra loro* al variare di  $i$ , dunque anche il loro prodotto deve dividere  $F$ :

$$\prod_{i=1}^r (a_i x_1 - b_i x_0)^{m_i} \mid F \implies \sum_{i=1}^r m_i \leq d = \deg F$$

- III Segue immediatamente dal caso complesso in una variabile; infatti,  $f$  si scrive come:

$$f = c(t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x_1 - \lambda_r x_0)^{m_r}$$

Siccome  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso,  $F = c(x_1 - \lambda_1 x_0)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x_1 - \lambda_r x_0)^{m_r}$ , cioè si fattorizza completamente con forma lineari. Non solo questo polinomio divide  $F$  ma, a meno di costante, ho l'*uguaglianza*, per cui il numero di zeri contati con molteplicità è pari al suo grado.

Se invece  $x_0 \mid F$ , allora  $F = x_0^r G$  per un certo  $r$ , con  $G$  un polinomio omogeneo di grado  $d - r$  tale per cui  $x_0 \nmid G$ . Allora i risultati trovati valgono per  $G$  e, tenendo conto che  $F$  si annulla in  $(0: 1)$  con molteplicità  $r$ , segue la tesi della proposizione.  $\square$

<sup>a</sup>Con  $\lambda = \frac{b}{a}$ .

### 11.1.7 Intersezione tra una retta ed una curva nel piano proiettivo

Sia  $C$  una curva in  $\mathbb{P}^2$  di grado  $d$  ed equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  e sia  $r \subset \mathbb{P}^2$  una retta proiettiva. Vogliamo intersecare la retta  $r$  con il supporto di  $C$ .

**TIPS & TRICKS!** Per studiare l'intersezione di due sottoinsiemi può essere comodo esprimere uno dei due sottoinsiemi in *forma parametrica* e sostituire i risultati trovati nelle equazioni dell'altro.

Scriviamo una parametrizzazione per  $r$ ; per farlo sono necessari servono 2 punti distinti  $a, b \in r$ . In questo modo, ogni punto di  $r$  si scrive come combinazione lineare di altri due punti noti della retta e dei loro vettori:

$$P = \lambda A + \mu B = [\lambda v + \mu w] \quad (11.12)$$

Dove  $v$  è un vettore che rappresenta  $A$  ( $A = [v]$ ) e  $w$  è un rappresentante per  $B$  ( $B = [w]$ ), con  $v, w \in \mathbb{K}^3$  e  $(\lambda: \mu) \in \mathbb{P}^1$ . Allora  $C \cap r$  è dato da  $F(\lambda v + \mu w) = 0$ ; dato che vogliamo trovare il punto di intersezione descritto dai parametri  $(\lambda: \mu)$ , possiamo vedere questa sostituzione come un polinomio  $G$  in  $\lambda$  e  $\mu$ , cioè  $G(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}[\lambda, \mu]$ :

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda v_0 + \mu w_0, \lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2) \quad (11.13)$$

In particolare, abbiamo due possibilità:

1.  $r \subseteq C$ : la retta è contenuta nella conica, quindi *ogni punto della retta* soddisfa l'equazione; il polinomio è *identicamente nullo*, ovvero  $G \equiv 0$

2.  $r \not\subset C$ : la retta *non* è contenuta nella conica, allora  $G$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$  in  $\lambda$  e  $\mu$  le cui radici. Le radici di  $G$  sono i *punti di intersezione*  $r \cap C$ .

**ESEMPIO.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sia  $C: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ ,  $r_1: x_1 = x_2$  e  $r_2: x_0 + x_1 = 0$ ; vogliamo calcolare le intersezioni  $r_i \cap C$ :

- $r_1: x_1 = x_2 \rightarrow x_0^2 = 0$  e  $r_1 \cap C = \{(0: 1: 1)\}$  molteplicità 2
- $r_2: x_1 = -x_0 \rightarrow 2x_0^2 = x_2^2 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt{2}x_0$   $x_0 = 1 \implies x_1 = -1, x_2 = \pm\sqrt{2}$   
 $\implies$  due punti di intersezione  $(1: -1: \sqrt{2})$  e  $(1: -1: -\sqrt{2})$

**DEFINIZIONE 11.1.18.** MOLTEPLICITÀ DI INTERSEZIONE.

Se  $(\lambda_0: \mu_0) \in \mathbb{P}^1$  è una radice di  $G$  di molteplicità  $m$  (ovvero è il massimo esponente della forma lineare che divide  $G$ ), allora diciamo che  $C$  e  $r$  hanno **molteplicità di intersezione**  $m$  nel punto  $P = \lambda_0 A + \mu_0 B$ . Poniamo:

- $m = 0$  se  $P \notin C \cap r$ .
- $m = \infty$  se  $P \in r$  e  $r \subset C$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $r \not\subset C$ , allora l'intersezione è finita:

$$C \cap r = \{P_1, \dots, P_n\}$$

Sia  $m_i$  la molteplicità di intersezione in  $P_i$ ; il numero di questi punti di intersezione è minore del grado della curva:

$$\#(C \cap r) \leq \deg C \quad (11.14)$$

Più precisamente,  $\sum_{i=1}^n m_i \leq \deg C$ ; infatti, le radici di  $G(\lambda, \mu) = 0$  danno i punti di intersezione della curva con la retta e può avere al più  $d$  soluzioni, tante quante il grado della curva (anche se contate con molteplicità per la proposizione 11.2).

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , possiamo dire che la somma delle molteplicità è esattamente  $d$ :

$$\sum_{i=1}^n m_i = \deg C \quad (11.15)$$

In particolare, la retta e la curva si intersecano *sempre* nel *piano proiettivo complesso*, ovvero  $C \cap R \neq \emptyset$ .

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $d$  è **dispari** allora possiamo ancora concludere che la retta e la curva si intersecano sempre in quanto  $G$  deve annullarsi almeno in un punto reale, e quindi  $C \cap r \neq \emptyset$ .

**ESEMPIO.** Se  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  è una conica ( $\deg C = 2$ ) ed  $r$  è una retta non contenuta in  $C$ , ovvero  $r \not\subset C$ , allora:

$$r \cap C = \begin{cases} \nearrow & \{2 \text{ punti con molteplicità } 1\} \\ \searrow & \{1 \text{ punto con molteplicità } 2\} \end{cases} \quad (11.16)$$

Se la conica  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ed  $r$  è una retta non contenuta in  $C$ , ovvero  $r \not\subset C$ , allora c'è

anche la possibilità che l'intersezione sia *vuota*, cioè  $C \cap r = \emptyset$  (ad es.  $C: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$  e  $r_3: x_2 = 0$ ).

**TIPS & TRICKS!** Se una conica  $C$  contiene tre punti *allineati*, allora  $C$  contiene una retta, è riducibile (l'equazione della retta divide quella della conica) e  $\text{rk } C \leq 2$ .

**OSSERVAZIONE.** Si può dimostrare che:

1. La molteplicità di intersezione fra  $C$  e  $r$  in  $P$  non dipende dalla parametrizzazione scelta per  $r$ .
2. La molteplicità di intersezione è **invariante** per *proiettività*.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l'ultimo punto Sia  $f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$  una proiettività e  $C'$  la trasformata di  $C$  tramite  $f$  con  $C: F(x_0, x_1, x_2) = 0$  e  $f: x' = Mx$ . Allora  $f^{-1}: x = M^{-1}x'$  e  $C': F'(x') = F(M^{-1}x') = 0$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$ . Le proiettività portano curve algebriche in curve algebriche, ovvero  $r' = f(r)$  è una retta e  $P' = f(P)$ . Pertanto, la molteplicità di intersezione fra  $C$  e  $r$  in  $P$  è uguale alla molteplicità di intersezione fra  $C'$  e  $r'$  in  $P'$ .  $\square$

#### 11.1.8 Intersezione tra una retta ed una curva nel caso affine

Sia  $C$  una curva in  $\mathbb{K}^2$  di equazione  $f(x, y) = 0$  e sia  $r$  una retta affine. Scegliamo una parametrizzazione per  $r$ :

$$r: \begin{cases} x = tv_1 + w_1 \\ y = tv_2 + w_2 \end{cases} \quad (11.17)$$

Per intersecare  $C$  ed  $r$  sostituiamo la parametrizzazione di  $r$  nell'equazione di  $C$  ed otteniamo un polinomio nell'unico parametro  $t$ :

$$g(t) := f(tv_1 + w_1, tv_2 + w_2) \in \mathbb{K}[t] \quad (11.18)$$

In modo analogo al caso proiettivo, le radici di  $g$  corrispondono ai *punti di intersezione* e definiamo la **molteplicità di intersezione** di  $C$  ed  $r$  in un punto  $P = t_0v + w$  come la molteplicità di  $t_0$  come radice di  $g(t)$ .

**OSSERVAZIONI.**

1. La molteplicità di intersezione non dipende dalla scelta di parametrizzazione della retta  $r$ .
2. La molteplicità di intersezione è **invariante** per *affinità*.
3. La *molteplicità affine* è pari a quella proiettiva. Per precisare, sia  $P \in C \cap r$ ,  $\overline{C}$  la chiusura proiettiva di  $C$  in  $\mathbb{P}^2 \supset \mathbb{K}^2$  ed  $\overline{r}$  la chiusura proiettiva di  $r$  in  $\mathbb{P}^2$ ; allora la molteplicità di intersezione tra  $C$  e  $r$  in  $P$  è uguale alla molteplicità di intersezione fra  $\overline{C}$  e  $\overline{r}$  in  $P$ .

