

---

# APPUNTI DI GEOMETRIA 2

---

Anno Accademico 2020/2021

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUI BEEP BOOP”



# INDICE

---

INDICE    ii

## I    TOPOLOGIA GENERALE    1

- 1   SPAZI TOPOLOGICI    3
  - 1.1   Spazio topologico    3
  - 1.2   Distanza e spazi metrici    4
    - 1.2.1   Norme esotiche    5
  - 1.3   Finezza: confronto di topologia    6
  - 1.4   Base della topologia    7
  - 1.5   Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità    9
  - 1.6   Intorni    10
  - 1.7   Funzioni continue    11
  - 1.8   Topologia indotta    14
  - 1.9   Sottospazio topologico    14
    - 1.9.1   Immersione    15
  - 1.10   Prodotti topologici    16
  - 1.11   Assiomi di separazione:  $T_1$  e Hausdorff    20

## II   OMOTOPIA    23

# I

## TOPOLOGIA GENERALE



# SPAZI TOPOLOGICI

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

## 1.1 SPAZIO TOPOLOGICO

**DEFINIZIONE 1.1.0.** Uno **spazio topologico**  $(X, \mathcal{T})$  è un insieme  $X$  con una famiglia di sottoinsiemi  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  detta **topologia** che soddisfano i seguenti assiomi (detti **assiomi degli aperti**):

1. Il vuoto e l'insieme stesso sono aperti della topologia:  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. L'unione arbitraria di aperti è un aperto: dati  $\{A_i\}_{i \in I}$  tali che  $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$  ( $|I| \leq \infty$ ), allora  $\bigcup_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$ .
3. L'intersezione finita di aperti è aperta: dati  $\{A_i\}_{i \in I}$  tali che  $A_i \in \mathcal{T} \forall i \in I$  ( $|I| < \infty$ ), allora  $\bigcap_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$ .

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  si dicono **aperti** della topologia.

**DEFINIZIONE 1.1.1.** Si può definire equivalentemente su  $X$  una topologia  $\mathcal{T}$  usando gli **assiomi dei chiusi**:

1. Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia:  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. L'unione finita di chiusi è un chiuso: dati  $\{C_i\}_{i \in I}$  tale che  $C_i \in \mathcal{T} \forall i \in I$  ( $|I| < \infty$ ), allora  $\bigcup_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$ .
3. L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso: dati  $\{C_i\}_{i \in I}$  tale che  $C_i \in \mathcal{T} \forall i \in I$  ( $|I| \leq \infty$ ), allora  $\bigcap_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$ .

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  si dicono **chiusi** della topologia.

**OSSERVAZIONE. 1.1.** Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per soli due sottoinsiemi qualunque, in quanto poi è verificato per induzione.

**ESEMPIO.**

- **Topologia discreta:**  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ , tutti gli insiemi sono aperti.
- **Topologia banale:**  $\mathcal{T} = \emptyset, X$ , gli unici aperti sono banali.

## 1.2 DISTANZA E SPAZI METRICI

**DEFINIZIONE 1.2.0.** Su un insieme  $X$  una funzione  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  è una **distanza** se:

1. **Positività della distanza:**  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. **Simmetria:**  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. **Disuguaglianza triangolare:**  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**DEFINIZIONE 1.2.1.** Uno **spazio metrico**  $(X, d)$  è un insieme su cui è definita una distanza.

**DEFINIZIONE 1.2.2.** Definita la **palla aperta di centro**  $x$  come l'insieme degli elementi di  $X$  che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad (1.1)$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia**  $\mathcal{T}_d$  **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

**ESEMPIO.**

- Su un qualunque insieme  $X$  si può definire la *distanza banale*:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (1.2)$$

In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.

- Su  $X = \mathbb{R}$  si può definire come distanza il *valore assoluto*  $d(x, y) = |x - y|$ , che induce la **topologia Euclidea**  $\mathcal{E}_{ucl}$ , definita con le palle aperte di raggio  $\varepsilon$ :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \quad (1.3)$$

nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{uc\ell}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su  $X = \mathbb{R}^n$  si può definire come distanza la *norma Euclidea*:  $d(x, y) = \|x - y\|$  che induce la *topologia Euclidea*  $\mathcal{E}_{uc\ell}$  in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{uc\ell}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

**ATTENZIONE!** Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme  $X$  nel modo seguente:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in CF) \text{ se } \forall X \setminus A \text{ è finito.}$$

$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso } (C \in CF) \text{ se } \forall C \text{ è finito.}$$

Alcune osservazioni:

- Se un aperto  $A$  è tale se il suo complementare  $\mathcal{C}A$  è finito, si ha che:

$$A = \mathcal{C}(\mathcal{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \quad (1.4)$$

In altre parole  $A$  è aperto è pari ad  $X$  privato al più di un numero finito di punti.

- Se  $X$  è finito, la topologia  $CF$  coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di  $X$  è finito e dunque un aperto.
- Se  $X$  è infinito, ad esempio  $\mathbb{R}$ , la topologia *non* è quella discreta:  $[0, 1]$  per la topologia discreta è un chiuso ma per quella  $CF$  non lo è in quanto *non* è finito.

### 1.2.1 Norme esotiche

Possiamo definire su  $\mathbb{R}^n$  una famiglia di distanze dette **norme**; qui di seguito ne elenchiamo alcune. Definiti i punti  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  abbiamo:

- **Norma infinito**:  $d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$

- **Norma uno**:  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

- **Norma due**:  $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

- **Norma p**:  $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$

Si ha inoltre  $\lim_{p \rightarrow +\infty} d_p = d_\infty$ .

Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \quad (1.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo senza perdere di generalità che  $d_\infty(x, y) = |x_1 - y_1|$ .

