Appunti di Geometria 2

Anno Accademico 2020/2021

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUI BEEP BOOP”

Indice

Indice ii

I Topologia generale 1

1 Spazi topologici 3
1.1 Spazio topologico 3
1.1.1 Distanza e spazi metrici 4
1.1.2 Finezza: confronto di topologia 6
1.1.3 Base della topologia 7
1.1.4 Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità 9
1.1.5 Intorni 10
1.2 Funzioni continue 11
1.3 Omeomorfismi 13
1.4 Topologia indotta 14
1.5 Sottospazio topologico 14
1.5.1 Immersione 15
1.6 Prodotti topologici 17
1.7 Assiomi di separazione: T1 e Hausdorff 20
1.8 Proprietà topologica 23

2 Connessione e compattezza 25
2.1 Connessione 25
2.2 Compattezza 35

3 Gruppi topologici 43
3.1 Gruppi topologici 43

4 Topologia quoziente 49
4.1 Topologia Quoziente 49
4.1.1 Identificazione 50
4.1.2 Quozienti tipici 52
4.1.3 Quoziente T_2 53

5 Azioni di gruppo 55
5.1 Azione di un gruppo su un insieme 55
5.2 Stabilizzatore di un elemento 56
5.3 Azione per omeomorfismi 57

6 Successioni 63
6.1 Numerabilità 63
6.2 Successioni 67
6.2.1 Punti di accumulazione 68
6.2.2 Sottosuccessioni 68
6.3 Successioni e compatti 70
6.3.1 Compattezza per successioni 71
6.4 Spazi metrici completi 73

II Omotopia 75

7 Omotopia 77
7.1 Lemma di incollamento 77
7.2 Componente connessa e componente c.p.a. 78
7.3 Omotopia tra funzioni continue 80
7.4 Equivalenza omotopica 82
7.5 Retratti e retratti di deformazione 87

8 Il gruppo fondamentale 91
8.1 Omotopie fra cammini 91
8.2 Gruppo fondamentale 95
8.2.1 Dipendenza dal punto base 96
8.2.2 Mappe continue e omomorfismo di gruppi 98
8.3 Digressione: Categorie 99
8.3.1 Funtori 100
8.4 Isomorfismi e gruppi fondamentali 102

III Forma canonica di Jordan 107

9 Forma canonica di Jordan 109
9.1 Teorema di Cayley-Hamilton 109
9.2 Forma canonica di Jordan 110
9.2.1 Autospazi generalizzati 113
9.2.2 Esistenza della base dell'autospazio generalizzato che dà la forma di Jordan 118
9.2.3 Unicità della forma di Jordan 122
9.2.4 Polinomio minimo e forma di Jordan 122
9.2.5 Impratichiamoci! Forma canonica di Jordan 124
9.3 Funzione esponenziale nei complessi 127
9.3.1 Esponenziale di una matrice quadrata complessa 129
9.3.2 Calcolo dell'esponenziale di una matrice tramite la forma di Jordan 133
9.3.3 Impratichiamoci! Funzione esponenziale nei complessi 135
9.4 Matrici reali e forma di Jordan 136

IV Geometria proiettiva 139

10 Geometria proiettiva 141

10.1 Spazi proiettivi 141
10.2 Sottospazi proiettivi 142
10.3 Coordinate omogenee e sistemi di riferimento proiettivo 143
10.4 Operazioni con i sottospazi 146
10.5 Punti linearmente indipendenti e in posizione generale 148
10.5.1 Impratichiamoci! Punti linearmente indipendenti 149
10.6 Rappresentazione parametrica di un sottospazio proiettivo 150
10.6.1 Coordinate proiettive e punti in posizione generale 150
10.7 Trasformazioni proiettive 152
10.7.1 Gruppo lineare proiettivo 153
10.7.2 Proprietà delle trasformazioni proiettive 155
10.7.3 Trasformazioni proiettive in coordinate 157
10.7.4 Punti fissi di proiettività 157
10.7.5 Impratichiamoci! Trasformazioni proiettive 158
10.8 Geometria affine e geometria proiettiva 159
10.8.1 Chiusura proiettiva di un sottospazio affine 163
10.8.2 Impratichiamoci! Geometria affine e geometria proiettiva 167
10.9 Spazi proiettivi complessi 167
10.9.1 Varietà compatta 167
10.10 Birapporto 172
10.11 Rette nel piano proiettivo 176
10.11.1 Fascio di rette 177
10.11.2 Interpretazione duale 179
10.12 Coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ 180

V Appendici 183

11 Note aggiuntive 185
11.1 Capitolo 6: successioni 185
11.2 Capitolo 11: forma canonica di Jordan 186
11.2.1 Convergenza 187

I

Topologia generale

CAPITOLO 1

Spazi topologici

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

1.1 SPAZIO TOPOLOGICO

Definizione 1.1.0. Uno **spazio topologico** $(X, \mathcal{T})$ è un insieme X con una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ detta **topologia** che soddisfano i seguenti assiomi (detti **assiomi degli aperti**):

1. *Il vuoto e l'insieme stesso sono aperti della topologia*: $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$.
2. *L'unione arbitraria di aperti è un aperto*: dati $\{A_i\}_{i \in I}$ tali che $A_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ ($|I| \leq \infty$), allora $\bigcup_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.
3. *L'intersezione finita di aperti è aperta*: dati $\{A_i\}_{i \in I}$ tali che $A_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ ($|I| < \infty$), allora $\bigcap_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di $\mathcal{T}$ si dicono **aperti** della topologia.

Definizione 1.1.1. Si può definire equivalentemente su X una topologia $\mathcal{T}$ usando gli **assiomi dei chiusi**:

1. *Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia*: $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$.
2. *L'unione finita di chiusi è un chiuso*: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ ($|I| < \infty$), allora $\bigcup_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.
3. *L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso*: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ ($|I| \leq \infty$), allora $\bigcap_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di $\mathcal{T}$ si dicono **chiusi** della topologia.

Osservazione. Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per soli due sottoinsiemi qualunque, in quanto poi è verificato per induzione.

Esempio.
- **Topologia discreta**: $\mathcal{T} = \mathscr{P}(X)$, *tutti* gli insiemi sono *aperti*.
- **Topologia banale**: $\mathcal{T} = \varnothing,\ X$, gli *unici* aperti sono *banali*.

1.1.1 *Distanza e spazi metrici*

Definizione 1.1.2. Su un insieme X una funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ è una **distanza** se:

1. *Positività della distanza*: $\forall x,\ y \in X \quad d(x,\ y) \geq 0$ e $d(x,\ y) = 0 \iff x = y$
2. *Simmetria*: $\forall x,\ y \in X \quad d(x,\ y) = d(y,\ x)$
3. **Disuguaglianza triangolare**: $\forall x,\ y,\ z \in X \quad d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$

Definizione 1.1.3. Uno **spazio metrico** (X, d) è un insieme su cui è definita una distanza.

Definizione 1.1.4. Definita la **palla aperta di centro** x come l'insieme degli elementi di X che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,\ y) < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia** $\mathcal{T}_d$ **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

Esempio.
- Su un qualunque insieme X si può definire la *distanza banale*:

$$d(x,\ y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \tag{1.2}$$

  In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.
- Su $X = \mathbb{R}$ si può definire come distanza il *valore assoluto* $d(x,\ y) = |x - y|$, che induce la **topologia Euclidea** $\mathscr{E}_{ucl}$, definita con le palle aperte di raggio ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \tag{1.3}$$

nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathscr{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su $X = \mathbb{R}^n$ si può definire come distanza la *norma Euclidea*: $d(x, y) = \|x - y\|$ che induce la *topologia Euclidea* $\mathscr{E}_{ucl}$ in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$
$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathscr{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

ATTENZIONE! Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme X nel modo seguente:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in CF) \text{ se } X \setminus A \text{ è finito.}$$
$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso } (C \in CF) \text{ se } C \text{ è finito.}$$

Alcune osservazioni:

- Se un aperto A è tale se il suo complementare $\mathscr{C}A$ è finito, si ha che:

$$A = \mathscr{C}(\mathscr{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \tag{1.4}$$

  In altre parole A è aperto è pari ad X privato al più di un numero finito di punti.
- Se X è finito, la topologia CF coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di X è finito e dunque un aperto.
- Se X è infinito, ad esempio $\mathbb{R}$, la topologia *non* è quella discreta: $[0, 1]$ per la topologia discreta è un chiuso ma per quella CF non lo è in quanto *non* è finito.

1.1.1.1 Norme esotiche

Possiamo definire su $\mathbb{R}^n$ una famiglia di distanze dette **norme**; qui di seguito ne elenchiamo alcune. Definiti i punti $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ abbiamo:

- **Norma infinito**: $d_\infty(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$
- **Norma uno**: $d_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- **Norma due**: $d_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
- **Norma p**: $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$

Si ha inoltre $\lim\limits_{p \to +\infty} d_p = d_\infty$.

Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Supponiamo senza perdere di generalità che $d_\infty(x,\, y) = |x_1 - y_1|$.

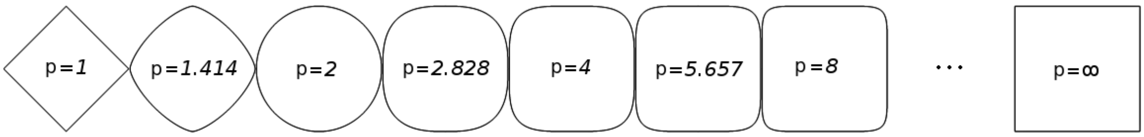
$$d_2(x,\, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2} \geq \sqrt{|x_1 - y_1|^2} = |x_1 - y_1| = d_\infty(x,\, y)$$
$$d_2(x,\, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leq |x_1 - y_1| + \ldots + |x_1 - y_1| = n|x_1 - y_1| = nd_\infty(x,\, y)$$

Notiamo che $|x_i - y_i|$ sono sempre positive, allora sia $a_i := |x_i - y_i|$. Segue che $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)^2$ perché $a_i, \ldots, a_n \geq 0$. Allora:

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \leq a_1 + \ldots + a_n \implies d_2 \leq d_1$$

Queste disuguaglianze danno le seguenti inclusioni[1]:

$$B_1(\varepsilon) \subseteq B_2(\varepsilon) \subseteq B_\infty(\varepsilon) \subseteq B_1(n\varepsilon) \tag{1.6}$$



Questo ci porta a dire che le topologie indotte da queste distanze sono la stessa.
Preso adesso $X = \mathscr{C}([0,\, 1]) = \left\{ f : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R} ,\, f \text{ continua} \right\}$, esso è uno spazio vettoriale infinito, con $0_\mathscr{C} \equiv O_{[0,\, 1]}$ (cioè la funzione *identicamente nulla*). In questo caso possiamo comunque adattare le norme precedenti con delle "somme infinite", ovvero degli integrali.

- **Norma infinito**: $d_\infty(f,\, g) = \max\limits_{x \in [0,\, 1]} |f((x) - (y)|$
- **Norma uno**: $d_1(f,\, g) = \displaystyle\int_0^1 |f((x) - (y)|$
- **Norma due**: $d_2(f,\, g) = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f((x) - (y)|^2}$
- **Norma p**: $d_p(f,\, g) = \sqrt[p]{\displaystyle\int_0^1 |f((x) - (y)|^p}$

A differenza del caso su $\mathbb{R}^n$, ogni norma genera in realtà una topologia distinta!

1.1.2 *Finezza: confronto di topologia*

Definizione 1.1.5. Sia X un insieme e $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ due topologie di X. Si dice che $\mathcal{T}_1$ è **meno fine** di $\mathcal{T}_2$ se tutti gli aperti della prima topologia sono aperti della seconda:

$$\forall A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2 \tag{1.7}$$

In modo analogo si dice anche che $\mathcal{T}_2$ è **più fine** di $\mathcal{T}_1$.

In altre parole, una topologia più fine ha più aperti rispetto a quella confrontata.

[1] Qui usiamo la notazione $B_i(r)$ per indicare la palla aperta di raggio r e centro fissato x rispetto alla norma i.

Esempi.

- La *topologia banale* è la *meno fine* di tutte, dato che ogni topologia contiene $\varnothing$, X.
- La *topologia discreta* è la *più fine* di tutte, dato che ogni topologia è contenuta in $\mathscr{P}(X)$.
- Su $\mathbb{R}$ la topologia dei complementari finiti è *meno fine* di quella euclidea. Infatti un aperto $A \in CF$ su $\mathbb{R}$ è definito come $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, cioè:

$$A = (-\infty,\ x_1) \cup (x_1,\ x_2) \cup \ldots \cup (x_n,\ +\infty)$$

Per n punti gli $n+1$ intervalli ottenuti sono aperti della topologia euclidea; essendo unione di aperti, anche A è un aperto di $\mathscr{E}_{ucl}$

Osservazione. Se definiamo due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono due topologie di un insieme X, l'intersezione $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è anch'essa una topologia di X e, per costruzione, è *meno fine* di $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.

1.1.3 *Base della topologia*

Definizione 1.1.6. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. $\mathscr{B}$ è una **base** per $\mathcal{T}$ se:

1. *La base è costituita da paerti per la topologia* $\mathcal{T}$: $A \in \mathscr{B} \implies A \in \mathcal{T} (\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T})$.
2. *Tutti gli aperti della topologia sono unioni degli aperti delle basi*: $A \in \mathcal{T} \implies \exists B_i \in \mathscr{B},\ i \in I : A = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Attenzione! La base $\mathscr{B}$ non è detto che sia una topologia! Ad esempio, le unioni sono aperti della topologia, ma non è detto che siano interni alla base $\mathscr{B}$.

Esempi.

- Nella *topologia euclidea* di $\mathbb{R}^n$ una base è

$$\mathscr{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0\} \tag{1.8}$$

Infatti, $\forall x \in A$ aperto $\exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq A$ per la definizione della topologia; segue che $A = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$.

- Nella *topologia euclidea* di $\mathbb{R}$ una base è

$$\mathscr{B} = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\} \tag{1.9}$$

Un'altra base per $\mathbb{R}$ nella $\mathscr{E}_{ucl}$ è

$$\mathscr{B} = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$$

Dato $x \in \mathbb{R}$, esiste sempre una successione $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$ decrescente o crescente tale che $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}^a$. Allora presa $a_n \searrow a$ e $b_n \nearrow b$, si ha:

$$(a,\ b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n,\ b_n)$$

Questa base con estremi razionali ha *infiniti elementi*, ma in *misura minore* rispetto a quella ad estremi reali.

[a]Per una discussione più approfondita a riguardo, si guardi sez. **XXX** a pag. **XXX**.

Teorema 1.1.0. Teorema delle basi. (Manetti, 3.7)
Sia X un insieme e $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. $\mathscr{B}$ è la base di un'*unica* topologia *se e solo se*:

1. *L'insieme X deve essere scritto come unione di elementi della famiglia*: $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$.
2. *Per ogni punto dell'intersezione di elementi della famiglia deve esserci un'altro elemento di essa che contiene il punto ed è sottoinsieme dell'intersezione*:

$$\forall A, B \in \mathscr{B}\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \mathscr{B} : x \in C \subseteq A \cap B \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B}$ la famiglia di sottoinsiemi che verifica i punti 1 e 2. Allora devo trovare una topologia di cui $\mathscr{B}$ è base. Definiamo $\mathcal{T}$ tale che:

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathscr{B}$$

Verifichiamo gli assiomi degli aperti su $\mathcal{T}$.

I $X \in \mathcal{T}$ per ipotesi 1, $\varnothing \in \mathcal{T}$ perché è l'unione sugli insiemi di indici vuoto ($I = \varnothing$).

II Sia $A_i = \bigcup_j B_{ij}$, con $B_{ij} \in \mathscr{B}$. Allora:

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \left(\bigcup_j B_{ij} \right) = \bigcup_{i,\, j} B_{ij} \implies \bigcup_{i,\, j} A_i \in \mathcal{T}$$

III Sia $A, B \in \mathcal{T}$, cioè $A = \bigcup_i A_i$ e $B = \bigcup_j B_j$ con $A_i, B_j \in \mathscr{B}$. Allora:

$$A \cap B = \left(\bigcup_i A_i \right) \cap \left(\bigcup_j B_j \right) = \bigcup_{i,\, j} \left(\underbrace{A_i \cap B_j}_{\in \mathcal{T} \text{ per l'ipotesi } 2} \right) \in \mathcal{T}$$

Esempio. Sia $X = \mathbb{R}$ e $\mathscr{B} = \{[a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$. Verifichiamo che $\mathscr{B}$ soddisfa il teorema appena enunciato.

1. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n,\ n)$.
2. Preso $[a, b) \cap [c, d)$ si ha che esso è $\varnothing$ o è $[e, f)$, con $e = \max\{a,\ c\}$, $f = \min\{b,\ d\}$; in entrambi i casi l'intersezione è elemento di $\mathscr{B}$.

Esiste dunque una topologia su $\mathbb{R}$ che ha base $\mathscr{B}$; questa *non* è base per la topologia Euclidea, ad esempio, dato che gli intervalli semiaperti non sono inclusi in $\mathscr{E}_{eucl}$.
Notiamo inoltre che $(a,\ b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n},\ b \right)$, dunque la topologia definita $\mathscr{B}$ comprende

gli aperti della topologia Euclidea: $\mathscr{E}_{ucl}$ è meno fine di questa topologia.

1.1.4 *Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità*

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e un sottoinsieme $A \subseteq X$, si ha:

- A *aperto* della topologia se $A \in \mathcal{T}$.
- A *chiuso* della topologia se $\mathscr{C}A = X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Attenzione! Essere aperto oppure essere chiuso *non si escludono a vicenda*! Un insieme può essere aperto, chiuso, entrambi o nessuno dei due. Ad esempio, il vuoto e l'insieme stesso sono aperti e chiusi allo stesso tempo, dato che per ipotesi sono aperti i loro complementari $\mathscr{C}\varnothing = X \setminus \varnothing = X$ e $\mathscr{C}X = X \setminus X = \varnothing$ sono anch'essi aperti.

Definizione 1.1.7. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **chiusura** $\overline{A}$ di A è il più piccolo chiuso contente A:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C \tag{1.11}$$

Proprietà:

- $A \subseteq \overline{A}$.
- $\overline{A}$ è un chiuso in quanto intersezione (arbitraria) di chiusi.
- A è un chiuso $\iff A = \overline{A}$.

Definizione 1.1.8. Un punto x è **aderente** ad A se $x \in \overline{A}$.

Definizione 1.1.9. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. L'**interno** A° di A è il più grande aperto contenuto in A:

$$A^{\circ} = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ aperto}}} B \tag{1.12}$$

Proprietà:

- $A^{\circ} \subseteq A$.
- A° è un aperto in quanto unione (arbitraria) di aperti.
- A è un aperto $\iff A = A^{\circ}$.

Definizione 1.1.10. Un punto x è **interno** ad A se $x \in A^{\circ}$.

Definizione 1.1.11. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **frontiera** ∂A di A sono i punti della chiusura di A non contenuti nel suo interno o, in altri termini, i punti aderenti sia ad A sia al suo complementare.

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \tag{1.13}$$

Proprietà:

- $\partial A \subseteq \overline{A}$.

- ∂A è un chiuso.

Definizione 1.1.12. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. A è **denso** è denso in X se $\overline{A} = X$ o, in altri termini, tutti i punti di X sono aderenti ad A.

Esempio. Il più piccolo chiuso contenente $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{R}$, poiché ogni reale è aderente ai razionali. Dunque $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

1.1.5 *Intorni*

Definizione 1.1.13. Sia X spazio topologico e $x \in X$. V è un **intorno** di x se $\exists A$ aperto tale che $x \in A \subseteq V$ o, in altri termini, se x è interno ad U. Definiamo inoltre la **famiglia degli intorni** di x $I(x) \subseteq \mathscr{P}(X)$:

$$I(x) = \{V \subseteq X \mid V \text{ è intorno di } x\} \tag{1.14}$$

Osservazione. Dato $A \subseteq X$, per ogni $x \in A$ tale che A è intorno di x si può definire un aperto $A_x \subseteq A$, con $x \in A_x$. L'unione arbitraria di questi A_x risulta essere contenuta in A e pari al suo interno. Dunque, si può definire l'interno di A come $A^o = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$; segue che A è aperto se e solo se A è intorno di ogni punto in A.

Lemma 1.1.0. Proprietà degli intorni. (Manetti, 3.20, 3.21)

1. *Si possono estendere gli intorni*: $U \in I(x),\ U \subseteq V \implies V \in I(x)$
2. *Le intersezioni di intorni sono ancora intorni*: $U,\ V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$
3. *Caratterizzazione della chiusura per intorni*: $B \subseteq X$, allora $x \in \overline{B} \iff \forall U \in I(x) \quad U \cap B \neq \varnothing$.

Dimostrazione.

I L'aperto A che soddisfa la definizione di $U \in I(x)$ è per costruzione contenuto anche in V, dunque A è un aperto che soddisfa la definizione di V intorno di x.

II Definiti gli aperti $A_U \subseteq U$, $A_V \subseteq V$ che soddisfano la definizione di intorni di x, l'intersezione $A = A_U \cap A_V$ è un aperto contenente x. Dato che $A = A_U \cap A_V \subseteq U \cap V$, $U \cap V$ per definizione di intorno di x.

III Per contronominale.

$$\begin{aligned}
x \notin \overline{B} &\iff x \notin B \wedge x \notin \partial B \\
&\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \overline{B} \cap \overline{X \setminus B} \\
&\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \partial(X \setminus B) \\
&\iff x \in (X \setminus B)^o \\
&\iff \exists U \in I(X)\ : x \in U \subseteq X \setminus B \\
&\iff \exists U \in I(x)\ :\ U \cap B = \varnothing
\end{aligned}$$

Definizione 1.1.14. Sia X spazio topologico, $x \in X$ e $I(x)$ la famiglia degli intorni di x. Una sottofamiglia $\mathcal{J} \subseteq I(x)$ è un **sistema fondamentale di intorni** di x se $\forall U \in I(x) \exists V \in \mathcal{J} : V \subseteq U$.

1.2 FUNZIONI CONTINUE

Definizione 1.2.0. Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice **continua** se la controimmagine di aperti in Y è un aperto in X:

$$\forall A \text{ aperto in } Y,\ f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \tag{1.15}$$

Alternativamente, f è continua se la controimmagine di chiusi in Y è un chiuso in Y.

$$\forall C \text{ chiuso in } Y,\ f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \tag{1.16}$$

Osservazione.

- Si ha la definizione di continuità con i chiusi perché la controimmagine si "comporta bene" con i complementari:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

- È sufficiente verificare la definizione per gli aperti una base di Y perché la controimmagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$$

Lemma 1.2.0. (Manetti, 3.25)
Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ funzione. f è continua iff $\forall A \subseteq X \quad f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dimostrazione. Ricordiamo che per ogni funzione si ha:

- $f\left(f^{-1}(C)\right) \subseteq C$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\Longrightarrow)$ Sia $A \subseteq X$. Dobbiamo dimostrare che $f\left(\overline{A}\right)\overline{f(A)}$. Sappiamo che se un insieme è contenuto in un altro, lo stesso vale per le immagini e le controimmagini. Allora:

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)}$$
$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$

$f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ è un chiuso (in X in quanto controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso) che contiene A. Ma allora anche la chiusura, che è il più piccolo chiuso contenente A, è contenuta in $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Segue quindi:

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$
$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}$$

$\Longleftarrow$) Sia $C \subseteq Y$ chiuso e sia $A = f^{-1}(C)$. Dobbiamo dimostrare che A è chiuso in X. Poiché $A \subseteq \overline{A}$ è vero per definizione, dimostriamo che $\overline{A} \subseteq A$. Per ipotesi:

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$$
$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

Applicando nuovamente la controimmagine:

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq C$$
$$\overline{A} = \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right)\right) \subseteq f^{-1}(C) = A$$

Dunque la controimmagine A di un chiuso C è un chiuso.

Teorema 1.2.0. Manetti, 3.26 La composizione di funzioni continue è continua.

$$f : Y \longrightarrow Z \ , \ \ g : X \longrightarrow Y \ \text{ continue } \Longrightarrow \ f \circ g : X \longrightarrow Z \ \text{ continua} \tag{1.17}$$

Dimostrazione. La controimmagine della composizione di funzioni $f \circ g$ è definita come $f^{-1}(f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1}$. Allora A aperto in $Z \Longrightarrow f^{-1}(A)$ aperto $\Longrightarrow g^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)$ aperto.

Definizione 1.2.1. (Manetti, 3.27)
Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ funzione. Dato $x \in X$ f è **continua** in x se:

$$\forall U \in I(f(x)) \exists V \in I(x) \ : f(V) \subseteq U \tag{1.18}$$

Questa è la generalizzazione della definizione tradizionale della continuità affrontata in *Analisi UNO*.

Teorema 1.2.1. (Manetti, 3.28)
Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ funzione. f è continua per aperti $\Longleftrightarrow$ f è continua in x $\forall x \in X$.

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) Sia $x \in X$ e $U \in I(f(x))$. Per definizione di intorno $\exists A$ aperto in Y tale che $f(x) \in A \subseteq U$. Basta porre $V = f^{-1}(A)$: per continuità è aperto in X e, dato che $x \in f^{-1}(A)$ perché $f(x) \in A$, allora V è intorno di x. Segue che $f(V) = f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A \subseteq U$.
$\Longleftarrow$) Sia $A \subseteq Y$ aperto. Dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(A)$ sia aperto. Preso $x \in f^{-1}(A)$ si ha che $f(x) \in A$; dunque A è, in quanto aperto, intorno di $f(x)$. Allora, poiché f è

continua in x, $\exists V \in I(x)$ tale che $f(V) \subseteq A$.
Segue che $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è intorno di x poiché contiene un intorno V dello stesso punto. Dunque $f^{-1}(A)$ aperto perché è intorno di ogni suo punto.

Definizione 1.2.2. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ funzione.

- f è **aperta** se $\forall A$ aperto in X $f(A)$ è aperto in Y.
- f è **chiusa** se $\forall C$ chiuso in X $f(C)$ è chiuso in Y.

Osservazione. È sufficiente verificare la definizione di funzione aperta per gli aperti di una base di X perché l'immagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$$

Attenzione! Una funzione f aperta che non sia omeomorfismo non è necessariamente una funzione aperta. Si prenda $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$ (la proiezione sulla prima coordinata):

- f è *continua* per ovvi motivi.
- f è *aperta*. Infatti, presa una base su $\mathbb{R}^2$ come $\{B_\varepsilon(x, y)\}$, si ha che $f(B_\varepsilon(x, y)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ che sono aperti in $\mathbb{R}$.
- f *non è chiusa*. Prendiamo $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$ e definiamo la funzione $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$ continua; vediamo facilmente come $C = g^{-1}(\{1\})$ e, essendo 1 chiuso in R, C è controimmagine continua di un chiuso e dunque chiuso.
  Si ha dunque $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che tuttavia non è un chiuso della topologia Euclidea in quanto non contiene infiniti punti (una base della $\mathcal{E}_{ucl}$ è formata da intervalli, che dunque contengono infiniti punti).

1.3 OMEOMORFISMI

Definizione 1.3.0. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ funzione. f è un **omeomorfismo** se è *biunivoca*, *continua* e la sua inversa è *continua*; più precisamente, esiste $g \colon Y \to X$ continua tale per cui $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$.
Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra i due; in notazione $X \cong Y$.

Intuitivamente... Possiamo immaginare l'omeomorfismo come una *deformazione* che *piega* e *allunga* uno spazio senza formare *strappi* (f continua), creare *nuovi punti* (f iniettiva), *sovrapposizioni* (f suriettiva) o *incollamenti* ()f^{-1} continua): in questo modo si può trasformare lo spazio in un altro che mantenga le stesse *proprietà topologiche*

dell'originale.
Si vede allora facilmente che un *quadrato* ed un *cerchio* sono omeomorfi, mentre una *sfera* ed un *toro* (la versione "topologica" di una ciambella col buco, si veda pag. **??**) non lo sono, dato che non posso creare né far sparire quel buco; allo stesso modo una *retta* non è omeomorfa ad un *punto*, dato che non posso "accumulare" tutti i punti della retta in uno solo!
Seppur questa "visualizzazione" è una buona intuizione del funzionamento degli omeomorfismi, **non è completamente accurata**. Ad esempio, un *nastro di Möbius* (per la si veda **??**) con un mezzo-giro ed uno con tre mezzi-giri sono omeomorfi, ma con la nostra intuizione non si arriva a dire perché.

Lemma 1.3.0. (Manetti, 3.31)
Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ funzione *continua*. Allora vale:
1. f omeomorfismo $\iff f$ aperta e biettiva.
2. f omeomorfismo $\iff f$ chiusa e biettiva.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima condizione, la seconda è analoga.
$\implies$) Un omeomorfismo è biettiva per definizione. Dimostriamo dunque che f sia aperta, cioè $\forall A \in X$ aperto $f(A) \in Y$ è aperto. Ma definita $g : Y \longrightarrow X$ l'inversa continua dell'omeomorfismo f (cioè $f^{-1} = g$), si ha che $\forall A \in X$ $g^{-1}(A) = f(A)$ è aperto.
$\impliedby$) f è già biettiva e continua per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che l'inversa $g : Y \longrightarrow X$ sia continua, cioè $\forall A \in X$ aperto $g^{-1}(A) \in Y$ è aperto. Ma $g^{-1}(A) = f(A)$ che è aperto perché f è aperta.

1.4 Topologia indotta

Definizione 1.4.0. Dati:
- Uno spazio topologico X.
- Un insieme Y.
- Una funzione $f : Y \longrightarrow X$

Allora su Y si può definire la **topologia indotta** come la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono f continua.

1.5 Sottospazio topologico

Definizione 1.5.0. Sia X uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Su Y si può definire la seguente *topologia di sottospazio*:

$$U \subseteq Y \text{ aperto in } Y \iff \exists V \subseteq X \text{ aperto in } X (V \in \mathcal{T}) : U = V \cap Y \tag{1.19}$$

Definita l'**inclusione** $i : \begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & X \\ y & \longmapsto & y \end{array}$, la topologia di sottospazio è la topologia indotta da i, cioè la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono continua l'inclusione.

Dimostrazione. Dimostriamo la continuità dell'inclusione. Se A aperto in X, $i^{-1}(A) = A \cap Y$ (tutti gli elementi di A contenuti in Y) è aperto in Y per definizione.

Definizione 1.5.1. Sia X uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Allora:

- $A \subseteq Y$ **aperto** in $Y \iff A = U \cap Y$ con U aperto in X.
- $C \subseteq Y$ **chiuso** in $Y \iff C = U \cap Y$ con V chiuso in X.
- Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia di $X \implies \mathcal{B}' := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è base della topologia di sottospazio.

Osservazione. Se $A \subseteq Y$ è aperto della topologia di X, allora A è aperto in Y poiché $A = A \cap Y$.

Esempi. Sia $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$ in topologia Euclidea.

- $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ è aperto in Y in quanto è già aperto in X.
- $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ è chiuso in Y in quanto è già chiuso in X.
- $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ è aperto in Y in quanto si ha, ad esempio, $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap Y$.

Lemma 1.5.0. (Manetti, 3.55)
Sia $A \subseteq Y \subseteq X$ con X spazio topologico e Y sottospazio topologico. Definiamo:

- $c\ell_Y(A) =$ chiusura di A in Y.
- $c\ell_X(A) =$ chiusura di A in X.

Allora $c\ell_Y(A) = c\ell_X(A) \cap Y$.

Dimostrazione. Preso $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid C \text{ chiuso in } X \text{ e } A \subseteq C\}$, per definizione di chiusura si ha:

$$c\ell_X(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

Ora sia $\mathcal{C}' = \{C \cap Y \mid C \in \mathcal{C}\}$. Allora, usando i chiusi del sottospazio:

$$c\ell_Y(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} (C \cap Y) = \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap Y = c\ell_Y(A)$$

.

1.5.1 *Immersione*

Definizione 1.5.2. Sia $f : X \longrightarrow Y$ funzione tra X, Y spazi topologici. Se:

- f continua.
- f iniettiva

Allora f è un'**immersione** se e solo se ogni aperto in X è controimmagine di un aperto di Y per f, cioè se e solo se si ha che:

$$B \subseteq X \text{ è aperto in } X \iff B = f^{-1}(A),\ A \text{ aperto in } Y \tag{1.20}$$

Osservazione. Per costruzione f è immersione se la topologia su X è la topologia indotta, dunque la meno fine che rende f continua.

Se sull'immagine $f(X) \subseteq Y$ mettiamo la topologia di sottospazio di Y, si ha che

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{immersione} \iff f_\bullet : X \longrightarrow f(X) \quad \text{è omeomorfismo}$$

Esempio. Esempio di *non* immersione.

$$\begin{aligned} [0,\ 1) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Notiamo innanzitutto che $f([0,\ 1)) = S^1$. Si ha:

- $f_\bullet$ è continua per ovvi motivi
- $f_\bullet$ iniettiva, dato che l'unico caso problematico poteva essere $t = 1$ che *non* nel dominio (si avrebbe avuto infatti $f_\bullet(0) = f_\bullet(1)$).
- $f_\bullet$ suriettiva per costruzione.

Tuttavia $f_\bullet$ *non* è immersione, dato che $f_\bullet^{-1}$ non è continua. Preso $P = (1,\ 0) \in S^1$, $f_\bullet^{-1}$ non è continua in P. Infatti, gli intorni di 0 in $[0,\ 1)$ sono del tipo $U = [0,\ \varepsilon)$, dunque dovrei trovare $\forall U$ un intorno V di $P \in S^1 : f_\bullet^{-1}(V) \subseteq U$.
Tuttavia, solo la parte superiore di $V \in I(P)$ ha la controimmagine interna ad U: la parte inferiore, poiché sono le immagini di punti prossimi all'estremo 1 del dominio, non hanno controimmagini in U. Pertanto, non abbiamo l'omeomorfismo di $f_\bullet$ e dunque l'immersione.

Definizione 1.5.3. Sia $f : X \longrightarrow Y$ funzione tra $X,\ Y$ spazi topologici.

- f si dice **immersione aperta** se f è chiusa.
- f si dice **immersione chiusa** se f è aperta.

Lemma 1.5.1. (Manetti, 3.59)
Sia $f : X \longrightarrow Y$ funzione *continua* tra $X,\ Y$ spazi topologici.

1. f iniettiva e aperta $\implies f$ è immersione (aperta)
2. f iniettiva e chiusa $\implies f$ è immersione (chiusa)

Dimostrazione. Dimostriamo il caso chiuso, il caso aperto è analogo. Preso $C \subseteq X$ chiuso, sappiamo che $f(C)$ è chiuso in Y, ma possiamo sempre dire che $f(C) = f(C) \cap f(X)$ in quanto $f(C) \subseteq \cap f(X)$. Dunque $f(C)$ è un chiuso del sottospazio $f(X)$. Segue che ogni chiuso di C è un chiuso dell'immagine di f, dunque $f_\bullet : X \longrightarrow f(X)$ è:

- Continua perché lo è f.
- Biunivoca perché $f_\bullet$ è iniettiva in quanto lo è f e suriettiva per definizione.
- Chiusa per costruzione.

$f_\bullet$ è dunque omeomorfismo ed f è immersione (chiusa).

1.6 PRODOTTI TOPOLOGICI

Definizione 1.6.0. Siano P, Q spazi topologici e $P \times Q$ il suo prodotto cartesiano. Definite le **proiezioni**:

$$\begin{aligned} p : P \times Q &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} q : P \times Q &\longrightarrow Q \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned} \tag{1.23}$$

La **topologia prodotto** $\mathscr{P}$ è la topologia *meno fine* fra quelli che rendono p e q *continue*. In particolare, ricordando l'osservazione 1.2, la topologia prodotto è l'intersezione di *tutte* le topologia che rendono continue p e q.

Teorema 1.6.0. (Manetti, 3.61)

1. Una *base* della topologia $\mathscr{P}$ è data dagli insiemi della forma $U \times V$ dove $U \subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto.
2. p, q sono aperte; inoltre $\forall (x, y) \in P \times Q$ le restrizioni:

$$\begin{aligned} p_| : P \times \{y\} &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} q_| : \{x\} \times Q &\longrightarrow Q \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned} \tag{1.25}$$

   Sono *omeomorfismi*.

3. Data $f : X \longrightarrow P \times Q$ con X spazio topologico, si ha che:

$$f \text{ continua} \iff f_1 = p \circ f,\ f_2 = q \circ f \text{ continue} \tag{1.26}$$

Dimostrazione.

I Dimostriamo che:
   A) La famiglia $\{U \times V\}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$.
   B) P è meno fine di $\mathcal{T}$.
   C) $\mathcal{T}$ è meno fine di P.

   In questo modo avremo che la topologia $\mathcal{T}$ è la topologia prodotto $\mathscr{P}$ e ne conosceremo una base.

   a) Segue dal teorema delle basi 1.1 (Manetti, 3.7). Infatti
      i. $P \times Q$ appartiene alla famiglia $\{U \times V\}$, dato che per definizione gli insiemi stessi P e Q sono aperti.
      ii. L'intersezione di due elementi della famiglia appartiene alla famiglia: $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.
   b) Per definizione $\mathscr{P}$ è la meno fine fra tutte le topologie sul prodotto. Dunque, per dimostrare A) basta vedere che p, q sono continue rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.
      Presa la proiezione p, sia $U \subseteq P$ aperto. Si ha che $p^{-1}(U) = U \times Q$ è aperto

in $\mathcal{T}$ in quanto è prodotto di aperti; in particolare sta nella base! Dunque p è continua, e un ragionamento analogo vale per q.

c) Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di $\mathcal{T}$ è anche aperto di $\mathscr{P}$.
Presi $U \subseteq P$, $V \subseteq Q$ allora:

$$U \times V = (U \cap P) \times (V \cap Q) = (U \times P) \cap (V \times Q) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

Poichè p, q sono continue e U, V sono aperti, anche $p^{-1}(U)$, $q^{-1}(V)$ sono aperti; segue che la loro intersezione è aperta e dunque $U \times V$ è aperto della topologia $\mathcal{T}$.

II Dimostriamo il caso con $p_|$, dato che il caso con $q_|$ è analogo. Preso un aperto della base $U \times V$, studiamo gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$.

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } y \notin V \\ U \times \{y\} & \text{se } y \in V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$ sono tutte e solo le unioni di $U \times \{y\}$, al variare di Y di aperti dello spazio P. Si ha dunque:

$$p_|(U \times \{y\}) = U$$

Dunque, essendo $p_|$ continua perché restrizione della proiezione (che è continua per definizione), biettiva per costruzione e aperta per i risultati appena ottenuti si ha che $P \times \{y\}$ e P sono omeomorfi, cioè $p_|$ è omeomorfismo.
Per dimostrare che p sia aperta, preso A aperto in $P \times Q$, si ha:

$$p(A) = p\left[\bigcup_{y \in \mathbb{Q}} (A \cap P \times \{y\})\right] = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} p(A \cap P \times \{y\}) \tag{1.27}$$

Per i ragionamenti della prima parte, $A \cap P \times \{y\}$ è aperto di $P \times \{y\}$ e sappiamo dunque che $p_|(A \cap P \times \{y\})$ è aperto: ne segue che $p(A \cap P \times \{y\})$ è aperto in P al variare di y. Allora anche $p(A)$ è aperto (in quanto è unione di aperti) e dunque p è aperta.

III $\Longrightarrow$) Poiché $f : X \longrightarrow P \times Q$, $p : P \times Q \longrightarrow P$ e $q : P \times Q \longrightarrow Q$ sono continue, le composizioni $f_1 = p \circ f : X \longrightarrow P$, $f_2 = q \circ f : X \longrightarrow Q$ sono banalmente continue. $\Longleftarrow$) Dobbiamo dimostrare che f sia continua. Sia $A = U \times V \subseteq P \times Q$ aperto della base:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}\left(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)\right) = f^{-1}\left(p^{-1}(U)\right) \cap f^{-1}\left(q^{-1}(V)\right) \\ &= (pf)^{-1}(U) \cap (qf)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Per ipotesi pf, qf sono continue, dunque loro controimmagini di aperti sono ancora aperti; inoltre, essendo la loro intersezione un aperto, segue l'implicazione.