#### 11.1.9 Retta tangente

**DEFINIZIONE 11.1.19.** RETTA TANGENTE AD UNA CURVA IN UN PUNTO

Sia  $C$  una curva piana (affine o proiettiva) ed  $r$  una retta (affine o proiettiva). Diciamo

che  $r$  è **tangente** a  $C$  in un punto  $P$  se la *molteplicità di intersezione* fra  $C$  ed  $r$  in  $P$  è *maggiore di 1*.

**ESEMPIO.** Sia  $C$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  una conica di equazione  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$  e una retta di equazione  $r_1: x_1 - x_2 = 0$ ; poiché l'intersezione è solo il punto  $r_1 \cap C = \{(0: 1: 1)\} = P$ , allora  $r_1$  è tangente a  $C$  in  $P$  e “coincide” con la tangente nel senso geometrico.

La conica  $C_1$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  si ottiene deomogeneizzando  $C$  rispetto alla variabile *non* nulla  $x_2$  (in questo caso in  $P$  si ha che  $x_0 = 0$ ), per cui:

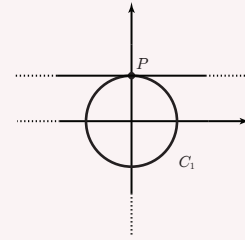
$$x = \frac{x_0}{x_2} \quad y = \frac{x_1}{x_2}$$

Dunque  $C_1$  ha equazione:

$$\left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 1 = 0$$

È pari quindi alla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  con  $P = (0, 1)$ . In questo caso la tangente in  $P$  è chiaramente la retta  $y = 1$ .

Passando alle coordinate proiettive diventa  $\frac{x_1}{x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ . Notiamo come la *chiusura proiettiva* della *tangente affine* sia proprio la *tangente proiettiva*.



**ESEMPIO.** Sia  $C$  in  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$  la curva di equazione  $f: y^2 = x^2 + x^3 = x^2(x + 1)$ , una **cubica** in quanto ha grado 3.

Vogliamo calcolare quali sono le rette tangenti nel punto  $P = (-1, 0) \in C$ . Consideriamo pertanto il fascio di rette passanti per  $P$  e le intersechiamo con la cubica per determinare quali sono tangente con la definizione; guardiamo dunque quali hanno molteplicità di intersezione maggiore di 1.

Il fascio di rette per  $P$  è:

$$r: \begin{cases} x = -1 + tv_1 \\ y = tv_2 \end{cases}$$

Con  $(v_1, v_2)$  direzione di  $r$ . Sostituiamo la parametrizzazione di  $r$  nell'equazione di  $C$ , costruendo la funzione  $g(t)$ :

$$t^2 v^2 = (tv_1 - 1)^2 tv_1$$

$$g(t) = (tv_1 - 1)^2 tv_1 - t^2 v^2 = t[v_1(t^2 v_1^2 + 1 - 2tv_1) - tv_2^2] = t[v_1^3 t^2 - t(2v_1^2 + v_2^2) + v_1]$$

Analizziamo cosa abbiamo trovato:

- $t = 0$  è sempre una soluzione: per costruzione abbiamo preso la retta che passava per  $P$ , dunque  $P$  è banalmente intersezione di una retta di *qualsiasi* direzione con la cubica.
- La molteplicità di intersezione fra  $C$  e  $r$  in  $P$  è la massima potenza di  $t$  che divide  $g$ ; pertanto è  $m$  se  $t^m$  è la massima potenza di  $t$  che divide  $g$ .  
In questo caso, quand'è che la molteplicità di intersezione è maggiore di 1? Nell'equazione che abbiamo scritto almeno  $t^2$  deve dividere  $g$ : l'unica possibilità

per questa curva di poter raccogliere un'altro  $t$  è avere  $v_1 = 0$ . Allora  $r$  è la retta verticale che passa per  $P$  e abbiamo determinato che esiste ed è l'unica tangente in  $P$ .

Vediamo ora un caso in cui la retta tangente ad un punto non è unica. Consideriamo la stessa cubica ma *cambiamo il punto*, prendendo l'origine  $Q = (0, 0) \in C$ .

Scriviamo il fascio di rette per  $Q$ :

$$q: \begin{cases} x = tw_1 \\ y = tw_2 \end{cases}$$

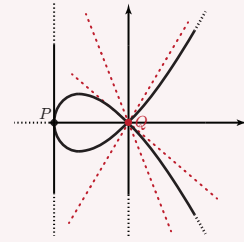
Con  $(w_1, w_2)$  direzione. Analogamente a prima:

$$h(t) = t^2 w_1^2 + t^3 w_1 - t^2 w_2^2 = t^2 (w_1^2 - w_2^2 + t w_1^3)$$

Troviamo così che  $t^2$  si può sempre raccogliere, dunque in questo caso la molteplicità di intersezione fra le rette e  $Q$  è sempre almeno 2. In particolare, ogni retta per  $Q$  ha intersezione maggiore di 2, dunque è *tangente*.

Osserviamo che nel punto  $Q$  la curva si auto-interseca: ogni retta per l'origine interseca la curva almeno due volte, quindi è tangente. Fra queste, ci sono due *direzioni speciali* per cui la molteplicità è 3:

- $w_1^2 - w_2^2 = 0 \implies w_1 = w_2 \implies \mathcal{L}(1, 1): y = x.$
- $w_1 = -w_2 \implies \mathcal{L}(1, -1): y = -x.$



#### 11.1.9.1 Caso affine

Sia  $C: f(x, y) = 0$  in  $\mathbb{K}^2$  e  $P = (x_0, y_0)$ . Osserviamo che possiamo sempre scrivere il polinomio come un polinomio centrato in  $x_0, y_0$ , cioè come polinomio in  $x - x_0$  e  $y - y_0$  invece che come polinomio in  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} (x - x_0 + x_0)^i (y - y_0 + y_0)^j \stackrel{!}{=} \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ \implies f(x_0, y_0) &= b_{00} = f(P) \implies f = f(P) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \text{termini di grado} > 1 \end{aligned}$$

Nel passaggio indicato con (!) si stanno sottintendendo conti con il binomio di Newton.

#### DEFINIZIONE 11.1.20. DERIVATE PARZIALI.

Dato un polinomio  $f = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{K}[x, y]$ , le **derivate parziali** di  $f$  sono i seguenti polinomi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \sum_{i,j} a_{ij} i x^{i-1} y^j \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \sum_{i,j} a_{ij} j x^i y^{j-1} \quad (11.19)$$

Si verifica che  $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $P \in C$ , segue dai ragionamenti precedenti  $f = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) +$

termini di grado  $> 1$ . Applicando la definizione di derivata parziale si hanno:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i,j} a_{ij} i (x - x_0)^{i-1} (y - y_0)^j \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i,j} a_{ij} j (x - x_0)^i (y - y_0)^{j-1}$$

Valutando in  $P = (x_0, y_0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = a_{10} = \alpha \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = a_{01} = \beta$$

□

**DEFINIZIONE 11.1.21. GRADIENTE.**

Il **gradiente**  $\nabla f$  è il vettore con componenti le derivate parziali:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (11.20)$$

Il gradiente valutato in  $P = (x_0, y_0)$  è  $\nabla f(P) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ .

**Tangente e derivate parziali** Sia  $r$  la retta per  $P$  con direzione  $v = (v_1, v_2)$  e descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

Allora:

$$g(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) = \alpha tv_1 + \beta tv_2 + \text{termini in } t \text{ di grado } \geq 2 = (\alpha v_1 + \beta v_2)t + \text{termini in } t \text{ di grado } \geq 2$$

Si hanno dunque due possibilità, che dipendono dal coefficiente di  $t$ :

1.  $\alpha = \beta = 0$ , ovvero  $\nabla f = 0$ : il *coefficiente* è nullo indipendentemente dalla retta. Allora,  $\forall r$  retta per  $P$ ,  $t^2 \mid g(t)$ : la molteplicità di intersezione è  $\geq 2$  e *ogni* retta per  $P$  è tangente a  $C$  in  $P$ .
2.  $\nabla f(P) = (\alpha, \beta) \neq 0$ : il coefficiente di  $t$  determina in maniera *univoca* la direzione della retta, che è quella **ortogonale** a  $(\alpha, \beta)$ . Ciò implica che  $\exists!$  retta tangente a  $C$  in  $P$  ed è quella di direzione  $(-\beta, \alpha)$  con equazione  $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$ , ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) = 0 \quad (11.21)$$

**DEFINIZIONE 11.1.22. PUNTO SINGOLARE.**

Sia  $C$  una curva affine in  $\mathbb{K}^2$  di equazione  $f(x, y) = 0$ . Un punto  $P \in C$  è detto *non singolare* o **liscio** se  $\nabla f(P) \neq 0$ . Altrimenti  $P$  è detto **punto singolare**.

Una curva  $C$  è detta **singolare** se ha almeno un punto singolare, altrimenti è detta curva *non singolare* o **liscia**.