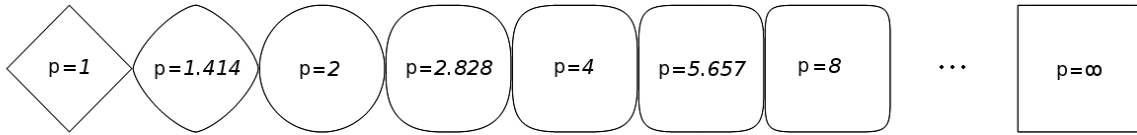
$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} \geq \sqrt{|x_1 - y_1|^2} = |x_1 - y_1| = d_\infty(x, y) \\ d_2(x, y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_1 - y_1| = n|x_1 - y_1| = nd_\infty(x, y) \end{aligned}$$

Notiamo che  $|x_i - y_i|$  sono sempre positive, allora sia  $a_i := |x_i - y_i|$ . Segue che  $a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)^2$  perché  $a_i, \dots, a_n \geq 0$ . Allora:

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq a_1 + \dots + a_n \implies d_2 \leq d_1$$

Queste disuguaglianze danno le seguenti inclusioni<sup>1</sup>:

$$B_1(\varepsilon) \subseteq B_2(\varepsilon) \subseteq B_\infty(\varepsilon) \subseteq B_1(n\varepsilon) \quad (1.6)$$



Questo ci porta a dire che le topologie indotte da queste distanze sono la stessa. Preso adesso  $X = \mathcal{C}([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$ , esso è uno spazio vettoriale infinito, con  $0_{\mathcal{C}} \equiv 0_{[0, 1]}$  (cioè la funzione *identicamente nulla*). In questo caso possiamo comunque adattare le norme precedenti con delle “somme infinite”, ovvero degli integrali.

- **Norma infinito:**  $d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$
- **Norma uno:**  $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$
- **Norma due:**  $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$
- **Norma p:**  $d_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx}$

A differenza del caso su  $\mathbb{R}^n$ , ogni norma genera in realtà una topologia distinta!

### 1.3 FINEZZA: CONFRONTO DI TOPOLOGIA

**DEFINIZIONE 1.3.0.** Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  due topologie di  $X$ . Si dice che  $\mathcal{T}_1$  è **meno fine** di  $\mathcal{T}_2$  se tutti gli aperti della prima topologia sono aperti della seconda:

$$\forall A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2 \quad (1.7)$$

In modo analogo si dice anche che  $\mathcal{T}_2$  è **più fine** di  $\mathcal{T}_1$ .

In altre parole, una topologia più fine ha più aperti rispetto a quella confrontata.

<sup>1</sup>Qui usiamo la notazione  $B_i(r)$  per indicare la palla aperta di raggio  $r$  e centro fissato  $x$  rispetto alla norma  $i$ .



**ESEMPIO.**

- La *topologia banale* è la *meno fine* di tutte, dato che ogni topologia contiene  $\emptyset, X$ .
- La *topologia discreta* è la *più fine* di tutte, dato che ogni topologia è contenuta in  $\mathcal{P}(X)$ .
- Su  $\mathbb{R}$  la topologia dei complementari finiti è *meno fine* di quella euclidea. Infatti un aperto  $A \in CF$  su  $\mathbb{R}$  è definito come  $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , cioè:

$$A = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, +\infty)$$

Per  $n$  punti gli  $n + 1$  intervalli ottenuti sono aperti della topologia euclidea; essendo unione di aperti, anche  $A$  è un aperto di  $\mathcal{E}_{ucl}$

**OSSERVAZIONE. 1.2.** Se definiamo due topologie  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  sono due topologie di un insieme  $X$ , l'intersezione  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$  è anch'essa una topologia di  $X$  e, per costruzione, è *meno fine* di  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ .

## 1.4 BASE DELLA TOPOLOGIA

**DEFINIZIONE 1.4.0.** Sia  $(X, \mathcal{T})$  uno spazio topologico.  $\mathcal{B}$  è una **base** per  $\mathcal{T}$  se:

1. La base è costituita da aperti per la topologia  $\mathcal{T}$ :  $A \in \mathcal{B} \implies A \in \mathcal{T} (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T})$ .
2. Tutti gli aperti della topologia sono unioni degli aperti delle basi:  $A \in \mathcal{T} \implies \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I: A = \bigcup_{i \in I} B_i$ .

**ATTENZIONE!** La base  $\mathcal{B}$  non è detto che sia una topologia! Ad esempio, le unioni sono aperti della topologia, ma non è detto che siano interni alla base  $\mathcal{B}$ .

**ESEMPIO.**

- Nella *topologia euclidea* di  $\mathbb{R}^n$  una base è

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\} \quad (1.8)$$

Infatti,  $\forall x \in A$  aperto  $\exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq A$  per la definizione della topologia; segue che  $A = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$ .

- Nella *topologia euclidea* di  $\mathbb{R}$  una base è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1.9)$$

Un'altra base per  $\mathbb{R}$  nella  $\mathcal{E}_{ucl}$  è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Dato  $x \in \mathbb{R}$ , esiste sempre una successione  $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$  decrescente o crescente tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ , essendo  $\mathbb{Q}$  denso in  $\mathbb{R}^a$ . Allora presa  $a_n \searrow a$  e  $b_n \nearrow b$ , si ha:

$$(a, b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

Questa base con estremi razionali ha *infiniti elementi*, ma in *misura minore* rispetto a quella ad estremi reali.

<sup>a</sup>Per una discussione più approfondita a riguardo, si guardi sez. XXX a pag. XXX.

**TEOREMA 1.4.0. TEOREMA DELLE BASI.** (MANETTI, 3.7)

Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ .  $\mathcal{B}$  è la base di un'unica topologia se e solo se:

1. L'insieme  $X$  deve essere scritto come unione di elementi della famiglia:  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .
2. Per ogni punto dell'intersezione di elementi della famiglia deve esserci un'altro elemento di essa che contiene il punto ed è sottoinsieme dell'intersezione:

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in A \cap B \quad \exists C \in \mathcal{B} : x \in C \subseteq A \cap B \quad (1.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{B}$  la famiglia di sottoinsiemi che verifica i punti 1 e 2. Allora devo trovare una topologia di cui  $\mathcal{B}$  è base. Definiamo  $\mathcal{T}$  tale che:

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathcal{B}$$

Verifichiamo gli assiomi degli aperti su  $\mathcal{T}$ .