Proposizione 1.6.0. Siano X, Y spazi topologici e $X \times Y$ il prodotto. Allora:

1. Date le basi $\mathscr{B}$ della topologia di X e $\mathscr{C}$ della topologia di Y, allora:

$$\mathscr{D} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B},\ V \in \mathscr{C}\} \tag{1.28}$$

è una base per la topologia prodotto.
2. Dati $x \in X$, $y \in Y$, siano $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni di x e $\mathscr{V} = \left\{V_j\right\}_{j \in J}$ un sistema fondamentale di intorni di y. Poniamo $Wij := U_i \times V_j \subseteq X \times Y$. Allora:

$$\mathscr{W} = \left\{W_{ij}\right\}_{j \in J} \tag{1.29}$$

è un sistema fondamentale di intorni di $(x,\ y) \in X \times Y$.
3. Se $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, allora $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare, il prodotto di chiusi è chiuso.

Dimostrazione.

I Segue dalla dimostrazione dal primo punto del teorema 1.4 ((Manetti, 3.61)).

II Per definizione di sistema fondamentale di intorni si ha:

$$\forall U \in I(x)\ \exists U_i \in \mathscr{U} : U_i \in U$$
$$\forall V \in I(y)\ \exists V_i \in \mathscr{V} : V_j \in V$$

$\Longrightarrow$) Per ogni intorno U di x e V di y, si ha $W \in I(x,\ y)$. Inoltre, presi gli intorni U_i e V_j definiti come sopra, si ha che $W_{ij} = U_i \times V_j \in I(x,\ y)$ per definizione di topologia prodotto; segue che, per ogni intorno W di questa forma esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$$

$\Longleftarrow$) Prendiamo un intorno $W \in I(x,\ y)$, esiste un aperto $W' \subseteq W$. Poiché W' appartiene al prodotto $X \times Y$, si ha che $W' = \bigcup_k U_k \times V_k$ con U_k e V_k aperti di X e Y. Preso allora $(x,\ y) \in W'$, esiste gli aperti U_k e V_k che contengono rispettivamente x e y.
Segue dunque che $U_k \in I(x)$ e $V_k \in I(y)$ e dunque dal sistema fondamentale di intorni si ha che $\exists U_i \in \mathscr{U},\ V_j \in \mathscr{V}$ tali che $U_i \in U_k,\ V_j \in V_k$. Allora definito $W_{ij} = U_i \times V_j$, si ha per ogni intorno W di esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U_k \times V_k \subseteq W' \subseteq W$$

III

$$\begin{aligned}
(xy) \in \overline{A \times B} &\iff \forall W \in I(x,\ y) \quad W \cap (A \times B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x),\ \forall V \in I(y) \quad (U \times V) \cap (A \times B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x),\ \forall V \in I(y) \quad (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x),\ \forall V \in I(y) \quad U \cap A \neq \varnothing,\ V \cap B \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x) \quad U \cap A \neq \varnothing,\ \forall V \in I(y) \quad V \cap B \neq \varnothing \\
&\iff x \in \overline{A} \wedge y \in \overline{B} \iff ()(xy) \in \overline{A} \times \overline{B}
\end{aligned}$$

In particolare, se A e B sono chiusi, avendo che $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$, otteniamo:

$$A \times B = \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$$

Osservazione. Il prodotto di un numero **finito** di spazi topologici è pari al prodotto di due spazi:

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

In particolare una base di aperti di $X_1 \times \ldots \times X_n$ è data da:

$$\mathscr{B} = \{A_1 \times \ldots \times A_n \mid A_i \text{ aperto in } X_i\}$$

1.7 Assiomi di separazione: T1 e Hausdorff

Definizione 1.7.0. Uno spazio topologico X si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso, in particolare se e solo se tutti i punti sono chiusi.
In termini di intorni, X è **T1** se presi due punti distinti x e y esiste un intorno per il punto x che non contiene y e viceversa:

$$\forall x,\ y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) & y \notin U \\ \exists V \in I(y) & x \notin V \end{matrix} \tag{1.30}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che la definizione di **T1** implica quella per intorni e viceversa.
$\implies$) Siano $x,\ y \in X \quad x \neq y$. Per ipotesi $\{x\}$ è chiuso, dunque $V = X \setminus \{x\}$ è aperto. Poiché $y \neq x$, allora $y \notin \{x\} \implies y \in V$, ed essendo V aperto, $V \in I(y)$. Dunque V è intorno di y e banalmente $x \notin V$.
$\impliedby$) Dobbiamo dimostrare che $\forall x \quad \{x\}$ è chiuso, cioè $A = X \setminus \{x\}$ è aperto. Sia $y \in A$: $y \notin \{x\} \implies y \neq x$. Per ipotesi allora esiste un intorno V di y tale che $x \notin V$. Necessariamente si ha che $V \subseteq A$, dunque A è anch'esso intorno di y. Per l'arbitrarietà di y, A è intorno di ogni suo punto, dunque A è aperto.

Osservazione.

1. X è **T1** se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U \tag{1.31}$$

2. Ogni spazio metrico è **T1**

Dimostrazione.

I $\implies$) Se X è **T1**, allora $\forall \{y\} \subseteq X$ è chiuso. Fissato x, prendiamo $y \in \bigcap_{U \in I(x)} U$.

Allora $\forall U \in I(x)\ \{y\} \cap U \neq \varnothing$. Da ciò segue che $x \in \overline{\{y\}} = \{y\}$, cioè $y = x$. Allora $\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$.

$\Longleftarrow$) Per dimostrare che X è **T1** è sufficiente dimostrare che $\{x\}$ è chiuso, dato che ogni insieme finito in X si può vedere come unione finita di singoletti $\{x\}$ e per gli assiomi dei chiusi otteniamo un chiuso. In particolare, ci basta dimostrare che $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$, essendo l'altra implicazione ovvia per definizione.

Sia $y \in \overline{\{x\}}$. Per definizione di chiusura $\forall V \in I(y)\ V \cap \{x\} \neq \varnothing \implies \forall V \in I(y)\ V \cap \{x\} = \{x\}$, cioè l'intersezione dei V deve incontrare $\{x\}$:

$$\bigcap_{V \in I(y)} V \cap \{x\} = \{x\}$$

Per ipotesi, $\bigcap_{V \in I(y)} V = \{y\}$, dunque $\{y\} \cap \{x\} = \{x\} \implies y \in \{x\} \implies \overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$ e vale le ipotesi.

II Se X è metrico e $x \in X$, il sistema fondamentale di intorni di X sono gli intorni centrati in X di raggio arbitrario, cioè $B_\varepsilon(x)$. Allora:

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}$$

E per la proposizione precedente si ha che X metrico è **T1**.

Definizione 1.7.1. Uno spazio topologico X si dice di **Hausdorff** o **T2** se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{array}{l} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{array} : U \cap V = \varnothing \tag{1.32}$$

Osservazione.

1. X è di **Hausdorff** se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U} \tag{1.33}$$

2. Essere **Hausdorff** implica essere **T1**, ma non il viceversa.
3. Ogni spazio metrico è di **Hausdorff**.

Dimostrazione.

I $\implies$) Sia X di **Hausdorff**. Fissato x, sia $y \in \overline{U}$, con $U \in I(x)$. Per definizione di $\overline{U}$, $\forall V \in I(y) \quad V \cap U \neq \varnothing$. Se $y \neq x$, si avrebbe un assurdo, dato che $\nexists V \in I(y) : U \cap V = \varnothing$ e dunque X non sarebbe di **Hausdorff**.

$\Longleftarrow$) Dobbiamo dimostrare che X è di **Hausdorff**. Sia $x \neq y$. Allora $y \notin \{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$. Allora, per definizione di chiusura si ha che $\forall U \in I(x)\ \exists V \in$

$I(y) : V \cap U = \varnothing$. Segue dunque la tesi.

II Avendo per ogni coppia di punti distinti due intorni disgiunti in quanto **Hausdorff**, banalmente i due intorni verificano la definizione di **T1** per intorni.
Il viceversa *non* è vero: prendendo la topologia dei complementari finiti CF su uno spazio X *non* finito, essa è **T1** ma non **Hausdorff**.

III Presi $x \neq y$, allora $d(x, y) = d > 0$. Dunque, per disuguaglianza triangolare si ha sempre che:

$$B_{d/4}(Y) \cap B_{d/4}(Y) = \varnothing$$

Proposizione 1.7.0. 1.21(Manetti, 3.6.8)
Sottospazi e prodotti di spazi di **Hausdorff** sono **Hausdorff**.

Dimostrazione.

- Sia $Y \subseteq X$ con X spazio topologico, Y con la topologia di sottospazio. Prendiamo $x, y \in Y$ con $x \neq y$.
  X di **Hausdorff** implica che $\exists U, V \subseteq X$ intorni rispettivamente di x e y tali che $U \cap V = \varnothing$. Basta prendere allora $U \cap Y$, $V \cap Y$: sono intorni sempre di x e y in Y che restano comunque disgiunti.
- Sia $X \times Y$ con X, Y spazi topologici. Prendiamo $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Questo significa che $x_1 \neq x_2$ oppure $y_1 \neq y_2$.
  Scegliamo senza perdita di generalità $x_1 \neq x_2$. Essendo X di **Hausdorff**, $\exists U_1, U_2$ (intorni) aperti in X tali che $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 : U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Allora:

$$\begin{matrix} U_1 \times Y \text{ intorno di } (x_1, y_1) \\ U_2 \times Y \text{ intorno di } (x_2, y_2) \end{matrix} \implies U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = (U_1 \cap U_2) \times (Y \cap Y) = \varnothing$$

Teorema 1.7.0. (Manetti, 3.69)
Sia X spazio topologico. La **diagonale** $\Delta \subseteq X \times X$ è l'insieme delle coppie che hanno uguali componenti:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \tag{1.34}$$

Si ha:
X di **Hausdorff** $\iff$ Δ chiuso in $X \times X$.

Dimostrazione. $\implies$) Dobbiamo dimostrare che Δ è chiuso, cioè $X \times X \setminus \Delta$ aperto, ovvero $X \times X \setminus \Delta$ è intorno di ogni suo punto.
Preso $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta \implies x \neq y$ dato che *non* appartiene alla diagonale. Essendo X di **Hausdorff**, $\exists U, V : x \in U, y \in V$ (intorni) aperti disgiunti. Allora $U \times V \cap \Delta = \varnothing$: se così non fosse, ci potrebbero essere dei valori della diagonale che appartengono ad $U \times V$, cioè esisterebbe almeno una coppia (x', y') tale che $x' = y'$, ovvero gli intorni non sarebbero disgiunti. Allora $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$.
$\impliedby$) Siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Allora $(x, y) \in\subseteq X \times X \setminus \Delta$, che è aperto per ipotesi. Necessariamente esiste un aperto della base della topologia prodotto che contiene la coppia: $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$. Per gli stessi ragionamenti dell'altra implicazione, si ha che $x \in U, y \in V$ con U, V aperti (e dunque intorni) disgiunti. Segue che X è di **Hausdorff**.

Proposizione 1.7.1.

1. Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ continue, Y di **Hausdorff**. Sia C il luogo dei punti dove f e g coincidono:
$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \tag{1.35}$$
Allora C è chiuso.
2. Sia $f : X \longrightarrow X$ continua, X di **Hausdorff**. Sia $F_{ix}(f)$ il luogo dei **punti fissi** di f e g coincidono:
$$F_{ix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\} \tag{1.36}$$
Allora $F_{ix}(f)$ è chiuso.
3. Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ continue, Y di **Hausdorff** e $A \subseteq X$ *denso* in X. Allora
$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x) \implies \forall x \in X \quad f(x) = g(x) \tag{1.37}$$
4. Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua, Y di **Hausdorff**. Sia Γ_f il **grafico** di f le insieme delle coppie $(x, f(x))$ formate dai punti del dominio e le corrispettive immagini tramite f.
$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \tag{1.38}$$
Allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$.

Dimostrazione.

I Definiamo la funzione $\begin{array}{rcl} h : X & \longrightarrow & X \times Y \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$. Essa è continua perché le componenti sono continue; considerata la diagonale Δ_Y di $Y \times Y$, si ha che $C = h^{-1}(\Delta_Y)$ è la controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso e quindi chiuso.

II Basta porre al punto 1 $g = Id_X$.

III Per ipotesi $A \subseteq h^{-1}(\Delta_Y)$. In quanto A è denso in X, $\overline{A} = X$. Dunque:
$$X = \overline{A} \subseteq \overline{h^{-1}(\Delta_Y)} = h^{-1}(\Delta_Y)$$
Questo è vero in quanto Y è di **Hausdorff** e la diagonale Δ_Y è un chiuso: segue che $h^{-1}(\Delta_Y)$ è chiuso e dunque pari alla sua chiusura. Si ha la tesi.

IV Definiamo la funzione continua $\begin{array}{rcl} l : X \times Y & \longrightarrow & Y \times Y \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x), y) \end{array}$. Allora $\Gamma_f = l^{-1}(\Delta_Y)$ è un chiuso.

1.8 PROPRIETÀ TOPOLOGICA

Definizione 1.8.0. Una **proprietà topologica** P è una caratteristica degli spazi topologici per cui se ogni spazio X che possiede quella proprietà P è omeomorfo ad uno spazio Y, allora anche Y ha quella proprietà (e viceversa):
$$X \cong Y \implies [X \text{ ha } P \iff Y \text{ ha } P] \tag{1.39}$$
In altre parole, una proprietà topologica è **invariante** rispetto agli omeomorfismi.

Osservazione. Per verificare che P è una proprietà topologica dati due spazi omeomorfi $X \cong Y$, basta in realtà verificare solo che se X ha la proprietà P allora anche Y la ha. Invece, si può verificare che due spazi **non** sono omeomorfi trovando una proprietà topologica che non condividono tra di loro.

Esercizio. (Manetti, 3.56)
Siano X, Y spazi topologici con Y di **Hausdorff**. Se esiste $f : X \longrightarrow Y$ continua e iniettiva, allora X è di **Hausdorff**.

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Essendo f iniettiva, $f(x) \neq f(y) \in Y$: in quanto Y è di **Hausdorff**, $\exists U, V$ (intorni) aperti disgiunti in Y che contengono rispettivamente $f(x)$ e $f(y)$.
Per continuità di f le controimmagini di questi intorni aperti sono aperti e per iniettività sono ancora disgiunti: $\exists f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ (intorni) aperti disgiunti che contengono rispettivamente x e y. Segue che X è di **Hausdorff**.

Proposizione 1.8.0. Essere di **Hausdorff** è una proprietà topologica, ovvero:

$$X \cong Y \implies [X \text{ è di } \textbf{Hausdorff} \implies Y \text{ è di } \textbf{Hausdorff}] \tag{1.40}$$

Dimostrazione. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un omeomorfismo tra i due spazi. Allora f è per definizione continua e iniettiva. Per l'esercizio 1.1 (Manetti, 3.56) segue che X di **Hausdorff** $\implies$ Y di **Hausdorff**.

Teorema 1.8.0. X, Y di **Hausdorff** $\iff$ $X \times Y$ di **Hausdorff**.

Dimostrazione.
$\implies$) Si veda la proprietà (Manetti, 3.6.8).
$\impliedby$) Si fissi $y_0 \in Y$. Definita la funzione $\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (x, y_0) \end{aligned}$, essa è continua ed iniettiva, dunque per l'esercizio 1.1 (Manetti, 3.56) segue che X è di **Hausdorff**.
Definito $x_0 \in X$ e $\begin{aligned} f : Y &\longrightarrow X \times Y \\ y &\longmapsto (x_0, y) \end{aligned}$, allo stesso modo si verifica che Y è di **Hausdorff**.

CAPITOLO 2

Connessione e compattezza

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

2.1 Connessione

Definizione 2.1.0. Uno spazio topologico X si dice **connesso** se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono $\varnothing$, X.
Uno spazio non *connesso* si dice **sconnesso** oppure **non connesso**.

Lemma 2.1.0. (Manetti, 4.2)
Sono condizioni equivalenti:

1. X è *sconnesso*.
2. $X = A \cup B$ con A, B aperti, non vuoti, disgiunti.
3. $X = A \cup B$ con A, B chiusi, non vuoti, disgiunti.

Dimostrazione.
$2 \iff 3$) Sono equivalenti: se A è aperto e disgiunto da B tale che $X = A \cup B$ significa che $B = \mathscr{C}A = X \setminus A$ e dunque chiuso; analogamente per B aperto si ha che A è chiuso: allora A, B chiusi e aperti propri.
$1 \implies 2$) Esiste $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$ con A aperto e chiuso. Allora basta porre $B = \mathscr{C}A = X \setminus A$: essendo il complementare di A è aperto e chiuso, sono disgiunti e tali per cui $B \neq X$, $B \neq \varnothing$. A e B soddisfano la tesi.
$1 \implies 2$) A aperto, B aperto $\implies$ A chiuso perché $A = \mathscr{C}X = X \setminus B$. Inoltre A non vuoto, B non vuoto $\implies$ $A \neq X$. Dunque A è aperto, chiuso e $A \neq \varnothing$, X e pertanto soddisfa la tesi: esiste un sottoinsieme aperto e chiuso che non il vuoto o l'insieme stesso.

Osservazione. Il lemma 2.1 (Manetti, 4.2) ci dice che è sufficiente trovare solo due aperti (o chiusi) che soddisfano la condizione di cui sopra per affermare la sconnessione.

Viceversa, per dimostrare la connessione, dobbiamo dimostrare che per ogni coppia di aperti (o chiusi) non vuoti, la cui unione è X, essi non siano disgiunti.

Esempio. Esempi di spazi topologici *sconnessi* in topologia Euclidea.
- $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$.
- $X = [0,\ 1] \cup (2,\ 3)$.

Lemma 2.1.1. (Manetti, 4.4)
Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$ con A aperto e chiuso. Sia $Y \subseteq X,\ Y$ *connesso*. Allora $Y \cap A = \varnothing$ (cioè $Y \subseteq Y \setminus A$) oppure $Y \subseteq A$.

Dimostrazione. Consideriamo $Y \cap A$: esso è intersezione di due aperti e chiusi per ipotesi (Y è aperto e chiuso perché *connesso*), cioè è aperto e chiuso. Essendo Y *connesso*, un suo sottoinsieme aperto e chiuso o è l'insieme vuoto oppure è l'insieme stesso, cioè $Y \cap A = \varnothing$ (cioè $Y \subseteq Y \setminus A$) oppure $Y \cap A = Y$ (cioè $Y \subseteq A$).

Teorema 2.1.0. (Manetti, 4.6)
Con la topologia Euclidea, $X = [0,\ 1]$ è *connesso*.

Dimostrazione. Supponiamo $X = [0,\ 1] = C \cup D$ con:
- $C,\ D$ entrambi chiusi.
- $C,\ D$ entrambi aperti.

Dobbiamo dimostrare che $C,\ D$ *non* sono disgiunti, ovvero $C \cap D \neq 0$. Supponiamo sia $0 \in C$ e poniamo $d = \inf D$. Essendo D un chiuso, $d \in \overline{D} = D$.
- Se $d = 0$, $d \in C \cap D \neq \varnothing$.
- Se $d > 0$ allora $[0,\ d) \subseteq C$ perché *non sta* in D. Il passaggio alla chiusura mantiene l'inclusione, dunque $[0,\ d] \subseteq \overline{C} = C$. Segue che $d \in C$ e dunque $C \cap D \neq \varnothing$.

Teorema 2.1.1. (Manetti, 4.7)
L'immagine continua di un *connesso* è un *connesso*:

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{continua, } X \text{ connesso} \implies f(X) \text{ connesso} \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.2. Sia $Z \subseteq f(X)$, Z aperto, chiuso in $f(X)$ non vuoto. Per dimostrare che $f(X)$ sia connesso ci è sufficiente dimostrare che $Z = f(X)$: in questo modo gli unici aperti e chiusi sono i sottoinsiemi impropri:
- Z aperto: $\exists A$ aperto in $Y : Z = A \cap f(X)$.
- Z chiuso: $\exists C$ chiuso in $Y : Z = C \cap f(X)$.

Allora:
- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \implies f^{-1}(Z)$ è uguale alla controimmagine continua di un aperto in Y, cioè è uguale ad un aperto di X.
- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(C) \implies f^{-1}(Z)$ è uguale alla controimmagi-

ne continua di un chiuso in Y, cioè è uguale ad un chiuso di X
Segue che $f^{-1}(Z)$ è aperto e chiuso in X. Notiamo inoltre che, essendo $Z \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$: essendo X *connesso* per ipotesi, necessariamente $f^{-1}(Z) = X$.

Osservazione. Dal teorema precedente segue che essere *connesso* è una proprietà topologica! Infatti, se vale per una qualunque funzione continua $f : X \longrightarrow Y$, allora varrà anche per omeomorfismi tra X e Y; in particolare, si avrà per suriettività che $f(X) = Y$ connesso.

Definizione 2.1.1. Un **arco** o **cammino** α da un punto x a un punto y in uno spazio topologico X è una funzione continua che parametrizza un *percorso* finito fra gli estremi x e y:

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X \quad \text{continua} : \alpha(0) = x, \ \alpha(1) = y \tag{2.2}$$

Definizione 2.1.2. Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** o **c.p.a.** o *path-connected* se per ogni coppia di punti in X esiste un arco che li collega:

$$\forall x, \ y \in X \ \exists \ \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \quad \text{continua} : \alpha(0) = x, \ \alpha(1) = y \tag{2.3}$$

Teorema 2.1.3. (Manetti, 4.7)
*X **c.p.a.** $\implies$ X connesso.*

Dimostrazione. Sia $X = A \cup B$, con $A, \ B$ aperti non vuoti. Vogliamo dimostrare che $A \cap B \neq \emptyset$. Essendo non vuoti, prendiamo $a \in A, \ b \in B$. In quanto X è **c.p.a.**, esiste il cammino (continuo) $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ tale che $\alpha(a) = a, \ \alpha(1) = b$.
Studiamo la controimmagine di α:

$$\alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(A \cup B) = [0, 1]$$
$$[0, 1] = \alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$$

$\alpha^{-1}(A), \ \alpha^{-1}(B)$ sono entrambi aperti e non vuoti in quanto controimmagini (continue) di aperti non vuoti ($0 \in \alpha^{-1}(A), \ 1 \in \alpha^{-1}(B)$).
Poiché $[0, 1]$ è connesso, allora le controimmagini trovate non sono disgiunte. Segue allora:

$$\exists t \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) \implies \alpha(t) \alpha\left(\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)\right) \subset \alpha\left(\alpha^{-1}(A)\right) \cap \alpha\left(\alpha^{-1}(B)\right) = A \cap B$$

Definizione 2.1.3. Dati due cammini in uno spazio X:

$$\alpha : [0,\ 1] \longrightarrow X \qquad \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y$$
$$\beta : [0,\ 1] \longrightarrow X \qquad \beta(0) = y,\ \beta(1) = z$$

Allora possiamo creare un cammino $\alpha * \beta$ con la **congiunzione di cammini**:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Lemma 2.1.2. Sia $A,\ B$ **c.p.a**, $A \cap B \neq \varnothing \implies A \cup B$ **c.p.a.**

Dimostrazione. Se $x, y \in A$ oppure $x,\ y \in B$ esiste per ipotesi un arco che li collega. Dobbiamo allora trovare un arco in $A \cup B$ da x a y $\forall x \in A, y \in B$. Preso $z \in A \cap B$, per ipotesi esistono due cammini ad esso:

$$\alpha : [0,\ 1] \longrightarrow A \qquad \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = z$$
$$\beta : [0,\ 1] \longrightarrow B \qquad \beta(0) = z,\ \beta(1) = z$$

Usando la *giunzione di cammini*, si ha:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Il cammino $\alpha * \beta : [0,\ 1] \longrightarrow A \cup B$ è quello richiesto.

Osservazione.

- Usando la giunzione di cammini, si ha che:

  $$X \text{ è } \textbf{c.p.a.} \iff \exists z \in X : \forall x \in X \quad \exists\ \alpha : [0,\ 1] \longrightarrow X \quad : \alpha(0) = z,\ \alpha(1) = x$$

  In altre parole, uno spazio è **c.p.a.** se e solo se esiste un punto per cui ogni altro punto è collegato tramite un arco.
- Per ogni arco α esiste l'arco inverso, percorso al contrario: $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$.

Definizione 2.1.4. In $\mathbb{R}^n$, un **segmento** $\overline{PQ}$ è la combinazione lineare tra i punti P e Q, parametrizzato come:

$$\overline{PQ} = \{P + tQ \mid t \in [0,\ 1]\} \tag{2.6}$$

Definizione 2.1.5. Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se per ogni coppia di punti esiste un segmento che li collega contenuto interamente in Y.

$$\forall P,\ Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \tag{2.7}$$

Definizione 2.1.6. Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è **stellato** per P se esiste un $P \in Y$ tale che per ogni altro punto esiste un segmento che li collega contenuto interamente in Y.

$$\exists P \in Y : \forall Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \tag{2.8}$$

Esempio.
- Gli intervalli aperti e semiaperti sono **c.p.a**, dunque sono *connessi*: l'arco α è banalmente il segmento pari all'intervallo aperto.
- Preso $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso*, qualunque segmento è anche per costruzione un arco: X è anche **c.p.a** e dunque *connesso*.
- $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *non* è *convesso* (per $(0,\ 1)$ e $(0,\ -1)$ non si hanno segmenti interni ad X) ma è **c.p.a.** (basta prendere un cammino che "giri attorno" all'origine) e dunque è *connesso*.
- Preso $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *stellato* per $P \in X$, qualunque segmento con P è anche per costruzione un arco: X è anche **c.p.a** per l'osservazione 2.3 e dunque connesso.
- Ogni insieme *convesso* è anche *stellato* per P, basta fissare un qualunque punto come nostro P. In generale, un insieme è convesso se e solo se è stellato per ogni suo punto.

Vediamo ora che conseguenze hanno questi teoremi in $\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea.

Teorema 2.1.4. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
1. I è un intervallo, ovvero I è *convesso*.
2. I è **c.p.a.**.
3. I è connesso.

Dimostrazione.
1) $\implies$ 2) Siccome I è convesso $\implies$ I stellato $\implies$ I **c.p.a.** $\implies$ I connesso.
2) $\implies$ 3) Vale in generale che **c.p.a.** $\implies$ connesso.
3) $\implies$ 1) Per contronominale mostriamo che I non intervallo $\implies$ I sconnesso. I non intervallo significa che

$$\exists a < b < c,\ a, c \in I,\ b \notin I$$

$$b \notin I \implies I = \left(\underbrace{I \cap (-\infty, b)}_{\ni a}\right) \cup \left(\underbrace{I \cap (b, +\infty)}_{\ni c}\right)$$

ovvero I è unione di aperti, non vuoti e disgiunti $\implies$ I sconnesso.

Osservazione.

- Come conseguenza immediata di questo teorema si ha il **teorema di esistenza degli zeri** per funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, infatti se l'immagine continua di un connesso è un connesso, per tali funzioni vale che l'immagine continua di un intervallo è un intervallo.
- Per $n \geq 1$ la sfera $S^n := \left\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ è **c.p.a.**, infatti $\forall x,y \in S^n$ si trova sempre un arco come intersezione di S^n e del piano H passante per il centro della sfera, x e y.

Vediamo ora un risultato per funzioni continue da S^n in $\mathbb{R}$

Teorema 2.1.5. Sia $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\exists x \in S^n : f(x) = f(-x)$. In particolare f non è iniettiva.

Dimostrazione. Costruiamo una funzione $g(x) = f(x) - f(-x)$, essa è continua perché somma di funzioni continue. Siccome S^n è connesso allora $g(S^n) \subseteq \mathbb{R}$ è connesso $\implies$ per il teorema precedente $g(S^n)$ è un intervallo.
Si considerino un punto $y \in S^n$ arbitrario e le sue immagini $g(y)$ e $g(-y)$: esse appartengono all'intervallo dell'immagine $g(S^n)$, quindi se ne può considerare il loro punto medio:

$$\frac{1}{2}[g(y) - g(-y)] = \frac{1}{2}[f(y) - f(-y) - f(y) + f(-y)] = 0$$
$$\implies \exists x \in S^n : g(x) = 0, \text{ ovvero } f(x) = f(-x)$$

Come conseguenza di questo teorema si ha che un aperto di $\mathbb{R}$ non sarà mai omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, vediamolo più precisamente.

Teorema 2.1.6. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Se I, U sono aperti allora I non è omeomorfo a U.

Dimostrazione. Si consideri un omeomorfismo $g : U \longrightarrow I$. Siccome $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto allora esiste una palla aperta di raggio ε contenuta in U, se ne considera il bordo $S^n \subseteq U$. Si considera dunque la restrizione $g_{|S^n} : S^n \longrightarrow I$, che per il teorema precedente non è iniettiva. Dunque g non è un omeomorfismo.

Osservazione. Il teorema appena visto è un caso particolare del TEOREMA DELL'INVARIANZA DELLA DIMENSIONE, che cita:
Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti. Se $U \cong V \implies n = m$. Equivalentemente $n \neq m \implies U \ncong V$

Teorema 2.1.7. Siano $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di uno spazio topologico X. Se ogni X_i è connesso e $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \neq \varnothing$ allora $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ è connesso.

Dimostrazione. Sia $Z \subseteq Y := \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ un aperto, chiuso non vuoto. Vogliamo dimostrare che $Z = X$, cosicché X risulti connesso. Basta l'inclusione $Y \subseteq Z$.
Si considera l'intersezione di Z e di un connesso, dunque essa sarà banale

$$X_i \cap Z = \begin{cases} \varnothing \\ X_i \end{cases}$$

Dimostriamo ora che non è vuota, infatti siccome Z non è vuoto ed è contenuto nell'unione ci sarà un connesso per cui l'intersezione non è vuota:

$$Z \neq \varnothing,\ Z \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i \implies \exists i_0 : X_{i_0} \cap Z \neq \varnothing$$
$$X_{i_0} \text{ è connesso } \implies X_{i_0} \cap Z = X_{i_0} \implies X_{i_0} \subseteq Z$$
$$\text{Siccome } \bigcap_{i\in I} X_i \neq \varnothing \implies \exists x \in \bigcap_{i\in I} X_i \implies x \in X_{i_0} \subseteq Z \implies x \in Z$$
$$\text{Siccome } x \in \bigcap_{i\in I} X_i e x \in Z \implies \forall i \in I,\ X_i \cap Z \neq \varnothing$$

Quindi per $\forall i,\ X_i \subseteq Z \implies Y \subseteq Z \implies Y = Z$, quindi Y è connesso perché l'unico aperto e chiuso non vuoto è banale (Y).

Teorema 2.1.8. X, Y sono spazi topologici connessi $\iff X \times Y$ è connesso.

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) Si sfrutta la continuità delle proiezioni e che l'immagine continua di un connesos è connessa:

$$p : X \times Y \longrightarrow X \text{ continua e suriettiva } \implies p(X) = X \text{ connesso}$$
$$q : X \times Y \longrightarrow Y \text{ continua e suriettiva } \implies q(Y) = Y \text{ connesso}$$

$\implies$) Si vuole sfruttare il teorema sull'unione di connessi, prestando attenzione che la loro intersezione non sia vuota, quindi si scrive il prodotto come unione di connessi già noti: $X \times Y = \bigcup\limits_{y\in Y} X \times \{y\}$, infatti $X \times \{y\} \cong X$ che per ipotesi è connesso , tuttavia $\bigcap\limits_{y\in Y} X \times \{y\} = \varnothing$!
Cerchiamo dunque di unire un insieme in modo tale che l'intersezione non sia vuota:

sia $x_0 \in X$ e $Y_{x_0} = \{x_0\} \times Y$ e poniamo $X_y = X \times \{y\}$ e si ha quanto voluto:

$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X_y \cup Y_{x_0} \text{ e } X_y \cap Y_{x_0} = (x_0, y)$$
$$\implies \bigcap_{y \in Y} \left(X_y \cup Y_{x_0} \right) \neq \varnothing$$

Dunque $X \times Y$ è unione di connessi la cui intersezione non è vuota, quindi per il teorema precedente è connesso.

Approfondiamo ora la differenza fra essere spazio connesso o **c.p.a.** mostrando esempi di un tipo ma non dell'altro. Prima però dimostreremo un teorema sulla caratterizzazione di un insieme denso che ci tornerà utile.

Teorema 2.1.9. Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme, allora:

$$A \text{ è denso } \iff \forall U \subseteq X \text{ aperto e } \; U \neq \varnothing, \;\; U \cap A \neq \varnothing$$

Dimostrazione. $\implies$) Se A è denso allora $\overline{A} = X$. Supponiamo che $\exists V$ aperto : $V \cap A = \varnothing$. Siccome V è aperto allora $X \setminus V$ è chiuso, inoltre $V \cap A = \varnothing$, quindi $A \subseteq X \setminus V$. Essendo A contenuto in un chiuso allora lo sarà anche la sua chiusura, siccome è il più piccolo chiuso che lo contiene:

$$\overline{A} = X \subseteq X \setminus V \implies V = \varnothing$$

Ne segue che l'unico aperto che non interseca A è l'insieme vuoto.
$\impliedby$) Consideriamo un chiuso $K \supseteq A$. Siccome è chiuso allora il suo complementare $X \setminus K$ è aperto. Per ipotesi dunque si ha che $V \cap A \neq \varnothing$ oppure $V = \varnothing$, passando al complementare si ottiene che:

$$A \subseteq K \implies X \setminus K \subseteq X \setminus A \implies V \subseteq X \setminus A \implies V \cap A = \varnothing \implies V = \varnothing \implies K = X \implies \overline{A} = X$$

L'ultima implicazione è dovuta al fatto che ogni chiuso che contiene A si è dimostrato essere solo X per cui esso sarà la sua chiusura.

Teorema 2.1.10. Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ connesso, allora

$$\forall W : \; Y \subseteq W \subseteq \overline{Y} \implies W \text{ connesso}$$

In particolare la chiusura di un connesso è connessa.

Dimostrazione. Per dimostrare che W è connesso si considera un suo sottoinsieme $Z \subseteq W$ aperto, chiuso e non vuoto e si mostra che è pari a W.

$$Z \subseteq W \text{ aperto } \implies \exists A \subseteq X \text{ aperto} : Z = W \cap A$$
$$Z \subseteq W \text{ chiuso } \implies \exists C \subseteq X \text{ chiuso} : Z = W \cap C$$

Si vuole sfruttare il fatto che Y è connesso:

$$Z \cap Y = A \cap W \cap Y \overset{!}{=} A \cap Y \text{ aperto in Y} Z \cap Y = C \cap W \cap Y \overset{!}{=} C \cap Y \text{ aperto in Y}$$

Dove il passaggio indicato con (!) è dovuto al fatto che $Y \subseteq W$. Per poter sfruttare la connessione di Y e dedurre che $Z \cap Y = Y$ dobbiamo prima provare che tale intersezione non è vuota e per farlo sfruttiamo il teorema precedente:

$$Y \text{ denso in W, infatti } \mathcal{cl}_W(Y) = \mathcal{cl}_X(Y) \cap W = \overline{Y} \cap W = W$$
$$Z \text{ aperto in } W \implies Z \cap Y \neq \varnothing \implies Z \cap Y = Y \implies Y \subseteq Z$$

Tuttavia Y è denso in W e Z è chiuso in W che contiene Y, quindi

$$\mathcal{cl}_W(Y) = W \subseteq Z \implies W = Z \implies W \text{ connesso}$$

Vediamo ora degli esempi di spazi connessi ma non **c.p.a.**.

Esempio. Seno del topologo
Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e $Y = \left\{\left(x,\ \frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$, detto anche **seno del topologo**. Esso è **c.p.a.** perché per connettere due punti basta percorrere la curva stessa del grafico. Quindi Y è connesso, dunque per teorema 27 $\overline{Y}$ è connesso. Tuttavia $\overline{Y}$ non è **c.p.a.** in quanto $\overline{Y} = Y \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \geq 1\}$ ed i punti sull'asse delle y e sulla curva Y non si possono connettere tramite un arco continuo.

Esempio. La pulce ed il pettine
Si consideri il "pettine" come il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea:

$$Y = \{(x,\ 0) \mid 0 \leq x \geq 1\} \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \geq 1} \{(r,\ y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

Presi due punti su Y si possono collegare fra loro scendendo alla base del pettine $[0,\ 1]$ e risalendo sui "denti" di ascissa razionale. Quindi Y è **c.p.a.**, allora Y è connesso e $\overline{Y} = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$.
Si consideri ora la "pulce", ovvero un punto P di ascissa irrazionale ed ordinata 1, ad esempio $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$. Sia $Z = Y \cap P$, per il teorema precedente segue che Z è connesso, infatti:

$$Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y} = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$$

Tuttavia Z non è **c.p.a.**, infatti preso un cammino $\alpha : [0,\ 1] \longrightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ con $\alpha(0) = (0, 0)$ e $\alpha(1) = P$, per continuità $y(t) \neq 0 \implies x(t) \in \mathbb{Q}$, che non è vero per P che ha ascissa irrazionale, dunque non esiste un cammino continuo che colleghi l'origine e P. dunque Z non è **c.p.a.**.

Osservazione. L'immagine continua di uno spazio **c.p.a.** è **c.p.a.**, ovvero dato X **c.p.a.**, $f : X \longrightarrow Y$ continua, allora $f(X)$ è **c.p.a.**
Dati $a, b \in X$ si vuole trovare un cammino fra $f(a)$ e $f(b)$ in $f(X)$. Si consideri la

composizione seguente fra il cammino α fra a e b con la funzione f stessa. Siccome ha come dominio $[0, 1]$ ed è continua essendo composizione di funzione continue è in effetti un cammino fra le due immagini:

$$f \circ \alpha : [0, 1] \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y$$

L'intuizione geometrica che ci ha portati alla definizione di connessione è stata "di quanti pezzi è fatto uno spazio?". Se uno spazio è connesso è fatto di un solo "pezzo", cerchiamo ora di definire cosa sono i "pezzi" e come sono fatti.

Definizione 2.1.7. Sia X uno spazio topologico e $C \subseteq X$. Si dice che C è una **componente connessa** se

- C è connesso.
- C è **massimale**, ovvero $C \subseteq A$, A connesso $\implies C = A$.

Scelto $x \in X$ si può definire la **componente connessa di un punto**, ovvero $C(x) = \bigcup \{C \mid C \text{connesso}, x \in C\}$

La componente connessa di un punto è effettivamente una componente connessa, infatti è connessa perché unione di connessi con intersezione non vuota (x stesso) e se $C(x) \subseteq A \implies x \in A \implies A \subseteq C(x) \implies A = C(x)$.
Vediamo ora qualche proprietà delle componenti connesse, in particolare che sono chiuse e formano una partizione.

Teorema 2.1.11. Sia X uno spazio topologico, allora:
1. le componenti connesse sono chiuse.
2. le componenti connesse formano una partizione di X.

Dimostrazione.
- I Sia C una componente connessa. Per ogni insieme vale che $C \subseteq \overline{C}$, ma C è connesso, quindi $\overline{C}$ è connesso. Siccome C è massimale allora $C = \overline{C}$, ovvero è chiuso.
- II Per dimostrare che le componenti connesse formano una partizione di X dobbiamo mostrare che X è unione disgiunta delle componenti connesse. Prima di tutto dimostriamo che sono un ricoprimento

$$\forall x \in X,\ x \in C(x) \implies X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Mostriamo ora che sono disgiunti prendendo due componenti connesse C e D ed analizzando il caso in cui la loro intersezione non è vuota, in particolare sfruttiamo la massimalità:

$$C \cap D \neq \varnothing \implies C \cup D \text{ connesso } \implies C = C \cup D = D$$

Esempio. Sia $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia Euclidea. La componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i punti, quindi i punti sono chiusi in $\mathbb{Q}$, il che è una riconferma dato che sappiamo che

$\mathbb{Q}$ è Hausdorff. Tuttavia non possono essere aperti altrimenti avremmo la topologia discreta!
Inoltre siccome $\mathbb{Q}$ ha più di una componente connessa significa che non è connesso! Invece $\mathbb{R}$ è connesso grazie all'assioma di completezza.

Osservazione. Dati due spazi omeomorfi si ha che hanno lo stesso numero di componenti connesse in quanto l'immagine continua di connessi è connessa. Quindi il **numero di componenti connesse** ci fornisce un criterio per determinare quando due spazi non sono omeomorfi!

2.2 COMPATTEZZA

Definizione 2.2.0. Sia X uno spazio topologico. Un **ricoprimento aperto** di X è una famiglia $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ di aperti di X tali che $X = \bigcup_{i\in I} A_i$.
Un **sottoricoprimento** $\mathscr{B}$ di un ricoprimento aperto $\mathscr{A}$ è una famiglia di aperti di $\mathscr{A}$ la cui unione è ancora tutto X.