Abbiamo visto prima che se  $P$  è *non singolare* esiste ed è unica la tangente a  $C$  in  $P$ . Essa ha equazione  $\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) = 0$  e, essendo non singolare, almeno uno dei due coefficienti non è nullo.

Se invece  $P$  è *singolare* allora ogni retta per  $P$  è tangente a  $C$  in  $P$ .



## 11.1.9.2 Caso proiettivo

Vogliamo analizzare la tangenza nel *caso proiettivo*. Tuttavia, prima di trattare di punti singolare o tangenti, ci servirà una proprietà dei polinomi omogenei, detta **relazione di Eulero** sui polinomi omogenei. Essa vale per un qualsiasi *numero di variabili* a coefficienti in un campo *qualsiasi* e mette in relazione un polinomio omogeneo con sue derivate parziali, che per costruzione sono polinomi omogenei di un *grado inferiore*.

**TEOREMA 11.1.2. RELAZIONE DI EULERO**

Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  polinomio omogeneo di grado  $m$  e le sue derivate parziali  $\frac{\partial F}{\partial x_i} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ , polinomio omogenei di grado  $m-1$ . Si ha che:

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = mF \quad (11.22)$$

Nella relazione appena annunciata notiamo che moltiplichiamo ciascuna derivata parziale per  $x_i$ . Ciò è necessario per la *buona definizione* dell'equazione: siccome le derivate parziali sono omogenee di grado  $m-1$ , moltiplichiamo per  $x_i$  affinché la somma sia omogenea di grado  $m$  come il polinomio  $F$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Basta mostrarlo per un monomio  $G = \lambda x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n}$  con  $j_0 + \dots + j_n = m$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Scrivendone le derivate parziali rispetto ad una variabile e poi moltiplicando per  $x_i$  sistemiamo l'esponente  $i$ -esimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i} &= \lambda j_i x_0^{j_0} \dots x_i^{j_i-1} \dots x_n^{j_n} \implies x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = \lambda j_i x_0^{j_0} \dots x_i^{j_i} \dots x_n^{j_n} \\ \implies \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} &= \sum_{i=0}^n \lambda j_i x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n} = \lambda x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n} \cdot \sum_{i=0}^n j_i = mG \end{aligned}$$

□

**PROPOSIZIONE 11.1.2.** Sia  $C$  in  $\mathbb{P}^2$  una curva di equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  con  $F$  polinomio omogeneo di grado  $d$  e  $P \in C$ .  $P$  è *non singolare* se e solo se almeno una delle derivate parziali di  $F$  non è nulla in  $P$ , cioè  $\exists i \in \{0, 1, 2\}$ :  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \neq 0$ .

In tal caso esiste ed è unica la retta tangente a  $C$  in  $P$  ed ha equazione:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_0}(P)}_{\in \mathbb{K}} x_0 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(P)}_{\in \mathbb{K}} x_1 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_2}(P)}_{\in \mathbb{K}} x_2 \quad (11.23)$$

I cui coefficienti sono le derivate parziali di  $F$  valutate in  $P$ .

**DIMOSTRAZIONE.** A meno di proiettività possiamo supporre che  $P = (1 : a : b) \in U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ , cioè che stia nella carta affine  $U_0$  identificata a  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$ :  $P$  corrisponde a  $(a, b) \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$ .

Poniamo  $f(x, y) := F(1, x, y)$  e sia  $C_0$  la curva in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  di equazione  $f(x, y) = 0$  per cui  $C$  è la chiusura proiettiva. Mettiamo in relazione le derivate parziali di  $f$  con quelle

$F$  a partire dalla definizione stessa di  $f$ , valutandole nel punto:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, x, y) \end{cases} \implies (*) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b) \end{cases}$$

Valutiamo la relazione di Eulero sui polinomi omogenei in  $(1, a, b)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(1, a, b) + a \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b) + b \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b) = dF(1, a, b) = 0$$

Si ha  $F(1, a, b) = 0$  perché  $P \in C$ . Riusciamo così a esprimere la derivata parziale rispetto a  $x_0$  in funzione delle altre due:

$$(**) \quad \frac{\partial F}{\partial x_0} = -a \frac{\partial F}{\partial x_1} - b \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

Ne consegue che  $\nabla f(a, b) = 0 \iff \nabla F(1, a, b) = (0, 0, 0)$ ; infatti, se il gradiente  $\nabla f$  si annulla in  $P$  allora si annullano le derivate parziali di  $F$  rispetto a  $x_1, x_2$ , pertanto per la relazione di Eulero anche la terza derivata parziale si annulla. Viceversa, se il gradiente di  $F$  si annulla bastano le relazioni  $(*)$  per avere che anche il gradiente di  $f$  si annulla. Dunque, il punto  $P$  è *non singolare* se e solo se  $\nabla F(1, a, b) \neq \mathbf{0}$ , verificando la prima parte della proposizione.

Supponendo  $P$  non singolare, allora la retta tangente affine a  $C_0$  in  $P$  ha equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

La chiusura proiettiva di tale retta affine dà la retta tangente proiettiva a  $C$  in  $P$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x_1 - ax_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(x_2 - bx_0) = 0$$

Per  $(*)$  si ha che

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b)(x_1 - ax_0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b)(x_2 - bx_0) = 0 \\ \implies & \underbrace{\left(-a \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b) - b \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b)\right)}_{(**)} x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, a, b)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, a, b)x_2 = 0 \\ \implies & \frac{\partial F}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P)x_2 \end{aligned}$$

□

**OSSERVAZIONE.** RETTE TANGENTI: SPAZIO AFFINE E SPAZIO PROIETTIVO A CONFRONTO.

Se  $C$  è una curva affine di equazione  $f(x, y) = 0$ , per trovare i punti singolare di  $C$  bisogna risolvere un sistema con l'equazione della curva e le derivate parziali di  $f$ . L'equazione della curva è necessaria perché potresti avere punti in cui il gradiente si annulla ma *non* appartengono alla curva!

Invece, se  $C$  è una curva proiettiva di equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ , per trovare i punti

singolari di  $C$  bisogna solo risolvere il sistema delle derivate parziali nulle e *non serve* mettere anche l'equazione della curva per via della relazione di Eulero. Infatti, se  $P$  annulla  $\nabla F$ , allora dalla relazione di Eulero si ha che:

$$F(P) = \frac{1}{d} \left( a \frac{\partial F}{\partial x_0}(P) + b \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) + c \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) \right) = 0 \implies P \in C$$

Riassumendo, ecco i sistemi a confronto:

Affine	Proiettivo
$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$

#### ESEMPI.

1. Sia  $C_0: x^2 + x^3 - y^2 = 0$  una curva affine e  $C$  la chiusura proiettiva di  $C_0$  con equazione  $F = x_0x_1^2 + x_1^3 - x_0x_2^2$ . Cerchiamo i punti singolari:

$$\nabla F = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_0x_1 + 3x_1^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_0x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_0 = t \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Il primo non è lecito nel piano proiettivo, dunque  $P = (1: 0: 0)$  è l'unico punto singolare di  $C$  e osserviamo che corrisponde a  $(0, 0) \in \mathbb{K}^2$ .

A pagina 200 avevamo visto il punto  $Q = (-1, 0) \in C_0$ , nel quale la curva affine si auto-intersecava; passando alla chiusura proiettiva,  $Q = (1: -1: 0) \in C$  è *non* singolare. Scriviamo la tangente  $T_Q C$  grazie alle derivate parziali:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) = (2x_0x_1 + 3x_1^2)(Q) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = (-2x_0x_1)(Q) = 0$$

Ne segue che  $T_Q C: x_0 + x_1 = 0$ . Per ottenere la retta affine associata basta porre  $x_0 = 1$ , da cui  $T_Q C_0: x + 1 = 0$ , perfettamente coerente con lo studio fatto nel caso affine.

Avevamo visto che nel punto singolare  $P = (1: 0: 0)$ , tutte le rette per esso hanno molteplicità di intersezione 2 con la curva  $C$  in  $P$ , eccetto due rette speciali di direzione  $(1, \pm 1)$  in cui la molteplicità di intersezione è 3.  $P$  è detto **nodo**.

2. Consideriamo la curva affine  $C_0$  data da  $f(x, y) = y^2 - x^3$  e la chiusura proiettiva  $C$  di equazione  $F(x_0, x_1, x_2) = x_0x_2^2 - x_1^3$ . Siccome:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = x_2^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = -3x_1^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_0x_2$$

Allora  $P = (1: 0: 0)$  è l'unico punto singolare di  $C$ , che corrisponde all'origine di  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$ . Consideriamo il fascio di rette per l'origine in  $\mathcal{A}(\mathbb{K}^2)$  e vediamo qual è

la molteplicità di intersezione. Sia la generica retta per l'origine:

$$r: \begin{cases} x = tv_1 \\ y = tv_2 \end{cases} \quad \text{con } v = (v_1, v_2) \text{ direzione di } r$$

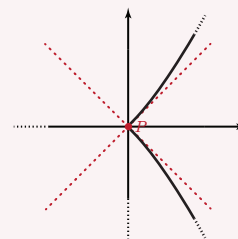
La intersechiamo con  $C_0$ :

$$g(t) = t^2 v_2^2 - t^3 v_1^3 = 0 \implies t^2(v_2^2 - tv_1^3) = 0$$

Segue che la molteplicità di intersezione in  $P$  è 2 se  $v_2 \neq 0$  ed è 3 se  $v_2 = 0$ .