- I  $X \in \mathcal{T}$  per ipotesi 1,  $\emptyset \in \mathcal{T}$  perché è l'unione sugli insiemi di indici vuoto ( $I = \emptyset$ ).
- II Sia  $A_i = \bigcap_j B_{ij}$ , con  $B_{ij} \in \mathcal{B}$ . Allora:

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i \left( \bigcap_j B_{ij} \right) = \bigcap_{i,j} B_{ij} \implies \bigcap_{i,j} B_{ij} \in \mathcal{T}$$

- III Sia  $A, B \in \mathcal{T}$ , cioè  $A = \bigcap_i A_i$  e  $B = \bigcap_j B_j$  con  $A_i, B_j \in \mathcal{B}$ . Allora:

$$A \cap B = \left( \bigcap_i A_i \right) \cap \left( \bigcap_j B_j \right) = \bigcap_{i,j} \left( \underbrace{A_i \cap B_j}_{\in \mathcal{T} \text{ per l'ipotesi 2}} \right) \in \mathcal{T}$$

**ESEMPIO.** Sia  $X = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Verifichiamo che  $\mathcal{B}$  soddisfa il teorema appena enunciato.

1.  $\mathbb{R} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ .
2. Preso  $[a, b] \cap [c, d]$  si ha che esso è  $\emptyset$  o è  $[e, f]$ , con  $e = \max\{a, c\}$ ,  $f = \min\{b, d\}$ ; in entrambi i casi l'intersezione è elemento di  $\mathcal{B}$ .

Esiste dunque una topologia su  $\mathbb{R}$  che ha base  $\mathcal{B}$ ; questa *non* è base per la topologia Euclidea, ad esempio, dato che gli intervalli semiaperti non sono inclusi in  $\mathcal{E}_{ucel}$ .

Notiamo inoltre che  $(a, b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[ a + \frac{1}{n}, b \right)$ , dunque la topologia definita  $\mathcal{B}$  comprende

gli aperti della topologia Euclidea:  $\mathcal{E}_{ucl}$  è meno fine di questa topologia.

### 1.5 ALTRI CONCETTI TOPOLOGICI: CHIUSURA, INTERNO, FRONTIERA E DENSITÀ

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e un sottoinsieme  $A \subseteq X$ , si ha:

- $A$  *aperto* della topologia se  $A \in \mathcal{T}$ .
- $A$  *chiuso* della topologia se  $\mathcal{C}A = X \setminus A \in \mathcal{T}$ .

**ATTENZIONE!** Essere aperto oppure essere chiuso *non si escludono a vicenda!* Un insieme può essere aperto, chiuso, entrambi o nessuno dei due. Ad esempio, il vuoto e l'insieme stesso sono aperti e chiusi allo stesso tempo, dato che per ipotesi sono aperti i loro complementari  $\mathcal{C}\emptyset = X \setminus \emptyset = X$  e  $\mathcal{C}X = X \setminus X = \emptyset$  sono anch'essi aperti.

**DEFINIZIONE 1.5.0.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . La **chiusura**  $\bar{A}$  di  $A$  è il più piccolo chiuso contenente  $A$ :

$$\bar{A} = \bigcup_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C \quad (1.11)$$

PROPRIETÀ:

- $A \subseteq \bar{A}$ .
- $\bar{A}$  è un chiuso in quanto intersezione (arbitraria) di chiusi.
- $A$  è un chiuso  $\iff A = \bar{A}$ .

**DEFINIZIONE 1.5.1.** Un punto  $x$  è **aderente** ad  $A$  se  $x \in \bar{A}$ .

**DEFINIZIONE 1.5.2.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . L'**interno**  $A^\circ$  di  $A$  è il più grande aperto contenuto in  $A$ :

$$A^\circ = \bigcap_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ aperto}}} B \quad (1.12)$$

PROPRIETÀ:

- $A^\circ \subseteq A$ .
- $A^\circ$  è un aperto in quanto unione (arbitraria) di aperti.
- $A$  è un aperto  $\iff A = A^\circ$ .

**DEFINIZIONE 1.5.3.** Un punto  $x$  è **interno** ad  $A$  se  $x \in A^\circ$ .

**DEFINIZIONE 1.5.4.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ . La **frontiera**  $\partial A$  di  $A$  sono i punti della chiusura di  $A$  non contenuti nel suo interno o, in altri termini, i punti aderenti sia ad  $A$  sia al suo complementare.

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} \quad (1.13)$$

PROPRIETÀ:

- $\partial A \subseteq \bar{A}$ .
- $\partial A$  è un chiuso.

**DEFINIZIONE 1.5.5.** Sia  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ .  $A$  è **denso** in  $X$  se  $\bar{A} = X$  o, in altri termini, tutti i punti di  $X$  sono aderenti ad  $A$ .

**ESEMPIO.** Il più piccolo chiuso contenente  $\mathbb{Q}$  è  $\mathbb{R}$ , poiché ogni reale è aderente ai razionali. Dunque  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .

## 1.6 INTORNI

**DEFINIZIONE 1.6.0.** Sia  $X$  spazio topologico e  $x \in X$ .  $V$  è un **intorno** di  $x$  se  $\exists A$  aperto tale che  $x \in A \subseteq V$  o, in altri termini, se  $x$  è interno ad  $U$ . Definiamo inoltre la **famiglia degli intorni** di  $x$   $I(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ :

$$I(x) = \{V \subseteq X \mid V \text{ è intorno di } x\} \quad (1.14)$$

**OSSERVAZIONE. 1.3.** Dato  $A \subseteq X$ , per ogni  $x \in A$  tale che  $A$  è intorno di  $x$  si può definire un aperto  $A_x \subseteq A$ , con  $x \in A_x$ . L'unione arbitraria di questi  $A_x$  risulta essere contenuta in  $A$  e pari al suo interno. Dunque, si può definire l'interno di  $A$  come  $A^\circ = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$ ; segue che  $A$  è aperto se e solo se  $A$  è intorno di ogni punto in  $A$ .