Esempi. RICOPRIMENTI APERTI

- $\mathbb{R} = (-\infty,\ 2) \cup (0,\ +\infty)$ è un ricoprimento aperto
- $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n,\ -n)$ è un ricoprimento aperto
- $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{p \text{ primo}} (-p, p)$ è un ricoprimento aperto

Definizione 2.2.1. RICOPRIMENTO APERTO
Uno spazio topologico X si dice **compatto** se dato un qualsiasi ricoprimento aperto $\mathscr{A}$ si può sempre estrarre un sottoricoprimento *finito* $\mathscr{B}$.

L'importanza della definizione risiede nel fatto che non si chiede che esista un ricoprimento $\mathscr{A}$ finito, infatti basterebbe banalmente X stesso che è aperto, bensì che da $\mathscr{A}$ si possa sempre estrarre un numero finito di aperti che ricopra ancora X.

Esempi. SPAZI NON COMPATTI

- $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea: si consideri il ricoprimento aperto $\mathbb{R} = (-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$, esso non ammette sottoricoprimento finito.
- Gli intervalli aperti o semiaperti della forma $[a,\ b)$ hanno come ricoprimento aperto $\mathscr{A} = \left\{\left[a,\ b - \frac{1}{n}\right)\right\}$ che non ammette un sottoricoprimento finito.

Teorema 2.2.0. L'immagine continua di un compatto è un compatto, ovvero dati X, Y spazi toplogici, $f : X \longrightarrow Y$ continua, allora

$$X \text{ comaptto} \implies f(X) \text{ compatto}$$

Dimostrazione. Si considera un ricoprimento aperto di $f(X)$ e se ne vuole trovare un sottoricoprimento finito tramite le controimmagini, sfruttando così la compattezza di X.
Sia $\mathscr{A} = \{A_i\}$ ricomprimanto di $f(X)$, allora $\forall i \in I, A_i \subseteq Y$ aperto e $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq f(X)$.
Si considerino ora le controimmagini, che saranno aperte perché f è continua:
$\mathscr{B} = \left\{f^{-1}(A_i)\right\}$ è un ricoprimento aperto di X. Tuttavia X è compatto, quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito

$$X = f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n) \implies f(X) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n \implies f(X) \text{ compatto}$$

Da questo teorema segue che essere compatti è una proprietà topologica.

Teorema 2.2.1. L'intervallo $[0,\ 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$un ricoprimento aperto di $[0,\ 1]$ con A_i aperti in $\mathbb{R}$, quindi $[0,\ 1] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.
Sia $X = \{t \in \mathbb{R} \mid [0, t]$ è coperto da un numero finito di $A_i\}$. Mostriamo che non è vuoto

$$t = 0, [0,\ 0] = \{0\}\} \subseteq A_{i=0} \implies 0 \in X \implies X \neq \varnothing$$

Siccome X non è vuoto per la completezza dei reali ne posso considerare l'estremo superiore $b = \sup X$. Ci sono due casi: $b > 1$ e $b \leq 1$, dimostriamo che il primo è possibile e che il secondo è assurdo sfruttando le proprietà dell'estremo superiore:

- $b > 1 \implies \exists t \in X \colon 1 < t < b \implies [0,\ 1] \subseteq [0,\ t] \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$
- $b \leq 1 \implies b \in [0,\ 1] \implies \exists A_0 \in \mathscr{A} \colon b \in A_0$, visto che $\mathscr{A}$ è un ricoprimento aperto A_0 è aperto, dunque contiene b con tutto un suo intorno, ovvero $\exists \delta > 0 \colon B_\delta(b) = (b - \delta,\ b + \delta) \subseteq A_0$. Mostriamo ora che A_0 non copre solo $[0,\ b]$ ma va oltre, quindi si ottiene l'assurdo che $b \neq \sup X$. Sia dunque $0 < h < \delta$, allora

  $$[0, \pm h] = [0,\ t] \cup [t,\ b + h] \subseteq \underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_n}_{t \in X} \cup \underbrace{A_0}_{B_\delta(b) \subseteq A_0}$$

  Quindi $b + h$ è coperto da un numero finito di aperti, il che implica che $b + h \in X$, il che è assurdo perché $b = \sup X$.

Notiamo che questo teorema implica che un intervallo $[a,\ b] \subseteq \mathbb{R}$ è compatto, infatti è omeomorfo a $[0,\ 1]$ e la compattezza è una proprietà topologica.
Vediamo ora un esempio di spazio compatto che non abbia la topologia euclidea.

Esempio. Uno spazio X con la topologia cofinita è compatto.
Ricordiamo che gli aperti nella topologia cofinita sono i sottoinsiemi il cui complementare è finito, quindi un ricoprimento aperto sarà della forma:

$$\mathscr{A} = \{A_i\},\ A_0 = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Si considerino gli A_i che contengano i punti x_i che non sono in A_0, ovvero:

$$A_i \in \mathscr{A} : x_i \in A_i \implies X = A_0 \cup A_1 \cup A_n$$

Osservazione. Notiamo che se X è finito allora X è compatto per qualsiasi topologia, in quanto se la sua cardinalità è finita allora lo sarà anche quella del suo insieme delle parti, dai cui elementi scelgo gli aperti di una topologia. Dunque i casi interessanti di spazi compatti sono quelli il cui insieme di sostegno non è finito.
Inoltre se X ha la topologia discreta vale anche il viceversa ovvero

$$X \text{ top. discreta} \implies (X \text{ compatto} \iff X \text{ finito})$$

Sia $\mathscr{A} = \{A_x\}_{x \in X}$, $A_x := \{x\}$, che è aperto in quanto X ha la topologia discreta. Siccome X è compatto allora esiste un sottoricoprimento finito, ovvero un numero finito di aperti di $\mathscr{A}$ che lo ricopra, ossia $X = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \{x_n\} \implies X$ finito.

Teorema 2.2.2. Manetti 4.41.1
Un chiuso in un compatto è un compatto, ovvero se X è uno spazio topologico compatto, $C \subseteq X$ chiuso allora C è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X, sia $C \subseteq X$ chiuso, allora $A := X \setminus C$ è aperto in X.
Sia $\mathscr{A}' = \{A_i, A\}$ ricoprimento aperto di X. Siccome X è compatto esiste un suo sottoricoprimento finito

$$X = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A \implies C = X \setminus A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

ovvero C è compatto.

Osservazione. Manetti, 4.41.2 L'unione finita di compatti è un compatto, ovvero se $K_1, \ldots, K_n$ sono compatti allora $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ è compatto, infatti basta prendere l'unione dei sottoricoprimenti finiti.

Vediamo ora che relazione c'è fra le due proprietà topologiche di essere uno spazio T_2 e compatto.

Teorema 2.2.3. Manetti, 4.48
Un compatto in un Hausdorff è chiuso, ovvero se X è di Hausdorff, $K \subseteq X$ è compatto allora K è chiuso.

Dimostrazione. Per dimostrare che K è chiuso mostriamo che il suo complementare è aperto, ovvero che è intorno di ogni suo punto, in modo tale da poter usare agilmente l'essere T_2.

$$K \text{ chiuso} \iff X \setminus K \text{ aperto} \iff \exists A \subseteq X \setminus K \text{ aperto} : x_0 \in A$$
$$A \subseteq X \setminus K \iff A \cap K = \varnothing$$

Per poter sfruttare che X è T_2 scriviamo A come intorno di $x_=$ e K come intorno di y:

$$x_0 \in X \setminus K, y \in K \overset{!}{\implies} x \neq y \implies \exists U_y \in I(x_0), \exists V_y \in I(y) \colon U_y \cap V_y = \varnothing$$
$$\text{Sia } V = \bigcup_{y \in K} V_y \implies V \supseteq K \overset{!!}{\implies} V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$
$$\text{Sia } U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n} \in I(x_0)$$
$$\implies V_{y_i} \cap U_{y_i} = \varnothing \implies V \cap K = \varnothing \implies U \subseteq X \setminus K$$

dove (!) indica che X è T_2 e (!!) che K è compatto.

Teorema 2.2.4. Manetti, 4.42
Un sottospazio $K \subseteq \mathbb{R}$ è compatto $\iff$ K chiuso e limitato.

Dimostrazione. $\implies$) Siccome $\mathbb{R}$ è T_2 e K è compatto allora per il teorema precedente K è chiuso.
Per vedere che è limitato consideriamo un ricoprimento aperto $\mathscr{A} = \{(-n, n) \cap K\}_{n \in \mathbb{N}}$ di K. Siccome è compatto allora esiste un sottoricoprimento finito, ovvero:

$$K \subseteq (-n_1, n_1) \cup \cdots \cup (-n_m, n_m) \implies K \subseteq (-M, M), \ M := \max m_i$$

quindi K è limitato.
$\impliedby$) K è limitato, quindi $K \subseteq [-n, n]$, che è compatto e K è chiuso per ipotesi, dunque per il teorema 2.15 è compatto.

Osservazione. Da notare che il teorema precedente non afferma he gli unici compatti di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli chiusi e limitati, ma anche una loro unione finita potrebbe esserlo.

Teorema 2.2.5. Manetti, 4.43
Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con X compatto e $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Se f è continua allora ammette massimo e minimo.

Dimostrazione. f continua e X compatto $\implies$ $f(X)$ compatto, e per il teorema precedente ciò equivale al fatto che $f(X)$ è chiuso e limitato.

$$\left.\begin{array}{lcl} f(x) \text{ limitata} & \implies & \sup\{f(x)\} < +\infty \\ f(x) \text{ chiusa} & \implies & \sup\{f(x)\} = \max\{f(x)\} \end{array}\right\} \implies f(x) \text{ ammette massimo.}$$

Analogamente per il minimo.

Osservazione. Per poter parlare di massimo e minimo c'è bisogno di n ordinamento sul codominio, mentre il dominio X potrebbe anche non averne uno!

Vogliamo ora vedere come si comporta la compattezza rispetto al prodotto, prima però va dimostrato un lemma che ci tornerà utile nella dimostrazione del teorema.

Lemma 2.2.0. Tube lemma
Siano X, Y spazi topologici con Y compatto, $x_0 \in X$, $A \subseteq X \times Y$: A aperto e $\{x_0\} \times Y \subseteq A$. Allora $\exists U \subseteq X$ con $x_0 \in U$, aperto tale che $\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq A$

Dimostrazione. A aperto in $X \times Y \implies A = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$ aperti della base, quindi $\{U_i \times V_i\}$ è un ricoprimento aperto di $\{x_0\} \times Y \cong Y$ compatto, dunque esiste un sottoricoprimento finito $\{x_0\} \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \cdots \cup (U_n \times V_n)$. Se necessario si eliminano gli aperti che sono disgiunti da $\{x_0\} \times Y$ e poniamo $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$, allora

$$\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \cdots \cup (U_n \times V_n) \subseteq A$$

Teorema 2.2.6. Manetti, 4.49.2
X, Y compatti $\iff X \times Y$ è compatto.

Dimostrazione. $\impliedby)$ Si considerino le proiezioni, che sono funzioni continue. Essendo $X \times Y$ compatto allora le immagini delle proiezioni saranno compatte, ed essendo le proiezioni suriettive allora X, Y sono compatti.
$\implies)$ Sia $\mathscr{A} = \{A_i\}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$, cerchiamo un sottoricoprimento finito.
Per sfruttare la compattezza di Y notiamo che $Y \cong \{x\} \times Y \subseteq A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n} = A_x$, che possiamo pensare come sottoricoprimento "verticale" finito. Notiamo inoltre che gli A_{x_i} dipendono dalla $\{x\}$ scelta.
Per il Tube Lemma dimostrato sopra allora

$$\exists U_x \subseteq X \text{ aperto } : \{x\} \times Y \subseteq U_x \times Y \subseteq A_x = A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n}$$

Tuttavia X è compatto, dunque $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ unione finita, sfruttando le proiezioni si ottiene la tesi:

$$X \times Y = p^{-1}(X) = p^{-1}\left(U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}\right) = (U_{x_1} \times Y) \cup \cdots \cup (U_{x_n} \times Y) \subseteq$$
$$\subseteq \left(A_{x_1,1} \cup \cdots \cup A_{x_1,n_1}\right) \cup \cdots \cup \left(A_{x_m,1} \cup \cdots \cup A_{x_m,n_m}\right)$$

Sfruttiamo ora che il prodotto di compatti è compatto per generalizzare il teorema 2.17 allo spazio $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.7. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto $\iff K$ chiuso e limitato.

Dimostrazione.
$\implies)$ K è compatto in $\mathbb{R}^n$ che è un Hausdorff, quindi K è chiuso per il teorema 2.16. Per dimostrare che è limitato consideriamo un ricoprimento di palle aperte centrate

nell'origine e si sfrutta subito che K è compatto

$$K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(\mathbf{0}) \implies K \subseteq B_{n_1}(\mathbf{0}) \cup \cdots \cup B_{n_m}(\mathbf{0}) \subseteq B_M(\mathbf{0})$$

con $M = \max n_i$.
$\Longleftarrow$) K è limitato, quindi $K \subseteq [-a,\ a]^n$ che è compatto perché prodotto di compatti, ma K è anche chiuso, quindi per il teorema 2.15 è compatto.

In realtà vale un teorema più generale, che si dimostrerà poi nel corso di Istituzioni di Analisi.
Teorema: Sia X uno spazio metrico completo, allora $K \subseteq X$ compatto $\iff$ K chiuso e totalmente limitato, ovvero $\forall \varepsilon > 0,\ K$ è contenuto in un'unione finita di palle di raggio ε.
In $\mathbb{R}^n$ vale limitato $\iff$ totalmente limitato, ma ad esempio considerato lo spazio metrico

$$\mathscr{C}([0,\ 1]) := \left\{\ f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}\ \mid f \text{ continua} \right\},\quad \text{con } d(f,\ g) = \sup_{x\in[0,\ 1]} |f(x) - g(x)|$$

Una palla di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1 quale $B_1(\mathbf{0}) = \left\{\ f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}\ \mid f \text{ continua }, -1 \geq f(x) \leq 1 \right\}$ è chiusa e limitata, tuttavia in $\mathscr{C}([0,\ 1])$ non è compatta.

Teorema 2.2.8. Manetti 4. 52
Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua con X è compatto e Y T_2, allora f è chiusa.

Dimostrazione. Per dimostrare che f è chiusa consideriamo $C \subseteq X$ chiuso e mostriamo che $f(C)$ è chiuso sfruttando rispettivamente i teoremi 2.15, 2.13 e 2.16:

$$C \subseteq X \text{ chiuso in compatto} \implies C \text{ compatto} \implies f(C) \text{ compatto in } T_2 \implies f(C) \text{ chiuso}$$

In generale vale il teorema di Kuratowsi-Mròwka, che dice che Y è compatto se e solo se per qualsiasi spazio topologico X la proiezione $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ è chiusa, ne dimostreremo una versione più debole.

Teorema 2.2.9. Manetti, 4.49.1
Siano X, Y spazi topologici con Y compatto, allora la proiezione $p : X \times Y \longrightarrow X$ è chiusa.

Dimostrazione. Per dimostrare che p è chiusa mostriamo che preso un $C \subseteq X \times Y$ chiuso allora $p(C) \subseteq X$ è chiuso, ovvero che il suo complementare $X \setminus p(C)$ è intorno di ogni suo punto.
Se $p(C) = X$ allora è già chiuso, se invece $p(C) \neq X$ allora $\exists x_0 \in X \setminus p(C)$, dimostriamo che quest'ultimo insieme è intorno di x_0. Si consideri la fibra di x_0:

$$p^{-1}(\{x_0\}) = \{x_0\} \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus C = A$$

con A aperto perché complementare di un chiuso.

Si rientra dunque nelle ipotesi del Tube lemma e si ottiene che

$$\exists U \subseteq X \text{ aperto} : p^{-1}(U) = U \times Y \subseteq A \implies U \cap p(C) = \varnothing \implies x_0 \in U \subseteq X \setminus p(C)$$

CAPITOLO 3

Gruppi topologici

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

3.1 GRUPPI TOPOLOGICI

Conoscendo le strutture di gruppo e spazio topologico su un insieme vogliamo vedere come possono essere compatibili fra loro.

Definizione 3.1.0. Un insieme G si dice gruppo topologico se

- G è un gruppo
- G è uno spazio topologico
- Le operazioni sono continue, ovvero le mappe:

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,\ y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

  Sono funzioni continue.

Vediamo ora degli esempi noti di gruppi topologici.

Esempi.

- $(\mathbb{R}^n,\ +,\ \mathscr{E}_{ucl}),(\mathbb{C}^n,\ +,\ \mathscr{E}_{ucl})$
- $(\mathbb{R}^*,\ \bullet,\ \mathscr{E}_{ucl}),(\mathbb{R}^*,\ \bullet,\ \mathscr{E}_{ucl})$ con la topologia indotta di sottospazio
- $(M_{n,m}(\mathbb{R}),\ \bullet, \mathscr{E}_{ucl})$ con la topologia indotta di sottospazio di $\mathbb{R}^{n,m}$, ad esempio $[0,\ 1]$

Osservazione. I gruppi topologici $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sono aperti di $M_{n,n}$.
Infatti considerata la funzione determinante $\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ essa è continua in quanto per calcolare il determinante si opera solo con somme e prodotti. Si ha che

GL$(n,\mathbb{R})$ è il complementare dell'insieme delle matrici che hanno determinante nullo, il quale è un chiuso in quanto controimmagine di un chiuso quale $\{0\}$ di una funzione continua. Dunque tale gruppo topologico è aperto, analogamente per $\mathbb{C}$.

Vediamo ora altri sottoinsiemi di $M_{n,n}$:

- SL dato da $\{\det A = 1\}$ è il *gruppo speciale lineare*
- O determinato dall'equazione $A^t A = I$ è il *gruppo ortogonale*
- SO = O ∩ SL è il *gruppo speciale ortogonale*
- U determinato dall'equazione $A^{t*}\overline{A} = I$ è il *gruppo unitario*
- SU = U ∩ SL è il *gruppo speciale unitario*

Ci sono delle operazioni sulle matrici che sono continue:

- *moltiplicazione matriciale*: continua perché definita tramite somme e prodotti di elementi delle matrici
- *inversa*: è una funzione che ad una matrice A associa $\dfrac{1}{\det A}$ per prodotti e somme di elementi della matrice, dunque è continua

Osservazione. Per i gruppi topologici in generale vale la moltiplicazione destra e sinistra sono omeomorfismi:

$$\begin{aligned} L_h : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto hg \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} R_n : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto gh \end{aligned}$$

$$(L_h)^{-1} = L_{h^{-1}} \text{ e } (R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$$

Ne segue che un gruppo topologico è **omogeneo**, ovvero

$$\forall g,h \in G \; \exists \;\; \varphi : G \longrightarrow G \quad \text{omeomorfismo t.c.} \varphi(g) = h$$

infatti basta porre $\varphi = L_{hg^{-1}}$ oppure $\varphi = R_{g^{-1}h}$

Il seguente teorema ci permette di caratterizzare i gruppi topologici Hausdorff grazie alla chiusura dell'elemento neutro.

Teorema 3.1.0. Sia G un gruppo topologico, $e \in G$ il suo elemento neutro, si ha che

$$G\ T_2 \iff \{e\} \text{ chiuso}$$

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) $G\ T_2 \implies G\ T_1 \implies$ tutti i punti sono chiusi, in particolare anche $\{e\}$.
$\Longleftarrow$) Per dimostrare che $G\ T_2$ si utilizza la caratterizzazione con la diagonale chiusa, sfruttando l'omogeneità dei gruppi topologici:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh^{-1} \end{aligned} \quad , \quad (g,h) = (h,g) \iff g = h \iff \varphi((g,h)) = gh^{-1} = e$$

$$\implies \Delta_G = \varphi^{-1}(\{e\})$$

Per ipotesi $\{e\}$ è chiusa, quindi Δ_G è chiuso e dunque $G\ \ T_2$.

Osservazione. $GL(n,\mathbb{R})$ è sconnesso. Mostriamo che è unione di due aperti non vuoti disgiunti sfruttando la funzione determinante $\det : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, infatti essendo continua le controimmagini di aperti saranno aperti:

$$\left.\begin{array}{rcl} \det^{-1}((0,+\infty)) & = & GL^+(n,\mathbb{R}) \\ \det^{-1}((-\infty,0)) & = & GL^-(n,\mathbb{R}) \end{array}\right. \implies GL(n,\mathbb{R}) = GL^+(n,\mathbb{R}) \sqcup GL^-(n,\mathbb{R})$$

Dimostriamo un lemma che generalizza il teorema 2.8 e che ci sarà utile nella dimostrazione successiva sulla connessione di alcuni gruppi topologici.

Lemma 3.1.0. Manetti 4.18
Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua. Se f è suriettiva aperta o chiusa, Y è connesso e le fibre sono connesse, ovvero se $\forall y \in Y\ f^{-1}(y)$ è connesso, allora X è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia aperta e consideriamo $A_1 \neq \varnothing \neq A_2$ aperti (per f chiusa si considerano dei chiusi e si procede in modo analogo) t.c. $X = A_1 \cup A_2$. Per dimostrare che X è connesso mostriamo che $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ aperta} & \implies & f(A_1), f(A_2) \text{ aperti} \\ f \text{ suriettiva} & \implies & f(X) = Y \implies f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) = Y \\ Y \text{ connesso} & \implies & f(A_1) \cap f(A_2) \neq \varnothing \implies \exists y_0 \in f(A_1) \cap f(A_2) \implies \begin{cases} f^{-1}(y_0) \cap A_1 \neq \varnothing \\ f^{-1}(y_0) \cap A_2 \neq \varnothing \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{cases} \left(f^{-1}(y_0) \cap A_1\right) \cup \left(f^{-1}(y_0) \cap A_2\right) = f^{-1}(y_0) \\ \text{fibre connesse} \end{cases} \implies f^{-1}(y_0) \cap A_1 \cap A_2 \neq \varnothing \implies A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$$

Teorema 3.1.1. $\forall n \geq 1, GL^+(n,\mathbb{R})$ e $GL(n,\mathbb{C})$ sono connessi.

Dimostrazione. Si procede per induzione su n per $GL^+(n,\mathbb{R})$, il caso $GL(n,\mathbb{C})$ è analogo.

$n = 1$) $\begin{cases} GL^+(1,\mathbb{R}) = (0,+\infty) \\ GL(n,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus 0 \end{cases}$ connessi.

$n > 1$) Supponiamo che $GL^+(n-1,\mathbb{R})$ sia connesso e dimostriamo che lo è anche $GL(n,\mathbb{R})$. Cerchiamo dunque una funzione continua da $GL^+(n,\mathbb{R})$ a $GL(n-1,\mathbb{R})$ che soddisfi le ipotesi del lemma precedente. Pertanto si considera la funzione prima colonna $\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^{n,n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ A & \longmapsto & p(A) \end{array}$ che mappa la prima colonna di A. Siccome $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n-1}$ allora p è una proiezione, dunque per il punto 2 della proposizione 1.4 è aperta. Restringiamo ora p a $GL^+(n,\mathbb{R})$ nel modo seguente $p : GL^+(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ che è una funzione continua, suriettiva e aperta, inoltre $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ è connesso per $n > 1$. Calcoliamo ora le fibre e mostriamo che sono tutte omeomorfe fra loro e connesse, quindi prima ne troviamo una, mostriamo che è connessa poi dimostriamo che sono tutte omeomorfe. A questo scopo consideriamo il seguente vettore e la sua fibra

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \implies p^{-1}(y_0) = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

con $(*,\dots,*) \in \mathbb{R}^{n-1}$ arbitrario in quanto non influisce nel calcolo del determinante e con $A \in \mathrm{GL}^+(n-1,\mathbb{R})$, da cui segue che $p^{-1}(y_0) = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathrm{GL}^+(n-1,\mathbb{R})$, dunque $p^{-1}(y_0)$ è conness visto che i due fattori lo sono per ipotesi.
Mostriamo ora che tutte le fibre sono omeomorfe a $p^{-1}(y_0)$. Sia $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e sia $A \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ tale che $p(A) = y$, ovvero y è la prima colonna di A. In generale vale la relazione $p(AB) = Ap(B)$ e la moltiplicazione sinistra $\begin{aligned} L_A : \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \\ B &\longmapsto AB \end{aligned}$ è un omeomorfismo. Dimostriamo che vale $p^{-1}(y) = L_A\big(p^{-1}(y_0)\big) = Ap^{-1}(y_0)$, in modo tale da avere tutte le fibre omeomorfe fra loro:

$$\supseteq) \ B \in p^{-1}(y_0) \implies B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \implies p(AB) = Ap(B) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = p(A) = y$$

$$\subseteq) \ C \in p^{-1}(y) \implies C = \begin{pmatrix} y & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Poniamo } B = A^{-1}C \implies p(B) = p(A^{-1}C) = A^{-1}p(C) = A^{-1}y = A^{-1}p(A) = \\ = p(A^{-1}A) = p(I) = y_0$$

$$\text{Siccome } C = AB \implies B \in p^{-1}(y_0)$$

Quindi siccome tutte le fibre sono tutte omeomorfe ad una fibra connessa allora sono tutte connesse e valgono le ipotesi del lemma precedente, per cui $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ è connesso.

Corollario 3.1.0. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ sono connessi.

Dimostrazione. Siccome $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sono connessi, basta considerare la seguente funzione:

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{\det A} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{\det A} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siccome f è continua e suriettiva e $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ è connesso allora $f(\mathrm{GL}^+) = \mathrm{SL}$ è connesso.

Corollario 3.1.1. O non è connesso.

Dimostrazione. Siccome O è sottogruppo di GL e la connessione è una proprietà topologica allora O non è connesso. In particolare si può dividere in base a det $= +1$ e det $= -1$.

Teorema 3.1.2. $\mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono compatti e connessi.

Dimostrazione. Per dimostrare che sono *compatti* essendo sottospazi di $\mathbb{R}^{n\times n}$ per il teorema 2.20 basta dimostrare che sono chiusi e limitati. In particolare essendo definiti tramite equazioni che sono luoghi di zeri di polinomi in a_{ij} allora sono chiusi:

$$\mathrm{SO}(n) : \begin{cases} A^t A = I \\ \det A = 1 \end{cases}, \quad U(n) : A^t \overline{A} = I, \quad \mathrm{SU}(n) : \begin{cases} A^t \overline{A} = I \\ \det A = 1 \end{cases}$$

Siccome $\mathrm{SU}(n) \subseteq \mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{SO}(n)$ basta dimostrare che $\mathrm{SO}(n)$ è limitato:

$$A \in \mathrm{SO}(n) \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \forall i = 1, \ldots, n \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = n \implies \mathrm{SO}(n) \subseteq S_{\sqrt{n}} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$$

dove $S_{\sqrt{n}}$ è la sfera di raggio $\sqrt{n}$, dunque $\mathrm{SO}(n)$ è limitato. Ne segue che anche $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ lo sono, dunque sono tutti chiusi e limitati in $\mathbb{R}^{n\times n}$, quindi compatti.
Per dimostrare che sono *connessi* si procede analogamente al teorema precedente sfruttando il lemma che lo precede. Si consideri $p : \mathrm{SO}(n) \longrightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ funzione prima colonna, essa è continua, suriettiva e chiusa in quanto è un compatto (appena dimostrati) in un T_2, e le sue fibra sono connesse $p^{-1}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ con $A \in \mathrm{SO}(n-1)$, dunque per il lemma precedente $\mathrm{SO}(n)$ è connesso.

Osservazione. GL e SL *non* sono compatti perché non sono limitati, inoltre GL è aperto e non chiuso.

CAPITOLO 4

Topologia quoziente

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

4.1 TOPOLOGIA QUOZIENTE

Torniamo ora a parlare di costruzioni topologiche, in particolare ci domandiamo quale sia la topologia più adatta per un insieme quoziente. Ne diamo prima una definizione come topologia indotta da una funzione fra uno spazio topologico ed un insieme, poi vedremo altre definizioni equivalenti tramite una funzione fra spazi topologici e con insiemi quozienti.
Accenniamo fin da subito che la situazione è *duale* rispetto a quella dei sottospazi, analizzati nella sezione 1.5.

Definizione 4.1.0. Dato X uno spazio topologico, Y un *insieme* e $f : X \longrightarrow Y$ funzione suriettiva, la **topologia quoziente** su Y indotta da f è la topologia *più fine* che rende f continua.

Analizziamo ora chi sono i suoi aperti: $A \subseteq Y$ aperto $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$ aperto. Notiamo che l'implicazione $\Rightarrow$) è necessaria perchè f sia continua, mentre l'implicazione $\Leftarrow$) è quella che caratterizza la topologia quoziente, infatti se si considera un insieme $B \subseteq Y$ che non è aperto allora la sua controimmagine $f^{-1}(B) \subseteq X$ non sarà aperta, dunque la topologia su Y è la più fine.
Per verificare che un sottoinsieme sia aperto in Y con la topologia quoziente bisogna verificare che la sua controimmagine è aperta.

Vediamo ora un esempio che giustifica la terminologia "topologia quoziente".

Esempio. Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Posto $Y = X/{\sim}$ insieme quoziente e $\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto [x]_\sim \end{aligned}$ **proiezione al quoziente**, la topologia quoziente su Y è quella che rende la proiezione continua.

Ricordiamo... Il primo teorema fondamentale di isomorfismo per gli *insiemi*, altresì chiamato decomposizione canonica.

Data una qualsiasi funzione suriettiva $f : X \longrightarrow Y$ vi è la seguente relazione di equivalenza: $\forall x, y \in X,\ x \sim y \iff f(x) = f(y)$, inoltre $\exists!\ h : X/\sim \longrightarrow Y$ biunivoca tale che $f = h \circ \pi$, baste porre $h([x]) := f(x)$, in modo tale che il diagramma commuti. Mostriamo che è ben definita e biunivoca.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\exists! h"'] & \end{tikzcd}$$

$$[x] = [y] \iff x \sim t \iff f(x) = f(y) \iff h([x]) = h([y]) \implies h \text{ ben definita e iniettiva}$$
$$f \text{ suriettiva} \implies h \text{ suriettiva}$$

4.1.1 *Identificazione*

Tenendo a mente il concetto di immersione illustrato a pagina 15 illustriamo il concetto duale di identificazione.

Definizione 4.1.1. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ una funzione continua e suriettiva; f si dice **identificazione** se Y ha la topologia quoziente indotta da f.

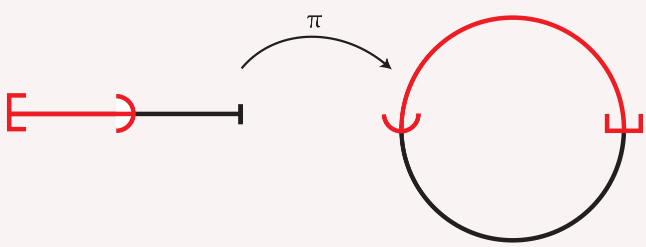
In generale è difficile determinare quando una data funzione è un'identificazione, quindi ne cerchiamo una condizione sufficiente.

Teorema 4.1.0. Manetti, 5.4
Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua, suriettiva e chiusa (o aperta), alora f è un'identificazione chiusa (o aperta).

Dimostrazione. Supponiamo che f sia aperta. Dimostrare che è un'identificazione è equivalente al mostrare che $A \subseteq Y$ aperto $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$ aperto. L'implicazione $\Rightarrow$) è garantita dalla continuità di f, per quanto riguarda l'implicazione opposta $\Leftarrow$) invece siccome f è suriettiva allora $f(f^{-1}(A)) = A$ e siccome f è aperta allora anche A è aperto.

Vediamo ora un esempio di identificazione chiusa e non aperta.

Esempio. Si consideri
$$\begin{aligned} f : [0,\ 2\pi] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos t,\ \sin t) \end{aligned}$$
. è una funzione continua, suriettiva e chiusa (compatto in T_2), dunque è un'identificazione chiusa.
Tuttavia f non è aperta, infatti dato $A = [0,\ 1) \subseteq [0,\ 2\pi]$ aperto, ma $f(A)$ non è aperto in S^1.



Osservazione. Gli omeomorfismi sono identificazioni chiuse e aperte.

Vediamo ora che relazione c'è fra le identificazioni ed i quozienti dati da relazioni di equivalenza.

Teorema 4.1.1. PROPRIETÀ UNIVERSALE DELLE IDENTIFICAZIONI, Manetti, 5.6
Dati X, Y, Z spazi topologici, g una qualsiasi funzione continua, f identificazione con le mappe come in figura, allora
$\exists! h$ continua : $g = h \circ f \iff (\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y))$
ovvero se e solo se g è costante sulle fibre di f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, dotted, "\exists! h"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Idealmente se f fosse invertibile definiremmo $h = g \circ f^{-1}$. Tuttavia l'invertibilità di f non è fra le ipotesi, quindi si sfrutta al meglio l'ipotesi della suriettività e si considera una controimmagine tramite f e se ne fa l'immagine tramite g, ovvero $y \in Y,\ h(y) := g(x)$ con $x \in f^{-1}(y)$. Con questa costruzione h è ben definita siccome g sarà costante sulle fibre di f.
Verifichiamo che h è continua tramite la definizione:

$$U \subseteq Z \text{ aperto },\ h^{-1}(U) \subseteq Y \iff f^{-1}(h^{-1}(U)) \subseteq X \text{ aperto} \iff g^{-1}(U) \subseteq X \text{ aperto}$$

Siccome g è continua allora lo è anche h.

Come conseguenza si ha che data f continua, $\sim$ relazione di equivalenza e $X/\sim$ spazio topologico con la topologia quoziente indotta dalla proiezione π si ha che $\exists g$ continua $\iff (x \sim y \implies f(x) = f(y))$, ovvero π è costante sulle fibre di f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

In particolare se $\sim$ è la relazione d'equivalenza indotta da f, ovvero se si è nelle ipotesi del primo teorema fondamentale di isomorfismo degli insiemi allora $(x \sim y \iff f(x) = f(y)) \implies \exists! \overline{f}$ biettiva, continua. Dunque vale

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \text{ omeomorfismo} \iff f \text{ identificazione} \tag{4.1}$$

Riprendiamo l'esempio precedente ed esaminiamolo in termini di spazio quoziente.

Esempio. $D^n/\sim \cong S^n$

$$\begin{aligned} f : D^1 = [0,\ 2\pi] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos t,\ \sin t) \end{aligned}\ ,\ f \text{ identificazione} \implies S^! \cong [0,\ 2\pi]/\sim, \text{ con} \sim \text{tale che}$$

sia costante sulle fibre di f: $s \sim t \iff \begin{cases} \cos s = \cos t \\ \sin s = \sin t \end{cases} \iff s = t$ oppure $s = 0,\ t = 2\pi$

Si può generalizzare in dimensione n con $\begin{aligned} f : D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \left(2x\sqrt{1 - \|x\|^2},\ 2\|x\|^2 - 1\right) \end{aligned}$ identificazione, dunque $D^n/\sim \cong S^n$ per la relazione $(x_1,\ y_1) \sim (x_2,\ y_2) \iff \begin{cases} (x_1,\ y_1) = (x_2,\ y_2) \\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1 \end{cases}$
ovvero ogni punto è in relazione con sé stesso e tutti i punti sul bordo sono identificati.

4.1.2 *Quozienti tipici*

Vedremo ora degli esempi di spazi quoziente usati frequentemente.

4.1.2.1 Contrazione di A ad un punto

Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$, $\forall x, y \in X$ $x \sim y \iff x = y$ oppure $x, y \in A$, ovvero ogni punto è in relazione con sé stesso e tutti i punti di A sono in relazione fra loro, dunque quozientando si "contraggono" ad un unico punto.

Esempio. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$
Cerchiamo ora di generalizzare l'esempio precedente. Ricordiamo che relazione c'è fra i dischi e le sfere:

$$\begin{aligned} D^n &= \text{ disco in } \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ S^{n-1} &= \text{ bordo di } D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

Considerando $\sim$ come la contrazione di S^{n-1} ad un punto, si ha che $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Attenzione! Anche se X è T_2 non è detto che X/A è T_2!
Se A non è chiuso allora X/A non è neanche T_1, infatti $\pi^{-1}([A]) = A$ non chiuso implica che $[A]$ non lo è, quindi per la caratterizzazione degli spazi T_1 (vedasi X/A non è T_1.
Tuttavia se X è T_2, $K \subseteq X$ è compatto allora X/K è T_2

4.1.2.2 Cono su uno spazio

Definizione 4.1.2. Sia X uno spazio topologico, si definisce **cilindro** su X lo spazio $X \times [0,\ 1]$.
Il **cono** su X invece è il quoziente $X\times[0,\ 1]/X\times\{1\}$ oppure $X\times[0,\ 1]/X\times\{0\}$.

Osservazione. Un cono è sempre c.p.a. rispetto al "vertice".

Esempio. Cono su $S^n \cong D^{n+1}$
$n = 0)$ $S^0 = \{-1,\ 1\} = X \rightsquigarrow X \times [0,\ 1] \rightsquigarrow X\times[0,\ 1]/X\times\{1\} \cong D^1$
$n = 1)$ $S^1 = X \rightsquigarrow X \times [0,\ 1] \rightsquigarrow X\times[0,\ 1]/X\times\{1\} \cong D^2$ $\begin{aligned} f : S^n \times [0,\ 1] &\longrightarrow D^{n+1} \\ (\mathbf{x},\ t) &\longmapsto t\mathbf{x} \end{aligned}$ è continua, suriettiva, chiusa (compatto in T_2), dunque f è identificazione.
Verifichiamo che la relazione di equivalenza indotta da f è proprio quella di contrazione:

$$(\mathbf{x},\ t) \sim (\mathbf{y},\ s) \iff f(\mathbf{x},\ t) = f(\mathbf{y},\ s) \iff t\mathbf{x} = s\mathbf{y} \iff \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{y}, t = s \\ t = s = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } t \neq 0 \implies \mathbf{x} = \frac{s}{t}\mathbf{y}, \text{ ma } \|\mathbf{x}\| = 1 \implies |\frac{s}{t}|\ \underbrace{\|\mathbf{y}\|}_{=1} = 1 \implies |\frac{s}{t}| = 1 \implies s = t \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

4.1.2.3 Retta con 2 origini

Analizziamo un particolare spazio topologico che spesso fungerà da controesempio, in particolare per le varietà topologiche (vedi sezione): la retta con 2 origini.
Sia $X = \mathbb{R} \times \{a, b\}$ Vogliamo definire una relazione di equivalenza che lasci "separate" solo le origini:

$$(x,\ \alpha) \sim (y,\ \beta) \iff \begin{cases} x = y, \alpha = \beta \\ x = y \neq 0 \end{cases}$$

Proprietà

1. $Y := {}^{X}\!/\!_{\sim}$ è c.p.a., infatti se i punti $(x,\ \alpha)$ e $(y,\ \beta)$ sono tali che $x \neq 0 \neq y$ basta prendere il segmento $\overline{xy}$ sulla retta $\mathbb{R} \times \{a\}$ e proiettarlo. Per unire $(0,\ a)$ e $(0,\ b)$ basta unire entrambi con un cammino al punto $(1,\ a) = (1,\ b)$
2. Y non è T_2: tutti gli intorni di $(0,\ a)$ si intersecano con tutti gli intorni di $(0,\ b)$
3. Y è localmente omeomorfo a $\mathbb{R}$, infatti ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un intervallo aperto di $\mathbb{R}$
4. $\exists K_1, K_2 \subseteq Y$ compatti t.c. $K_1 \cap K_2$ non è compatto: basta prendere $K_1 = \pi([-1,\ 1] \times \{a\})$ e $K_1 = \pi([-1,\ 1] \times \{a\})$ compatti in Y, ma $K_1 \cap K_2 = [-1,\ 0) \cup (0,\ 1]$ non è compatto in Y

4.1.3 *Quoziente T_2*

Cerchiamo ora delle condizioni per avere un quoziente Hausdorff.