Si noti che i risultati ottenuti sono simili al caso precedente: la differenza sta nel fatto che quasi tutte le rette hanno molteplicità 2 e c'è solo un'unica retta con molteplicità 3 e non *due* come nel caso precedente.

Disegnando la curva affine si nota dunque la presenza di una **cuspid**.



**OSSERVAZIONE.** PUNTI SINGOLARI DELLE CONICHE.

Sia  $C$  una conica proiettiva. Il numero di punti singolari dipende solo dal rango:

- $\text{rk } C = 3 \implies C$  non ha punti singolari.
- $\text{rk } C = 2 \implies C$  ha un punto singolare.
- $\text{rk } C = 1 \implies C$  è una retta doppia e ogni punto di  $C$  è singolare.

Infatti, sia  $A$  la matrice simmetrica associata a  $C$ , allora l'equazione associata a  $C$  e le derivate parziali sono:

$$F = X^t A X = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j \implies \frac{\partial F}{\partial x_h} = \sum_{\substack{j=0 \\ (i=h)}}^2 a_{hj} x_j + \sum_{\substack{i=0 \\ (j=h)}}^2 a_{ih} x_i = 2 \sum_{i=0}^2 a_{ih} x_i$$

Un punto  $P$  rappresentato dal vettore  $v$ , ovvero  $P = [v]$ , è singolare per  $C$  se le derivate

parziali si annullano, cioè se  $\sum_{i=0}^2 a_{hi} v_i = \sum_{i=0}^2 a_{ih} v_i = 0, \forall h = 0, 1, 2$ . In notazione matriciale,

se si pensa al prodotto righe per colonne l'indice di riga di  $a$  è fissato in  $h$  mentre facciamo variare l'indice di colonna  $i$ . Se  $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  è il vettore, porre l' $h$ -esima riga di

$Av$  pari a zero è proprio la condizione cercata  $\sum_{i=0}^2 a_{ih} v_i$ . Ne segue che avere il gradiente

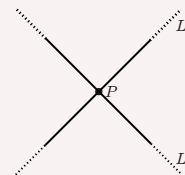
nullo corrisponde a  $Av = 0$ , cioè  $v \in \ker A$ .

Riassumendo, i punti singolari di  $C$  sono dati dai vettori che stanno nel nucleo della matrice  $A$ , che dipende dal rango di  $A$ :

- $\text{rk } A = 3 \implies \ker A = \{0\} \implies C$  non ha punto singolare.
- $\text{rk } A = 2 \implies \dim \ker A = 1 \implies C$  ha un punto singolare.
- $\text{rk } A = 1 \implies F = \lambda L^2 \implies C$  è una retta doppia e ogni punto di  $C$  è singolare; è esattamente la retta proiettiva associata al nucleo di  $A$ :  $L = \mathbb{P}(\ker A)$ .

Analizziamo il caso  $\text{rk } C = 2$  rispetto alla classificazione delle coniche.

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $C = L_1 \cup L_2$  con  $L_1 \neq L_2$  distinte e il punto singolare è il punto di *intersezione* delle due rette, ovvero  $L_1 \cap L_2$ . Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a meno di proiettività si hanno 2 casi in base alla segnatura:



- $(1, 1)$ :  $C = L_1 \cup L_2$  e  $P = L_1 \cap L_2$ .
- $(2, 0)/(0, 2)$ : La forma quadratica si fattorizza su  $\mathbb{C}$  e non su  $\mathbb{R}$ ;  $C$  ha come sostegno un *unico* punto  $P$ , che è proprio il punto singolare.

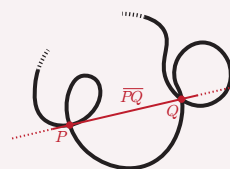
**OSSERVAZIONE.** PUNTI SINGOLARI E CUBICHE.

Nel piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  consideriamo  $C$  una *cubica* di equazione  $F = 0$  con  $\deg F = 3$ . Se la curva  $C$  è *riducibile*, allora il polinomio  $F$  è *riducibile* per definizione, ma siccome il grado è solo 3, allora è necessariamente il prodotto di un polinomio di grado 1 per un altro polinomio di grado 2:

$$F = G \cdot H \text{ con } \deg G = 1 \text{ e } \deg H = 2$$

Il luogo degli zeri di  $F$  è *unione* dei luoghi degli zeri di  $G$  e  $H$ , dunque  $C$  è unione di una retta e di una conica.

Supponiamo invece che  $C$  sia *irriducibile*:  $C$  non può contenere una retta, altrimenti l'equazione della retta *dividerebbe* il polinomio  $F$ . Allora  $C$  ha *al più* un punto singolare. Supponiamo per assurdo ne abbia almeno due, come  $P$  e  $Q$ : potremmo considerare la retta  $r = \overline{PQ}$  che passa per  $P$  e  $Q$  e intersecarla con la curva. Sicuramente  $C \cap r \supseteq \{P, Q\}$  e, siccome  $P$  e  $Q$  sono due punti singolari, allora la molteplicità di intersezione è almeno 2.



Ma ciò non è possibile perché, dallo studio delle intersezioni fra una retta e una curva, sappiamo che dobbiamo contare con molteplicità *fino al grado della curva*: qui ci sono 2 punti con molteplicità 2, ma  $C$  ha grado 3, dunque la retta dovrebbe essere contenuta nella curva, il che è una contraddizione!

**ESEMPIO.** Sia  $F = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$ . Essa dà una curva *senza punti singolari* perché le derivate parziali sono multipli delle coordinate, dunque non possono mai essere tutti nulli

## 11.2 FASCI DI CONICHE PROIETTIVE

**DEFINIZIONE 11.2.0.** FASCIO DI CONICHE.

Siano  $C_1$  e  $C_2$  due coniche *distinte* nel piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  di equazioni  $F_1$  e  $F_2$ , dunque con  $F_1$  e  $F_2$  sono proporzionali. Il **fascio di coniche**  $\mathcal{F}$  generato da  $C_1$  e da  $C_2$  è dato da tutte le coniche di equazione:

$$C_{\lambda, \mu}: \lambda F_1 + \mu F_2 = 0 \text{ con } (\lambda: \mu) \in \mathbb{P}^1 \quad (11.24)$$

Notiamo che se moltiplichiamo  $\lambda$  e  $\mu$  per lo stesso scalare tutta l'equazione viene moltiplicata per lo stesso scalare, riottenendo la stessa conica di prima;  $\lambda$  e  $\mu$  vanno presi in  $\mathbb{P}^1$  e non solo in  $\mathbb{K}$ .

**ESEMPLI.**

1. Siano  $C_1: x_0x_1 = 0$  e  $C_2: (x_0 - x_1)x_2 = 0$  due coniche, entrambe coppie di rette. Il fascio da loro generato è  $C_{\lambda,\mu}: \lambda x_0x_1 + \mu(x_0 - x_1)x_2 = \lambda x_0x_1 + \mu x_0x_2 - \mu x_1x_2 = 0$ .
2. Siano  $C_1: x_0x_1 = 0$  e  $\widetilde{C}_2: x_0x_2 = 0$  due coniche. Il fascio da loro generato è  $C_{\lambda,\mu}: \lambda x_0x_1 + \mu x_0x_2 = x_0(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0$ ; siccome  $x_0 = 0$  appartiene ad entrambe le coniche si può raccogliere.

Dato un fascio di coniche ci si chiede qual è il rango delle coniche del fascio.

**DEFINIZIONE 11.2.1. CONICA DEGENERE.**

Una conica  $C$  in  $\mathbb{P}^2$  si dice **degenerare** quando *non* ha rango massimo, ovvero se  $\text{rk } C < 3$ , dunque quando la matrice non è invertibile.

**DIGRESSIONE.** Si può dimostrare che il rango della conica, “essere riducibili” e “essere degeneri” sono tutte proprietà proiettive. Dalla classificazione delle coniche proiettive (reali o complesse) si vede dunque che una conica è *degenerare* se e solo se è *riducibile*.

**11.2.1 Studio delle coniche degeneri di un fascio**

Dato un fascio, vogliamo vedere quante e quali sono le coniche degeneri del fascio. Supponiamo che  $C_1$  abbia matrice simmetrica associata  $A_1$  e  $C_2$  abbiamo analogamente  $A_2$ . È chiaro che la conica del fascio  $C_{\lambda,\mu}$  generata da  $C_1, C_2$  sarà associata alla combinazione lineare  $\lambda A_1 + \mu A_2$  delle matrici: essa è una matrice  $3 \times 3$  i cui elementi sono 0 o forme lineari in  $\lambda$  e  $\mu$ .

Definiamo  $D(\lambda, \mu) := \det(\lambda A_1 + \mu A_2)$ , polinomio omogeneo in  $\lambda$  e  $\mu$ . Si hanno due possibilità:

- $D(\lambda, \mu) \equiv 0 \implies$  tutte le coniche del fascio sono degeneri.
- $D(\lambda, \mu)$  è omogeneo di grado 3, dunque le coniche degeneri corrispondono agli zeri del polinomio  $D$  su  $\mathbb{P}^1$ . Poiché essi sono al più 3, ci sono *al più 3 coniche degeneri*.