**LEMMA 1.6.0. PROPRIETÀ DEGLI INTORNI.** (MANETTI, 3.20, 3.21)

1. Si possono estendere gli intorni:  $U \in I(x), U \subseteq V \implies V \in I(x)$
2. Le intersezioni di intorni sono ancora intorni:  $U, V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$
3. Caratterizzazione della chiusura per intorni:  
 $B \subseteq X$ , allora  $x \in \bar{B} \iff \forall U \in I(x) \quad U \cap B \neq \emptyset$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

- I L'aperto  $A$  che soddisfa la definizione di  $U \in I(x)$  è per costruzione contenuto anche in  $V$ , dunque  $A$  è un aperto che soddisfa la definizione di  $V$  intorno di  $x$ .
- II Definiti gli aperti  $A_U \subseteq U, A_V \subseteq V$  che soddisfano la definizione di intorni di  $x$ , l'intersezione  $A = A_U \cap A_V$  è un aperto contenente  $x$ . Dato che  $A = A_U \cap A_V \subseteq U \cap V, U \cap V$  per definizione di intorno di  $x$ .

III Per contronominale.

$$\begin{aligned}
 x \notin \bar{B} &\iff x \notin B \wedge x \notin \partial B \\
 &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \overline{B \cap \overline{X \setminus B}} \\
 &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \partial(X \setminus B) \\
 &\iff x \in (X \setminus B)^{\circ} \\
 &\iff \exists U \in I(X) : x \in U \subseteq X \setminus B \\
 &\iff \exists U \in I(x) : U \cap B = \emptyset
 \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE 1.6.1.** Sia  $X$  spazio topologico,  $x \in X$  e  $I(x)$  la famiglia degli interni di  $x$ . Una sottofamiglia  $\mathcal{J} \subseteq I(x)$  è un **sistema fondamentale di interni** di  $x$  se  $\forall U \in I(x) \exists V \in \mathcal{J} : V \subseteq U$ .

## 1.7 FUNZIONI CONTINUE

**DEFINIZIONE 1.7.0.** Siano  $X, Y$  spazi topologici. Una funzione  $f: X \rightarrow Y$  si dice **continua** se la controimmagine di aperti in  $Y$  è un aperto in  $X$ :

$$\forall A \text{ aperto in } Y, f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \quad (1.15)$$

Alternativamente,  $f$  è continua se la controimmagine di chiusi in  $Y$  è un chiuso in  $X$ .

$$\forall C \text{ chiuso in } Y, f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \quad (1.16)$$

**OSSERVAZIONE. 1.4.**

- Si ha la definizione di continuità con i chiusi perché la controimmagine si “comporta bene” con i complementari:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

- È sufficiente verificare la definizione per gli aperti una base di  $Y$  perché la controimmagine si “comporta bene” con le unioni di insiemi:

$$f^{-1}\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$$

**LEMMA 1.7.0.** (MANETTI, 3.25)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f: X \rightarrow Y$  funzione.  $f$  è continua iff  $\forall A \subseteq X \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che per ogni funzione si ha:

- $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow$ ) Sia  $A \subseteq X$ . Dobbiamo dimostrare che  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . Sappiamo che se un insieme è contenuto in un altro, lo stesso vale per le immagini e le controimmagini. Allora:

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq \overline{f(A)} \\ A &\subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \end{aligned}$$

$f^{-1}(\overline{f(A)})$  è un chiuso (in  $X$  in quanto controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso) che contiene  $A$ . Ma allora anche la chiusura, che è il più piccolo chiuso contenente  $A$ , è contenuta in  $f^{-1}(\overline{f(A)})$ . Segue quindi:

$$\begin{aligned} \overline{A} &\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \\ f(\overline{A}) &\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Sia  $C \subseteq Y$  chiuso e sia  $A = f^{-1}(C)$ . Dobbiamo dimostrare che  $A$  è chiuso in  $X$ . Poiché  $A \subseteq \overline{A}$  è vero per definizione, dimostriamo che  $\overline{A} \subseteq A$ . Per ipotesi:

$$\begin{aligned} f(\overline{A}) &\subseteq \overline{f(A)} \\ f(\overline{f^{-1}(C)}) &\subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C \end{aligned}$$

Applicando nuovamente la controimmagine:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C)})) \subseteq f^{-1}(C) = A \end{aligned}$$

Dunque la controimmagine  $A$  di un chiuso  $C$  è un chiuso.

**TEOREMA 1.7.0.** MANETTI, 3.26 La composizione di funzioni continue è continua.

$$f: Y \rightarrow Z, g: X \rightarrow Y \text{ continue} \Rightarrow f \circ g: X \rightarrow Z \text{ continua} \quad (1.17)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La controimmagine della composizione di funzioni  $f \circ g$  è definita come  $f^{-1}(f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1}$ . Allora  $A$  aperto in  $Z \Rightarrow f^{-1}(A)$  aperto  $\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(A))$  aperto.

**DEFINIZIONE 1.7.1.** (MANETTI, 3.27)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f: X \rightarrow Y$  funzione. Dato  $x \in X$   $f$  è **continua** in  $x$  se:

$$\forall U \in \mathcal{I}(f(x)) \exists V \in \mathcal{I}(x) : f(V) \subseteq U \quad (1.18)$$

Questa è la generalizzazione della definizione tradizionale della continuità affrontata in *Analisi UNO*.

**TEOREMA 1.7.1.** (MANETTI, 3.28)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f: X \rightarrow Y$  funzione.  $f$  è continua per aperti  $\iff f$  è continua in  $x \forall x \in X$ .