Teorema 4.1.2. Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua e identificazione con X compatto e T_2, allora sono equivalenti:

1. Y è T_2
2. f chiusa
3. $K = \{(x_1,\ x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ chiuso in $X \times X$

Dimostrazione. $1 \implies 3$) Si vuole utilizzare la caratterizzazione di essere T_2 con la chiusura della diagonale Δ_Y, ovvero il teorema 1.5. Bisogna dunque vedere K come controimmagine continua di Δ_Y: si consideri $\begin{aligned} h := f \times f \ :\ X \times X &\longrightarrow Y \times Y \\ (x_1,\ x_2) &\longmapsto (f(x_1),\ f(x_2)) \end{aligned}$ continua perché lo è f. Inoltre $K = h^{-1}(\Delta_Y)$ e Y è $T_2 \implies K$ chiuso in quanto controimmagine di un chiuso tramite una funzione continua.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] & & & Y \\
& X \times X \arrow[ul, two heads] \arrow[dl, two heads] \arrow[r, dotted, "h=f\times f"] & Y \times Y \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
X \arrow[rrr, "f"] & & & Y
\end{tikzcd}$$

$3 \implies 2$) Per dimostrare che f è chiusa bisogna far vedere che $\forall C \subseteq X, C$ chiuso $\implies f(C) \subseteq Y$ chiuso, ma f è identificazione $\iff f^{-1}(f(C)) \subseteq X$ chiuso. Notiamo che

$f^{-1}(f(C)) = p_1(k \cap p_2^{-1}(C))$, infatti

$$p_2^{-1}(C) = X \times C \implies K \cap p_2^{-1}(C) = \{(x_1,\ x_2) \in X \times X \mid f(x_2) \in C\}$$
$$p_2 \text{ continua e } C \text{ chiuso } \implies p_2^{-1}(C) \text{ chiuso}$$
$$K \text{ chiuso } \implies p_2^{-1}(C) \cap K \text{ chiuso}$$
$$X \text{ compatto e } T_2 \implies p_1 \text{ chiuso} \implies p_1\left(K \cap p_2^{-1}(C)\right) \text{ chiuso}$$

$2 \implies 1)$ Serve il teorema di Wallace, pertanto non affronteremo la dimostrazione.

CAPITOLO 5

Azioni di gruppo

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

5.1 Azione di un gruppo su un insieme

Definizione 5.1.0. Sia G un gruppo e X un insieme. Si definisce il *gruppo simmetrico* sull'insieme X come $S(X) := \{ f : X \longrightarrow X \mid f \text{ biunivoca}\}$. Un'*azione* di G su X è

- $\Phi : G \longrightarrow S(X)$ morfismo di gruppi, ovvero $\Phi(g.h) = \varphi(g)\Phi(h)$
- $\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$ t.c. $e.x = x, \forall x \in X$ e $g.(h.x) = (gh).x$

Se ho Φ definisco $\varphi(g, x) = \underbrace{\Phi(g)}_{\in S(X)}(x)$.

Se ho φ definsco $\begin{aligned} \Phi(g) : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \varphi(g, x) \end{aligned}$

Definizione 5.1.1. Su X definiamo una relazione che dimostreremo essere di equivalenza: $x \sim y \iff \exists g \in G \colon y = g.x$

Dimostrimo che è una relazione di equivalenza:

- riflessiva: $x = e.x$
- simmetrica: $y = g.x \implies x = g^{-1}.y$
- transitiva: $y = g.x,\ z = h.y \implies z = (hg).x$

Definizione 5.1.2. Le classi di equivalenza date da questa relazione sono dette *orbite*

$$[x] = G.x = \{y \in X \mid \exists y \colon y = g.x\} = \{g.x \mid g \in G\}$$

L'insieme quoziente detto *spazio delle orbite* si scrive come X/G

Vediamo ora un esempio di azione e di orbite.

Esempio. 1. $X = \mathbb{R}^n, G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\varphi(A, \mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ è la moltiplicazione matrice per vettore.
Analizziamo le orbite: $G.\mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$, ovvero il vettore nullo è un'orbita. Siano ora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{w}$. Esiste $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$: $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$? Sì, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, G.\mathbf{v} = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Quindi $\mathbb{R}^n/\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{a, b\}$ con $a = [\mathbf{0}]$ e $b = [\mathbf{v}], \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

5.2 Stabilizzatore di un elemento

Definizione 5.2.0. Lo **stabilizzatore di un elemento** è l'insieme degli elementi di G che fissano x:

$$H_x := \{g \in G \mid g.x = x\} \tag{5.1}$$

H_x è un *sottogruppo di isotropia* di x. Inoltre, se H_x è banale, allora l'azione è **libera**.

Dimostrazione. H_x è chiuso rispetto all'azione:
- $1_G \in H_x$ per definizione dell'azione g. ($1_G.x = x \; \forall x$).
- $\forall g, h \in H_x$, allora $(gh).x = g.(h.x) = g.x = x$.

Osservazione. L'insieme G/H_x dei laterali sinistri di H_x in G è in corrispondenza biunivoca con l'*orbita* $O(x)$. Inoltre, se G è finito, la cardinalità dell'orbita è pari all'indice di H_x in G.

Dimostrazione. Sia data:

$$\begin{aligned} \alpha : G/H_x &\longrightarrow O(x) \\ g.H_x &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

Mostriamo che α è ben definita e biunivoca.
1. *Ben definizione*: se $g.H_x = \tilde{g}.H_x$ allora $g^{-1}\tilde{g} = h \in H_x \implies \tilde{g} = gh \in H_x$. Si ha:
$$\alpha(\tilde{g}.H_x) = \tilde{g}.x = (gh).x = g.(h.x) = g.x = \alpha(g.H_x)$$
Poiché $g.H_x = \tilde{g}.H_x \implies g.x = \tilde{g}.x$ la funzione è ben definita.
2. *Iniettività*:
$$\begin{aligned} \alpha(g_1.H_x) = \alpha(g_2.H_x) &\implies g_1.x = g_2.x \implies g_2^{-1}.(g_1.x) = g_2^{-1}.(g_2.x) \\ &\implies \left(g_2^{-1}.g_1\right).x = 1_G.x = x \end{aligned}$$
Ne segue che $\left(g_2^{-1}g_1\right) \in H_x \implies g_2^{-1}g_1 = h \in H_x \implies g_1.H_x = g_2.H_x$.
3. *Suriettività*: se $y \in O(x)$, per definizione $\exists g \in G : y = g.x$, cioè $y = \alpha(g.H_x)$. Ne consegue, dal teorema di Lagrange, che $|O(x)| = [G : H_x] = \frac{|G|}{|H_x|}$.

Osservazione. Punti nella stessa orbita hanno stabilizzatori **coniugati**:

$$x_2 = g.x_1 \implies H_{x_2} = g.H_{x_1}.g^{-1} \tag{5.2}$$

Dimostrazione. $\subseteq$) Sia $h \in H_{x_2}$. Si ha:

$$h.x_2 = x_2 \implies h.(g.x_1) = g.x_1 \implies \left(g^{-1}hg\right).x_1 = x_1$$

Segue che $\forall h \in H_{x_2}$ $g^{-1}hg \in H_{x_1}$, ma allora $h = g\left(g^{-1}h^{-1}g\right)g^{-1} \in g.H_{x_1}.g^{-1}$. Pertanto per l'arbitrarietà di h si ha $H_{x_2} \subseteq g.H_{x_1}.g^{-1}$

$\supseteq$) Sia $h \in H_{x_1}$ e consideriamo ghg^{-1}. Se moltiplico (con l'azione .) per x_2:

$$\left(ghg^{-1}\right).x_2 = \left(ghg^{-1}\right).g.x_1 = (gh).\left(g^{-1}g\right).x_1 = (gh).x_1 = g.(h).x_1 = g.x_1 = x_2$$

Pertanto $\forall h \in H_{x_1}$ $\left(ghg^{-1}\right).x_2 = x_2$ e per l'arbitrarietà di h si ha $g.H_{x_1}.g^{-1} \subseteq H_{x_2}$

5.3 AZIONE PER OMEOMORFISMI

Definizione 5.3.0. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Diciamo che G **agisce per omeomorfismi** se $\forall g \in G$ l'applicazione:

$$\begin{aligned} \theta_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g.x \end{aligned} \tag{5.3}$$

è un *omeomorfismo*.
Questo è equivalente a chiedere che l'azione sia data da un *omomorfismo* di gruppi:

$$\Phi : G \longrightarrow \{\text{omeomorfismi } X \to X\} \leq S(x) \tag{5.4}$$

Esercizio. G agisce per omeomorfismi se e solo se θ_g è continua $\forall g \in G$.

Dimostrazione. ...

Proposizione 5.3.0.

1. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X per omeomorfismo. Sia π la proiezione dall'insieme allo spazio delle orbite X/G:

$$\pi : X \longrightarrow X/G \tag{5.5}$$

Allora π è aperta e, se G è finito, π è anche chiusa.
2. Sia X di **Hausdorff** e G gruppo finito che agisce su X per omeomorfismi. Allora X/G è di Hausdorff.

Dimostrazione.

I Sia $A \subseteq X$ un aperto. Vogliamo dimostrare che $\pi(A)$ è aperto in X/G. Un aperto della topologia quoziente è tale se la controimmagine dell'aperto nel quoziente è un aperto: si deve allora dimostrare che $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto in X.
Ogni elemento di A è contenuto in un orbita, dunque $\pi(A)$ contiene le orbite degli $x \in A$; la controimmagine $\pi^{-1}(\pi(A))$ risulta dunque pari all'unione di *tutte* le orbite in X che intersecano l'insieme A:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g.A$$

Ma allora $g.A = \{g.x \mid x \in A\}$ è un aperto $\forall g \in G$ poiché un omeomorfismo porta aperti in aperti; l'unione di aperti è aperta, dunque $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto in X cioè $\pi(A)$ è aperto in X/G.
Preso C chiuso, dobbiamo allo stesso modo dimostrare $\pi(C)$ chiuso in X/G, cioè $\pi^{-1}(\pi(C))$ chiuso in X. Usando lo stesso ragionamento, otteniamo che:

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g.C$$

Con $g.C = \{g.x \mid x \in C\}$ chiuso per omeomorfismo. In particolare, essendo G finito, segue che l'unione dei $g.C$ è finita e dunque anch'essa è un chiuso. Segue dunque $\pi^{-1}(\pi(C))$ chiuso in X e $\pi(C)$ chiuso in X/G.

II Siano $p,\ q \in X/G$ distinti. Vogliamo dimostrare che esistono intorni di p e q disgiunti.
Siano $x,\ y \in X$ tali che $\pi(x) = p$ e $\pi(y) = q$ e consideriamo il gruppo finito $G = \{g_1 = 1_G,\ g_2,\ \dots,\ g_n\}$. Le orbite di x e y sono diverse: se così non fosse, si avrebbe $\pi(x) = \pi(y)$ e cioè $p = q$, il che è assurdo! Allora:

$$g_i.x \neq g_y.y \quad \forall i,\ j$$

Definiti gli (intorni) aperti $U \in I(x)$ e $V \in I(x)$ disgiunti (in quanto X di **Hausdorff**), possiamo considerare gli altri (intorni) aperti disgiunti $g_i.U \in I(g_i.x)$, $g_i.V \in I(g_i.y)$.
Allora:

$$\widetilde{U} := \bigcup_i g_i.U \qquad \widetilde{V} := \bigcup_i g_i.V \tag{5.6}$$

Sono entrambi aperti. Vogliamo costruire $U \in I(x)$ e $V \in I(x)$ in modo che siano (intorni) aperti disgiunti tali che, costruiti come sopra $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, si abbia $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \varnothing$. Così, passando al quoziente con π, si otterranno degli intorni $\pi\left(\widetilde{U}\right)$ di p e $\pi\left(\widetilde{V}\right)$ di q che soddisfano $\pi\left(\widetilde{U}\right) \cap \pi\left(\widetilde{V}\right) = \varnothing$.

- Costruiamo U e V: $\forall i$ sappiamo che $x \neq g_i.y$ in X (in quanto le orbite di x e y sono distinte. In quanto X è di **Hausdorff**, si ha che $\forall i\ \exists U_i,\ V_i$ (intorni) aperti disgiunti tali che $x \in U_i$ e $g_i.y \in V_i$. Notiamo che $y \in g_i^{-1}.V_i$; allora definiamo

$$U := \bigcap_i^n U_i \in I(x) \qquad V := \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}.V_i \in I(y)$$

- Ricaviamo $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$: $\forall i$ (e quindi per ogni elemento di G) abbiamo:

$$U \cap (g_i . V) \subseteq U_i \left(g_i . g_i^{-1} . V_i\right) = U_i \cap V_i = \varnothing \implies U \cap (g_i . V) = \varnothing$$

Allora $\forall i,\ j$ abbiamo:

$$(g_i . U) \cap \left(g_j . V\right) = (g_i . U) \cap \left(g_i g_i^{-1} g_j . V\right) = g_i . \left(U \cap \left(g_i^{-1} g_j\right) . V\right)$$

Ma $g_i^{-1} g_j \in G$, dunque $U \cap \left(g_i^{-1} g_j\right) . V = \varnothing$. Segue che:

$$(g_i . U) \cap \left(g_j . V\right) = \varnothing \implies \left(\bigcup_i g_i . U\right) \cap \left(\bigcup_i g_i . V\right) = \varnothing \implies \widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \varnothing$$

Esempio. $(\mathbb{Z},\ +)$ agisce in $\mathbb{R}$ per **traslazione**:

$$m . x = x + m \tag{5.7}$$

Se mettiamo ad $\mathbb{R}$ la topologia Euclidea, allora l'azione è per omeomorfismi, dato che fissato $m \in \mathbb{Z}$: $\begin{aligned} \theta_m : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + m \end{aligned}$ è continua.

- *Orbite*: $O(x) = \{x + m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ rappresenta tutti i numeri che hanno mantissa uguale (ad esempio, preso $x = 1.5$, nella sua orbita abbiamo $1.5,\ 2.5,\ -1.5,\ 25.5,\ \ldots$).
- *Stabilizzatore*: $H_x = \{m \in Z \mid x + m = x\} = \{0\}$ è banale, dunque l'azione è libera.
- *Spazio delle orbite*: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è insiemisticamente in corrispondenza biunivoca con $[0,\ 1)$, in particolare un sistema di rappresentanti di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sono le orbite al variare di $x \in [0, 1)$. Inoltre, lo spazio delle orbite è compatto essendo immagine continua di un compatto ($\pi([0,\ 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Si può dimostrare che è omeomorfo a S^1.

Dimostrazione. Consideriamo $\begin{aligned} f : R &\longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$.

- f è continua.
- f è suriettiva.
- $f(t_1) = f(t_2) \iff t_1 - t_2 \in \mathbb{Z} \iff t_1,\ t_2$ nella stessa orbita $\iff \pi(t_1) = \pi(t_2)$

Allora la relazione di equivalenza indotta da f è quella dell'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$.

Inoltre, f induce $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$ continua per le proprietà della topologia quoziente e che rende commutativo il diagramma a lato. Infatti $\overline{f}$ è biunivoca in quanto suriettiva (lo è f) ed iniettiva (per conseguenza del sistema di rappresentanti che si ha su $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[ur, dotted, "\exists \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre, essendo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compatto ed S^1 di **Hausdorff**, $\overline{f}$ è chiusa e dunque $\overline{f}$ è l'*omeomorfismo* cercato. Per questo motivo, si ha anche che f è un'*identificazione* aperta.

Digressione. Si può sempre vedere $\mathbb{R}^2$ come lo spazio dei complessi $\mathbb{C}$. Allora $S^1 \in$

$\mathbb{C} \implies S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$. La funzione di prima si può anche riscrivere come:

$$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \leftrightarrow \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t) \leftrightarrow e^{2\pi i t} \tag{5.8}$$

Esempio. $G = GL(n, \mathbb{R})$ agisce su $\mathbb{R}^n$ con l'azione di moltiplicazione matrice per vettore:

$$A.\underline{v} = A\underline{v} \tag{5.9}$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato $A \in G$: $\begin{aligned} \theta_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \underline{v} &\longmapsto A\underline{v} \end{aligned}$ è continua.

- *Orbite*: definite $O(\underline{v}) = \{A\underline{v} \mid A \in G\}$ ci sono solo due orbite, $[\underline{0}]$ e $[\underline{v}]$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$, dato che ogni vettore può essere scritto come prodotto di un vettore per un'opportuna matrice di cambiamento di base.
- *Spazio delle orbite*: $\mathbb{R}^n/G = \{[\underline{0}], [\underline{v}]\}$. Considerando la proiezione al quoziente $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/G$, si ha che $\pi^{-1}([\underline{v}]) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, che è un aperto ma *non* è un chiuso. Per definizione di aperto della topologia quoziente $\{[\underline{v}]\}$ è aperto ma non chiuso in $\mathbb{R}^n/G$, dunque non tutti i punti nello spazio delle orbite son chiusi. Segue che $\mathbb{R}^n/G$ non è **T1** e tanto meno è di **Hausdorff**.

Esempio. $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, inteso come gruppo moltiplicativo, agisce su $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con l'azione di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda.\underline{x} = \lambda\underline{x} \tag{5.10}$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato $\lambda \in G$: $\begin{aligned} \theta_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \underline{x} &\longmapsto \lambda\underline{x} \end{aligned}$

è continua.

- *Orbite*: $O(\underline{x}) = \{\lambda\underline{x} \mid \lambda \in G\}$ rappresentano tutte le rette vettoriali passanti per l'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$ a cui son state tolte l'origine.
- *Spazio delle orbite*: $\frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{G} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è lo **spazio proiettivo reale**, spazio topologico rispetto alla topologia quoziente indotta dall'azione. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di **Hausdorff** e *compatto*.

Definizione 5.3.1. Lo **spazio proiettivo reale** $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (o $\mathbb{RP}^n$) di dimensione n è lo spazio topologico delle rette vettoriali passanti origine in $\mathbb{R}^{n+1}$, a cui son state tolte l'origine. È definito come lo spazio quoziente rispetto all'azione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{R}^*} \tag{5.11}$$

Proposizione 5.3.1. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di **Hausdorff**, *compatto* e **c.p.a.**.

Dimostrazione. I Dati $p,\ q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $p \neq q$ essi sono della forma $p = [\underline{x}]$ e $q = \left[\underline{y}\right]$. Allora:

$$[\underline{x}] \neq \left[\underline{y}\right] \mathscr{L}_0(\underline{x}) \neq \mathscr{L}_0\left(\underline{y}\right)$$

Con $\mathscr{L}_0(\underline{x}),\ \mathscr{L}_0\left(\underline{y}\right)$ le rette vettoriali descritte da $\underline{x}$ e $\underline{y}$.
Prendiamo gli (intorni) aperti disgiunti $U \setminus 0 \in I(\underline{x})$, $V \setminus 0 \in I\left(\underline{y}\right)$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Allora, passando al quoziente, $\pi(U \setminus 0)$ e $\pi(V \setminus 0)$ formano due fasci di rette a forma di "doppio cono infinito" con vertice nell'origine; questi due coni sono (intorni) aperti in quanto

$$\pi^{-1}(\pi(U \setminus 0)) = U \setminus 0 \qquad \pi^{-1}(\pi(V \setminus 0)) = V \setminus 0$$

Inoltre sono intorni disgiunti di p e q, dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di **Hausdorff**.

II Per dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto, mostreremo che $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dato che $S^n \subseteq R^{n+1} \setminus \{0\}$ è compatto.
Notiamo che, presa l'orbita di un vettore $\underline{v}$, si ha:

$$[\underline{v}] = \{\lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\} = \left\{ \underbrace{\lambda \left\|\underline{v}\right\|}_{=\mu \in \mathbb{R}^*} \underbrace{\frac{\underline{v}}{\left\|\underline{v}\right\|}}_{\in S^1} \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \right\} = \{\mu \underline{x} \mid \mu \in \mathbb{R}^*\} = [\underline{x}]$$

Dunque ogni orbita dello spazio proiettivo reale si può scrivere come l'orbita di un vettore appartenente alla sfera S^n. Segue che non solo π è suriettiva, ma anche $\pi_{|S^n}$ è suriettiva, cioè $\pi_{|S^n}(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; segue dunque che $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Dato che S^n è compatto e **c.p.a.**, segue che anche lo spazio proiettivo reale è compatto e **c.p.a.** (in quanto immagine continua tramite π di S^n).

CAPITOLO 6

Successioni

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

6.1 numerabilità

Definizione 6.1.0. Un insieme X è **numerabile** se è finito oppure esiste una biezione tra l'insieme X e i naturali $\mathbb{N}$.

Definizione 6.1.1. Uno spazio topologico X è **a base numerabile** se esiste una base $\mathscr{B}$ della topologia tale che $\mathscr{B}$ sia numerabile. Si dice anche che X soddisfa il **secondo assioma di numerabilità**.

Definizione 6.1.2. Uno spazio topologico X è *primo-numerabile* se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile. Si dice anche che X soddisfa il **primo assioma di numerabilità**.

Osservazione.

1. Il secondo assioma di numerabilità implica il primo.
2. Se X è finito, X soddisfa sempre i due assiomi.
3. Se X è spazio metrico, X è sempre *primo-numerabile*.
4. Se X è *a base numerabile*, ogni sottospazio Y di X è *a base numerabile*. In particolare Y è primo-numerabile.
5. Se X e Y sono *a base numerabile*, allora $X \times Y$ è *a base numerabile*. In particolare $X \times Y$ è primo-numerabile.
6. Non è vero che il quoziente di X spazio *a base numerabile* (o *primo-numerabile*) è sempre *a base numerabile* (o *primo-numerabile*).

Dimostrazione.

I Se X ha base numerabile $\mathscr{B}$ e $x \in X$, allora $\{A \in \mathscr{B} \mid x \in A\}$ è un sistema fondamentali di intorni di x ed è chiaramente numerabile.

II Ogni base e sistema fondamentale di intorni contiene necessariamente un numero finito di elementi.

III Preso $x \in X$, allora $\{B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni ed è numerabile.

IV Se $\mathscr{B}$ è una base numerabile per X, $\{A \cap Y \mid A \in \mathscr{B}\}$ è base numerabile per Y.

V Se $\mathscr{B}_X$ è una base numerabile per X e $\mathscr{B}_Y$ base numerabile per Y, allora $\{A \times B \mid A \in \mathscr{B}_X,\, B \in \mathscr{B}_Y\}$ è base di $X \times Y$ numerabile: il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili rimane numerabile.

VI La contrazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ad un punto, cioè il quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, non è primo-numerabile nè tanto meno a base numerabile, pur essendo $\mathbb{R}$ a base numerabile in quanto metrico[a].

[a] Nelle "Note aggiuntive", a pag. 185, si può trovare la dimostrazione di ciò.

Esempio. $\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea è *a base numerabile*. Presa infatti:

$$\mathscr{B} = \{(a,\, b) \mid a,\, b \in \mathbb{Q},\, a < b\}$$

- È numerabile (è definita con i razionali $\mathbb{Q}$, che sono numerabili)
- È una base perché, dati $x,\, y \in \mathbb{R}$, $x < y$:

$$(x,\, y) = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ x<a<b<y}} (a,\, b)$$

Proposizione 6.1.0. *Sia X a base numerabile.* Allora ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento numerabile.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A}$ un ricoprimento aperto di X, $\mathscr{B}$ una base numerabile per X e $x \in X$. Allora $\exists U_x \in \mathscr{A}$ tale che $x \in U_x$. Essendo $\mathscr{B}$ base, $\exists B_x \in \mathscr{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq U_x$. Abbiamo così determinato un sottoinsieme numerabile della base $\mathscr{B}$:

$$\widetilde{\mathscr{B}} := \{B_x \mid x \in X\}$$

Allora esiste in particolare $E \subseteq X$ numerabile tale che:

$$\widetilde{\mathscr{B}} := \{B_x \mid x \in E\}$$

Se consideriamo ora $\widetilde{\mathscr{A}} := \{U_x \mid x \in E\}$, notiamo che:

- $\widetilde{A} \subseteq A$.
- $\widetilde{A}$ è numerabile perché lo è E.
- $X = \bigcup_{B_x \in \widetilde{\mathscr{B}}} B_x = \bigcup_{x \in E} B_x \subseteq \bigcup_{x \in E} U_x$.

Segue che $\widetilde{\mathscr{A}}$ è un sottoricoprimento numerabile di A.

Definizione 6.1.3. Uno spazio topologico X si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme E *denso* e *numerabile*.

Esempi.

- Se X è numerabile, allora è separabile perché l'insieme stesso è un sottoinsieme numerabile e denso.
- $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è separabile perché si ha $E = \mathbb{Q}^n$ denso in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 6.1.0. Se X è *a base numerabile*, allora è *separabile*.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B}$ una base numerabile. Per ogni $U \in \mathscr{B}$ sia $x_U \in U$ un punto e sia:

$$E = \{x_U \mid U \in \mathscr{B}\}$$

- E è numerabile perché lo è $\mathscr{B}$: abbiamo preso un punto per ogni elemento della base numerabile.
- E è denso: se $A \subseteq X$ è aperto *non* vuoto, allora $\exists U \in \mathscr{B}$ tale che $x_u \in U \subseteq A \implies x_U \in A \implies E \cap A \neq \varnothing$.

Proposizione 6.1.1. Se X è spazio metrico, X è sempre primo-numerabile ed è:

$$\textit{a base numerabile} \iff \textit{separabile}$$

Dimostrazione.

$\implies$) Sempre vera per ogni spazio anche non metrico (lemma 6.1).

$\impliedby$) Sia $E \subseteq X$ sottoinsieme numerabile e denso e consideriamo:

$$\mathscr{B} = \{B_{1/n}(e) \mid e \in E,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Questo insieme è numerabile: mostriamo che sia una base. Per far ciò fissiamo $U \subseteq X$ aperto e prendiamo $x \in U$: vogliamo trovare un aperto di $\mathscr{B}$ contenuto in U contenente x.[a]

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $B_{1/n}(x) \subseteq$. Cerchiamo opportuni $e \in E,\ m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$x \in B_{1/m}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$$

Consideriamo la palla $B_{1/2n}(x)$. Siccome E è denso in X, $\exists e \in E \cap B_{1/2n}(x)$.
Prendiamo ora la balla $B_{1/2n}(e) \in \mathscr{B}$:

- *contiene* x perché se $e \in B_{1/2n}(x) \implies d(e,\ y) < \frac{1}{2n} \implies x \in B_{1/2n}(e)$
- $B_{1/2n}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$; infatti, preso $y \in B_{1/2n}(e)$ si ha:

$$d(x,\ y) \leq d(x,\ e) + d(e,\ y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$\implies y \in B_{1/n}(x) \subseteq U.$$

Segue la tesi.

[a] Gli elementi della base sono già aperti banalmente. Per l'arbitrarietà di x, troviamo un ricoprimento aperto di U costituito da aperti di $\mathscr{B}$ contenuto interamente in U, cioè $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Esempio. Si può vedere che $\mathbb{R}^n$ è base numerabile anche perché è uno spazio metrico ed è separabile.

Attenzione! Un insieme con una certa topologia può essere a base numerabile (o primo-numerabile), ma non necessariamente rispetto ad un altra!

Esempio. Retta di Sorgenfrey.
Consideriamo $X = \mathbb{R}$ con la topologia avente come base:

$$\mathscr{B} = \{[a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b\} \tag{6.1}$$

Mostriamo $\mathscr{B}$ è base per una topologia, è separabile, primo-numerabile ma *non* è a base numerabile.

- *Base per una topologia*: usiamo il teorema delle basi (Manetti, 3.7), pag. 8.
  I $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$ è ovvio.
  II Prendiamo $A = [a,\ b)$, $B = [c,\ d)$ e consideriamo:

  $$\forall x \in A \cap B = [\max\{a,\ b\},\ \min\{c,\ d\})$$

  Allora basta prendere $C = A \cap B \in \mathscr{B}$ per soddisfare $x \in C \subseteq A \cap B$.
- *Separabile*: $E = \mathbb{Z}$ è numerabile ed è denso perché vale sempre $[a,\ b) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$, dunque ogni aperto non vuoto interseca E; segue che X è separabile.
- *Primo-numerabile*: s $a \in \mathbb{R}$ allora $\left\{\left[a,\ a + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di a numerabile. Preso U intorno di a, $\exists b > a$ tale che $[a,\ b) \subseteq U$; inoltre, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a + \frac{1}{n} < b$, cioè:

  $$\left[a,\ a + \frac{1}{n}\right) \subseteq [a,\ b) \subseteq U$$

- *Non a base numerabile*: presa una base $\widetilde{\mathscr{B}}$ per X, mostriamo che non è numerabile. Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora:

  $$[x,\ \infty) = \bigcup_{y > x} [x,\ y)$$

  È aperto. In particolare, esiste un aperto dipendente dal punto x, cioè $U(x) = [x,\ b) \in \widetilde{\mathscr{B}}$ (per un certo $b > x$) per cui $x \in U(x) \subseteq [x,\ \infty)$.
  Notiamo che se $x \neq y$, allora $U(x) \neq U(y)$: preso $y > x$, segue che $x \notin [y,\ \infty) \supseteq U(y) \implies x \notin U(y) \implies U(x) \neq U(y)$. L'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \widetilde{\mathscr{B}} \\ x &\longmapsto U(x) \end{aligned} \tag{6.2}$$

è iniettiva, dunque $\widetilde{\mathscr{B}}$ non è in iniezione con i naturali e pertanto $\widetilde{\mathscr{B}}$ *non* è numerabile.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Primo numerabile} \arrow[dl, shift left, "\text{se X è metrico}"'] \\
\text{A base numerabile} \arrow[ur, shift left] \arrow[dr] & \\
 & \text{Separabile}
\end{tikzcd}$$

6.2 SUCCESSIONI

DEFINIZIONE 6.2.0. Una **successione** in uno spazio topologico X è una funzione: $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ che indichiamo con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}$.

DEFINIZIONE 6.2.1. Sia $\{a_n\}$ una successione in X. Diciamo che $\{a_n\}$ **converge** a $p \in X$ se $\forall U \in I(p)\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U,\ \forall n \geq n_0$.

OSSERVAZIONE. Se X è di **Hausdorff**, una successione convergente ha un **unico** limite.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\{a_n\}$ converga a p e q. Mostriamo che $p = q$.
Siano $U \in I(p)$ e $V \in I(q)$.

- Siccome $\{a_n\}$ converge a p, $\exists n_0$ tale che $a_n \in U \forall n \geq n_0$.
- Siccome $\{a_n\}$ converge a 1, $\exists n_1$ tale che $a_n \in V \forall n \geq n_1$.

$$\implies a_n \in U \cap V\ \forall n \geq \max_{n_0,\, n_1} \implies U \cap V \neq \varnothing \implies p = q$$

L'ultima implicazione deriva dal fatto che X è di **Hausdorff**. Infatti, se in **Hausdorff** $p \neq q \implies U \cap V = \varnothing$, vale anche la sua negazione: $U \cap V \neq \varnothing \implies p = q$.

DEFINIZIONE 6.2.2. Se X è di **Hausdorff** e $\{a_n\}$ è convergente, ha senso parlare del **limite** della successione:

$$p = \lim_{n\to+\infty} a_n \tag{6.3}$$

Se X *non* è di **Hausdorff**, la stessa successione può convergere a più punti, dunque non esiste il limite della successione.

ESEMPI.

- Se X ha la topologia banale $\mathcal{T} = \{X, \varnothing\}$, l'unico intorno di qualunque punto è X. Allora ogni successione $\{a_n\}$ in X converge sempre ad un qualunque punto p.
- Se X ha la topologia discreta, $\{a_n\}$ successione in X converge a $p \iff \exists n_0 : a_n = p,\ \forall n \geq n_0$, cioè se la successione è finitamente costante. Infatti, nella topologia discreta anche il singoletto $\{p\}$ è intorno di p, dunque eventualmente la successione avrà solo termini nel singoletto.

Osservazione. Se X spazio metrico:

$$a_n \text{ CONVERGE A } p \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \tag{6.4}$$

Dimostrazione.
$\implies$) $U = B_\varepsilon(p)$ è l'intorno di convergenza che soddisfa l'implicazione.
$\impliedby$) Sia $U \in I(p)$. Allora $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(p) \subseteq U$. Ma allora, dato che per le ipotesi $\exists n_0 : d(p, a_n) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$, cioè $a_n \in B_\varepsilon(p) \subseteq U \implies a_n \in U \forall n \geq n_0$.

6.2.1 *Punti di accumulazione*

Definizione 6.2.3. Un punto $p \in X$ è **punto di accumulazione per la successione** $\{a_n\}$ se:

$$\forall U \in I(p),\ \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \geq N : a_n \in U \tag{6.5}$$

Esercizio. Se X è spazio metrico, allora:

$$p \text{ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER } a_n \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \tag{6.6}$$

Definizione 6.2.4. Un punto $p \in X$ è **punto di accumulazione per il sottoinsieme** $B \subseteq X$ se:

$$\forall U \in I(p), \exists b \in B \colon b \in U \setminus \{p\} \tag{6.7}$$

L'insieme dei punti di accumulazione per il sottoinsieme B è chiamato **derivato** di B.

Esercizio. Data la successione $\{a_n\}$ in X e definito $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

- $p \in X$ punto di accumulazione per la successione non è mai punto di accumulazione per l'insieme A.
- $p \in X$ punto di accumulazione per l'insieme A in generale non è punto di accumulazione per la successione; se X è metrico allora vale l'implicazione

6.2.2 *Sottosuccessioni*

Definizione 6.2.5. Una **sottosuccessione** di $\{a_n\}$ è la composizione di $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ con un'applicazione *strettamente crescente* $\begin{array}{rl} k : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto k(n) \end{array}$. Si indica con $\left\{a_{k_n}\right\}$.

Lemma 6.2.0. ▲ Sia $\{a_n\}$ una successione su X e $p \in X$. Valgono le seguenti implicazioni:

$$1\ \{a_n\} \text{ converge a } p \tag{6.8}$$

$$\Downarrow$$

$$2\ \{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \tag{6.9}$$

$$\Downarrow \ (*)$$

$$(3)\ p \text{ è un punto di accumulazione per } \{a_n\} \tag{6.10}$$

$$\Downarrow \ (**)$$

$$(4)\ p \in \overline{A} \text{ dove } A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \tag{6.11}$$

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2) La sottosuccessione convergente è la successione stessa.
(2) $\implies$ (3) Sia $\left\{a_{k(n)}\right\}$ una sottosuccessione convergente a p e sia $U \in I(p)$.
Se $a_{k(n)}$ converge a p si ha che $\exists n_0 : a_{k(n)} \in U,\ \forall n \geq n_0$. Poichè $k(n)$ è strettamente crescente, $\exists n_1 : k(n) \geq N,\ \forall n \geq n_1$. Allora preso:

$$n = \max\{n_0,\ n_1\}$$

Abbiamo che $a_{k(n)} \in U,\ k(n) \geq N$.[a] Segue che p è punto di accumulazione per $\{a_n\}$.
(3) $\implies$ (4) $p \in \overline{A} \iff \forall U \in I(p)\ A \cap U \neq \varnothing$. Allora sia U intorno di p: voglia che $U \cap A \neq \varnothing$. Essendo p punto di accumulazione per $\{a_n\}$, $\exists n\ a_n \in U \implies U \cap A \neq \varnothing$.

[a] L'intorno U è arbitrario.

Lemma 6.2.1. Sia X *primo-numerabile*, $\{a_n\}$ successione in X e $p \in X$. Allora vale anche il viceversa di (*), cioè:

$$\{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \iff p \text{ è di accumulazione per } \{a_n\} \tag{6.12}$$

Dimostrazione. $\implies$) Vale per (*).
$\impliedby$) Sia $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sistema fondamentale di intorni di p numerabile per ipotesi (X primo-numerabile). Consideriamo i seguenti insiemi:

$$\widetilde{U}_m := U_1 \cap \ldots U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- $\widetilde{U}_m$ è intorno di p, in quanto intersezione *finita* di intorni di p.
- $\widetilde{U}_m = U_1 \cap \ldots U_m \supseteq U_1 \cap \ldots U_m \cap U_{m+1} = \widetilde{U}_{m+1}$.

Segue che $\left\{\widetilde{U}_m\right\}$ è ancora un sistema fondamentale di intorni (numerabile) di p, infatti, se V è intorno di p, $\exists m : V \supseteq U_m \supseteq \widetilde{U}_m$.
A meno di sostituire U_m con $\widetilde{U}_m$, possiamo supporre che $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \ldots$.
Costruiamo una sottosuccessione di $\{a_n\}$ convergente a p. Sicuramente:

- $\exists k(1) \in \mathbb{N} : a_{k(1)} \in U_1$.
- $\exists k(2) \geq k(1) + 1 : A_{k(2)} \in U_2$.

E così via: $\forall m\ \exists k(m) \geq k(m-1) + 1$ tale che $a_{k(m)} \in U_m$, ottenendo una sottosuccessione $\left\{a_{k(m)}\right\}$. Notiamo in particolare che:

☺ Se $m_2 \geq m_1$, allora $a_{k(m_2)} \in U_{m_2} \subseteq U_{m_1}$.

Mostriamo che $\left\{A_{k(n)}\right\}$ converge a p.
Sia V intorno di p. Dal sistema fondamentale di intorni $\exists m_0$ tale che $U_{m_0} \subseteq V$. Da ☺ si ha che $\forall m \geq m_0\ a_{k(m)} \in U_{m_0} \subseteq V$.

Proposizione 6.2.0. Caratterizzazione della chiusura in termini di successioni.
Sia X uno spazio topologico *primo-numerabile*. Sia $Y \subseteq X$ e $p \in X$. Sono equivalenti

- Esiste una successione in Y convergente a p.
- p è di accumulazione per una successione in Y.
- $p \in \overline{Y}$

Dimostrazione.
1 $\implies$ 2 Non è necessario che X sia primo-numerabile, è immediato dal lemma 6.2 ▲ (pag. 68).
2 $\implies$ 3 Non è necessario che X sia primo-numerabile. Se p di accumulazione per $\{a_n\}$ con $a_n \in y\ \forall n \implies A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$. Allora segue dal lemma 6.2 ▲ (pag. 68) che $p \in A = \overline{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{Y}$
3 $\implies$ 1 Sia $\{U_n\}$ un sistmea fondamentale di intorni di p tale che $U_n \supseteq U_{n+1}\ \forall n$. Allora:

$$p \in \overline{Y} \implies \forall n\ Y \cap U_n \neq \varnothing \implies \forall n\ \exists y_n \in Y \cap U_n$$

In modo analogo a ☺ (pag. 69), se $n_2 \geq n_1$, allora $y_{n_2} \in U_{n_2} \subseteq U_{n_1}$. Allora $\{y_n\}$ è una successione in Y, mostriamo che converge a p.
Sia V intorno di p. Dal sistema fondamentale di intorni $\exists n_0$ tale che $U_{n_0} \subseteq V$. Dal ragionamento analogo a ☺ si ha che $\forall n \geq n_0\ y_n \in U_{n_0} \subseteq V$.

6.3 Successioni e compatti

Proposizione 6.3.0. (Manetti, 4.46)
Sia X spazio topologico e sia $K_n \subseteq X\ \forall n \in \mathbb{N}$ un sottospazio chiuso, *compatto* e non vuoto. Supponiamo inoltre che:

$$K_n \supseteq K_n + 1\ \forall n \implies K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

Allora: $\bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \varnothing$.

Dimostrazione. Iniziamo in K_1. Consideriamo $A_n := K_1 \setminus K_n$:

- K_n chiuso in $X \implies K_n$ chiuso in K_1. Allora A_n completementare di un chiuso, dunque aperto in $K_1\ \forall m \geq 1$.
- $K_n \supseteq K_{n+1} \implies A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \geq 1$.

Sia allora $N \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = A_N = K_1 \setminus \underbrace{K_N}_{\neq\varnothing} \subsetneq K_1$$

Allora nessuna unione *finita* degli A_n ricopre K_1, cioè $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subsetneq K_1$, altrimenti $\{A_n\}$ sarebbe un ricoprimento aperto di K_1 che *non* ammette sottoricoprimento finito (assurdo, in quanto K_1 è *compatto*!).

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} K_1 \setminus K_n = K_1 \setminus \left(\bigcap_{n\geq 1} K_n\right) \subsetneq K_1 \implies \bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \varnothing$$

Lemma 6.3.0. In uno spazio topologico *compatto* X ogni successione in X ha punti di accumulazione.

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ successione in X; per definizione:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per } \{a_n\} \iff \forall U \in I(p),\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : a_n \in U$$

Per N fissato sia $A_N := \{a_n \mid n \geq N\} \subseteq X$. Allora:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per}$$
$$\{a_n\} \iff \forall U \in I(p),\ \forall N \in \mathbb{N}\ U \cap A_N \neq \varnothing \iff \forall N \in \mathbb{N},\ p \in \overline{A_N} := C_N$$

Dunque $\{$punti di accumulazione di $\{a_n\}\} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} C_N$ e:

$$\{a_n\} \text{ ha punti di accumulazione } \iff \bigcap_{N\in\mathbb{N}} C_N \neq \varnothing$$

- $A_B \neq \varnothing$ per definizione, dunque C_N è un chiuso non vuoto.
- X è compatto, C_N chiuso in X compatto $\implies C_N$ *compatto*.