**TIPS & TRICKS!** O tutte le coniche del fascio sono degeneri o sono al massimo 3, quindi se in un fascio ne trovo *quattro* degeneri, allora tutte lo sono!

Nel *caso complesso* gli zeri (contati con molteplicità) sono pari al grado, dunque si ha sempre almeno una conica degenerare. Lo stesso vale anche nel caso reale, essendo il grado del polinomio dispari. Ristudiamo con quest’ottica gli esempi precedenti.

**ESEMPLI.**

1. Il fascio è  $\mathcal{F}_1: 2(\lambda x_0x_1 + \mu x_0x_2 - \mu x_1x_2) = 0$  ed ha matrice  $A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & -\mu \\ \mu & -\mu & 0 \end{pmatrix}$ .

Pertanto  $D(\lambda, \mu) = \det A_{\lambda,\mu} = -\lambda(\mu^2) + \mu(-\lambda\mu) = -2\lambda\mu^2$ . Ci sono solo due zeri di cui uno doppio:  $(\lambda: \mu) = (1: 0)$  oppure  $(0: 1)$ . Questi valori dei parametri ci restituiscono i polinomi di partenza, corrispondono dunque a  $C_1$  e  $C_2$ , che sapevamo già essere degeneri in quanto coppie di rette. Abbiamo dunque scoperto che  $C_1$  e  $C_2$  sono le *uniche coniche degeneri* del fascio.

2. Il fascio è  $\mathcal{F}_2: x_0(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0$ . In questo caso il determinante viene identicamente nullo ( $D \equiv 0$ ). In questo fascio tutte le coniche hanno una retta in comune.

**DEFINIZIONE 11.2.2.** PUNTI BASE DI UN FASCIO DI CONICHE.

I **punti base** di un fascio di coniche sono i punti che appartengono a *tutte* le coniche del fascio:

$$\{\text{punti base}\} = \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \subset \mathbb{P}^2 \quad (11.25)$$

**OSSERVAZIONE.** I punti base di un fascio sono dati dall'intersezione delle due coniche che generano il fascio, cioè  $C_1 \cap C_2$ . Infatti,  $C_1 \cap C_2 \supseteq \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$ . Viceversa se  $P \in C_1 \cap C_2$  allora:

$$F_1(P) = 0 \text{ e } F_2(P) = 0 \implies (\lambda F_1 + \mu F_2)(P) = 0, \forall \lambda, \mu \implies P \in C_{\lambda, \mu}, \forall (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$$

Dunque, per ogni qualunque combinazione lineare presa in  $P$  si annulla, dunque  $P$  è punto comune a tutte le coniche del fascio, cioè un punto base.

Vediamo i punti base degli esempi precedenti.

**ESEMPLI.**

1. Per ottenere i punti base del fascio si intersecano le coniche che lo generano:

$$\begin{cases} x_0 x_1 = 0 \\ (x_0 - x_1) x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = x_1 = 0 \\ x_0 = x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Intersecando due rette *non* coincidenti si possono ottenere al più 4 punti, ma se ne ottengono meno se qualcuno di questi punti coincide con altri. In questo caso si hanno 3 punti base:  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ .

2. I punti base sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} x_0 x_1 = 0 \\ x_0 x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$  è una retta appartenente a *tutte* le coniche del fascio, dunque si ha una *retta di punti base*. L'altro punto base è  $P = (1 : 0 : 0)$ ; notiamo che quest'ultimo è il punto base del fascio di rette  $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ , cioè il fascio di rette che contengono  $P$ .

**DIGRESSIONE. NODI E CUSPIDI**

Un **nodo** è un punto  $P$  per cui la retta "generale" per  $P$  ha intersezione 2 con la curva e ce ne sono *esattamente* 2 che hanno intersezione  $> 2$ .

Una **cuspide** è un punto  $P$  in cui la retta "generale" per  $P$  ha intersezione 2 con la curva e ce n'è *una sola* che ha intersezione  $> 2$

## 11.2.2 Parametrizzazione delle coniche nel piano proiettivo

Data l'equazione generale di una conica  $F = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \dots + a_{22}x_2^2$  possiamo associare a  $C$  il punto  $(a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}) \in \mathbb{P}^5$ , in quanto servono sei coordinate per descrivere una conica. Tale punto la determina univocamente: entrambi sono *non* nulli e

determinati *a meno di multipli*.

In questo modo otteniamo una *corrispondenza biunivoca* fra le coniche in  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^5$ :

$$\{\text{coniche in } \mathbb{P}^2\} \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{P}^5$$

Con questa interpretazione, cosa corrisponde un fascio di coniche?

Date  $C_1$  e  $C_2$  coniche, consideriamo il fascio  $\mathcal{F}$  da loro generato: a  $C_1: F = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$  corrisponde ad un punto  $A = (a_{00}: \dots : a_{22}) \in \mathbb{P}^5$  e a  $C_2: G = \sum_{i,j} b_{ij}x_i x_j$  corrisponde un punto  $B = (b_{00}: \dots : b_{22}) \in \mathbb{P}^5$ . La conica  $C_{\lambda,\mu}$  del fascio è la combinazione lineare di  $F$  e  $G$ , dunque i coefficienti dei monomi sono la combinazione lineare dei coefficienti delle equazioni di  $C_1$  e  $C_2$ :

$$c_{\lambda,\mu}: \lambda F + \mu G = \sum_{i,j} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})x_i x_j \longleftrightarrow P_{\lambda,\mu} = (\lambda a_{00} + \mu b_{00}: \dots : \lambda a_{22} + \mu b_{22}) \in \mathbb{P}^5$$

A  $C_{\lambda,\mu}$  associamo il punto  $P_{\lambda,\mu}$ , le cui coordinate omogenee sono combinazioni lineari di  $A$  e  $B$ . Facendo variare  $\lambda$  e  $\mu$ , il punto  $P_{\lambda,\mu}$  descrive in  $\mathbb{P}^5$  una retta  $\overline{AB}$  generata dai punti  $A$  e  $B$ , pertanto *un fascio di coniche corrisponde esattamente ad una retta in  $\mathbb{P}^5$* . Siccome una retta è individuata da due qualsiasi suoi punti, allo stesso modo il fascio è descritto da qualsiasi sue due coniche, pertanto la scelta delle coniche dà solo una *parametrizzazione diversa* del fascio.

Questo ci permette di dare alcune informazioni aggiuntive sui punti base:

**TIPS & TRICKS!** CALCOLO DEI PUNTI BASE CON DUE CONICHE QUALSIASI.

Dato un fascio  $\mathcal{F}$  di coniche, i punti base del fascio sono dati dall'intersezione di *due qualsiasi coniche* del fascio purché siano *distinte*, ovvero da  $C \cap \widetilde{C}$  dove  $C$  e  $\widetilde{C}$  sono due coniche distinte del fascio.

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di coniche. Esiste *sempre* una conica  $C$  degenera in  $\mathcal{F}$ , quindi usiamo  $C$  per calcolare i punti base.

Siccome è degenera,  $C$  è l'unione di due rette linearmente indipendenti:  $C = l_1 \cup l_2$ . Scegliamo una qualsiasi altra conica  $\widetilde{C}$  del fascio; i punti base del fascio sono dati da  $C \cap \widetilde{C} = (l_1 \cap \widetilde{C}) \cup (l_2 \cap \widetilde{C})$ .

Ne deduciamo che il numero di punti base di un fascio di coniche, se sono finiti, sono 4: infatti, ciascuna delle due rette interseca  $\widetilde{C}$  al più in 2 punti.

**COROLLARIO 11.2.0.** Se due coniche  $C_1$  e  $C_2$  non hanno una retta in comune allora:

$$\#(C_1 \cap C_2) \leq 4 \quad (11.26)$$

**DIMOSTRAZIONE.**  $C_1 \cap C_2$  sono i punti base del fascio generato da  $C_1$  e  $C_2$ . La tesi segue dall'osservazione precedente.  $\square$

**TIPS & TRICKS!** CALCOLO DELL'INTERSEZIONE DELLE CONICHE.

Abbiamo così anche un metodo per calcolare  $C_1 \cap C_2$  dato il fascio  $\mathcal{F}$ . Scriviamo  $D(\lambda, \mu)$ , troviamo una conica degenera  $\widetilde{C}$  e poi intersechiamo con  $C_1 \cap \widetilde{C}$ . Questo metodo è particolarmente utile nel caso avessimo a che fare con *coniche irriducibili*.

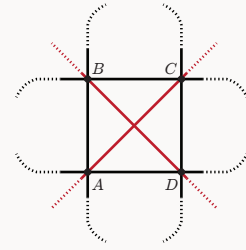


Ci sono diversi tipi di *rappresentazione geometrica* dei fasci di coniche proiettive; vediamo quello più comune.

**PROPOSIZIONE 11.2.0.** Siano  $A, B, C, D$  quattro punti in posizione generale in  $\mathbb{P}^2$ .

La famiglia delle coniche passanti per i quattro punti è un fascio  $\mathcal{F}$  avente come punti base esattamente i quattro punti; geometricamente stiamo fissando  $A, B, C, D$  e considerando le coniche che passano per tutti e quattro.