**DIMOSTRAZIONE.**  $\implies$ ) Sia  $x \in X$  e  $U \in I(f(x))$ . Per definizione di intorno  $\exists A$  aperto in  $Y$  tale che  $f(x) \in A \subseteq U$ . Basta porre  $V = f^{-1}(A)$ : per continuità è aperto in  $X$  e, dato che  $x \in f^{-1}(A)$  perché  $f(x) \in A$ , allora  $V$  è intorno di  $x$ . Segue che  $f(V) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$ .

$\impliedby$ ) Sia  $A \subseteq Y$  aperto. Dobbiamo dimostrare che  $f^{-1}(A)$  sia aperto. Preso  $x \in f^{-1}(A)$  si ha che  $f(x) \in A$ ; dunque  $A$  è, in quanto aperto, intorno di  $f(x)$ . Allora, poiché  $f$  è continua in  $x$ ,  $\exists V \in I(x)$  tale che  $f(V) \subseteq A$ .

Segue che  $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$ , cioè  $f^{-1}(A)$  è intorno di  $x$  poiché contiene un intorno  $V$  dello stesso punto. Dunque  $f^{-1}(A)$  aperto perché è intorno di ogni suo punto.

**DEFINIZIONE 1.7.2.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f: X \rightarrow Y$  funzione.

- $f$  è **aperta** se  $\forall A$  aperto in  $X$   $f(A)$  è aperto in  $Y$ .
- $f$  è **chiusa** se  $\forall C$  chiuso in  $X$   $f(C)$  è chiuso in  $Y$ .

**OSSERVAZIONE. 1.5.** È sufficiente verificare la definizione di funzione aperta per gli aperti di una base di  $X$  perché l'immagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:

$$f\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f(A_i)$$

**ATTENZIONE!** Una funzione  $f$  aperta che non sia omeomorfismo non è necessariamente una funzione aperta. Si prenda  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto x$  (la proiezione sulla prima coordinata):

- $f$  è continua per ovvi motivi.
- $f$  è aperta. Infatti, presa una base su  $\mathbb{R}^2$  come  $\{B_\varepsilon(x, y)\}$ , si ha che  $f(B_\varepsilon(x, y)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  che sono aperti in  $\mathbb{R}$ .
- $f$  non è chiusa. Prendiamo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$  e definiamo la funzione  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto xy$  continua; vediamo facilmente come  $C = g^{-1}(\{1\})$  e, essendo 1 chiuso in  $\mathbb{R}$ ,  $C$  è controimmagine continua di un chiuso e dunque chiuso. Si ha dunque  $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , che tuttavia non è un chiuso della topologia Euclidea in quanto non contiene infiniti punti (una base della  $\mathcal{E}_{ucl}$  è formata da intervalli, che dunque contengono infiniti punti).

**DEFINIZIONE 1.7.3.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f: X \rightarrow Y$  funzione.  $f$  è un **omeomorfismo** se è biunivoca, continua e la sua inversa è continua; più precisamente, esiste  $g: Y \rightarrow X$  continua tale per cui  $g \circ f = Id_X$  e  $f \circ g = Id_Y$ .

Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra i due; in

notazione  $X \cong Y$ .

**LEMMA 1.7.1.** (MANETTI, 3.31)

Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f: X \rightarrow Y$  funzione *continua*. Allora vale:

1.  $f$  omeomorfismo  $\iff f$  aperta e biettiva.
2.  $f$  omeomorfismo  $\iff f$  chiusa e biettiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la prima condizione, la seconda è analoga.

$\implies$ ) Un omeomorfismo è biettivo per definizione. Dimostriamo dunque che  $f$  sia aperta, cioè  $\forall A \in X$  aperto  $f(A) \in Y$  è aperto. Ma definita  $g: Y \rightarrow X$  l'inversa continua dell'omeomorfismo  $f$  (cioè  $f^{-1} = g$ ), si ha che  $\forall A \in X$   $g^{-1}(A) = f(A)$  è aperto.

$\impliedby$ )  $f$  è già biettiva e continua per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che l'inversa  $g: Y \rightarrow X$  sia continua, cioè  $\forall A \in X$  aperto  $g^{-1}(A) \in Y$  è aperto. Ma  $g^{-1}(A) = f(A)$  che è aperto perché  $f$  è aperta.

## 1.8 TOPOLOGIA INDOTTA

**DEFINIZIONE 1.8.0.** Dati:

- Uno spazio topologico  $X$ .
- Un insieme  $Y$ .
- Una funzione  $f: Y \rightarrow X$

Allora su  $Y$  si può definire la **topologia indotta** come la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono  $f$  continua.

## 1.9 SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO

**DEFINIZIONE 1.9.0.** Sia  $X$  uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e  $Y \subseteq X$  un suo sottoinsieme. Su  $Y$  si può definire la seguente *topologia di sottospazio*:

$$U \subseteq Y \text{ aperto in } Y \iff \exists V \subseteq X \text{ aperto in } X (V \in \mathcal{T}) : U = V \cap Y \quad (1.19)$$

Definita l'**inclusione**  $i: Y \hookrightarrow X$ ,  $y \mapsto y$ , la topologia di sottospazio è la topologia indotta da  $i$ , cioè la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono continua l'inclusione.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la continuità dell'inclusione. Se  $A$  aperto in  $X$ ,  $i^{-1}(A) = A \cap Y$  (tutti gli elementi di  $A$  contenuti in  $Y$ ) è aperto in  $Y$  per definizione.

**DEFINIZIONE 1.9.1.** Sia  $X$  uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  e  $Y \subseteq X$  un suo sottoinsieme. Allora:

- $A \subseteq Y$  **aperto** in  $Y \iff A = U \cap Y$  con  $U$  aperto in  $X$ .
- $C \subseteq Y$  **chiuso** in  $Y \iff C = U \cap Y$  con  $U$  chiuso in  $X$ .
- Se  $\mathcal{B}$  è una base della topologia di  $X \implies \mathcal{B}' := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$  è base della topologia di sottospazio.