Poiché $A_N = \{a_n \mid n \geq N\} \supseteq A_{N+1} = \{a_n \mid n \geq N+1\}$, si ha:

$$C_N = \overline{A_N} \subseteq \overline{A_{N+1}} = C_{N+1}$$

Abbiamo trovato una successione di compatti contenuto l'uno nel successivo. Allora per la proposizione 6.4 (pag. 70, (Manetti, 4.46)). si ha che $\bigcap_{n\geq 1} C_N \neq \varnothing$. Segue che esiste un punto di accumulazione per la successione.

6.3.1 *Compattezza per successioni*

Definizione 6.3.0. Sia X spazio topologico. X si dice **compatto per successioni** se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

Osservazione. Per il lemma 6.2 ▲ (pag. 68), se X è compatto per successioni allora ogni successione in X ha un punto di accumulazione.

Lemma 6.3.1. Sia X *primo-numerabile.* Allora:

1. X compatto per successioni $\iff$ Ogni successione in X ha un punto di accumulazione.
2. X compatto $\implies X$ compatto per successioni.

Dimostrazione.

I $\implies$) Vale per l'osservazione precedente.

$\impliedby$) Vale per il lemma 6.3, pag. 69: se ogni successione ha un punto di accumulazione in X primo numerabile, allora ogni sottosuccessione ammette una sottosuccessione convergente a p, cioè X è compatto per successioni.

II Se X è compatto, allora ogni successione in X ha dei punti di accumulazione e per il punto 1) segue che X è compatto per successioni.

Proposizione 6.3.1. Caratterizzazione della compattezza in termini di successioni Sia X uno spazio topologico a base numerabile. Allora sono equivalenti:

1. X compatto.
2. X compatto per successioni
3. Ogni successione in X ammette un punto di accumulazione.

Dimostrazione. Sappiamo già che 2) $\iff$ 3) e 1) $\implies$ 2) dal lemma precedente. Dobbiamo dimostrare 2) $\implies$ 1). Dimostriamo per contronominale ($\neg 1) \implies \neg 2)$): se X *non* è compatto, allora X non è compatto per successioni, cioè esiste una sottosuccessione in X che *non* ha alcuna sottosuccessione convergente.

- X *non* compatto $\implies \exists \widetilde{\mathscr{A}}$ ricoprimento aperto di X che *non* ha sottoricoprimenti finiti.
- X a *base numerabile* $\implies \exists \mathscr{A}$ sottoricoprimento di $\widetilde{\mathscr{A}}$ che sia numerabile.

Poiché ogni sottoricoprimento di $\mathscr{A}$ è anche un sottoricoprimento di $\widetilde{\mathscr{A}}$, significa che $\mathscr{A}$ *non* ha sottoricoprimenti finiti. Definiamo:

$$\mathscr{A} := \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Allora:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j \subsetneq X \implies \exists x_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Costruisco così una successione $\{x_n\}$ successione in X tale per cui:

$$☹ \; x_n \notin A_j \; \forall j \le n.$$

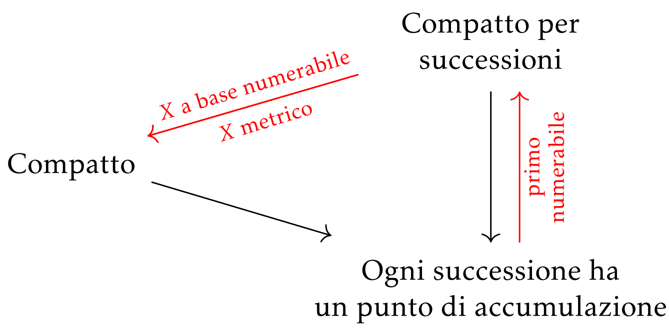
Mostriamo che $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti. Sia $\left\{x_{k(n)}\right\}$ una sottosuccessione arbitraria di $\{x_n\}$ e sia $p \in X$, mostriamo che essa non converga ad un qualunque p.

- $\mathscr{A}$ è un (sotto)ricoprimento di $X \implies \exists N : p \in A_N$
- Da ☹ (pag. 72) abbiamo che $x_n \notin A_N \; \forall n \ge N$ (dato che $x_n \notin A_j \; \forall j \le n$, in particolare in A_N per ogni $n \ge N$); si ha allora $x_{k(n)} \notin A_n \; \forall n : k(n) \ge N$.

Essendo $k(n)$ crescente, $\exists n_0 : k(n) \ge N \; \forall n \ge n_0$. Segue che se $n \ge n_0$ allora $x_k(n) \notin A_N$ Poiché A_N è intorno di p, segue che $\left\{x_{k(n)}\right\}$ non converge a p.

Teorema 6.3.0. Sia X spazio metrico. Allora:

$$X \text{ compatto} \iff X \text{ compatto per successioni} \tag{6.13}$$



6.4 SPAZI METRICI COMPLETI

Definizione 6.4.0. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $\{a_n\}$ si dice **di Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, a_m) < \varepsilon, \; \forall n, m \geq n_0 \tag{6.14}$$

Definizione 6.4.1. Uno spazio metrico (X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Osservazione.

1. Ogni successione *convergente* è di *Cauchy*.
2. Una successione di Cauchy è *convergente* se e solo se ha punti di accumulazione.
3. Una successione di Cauchy è *convergente* se ha una *sottosuccessione convergente*.
4. Se X è *compatto*, allora ogni successione di Cauchy è *convergente*.
5. Se X è spazio metrico *compatto*, allora X è spazio metrico *completo*; non è vero il viceversa.

Dimostrazione.

I Se $a_n \to p$ per $n \to +\infty$ significa che:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, p) < \varepsilon, \; \forall n \geq n_0$$

Considerati $n, m \geq n_0$ si ha:

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(p, a_n) < 2\varepsilon \tag{6.15}$$

Per l'arbitrarietà di ε vale la convergenza.

II $\Longrightarrow$) Sempre vera per 6.2 (pag. 68).

$\Longleftarrow$) Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy e sia p un punto di accumulazione. Sia $\varepsilon > 0$: dalla definizione di successione di Cauchy $\exists n_0$ tale per cui $d(a_n, a_m) <$

$\varepsilon\ \forall n,\ m \geq n_0$.
Essendo p di accumulazione, $\exists n_1 \geq n_0$ tale per cui $d\left(p,\ a_{n_1}\right) < \varepsilon$. Allora, se $n \geq n_0$ si ha:

$$d\left(a_n,\ p\right) \leq d\left(a_n,\ a_{n_1}\right) + d\left(a_{n_1},\ p\right) < 2\varepsilon$$

Dunque $\{a_n\}$ converge a p.

III Poiché X è metrico, X è primo-numerabile, dunque avere un punto di accumulazione è equivalente ad avere una sottosuccessione convergente.

IV Se X è compatto, ogni successione ha punti di accumulazione, in particolare quelle di Cauchy: per il punto 2) tutte le successioni di Cauchy risultano allora convergenti.

V Segue dal punto 4). Un controesempio del viceversa è R^n, dato che è completo ma non è compatto (si veda il teorema seguente).

Teorema 6.4.0. $\mathbb{R}^n$ in metrica euclidea è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ di Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Mostriamo che $\{a_n\}$ è eventualmente limitata[a]. Poiché la successione di Cauchy è definita per ogni ε, fissiamo $\varepsilon = 1$. Allora:

$$\exists n_0\ :\ \|a_n - a_m\| \leq 1\ \forall n,\ m \geq n_0$$

Sia $M := \max_{n_0,\ \ldots,\ n_0} \|a_n\|$. Se $n \geq n_0$ si ha:

$$\|a_n\| = \left\|a_n - a_{n_0} + a_{n_0}\right\| = \leq \left\|a_n - a_{n_0}\right\| + \left\|a_{n_0}\right\| \leq 1 + M$$

Questo significa che $\{a_n\} \subseteq \overline{B_{1+M}(0)}$. Questa palla chiusa è uno spazio metrico *indotto* in $\mathbb{R}^n$ e compatto, cioè è uno *spazio metrico completo*. Allora la successione di Cauchy, trovandosi in uno spazio metrico completo, converge in esso, e dunque converge anche in $\mathbb{R}^n$.

[a] Supponendo chiaramente che la successione sia ben definita, ci interessa solamente che la successione sia limitata dopo un n_0: prima di ciò ho un numero finito di termini $a_0,\ \ldots,\ a_{n_0} < \infty$ e posso chiaramente prendere una palla (chiusa) che li contenga, ad esempio di raggio $M + 1$ con M definito come nella dimostrazione.

Attenzione! La **completezza** *non* è una proprietà topologica! Per esempio, $\mathbb{R}$ e $(0,\ 1)$ con metrica euclidea sono omeomorfi rispetto alla topologia indotta dalla metrica, ma $\mathbb{R}$ abbiamo appena dimostrato che è completo, mentre $(0,\ 1)$ si può vedere che non lo è!

II

Omotopia

CAPITOLO 7

Omotopia

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

7.1 Lemma di incollamento

Lemma 7.1.0. Lemma di incollamento
Siano X, Y spazi topologici e $X = A \cup B$. Siano $f : A \longrightarrow Y$ e $g : B \longrightarrow Y$ continue tali che $f(x) = g(x)\ \forall x \in A \cap B$, cioè $f_{|A\cap B} = g_{|A\cap B}$.
Consideriamo l'**incollamento** $h : X \longrightarrow Y$ definito da:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases} \tag{7.1}$$

Se A e B sono entrambi aperti in X, oppure se A e B sono entrambi chiusi in X, allora h è continua.

Dimostrazione. Supponiamo A e B aperti. Sia $U \subseteq Y$ aperto. Allora:

$$h^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\subseteq B} \cap \underbrace{g^{-1}(U)}_{\subseteq B}$$

Essendo f, g continue, segue che $f^{-1}(U)$ è aperto in A e $g^{-1}(U)$ è aperto in B.
In quanto A, B aperti, per definizione di aperto del sottospazio[a] $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(U)$ sono aperti su $X \implies h^{-1}(U)$ aperto.
Il caso di A e B chiuso è esattamente analogo.

[a] Poichè un aperto del sottospazio è dato dall'intersezione del sottospazio con un aperto di X, se abbiamo che anche il sottospazio è aperto di X, l'intersezione è aperta: in questo caso ogni aperto del sottospazio è anche aperto di X.

7.2 COMPONENTE CONNESSA E COMPONENTE C.P.A.

Riprendiamo la trattazione delle componenti connesse e **c.p.a.** introdotte nel Capitolo 2.

Definizione 7.2.0. Una **componente connessa** di X spazio topologico è uno spazio $C \subseteq X$ *connesso* tale per cui:

$$C \subseteq A \subseteq X \text{ con } A \text{ connesso} \implies C = A \tag{7.2}$$

Osservazione.

- Le componenti connesse formano una *partizione* di X.
- Se $x \in X$ si può definire la componente connessa che contiene x:

$$C(x) = \bigcup \{C \subseteq X \mid x \in C,\ C \text{ connesso}\} \tag{7.3}$$

item Le componenti connesse possono essere viste come classi di equivalenza per la seguente relazione di equivalenza su X:

$$x,\ y \in X \qquad x \sim_C y \iff \exists C \subseteq X \text{ connesso} : x,\ y \in C \tag{7.4}$$

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo che la relazione è di equivalenza:

- Riflessiva: $x \sim_C x$ è vero, dato che $\{x\}$ è sempre un connesso.
- Simmetrica: ovvia dalla definizione.
- Transitiva: Supponiamo $x \sim_C y,\ y \sim_C z$. Allora $\exists C,\ D \subseteq X$ connessi tale che $x,\ y \in C$ e $y,\ z \in D$. Allora $C \cup D$ contiene sia x che z. Inoltre, essendo $y \in C \cap D \implies C \cap D \neq \varnothing$, dunque $C \cup D$ è un connesso: vale $x \sim_C z$.

  Mostriamo che le classi di equivalenza sono le componenti connesse per x.

  $\subseteq$) Se $C \subseteq X$ è una componente connessa, allora $\forall x, y \in C$ si ha $x \sim_C y$, cioè C è interamente contenuta in $C_0 = [x] = [y]$ classe di equivalenza per $\sim_C$: $C \subseteq C_0$.

  $\supseteq$) Sia $z \in C_0$ classe di equivalenza e sia $x \in C$ componente connessa. Allora: $x \sim_C z \implies \exists T \subseteq X$ connesso : $x,\ z \in T$.

  Consideriamo $C \cup T$. C e T sono connessi, $x \in C \cap T \implies C \cap T \neq \varnothing$: $C \cup T$ è ancora connessa. In quanto C è componente connessa, dato che $C \subseteq C \cup T$ per definizione segue che $C = C \cup T$, cioè $T \subseteq C$. Ma allora $z \in C$ e segue che $C_0 \subseteq C$.

Definizione 7.2.1. Una **componente c.p.a.** di X è una classe di equivalenza per la relazione $\sim_A$ così definita:

$$x,\ y \in X \qquad x \sim_A y \iff \exists \alpha \text{ CAMMINO IN } X : \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y \tag{7.5}$$

Dimostrazione. Mostriamo che sia una relazione di equivalenza:

- **Riflessiva**: $x \sim_A x$ è vero, dato che esiste sempre il **cammino costante** nel punto x:

$$\begin{aligned} c_x : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x \end{aligned} \tag{7.6}$$

- **Simmetrica**: se $x \sim_A y$ sappiamo che $\exists \quad \alpha : I \longrightarrow X \quad$ tale per cui $\alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y$. Possiamo definire il **cammino inverso**:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned} \tag{7.7}$$

  - $\overline{\alpha}$ è continuo, perché composizione di applicazioni continue:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow I \xrightarrow{\quad \alpha \quad} X \\ t &\longmapsto 1+t \longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

  - $\overline{\alpha}(0) = \alpha(1) = y,\ \overline{\alpha}(1) = \alpha(0) = x$.

  Allora il cammino $\overline{\alpha}$ definisce $y \sim_A x$.

- **Transitiva**: Supponiamo $x \sim_A y,\ y \sim_A z$. Allora $\exists \quad \alpha,\ beta : I \longrightarrow X \quad$ tale che $\alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y, \beta(0) = y,\ \beta(1) = z$. Usando la **giunzione di cammini**:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{7.8}$$

  In particolare:

$$\begin{cases} (\alpha * \beta)(0) = \alpha(0) \\ (\alpha * \beta)(1) = \beta(1) \end{cases}$$

  Poichè $\alpha * \beta$ soddisfa le ipotesi del lemma di incollamento, essa è continua e collega con un cammino unico x e z, dunque vale $x \sim_A z$.

Osservazione.

1. Le componenti **c.p.a.** formano una partizione di X
2. Sia $C \subseteq X$ un sottospazio **c.p.a.** per cui vale che $C \subseteq A \subseteq X$ con A **c.p.a.** $\Longrightarrow C = A$, allora C è una componente **c.p.a.**.
3. In generale le componenti **c.p.a.** non sono né aperte né chiuse.
4. Se A è una componente **c.p.a.**, allora A è **c.p.a.** e dunque *connessa*: A è allora interamente contenuta in una componente connessa, cioè le componenti connesse sono unioni di componenti **c.p.a.**.

Dimostrazione. **INSERIRE DIM PUNTO 2**

Esempio. Ricordiamo l'esempio della *pulce e il pettine*, cioè lo spazio $X \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto da:

$$X = Y \cup \{p\}$$
$$Y = (I \times \{0\}) \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} (\{r\} \times I)$$
$$p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

Questo spazio X è connesso, non **c.p.a.**: infatti, le componenti **c.p.a.** sono due, Y e $\{p\}$.

7.3 OMOTOPIA TRA FUNZIONI CONTINUE

Intuitivamente... Dati due spazi topologici X, Y e due funzioni $f, g : X \longrightarrow Y$, si ha un'**omotopia** tra le due funzioni se una funzione può essere "*deformata in modo continuo*" nell'altra (e viceversa).
Per far ciò vogliamo trovare una famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ tale che ogni funzione $f_t : X \longrightarrow Y$ sia continua e vari "*con continuità*" al variare di $t \in [0, 1]$ fra $f_0 = f$ e $f_1 = g$.

Definizione 7.3.0. Due funzioni continue $f, g : X \longrightarrow Y$ si dicono **omotope** se $\exists\ F : X \times I \longrightarrow Y$ *continua* tale che:

$$F(x, 0) = f(x) \qquad F(x, 1) = g(x)\ \forall x \in X \tag{7.9}$$

La funzione F è detta **omotopia** tra f e g; denotiamo che le funzioni sono omotope con $f \sim g$.
Inoltre, definiamo gli elementi della famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ nel seguente modo:

$$\forall t\ f_t := F(\bullet, t) : X \longrightarrow Y \ : f_0 = f,\ f_1 = g \tag{7.10}$$

Osservazione. Ricordando la definizione di *segmento* (28, 2.5), la funzione:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \overline{PQ} \\ t &\longmapsto tA + (1-t)B \end{aligned}$$

È biunivoca ed, in particolare, è omeomorfismo.

Esempio. Dato un sottospazio $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso*, allora spazio topologico X e per ogni funzione $f, g : X \longrightarrow Y$ continua, allora f e g sono *omotope*.

Dimostrazione. L'omotopia è:

$$F : X \times I \longrightarrow Y \ , \ F(x,\ y) = (1-t) f(x) + t f(x)$$

- F è ben definita. Se $x \in X$ abbiamo $f(x),\ g(x) \in Y$ convesso: esiste allora $\overline{f(x) g(x)} \subseteq Y$, cioè $(1-t) f(x) + t g(x) \in Y \ \forall x \in X,\ t \in I$.
- F è continua perché composizione di funzioni continue:

$$\begin{array}{ccccc} X \times I & \longrightarrow & Y \times Y \times I \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} & \longrightarrow & Y \subseteq \mathbb{R}^n \\ (x,\ t) & \longmapsto & (f(x),\ g(x),\ t) & \longmapsto & (1-t) f(x) + t g(x) \end{array}$$

- $F(x,\ 0) = f(x),\ F(x,\ 1) = g(x) \ \forall x \in X$.

Osservazione. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ (non necessariamente convesso!) e $f,\ g : X \longrightarrow Y$ continua tale che $\overline{f(x) g(x)} \subseteq Y \ \forall x \in X$. Allora f è omotopa a g con la stessa omotopia F definita nel caso di Y convesso.

Attenzione! Nel parlare di omotopie è estremamente importante verificare che siano ben definite! Infatti, prendiamo ad esempio $Y = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ e le funzioni costanti in p e in q, rispettivamente $\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & p \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} g : X & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & q \end{array}$.

Considerata $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $F(x,\ y) = (1-t) f(x) + t g(x) = (1-t) p + t q$, essa non è ben definita in Y: presi due punti della sfera S^1 il segmento non è *mai* contenuto in essa!

Lemma 7.3.0. Siano $X,\ Y$ due spazi topologici. L'omotopia è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X e Y.

Dimostrazione.
- Riflessiva: Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua. Consideriamo:

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

  Tale che $F(x,\ t) = f(x)$. Essa è:
  - Continua perché lo è f.
  - $F(x,\ 0) = F(x,\ 1) = f(x) \ \forall x \in X$.

  Allora $f \sim f$.
- Simmetrica: Supponiamo $f \sim g$, cioè $\exists \ F : X \times I \longrightarrow Y$ tale che:

$$F(x,\ 0) = f(x),\ F(x,\ 1) = g(x) \ \forall x \in X$$

  Consideriamo $G : X \times I \longrightarrow Y$ tale che $G(x,\ t) = F(x,\ 1-t)$. Essa è:
  - Continua perché composizione di funzioni continue.
  - $G(x,\ 0) = F(x,\ 1) = g(x),\ G(x,\ 1) = F(x,\ 0) = f(x) \ \forall x \in X$.

  Allora $g \sim f$.

- TRANSITIVA: Siano $f, g, h : X \longrightarrow Y$ continue, $f \sim g$ e $g \sim h$, cioè:

$$\exists\ F : X \times I \longrightarrow Y\ ,\quad G : X \times I \longrightarrow Y$$
$$\begin{array}{ll} F(x,\ 0) = f(x) & G(x,\ 0) = g(x) \\ F(x,\ 1) = g(x) & G(x,\ 1) = h(x) \end{array} \quad \forall x \in X$$

Consideriamo $H : X \times I \longrightarrow Y$:

$$H(x,\ t) = \begin{cases} F(x,\ 2t) & t \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \\ G(x,\ 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right] \end{cases}$$

  - ◇ H è continua per il lemma di incollamento:
    - ⋆ È ben definita per $t = \frac{1}{2}$.
    - ⋆ H è continua separatamente su $X \times \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ e $X \times \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$, entrambi chiusi.
  - ◇ $H(x,\ 0) = F(x,\ 0) = f(x)$, $H(x,\ 1) = G(x,\ 1) = h(x)$ $\forall x \in X$.

  Allora $f \sim h$.

LEMMA 7.3.1. COMPOSIZIONE DI OMOTOPIE (MANETTI 10.13)
Siano X, Y, Z spazi topologici e siano $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ continue ed omotope, $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ continue ed omotope. Allora $g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2 : X \longrightarrow Z$ sono omotope:

$$f_1 \sim f_2,\ g_1 \sim g_2 \implies g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2 \tag{7.11}$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che:

- $\exists\ F : X \times I \longrightarrow Y$ continua tale che $F(x,\ 0) = f_1(x)$, $F(x,\ 1) = f_2(x)$ $\forall x \in X$.
- $\exists\ G : Y \times I \longrightarrow Z$ continua tale che $G(y,\ 0) = g_1(y)$, $G(y,\ 1) = g_2(y)$ $\forall y \in Y$.

Sia $H : X \times I \longrightarrow Z$ data da $H(x,\ t) = G(F(x,\ t),\ t)$.

- H è continua perché composizione di funzioni continue.
- $H(x,\ 0) = G(F(x,\ 0),\ 0) = G(f_1(x),\ 0) = g_1(f_1(x))$ $\forall x \in X$.
- $H(x,\ 1) = G(F(x,\ 1),\ 1) = G(f_2(x),\ 1) = g_2(f_2(x))$ $\forall x \in X$.

Allora H è l'omotopia cercata.

7.4 EQUIVALENZA OMOTOPICA

DEFINIZIONE 7.4.0. Siano X, Y due spazi topologici. Diciamo che X e Y sono **omotopicamente equivalenti**, o che hanno lo stesso **tipo di omotopia**, se esistono due applicazioni continue:

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \longrightarrow X \tag{7.12}$$

Tali che:

$$g \circ f \sim Id_X \text{ e } f \circ g \sim Id_Y \tag{7.13}$$

In tal caso f e g si dicono **equivalenze omotopiche**.

Osservazione.

1. Se X e Y sono *omeomorfi*, allora sono anche *omotopicamente* equivalenti.
2. Consideriamo $X = \mathbb{R}^n$ in topologia Euclidea e $Y = \{1 \text{ punto}\}$. Allora X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Dimostrazione.

I L'omotopia è una relazione riflessiva, dunque se abbiamo $h = k$ e $h \sim h$, allora si ha $h \sim k$. Nel caso di un isomorfismo, preso f e la sua inversa g, possiamo affermare:

$$\begin{cases} g \circ f = Id_X \\ f \circ g = Id_Y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g \circ f \sim Id_X \\ f \circ g \sim Id_Y \end{cases}$$

II Consideriamo:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y = \{1 \text{ punto}\} \qquad \begin{aligned} g : Y = \{1 \text{ punto}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{punto} &\longmapsto g(\text{punto}) = \underline{0} \end{aligned} \tag{7.14}$$

f e g sono *continue*, inoltre:

$$f \circ g : Y = \{1 \text{ punto}\} \longrightarrow Y = \{1 \text{ punto}\} \Longrightarrow f \circ g = Id_Y$$

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \underline{x} &\longmapsto \underline{0} \end{aligned} \Longrightarrow g \circ f = O_{\mathbb{R}^n} (\text{applicazione nulla})$$

Per l'osservazione 1) da $f \circ g = Id_Y$ a $f \circ g \sim Id_Y$.
Abbiamo che $g \circ f = O_{\mathbb{R}^n}$ è omotopa a $Id_{\mathbb{R}^n}$, poiché $\mathbb{R}^n$ è *convesso* e due applicazioni continue a valori in $\mathbb{R}^n$ sono sempre omotope, come dimostrato nell'esempio 7.2, pag. 80. Una di queste, ad esempio, è la seguente:

$$F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \ F(\overline{x}, \ t) = t \cdot \overline{x}$$

- F è continua.
- $F(\overline{x}, \ 0) = \overline{0} = (g \circ f)(x)$.
- $F(\overline{x}, \ 1) = \overline{x} = Id_{\mathbb{R}}^n(\overline{x})$.

Attenzione! Se $n > 0$, $\mathbb{R}^n$ e $\{1 \text{ punto}\}$ *non* è sono omeomorfi, dato che *non* possono essere in corrispondenza biunivoca.

Esercizio. Essere omotopicamente equivalenti è una relazione di equivalenza sull'insieme degli spazi topologici.

Dimostrazione.

- Riflessiva: $X \sim X \Longleftrightarrow \exists f, g$ continue per cui $g \circ f \sim Id_X$, $f \circ g \sim Id_X$. Ponendo $f \equiv Id_X \equiv g$ vale banalmente $g \circ f = f \circ g = Id_X \sim Id_X$.
- Simmetrica: Da $X \sim Y$ sappiamo che $\exists \ f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ continue per cui $g \circ f \sim Id_X$, $f \circ g \sim Id_Y$; se vogliamo mostrare $Y \sim X$ dobbiamo cercare

$h : Y \longrightarrow X$, $k : X \longrightarrow Y$ per cui $k \circ h \sim Id_Y$, $h \circ k \sim Id_X$. Ponendo $h \equiv g$ e $k \equiv h$, esse soddisfano la richiesta.

- Transitiva: Da $X \sim Y$ e $Y \sim Z$:
  - $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ continue tali che $g \circ f \sim Id_X$, $f \circ g \sim Id_Y$.
  - $h : Y \longrightarrow Z$, $k : Z \longrightarrow Y$ continue tali che $k \circ h \sim Id_Y$, $h \circ k \sim Id_Z$.

  Vogliamo trovare $a : X \longrightarrow Z$, $b : Z \longrightarrow X$ continue tali che $b \circ a \sim Id_X$, $a \circ b \sim Id_Z$. Se definiamo:

$$a := h \circ f : X \longrightarrow Z$$
$$b := g \circ k : Z \longrightarrow X$$

  Si ha allora:

$$\begin{aligned} b \circ a &= (g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \\ a \circ b &= (h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \end{aligned}$$

  Dalla composizione di funzioni omotope:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f \sim f \\ k \circ h \sim Id_Y \end{array}\right\} \Longrightarrow (k \circ h) \circ f \sim Id_y \circ f \\ g \sim g \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ Id_y \circ f$$

$$\begin{array}{ccc} g \circ (k \circ h) \circ f & \sim & g \circ Id_Y \circ f \\ \| & & \| \\ b \circ a & \sim & g \circ f \\ & & \wr \\ & & Id_X \end{array}$$

  $\Longrightarrow b \circ a \sim Id_X$. In modo analogo:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} k \sim k \\ f \circ g \sim Id_Y \end{array}\right\} \Longrightarrow (f \circ g) \circ k \sim Id_y \circ k \\ h \sim h \end{array}\right\} \Longrightarrow h \circ (f \circ g) \circ k \sim g \circ Id_y \circ f$$

$$\begin{array}{ccc} h \circ (f \circ g) \circ k & \sim & h \circ Id_Y \circ k \\ \| & & \| \\ a \circ b & \sim & h \circ k \\ & & \wr \\ & & Id_Z \end{array}$$

  $\Longrightarrow a \circ b \sim Id_Z$.

Definizione 7.4.1. Uno spazio topologico è **contraibile** o *contrattile* se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

Esempi.
1. $\mathbb{R}^n$ è contraibile: si veda l'osservazione precedente.
2. Dall'esempio seguente, per transitività del tipo di equivalenza, si può affermare che *tutti* i $\mathbb{R}^n$ sono tutti omotopicamente equivalenti tra di loro.
3. Ogni sottospazio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso* di è contraibile.
4. Ogni sottospazio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *stellato* di è contraibile.

Dimostrazione. Dimostriamo l'esempio 4): l'esempio 3) è automaticamente dimostrato perché un convesso è stellato per ogni suo punto.
Sia $P_0 \in X$ il punto rispetto al quale X è stellato e consideriamo l'inclusione del singoletto $\{P_0\}$ in X e la funzione costante da X al punto, entrambe costanti:

$$i : \{P_0\} \hookrightarrow X \qquad g : X \longrightarrow \{P_0\}$$

Allora consideriamo:
- $g \circ i : \{P_0\} \longrightarrow \{P_0\}$ è pari all'identità $Id_{\{P_0\}}$ del singoletto e dunque ovviamente omotopa ad essa.
- $\begin{aligned} \varphi := i \circ g : X &\longrightarrow X \\ P &\longmapsto P_0 \end{aligned}$ è una funzione costante. Vogliamo dimostrare che φ è omotopa a Id_X. Siccome X è stellato rispetto a P_0, $\forall P \in X$ si ha $\overline{PP_0} \subseteq X$. Allora definiamo la funzione:

$$\begin{aligned} F : X \times I &\longrightarrow X \\ (P,\, t) &\longmapsto tP + (1-t)P_0 \end{aligned}$$

  Ha senso definire ciò proprio perché su $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ci sono le operazioni di somma e prodotto per scalari. Oltre ad essere ben definita per quanto detto prima $(F(P,\, t) \in X)$, F è continua e $F(P,\, 0) = P_0 = \varphi(0)$, $F(P,\, 1) = P = Id_X(P)$. Si ha l'omotopia cercata.

Esempio. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$ non è nè convesso, nè stellato.

Lemma 7.4.0. Se X è contraibile, allora X è **c.p.a.**.

Dimostrazione. Con il seguente diagramma ricordiamo le funzioni in gioco con la comprimibilità.

$$\begin{tikzcd} \{1 \text{ punto}\} \arrow[r, bend left, "g"] & X \arrow[l, bend left, "f\ (\text{costante})"] \end{tikzcd}$$

Necessariamente dobbiamo mappare g ad un punto di X, ad esempio x_0.
Il singoletto e X sono in equivalenze omotopica, in particolare da ciò si ha una funzione

costante in x_0:

$$\varphi := g \circ f : X \longrightarrow X \qquad x \longmapsto x_0$$

In quanto f e g sono in equivalenza omotopica, si ha che $\varphi \sim Id_X$, cioè esiste un omotopia fra le due funzioni:

$$F : X \times I \longrightarrow X \quad \text{continua} : F(x,\ 0) = \varphi(x) = x_0,\ F(x,\ 1) = Id_X(x) = x\ \forall x \in X$$

Fissato $x \in X$ sia $\alpha : I \longrightarrow X$ dato da $\alpha(t) = F(x,\ t)$:

- α è continua perché lo è f.
- $\alpha(0) = F(x,\ 0) = x_0$, $\alpha(1) = F(x,\ 1) = x$.

Segue che α è un cammino da x_0 a un qualunque punto x in X, dunque X è **c.p.a.**.

Esercizio. Se X e Y sono omotopicamente equivalenti, allora:

1. X è **c.p.a.** $\iff$ Y è **c.p.a.**.
2. X è connesso $\iff$ Y è connesso.

Dimostrazione. Siano f, g le equivalenze omotopiche.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

I. Se consideriamo $f \circ g \sim Id_Y$, l'omotopia che la definisce è:

$$F : Y \times I \longrightarrow Y \quad : F(y,\ 0) = f(g(y)), F(y,\ 1) = y\ \forall y \in Y$$

Possiamo usare F per costruire, ad $y \in Y$ fissato, un arco in Y che collega y ad un punto di $f(X) \subseteq Y$. Infatti, consideriamo $\alpha : I \longrightarrow Y$ dato da $\alpha(t) = F(y,\ t)$:

- α è continua perché lo sono f e g.
- $\alpha(0) = F(y,\ 0) = f(g(y)) \in f(X) \subseteq Y$, $\alpha(1) = F(y,\ 1) = y$.

$\Longrightarrow$) Supponendo X **c.p.a.**, allora $f(X)$ è **c.p.a.**. Per i ragionamenti appena fatti abbiamo che ogni punto di Y ha un arco che lo collega ad un punto di $f(X)$, dunque per giunzione di cammini anche Y è **c.p.a.**.

$\Longleftarrow$) Supponendo che Y sia **c.p.a.**, applicando all'equivalenza omotopica $g : Y \longrightarrow X$ un procedimento analogo a $\Longrightarrow$) si ha che X è **c.p.a.**[a].

II. Sia X connesso (ma non **c.p.a.**, altrimenti ricadiamo nel punto 1) dell'esercizio), mentre supponiamo che Y si può scrivere come unione disgiunta di due aperti A e B: $Y = A \cup B$. Ma allora:

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Per continuità di f anche $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti disgiunti in X connesso. Segue che necessariamente uno dei due deve essere vuoto[b], ad esempio $f^{-1}(A) = \varnothing$, cosicché $X = f^{-1}(B)$.

Per i ragionamenti visti nel punto 1) possiamo trovare un arco che collega un qualsiasi punto $y \in Y$ con $f(g(y)) \in f(X)$. In particolare, dato che $f \circ g$ mappa Y

in B, si avrà $f(g(y)) \in B$: ma allora $y \in B$ necessariamente, dato che se fosse in A i due aperti non sarebbero disgiunti! Per l'arbitrarietà di y segue che $A = \varnothing$ e dunque anche Y è connesso.
Il viceversa è analogo.

[a] In realtà è sufficiente, per i ragionamenti visti sopra, dire che se X e Y sono omotopicamente equivalenti, allora X è **c.p.a.** $\iff f(X)$ è **c.p.a.**.
[b] In quanto se non fosse così, X non sarebbe connesso.

Esempio. Le sfere S^n $\forall n \geq 1$ sono spazi topologici **c.p.a.** *non* contraibili.

7.5 RETRATTI E RETRATTI DI DEFORMAZIONE

Definizione 7.5.0. Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un suo sottospazio. Diciamo che A è un **retratto** di X se:

$$\exists \; r : X \longrightarrow A \quad \text{continua} : r_{|A} = Id_A, \text{ cioè } : r(a) = a \; \forall a \in A \tag{7.15}$$

In tal caso r è detta **retrazione**.

Osservazione. Se r è una retrazione, per costruzione è suriettiva, dunque A **eredita** da X tutte le proprietà topologiche che si trasmettono per mappe continue (ad esempio connesso, **c.p.a.**, compatto).

Esempi.

- Dato $x_0 \in X$, $\{x_0\}$ è sempre un retratto: infatti la mappa costante $X \longrightarrow (x_0)$ soddisfa banalmente le ipotesi di retrazione.
- Presi $X = [0,\ 1]$, $A = (0,\ 1]$ *non* è un retratto di X (non è compatto!).
- Presi $X = [0, 1]$, $\widetilde{A} = \{0,\ 1\}$ *non* è un retratto (non è *connesso*!).

Esempio. La retrazione radiale.
Sia $X = \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ e $A = S^{n-1} \subseteq X$. Vogliamo definire una retrazione di X su A, cioè una funzione continua $r : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow A = S^{n-1}$ tale che $r_{|S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$. Definiamo allora la **retrazione radiale**:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ \underline{x} &\longmapsto r(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned} \tag{7.16}$$

- r è ben definita perché $\underline{x} \neq \underline{0} \implies \|\underline{x}\| \neq 0$.
- r continua.
- Se $\underline{x} \in S^{n-1}$, allora $\|\underline{x}\| = 1$, cioè $\forall \underline{x} \in S^{n-1}$ $r(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \underline{x}$.

Definizione 7.5.1. Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un suo sottospazio. Diciamo che A è un **retratto di deformazione** se:

- $r_{|A} = Id_A$, cioè r è un retratto.

- Se $i : A \hookrightarrow X$ è l'inclusione di A in X, allora $i \circ r : X \longrightarrow X$ è omotopa all'identità di X ($i \circ f \sim Id_X$).

Osservazione. Se A è un retratto di deformazione di X, allora A e X hanno lo stesso **tipo di omotopia**.

Dimostrazione.

- $r : X \longrightarrow A$ e $i : A \hookrightarrow X$ sono continue.
- $i \circ r \sim Id_X$ per ipotesi.
- $r \circ i : A \longrightarrow A$ è la restrizione di r ad A che, per ipotesi, è proprio l'identità di A, cioè $r \circ i = r_{|A} = Id_A$ e banalmente sono omotope.

Esempio. Mostriamo che $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ è un retratto di deformazione. Sfruttiamo la retrazione radiale definita a pag. 87:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ \underline{x} &\longmapsto r(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

Considero ora l'inclusionee, definendo per comodità $X = \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$:

$$i : S^{n-1} \longrightarrow X$$

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow X \\ \underline{x} &\longmapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

$$\widetilde{r} := \begin{aligned} i \circ r : X &\longrightarrow X \\ \underline{x} &\longmapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

Vogliamo che $\widetilde{r}$ sia omotopa a Id_X. Osserviamo che $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} = X$ il segmento da $\underline{x}$ a $\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ non contiene, per costruzione, l'origine: allora esso è interamente contenuto in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} = X$. Dunque, riprendendo l'osservazione di pag. 81 definiamo l'omotopia:

$$\begin{aligned} F : X \times I &\longrightarrow X \\ (\underline{x},\ t) &\longmapsto (1-t)\underline{x} + t\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

Infatti F è ben definita, continua e $F(\underline{x},\ 0) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \widetilde{r}(\overline{x})$, $F(x,\ 1) = \overline{x} = Id_X(\overline{x})$.

Corollario 7.5.0. In generale vale che S^{n-1} è retratto di deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{1 \text{ punto}\}$; in particolare hanno lo stesso tipo di omotopia.

Intuitivamente... Se l'omeomorfismo permette di deformare uno spazio *mantenendo certe qualità*, l'equivalenza omotopica risulta essere una forma **più debole** di trasformazione, in cui posso sempre deformare uno spazio *perdendo* tuttavia certe qualità.

Riprendendo l'intuizione (non sempre corretta) di omeomorfismo enunciata nel Capitolo 1, possiamo vedere allora l'equivalenza omotopica come una deformazione che *piega* e *allunga* uno spazio senza formare *strappi* (f continua) ma che *permette* fino ad un certo punto *sovrapposizioni* e *incollamenti* (ad esempio, non posso far sparire alcuni fori né ammassare indiscriminatamente troppi punti).
Dunque, sotto queste condizioni, posso rendere la *retta* un *punto*, mentre il *piano* senza un punto si può trasformare un una *circonferenza*. Allo stesso tempo però, non posso "concentrare" la *sfera* in uno solo *punto*.
Ancor più che con il ragionamento intuitivo sull'omeomorfismo è necessario esercitare **estrema cautela** nell'applicare questa nozione euristica di omotopia.

DEFINIZIONE 7.5.2. Un **bouquet di n circonferenze** è uno spazio topologico ottenuto unendo in un punto n copie di S^1.

ESEMPI. ALTRI ESEMPI DI EQUIVALENZE OMOTOPICHE.