Inoltre  $\mathcal{F}$  non contiene rette doppie e contiene esattamente 3 coniche degeneri: esse sono le coppie di rette che passano per questi 4 punti:  $\overline{AB} \cup \overline{CD}$ ,  $\overline{AC} \cup \overline{BD}$ ,  $\overline{AD} \cup \overline{BC}$ .



**DIMOSTRAZIONE.** Siccome i 4 punti sono in posizione generale possiamo scegliere delle coordinate in  $\mathbb{P}^2$  tali che i primi 3 sono i punti fondamentali e l'ultimo il punto unità:  $A = (1: 0: 0)$ ,  $B = (0: 1: 0)$ ,  $C = (0: 0: 1)$ ,  $D = (1: 1: 1)$ .

Partiamo dall'equazione di una conica generica e imponiamo che passi per i 4 punti e vediamo le condizioni risultanti sui coefficienti:

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

$$\text{Per } A: a_{00} = 0$$

$$\text{Per } B: a_{11} = 0$$

$$\text{Per } C: a_{22} = 0$$

$$\text{Per } D: 2a_{01} + 2a_{02} + 2a_{12} = 0 \implies a_{12} = -a_{01} - a_{02}$$

$$\implies a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 - (a_{01} + a_{02})x_1x_2 = 0$$

Abbiamo così le equazioni di tutte e sole le coniche che passano per  $A, B, C, D$ . Siccome  $a_{01}$  e  $a_{02}$  sono gli unici parametri rimasti, riscriviamo l'equazione evidenziandoli:  $a_{01}x_1(x_0 - x_2) + a_{02}x_2(x_0 - x_1) = 0$ . Abbiamo così trovato esattamente un fascio di coniche generato dalle due coniche entrambe degeneri:

$$C_1: \underbrace{x_1}_{\overline{AC}} \underbrace{(x_0 - x_2)}_{\overline{BD}} = 0 \quad C_2: \underbrace{x_2}_{\overline{AB}} \underbrace{(x_0 - x_1)}_{\overline{CD}} = 0$$

Abbiamo così dimostrato la prima affermazione.

In questo modo abbiamo già trovato due coniche fra quelle degeneri del fascio; possiamo verificare, intersecando le due coniche (e quindi le quattro rette), che i punti base sono solo  $A, B, C, D$ :

$$\begin{aligned} C_1 \cap C_2 &= (\overline{AC} \cap \overline{AB}) \cup (\overline{AC} \cap \overline{CD}) \cup (\overline{BD} \cap \overline{AB}) \cup (\overline{BD} \cap \overline{CD}) = \\ &= \{A, B, C, D\} \end{aligned}$$

Avremmo potuto evitare questo conto osservando che sono punti base perché per costruzione tutte le coniche passano per questi 4 punti e, essendo finiti, non possono essercene altri.

Per trovare l'ultima conica degenera scriviamo la matrice associata a meno di multipli

alla conica generica del fascio e calcoliamo le radici del suo determinante:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & -a_{01} - a_{02} \\ a_{02} & -a_{01} - a_{02} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \det M = -a_{01}a_{02}(a_{01} + a_{02}) + a_{02}a_{01}(-a_{01} - a_{02}) = -2a_{01}a_{02}(a_{01} + a_{02})$$

È un polinomio omogeneo in  $a_{01}$  e  $a_{02}$  già fattorizzato in fattori lineari, pertanto si hanno esattamente *tre* coniche degeneri:  $a_{01} = 0$  dà  $C_2$ ,  $a_{02} = 0$  dà  $C_1$ , mentre la terza si ottiene sostituendo nell'equazione del fascio  $a_{02} = -a_{01}$ , da cui si ha l'equazione  $a_{01}x_0x_1 - a_{01}x_0x_2 = 0 \Rightarrow x_0(x_1 - x_2) = 0$ , corrispondente alle rette  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$ . Tutte e tre le coniche degeneri hanno rango 2 e quindi *non* ci sono rette doppie nel fascio.  $\square$

**TIPS & TRICKS!** FASCIO DI CONICHE PER QUATTRO PUNTI IN POSIZIONE GENERALE.

Se dobbiamo scrivere un fascio  $\mathcal{F}$  di coniche per quattro punti procedere come nella dimostrazione può esser lungo; in modo più rapido, scriviamo due delle coniche riducibili con delle rette per i punti:

$$l_1: \overline{AB}, l_2: \overline{CD}, l_3: \overline{AC}, l_4: \overline{BD}$$

Le coniche sono  $C_1: l_1l_2$  e  $C_2: l_3l_4$ ; allora l'equazione del fascio è  $\mathcal{F}: \lambda l_1l_2 + \mu l_3l_4 = 0$ .

Se un punto di  $\mathbb{P}^2$  è un punto base di un fascio, allora appartiene a tutte le coniche di esso. Preso invece un punto *non* base del fascio, quante coniche passano per esso?

**PROPOSIZIONE 11.2.1.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di coniche e sia  $P \in \mathbb{P}^2$ . Se  $P$  *non* è un punto base di  $\mathcal{F}$ , allora esiste ed è unica la conica del fascio che contiene  $P$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo di avere due coniche  $C_1, C_2$  che generano il fascio  $\mathcal{F}$  con  $C_i: f_i = 0$ ; il fascio avrà equazione  $\mathcal{F}: \lambda F_1 + \mu F_2 = 0$ . Il punto  $P$  appartiene alla conica generale del fascio se e solo se l'equazione della conica è soddisfatta nel punto:

$$P \in C_{\lambda, \mu} \iff \lambda F_1(P) + \mu F_2(P) = 0$$

Tale equazione può essere vista come un'equazione in  $(\lambda: \mu)$ .

Siccome  $P$  non è un punto base, allora *non* appartiene all'intersezione delle due coniche, dunque non è possibile che entrambe le equazioni si annullino in  $P$ :

$$P \notin C_1 \cap C_2 \implies (F_1(P), F_2(P)) \neq (0, 0)$$

L'equazione ha un'unica soluzione in  $\mathbb{P}^1$  che sarà proprio  $(\lambda: \mu) = (-F_2(P): F_1(P))$ , ottenendo così i parametri che descrivono l'unica conica del fascio che contiene  $P$ .  $\square$

Dal risultato precedente, possiamo enunciare quando cinque punti determinano una conica proiettiva.

**PROPOSIZIONE 11.2.2.** Dati cinque punti distinti in  $\mathbb{P}^2$  a 4 a 4 *non allineati*<sup>a</sup>, esiste ed è unica la conica  $C$  che li contiene.

<sup>a</sup>È una condizione più debole rispetto all'essere solo in posizione generale, perché potrebbero essercene tre allineati ma non quattro.

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo sempre scegliere 4 di questi punti in posizione generale. Consideriamo inizialmente  $A, B, C, D$ :

- Sono in posizione generale: siamo a posto.
- Tre sono allineati, per esempio  $A, B, C$ .

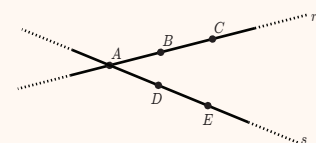
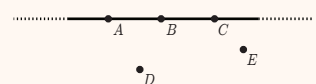
Siccome per ipotesi i quattro punti non sono allineati, allora  $D \notin r, E \notin r$  con  $r$  retta per  $A, B, C$ .

Escludiamo  $C$  e consideriamo  $A, B, D, E$ :

- Sono in posizione generale: siamo a posto.
- Tre sono allineati.

Abbiamo già che  $D, E \notin r$ , dunque i tre punti allineati possono essere  $A, D, E$  oppure  $B, D, E$ . Supponendo siano  $A, D, E$ , scartiamo  $A$  e otteniamo  $B, C, D, E$  in posizione generale.

Possiamo ora applicare la proposizione precedente: sia  $\mathcal{F}$  il fascio delle coniche passanti per  $A, B, C, D$ ; poiché  $E$  non è un punto base per  $\mathcal{F}$  in quanto i punti base sono i cinque punti  $A, B, C, D$ , esiste ed è *unica* la conica  $C$  del fascio che passa per  $E$ .  $C$  è l'unica conica che contiene i cinque punti.  $\square$



Questa dimostrazione dà anche il metodo per trovare la conica che passa per tali 5 punti.

**TIPS & TRICKS!** Per trovare una conica  $\mathcal{C}$  che passa per 5 punti dati  $A, B, C, D, E$  in  $\mathbb{P}^2$  potremmo partire dalla conica generale e imporre il passaggio per 5 punti, ma è un calcolo laborioso. Un metodo più rapido è invece il seguente.

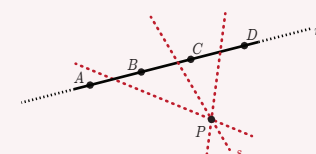
- Scegliere quattro punti in posizione generale  $A, B, C, D$ .
- Scrivere quattro rette e il fascio  $\mathcal{F}$  come nel “Tips & Tricks!” a pag. 212.
- Imporre il passaggio per il quinto punto  $E$  in modo da trovare la conica  $\mathcal{C}$ .