**OSSERVAZIONE. 1.6.** Se  $A \subseteq Y$  è aperto della topologia di  $X$ , allora  $A$  è aperto in  $Y$  poiché  $A = A \cap Y$ .

**ESEMPIO.** Sia  $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$  in topologia Euclidea.

- $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  è aperto in  $Y$  in quanto è già aperto in  $X$ .
- $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  è chiuso in  $Y$  in quanto è già chiuso in  $X$ .
- $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  è aperto in  $Y$  in quanto si ha, ad esempio,  $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap Y$ .

**LEMMA 1.9.0.** (MANETTI, 3.55)

Sia  $A \subseteq Y \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico e  $Y$  sottospazio topologico. Definiamo:

- $\mathcal{cl}_Y(A)$  = chiusura di  $A$  in  $Y$ .
- $\mathcal{cl}_X(A)$  = chiusura di  $A$  in  $X$ .

Allora  $\mathcal{cl}_Y(A) = \mathcal{cl}_X(A) \cap Y$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Preso  $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid C \text{ chiuso in } X \text{ e } A \subseteq C\}$ , per definizione di chiusura si ha:

$$\mathcal{cl}_X(A) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

Ora sia  $\mathcal{C}' = \{C \cap Y \mid C \in \mathcal{C}\}$ . Allora, usando i chiusi del sottospazio:

$$\mathcal{cl}_Y(A) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (C \cap Y) = \left( \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap Y = \mathcal{cl}_X(A) \cap Y$$

### 1.9.1 Immersione

**DEFINIZIONE 1.9.2.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  funzione tra  $X, Y$  spazi topologici. Se:

- $f$  continua.
- $f$  iniettiva

Allora  $f$  è un'immersione se e solo se ogni aperto in  $X$  è controimmagine di un aperto di  $Y$  per  $f$ , cioè se e solo se si ha che:

$$B \subseteq X \text{ è aperto in } X \iff B = f^{-1}(A), A \text{ aperto in } Y \quad (1.20)$$

**OSSERVAZIONE. 1.7.** Per costruzione  $f$  è immersione se la topologia su  $X$  è la topologia indotta, dunque la meno fine che rende  $f$  continua.

Se sull'immagine  $f(X) \subseteq Y$  mettiamo la topologia di sottospazio di  $Y$ , si ha che

$$f: X \rightarrow Y \text{ immersione} \iff f_\bullet: X \rightarrow f(X) \text{ è omeomorfismo}$$

**ESEMPIO.** Esempio di *non* immersione.

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Notiamo innanzitutto che  $f([0, 1]) = S^1$ . Si ha:

- $f_\bullet$  è continua per ovvi motivi
- $f_\bullet$  iniettiva, dato che l'unico caso problematico poteva essere  $t = 1$  che *non* nel dominio (si avrebbe avuto infatti  $f_\bullet(0) = f_\bullet(1)$ ).
- $f_\bullet$  suriettiva per costruzione.

Tuttavia  $f_\bullet$  *non* è immersione, dato che  $f_\bullet^{-1}$  non è continua. Preso  $P = (1, 0) \in S^1$ ,  $f_\bullet^{-1}$  non è continua in  $P$ . Infatti, gli intorno di 0 in  $[0, 1]$  sono del tipo  $U = [0, \varepsilon)$ , dunque dovrei trovare  $\forall U$  un intorno  $V$  di  $P \in S^1$  :  $f_\bullet^{-1}(V) \subseteq U$ .

Tuttavia, solo la parte superiore di  $V \in I(P)$  ha la controimmagine interna ad  $U$ : la parte inferiore, poiché sono le immagini di punti prossimi all'estremo 1 del dominio, non hanno controimmagini in  $U$ . Pertanto, non abbiamo l'omeomorfismo di  $f_\bullet$  e dunque l'immersione.

**DEFINIZIONE 1.9.3.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  funzione tra  $X, Y$  spazi topologici.

- $f$  si dice **immersione aperta** se  $f$  è chiusa.
- $f$  si dice **immersione chiusa** se  $f$  è aperta.

**LEMMA 1.9.1.** MANETTI, 3.59

Sia  $f: X \rightarrow Y$  funzione *continua* tra  $X, Y$  spazi topologici.

1.  $f$  iniettiva e aperta  $\implies f$  è immersione (aperta)
2.  $f$  iniettiva e chiusa  $\implies f$  è immersione (chiusa)

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il caso chiuso, il caso aperto è analogo. Preso  $C \subseteq X$  chiuso, sappiamo che  $f(C)$  è chiuso in  $Y$ , ma possiamo sempre dire che  $f(C) = f(C) \cap f(X)$  in quanto  $f(C) \subseteq f(X)$ . Dunque  $f(C)$  è un chiuso del sottospazio  $f(X)$ . Segue che ogni chiuso di  $C$  è un chiuso dell'immagine di  $f$ , dunque  $f_\bullet: X \rightarrow f(X)$  è:

- Continua perché lo è  $f$ .
- Biunivoca perché  $f_\bullet$  è iniettiva in quanto lo è  $f$  e suriettiva per definizione.
- Chiusa per costruzione.

$f_\bullet$  è dunque omeomorfismo ed  $f$  è immersione (chiusa).

## 1.10 PRODOTTI TOPOLOGICI

**DEFINIZIONE 1.10.0.** Siano  $P, Q$  spazi topologici e  $P \times Q$  il suo prodotto cartesiano. Definite le **proiezioni**:

$$\begin{aligned} p: P \times Q &\rightarrow P \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} q: P \times Q &\rightarrow Q \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned} \quad (1.23)$$

La **topologia prodotto**  $\mathcal{P}$  è la topologia *meno fine* fra quelli che rendono  $p$  e  $q$  continue. In particolare, ricordando l'osservazione 1.2, la topologia prodotto è l'intersezione di tutte le topologia che rendono continue  $p$  e  $q$ .