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$ ha lo stesso tipo di omotopia di un *bouquet di due circonferenze*: si può ottenere attraverso una composizione (continua) di retrazioni radiali e lineari.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{n \text{ punti}\}$ ha lo stesso tipo di omotopia di un *bouquet di n circonferenze*.
3. $\mathbb{R}^3 \setminus \{1 \text{ retta}\}$ ha lo stesso tipo di omotopia di $\mathbb{R}^2 \setminus \{1 \text{ punto}\}$ per retrazioni lineari, dunque ha la stessa omotopia di S^1 per i ragionamenti precedenti.
4. Per $\mathbb{R}^3 \setminus \{2 \text{ rette}\}$ dobbiamo distinguere a seconda della relazione fra le due rette.
   - Se le rette sono **disgiunte**, X è sempre omeomorfo a:

     $$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse z}\} \setminus \{x = y = 1\} = \widetilde{X}$$

     Cioè lo spazio $\mathbb{R}^3$ privato di due rette perpendicolari al piano e distinte. Considerato ora il piano $Y = \{\text{piano xy}\} \setminus \{(0,0),\ (1,1)\}$, questo risulta un retratto di deformazione di $\widetilde{X}$ con retrazione:

     $$\begin{aligned} r :\quad \widetilde{X} &\longrightarrow Y \\ (x,\ y,\ z) &\longmapsto (x,\ y, 0) \end{aligned}$$

     Infatti la funzione è sempre ben definita e continua e, considerata la restrizione di r ad Y, segue che banalmente che è l'identità di Y in quanto tutti i punti di Y hanno già la forma $(x,\ y, 0)$. Guardando invece $\widetilde{r} = i \circ r$ con $\ i : Y \hookrightarrow \widetilde{X}\ $, un'omotopia con $Id_{\widetilde{X}}$ è:

     $$F : \widetilde{X} \times I \longrightarrow \widetilde{X} \quad : F((x,\ y,\ z),\ t) = (x,\ y,\ tz)$$

     Infatti F è banalmente ben definita continua, con $F(\underline{x},\ 0) = (x,\ y,\ 0) = \widetilde{r}(\underline{x})$ e $F(\underline{x},\ 1) = (x,\ y,\ z) = Id_{\widetilde{X}}(\underline{x})$.
     Segue che $\widetilde{X}$, e dunque anche X per omeomorfismo, ha la stessa omotopia di $\mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\}$ e di un *bouquet di due circonferenze*.
   - Se le due rette sono incidenti, a meno di omeomorfismi si intersecano nell'origine. Consideriamo dunque $X = \mathbb{R}^3 \{r_1 \cup r_2\}$ e lo spazio $A = S^2 \setminus$

$\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$. Se prendiamo la retrazione:

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow A \\ \underline{x} &\longmapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned} .$$

e l'omotopia:

$$\widetilde{r} := \begin{aligned} i \circ r : X &\longrightarrow X \\ \underline{x} &\longmapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \end{aligned}$$

Si verifica in modo analogo a come visto nel caso della sfera e dello spazio privato dell'origine (esempio a pagina 7.6), trattando con una *retrazione radiale* ben definita e la sua omotopia nota, che A è retratto di deformazione di X. Segue allora che hanno lo stesso tipo di omotopia.

CAPITOLO 8

Il gruppo fondamentale

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

8.1 omotopie fra cammini

Ove non specificato differentemente, useremo I per indicare l'intervallo $[0,\ 1]$.

Definizione 8.1.0. Siano $\alpha,\ \beta : I \longrightarrow X$ due cammini da a a b, cioè con *stessi estremi*. Allora $\alpha\ \beta$ sono **cammini omotopi** se $\exists\ F : I \times I \longrightarrow X$ tale che:

$$\begin{cases} F(t,\ 0) = \alpha(t) \\ F(t,\ 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \ \text{ è omotopia tra } \alpha \text{ e } \beta$$
$$\begin{cases} F(0,\ s) = a \\ F(1,\ s) = b \end{cases} \quad \forall s \in I\ F(\bullet,\ s) \text{ è sempre un cammino tra } a \text{ e } b \tag{8.1}$$

F è detta **omotopia di cammini** o **omotopia a estremi fissi** .

Definizione 8.1.1. Indichiamo con $\Omega(X;\ a,\ b)$ l'insieme dei cammini in X da a a b.

Osservazione. L'omotopia di cammini è una relazione di equivalenza su $\Omega(X;\ a,\ b)$.

Dimostrazione.

- Riflessiva: $\alpha \sim \alpha$?. Presa $F(t,\ s) = \alpha(t)$, essa è ben definita, continua e:

$$F(t,\ 0) = \alpha(t),\ F(t,\ 1) = \alpha(t),\ F(0,\ s) = \alpha(0) = a,\ F(1,\ s) = \alpha(1) = b$$

  Cioè è omotopia di cammini tra α e se stessa.

- Simmetrica: Da $\alpha \sim \beta$ sappiamo che esiste F omotopia di cammini per cui:

$$F(t,\ 0) = \alpha(t),\ F(t,\ 1) = \beta(t),\ F(0,\ s) = a,\ F(1,\ s) = b$$

Per avere $\beta \sim \alpha$, basta prendere $\widetilde{F}(t,\ s) = F(t,\ 1-s)$: essa è ben definita, continua e:

$$\widetilde{F}(t,\ 0) = F(t,\ 1) = \beta(t),\ \widetilde{F}(t,\ 1) = F(t,\ 0) = \alpha(t)$$
$$\widetilde{F}(0,\ s) = F(0,\ s) = a,\ \widetilde{F}(1,\ s) = F(1,\ s) = b$$

Cioè è omotopia di cammini tra β e α.

- Transitiva: Da $\alpha \sim \beta$ abbiamo:

$$\begin{cases} F(t,\ 0) = \alpha(t) \\ F(t,\ 1) = \beta(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} F(0,\ s) = a \\ F(1,\ s) = b \end{cases}$$

Mentre da $\beta \sim \gamma$:

$$\begin{cases} G(t,\ 0) = \beta(t) \\ G(t,\ 1) = \gamma(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} G(0,\ s) = a \\ G(1,\ s) = b \end{cases}$$

Definita allora la seguente funzione:

$$H(t,\ s) = \begin{cases} F(t,\ 2s) & \text{se } s \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \\ G(t,\ 2s-1) & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right] \end{cases}$$

Essa è ben definita, continua per il lemma di incollamento e tale per cui:

$$H(t,\ 0) = F(t,\ 0) = \alpha(t),\ H(t,\ 1) = G(t,\ 1) = \gamma(t)$$
$$H(0,\ s) = a,\ H(1,\ s) = b$$

Cioè è omotopia di cammini tra α e γ.

Ricordiamo... Abbiamo già definito due "operazioni" fra insiemi di cammini, senza averle necessariamente formalizzate:

- Prodotto di cammini: $$\begin{aligned} \Omega(X;\ a,\ b) \times \Omega(X;\ b,\ c) &\longrightarrow \Omega(X;\ a,\ c) \\ (\alpha,\ \beta) &\longmapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

- **Inversione di cammini**: $$\begin{aligned} \Omega(X;\ a,\ b) &\longrightarrow \Omega(X;\ b,\ a) \\ \alpha &\longmapsto \overline{\alpha} \end{aligned}$$

Osservazione. Si ha $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$. Infatti:

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t) \implies \overline{\overline{\alpha}}(t) = \overline{\alpha}(1-t) = \alpha(t)$$

Lemma 8.1.0. Composizioni di omotopie di cammini (Kosniowski, 14.2)

Dati $\alpha, \alpha' \in \Omega(X; a, b)$ e $b, b' \in \Omega(X; b, c)$, parlando in termini di omotopie di cammini:

$$\alpha \sim \alpha' \text{ e } \beta \sim \beta' \implies \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \tag{8.2}$$

Dimostrazione. Esistono $F, G : I \times I \longrightarrow X$ tali che:

$$\begin{matrix} F(t, 0) = \alpha(t) & F(0, s) = a \\ F(t, 1) = \alpha'(t) & F(1, s) = b \end{matrix} \quad \forall t, s \in I$$

$$\begin{matrix} G(t, 0) = \beta(t) & G(0, s) = b \\ G(t, 1) = \beta'(t) & G(1, s) = c \end{matrix} \quad \forall t, s \in I$$

Consideriamo $H : I \times I \longrightarrow X$ data da:

$$H(t, s)) \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t-1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- H è ben definita per $t = \frac{1}{2}$
- H è continua per il lemma di incollamento, essendo definito sui chiusi $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times I$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times I$ è continua su di essi.
- $H(t, 0) = (\alpha * \beta)(t)$
- $H(t, 1) = (\alpha' * \beta')(t)$ $\Big\}= \forall t \in I$ è omotopia
- $H(0, s) = F(0, 0) = a$
- $H(1, s) = G(1, 0) = c$ $\Big\}= \forall s \in I$ ha estremi fissi

H è l'omotopia a estremi fissi cercata.

Lemma 8.1.1. Cambiamento di parametri (Manetti, 11.3)
Sia $\alpha : I \longrightarrow X$ un cammino e $\varphi : I \longrightarrow I$ una funzione continua tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. Allora $\alpha \circ \varphi \sim \alpha$.

Dimostrazione. Sia $F : I \times I \longrightarrow X$ data da $F(t, s) = \alpha(s\varphi(t) + (1-s)t)$.

- $s\varphi(t) + (1-s)t$ è una combinazione lineare che è contenuta in $I \subseteq \mathbb{R}$ $\forall t, s \in I$ per convessità dell'intervallo I, da cui segue che F è ben definita.
- F continua perché composizione di funzioni continue.
- $F(t, 0) = \alpha(t)$
- $F(t, 1) = \alpha(\varphi(t))$
- $F(0, s) = \alpha(0)$
- $F(1, s) = \alpha(s + 1 - s) = \alpha(1)$

H è l'omotopia a estremi fissi cercata tra α e $\alpha \circ \varphi$.

Definizione 8.1.2. Il **cammino costante** C_a nel punto a è un cammino che non si sposta mai da esso, cioè è descritto da una funzione costante nel punto:

$$\begin{aligned} C_a : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto a \end{aligned} \tag{8.3}$$

Proposizione 8.1.0. (Manetti, 11.4 e 11.6)
Sia X spazio topologico e si considerino i cammini:

$$\alpha \in \Omega(X;\, a,\, b) \quad \beta \in \Omega(X;\, b,\, c) \quad \gamma \in \Omega(X;\, c,\, d)$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. Associatività: $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.
2. Rapporto coi cammini costanti: $C_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * C_b$.
3. Inverso: $\alpha * \overline{\alpha} \sim C_a$ e $\overline{\alpha} * \alpha \sim C_a$.

Dimostrazione.

I Scriviamo i due cammini:

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & t \in \left[0,\, \frac{1}{4}\right] \\ \beta(4t-1) & t \in \left[\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right] \end{cases}$$

$$((\alpha * (\beta\gamma)))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(4t-2) & t \in \left[\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma(2t-3) & t \in \left[\frac{3}{4},\, 1\right] \end{cases}$$

I due cammini differiscono per una *riparametrizzazione* $\phi : I \longrightarrow I$ di $\alpha * (\beta * \gamma)$ definita in questo modo:

$$\begin{cases} 2s = 4t \\ 4s - 2 = 4t - 2 \\ 4s - 3 = 4t - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s = 2t & t \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right] \\ s = t + \frac{1}{4} & t \in \left[\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}\right] \\ s = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} & t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right] \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 2t & t \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right] \\ t + \frac{1}{4} & t \in \left[\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} & t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right] \end{cases}$$

- ϕ è ben definita e continua per lemma di incollamento.
- $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$.
- $((\alpha * (\beta * \gamma)))(\phi(t)) = ((\alpha * \beta) * \gamma)(t)$.

Per il lemma del cambiamento di variabile i due cammini sono omotopi.

II Scriviamo i due cammini:

$$(C_a * \alpha)(t) = \begin{cases} a & t \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right] \end{cases}$$

$$(\alpha * C_b)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right] \\ b & t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right] \end{cases}$$

I due cammini differiscono per delle *riparametrizzazioni* di α $\phi : I \longrightarrow I$ e

$\psi : I \longrightarrow I$ definite così:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2t - 1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} 2t & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

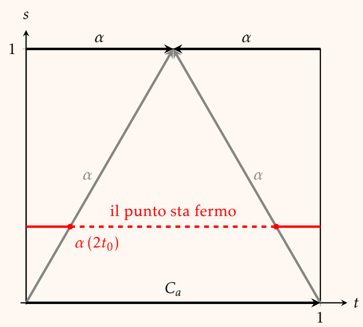
- ϕ e ψ son ben definite e continue per lemma di incollamento.
- $\phi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1, \psi(1) = 1$.
- $(C_a * \alpha)(t) = \alpha(\phi(t))$ e $(\alpha * C_b)(t) = \alpha(\psi(t))$.

Per il lemma del cambiamento di variabile i due cammini sono entrambi omotopi a α, si hanno quindi le equivalenze omotopiche cercate.

III È sufficiente dimostrare che $\alpha * \overline{\alpha} \sim C_a$. Possiamo immaginare di rappresentare tutte le parametrizzazioni di cammini definiti da un omotopia sul piano $I \times I$, con t sulle ascisse e s sulle ordinate.

In questo modo i punti a di inizio e b di fine sono rappresentati dai segmenti verticali in $t = 0$ e in $t = 1$, mentre i cammini α di inizio e β fine sono segmenti orizzontali in $s = 0$ e $s = 1$. Dunque, all'interno di $I \times I$ possiamo trovare (fissato s) tutti i cammini $F(\bullet, s)$ di estremi a e b compresi tra i cammini α e β: essi sono rappresentati da segmenti orizzontali.

Nel nostro caso, possiamo considerare il punto a di inizio e il punto b di fine del cammino α. Nei due cammini "esterni" o il cammino non si sposta mai da a (C_a), oppure percorre tutto il cammino α fino a b (che è raggiunto per $t = \frac{1}{2}$) e torna poi indietro per lo *stesso cammino* ($\alpha * \overline{\alpha}$). Tuttavia, dobbiamo considerare anche cammini che percorrono α fino ad un punto c *intermedio* fra a e b, stanno fermi in c per poi tornare indietro. Definiamo la seguente omotopia:



$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s) & \text{se } \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \alpha(2 - 2t) & \text{se } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{8.4}$$

Verifichiamo che lo sia:

- F è ben definita grazie alla ben definizione di α: tutti i valori di F risultano interni ad X.
- F è continua per il lemma di incollamento.
- $F(t, 0) = \alpha(0) = C_a(t)$, $F(t, 1) = \alpha * \overline{\alpha}(t)$ e $F(0, s) = a = F(1, s)$.

In questo modo teniamo conto della possibilità del cammino di "fermarsi" per un certo tempo in un particolare punto $\alpha(s)$.

8.2 GRUPPO FONDAMENTALE

Definizione 8.2.0. Sia X uno spazio topologico e fissiamo un punto $x_0 \in X$. I **lacci** o **cappi** sono i cammini chiusi in X, cioè tutti i cammini il cui punto iniziale e finale coincidono. Il loro insieme si denota dunque come $\Omega(X; x_0, x_0)$.

Osservazione. Possiamo notare come $\forall \alpha, \beta \in \Omega(X; x_0, x_0)$ si ha:

$$\alpha * \beta \in \Omega(X; x_0, x_0) \qquad \overline{\alpha} \in \Omega(X; x_0, x_0)$$

Allora, se quozientiamo l'insieme dei lacci rispetto alla relazione di equivalenza data dall'omotopia di cammini, esso possiede una struttura di *gruppo*:

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega(X; x_0, x_0)}{\sim} \tag{8.5}$$

Preso un laccio α, indichiamo la sua classe di equivalenza in $\pi_1(X, x_0)$ con $[\alpha]$. Allora:

- Il prodotto di cammini dà un operazione ben definita su $\pi_1(X, x_0)$ grazie al lemma 8.1 (Kosniowski, 14.2):

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta] \tag{8.6}$$

- L'operazione appena definita è associativa per il primo punto della proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6).
- $\left[C_{x_0}\right]$ è l'elemento neutro, sempre per la proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6):

$$\left[C_{x_0}\right] \cdot [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] \cdot \left[C_{x_0}\right] \tag{8.7}$$

- $[\overline{\alpha}]$ è l'inverso di $[\alpha]$, cioè $[\alpha]^{-1} := [\overline{\alpha}]$, per la proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6):

$$[\overline{\alpha}] \cdot [\alpha] = \left[C_{x_0}\right] = [\alpha] \cdot [\overline{\alpha}] \tag{8.8}$$

Attenzione! La proposizione 8.1 (Manetti, 11.4 e 11.6) ci garantisce che la composizione di cammini omotopi è omotopa $((\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma))$, dunque possiamo parlare della *classe* $[\alpha * \beta * \gamma]$. Tuttavia, al di fuori del quoziente non ha senso $\alpha * \beta * \gamma$!
L'ordine con cui congiungiamo i cammini dà luogo a due cammini certamente omotopi, *ma non uguali*, dato che la parametrizzazione varia[a].

[a] Questo si vede chiaramente nella dimostrazione della proposizione.

Definizione 8.2.1. Dato uno spazio topologico X e fissato un punto (detto **punto base**) x_0, il **gruppo fondamentale** con punto base x_0 è il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ definito nell'osservazione precedente.
Si chiama anche **primo gruppo fondamentale** o **gruppo di Poincaré**.

8.2.1 *Dipendenza dal punto base*

Teorema 8.2.0. Il gruppo fondamentale dipende *solo* dalla componente *c.p.a.* contente il punto base x.
In altre parole, se $x, y \in X$ appartengono alla stessa componente **c.p.a.**, preso un arco γ da x a y e costruito:

$$\begin{aligned} \gamma_\# : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\longmapsto [\overline{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{aligned} \tag{8.9}$$

È ben definito ed è un *isomorfismo* di gruppi, cioè:

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y) \tag{8.10}$$

Ricordiamo... Una funzione fra due gruppi $f : (G, \cdot_G) \longrightarrow (H, \cdot_H)$ è un **omomorfismo di gruppi** se:

$$f(a \cdot_G b) = f(a) \cdot_H f(b) \quad \forall a, b \in G$$

Se f è *biettiva*, allora parliamo di **isomorfismo di gruppi**.

Dimostrazione.

- $\gamma_\#$ è ben definito in quanto la classe $[\overline{\gamma} * \alpha * \gamma]$ è ben definita per la composizione dei cammini ed è la classe di equivalenza di un cappio di y ($\overline{\gamma}$ parte da y e raggiunge x, con α compie un cammino chiuso in x per tornare al punto di partenza y).
- $\gamma_\#$ è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned}\gamma_\#([\alpha]*[\beta]) &= \gamma_\#([\alpha*\beta]) = [\overline{\gamma}*\alpha*\beta*\gamma] = [\overline{\gamma}*\alpha*C_x*\beta*\gamma] \\ &= [\overline{\gamma}*\alpha*\gamma*\overline{\gamma}*\beta*\gamma] = [\overline{\gamma}*\alpha*\gamma]\cdot[\overline{\gamma}*\beta*\gamma] = \gamma_\#([\alpha])\cdot\gamma_\#([\beta])\end{aligned}$$

  Infatti, anche l'elemento neutro viene mappato all'elemento neutro del codominio:

$$\gamma_\#([C_x]) = [\overline{\gamma}*C_x*\gamma] = [\overline{\gamma}*\gamma] = \left[C_y\right]$$

- Possiamo associare in modo analogo al cammino $\overline{\gamma}$ il cammino:

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}_\# : \pi_1(X, y) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma*\alpha*\overline{\gamma}]\end{aligned}$$

  In modo assolutamente analogo a come visto sopra, si vede che è un omeomorfismo; verifichiamo ora che $\gamma_\#$ e $\overline{\gamma}_\#$ siano l'uno l'inverso dell'altro:

$$\overline{\gamma}_\#(\gamma_\#([\alpha])) = \overline{\gamma}_\#([\overline{\gamma}*\alpha*\gamma]) = [\gamma*\overline{\gamma}*\alpha*\gamma*\overline{\gamma}] = [C_x*\alpha*C_x] = [\alpha]$$
$$\gamma_\#(\overline{\gamma}([\alpha])) = \gamma_\#([\gamma*\alpha*\overline{\gamma}]) = [\overline{\gamma}*\gamma*\alpha*\overline{\gamma}*\gamma] = \left[C_y*\alpha*C_y\right] = [\alpha]$$

  Segue che allora $\gamma_\#$ è biettiva.

Osservazione.

- Se due punto x_1 e x_2 stanno in componenti connesse per archi diverse, *non* c'è alcuna relazione tra $\pi_1(X, x_1)$ e $\pi_1(X, x_2)$.
- Se X è **c.p.a.**, il suo gruppo fondamentale è *unico* a meno di isomorfismo.

Esempio. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio convesso e $y_0 \in Y$. Allora $\pi_1(Y, y_0) = 0$ è **banale**; in particolare, allora $\pi_1(\mathbb{R}^n, y_0)$ è banale per ogni n.

Dimostrazione. Sia $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$. Vogliamo mostrare che $[\alpha] = \left[C_{y_0}\right]$, cioè che $\alpha \sim C_{y_0}$. Consideriamo $F : X \times I \longrightarrow Y$ tale che:

$$F(t, s) = s(\alpha(t)) + (1-s)y_0$$

- F risulta ben definita: è una combinazione convessa al variare di $s \in [0, 1]$ tra $\alpha(t) \in Y$ (per t fissato) e $y_0 \in Y$.
- F è continua perché composizione di applicazioni continue.
- $F(t, 0) = y_0 = C_{y_0}(t)$, $F(t, 1) = \alpha(t)$.
- $F(0, s) = s\alpha(0) + (1-s)y_0 = sy_0 + (1-s)y_0 = y_0$, $F(1, s) = s\alpha(1) + (1-s)y_0 = sy_0 + (1-s)y_0 = y_0$.

Segue che F è un omotopia tra C_{y_0} e α, dunque segue la tesi.

Definizione 8.2.2. Uno spazio topologico X è **semplicemente connesso** se è **c.p.a.** e ha gruppo fondamentale **banale**.

Esempi.
- $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.
- Ogni convesso di $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

8.2.2 *Mappe continue e omomorfismo di gruppi*

Notazione Indichiamo con $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una funzione continua $f : X \longrightarrow Y$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Osservazione. Consideriamo $f : X \longrightarrow Y$ continua e due cammini α in X da a a b e β in X da b a c.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\alpha"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\beta"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Si ha che:

1. $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$.
2. $f \circ \overline{\alpha} = \overline{f \circ \alpha}$.
3. Se $\alpha \sim \alpha'$, allora $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$.

Proposizione 8.2.0. Dati X, Y spazi topologici, due punti $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ e una funzione $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continua, si può definire associare un omomorfismo tra i corrispettivi gruppi fondamentali:

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned} \tag{8.11}$$

Dimostrazione.

- f_* è ben definita: infatti, $f \circ \alpha \in \Omega(Y; y_0, y_0)$ e se $[a] = [a']$, $\alpha \sim \alpha'$. Per il punto 3 dell'osservazione precedente, si ha $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$, cioè $[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha']$.
- f_* è un omeomorfismo di gruppi: infatti, presi $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, si ha:

$$f_*([\alpha]\cdot[\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] \overset{1}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha]\cdot[f \circ \beta] = \\ = f_*([\alpha])\cdot f_*([\beta])$$

Inoltre: $f_*\left(\left[C_{x_0}\right]\right) = \left[f \circ C_{x_0}\right] = \left[C_{y_0}\right]$.

8.3 DIGRESSIONE: CATEGORIE

Definizione 8.3.0. Una **categoria** $\mathscr{C}$ consiste di:

- Una **classe** $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, i cui elementi sono datti **oggetti** di $\mathscr{C}$.
- Per ogni *coppia* di oggetti X e Y di $\mathscr{C}$ una classe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, i cui elementi sono detti **morfismi** da X a Y.
- Per ogni *terna* di oggetti X, Y, Z un'operazione binaria detta **composizione** di morfismi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned} \tag{8.12}$$

Tali che questi oggetti soddisfino i seguenti assiomi:

1. Associatività: Per ogni $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, W)$ si ha:
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ in } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, W) \tag{8.13}$$
2. Identità: Per ogni oggetto X esiste un **morfismo identità** $Id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$ tale che:
$$\begin{matrix} f \circ Id_X = f & Id_X \circ g = g \\ \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) & \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X) \end{matrix} \tag{8.14}$$
Si dimostra che Id_X è unico per ogni oggetto X.

Definizione 8.3.1. Un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ si dice **isomorfismo** se:

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \text{ tale che } g \circ f = Id_X \qquad f \circ g = Id_Y \tag{8.15}$$

In tal caso g è unico e si pone $g = f^{-1}$.
Inoltre, due oggetti X e Y sono **isomorfi** se $\exists f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ isomorfismo.

Esempi. Esempi di categorie

- <u>**SET**</u> **Oggetti:** insiemi.
  Morfismi: applicazioni tra insiemi.
- <u>**GR**</u> [a] **Oggetti:** gruppi.
  Morfismi: omomorfismi di gruppi.

- **VECT**$_{\mathbb{K}}$ su campo $\mathbb{K}$ **Oggetti:** spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
  Morfismi: applicazioni lineari.
- **TOP** **Oggetti:** spazi topologici.
  Morfismi: applicazioni continue.
- **TOP*** **Oggetti:** spazi topologici con punto base (X, x_0).
  Morfismi: applicazione continue $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.
- **KTOP** **Oggetti:** spazi topologici.
  Morfismi: classi di omotopia di funzioni continue da X a Y.[b]
- Preso uno spazio topologico X, si può considerare la categoria $\mathscr{C}$ seguente:
  Oggetti: aperti di X.
  Morfismi: inclusioni.
  Nello specifico, se $U, V \subseteq X$ aperti, allora:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U, V) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } U \not\subseteq V \\ \{i\} & \text{se} U \overset{i}{\hookrightarrow} V \end{cases}$$

[a]Indicata anche con **GRP**.

[b]La composizione in **KTOP** è garantita dalla composizione di omotopie, cioè dal lemma 7.3 (Manetti 10.13).

Attenzione! Come si evince dall'esempio 6, i morfismi delle categorie possono anche *non* essere funzioni!

8.3.1 *Funtori*

Definizione 8.3.2. Siano $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ due categorie. Un **funtore** $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ consiste di due funzioni:

1. Una *funzione sugli oggetti* $\begin{aligned} F : \mathrm{Ob}(\mathscr{A}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathscr{B}) \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$.
2. Una *funzione sui morfismi* che, a seconda della sua costruzione, definisce due tipi di funtori:
   - Parliamo di **funtore covariante**[a] se, per ogni coppia di oggetti X, Y in $\mathscr{A}$, si ha un'applicazione:

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(X), F(Y)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned} \tag{8.16}$$

   Che preserva i morfismi identità e la composizione:
   - Identità: $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$

$$F(Id_X) = Id_{F(X)} \tag{8.17}$$

   - Composizione: $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y, Z)$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \tag{8.18}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] & & F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & & F(Y) \arrow[dl, "F(g)"] \\
& Z & \arrow[r, rightsquigarrow] & {} & & F(Z) &
\end{tikzcd}
$$

- Parliamo di **funtore controvariante** se, per ogni coppia di oggetti $X,\ Y$ in $\mathscr{A}$, si ha un'applicazione:

$$
\begin{aligned}
F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\ Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(Y),\ F(X)) \\
f &\longmapsto F(f)
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

  Che preserva i morfismi identità, mentre inverte la direzione della composizione:
  - IDENTITÀ: $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$:

$$
F(Id_X) = Id_{F(X)}
\tag{8.20}
$$

  - COMPOSIZIONE: $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\ Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y,\ Z)$:

$$
F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)
\tag{8.21}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] & & F(X) & & F(Y) \arrow[ll, "F(f)"'] \\
& Z & \arrow[r, rightsquigarrow] & {} & & F(Z) \arrow[ul, "F(g\circ f)"] \arrow[ur, "F(g)"'] &
\end{tikzcd}
$$

[a] In letteratura, il *funtore covariante* spesso viene indicato anche solo come *funtore*.

OSSERVAZIONE. Un funtore porta:
- Isomorfismi in isomorfismi,
- Oggetti isomorfi in oggetti isomorfi.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\ Y)$ è isomorfismo in $\mathscr{A}$, $\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y,\ X)$ tale che $g = f^{-1}$, cioè $g \circ f = Id_X,\ f \circ g = Id_Y$. Ma allora, se F è covariante:

$$
\begin{aligned}
F(g) \circ F(f) &= F(g \circ f) = F(Id_X) = Id_{F(X)} \\
F(f) \circ F(g) &= F(f \circ g) = F(Id_Y) = Id_{F(Y)}
\end{aligned}
$$

$F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(X),\ F(Y))$ è isomorfismo con inversa $F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(Y),\ F(X))$. Se F è controvariante:

$$
\begin{aligned}
F(g) \circ F(f) &= F(f \circ g) = F(Id_Y) = Id_{F(Y)} \\
F(f) \circ F(g) &= F(g \circ f) = F(Id_X) = Id_{F(X)}
\end{aligned}
$$

$F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(Y),\ F(X))$ è isomorfismo con inversa $F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(X),\ F(Y))$.

Esempi.

1. $$F : \underline{\mathbf{GR}} \longrightarrow \underline{\mathbf{SET}}$$

   Oggetti: $(G, \cdot) \mapsto G$

   Morfismi: $f : G \longrightarrow H \;\mapsto\; f : G \longrightarrow H$

   Questo *funtore covariante* si chiama anche **funtore dimenticante**, in quanto associa un gruppo all'insieme su cui si base.

   $$F : \underline{\mathbf{TOP}} \longrightarrow \underline{\mathbf{SET}}$$

   Oggetti: $(G, \mathcal{T}) \mapsto G$

   Morfismi: $f : G \longrightarrow H \;\mapsto\; f : G \longrightarrow H$

   In modo analogo, si definisce il funtore dimenticante fra **TOP** e **SET**, che associa lo spazio topologico all'insieme sui cui abbiamo definito la topologia.

2. $$F : \underline{\mathbf{VECT}}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \underline{\mathbf{VECT}}_{\mathbb{K}}$$

   Oggetti: $V \mapsto V^* = \left\{\text{applicazioni lineari } V \longrightarrow \mathbb{K}\right\}$

   Morfismi: $f : V \longrightarrow W$ lineare $\mapsto$ $\begin{aligned} f^t : W^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$

   $$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$$

   Questo *funtore controvariante* è chiamata **funzione trasposta**.

3. $$F : \underline{\mathbf{TOP}^*} \longrightarrow \underline{\mathbf{GR}}$$

   Oggetti: $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$

   Morfismi: $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \;\mapsto\; \begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$

   Questo funtore *covariante* si basa sull'omomorfismo tra gruppi fondamentali indotto da $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

Dimostrazione. Dimostriamo la funtorialità dell'ultimo esempio.

- **Identità:** $\forall (X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\underline{\mathbf{TOP}^*})$:

$$F(Id_X) = \begin{aligned} (Id_X)_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [Id_X \circ \alpha] = [\alpha] \end{aligned} \implies Id_{\pi_1(X, x_0)}$$

- **Composizione:** $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$

  Vogliamo che $F(g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$:

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(g_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha])$$

8.4 Isomorfismi e gruppi fondamentali

Corollario 8.4.0. Se $f : X \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora:

$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ è isomorfismo di gruppi, $\forall x_0 \in X$.

RICORDIAMO... Se $g \circ f$ è una funzione biunivoca, allora f è iniettiva e g è suriettiva.

COROLLARIO 8.4.1. Sia $A \subseteq X$ è un retratto con retrazione $r : X \longrightarrow A$, e sia $i : A \hookrightarrow X$.
Si ha che:

- $\forall a \in A \quad i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ è un omomorfismo *iniettivo*.
- $\forall a \in A \quad r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a)$ è un omomorfismo *suriettivo*.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo dalla definizione che $r_{|A} = Id_A$; poiché $\begin{aligned} r \circ i : A &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto r(x) \end{aligned}$,
si ha $r \circ i = r_{|A} = Id_A$. Allora, passando con il funtore all'omomorfismo di gruppi:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A, a) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "r_* \circ i_*"'] & \pi_1(X, a) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(A, a) \end{tikzcd}$$

Notiamo che $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (Id_A)_*$, cioè $r_* \circ i_*$ è biettiva. In particolare, ne consegue, per quanto detto poco sopra, che i_* è iniettiva e r_* suriettiva.

TEOREMA 8.4.0. (KOSNIOWSKI, 15.12)
Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ continue, omotope e $x_0 \in X$. Allora esiste un *isomorfismo di gruppi*:

$$\varphi : \pi_1(Y, f(x_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, g(x_0)) \tag{8.22}$$

Tale che:

$$g_* = \varphi \circ f_* \tag{8.23}$$

Più precisamente, data l'omotopia $F : X \times I \longrightarrow Y$ tra f e g, allora:

$$\gamma := F(x_0, t) : I \longrightarrow Y \tag{8.24}$$

È un arco da $F(x_0, 0) = f(x_0)$ a $F(x_0, 1) = g(x_0)$; dunque:

$$\begin{aligned} \gamma_\# : \pi_1(Y, f(x_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, g(x_0)) \\ [\alpha] &\longmapsto [\overline{\omega} * \alpha * \omega] \end{aligned} \tag{8.25}$$

é un *isomorfismo di gruppi* e si ha:

$$g_* = \gamma_\# \circ f_* \tag{8.26}$$

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X, x_0) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[rr, "\gamma_\#"'] & & \pi_1(X, g(x_0)) \end{tikzcd}$$

COROLLARIO 8.4.2. Se $f : X \longrightarrow X$ è una funzione omotopa all'identità, allora:

$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$ è isomorfismo di gruppi, $\forall x_0 \in X$.

Dimostrazione. Data l'omotopia $F : X \times I \longrightarrow Y$ tra f e Id_X, allora:

$$\gamma := F(x_0, t) : I \longrightarrow Y$$

È un arco da $F(x_0, 0) = f(x_0)$ a $F(x_0, 1) = x_0$; dunque, per il teorema precedente segue che

$$\gamma_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$$

é un *isomorfismo di gruppi* e si ha:

$$f_* = \gamma_\# \circ (Id_X)_* = \gamma_\# \circ Id_{\pi_1(X, x_0)} = \gamma_\#$$

In particolare, ne segue che $f_* = \gamma_\#$ è isomorfismo.

Ricordiamo... Siano A, B, C, D degli insiemi e f, g, h delle applicazioni come nel diagramma seguente:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Tali per cui $g \circ f$, $h \circ g$ sono biunivoche. Segue che f è biunivoca.

- f è iniettiva perché $g \circ f$ è iniettiva.
- f è suriettiva: preso $b \in B$ e il corrispettivo $g(b) \in C$, dal fatto che $g \circ f$ è biunivoca segue che $\exists a \in A : g(f(a))(g \circ f)(a) = g(b)$. Essendo $h \circ g$ biunivoca, g è iniettiva, dunque $b = f(a) \implies f$ suriettiva e segue allora la tesi.

Teorema 8.4.1. Invarianza omotopica del gruppo fondamentale (Manetti, 11.22) Siano X, Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\forall x_0 \in X$ si ha che:

$$f : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \tag{8.27}$$

È isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. In quanto $f : X \longrightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica, necessariamente $\exists$ $g : Y \longrightarrow X$ continua tale che:

$$g \circ f \sim Id_X \qquad f \circ g \sim Id_Y$$

Su $g \circ f \sim Id_X$ applichiamo il teorema precedente.

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X, x_0) \arrow[dl, "(g \circ f)_*"'] \arrow[dr, "(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}{}^{a}"] & \\
\pi_1(X, g(f_0)) \arrow[rr, "\gamma_\#", "\text{isomorfismo di gruppi}"'] & & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Per il corollario appena visto, poiché $g \circ f \sim Id_X$, segue che $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ è isomorfismo di gruppi. Allora consideriamo lo schema seguente.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,\, x_0) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[rr, bend left, "g_* \circ f_* = (g \circ f)_*"] & \pi_1(X,\, f(x_0)) \arrow[r, "g_*"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}_* \circ g_*"'] & \pi_1(X,\, g(f(x_0))) \arrow[d, "\widetilde{f}_*"] \\
 & & \pi_1(X,\, f(g(f(x_0))))
\end{tikzcd}$$

Sapendo che $f \circ g \sim Id_Y$, possiamo dimostrare in modo analogo (usando come punto base $f(x_0) \in Y$) che $\widetilde{f}_* \circ g_* = \left(\widetilde{f} \circ g\right)$ è isomorfismo di gruppi.
Applicando il ragionamento insiemistico ricordato in precedenza (pag. 104) segue che f_* è un omomorfismo biettivo, cioè un isomorfismo.

[a]Si veda a pag. 102.

Corollario 8.4.3. Se X e Y sono spazi topologici **c.p.a.** e omotopicamente equivalenti, allora hanno gruppi fondamentali isomorfi.

Dimostrazione. Dal teorema appena dimostrato sappiamo che se due spazi sono omotopicamente equivalenti, il gruppo fondamentale di X rispetto ad un qualunque punto base in X è isomorfo a quello di Y rispetto $f(x_0)$. In particolare, se gli spazi sono **c.p.a.**, il loro gruppo fondamentale è *unico* a meno di omomorfismi. Segue che il gruppo fondamentale di X è isomorfo all'unico gruppo fondamentale di Y.

Corollario 8.4.4. Sia X uno spazio topologico contraibile. Allora X è semplicemente connesso.

Dimostrazione. X contraibile significa che X ha lo stesso tipo di omotopia di $\{1 \text{ punto}\}$. Segue che, per il corollario precedente, il gruppo fondamentale di X è banale:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(\{1 \text{ punto}\}) = 0$$

Essendo X contraibile, X è anche **c.p.a.**, dunque vale la tesi.

Corollario 8.4.5. Sia $i : A \hookrightarrow X$ un retratto di deformazione. Allora $\forall a \in A$:

$$i_* : \pi_1(A,\, a) \longrightarrow \pi_1(X,\, a) \qquad r_* : \pi_1(X,\, a) \longrightarrow \pi_1(A,\, a) \tag{8.28}$$

Sono isomorfismi di gruppi.

III

Forma canonica di Jordan

CAPITOLO 9

Forma canonica di Jordan

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

9.1 teorema di cayley-hamilton

[...]

Teorema 9.1.0. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,\,n}$ e $m_A(t)$ il suo polinomio minimo. Allora, preso $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$m_A(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ è un autovalore di } A \tag{9.1}$$

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) Segue dal teorema di Cayley-Hamilton perché $m_A(\lambda) = 0 \implies C_A(\lambda) = 0 \implies \lambda$ autovalore.
$\Longleftarrow$) Sia λ un autovalore di A con autovettore associato $\underline{v}$. Si ha:

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$
$$A^2\underline{v} = A(A\underline{v}) = A(\lambda\underline{v}) = \lambda A\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$$

Allo stesso modo si arriva a $A^k\underline{v} = \lambda^n\underline{v}$. Preso un generico polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, esso si può esprimere come:

$$p = \sum_{i=0}^{d} c_i t_i \quad c_i \in \mathbb{K}$$

Allora $p(A) = \sum_{i=0}^{d} c_i A^i$ e dunque:

$$p(A)\underline{v} = \left(\sum_{i=0}^{d} c_i A^i\right)\underline{v} = \sum_{i=0}^{d} c_i \left(A^i \underline{v}\right) = \sum_{i=0}^{d} c_i \left(\lambda^i \underline{v}\right) = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{d} c_i \lambda^i\right)}_{\in \mathbb{K}} \underline{v} = p(\lambda)\underline{v}$$

Consideriamo ora un polinomio $p \in I_A$. Per sua definizione $p(A) = 0$; in particolare, da quanto scritto sopra:

$$O\underline{v} = p(\lambda)\underline{v}$$

Ed essendo v un autovettore, $v \neq 0$; dall'equazione sopra necessariamente segue $p(\lambda) = 0$. In particolare, essendo $p \in I_A$ generato dal polinomio minimo m_A (cioè $p(t) = m_A(t)q(t)$ con $q(t) \neq 0$), segue che $m_A(\lambda) = 0$.

9.2 FORMA CANONICA DI JORDAN

D'ora in poi, se non altresì specificato, considereremo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cioè tratteremo di matrici $A \in \mathbb{C}^{n,\,n}$ e endomorfismi fra spazi vettoriali complessi.

Osservazione. Poichè $\mathbb{C}$ è **algebricamente chiuso**, ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[t]$ si fattorizza completamente come prodotto di fattori lineari:

$$C_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r} \text{ con } m_i \text{ molteplicità algebrica di } \lambda_i \tag{9.2}$$

Nel caso del polinomio minimo, si ha:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{h_1} \dots (t - \lambda_r)^{h_r} \text{ con } 1 \leq h_i \leq m_i \ \forall i = 1, \dots, r \tag{9.3}$$

Come altra conseguenza, ogni matrice $n \times n$ ammette n autovalori complessi, contati con la loro molteplicità.

Sia $A \in \mathbb{C}^{n,\,n}$ una matrice associata a un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$. Se f è diagonalizzabile, esiste una base in cui la matrice di f è diagonale. Anche quando tuttavia la matrice non è diagonalizzabile, vogliamo cercare una base in cui la matrice di f è *particolarmente semplice*.

Definizione 9.2.0. Un **blocco di Jordan** $J = J_k(\lambda)$, di autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ e dimensione K, è una matrice quadrata $k \times k$ con sulla diagonale solo l'autovalore e sopra ogni elemento della diagonale 1:

$$J = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

Osservazione.
- J è determinato da λ e k.
- Il polinomio caratteristico di J è $C_J(t) = (t-\lambda)^k$, cioè λ è l'unico autovalore di J con molteplicità algebrica k.