**OSSERVAZIONE.** Il passaggio per un punto di una conica generica dà *equazioni lineari omogenee* sui coefficienti della conica; possiamo pensarlo dunque come un *iperpiano* in  $\mathbb{P}^5$ . È ragionevole aspettarsi che con cinque punti ho cinque iperpiani che, in posizione generale, si intersecano in solo punto.

L'ipotesi sui punti a 4 a 4 non allineati serve a garantire che le condizioni lineari siano *indipendenti*, così da ottenere un punto solo nell'intersezione degli iperpiani.

#### ESEMPIO.

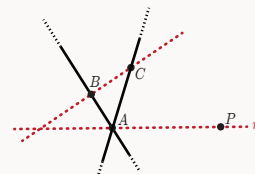
Se abbiamo 5 punti di cui 4 allineati su una retta  $r$ , allora per ogni retta  $s$  che passa per  $P$  la conica  $r \cup s$  contiene i 5 punti, quindi ci sono *infinite coniche* avendo infinite rette  $s$ .



#### PROPOSIZIONE 11.2.3.

Siano 3 punti *non allineati*  $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ , e sia una retta  $r$  che passi per  $A$  ma non per  $B$  e  $C$ , ovvero  $A \in r$  e  $B, C \notin r$ . La famiglia delle coniche che passano per  $A, B, C$  e sono tangenti a  $r$  in  $A$  è un fascio  $\mathcal{F}$ .

I punti base del fascio  $\mathcal{F}$  sono solo  $A, B, C$ ; il fascio *non* contiene rette doppie e ci sono solo due coniche degeneri  $\overline{AB} \cup \overline{AC}$  e  $r \cup \overline{BC}$ .



**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $P \in r$  un punto diverso da  $A$  e  $P \notin \overline{BC}$ .  $A, B, C, P$  sono in posizione generale, perché a tre a tre non allineati. Scegliamo le coordinate proiettive tali che  $A, B, C$  siano i punti coordinati mentre  $P$  il punto unità:  $A = (1: 0: 0), B = (0: 1: 0), C = (0: 0: 1)$ . Allora la retta  $r = \overline{AP}$  ha equazione  $x_1 - x_2 = 0$ .

Si consideri la conica generale:

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

Sappiamo già che il passaggio per i punti coordinati annulla la diagonale della matrice associata:

$$\text{Per } A: a_{00} = 0$$

$$\text{Per } B: a_{11} = 0 \implies F = a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{02}x_0x_2$$

$$\text{Per } C: a_{22} = 0$$

Intersechiamo con  $r: x_1 = x_2$  e sostituiamo in  $F$ :

$$a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{02}x_0x_1 = 0 \implies x_1((a_{01} + a_{02})x_0 + a_{12}x_1) = 0$$

Notiamo che  $x_1 = 0$  è dovuto al fatto che  $A \in r \cap C$ . Ne segue che  $r$  è tangente alla conica in  $A$  se e solo se  $A$  ha molteplicità due, quindi se e solo se  $x_1 = 0$  è l'unica soluzione. Necessariamente il coefficiente di  $x_0$  nell'equazione precedente deve essere nullo, cioè  $a_{01} + a_{02} = 0 \implies a_{02} = -a_{01}$ . Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$a_{01}x_0x_1 - a_{01}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0 \implies a_{01}x_0(x_1 - x_2) + a_{12}x_1x_2 = 0$$

Quest'equazione descrive tutte e sole le coniche per  $A, B, C$  e tangenti a  $r$  in  $A$ ; in questo modo abbiamo verificato che è un fascio  $\mathcal{F}$ .

Le coniche che lo generano sono  $C_1: \underbrace{x_0}_{\overline{BC}} \underbrace{(x_1 - x_2)}_r$  e  $C_2: \underbrace{x_1}_{\overline{AC}} \underbrace{x_2}_{\overline{AB}}$ . Intersecando  $C_1$

e  $C_2$  otteniamo i punti base:

$$C_1 \cap C_2 = (\overline{BC} \cup r) \cap (\overline{AC} \cup \overline{AB}) = (\overline{BC} \cap \overline{AC}) \cup (\overline{BC} \cap \overline{AB}) \cup (r \cap \overline{AC}) \cup (r \cap \overline{AB}) = \{C, B, A\}$$

Scriviamo la matrice per verificare che non ci siano altre coniche degeneri e altri punti base:

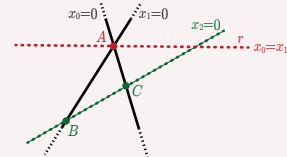
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & -a_{01} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ -a_{01} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \det M = -a_{01}(a_{01}a_{12}) - a_{01}(a_{01}a_{12}) = -2a_{01}^2a_{12}$$

Siccome  $D$  è un polinomio omogeneo di grado 3 si ha una radice doppia, ma le due radici danno le coniche che generano il fascio e dunque le uniche coniche degeneri sono solo  $C_1$  e  $C_2$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Un fascio di questo tipo è il primo esempio a pag. 205.

Consideriamo  $C_1: x_0x_1 = 0$  e  $C_2: (x_0 - x_1)x_2 = 0$ . Allora, la retta  $x_0 - x_1 = 0$  passa per il punto di intersezione delle prime due rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ , quindi siamo nella situazione precedente:  $A$  è il punto di intersezione, mentre  $B$  e  $C$  sono i punti di intersezione di  $x_2 = 0$  con  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ . Dunque  $C_2$  diventa  $r \cup \overline{BC}$ , mentre  $C_1$  è  $\overline{AB} \cup \overline{AC}$ .



Abbiamo già verificato che i punti base sono solo  $A, B, C$  e che  $C_1$  e  $C_2$  sono le uniche coniche degeneri di  $\mathcal{F}$  ed ora osserviamo che la retta  $r$  è tangente a tutte le coniche del fascio.

### 11.2.3 Impratichiamoci! Fasci di coniche proiettive

**ESERCIZIO.** F.F.P., 2.1.

Nel piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  consideriamo i punti:

$$A = (0: 1: 2), B = (0: 0: 1), C = (2: 1: 2), D = (3: 0: 1)$$

Determinare, se esiste, l'equazione di una conica passante per  $A, B, C, D$  e tangente in  $C$  alla retta  $r$  di equazione  $x_0 - x_2 = 0$  che passa per  $C$ .

**SOLUZIONE.** Controlliamo che i 4 punti siano in posizione generale verificando, con i determinanti, che siano a 3 a 3 non allineati:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies A, B, C \text{ non allineati}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies B, C, D \text{ non allineati}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies A, B, D \text{ non allineati}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies A, C, D \text{ non allineati}$$

Dunque c'è un fascio  $\mathcal{F}$  di coniche per  $A, B, C, D$ . Scriviamo l'equazione delle quattro

rette con il determinante formale delle coordinate:

$$\text{Retta } \overline{AB}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_0 = 0$$

$$\text{Retta } \overline{CD}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_0 - x_1(-4) + x_2(-3) = x_0 + 4x_1 - 3x_2 = 0$$

$$\implies C_1: x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_2)$$

$$\text{Retta } \overline{BD}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 = 0$$

$$\text{Retta } \overline{AC}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -x_1(-4) + x_2(-2) = 4x_1 - 2x_2 = 0 \implies 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\implies C_2: x_1(2x_1 - x_2)$$

$$\text{fascio } \mathcal{F}: \lambda x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_2) + \mu x_1(2x_1 - x_2) = 0$$

Queste sono tutte e sole le coniche che passano per  $A$ ,  $D$ . Vogliamo la conica del fascio che è tangente alla retta  $r: x_0 - x_2 = 0$  in  $C$ . Intersechiamo la conica  $C_{\lambda, \mu}$  con la retta  $r$  sostituendo  $x_2 = x_0$  nell'equazione:

$$\lambda x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_0) + \mu x_1(2x_1 - x_0) = 0 \implies \lambda x_0(4x_1 - 2x_0) + \mu x_1(2x_1 - x_0) = 0$$

$$\implies 2\lambda x_0(2x_1 - x_0) + \mu x_1(2x_1 - x_0) = 0 \implies (2x_1 - x_0)(2\lambda x_0 + \mu x_1) = 0$$

Sostituendo  $x_2 = x_0$  stiamo parametrizzando la retta  $r$  come  $(x_0: x_1: x_0)$ . Il passaggio per  $C = (2: 1: 2)$  corrisponde al primo fattore  $x_0 = 2x_1$ . Pertanto, la retta  $r$  è tangente alla conica nel punto  $C$  se e solo se anche l'altra soluzione corrisponde al punto  $C$ , cioè se e solo se  $2\lambda x_0 + \mu x_1$  e  $-x_0 + 2x_1$  sono proporzionali:

$$\det \begin{pmatrix} 2\lambda & \mu \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \iff 4\lambda + \mu = 0 \implies \mu = -4\lambda$$

Ad esempio, per  $\lambda = 1$  e  $\mu = -4$  si ha  $2\lambda x_0 + \mu x_1 = 2x_0 - 4x_1$ . L'equazione della conica sarà  $\mathcal{C}: x_0(x_0 + 4x_1 - 3x_2) - 4x_1(2x_1 - x_2) = 0 \implies \mathcal{C}: x_0^2 + 4x_0x_1 - 3x_0x_2 - 8x_1^2 + 4x_1x_2 = 0$ , dunque esiste ed è unica la conica cercata.