**TEOREMA 1.10.0. MANETTI, 3.61**

1. Una base della topologia  $\mathcal{P}$  è data dagli insiemi della forma  $U \times V$  dove  $U \subseteq P$  aperto,  $V \subseteq Q$  aperto.
2.  $p, q$  sono aperte; inoltre  $\forall (x, y) \in P \times Q$  le restrizioni:

$$\begin{aligned} p|_U: P \times \{y\} &\rightarrow P \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} q|_V: \{x\} \times Q &\rightarrow Q \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned} \quad (1.25)$$

Sono omeomorfismi.

3. Data  $f: X \rightarrow P \times Q$  con  $X$  spazio topologico, si ha che:

$$f \text{ continua} \iff f_1 = p \circ f, f_2 = q \circ f \text{ continue} \quad (1.26)$$

**DIMOSTRAZIONE.**

I Dimostriamo che:

- A) La famiglia  $\{U \times V\}$  è base per una topologia  $\mathcal{T}$ .
- B)  $\mathcal{P}$  è meno fine di  $\mathcal{T}$ .
- C)  $\mathcal{T}$  è meno fine di  $\mathcal{P}$ .

In questo modo avremo che la topologia  $\mathcal{T}$  è la topologia prodotto  $\mathcal{P}$  e ne conosceremo una base.

- a) Segue dal teorema delle basi 1.1 (Manetti, 3.7). Infatti
  - i.  $P \times Q$  appartiene alla famiglia  $\{U \times V\}$ , dato che per definizione gli insiemi stessi  $P$  e  $Q$  sono aperti.
  - ii. L'intersezione di due elementi della famiglia appartiene alla famiglia:  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ .
- b) Per definizione  $\mathcal{P}$  è la meno fine fra tutte le topologie sul prodotto. Dunque, per dimostrare A) basta vedere che  $p, q$  sono continue rispetto alla topologia  $\mathcal{T}$ .

Presa la proiezione  $p$ , sia  $U \subseteq P$  aperto. Si ha che  $p^{-1}(U) = U \times Q$  è aperto in  $\mathcal{T}$  in quanto è prodotto di aperti; in particolare sta nella base! Dunque  $p$  è continua, e un ragionamento analogo vale per  $q$ .

- c) Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di  $\mathcal{T}$  è anche aperto di  $\mathcal{P}$ .

Presi  $U \subseteq P, V \subseteq Q$  allora:

$$U \times V = (U \cap P) \times (V \cap Q) = (U \times P) \cap (V \times Q) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

Poichè  $p, q$  sono continue e  $U, V$  sono aperti, anche  $p^{-1}(U), q^{-1}(V)$  sono aperti; segue che la loro intersezione è aperta e dunque  $U \times V$  è aperto della topologia  $\mathcal{T}$ .

- II Dimostriamo il caso con  $p|$ , dato che il caso con  $q|$  è analogo. Preso un aperto della base  $U \times V$ , studiamo gli aperti del sottospazio  $P \times \{y\}$ .

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \notin V \\ U \times \{y\} & \text{se } y \in V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio  $P \times \{y\}$  sono tutte e solo le unioni di  $U \times \{y\}$ , al variare di  $U$  di aperti dello spazio  $P$ . Si ha dunque:

$$p|(U \times \{y\}) = U$$

Dunque, essendo  $p|$  continua perché restrizione della proiezione (che è continua per definizione), biettiva per costruzione e aperta per i risultati appena ottenuti si ha che  $P \times \{y\}$  e  $P$  sono omeomorfi, cioè  $p|$  è omeomorfismo.

Per dimostrare che  $p$  sia aperta, preso  $A$  aperto in  $P \times Q$ , si ha:

$$p(A) = p\left[\bigcap_{y \in Q} (A \cap P \times \{y\})\right] = \bigcap_{y \in Q} p(A \cap P \times \{y\}) \quad (1.27)$$

Per i ragionamenti della prima parte,  $A \cap P \times \{y\}$  è aperto di  $P \times \{y\}$  e sappiamo dunque che  $p|(A \cap P \times \{y\})$  è aperto: ne segue che  $p(A \cap P \times \{y\})$  è aperto in  $P$  al variare di  $y$ . Allora anche  $p(A)$  è aperto (in quanto è unione di aperti) e dunque  $p$  è aperta.

- III  $\Rightarrow$ ) Poiché  $f: X \rightarrow P \times Q$ ,  $p: P \times Q \rightarrow P$  e  $q: P \times Q \rightarrow Q$  sono continue, le composizioni  $f_1 = p \circ f: X \rightarrow P$ ,  $f_2 = q \circ f: X \rightarrow Q$  sono banalmente continue.  
 $\Leftarrow$ ) Dobbiamo dimostrare che  $f$  sia continua. Sia  $A = U \times V \subseteq P \times Q$  aperto della base:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)) = f^{-1}(p^{-1}(U)) \cap f^{-1}(q^{-1}(V)) \\ &= (pf)^{-1}(U) \cap (qf)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Per ipotesi  $pf$ ,  $qf$  sono continue, dunque loro controimmagini di aperti sono ancora aperti; inoltre, essendo la loro intersezione un aperto, segue l'implicazione.

**PROPOSIZIONE 1.10.0.** Siano  $X$ ,  $Y$  spazi topologici e  $X \times Y$  il prodotto. Allora:

1. Date le basi  $\mathcal{B}$  della topologia di  $X$  e  $\mathcal{C}$  della topologia di  $Y$ , allora:

$$\mathcal{D} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{C}\} \quad (1.28)$$

è una base per la topologia prodotto.