Osservazione. Definiamo il blocco di Jordan di dimensione k con autovalore zero, necessario per calcolare l'autospazio V_λ:

$$N = J - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

Si ha che $\operatorname{rk} N = k-1 \implies \dim V_\lambda = \dim \ker N = k - \operatorname{rk} N = 1$, cioè J *non* è *mai* diagonalizzabile se $k > 1$, dato che $1 = \dim V_\lambda \le m_\lambda = k$.
Se la base $\mathscr{B}$ dello spazio V (in cui stiamo operando con l'endomorfismo associato a J) è $\left\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\right\}$, notiamo che $\underline{e}_1$ è l'unico autovettore di N e $V_\lambda = \mathscr{L}(\underline{e}_1)$. Si vede che J agisce in modo particolare sui vettori di $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} J\underline{e}_1 = \lambda \underline{e}_1 \\ J\underline{e}_2 = \underline{e}_1 + \lambda \underline{e}_2 \\ \dots \\ J\underline{e}_k = \underline{e}_{k-1} + \lambda \underline{e}_k \end{cases}$$

Anche N agisce in modo altrettanto particolare sui vettori di $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} N\underline{e}_1 = \underline{0} \\ N\underline{e}_2 = \underline{e}_1 \\ \dots \\ N\underline{e}_k = \underline{e}_{k-1} \end{cases}$$

Cioè, cominciando da $\underline{e}_k$ e applicando N ripetutamente otteniamo gli altri vettori della base.

$$\underline{e}_1 \xleftarrow[N]{} \underline{e}_2 \xleftarrow[N]{} \cdots \xleftarrow[N]{} \underline{e}_{k-1} \xleftarrow[N]{} \underline{e}_k$$

Ad esempio, con N^2 si ha:

$$\begin{cases} N^2\underline{e}_1 = \underline{0} \\ N^2\underline{e}_2 = N(N\underline{e}_2) = N\underline{e}_1 = \underline{0} \\ \dots \\ N^2\underline{e}_k = N\left(N\underline{e}_k\right) = N\underline{e}_{k-1} = \underline{0} \end{cases}$$

Infatti, se guardiamo la matrice N^2, si ha:

$$N^2 = (J - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha dunque, ad ogni potenza successiva di N, lo “spostamento” della diagonale di 1 verso destra. In particolare:

$$N^{k-1} = (J - \lambda I)^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

E in questo caso si ha la relazione con i vettori della base:

$$\begin{cases} N^{k-1}\underline{e}_i = \underline{0} \ \forall i = 1, \dots, k-1 \\ \dots \\ N^{k-1}\underline{e}_k = \underline{e}_1 \end{cases}$$

Studiando l’immagine dell’applicazione associata ad N, essendo la base dell’immagine i vettori colonna l.i., si ha $\operatorname{Im} N^{k-1} = \mathscr{L}(e_1)$.
Come già affermato dunque, è $\underline{e}_k$ a determinare l’*intera* base di V tramite la moltiplicazione per N.
Come ultima osservazione fondamentale, notiamo inoltre che $N^k = O$, cioè N è una matrice **nilpotente** di ordine k.

Definizione 9.2.1. Una matrice quadrata si dice in **forma di Jordan** se ha solo blocchi di Jordan lungo la diagonale, mentre altrove è nulla.

Esempio. La seguente matrice 9×9 è in forma di Jordan, con blocchi $J_3(2)$, $J_2(i)$, $J_3(i)$ e $J_1(-4)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Osservazione. Una matrice *diagonale* è in forma di Jordan, con un unico blocco di ordine 1 (cioè senza alcun 1 nell'elemento sopra).

Osservazione. Se A è in forma di Jordan, sulla diagonale compaiono tutti gli autovalori con la loro *molteplicità*. Dunque, se λ è un autovalore, la somma delle *dimensioni* dei blocchi relativi a λ è uguale alla *molteplicità algebrica* m_λ di λ.

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \tag{9.6}$$

Teorema 9.2.0. Esistenza e unicità della forma di Jordan Sia V uno spazio vettoriale complesso di $\dim n$ e f un endomorfismo di V. Allora *esiste* una base di V in cui la matrice di f è in forma di Jordan. Inoltre, la forma di Jordan è *unica* a meno dell'ordine dei blocchi.
In termini matriciali, ogni $A \in \mathbb{C}^{n,\,n}$ è simile ad una matrice in forma di Jordan, unica a meno dell'ordine dei blocchi:

$$J = P^{-1}AP \tag{9.7}$$

P è la matrice del cambiamento di base che presenta, nelle colonne, la base che mette A in forma di Jordan.

9.2.1 *Autospazi generalizzati*

Per dimostrare il teorema appena enunciato, faremo uso di un concetto nuovo: quello di *autospazio generalizzato*. Prima di definirlo, ricordiamo alcune proprietà legate agli endomorfismi che ci torneranno utili.

Definizione 9.2.2. Un sottospazio vettoriale V si dice **invariante** per un endomorfismo f se:

$$f(V) \subseteq V \tag{9.8}$$

Se A è la matrice associata all'endomorfismo rispetto ad una base fissata, si scrive anche $AV \subseteq V$.

Osservazione. Supponiamo che $V = U \oplus W$, con U e Wsottospazi di V; supponiamo inoltre i due sottospazi U e W siano **invarianti** per f endomorfismo, dunque $f(U) \subseteq U$ e $f(W) \subseteq W$. Prese una base $\mathscr{B}_U$ di U e una base $\mathscr{B}_W$ di W, la base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W$ è una base di V e la matrice di f rispetto a questa base è a blocchi.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array}\right)$$

- B è quadrata, di ordine $\dim U$ ed è la matrice associata a $f_{|U} : U \longrightarrow U$ rispetto a $\mathscr{B}_U$.
- C è quadrata, di ordine $\dim W$ ed è la matrice associata a $f_{|W} : W \longrightarrow W$ rispetto a $\mathscr{B}_W$.

Definizione 9.2.3. Data una funzione $f : V \longrightarrow V$ e A una matrice associata ad f; sia λ un autovalore di f (di cui ne esiste almeno uno perché in $\mathbb{C}$), $V_\lambda = \ker(f - \lambda Id) = \ker(A - \lambda I)$ l'autospazio di λ e m_λ la molteplicità algebrica di λ.
Allora l'**autospazio generalizzato** di λ è:

$$\widetilde{V} = \ker(f - \lambda Id)^{m_\lambda} = \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda} \tag{9.9}$$

Lemma 9.2.0. Proprietà degli autospazi generalizzati

1. $V_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$.
2. $\widetilde{V}_\lambda$ è invariante per A, cioè $A\widetilde{V}_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$.
3. $\dim \widetilde{V}_\lambda = m_\lambda$.
4. $f_{|\widetilde{V}_\lambda} : \widetilde{V}_\lambda \longrightarrow \widetilde{V}_\lambda$ ha polinomio caratteristico $(t - \lambda)^{m_\lambda}$.
5. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono tutti gli autovalori di A, si ha:

$$V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \widetilde{V}_{\lambda_r} \tag{9.10}$$

Dimostrazione. Fissiamo un autovalore λ di A. Analizziamo le potenze $(A - \lambda I)$, i loro nuclei e le loro immagini.

I Se $\underline{v} \in \ker(A - \lambda I)^h$, allora, per definizione:

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda I)^h \underline{v} = \underline{0} \\
&\Longrightarrow (A - \lambda I)^{h+1} \underline{v} = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^h \underline{v} = \underline{0} \\
&\Longrightarrow \underline{v} \in \ker(A - \lambda I)^{h+1} \\
&\Longrightarrow \ker(A - \lambda I)^h \subseteq \ker(A - \lambda I)^{h+1}
\end{aligned}$$

Al crescere di h:

$$\{0\} \subseteq \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^2 \subseteq \ldots \quad * \tag{9.11}$$

Cioè il nucleo della potenza h è contenuto in tutti quelli successivi. In particolare:

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda I) \subseteq \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda} \Longrightarrow V_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$$

Dimostrando così la prima proprietà.

II In modo analogo, se $\underline{w} \in \operatorname{Im}(A - \lambda I)^h$, per definizione $\exists \underline{v} \in (A - \lambda I)^h$ tale che:

$$\begin{aligned}
&w = (A - \lambda I)^h \underline{v} = (A - \lambda I)^{h-1} ((A - \lambda I)\underline{v}) \\
&\Longrightarrow \underline{w} \in \operatorname{Im}(A - \lambda I)^{h-1} \\
&\Longrightarrow \operatorname{Im}(A - \lambda I)^{h-1} \supseteq \operatorname{Im}(A - \lambda I)^h
\end{aligned}$$

Al crescere di h:

$$V \supseteq \operatorname{Im}(A - \lambda I) \supseteq \operatorname{Im}(A - \lambda I)^2 \supseteq \ldots \quad * \tag{9.12}$$

Cioè l'immagine della potenza h contiene tutte quelle successive.
Possiamo mostrare come tutti gli spazi finora visti (nuclei e immagini delle potenze $(A - \lambda I)^h$) sono invarianti:

- Se $\underline{v} \in \ker (A - \lambda I)^h$:

$$\begin{aligned} \underline{0} = A\underline{0} = A\left((A-\lambda I)^h \underline{v}\right) &\overset{a}{=} (A-\lambda I)^h A\underline{v} \\ \implies A\underline{v} &\in \ker (A-\lambda I)^h \\ \implies A\left(\ker (A-\lambda I)^h\right) &\subseteq \ker (A-\lambda I)^h \end{aligned}$$

Abbiamo appena dimostrato l'invarianza dello spazio $\widetilde{V}_\lambda$.

- Se $\underline{w} \in \operatorname{Im} (A - \lambda I)^h$ esiste $\underline{v}$ tale che:

$$\begin{aligned} &\underline{w} = (A-\lambda I)^h \underline{v} \implies A\underline{w} = A(A-\lambda I)^h \underline{v} \overset{b}{=} (A-\lambda I)^h (A\underline{v}) \\ &\implies A\underline{w} \in \operatorname{Im} (A-\lambda I)^h \\ &\implies A\left(\operatorname{Im} (A-\lambda I)^h\right) \subseteq \operatorname{Im} (A-\lambda I)^h \end{aligned}$$

III Per trovare la dimensione dell'autospazio generalizzato, sappiamo che:

$$\ker (A-\lambda I)^h \subseteq \ker (A-\lambda I)^{h+1}$$
$$\operatorname{Im} (A-\lambda I)^h \supseteq \operatorname{Im} (A-\lambda I)^{h+1}$$

Allora, se consideriamo il teorema nullità più rango sulle applicazioni $(A - \lambda I)^h$ e $(A - \lambda I)^{h+1}$ in V:

$$\begin{gathered} \dim \ker (A-\lambda I)^h + \dim \operatorname{Im} (A-\lambda I)^h \\ \shortparallel \\ n = \dim V \\ \shortparallel \\ \dim \ker (A-\lambda I)^{h+1} + \dim \operatorname{Im} (A-\lambda I)^{h+1} \end{gathered}$$

Ne consegue che:

$$\ker (A-\lambda I)^h = \ker (A-\lambda I)^{h+1} \iff \operatorname{Im} (A-\lambda I)^h = \operatorname{Im} (A-\lambda I)^{h+1} \tag{9.13}$$

Siccome V ha dimensione finita, la successione crescente $*$ dei nuclei delle potenze (eq. I, pag. 114) ad un certo punto deve *stabilizzarsi*, cioè deve esserci un'uguaglianza per tutti gli elementi successivi[c]. Denotiamo con p il più piccolo intero tale che:

$$\ker (A-\lambda I)^p = \ker (A-\lambda I)^{p+1}$$

Mostriamo che $\forall h \geq p$ valgano le seguenti relazioni:

$$\ker (A-\lambda I)^h = \ker (A-\lambda I)^p$$
$$\operatorname{Im} (A-\lambda I)^h = \operatorname{Im} (A-\lambda I)^p$$

È sufficiente mostrarlo per i nuclei, dato che vale anche per le immagini per nullità più rango.

Sia $\underline{v} \in \ker(A-\lambda I)^h \supseteq (A-\lambda I)^h$ con $h \geq p+2$.[d] Allora:

$$
\begin{aligned}
&\underline{0} = (A-\lambda I)^p \underline{v} = (A-\lambda I)^{p+1} \underbrace{\left((A-\lambda I)^{h-p-1} \underline{v}\right)}_{\in \ker(A-\lambda I)^h = \ker(A-\lambda I)^p} \\
&\implies \underline{0} = (A-\lambda I)^p \left((A-\lambda I)^{h-p-1} \underline{v}\right) = (A-\lambda I)^{h-1} \underline{v} \\
&\implies \underline{v} \in \ker(A-\lambda I)^{h-1}
\end{aligned}
$$

Iterando in questo modo, otterremo $v \in \ker(A-\lambda I)^{p+1} = \ker(A-\lambda I)^p$. Dunque, come conseguenza del termine stabilizzatore, tutti i sottospazi $\ker(A-\lambda I)^k$ (con $k < p$) sono strettamente contenuti in quelli successivi fino al termine p-esimo, mentre $\operatorname{Im}(A-\lambda I)^k$ contengono strettamente quelli successivi fino al p-esimo.

$$\{0\} \subsetneqq \ker(A-\lambda I) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \ker(A-\lambda I)^p \tag{9.14}$$

$$V \supsetneqq \operatorname{Im}(A-\lambda I) \supsetneqq \ldots \supsetneqq \operatorname{Im}(A-\lambda I)^p \tag{9.15}$$

- Si ha $p \geq 1$: se fosse $p = 0$, si avrebbe $\ker(A-\lambda I) = \{0\}$ e dunque nessun autovettore o autovalore.
- SI ha $\dim\ker(A-\lambda I)^p \geq p$: poiché nella successione abbiamo delle inclusioni strette, fra un termine e il suo successivo la dimensione deve aumentare di almeno 1.

Mostriamo ora che i termini p-esimi delle due successioni sono in somma diretta, in particolare dobbiamo solo dimostrare:

$$\ker(A-\lambda I)^p \cap \operatorname{Im}(A-\lambda I)^p = \{0\}$$

Infatti, preso $\underline{u} \in \ker(A-\lambda I)^p \cap \operatorname{Im}(A-\lambda I)^p$, $\exists \underline{v} \in V : \underline{u} = (A-\lambda I)^p \underline{v}$. Ma:

$$
\begin{aligned}
&\underline{0} = (A-\lambda I)^p \underline{u} = (A-\lambda I)^p (A-\lambda I)^p \underline{v} = (A-\lambda I)^2 p\underline{v} \\
&\implies \underline{v} \in \ker(A-\lambda I)^2 p = \ker(A-\lambda I)^p \implies \underline{u} = \underline{0}
\end{aligned}
$$

Per nullità più rango si ha $\dim\ker(A-\lambda I)^p + \dim\operatorname{Im}(A-\lambda I)^p) = \dim V$; segue che:

$$V = \ker(A-\lambda I)^p \oplus \operatorname{Im}(A-\lambda I)^p \tag{9.16}$$

In particolare sappiamo che, per l'osservazione a pag. 113, rispetto ad una base di V opportuna la matrice associata A è *a blocchi*, di cui i due non nulli sono uno *codificato* dalla restrizione dell'endomorfismo a $\ker(A-\lambda I)^p$, mentre l'altro dalla restrizione a $\operatorname{Im}(A-\lambda I)^p$. Consideriamo allora queste due restrizioni ai sottospazi:

$$\varphi : \ker(A-\lambda I)^p \longrightarrow \ker(A-\lambda I)^p$$

$$\psi : \operatorname{Im}(A-\lambda I)^p \longrightarrow \operatorname{Im}(A-\lambda I)^p$$

Facciamo le seguenti considerazioni.

- **λ è l'unico autovalore di φ.** Definiamo la matrice B associata a φ. Sappiamo che $(A-\lambda I)^p$ annulla tutti i vettori di $\ker(A-\lambda I)^p$. Dunque, la *restrizione* di $A-\lambda I$ su di esso, ovvero $B-\lambda I$ (associata all'applicazione $\varphi - \lambda Id$), è *endomorfismo nilpotente* di ordine p.

In altre parole, l'applicazione $(\varphi - \lambda Id)^p$ si *annulla* se valutata su un vettore (non nullo) $\underline{v}$ appartenente al *dominio* $\ker(A-\lambda I)^p$. Ciò equivale a dire che:

$$(B-\lambda I)^p\,\underline{v} = \underline{0}$$

Ma ciò significa: $(B-\lambda I)^p = \underline{0}$.
Preso allora il polinomio $p(t) = (t-\lambda)^p$ appartiene all'ideale di B (cioè all'ideale di φ), in particolare λ è autovalore di φ (perché $p(\lambda) = 0 \implies m_B(\lambda) = 0$).
Conseguentemente, se supponiamo di avere μ come altro autovalore di φ, si ha che $m_B(\mu) = 0 \implies p(\mu) = 0 \implies (\mu-\lambda)^p \implies \mu = \lambda$. Si ha dunque l'unicità.

- λ ***non*** **è autovalore di** ψ**.** Infatti, sia $\underline{v} \in \mathrm{Im}(A-\lambda I)$ per cui λ è il suo autovalore. Allora:

$$\begin{aligned}\psi(\underline{v}) = \lambda\underline{v} &\overset{e}{\iff} A\underline{v} = \lambda\underline{v} \iff (A-\lambda I)\underline{v} = 0\\ &\implies \underline{v} \in \ker(A-\lambda I) \subseteq \ker(A-\lambda)^p\\ &\implies \underline{v} \in \ker(A-\lambda I)^p \cap \mathrm{Im}(A-\lambda I)^p = \{0\}\end{aligned}$$

  Ma sapendo che $\ker(A-\lambda I)^p \cap \mathrm{Im}(A-\lambda I)^p = \{0\} = \{0\}$, si ha $\underline{v} = \underline{0}$, dunque *non* può λ autovalore di ψ.

Riprendendo l'osservazione a pag. 113, scelte delle opportune basi, definiamo **B** la matrice associata a φ e **A** la matrice associata a ψ in modo da avere la matrice A associata a f a blocchi.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array}\right)$$

Usiamo questa matrice per calcolare il polinomio caratteristico:^{f}

$$C_A(t) = C_B(t)\,C_C(t)$$

- $C_B(t)$ è il polinomio caratteristico di **B**, il cui unico autovalore è λ; grazie all'osservazione a pag. 9.1, possiamo dire che la molteplicità algebrica di λ come autovalore di **B** è esattamente la dimensione dello spazio **B**. Il polinomio caratteristico risulta:

$$(t-\lambda)^{\dim\ker(A-\lambda I)^p}$$

- $C_C(t)$, in quanto ψ non ha l'autovalore λ, non è divisibile per $t-\lambda$: $(t-\lambda) \nmid C_C(t)$.

Segue che la molteplicità algebrica di λ come autovalore della matrice **B** è la stessa di quella come autovalore della matrice A:

$$m_\lambda = \dim\ker(A-\lambda I)^p \geq p$$

Da cui segue:

$$\ker(A-\lambda I)^p = \ker(A-\lambda I)^{m_\lambda} = \widetilde{V}_\lambda$$

Dunque, sapendo che $\dim \widetilde{V}_\lambda = \dim\ker(A-\lambda I)^p = m_\lambda$, segue la proprietà 3.

IV Notiamo che l'endomorfismo φ definito nella dimostrazione precedente altro non è che $f_{|\widetilde{V}_\lambda} : \widetilde{V}_\lambda \longrightarrow \widetilde{V}_\lambda$, e abbiamo visto come il suo polinomio caratteristico debba essere $(t-\lambda)^m_\lambda$. Si conclude il punto 4.

V Non dimostreremo quest'ultimo punto.

[a] A e $A - \lambda I$ commutano.

[b] Si veda la nota precedente.

[c] Infatti, ogni inclusione potrebbe essere stretta e dunque la dimensione di questi sottospazi può aumentare; tuttavia, essendo V finito questi sottospazio non possono avere dimensione maggiore di n.

[d] Poiché p è tale per cui $\ker(A - \lambda I)^p = \ker(A - \lambda I)^{p+1}$, il caso $h = p + 1$ è banalmente vero.

[e] $A\underline{v}$ segue dalla definizione di ψ come restrizione dell'endomorfismo f.

[f] Nelle "Note aggiuntive", a pag. 186, si può trovare la dimostrazione della formula del determinante di una matrice a blocchi, su cui si basa la seguente formula.

Riassumendo, sappiamo ora che gli autospazi generalizzati sono invarianti e sono in somma diretta tra loro.

$$V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_r} \tag{9.17}$$

Ora, per trovare una base che mette la matrice A associata ad f in forma di Jordan, basta farlo in *ogni autospazio generalizzato* $\widetilde{V}_{\lambda_i}$, in cui l'unico autovalore è λ_i per le osservazioni precedenti. In sostanza, quello che vogliamo fare è compiere una "*separazione degli autovalori*".
Per calcolare l'autospazio generalizzato dovremmo calcolare $\widetilde{V}_\lambda = (A - \lambda I)^{m_\lambda}$, ma basterà calcolare invece $\widetilde{V}_\lambda = (A - \lambda I)^p$.
Nella sezione seguente dimostreremo l'esistenza della base di $\widetilde{V}_\lambda$ che dà la forma di Jordan.

9.2.2 *Esistenza della base dell'autospazio generalizzato che dà la forma di Jordan*

Prima di procedere dimostriamo un lemma che servirà più avanti.

Lemma 9.2.1. Siano $f : U \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari. Si ha:

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim\ker(g \circ f) - \dim\ker f \tag{9.18}$$

Dimostrazione.

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

Sia $h := g_{|\operatorname{Im} f} : \operatorname{Im} f \longrightarrow W$. Si ha:

$$\dim\ker h = \dim \operatorname{Im} f - \dim h$$

Ma $\ker h = \operatorname{Im} f \cap \ker g$ e $\operatorname{Im} h = g(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im}(g \circ f)$, dunque:

$$\begin{aligned} &\ker h = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} h \\ &\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f) \end{aligned}$$

Per dimostrare la seconda uguaglianza, abbiamo:

$$\begin{aligned} &\dim \operatorname{Im} f = \dim U - \dim\ker f \\ &\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim U - \dim\ker(g \circ f) \\ &\Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim\ker(g \circ f) - \dim\ker f \end{aligned}$$

Dimostrazione. Ricordando la successione delle immagini (equazione 9.14):

$$V \supsetneqq \operatorname{Im}(A - \lambda I) \supsetneqq \ldots \supsetneqq \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$$

Intersechiamo ogni termine con $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$:

$$\ker(A - \lambda I) \cap V \supseteq \ker(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I) \supseteq \ldots \supseteq \ker(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$$

E poniamo:

$$S_i := \ker(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^{i-1} \tag{9.19}$$

In particolare, notiamo che:
- $S_1 = \ker(A - \lambda I) \cap V = \ker(A - \lambda I) = V_\lambda$.
- $S_{p+1} = \ker(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p = \{\underline{0}\}$ perché $\ker(A - \lambda I) \subsetneqq \ker(A - \lambda I)^p$ e dunque $S_{p+1} \subseteq \ker(A - \lambda I)^p \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p = \{\underline{0}\}$.
- Può benissimo capitare che $S_i = S_{i+1}$.

Riscriviamo con questa nuova denominazione la successione creata.

$$V_\lambda = S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_p \tag{9.20}$$

Costruiamo la base di $\widetilde{V}_\lambda$.
Innanzitutto, scegliamo una base $\left\{x_1^1, \ldots, x_r^1\right\}$ del sottospazio più piccolo S_p. Per costruzione, $x_i^1 \in \operatorname{Im}(A - \lambda I)^{p-1}$, cioè:

$$\forall i = 1, \ldots, r \; \exists x_1^p \in V \quad x_i^1 = (A - \lambda I)^{p-1} x_i^p$$

È lecito definire i vettori "intermedi" fra x_i^p e x_i^1, ottenuti da moltiplicazioni successive della matrice $A - \lambda I$ al vettore x_i^p:

$$\begin{aligned} &x_i^{p-1} := (A - \lambda I) x_i^p \\ &x_i^{p-2} := (A - \lambda I) x_i^{p-1} = (A - \lambda I)^2 x_i^p \\ &\ldots \end{aligned} \tag{9.21}$$

Per capire meglio le relazioni fra questi vettori ed altri che vedremo successivamente nella dimostrazione, utilizziamo il seguente schema [**albano:2017jordan**]:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i^p & & & & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & & & & & \\
x_i^{p-1} & y_j^{p-1} & & & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & & & & \\
x_i^{p-2} & y_j^{p-2} & z_k^{p-2} & & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & & & \\
x_i^2 & y_j^2 & z_k^2 & \dots & a_t^2 & \\
\big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & & \big\downarrow{\scriptstyle A-\lambda I} & \\
x_i^1 & y_j^2 & z_k^1 & \dots & a_t^1 & b_u^1
\end{array}
$$

Notiamo che i vettori $\left\{x_i^1, \dots, x_i^p\right\}$ dà origine ad un *blocco di Jordan* $J_p(\lambda)$ di dimensione p e relativo all'autovalore λ, poiché questi vettori soddisfano la costruzione vista nell'osservazione di pag. 111: infatti, si ha $x_i^1 \in S_p \subseteq V_\lambda$, dunque x_i^1 è un autovettore di V_λ e gli altri vettori sono ottenuti dall'applicazione ripetuta di una matrice all'ultimo vettore della base[a]. Lo stesso vale $\forall i = 1, \dots, r$.
Consideriamo ora lo spazio S_{p-1}, che ricordiamo contiene S_{p-1} cioè $(S_p \subseteq S_{p-1})$. Vogliamo completare $\left\{x_1^1, \dots, x_r^1\right\}$ ad una base di S_{p-1} con dei vettori $y_1^1, \dots, y_s^1$:

$$\left\{x_1^1, \dots, x_r^1, y_1^1, \dots, y_s^1\right\}$$

Per costruzione, $y_j^1 \in S_{p-1} \subseteq \operatorname{Im}(A - \lambda I)^{p-2}$, dunque:

$$\forall j = 1, \dots, s \; \exists y_1^{p-1} \in V \quad y_j^1 = (A - \lambda I)^{p-2} \, y_j^{p-1}$$

Per ogni j otteniamo $p-1$ vettori $\left\{j_i^1, \dots, j_i^{p-1}\right\}$ tali che $y_j^s \in V_\lambda$ e $j_i^{i-1} := (A - \lambda I) y_j^i$ $\forall i = 2, \dots, p-1$. Analogamente al caso precedente, questo gruppo di vettori dà origine ad un *blocco di Jordan* di ordine $p-1$.
Procediamo in questo modo: prendiamo la base ottenuta per S_i e la completiamo ad una di $S_{i-1} \supseteq S_i$; poiché ogni vettore aggiunto appartiene a $\operatorname{Im}(A - \lambda I)^{i-2}$, applicando $i-2$ volte la matrice $A_\lambda I$ al vettore z_k^{i-1} (fino ad ottenere z_k^1) otteniamo un'insieme di vettori che generano un blocco di Jordan di dimensioni i e di autovalore λ.
Chiaramente, poiché potrebbe anche accadere che $S_{i-1} = S_i$, si prosegue senza aggiungere vettori alla base e si passa al sottospazio successivo.
Arriviamo con queste iterazioni fino a $S_2 = V_\lambda \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)$: completiamo la base da S_3 ad una di S_2 aggiungendo i vettori $\left\{a_1^1, \dots, a_t^1\right\}$. Sappiamo che $\exists a_t^2 : a_t^1 = (A - \lambda I)^{p-2} a_t^2$, dunque abbiamo i due vettori che formano il blocco di Jordan di dimensione 2.
Infine, completiamo ad una base di S_1 aggiungendo i vettori $\left\{b_1^1, \dots, b_u^1\right\}$. In questo caso, non abbiamo bisogno di calcolare altri vettori b_u^i $\forall u$ (al variare di i) come prima, in

quanto i vettori, per definizione di S_1, appartengono anche a $\ker(A-\lambda I)$. Allora, $\forall u\ b_u^1$ generano blocchi di Jordan di dimensione 1.
Al variare di $i, j, k, \ldots, t, u$ abbiamo costruito un insieme di vettori tutti appartenenti a $\widetilde{V}_\lambda = \ker(A.\lambda I)$: nello schema precedente essi sono tutti i vettori appartenenti a tutte le colonne, da quella di x_i a quella di b_u.
Vogliamo contare quanti sono questi vettori. Innanzitutto, dobbiamo considerare che lo schema, per compattezza, rappresenta *solo una colonna* per ciascun x_i, y_j, ..., ma in realtà c'è una colonna analoga alla prima *per ogni vettore* della base di S_p, una colonna analoga alla seconda per ogni vettore della base di S_{p-1} e così via. In pratica, abbiamo $\dim S_p = r$ colonne con x_i, $\dim S_{p-1} - \dim S_p = s$ colonne con y_j e così via.
Contiamo adesso gli elementi per *righe*. L'*ultima riga*, quella di x_i^1, $y_j^1\ z_k^1 \ldots$, a_t^1, b_u^1 al variare di $i, j, k, \ldots, t, u$, sono per costruzione i vettori di una base di S_1, e quindi il loro numero sono $\dim S_1$.
Sulla *penultima riga* non abbiamo i vettori b_u e i vettori x_i^2, $y_j^2\ z_k^2 \ldots$, a_t^2 presenti sono in numero uguale ai vettori x_i^1, $y_j^1\ z_k^1 \ldots$, a_t^1 al variare di $i, j, k, \ldots, t$, base di S_2 e quindi ne abbiamo $\dim S_2$.
Proseguendo così, il numero di vettori della i-esima riga è pari alla dimensione dello spazio S_i; in totale l'insieme è formato da N vettori, con:

$$N = \sum_{i=1}^{p} \dim S_i \tag{9.22}$$

Usando il lemma 9.2 (pag. 118), otteniamo che:

$$\begin{aligned}
\dim S_i &= \dim\left(\ker(A-\lambda I) \cap \operatorname{Im}(A-\lambda I)^{i-1}\right) = \\
&= \dim\ker(A-\lambda I)^i - \dim\ker(A-\lambda I)^{i-1} \\
&\Longrightarrow \\
N = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \dim S_i &= \textstyle\sum_{i=1}^{p}\left(\dim\ker(A-\lambda I)^i - \dim\ker(A-\lambda I)^{i-1}\right) = \\
&= \dim\ker(A-\lambda I)^p - \dim\ker(A-\lambda I)^0 = \\
&= \dim\ker(A-\lambda I)^p = \widetilde{V}_\lambda
\end{aligned}$$

L'insieme dei vettori, che ricordiamo essere tutti contenuti in $\widetilde{V}_\lambda$, ha *cardinalità* pari alla *dimensione dell'autospazio generalizzato*. Ci resta dunque da dimostrare che i vettori siano *linearmente indipendenti* per verificare che essi siano a tutti gli effetti la base cercata di $\widetilde{V}_\lambda$.
Per dimostrarlo, prendiamo la combinazione lineare seguente:

$$\sum_i \alpha_i x_i^p + \sum_i \beta_i x_i^{p-1} + \ldots + \sum_i \gamma_j y_j^{p-1} + \ldots + \sum_u \delta_u b_u^1 = 0$$

Applicando $(A-\lambda I)^{p-1}$ tutti i termini si *annullano* eccetto x_i^p e coefficienti al variare di i, ovvero:

$$\sum_i \alpha_i (A-\lambda I) x_i^p = 0 \implies \sum_i \alpha_i x_i^1 = 0$$

Poichè x_i^1 al variare di i sono *linearmente indipendenti* (sono base di S_p!), i loro coefficienti devono necessariamente *tutti* nulli: $\alpha_i = 0 \forall i$. La combinazione lineare sopra diventa:

$$\sum_i \beta_i x_i^{p-1} + \ldots + \sum_i \gamma_j y_j^{p-1} + \ldots + \sum_u \delta_u b_u^1 = 0$$

Applicando $(A - \lambda I)^{p-2}$, nella combinazione lineare rimangono solo x_i^{p-1} e y_j^{p-1} al variare di i e j con i loro coefficienti. Complessivamente, i vettori formano la base già vista di S_{p-1}, dunque i coefficienti risultano nulli: $\beta_i = 0$, $\gamma_j = 0 \ \forall i, j$.
Allo stesso modo, applicando $(A - \lambda I)^{p-3}$, ... si vede che tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli, ovvero i vettori dell'insieme sono **linearmente indipendenti**.

[a] Chiaramente ciò non implica che il blocco di Jordan in esame sia proprio A! A ha sempre ordine $n \times n$, mentre il blocco ottenuto dalla base in questione ha ordine $p \times p$, con $p \leq n$.

9.2.3 *Unicità della forma di Jordan*

Dimostrazione. Per ultima cosa osserviamo come la forma di Jordan di A sia unica.
Sulla sua diagonale compaiono, per definizione, gli *autovalori con molteplicità*: questo dipende esclusivamente dalle radici del polinomio caratteristico e dunque da A stessa.
Per un dato autovalore λ, abbiamo ottenuto dei blocchi di Jordan corrispondenti agli spazi S_k di dimensione k e di numero pari ai vettori aggiunti per completare la base dello spazio S_{k+1} passo per passo (ovvero $\dim S_{k-1} - \dim S_k$, dato che ogni vettore aggiunto x_i^1 genera la successione $x_i^1, \ldots, x_i^k$). Poiché il *numero dei blocchi* dipende esclusivamente da $A - \lambda I$, dunque da A stessa, e *non* dal procedimento, la forma di Jordan di A è unica.

Il corollario seguente è immediato.

Corollario 9.2.0. Due matrici in forma di Jordan sono simili se e solo se hanno gli stessi blocchi (a meno dell'ordine).

9.2.4 *Polinomio minimo e forma di Jordan*

Proposizione 9.2.0. Sia A una matrice complessa $n \times n$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli autovalore distinti di A e, per ogni $i = 1, \ldots, r$, sia p_i l'ordine del più grande blocco di Jordan di A relativo a λ_i. Allora il polinomio minimo di A è:

$$m_A(t) = (t - \lambda_i)^{p_1} \ldots (t - \lambda)^{p_r} \tag{9.23}$$

L'osservazione che qui facciamo ci servirà nella dimostrazione della proposizione.

Osservazione. Se $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$, allora:

$$p(A)q(A) = q(A)p(A) \tag{9.24}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che A sia già in forma di Jordan.
Consideriamo $A - \lambda_1 I$, rappresentata in figura: ha, nella parte rossa, dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore zero. Poichè la parte rossa è una sottomatrice nilpotente

di ordine p_1, ne consegue che $(A-\lambda_1 I)^{p_1}$ ha la matrice nulla nella parte zero.
In generale, $(A-\lambda_i I)^{p_i}$ è nullo nel blocco $m_i \times m_i$ corrispondente a λ_i.

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ne segue che $(A-\lambda_1 I)^{p_1} \dots (A-\lambda_r I)^{p_r}$ è la matrice nulla, perché ha ogni blocco nullo. Ciò significa che il seguente polinomio si annulla su A e dunque appartiene al suo ideale:

$$f(t) = (t-\lambda_1)^{p_1} \dots (t-\lambda_r)^{p_r} \in I_A$$

Perciò il polinomio minimo divide f: $m_A(t) \mid f(t)$.
Consideriamo ora $(A-\lambda_1 I)^h$ con $h < p_1$: come abbiamo visto nello studio delle proprietà dei blocchi di Jordan, esso ha nel primo blocco una colonna uguale a $\underline{e}_1 = (1,\ 0,\ \dots 0)^{\mathsf{T}}$, diciamo ad esempio la colonna $s \in \{1,\ \dots,\ m_1\}$.
Posto $d_i \geq 1$, $(A-\lambda_i I)^{d_i}$ nel posto $(1,\ 1)$ ha $(\lambda_1-\lambda_i)^{d_i} \neq 0$ se $i = 2,\ \dots,\ r$. Infatti, A (presa in forma di Jordan) è triangolare superiore e ha λ_1 al posto $(1,\ 1)$; allo stesso modo $A-\lambda_i I$ è triangolare superiore e ha $\lambda_1 - \lambda_i$ al posto $(1,\ 1)$.
Ne consegue che $\displaystyle\prod_{i=2}^{r}(A-\lambda_i I)^{d_i}$ ha un numero $\neq 0$ nel posto $(1,\ 1)$. Allora, utilizzando l'osservazione ad inizio sezione che garantisce la commutatività del prodotto:

$$(A-\lambda_1 I)^h \prod_{i=2}^{r}(A-\lambda_i I)^{d_i} = \prod_{i=2}^{r}(A-\lambda_1 I)^{d_i}(A-\lambda_i I)^h$$

Rappresentando visivamente il prodotto di queste due matrici:

$$\begin{pmatrix} * \neq 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

Al posto $(1,\ s)$ otteniamo il valore $* \neq 0$, dunque il prodotto complessivo è diverso da zero. Si ha:

$$(t-\lambda_1)^h \prod_{i=2}^{r}(t-\lambda_i)^{d_i} \notin I_A \text{ se } h < p_1$$

Segue che qualunque blocco di Jordan di ordine non massimo fa sì che il polinomio scritto sopra non appartenga all'ideale di A, e dunque il più piccolo polinomio che è diviso da $m_A(t)$ (al quale dunque deve coincidere necessariamente) è $f(t)$ visto sopra.

Corollario 9.2.1. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,\ n}$. Allora A è **diagonalizzabile** se e solo se il suo polinomio minimo ha tutte radici di molteplicità 1.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, la molteplicità delle radici del polinomio minimo corrisponde alla dimensione del più grande blocco di Jordan di A relativo a λ_i.
Segue chiaramente che se $m_{\lambda_i} = 1 \ \forall i$ l'ordine di tutti i blocchi è 1, dunque A è diagonalizzabile.
Viceversa, se A è diagonalizzabile, tutti i blocchi sono di dimensione 1 e questa, per la stessa proposizione di prima, corrisponde alla molteplicità delle radici del polinomio caratteristico.

Osservazione. La forma di Jordan determina il polinomio minimo e il polinomio caratteristico, ma *non* vale il viceversa. Per esempio, prendiamo le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Queste due matrici hanno forme di Jordan *diverse*, ma hanno entrambe:

$$C_A = (t-2)^7 \qquad m_A = (t-2)^3 \dim V_2 = 3$$

9.2.5 *Impratichiamoci! Forma canonica di Jordan*

Tips & Tricks! Alcune nozioni utili per il calcolo della base e della forma di Jordan.

1. Per calcolare l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_\lambda = \ker (A - \lambda I)^{m_\lambda}$ è sufficiente calcolare, *se conosco il massimo ordine p dei blocchi di Jordan relativi a λ*:
$$\widetilde{V}_\lambda = \ker (A - \lambda I)^p \tag{9.25}$$
2. Si ha, per le osservazioni fatte nella dimostrazione precedente:
$$\dim S_i - \dim S_{i+1} = \#\text{ blocchi di Jordan di dimensione } i \tag{9.26}$$
3. L'autospazio $V_\lambda = S_1$ ha come base tutti i vettori aggiunti a partire dalla base di S_p, compresi i vettori di quest'ultima base; poiché per ognuno di questi vettori abbiamo, per costruzione, un blocco di Jordan relativo a λ, il numero di questi vettori corrisponde al *numero totale di blocchi di Jordan, cioè la molteplicità geometrica di λ*:
$$\dim V_\lambda = \#\text{ blocchi di Jordan relativi a } \lambda \tag{9.27}$$
4. Per l'osservazione a pag. 113:
$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \tag{9.28}$$

5. Per l'osservazione a pag. 122, l'*esponente di $t-\lambda$ nel polinomio minimo m_A è la dimensione del blocco più grande relativo a λ.*

$$m_\lambda = \sum \text{dimensioni dei blocchi relativi a } \lambda \tag{9.29}$$

6. *Se conosco già le dimensioni dei blocchi di Jordan* di λ:

$$a_1 \leq \ldots \leq a_r = p$$

mi basta calcolare i sottospazi:

$$S_{a_1} \supseteq \ldots \supseteq S_{a_r} = S_p$$

7. Se A ha un'*unico* autovalore λ, allora $V = \widetilde{V}_\lambda$ e $(A-\lambda I)^p = 0$. In particolare segue che:

$$\begin{aligned} &\forall \underline{v} \in \mathrm{Im}\,(A-\lambda I)^{p-1} \ \exists \underline{u} \in (A-\lambda I)^{p-1} \ : \ (A-\lambda I)^{p-1}\,\underline{u} = \underline{v} \\ &\Longrightarrow \ \underline{0} = (A-\lambda I)^p\,\underline{u} = (A-\lambda I)\,\underline{v} \\ &\Longrightarrow \ \underline{v} \in \ker(A-\lambda I) \\ &\Longrightarrow \ \mathrm{Im}\,(A-\lambda I)^{p-1} \subseteq \ker(A-\lambda I) \\ &\Longrightarrow \ S_p = \mathrm{Im}\,(A-\lambda I)^{p-1} \cap \ker(A-\lambda I) = \mathrm{Im}\,(A-\lambda I)^{p-1} \end{aligned}$$

Pertanto, nel caso S_p non c'è bisogno di intersecare con V_λ! Questo tuttavia *non* si applica agli altri S_i, dato che *non* vale la relazione $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)^i \subseteq \ker(A-\lambda I)$.