Controlliamo se la conica fa quello che deve fare. Passa per i punti dati? Sì, infatti:

$$F(A) = F(0, 1, 2) = -8 + 8 = 0 \quad F(B) = F(0, 0, 1) = 0$$

$$F(C) = F(2, 1, 2) = 4 + 8 - 12 - 8 + 8 = 0 \quad F(D) = F(3, 0, 1) = 9 - 9 = 0$$

È tangente a  $r$  in  $C$ ? Scriviamo direttamente la tangente alla conica nel punto  $C = (2: 1: 2)$  con le derivate parziali:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 2x_0 + 4x_1 - 3x_2 \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_0 - 16x_1 + 4x_2 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -3x_0 + 4x_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(2, 1, 2) = 4 + 4 - 6 = 2 \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(2, 1, 2) = 8 - 16 + 4 = -4 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(2, 1, 2) = -6 + 4 = -2$$

$$\implies 2x_0 - 2x_2 = 0 \implies x_0 - x_2 = 0$$

Otteniamo proprio la retta  $r$ .



## APPENDICI





## NOTE AGGIUNTIVE

---

*“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”*

*NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

Riportiamo alcune note e dimostrazioni aggiuntive che possono risultare utili al lettore.

### 12.1 CAPITOLO 6: SUCCESIONI

La seguente dimostrazione sulla non prima-numerabilità del quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è adattata da Brian M. Scott [10] su Mathematics Stack Exchange.

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri la contrazione di  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{R}$  ad un punto, cioè il quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  e si definisca la classe di equivalenza degli interi come  $[0]$ .

Sia  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  una famiglia di intorni aperti di  $[0]$ ; cerchiamo un intorno aperto di  $[0]$  che non ne contiene nessuno come sottoinsieme, mostrano in tal modo che non formano un sistema fondamentale di intorni di  $[0]$  e pertanto che  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  non è primo-numerabile per  $[0]$ .

Sia  $\pi$  la mappa quoziente. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{Z}$  esiste un  $\varepsilon_{n,k} \in (0, 1)$  tale che:

$$U_n \supseteq \pi \left[ \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (k - \varepsilon_{n,k}, k + \varepsilon_{n,k}) \right]$$

Per  $k \in \mathbb{Z}$  sia  $\delta_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{k,k}$ , e sia:

$$V = \pi \left[ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k - \delta_k, k + \delta_k) \right]$$

Chiaramente  $V$  è un intorno aperto di  $[0]$ , e vogliamo dimostrare che  $U_n \not\subseteq V$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per mostrare ciò, fissiamo  $n \in \mathbb{N}$ ; si ha  $\delta_n < \varepsilon_{n,n}$ , quindi possiamo scegliere un numero reale  $x \in (n + \delta_n, n + \varepsilon_{n,n})$ . Ma allora  $\pi(x) \in U_n \setminus V$ , e dunque  $U_n \not\subseteq V$ .  $\square$

## 12.2 CAPITOLO 11: FORMA CANONICA DI JORDAN

La seguente dimostrazione sul determinante di una matrice a blocchi e del suo polinomio caratteristico si basa su integrazioni proprie da Jean Marie [8] e da Ben Grossmann [4] su Mathematics Stack Exchange.

**DIMOSTRAZIONE.** Data una matrice quadrata  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right)$  definita dai blocchi  $\mathbf{A}$  di dimensione  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$  di dimensione  $n \times m$ ,  $\mathbf{C}$  di dimensione  $m \times n$  e  $\mathbf{D}$  di dimensione  $m \times m$ . Supponendo  $\mathbf{A}$  blocco invertibile, si può scomporre la matrice nel seguente modo:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \quad (12.1)$$

Calcoliamo il determinante di  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right)$ , notando che  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right)$  e  $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right)$  sono triangolari con diagonale di 1.

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) &= \det\left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right)\right) = \\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) = \\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ci serve calcolare il determinante di una *matrice diagonale a blocchi*. Presa allora:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right)$$

Possiamo riscriverla come:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right)$$

Grazie alle formule di Laplace, possiamo calcolare il determinante delle due matrici sfruttando le matrici identità presenti. Ad esempio, sviluppando rispetto le righe o le colonne sulla seconda:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = 1 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-2} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = \dots = 1^n \cdot \det \mathbf{Q} = \det \mathbf{Q}$$

Il risultato è analogo per la prima. Dunque, concludendo:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}) \quad (12.2)$$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D}) \quad (12.3)$$

Come ultima conseguenza, se vogliamo studiare il polinomio caratteristico  $C_A(t)$  di una matrice  $A$  a blocchi diagonali  $B$  e  $C$ , abbiamo che:

$$C_A(t) = \det \left( \begin{array}{c|c} B - tI & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C - tI \end{array} \right) = \det(B - tI) \det(C - tI) = C_B(t) C_C(t) \quad (12.4)$$

□

### 12.2.1 Convergenza

Tutti i ragionamenti qui presenti si applicano anche alle successioni e serie di potenze.

**DEFINIZIONE 12.2.0.** Dato un insieme  $E$  e una successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $f_n : E \longrightarrow X$  con  $X$  metrico, si dice che la successione è uniformemente convergente su  $E$  con limite  $f : E \longrightarrow X$  se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, x \in E d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad (12.5)$$

#### DEFINIZIONE 12.2.1. CRITERIO DI WEIERSTRASS O M-TEST

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni *reali* o *complesse* definite su un insieme  $A$  e che esista una successione di numeri *non negativi*  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  che soddisfino la seguente relazione:

$$\forall n \geq 1, x \in A : |f_n(x)| \leq M_n, \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad (12.6)$$

Allora la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad (12.7)$$

Converge *assolutamente* e *uniformemente* su  $A$

Si usa spesso l'*M-test* assieme al **teorema del limite uniforme**.

**DEFINIZIONE 12.2.2.** Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni *reali* o *complesse* continue sullo spazio topologico  $A$  nel quale sono definite; se la successione converge uniformemente su  $A$  allora il limite converge ad una funzione continua. In particolare, lo stesso si ha nel caso di una serie.

## 12.3 CAPITOLO 12: GEOMETRIA PROIETTIVA

### 12.3.1 Regola di Cramer

#### TEOREMA 12.3.0. REGOLA DI CRAMER.

Si consideri un sistema  $Ax = \mathbf{b}$  di  $n$  equazioni lineari in  $n$  incognite, con  $\det A \neq 0$ . Il sistema ha un'unica soluzione  $\mathbf{x}$ , le cui componenti sono:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i = 1, \dots, n \quad (12.8)$$

Con  $A_i$  la matrice ottenuta sostituendo la  $i$ -esima colonna di  $A$  col vettore  $\mathbf{b}$ .

Ad esempio, dato il sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite (in cui  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Possiamo trovare  $x_1$  e  $x_2$  con la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

# BIBLIOGRAFIA

---

- [1] A. Albano. *La forma canonica di Jordan*. 2017. URL: [https://math.i-learn.unito.it/pluginfile.php/102113/mod\\_resource/content/1/FormaDiJordan\\_v2.pdf](https://math.i-learn.unito.it/pluginfile.php/102113/mod_resource/content/1/FormaDiJordan_v2.pdf).
- [2] Dennis S. Bernstein. *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas (Second Edition)*. Princeton University Press, 2009. ISBN: 9780691140391. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7t833>.
- [3] R. Fortuna E., Frigerio e R. Pardini. *Geometria proiettiva: Problemi risolti e richiami di teoria*. UNITEXT. Springer Milan, 2011. ISBN: 9788847017467. URL: <https://www.springer.com/gp/book/9788847017467>.
- [4] B. Grossmann. *Finding the determinant of a block diagonal matrix*. Mathematics Stack Exchange. eprint: <https://math.stackexchange.com/q/2026141>. URL: <https://math.stackexchange.com/q/2026141>.
- [5] C. Kosniowski e M. Pittalupa. *Introduzione alla topologia algebrica*. Collana di matematica. Testi e manuali. Zanichelli, 1988. ISBN: 9788808064400. URL: <https://books.google.it/books?id=mIdrAAAACAAJ>.
- [6] S.G. Krantz. *A Guide to Topology*. A Guide to Topology. Mathematical Association of America, 2009. ISBN: 9780883853467. URL: <https://books.google.it/books?id=03tyezxgv28C>.
- [7] M. Manetti. *Topologia*. UNITEXT. Springer Milan, 2014. ISBN: 9788847056626. URL: <https://www.springer.com/gp/book/9788847056619>.
- [8] Jean Marie. *Proofs of Determinants of Block matrices*. Mathematics Stack Exchange. eprint: <https://math.stackexchange.com/q/1905707>. URL: <https://math.stackexchange.com/q/1905707>.
- [9] Console S. e Fino A. *Note di Geometria 2*. 2012.
- [10] B. M. Scott. *Why is  $\mathbb{R}/\sim$  not first countable at  $[0]$ , where  $x \sim y \Leftrightarrow x = y$  or  $x, y \in \mathbb{Z}$ ?* Mathematics Stack Exchange. eprint: <https://math.stackexchange.com/q/1417425>. URL: <https://math.stackexchange.com/q/1417425>.