2. Dati  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , siano  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un sistema fondamentale di intorno di  $x$  e  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$  un sistema fondamentale di intorno di  $y$ . Poniamo  $W_{ij} := U_i \times V_j \subseteq X \times Y$ . Allora:

$$\mathcal{W} = \{W_{ij}\}_{i \in I, j \in J} \quad (1.29)$$

è un sistema fondamentale di intorno di  $(x, y) \in X \times Y$ .

3. Se  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ , allora  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ . In particolare, il prodotto di chiusi è chiuso.

**DIMOSTRAZIONE.** I Segue dalla dimostrazione dal primo punto del teorema 1.4 (MANETTI, 3.61).

II Per definizione di sistema fondamentale di intorni si ha:

$$\begin{aligned}\forall U \in I(x) \exists U_i \in \mathcal{U} : U_i \in U \\ \forall V \in I(y) \exists V_j \in \mathcal{V} : V_j \in V\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ) Per ogni intorno  $U$  di  $x$  e  $V$  di  $y$ , si ha  $W \in I(x, y)$ . Inoltre, presi gli intorni  $U_i$  e  $V_j$  definiti come sopra, si ha che  $W_{ij} = U_i \times V_j \in I(x, y)$  per definizione di topologia prodotto; segue che, per ogni intorno  $W$  di questa forma esiste  $W_{ij}$  tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$$

$\Leftarrow$ ) Prendiamo un intorno  $W \in I(x, y)$ , esiste un aperto  $W' \subseteq W$ . Poiché  $W'$  appartiene al prodotto  $X \times Y$ , si ha che  $W' = \bigcap_k U_k \times V_k$  con  $U_k$  e  $V_k$  aperti di  $X$  e  $Y$ . Preso allora  $(x, y) \in W'$ , esiste gli aperti  $U_k$  e  $V_k$  che contengono rispettivamente  $x$  e  $y$ .

Segue dunque che  $U_k \in I(x)$  e  $V_k \in I(y)$  e dunque dal sistema fondamentale di intorni si ha che  $\exists U_i \in \mathcal{U}, V_j \in \mathcal{V}$  tali che  $U_i \in U_k, V_j \in V_k$ . Allora definito  $W_{ij} = U_i \times V_j$ , si ha per ogni intorno  $W$  di esiste  $W_{ij}$  tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U_k \times V_k \subseteq W' \subseteq W$$

III

$$\begin{aligned}(xy) \in \overline{A \times B} &\iff \forall W \in I(x, y) \quad W \cap (A \times B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad U \cap A \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x) \quad U \cap A \neq \emptyset, \forall V \in I(y) \quad V \cap B \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{A} \wedge y \in \overline{B} \iff (xy) \in \overline{A \times B}\end{aligned}$$

In particolare, se  $A$  e  $B$  sono chiusi, avendo che  $A = \overline{A}$  e  $B = \overline{B}$ , otteniamo:

$$A \times B = \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$$

**OSSERVAZIONE. 1.8.** Il prodotto di un numero **finito** di spazi topologici è pari al prodotto di due spazi:

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

In particolare una base di aperti di  $X_1 \times \dots \times X_n$  è data da:

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \text{ aperto in } X_i\}$$

## 1.11 ASSIOMI DI SEPARAZIONE: T1 E HAUSDORFF

**DEFINIZIONE 1.11.0.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso, in particolare se e solo se tutti i punti sono chiusi.

In termini di intorni,  $X$  è **T1** se presi due punti distinti  $x$  e  $y$  esiste un intorno per il punto  $x$  che non contiene  $y$  e viceversa:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) & y \notin U \\ \exists V \in I(y) & x \notin V \end{matrix} \quad (1.30)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che la definizione di **T1** implica quella per intorni e viceversa.

$\implies$  ) Siano  $x, y \in X \quad x \neq y$ . Per ipotesi  $\{x\}$  è chiuso, dunque  $V = X \setminus \{x\}$  è aperto. Poiché  $y \neq x$ , allora  $y \notin \{x\} \implies y \in V$ , ed essendo  $V$  aperto,  $V \in I(y)$ . Dunque  $V$  è intorno di  $y$  e banalmente  $x \notin V$ .

$\impliedby$  ) Dobbiamo dimostrare che  $\forall x \quad \{x\}$  è chiuso, cioè  $A = X \setminus \{x\}$  è aperto. Sia  $y \in A$ :  $y \notin \{x\} \implies y \neq x$ . Per ipotesi allora esiste un intorno  $V$  di  $y$  tale che  $x \notin V$ . Necessariamente si ha che  $V \subseteq A$ , dunque  $A$  è anch'esso intorno di  $y$ . Per l'arbitrarietà di  $y$ ,  $A$  è intorno di ogni suo punto, dunque  $A$  è aperto.

**OSSERVAZIONE. 1.9.**

1.  $X$  è **T1** se e solo se per ogni punto  $x \in X$  si ha:

$$\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} U \quad (1.31)$$

2. Ogni spazio metrico è **T1**

**DIMOSTRAZIONE.** I ...  
II ...

**DEFINIZIONE 1.11.1.** Uno spazio topologico  $X$  si dice di **Hausdorff** o **T2** se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{matrix} : U \cap V = \emptyset \quad (1.32)$$

**OSSERVAZIONE. 1.10.**

1.  $X$  è di **Hausdorff** se e solo se per ogni punto  $x \in X$  si ha:

$$\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} \overline{U} \quad (1.33)$$

2. Essere **Hausdorff** implica essere **T1**, ma non il viceversa.  
 3. Ogni spazio metrico è di **Hausdorff**. Infatti:

**DIMOSTRAZIONE.** I

II  $\Rightarrow$ ) Avendo per ogni coppia di punti distinti due interni disgiunti, banalmente i due interni verificano la definizione di **T1** per interni.

$\Leftarrow$ )

III Presi  $x \neq y$ , allora  $d(x, y) = d > 0$ . Dunque, per disuguaglianza triangolare si ha sempre che:

$$B_{d/4}(x) \cap B_{d/4}(y) = \emptyset$$

rickrolled!





# II

## OMOTOPIA