8. Se so che per λ tutti i blocchi di Jordan hanno la stessa dimensione p, *possiamo calcolare direttamente* $S_p = \mathrm{Im}\,(A-\lambda I)^{p-1} \cap V_\lambda$.

Esercizio. Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcolare la sua forma di Jordan e la base per cui essa è in tale forma.

Soluzione. Il suo polinomio caratteristico è $C_A(t) = (t-2)^3$ e $\lambda = 2$ è l'unico autovalore, con molteplicità algebrica $m_\lambda = 3$. Studiamo l'autospazio:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Il rango è rk $(A-2I) = 1$ e la molteplicità geometrica è pertanto $\dim V_2 = 2$. Notiamo che le possibili forme di Jordan di una matrice 3×3 con unico autovalore 2 sono:

3 blocchi, $\dim V_2 = 3$ 2 blocchi, $\dim V_2 = 2$ 1 blocco, $\dim V_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Come osservato precedentemente, la molteplicità geometrica di λ dà il numero di blocchi di Jordan della matrice, pertanto ho sicuramente due blocchi di Jordan e, avendo fatto tutti i casi, sappiamo senza altri calcoli che il blocco massimo ha ordine $p = 2$. La situazione in termini di spazi S_i, è:

$$V_2 = S_1 \supseteq S_2 = \operatorname{Im}(A - 2I)$$

Avendo un unico autovalore, nel caso S_2 non abbiamo bisogno di calcolare l'intersezione con l'autospazio. Dunque, cerchiamo una base di $S_2 = \operatorname{Im}(A - 2I)$. Sappiamo già che la sua base è di un solo vettore, dato che $\operatorname{rk}(A - 2I) = 1 = \dim \operatorname{Im}(A - 2I)$. Essendo l'immagine, possiamo prendere un vettore colonna della matrice $A - 2I$, che definiremo x_1^1; ad esempio, prendiamo la prima colonna:

$$x_1^1 = (6,\ 0,\ 9)$$

Per la scelta effettuata, per costruire x_1^2 ci è sufficiente prendere il vettore $(1,\ 0,\ 0)$:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= (6,\ 0,\ 9) = (A - 2I)(1,\ 0,\ 0) \\ x_1^2 &= (1,\ 0,\ 0) \end{aligned}$$

Allora $\left\{x_1^1,\ x_1^2\right\}$ dà il blocco di Jordan di ordine 2.
Completiamo $\left\{x_1^1\right\}$ ad una base di V_2. Esplicitando l'autospazio:

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \{3x + 3y + 2z = 0\}$$

Possiamo scegliere ad esempio $(-1,\ 1,\ 0)$, ottenendo allo stesso tempo il vettore che dà il blocco di ordine 1 di Jordan. La base che rende A in forma di Jordan è:

$$\{(6,\ 0,\ 9),\ (1,\ 0,\ 0),\ (-1,\ 1,\ 0)\}$$

Esercizio. Esercizio 4, scritto Luglio 2018
Sia A matrice quadrata complessa 6×6. Dire quali delle seguenti affermazioni possono verificarsi, motivando la risposta.

1. Il polinomio minimo di A è $(t-2)^5$, l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3.
2. Il polinomio minimo di A è $(t-2)(t-3)^3$, l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3.
3. A ha polinomio caratteristico è $(t-2)^6$ e $A^2 - A - I = O$.
4. $A^2 - A - I = O$ e A ha autovalori *non* reali.

Soluzione.

I A ha un unico autovalore 2, di *molteplicità algebrica* 6, dunque il *più grande* blocco di Jordan nella forma di Jordan di A ha dimensione 5; poiché la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è la molteplicità geometrica, segue che il numero di blocchi relativi a 2 sono 3.
Non si può dunque verificare, in quanto con la condizione di avere un blocco di dimensione 5 non ci può essere più di un solo blocco di dimensione 1.

II A ha autovalori 2 e 3, di *molteplicità algebrica* rispettivamente 1 e 3, dunque il *più grande* blocco di Jordan nella forma di Jordan di A riferito a 2 ha dimensione

1, mentre quello riferito a 3 è 3; poiché la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è la molteplicità geometrica, segue che il numero di blocchi relativi a 2 sono 3.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & & & & & \\ & \boxed{2} & & & & \\ & & \boxed{2} & & & \\ & & & 3 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 3 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

III Si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ f(t) = t^2 - t - 1 \\ \blacksquare\ f(A) = O \end{array}\right\} = f(t) \in I_A$$

Tuttavia $f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_1)$. Dunque, consideriamo:

$$m_A(t) \mid f(t) \implies m_A(t) = \begin{cases} t - \lambda_1 \\ t - \lambda_2 \\ f(t) \end{cases}$$

Inoltre, $m_A(t) \mid C_A(t) = (t-2)^6$.
Notiamo che:

$$f(2) = 4 - 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Poiché $\lambda = 2$ è l'unico autovalore di A ed $f \in I_A$, si avrebbe $f(2) = 0$, cioè abbiamo un assurdo.

IV Si ha $f(t) = t^2 - t - 1 \in I_A$:

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ sono entrambe } \textit{non} \text{ reali.}$$

Allora $f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_1)$ e, per le osservazioni del punto precedente:

$$m_A(t) = \begin{cases} t - \lambda_1 \\ t - \lambda_2 \\ f(t) \end{cases}$$

Allora, gli autovalori di A possono essere solo $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, dunque A non può avere autovalori complessi.

9.3 FUNZIONE ESPONENZIALE NEI COMPLESSI

La **funzione esponenziale** e^x ($x \in \mathbb{R}$) si può *caratterizzare* in diversi modi; sia con il concetto di limite:

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Oppure come il valore della serie di potenze:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Vogliamo ora definire una funzione analoga anche in campo complesso.

Definizione 9.3.0. Sia $z \in \mathbb{C}$. Definiamo come **funzione esponenziale sui numeri complessi** la seguente serie:

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{9.30}$$

Essa è una funzione continua

Dimostrazione. Dimostriamo che sia ben definita la funzione mostrando la convergenza della serie. In realtà possiamo mostrare che la serie **converge assolutamente**[a] Dunque, con i complessi consideriamo il *modulo* $|\cdot|$:

$$|\frac{z^n}{n!}| = \frac{|z|^n}{n!} \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \tag{9.31}$$

Questa serie nei reali converge ad $e^{|z|}$: la serie pertanto converge assolutamente e dunque la funzione è ben definita; se $z \in \mathbb{R}$ allora l'esponenziale è in tutto e per tutto quello noto nei reali.
Studiamo ora la continuità, dimostrando che **converga uniformemente**[b] in qualunque sottoinsieme limitato, utilizzando l'M-test di Weierstrass. Se $S \subseteq \mathbb{C}$ è un sottoinsieme limitato, sicuramente esso è sottoinsieme di un disco nel piano complesso di centro l'origine e raggio ε. Dunque, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : |z| < \varepsilon \ \forall z \in S$. Allora varrà:

$$|\frac{z^n}{n!}| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!}$$

Passando alle serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} < \infty$$

Allora la funzione esponenziale converge uniformemente su S, dunque $e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua.

[a] Si può parlare di convergenza assoluta in spazi topologici dotati di una *norma*; si ha che la convergenza implica la convergenza "classica" se lo spazio è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

[b] Nelle "Note aggiuntive", a pag. 187, si può trovare la definizione della convergenza uniforme e alcune osservazioni a riguardo.

Proposizione 9.3.0. L'esponenziale in campo complesso gode delle seguenti proprietà:

1. $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$.
2. $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.
3. Se $t \in \mathbb{R}$, si ha $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Dimostrazione.

I Dati $z,\ w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \overset{a}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}}_{n=k+m} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}}_{\text{Binomio di Newton}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w} \\ &\implies e^z \cdot e^w = e^{z+w} \end{aligned}$$

II $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$.

III Si ha:

$$\begin{aligned} e^{it} = &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (t)^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (t)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

[a] Il prodotto è lecito in quanto si ha la convergenza assoluta della serie.

OSSERVAZIONE.

- $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \implies |e^z| = e^x = e^{\Re \mathfrak{e}\, z}$
  L'argomento di e^z è, per costruzione, $y = \Im\mathfrak{m}\, z$
- $e^{2\pi i} = 1$, mentre $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$
- $e^z \neq 0$, dunque $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ \exists z \in \mathbb{C} : e^z = w$, cioè $e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti, se $w = x + iy$ si può scrivere in forma polare come:

$$w = |w| (\cos y + i \sin y)$$

  Notiamo che:
  - $w = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$, dunque anche il modulo è zero se e solo se x e y sono entrambi zero.
  - $|w| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$, dunque per suriettività dell'esponenziale reale $\exists a \in \mathbb{R}$ tale per cui $e^a = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - L'argomento di w è $\arg(w) = y$
  - $(\cos y + i \sin y) = e^{iy}$.

  Allora, esiste $z = a + iy$ tale che:

$$w = x + iy = |w| (\cos y + i \sin y) = e^a (\cos y + i \sin y) = e^{a+iy} = e^z$$

9.3.1 *Esponenziale di una matrice quadrata complessa*

DEFINIZIONE 9.3.1. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,\,n}$. Definiamo l'**esponenziale di una matrice quadrata**

complessa come:

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{A^k}{k!}}_{\text{matrice } n\times n} \qquad e^A \in \mathbb{C}^{n,\,n} \tag{9.32}$$

Questa serie di matrici converge se e solo se convergono *tutte* le serie che danno origine ai suoi n^2 elementi. Per dimostrare la convergenza, usiamo una norma particolare.

Definizione 9.3.2. La **norma infinito di una matrice** $A \in C^{n,\,n}$ è:

$$\|A\|_\infty = \max_{i,\ j=1,\ \dots,\ n} |a_{ij}| \tag{9.33}$$

Lemma 9.3.0. Proprietà della norma infinito di una matrice.
Date le matrici $n \times n$ A e B:

1. $\|A+B\|_\infty \le \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.
2. $\|A \cdot B\|_\infty \le n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Dimostrazione.

I $\forall i,\ j\ |a_{ij}+b_{ij}| \le |a_{ij}| + |b_{ij}| \le \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$. Per l'arbitrarietà di i e j, vale la tesi.

II Sia $C = AB$. Allora:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ \Longrightarrow |c_{ij}| &\le \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \le n\|A\|_\infty \|B\|_\infty \quad \forall i,\ j \Longrightarrow \|C\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che l'esponenziale di una matrice complessa sia ben definito. Consideriamo la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \left\|A^2\right\|_\infty &\le n\|A\|_\infty^2 \\ \left\|A^3\right\|_\infty &\le n\left\|A^2\cdot A\right\|_\infty \le n\|A\|_\infty^2\|A\|_\infty \le n^2\|A\|_\infty^3 \end{aligned}$$

Per induzione in questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} \left\|A^k\right\|_\infty &\le n^{k-1}\|A\|_\infty^k \\ \Longrightarrow \left\|\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right\|_\infty &\le \sum_{k=0}^{N} \frac{\left\|A^k\right\|_\infty}{k!} \le \sum_{k=0}^{N} \frac{n^{k-1}\|A\|_\infty^k}{k!} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!} \ \overrightarrow{N\to\infty}\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!} = \frac{1}{n}e^{n\|A\|_\infty} \end{aligned}$$

Allora $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge assolutamente, pertanto e^A è ben definito.

Attenzione! In generale si ha $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$! Infatti, il prodotto di matrici non è *commutativo*, pertanto in generale non vale la formula del *binomio di Newton*, necessaria nella dimostrazione della proprietà di cui sopra.

Esempio. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
A è una *matrice diagonale*, dunque e^A è facile da calcolare; infatti, presa una qualunque matrice diagonale D:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \implies D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^D = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_n} \end{pmatrix} \tag{9.34}$$

Dunque, nel nostro caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Invece, B è *nilpotente* di ordine due, dato che $B^2 = O$. Allora, scrivendo la serie che caratterizza e^B, tutti i termini successivi al secondo sono nulli! Pertanto:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies e^B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!} = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora:

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

D'altro canto, abbiamo che:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificheremo successivamente (pag. 134), quando mostreremo come calcolare in generale l'esponenziale di una matrice, che $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$.

Lemma 9.3.1. Se $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ *commutano*, cioè $AB = BA$, allora:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \tag{9.35}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è assolutamente analoga a quella vista per dimostrare la proprietà parallela dell'esponenziale dei numeri complessi (lemma 9.2, pag. 128), dato che, se commutano, vale il *binomio di Newton matriciale*:

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i \cdot B^{k-1} \tag{9.36}$$

Osservazione. *Matrici simili hanno esponenziali simili.* Più precisamente, se $A = P^{-1}BP$ per una opportuna matrice ortogonale P, allora $e^A = P^{-1}e^BP$, cioè e^A e e^B sono simili tramite la stessa matrice P di A e B.

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}BP \\ A^2 &= \left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}BP\right) = P^{-1}B^2P \end{aligned}$$

Per induzione in questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} A^k &= P^{-1}B^kP \\ \implies e^A &= \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{-1}B^kP}{k!} = P^{-1} \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} P = P^{-1}e^BP \end{aligned}$$

Teorema 9.3.0. Si ha:

$$\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)} \tag{9.37}$$

In particolare, e^A è sempre una matrice invertibile.

Dimostrazione. Una qualunque matrice A complessa è simile alla sua forma di Jordan J. La traccia di matrici simili, per commutatività interna della traccia[a], è uguale:

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(J) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

Per la dimostrazione precedente, e^A è simile a e^J; in particolare, i determinanti sono uguali:

$$\det\left(e^A\right) = \det\left(e^J\right)$$

Allora è sufficiente dimostrare che $\det\left(e^J\right) = e^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} = e^{\lambda_1}\ldots e^{\lambda_n}$. J è una matrice triangolare superiore. Le osservazioni seguenti sono vere anche per una qualsiasi matrice triangolare superiore:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \forall k \geq 1 \; J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$e^J = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{9.38}$$

Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto sulle colonne, dunque vale $\det\left(e^J\right) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}$ come cercato. In particolare, questo prodotto, in quanto *prodotto di esponenziali, non è mai nullo* e dunque il determinante è *diverso da zero*.

[a] Per ogni matrice A di dimensioni $n \times m$ e B di dimensioni $m \times n$ si ha $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

9.3.2 *Calcolo dell'esponenziale di una matrice tramite la forma di Jordan*

Abbiamo già calcolato alcuni esponenziali di matrici in diverse delle precedenti dimostrazioni, sfruttando tuttavia sempre matrici particolari:

- **Matrice diagonale**:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \implies e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_n} \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

- **Matrice nilpotente**: se la matrice è nilpotente di ordine k ($B^k = O$) si calcolano i primi k termini della serie caratterizzante e^B:

$$e^B = \sum_{i=0}^{i-1} \frac{B^i}{i!} = I + B + \dots + \frac{B^{k-1}}{(k-1)!} \tag{9.40}$$

In generale, tuttavia, come possiamo calcolare l'esponenziale di una generica matrice A? A questo proposito ci viene in aiuto la tanto faticata forma di Jordan. Il seguente processo costruttivo ci permette di calcolare, in modo (relativamente) facile, un qualsiasi esponenziale e^A.

1. A è simile alla sua forma di Jordan J:

$$A = PJP^{-1}$$

   Con P è la matrice del cambiamento di base che presenta, nelle colonne, la base che mette A in forma di Jordan. Sappiamo allora che per la stessa matrice P gli esponenziali sono simili:

$$e^A = Pe^JP^{-1}$$

   Allora è sufficiente calcolare P, J e e^J.

2. J è una matrice a blocchi diagonali, dunque la potenza k-esima è una matrice con le potenze k-esime dei blocchi sulla diagonale:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \boxed{\mathbf{B_r}} \end{pmatrix} J^k = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B_1}^k} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \boxed{\mathbf{B_r}^k} \end{pmatrix}$$

Dunque usando la definizione , segue che, l'esponenziale è anch'essa una matrice a blocchi:

$$e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{\mathbf{B}_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \boxed{e^{\mathbf{B}_r}} \end{pmatrix}$$

Dunque, per calcolare l'esponenziale di una matrice in forma di Jordan basta saper calcolare l'esponenziale di un blocco di Jordan.

3. Notiamo che un blocco di ordine p si può sempre scomporre in una matrice diagonale λI_p e una matrice nilpotente N di soli 1.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I_p + N$$

Poiché N e λI_p commutano, vale:

$$e^{\mathbf{B}} = e^{\lambda I + N} = e^{\lambda I} e^N \tag{9.41}$$

Dunque basta calcolare $e^{\lambda I}$ e e^N, ma sono due matrici di sappiamo già come calcolare l'esponenziale:

- $e^{\lambda I}$ è una *matrice diagonale*:

$$e^{\lambda I} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda I \tag{9.42}$$

- e^N è una *matrice nilpotente* di ordine p:

$$e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = I + N + \dots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \tag{9.43}$$

Esempio. Riprendiamo l'esempio di pagina 131. Prendiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e consideriamo $C = A + B = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

C ha autovalori 1 e 2 ed è diagonalizzabile con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; una base di una autovettori di C è $(1, 0)$ e $(1, 1)$ e la matrice del cambiamento di basi è $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora, considerata l'inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$C = PDP^{-1} \implies e^C = Pe^D P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -e+e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$
$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}(I+B) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^C$$

9.3.3 *Impratichiamoci! Funzione esponenziale nei complessi*

Esercizio. Esercizio 4, scritto Febbraio 2018
Sia $A = e^{\lambda I} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $\exp(A) = e^A$

Soluzione. Il polinomio minimo è $C_A(t) = (t+1)^2$, l'unico autovalore della matrice è $\lambda = -1$ con molteplicità $m_\lambda = 2$. Troviamo la forma di Jordan.

$$V_\lambda = \ker(A+I) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(x,\ y) \mid x - 2y = 0\} = \langle(2,\ 1)\rangle$$

Poiché $\dim V_\lambda = 1$, segue che la forma di Jordan è un unico blocco di ordine $p = 2$:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora una matrice P, e dunque una base $\mathscr{B}$, che mette A in forma di Jordan ($A = PJP^{-1}$). Poichè abbiamo un unico autovalore, $(A-\lambda I)^2 = O$ e $\operatorname{Im}(A-\lambda I) \subseteq \ker(A-\lambda I)$. Studiamo $S_2 = \ker(A+I) \cap \operatorname{Im}(A+I)^{p-1} = \operatorname{Im}(A+I)$; esso ha $\dim S_2 = 1$ e per trovarne una base basta prendere una colonna di $A+I$:

$$v_2 = (2,\ 1) =$$

Per costruire v_1 è sufficiente prendere $(-1,\ 0)$:

$$v_2 = (2,\ 1) = (A+I)(-1,\ 0)$$
$$v_1 = (-1,\ 0)$$

Una base che mette A in forma di Jordan è dunque $\mathscr{B} = \{(2,\ 1),\ (-1,\ 0)\}$ e dunque abbiamo P:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inversa è, noto il determinante $\det P = 1$:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo e^J:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -I + N$$

Dunque:

$$\begin{aligned} e^J &= e^{-I+N} = e^{-I}e^N = e^{-1}I\,(I+N) = e^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow e^A &= e^{-1}P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = e^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un metodo alternativo per calcolare la base $\mathscr{B}$ che rende A in forma di Jordan è il seguente. Nota la forma di Jordan J consideriamo l'applicazione lineare f associata ad essa rispetto alla base $\mathscr{B}$ e l'applicazione $g = f + Id$; esse devono soddisfare:

$$\begin{cases} f(v_1) = -v_1 \\ f(v_2) = v_1 - v_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(v_1) = 0 \\ g(v_2) = v_1 \end{cases}$$

Cerchiamo dei vettori tali che:

$$\begin{aligned} &v_2 \in \ker(A+I)^2 \setminus \ker(A+I) \\ &v_1 \in \ker(A+I) \end{aligned}$$

Poichè $v_2 \in \ker(A+I)^2 = V$, basta prendere un vettore della base canonica di V, ad esempio $e_1 = (1,\ 0,\ 0)$, che non appartenga a $\ker(A+I)$. Allora:

$$\begin{aligned} &v_2 := e_1 = (1,\ 0) \\ &v_1 = g(v_2) = (A+I)v_2 = g(v_2) = (-2,\ -1) \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice P risulta:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che usando questa matrice P si arriva comunque allo stesso esponenziale visto prima.

In questo problema si può anche evitare il calcolo della forma di Jordan. Infatti, notando che la matrice $B = A + I$ è nilpotente di ordine 2, ovvero $B^2 = O$, e commuta con $-I$. Allora possiamo calcolare e^A in questo modo:

$$e^A = e^{B-I} = e^B \cdot e^{-I} = e^{-1}(I+B) = e^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

9.4 MATRICI REALI E FORMA DI JORDAN

Abbiamo studiamo le forme di Jordan in $\mathbb{C}^{n,\ n}$, dato che abbiamo la sicurezza dell'esistenza di tutti gli autovalori e dunque anche della forma di Jordan. E se la matrice fosse a valori reali, possiamo parlare di forma di Jordan in $\mathbb{R}^{nn}$?

Dato che la forma di Jordan associata ad una matrice ha sulla diagonale gli autovalori di A con molteplicità e al di fuori di essa o zero o uno, possiamo fare la seguente osservazione.

Osservazione. Sia $A \in \mathbb{R}^{nn}$ e J la forma di Jordan di A. Allora J è *reale* se e solo se gli autovalori di A sono *reali*.

Supponiamo che A abbia autovalori reali e J sia la sua forma di Jordan. Allora $\exists P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tale che esse siano simili per P in campo complesso: $A = PJP^{-1}$. In realtà, si può dimostrare come A e J siano simili come matrici reali, cioè $\exists Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $A = QJQ^{-1}$

Teorema 9.4.0. Siano $A, B \in \mathbb{R}nn$ tali che $\exists P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A = PBP{-}1$. Allora $\exists Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A = QBQ{-}1$.

Dimostrazione. Innanzitutto, $A = PBP{-}1$ se e solo se $AP = PB$. Consideriamo le soluzioni X, matrice $n \times n$ a coefficienti reali, del sistema lineare omogeneo in n^2 equazioni in n^2 incognite.

$$AX = XB$$

Sia $W \subseteq \mathbb{C}^{nn}$ il sottospazio *vettoriale* delle soluzioni (*complesse*) del sistema. Sappiamo già che $P \in W$, dunque $W \neq \{O\}$.
Sia allora $k = \dim W \geq 1$ e sia $C_1, \ldots, C_k \in \mathbb{C}^{k,\, k}$ una base di W. Esse sono matrici complesse, dunque possiamo scomporla nella sua parte reale e immaginaria.

$$\forall j = 1, \ldots, k \quad C_j = X_j + iY_j,\ X_j,\ Y_j \in \mathbb{R}^{n,\, n}$$

Mostriamo che anche X_j e Y_j sono soluzioni del sistema. Dunque, presa C_j:

$$\begin{array}{ccc} AC_j & = & C_jB \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ A\left(X_j + iY_j\right) & & \left(X_j + iY_j\right)B \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ AX_j + AY_j & & X_jB + iY_jB \end{array}$$

Le matrici AX_j, AY_j, X_jB e Y_jB sono tutte in $\mathbb{R}^{n,\, n}$. Due matrici complesse scomposte come in precedenza sono uguali se e solo se la parte reale e l'argomento sono uguali:

$$AX_j = X_jB$$
$$AY_j = Y_jB$$

Ma allora $X_j\, Y_j \in W\ \forall j$; poiché $C_1,\ ldots, C_k$ è una base di W, allora lo generano. Per costruzione $C_j = X_j + iY_j$, dunque anche $X_1, \ldots, X_k,\ Y_1, \ldots Y_k$ generano W (come spazio vettoriale *complesso*).
Sappiamo sicuramente che $\{X_1, \ldots, X_k,\ Y_1, \ldots Y_k\}$ contiene una base di W, cioè $\exists D_1, \ldots, D_k$ base $\mathscr{D}$ di W con $D_j \in \mathbb{R}^{n,\, n}\ \forall j$.
Dalle condizioni in cui ci siamo posti, la matrice Q cercate deve soddisfare i seguenti requisiti:

- $Q \in W$.
- $Q \in \mathbb{R}^{n,\, n}$.
- Q invertibile.

Rispetto alla base $\mathscr{D}$, Ogni $D \in W$ è della forma:

$$D = t_1D_1 + \ldots + t_kD_k \quad \text{con } t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{C}^{n,\, n}$$

Nel caso di matrici reali, i coefficienti $t_1, \ldots, t_k$ saranno *tutti reali*. Poniamo:

$$f(t_1, \ldots, t_k) := \det(t_1 D_1 + \ldots + t_k D_k)$$

La funzione, di variabili $t_1, \ldots, t_k$, è un polinomio che presenta *solo coefficienti reali* (essendo $D_1, \ldots, D_k$ matrici reali) e non è *identicamente nulla* (Per ipotesi $P \in W$ è invertibile, dunque $\det P \neq 0$). In particolare, esistono sicuramente dei valori *reali* $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_k$ per cui f non si annulla[a], cioè esiste la matrice reale:

$$Q := \hat{t}_1 D_1 + \ldots + \hat{t}_k D_k$$

Che soddisfa la tesi.

[a] Infatti, presa una combinazione lineare degli elementi di una base come $\mathscr{D}$ con coefficienti reali non nulli, allora essa non sarà mai nulla.

IV

Geometria proiettiva

CAPITOLO 10

Geometria proiettiva

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

10.1 Spazi proiettivi

Abbiamo già approfondito, a livello *topologico*, lo **spazio proiettivo reale** e le sue caratteristiche nel **??**. In questo capitolo, ci dedicheremo a *generalizzare* il concetto per un *qualsiasi* spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$, utilizzando gli strumenti dell'algebra lineare.

Definizione 10.1.0. Sia $\mathbb{K}$ un campo e V uno spazio vettoriale di dimensione *finita* su $\mathbb{K}$. Lo **spazio proiettivo** associato a V è l'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^n(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim} \tag{10.1}$$

Dove $\sim$ è la relazione di equivalenza data su $V \setminus \{0\}$ definita dall'azione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$\forall v,\ w \in V \setminus \{0\}\ v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ :\ v = \lambda w \tag{10.2}$$

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(V)$ si dice anche il **proiettivizzato** di V.

Dimostrazione.

- Riflessiva: ...
- Simmetrica: ...
- Transitiva: ...

Definizione 10.1.1. La **dimensione** di $\mathbb{P}^n(V)$ è:

$$\dim \mathbb{P}^n(V) = \dim V - 1 \tag{10.3}$$

Se $V = \{0\}$, allora $\mathbb{P}^n(V) = \varnothing$ e si pone $\dim \varnothing := -1$.

Definizione 10.1.2. Si denota con $\pi : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ la **proiezione al quoziente** e con $[v] \in \mathbb{P}^n(V)$ la **classe** di $v \in V \setminus \{0\}$.

Osservazione. Si ha una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{gathered} \mathbb{P}^n(V) \leftrightarrow \{\text{sottospazi vettoriali 1-dimensionali di } V\} \\ [v] \leftrightarrow \mathscr{L}(v) \end{gathered} \tag{10.4}$$

In altre parole, possiamo pensare a $\mathbb{P}^n(V)$ come l'insieme delle **rette vettoriali** in V.

Definizione 10.1.3.

- Se $\dim V = 1$, allora $\mathbb{P}^n(V)$ è un **punto** e $\dim \mathbb{P}^n(V) = 0$.
- Se $\dim \mathbb{P}^n(V) = 1$, si parla di **retta proiettiva**.
- Se $\dim \mathbb{P}^n(V) = 2$, si parla di **piano proiettivo**.
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si parla rispettivamente di **spazio proiettivo reale** o di **spazio proiettivo complesso**.

Gli esempi più frequenti di spazi proiettivi si ottengono considerando $V = \mathbb{K}^{n+1}$.

Definizione 10.1.4. Lo **spazio proiettivo numerico** o **spazio proiettivo standard** è lo spazio proiettivo su $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n\left(\mathbb{K}^{n+1}\right) \tag{10.5}$$

Essi sono spazi di dimensione $\dim \mathbb{P}^n = n$.

10.2 SOTTOSPAZI PROIETTIVI

Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora $W \setminus \{0\} \subseteq V \setminus \{0\}$ è chiuso rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ precedentemente definita e $\mathbb{P}^n(W)$ è naturalmente un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n(V)$.

Definizione 10.2.0. Se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, allora $\mathbb{P}^n(W)$ è detto **sottospazio proiettivo**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(W) &= \pi(W \setminus \{0\}) = \{[w] \in \mathbb{P}^n(V) \mid w \in W\} \\ &= \{\text{sottospazi vettoriale 1-dimensione di } V \text{ contenuti in } W\} \end{aligned}$$

La dimensione del sottospazio proiettivo è $\dim \mathbb{P}^n(W) = \dim W - 1$.

- Se $W = \{0\}$, allora $\mathbb{P}^n(W) = \varnothing$.
- Se $\dim W = 1$, allora $\mathbb{P}^n(W)$ è un punto, che indichiamo con $[w]$ per un $w \in W$.
- Se $\dim W = 2$ ($\dim \mathbb{P}^n(W) = 1$), allora $\mathbb{P}^n(W)$ è **retta proiettiva** in $\mathbb{P}^n(V)$.
- Se $\dim W = 3$ ($\dim \mathbb{P}^n(W) = 2$), allora $\mathbb{P}^n(W)$ è **piano proiettivo** in $\mathbb{P}^n(V)$.
- Se $\dim \mathbb{P}^n(W) = \dim \mathbb{P}^n(V) - 1$, allora $\mathbb{P}^n(W)$ è **iperpiano (proiettivo)** in $\mathbb{P}^n(V)$.

Definizione 10.2.1. Si definisce la **codimensione** di $\mathbb{P}^n(W)$ sottospazio proiettivo come:

$$\operatorname{Codim}\mathbb{P}^n(W) = \dim\mathbb{P}^n(V) - \dim\mathbb{P}^n(W) \tag{10.6}$$

Esempio. Gli iperpiani sono sottospazi di codimensione 1.

10.3 COORDINATE OMOGENEE E SISTEMI DI RIFERIMENTO PROIETTIVO

Consideriamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n\left(\mathbb{K}^{n+1}\right)$. Se $v = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, denotiamo la corrispettiva classe in questa forma:

$$[v] = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}),\ x_i \in \mathbb{K} \tag{10.7}$$

Osservazione.

1. Le x_i non possono mai essere tutte nulle, dato che $v \neq 0$.
2. Due classi sono uguali se le componenti sono tutte in proporzione per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$.[a]

$$\begin{aligned}(x_0 : \ldots : x_n) = (y_0 : \ldots : y_n) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ : \ y_0 = \lambda x_0, \ldots, y_n = \lambda x_n\end{aligned}$$

[a] La notazione con i : viene utilizzata per mettere in evidenza che la relazione fra classi e vettori è di proporzione.

Esempi. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$(1 : 1 : 2) = (-2 : -2 : -4)$$
$$(1 : 0 : 2) = \left(\frac{1}{3} : 0 : \frac{1}{3}\right)$$

Definizione 10.3.0. Sia $\mathscr{B} = \{e_0, \ldots, e_n\}$ una base di V, con $\dim V = n+1$. Se $v \in V \setminus \{0\}$, si ha:

$$v = x_0 e_0 + \ldots + x_e e_n, \text{ con } x_i \in \mathbb{K}$$

Diciamo che $(x_0 : \ldots : x_n)$ sono le **coordinate omogenee** di $[v] \in \mathbb{P}^n(V)$ definite dalla base $\mathscr{B}$ e scriviamo:

$$[v] = (x_0 : \ldots : x_n) \tag{10.8}$$

La base $\mathscr{B}$ definisce su $\mathbb{P}^n(V)$ un **sistema di riferimento proiettivo**, cioè ad ogni punto vengono assegnate delle coordinate omogenee.

Osservazione.

- Le coordinate omogenee non possono *mai* essere *tutte nulle*.
- Le coordinate omogenee sono definite *solo a meno di multipli*.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha delle coordinate omogenee "naturali" date dalla base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$.
- Basi *multiple* definiscono lo stesso riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^n(V)$, cioè le stesse coordinate omogenee.

Dimostrazione. Dimostriamo l'ultimo punto. Siano:

$$\mathscr{B} = \{e_0, \ldots, e_n\} \quad \mathscr{B}' = \{\mu e_0, \ldots, \mu e_n\}$$

Con $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Si ha:

$$v = x_0 e_0 + \ldots + x_n e_n = \frac{x_0}{\mu}(\mu e_0) + \ldots + \frac{x_n}{\mu}(\mu e_n)$$

Passando allo spazio proiettivo:

$$\underbrace{(x_0 : \ldots : x_n)}_{\text{coordinate omogenee rispetto a } \mathscr{B}} = \underbrace{\left(\frac{x_0}{\mu} : \ldots : \frac{x_n}{\mu}\right)}_{\text{coordinate omogenee rispetto a } \mathscr{B}'}$$

Definizione 10.3.1. Data la base $\mathscr{B}$, i punti:

$$\begin{aligned} P_0 &= [e_0] = (1 : 0 : \ldots : 0) \\ P_1 &= [e_1] = (0 : 1 : \ldots : 0) \\ &\ldots \\ P_n &= [e_n] = (0 : 0 : \ldots : 1) \end{aligned} \tag{10.9}$$

Sono detti **punti fondamentali** o **punti coordinati**, mentre il punto:

$$U = [e_0 + e_1 + \ldots + e_n] = (1 : 1 : \ldots : 1)$$

è detto **punto unità**.

10.3.0.1 Descrizione dei sottospazi proiettivi in coordinate

Siano $(x_0 : \ldots : x_n)$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n(V)$, indotte da una base $\mathscr{B}$, e consideriamo l'equazione lineare omogenea:

$$(*) \quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

Con $a_i \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

- In V l'equazione omogenea rappresenta un *iperpiano vettoriale* H.
- I punti $P = [v] \in \mathbb{P}^n(V)$, le cui coordinate soddisfano l'equazioni, sono quelli tali per cui $v \in H$, cioè sono tutti e soli i punti dell'iperpiano proiettivo $\mathbb{P}^n(H) \subseteq \mathbb{P}^n(V)$. L'equazione lineare $(*)$ è l'**equazione (cartesiana) dell'iperpiano proiettivo** $\mathbb{P}^n(H)$.

Definizione 10.3.2. Gli iperpiani di equazione cartesiana $x_i = 0$, cioè tutti i punti la cui i-esima coordinata omogenea è nulla, si dicono **i-esimi iperpiani coordinati**.

Esempio. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, cioè una *retta proiettiva* ($\dim \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = 1$), i sottospazi proiettivi sono:

- $\varnothing$.
- I punti, che in questo caso sono gli iperpiani.
- Tutto $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Il punto $(a : b)$ ha equazione cartesiana:

$$bx_0 - ax_1 = 0 \tag{10.10}$$

Ovvero l'equazione della retta in $\mathbb{K}^2$ generata dal vettore (a, b), ottenuta pertanto dal determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = 0$.

Attenzione! In $\mathbb{P}^n(V)$ un sottospazio proiettivo di *dimensione zero* è un singolo punto $[v] = \mathbb{P}^n(\mathscr{L}(v))$.

Più in generale: fissata una base $\mathscr{B}$ di V, ogni *sottospazio vettoriale* W di V può essere visto, in *coordinate* rispetto alla base, come l'*insieme delle soluzioni* di un *sistema lineare omogeneo*.

$$Ax = O$$

Dove $A = \left(a_{ij}\right)$ è di dimensioni $t \times (n+1)$ a elementi in $\mathbb{K}$, mentre si ha:

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

$$* \begin{cases} a_{1,0}x_0 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{t,0}x_0 + \ldots + a_{t,n}x_n = 0 \end{cases} \tag{10.12}$$

Il sistema $*$ dà delle *equazioni cartesiane* per il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}^n(W)$ nelle coordinate omogenee $(x_0 : \ldots : x_n)$.
Posto dunque t come il numero delle *equazioni*, notiamo che:

$$\begin{array}{rcl} & & \dim W = n + 1 - \operatorname{rk} A \\ \operatorname{Codim} W & = & \qquad\qquad \operatorname{rk} A \\ \| & & \\ \dim V - \dim W & = & \dim \mathbb{P}^n(V) - \dim \mathbb{P}^n(W) = \operatorname{Codim} \mathbb{P}^n(W) \\ & \Longrightarrow & t \geq \operatorname{rk}(A) = \operatorname{Codim} \mathbb{P}^n(W) \end{array}$$

Scartando delle equazioni possiamo sempre ricondurci ad un sistema in cui $t = \operatorname{rk} A = \operatorname{Codim} \mathbb{P}^n(W)$.

Intuitivamente... Per facilitare la visualizzazione degli spazi proiettivi possiamo pensare allo spazio $\mathbb{K}^{n+1}$ come lo **spazio affine** $\mathscr{A}\left(\mathbb{K}^{n+1}\right)$ in cui sia fissato un punto O come origine: in questo modo, le classi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ corrispondono alle *rette affini passanti per* O (identificate con le rette vettoriali di $\mathbb{K}^{n+1}$):

$$(x_0 : \ldots : x_n) \leftrightarrow \text{retta affine di } \mathscr{A}\left(\mathbb{K}^{n+1}\right) \text{formata dai punti } (tx_0, \ldots, tx_n) \text{ al variare di t} \in \mathbb{R}$$

Approfondiremo formalmente la relazione tra gli spazi affini e gli spazi proiettivi più avanti, a pag. ??.

Esempi.

- Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ ha, come sottospazi *non banali*, i punti e le rette.
  - Una *retta proiettiva* viene da un *piano*, che nel riferimento *affine* possiamo prendere passante per l'origine: $a_0x_0 + a_1x_0 + a_2x_2 = 0$.
  - Un *punto* servono due equazioni, in sostanza vedendolo come *intersezione di due rette proiettive*; ad esempio, $(1:0:0)$ ha equazioni $x_1 = x_2 = 0$, mentre $(1:2:3)$ ha equazioni $\begin{cases} x_1 = 2x_0 \\ x_2 = 3x_0 \end{cases}$
- Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, le *rette proiettive* vengono da *piani vettoriali*, mentre nel modello affine di $\mathscr{A}\left(\mathbb{R}^3\right)$ essi sono passanti per l'*origine*; utilizzando la *sfera unitaria* ai quali identifichiamo i punti antipodali in una relazione di equivalenza, la retta proiettiva si visualizza facilmente come l'*intersezione* della sfera in un *cerchio massimo*.
  In questo modo, considerando la *semisfera superiore*, la **proiezione** dell'intersezione su di essa sul disco unitario D è la rappresentazione della retta proiettiva sul *modello piano* ben noto. Dunque, guardando le rette proiettive nel *modello piano*, se ne hanno di *tre tipi*:
  1. La *retta* con equazione $z = 0$, ovvero al piano xy in $\mathbb{R}^3$: sul modello piano corrisponde al **bordo del disco** D (cioè S^1).
  2. Le *rette* con equazione $ax + by = 0$, ovvero ai *piani perpendicolari* in $\mathbb{R}^3$ passanti per le rette con quell'equazione $ax + by = 0$: sul modello piano corrisponde a **diametri colleganti due punti** sul bordo.
  3. Nel caso generale $ax + by + cz = 0$, proiettando l'*arco di cerchio massimo* viene un **arco di ellisse** in D.

10.4 Operazioni con i sottospazi

Se $W_1, W_2 \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali, allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale e si ha che l'**intersezione** dei corrispettivi spazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo.

$$\mathbb{P}^n(W_1 \cap W_2) = \mathbb{P}^n(W_1) \cap \mathbb{P}^n(W_2)$$

Osservazione. Si ha:

$$\mathbb{P}^n(W_1) \cap \mathbb{P}^n(W_2) = \varnothing \iff W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

In tal caso diciamo che i due sottospazi sono **sghembi** o **disgiunti**.

Come per i sottospazi vettoriali, in generale l'**unione** di due sottospazi proiettivi *non* è un sottospazio proiettivo.

Definizione 10.4.0. Sia $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ un sottoinsieme non vuoto. Il **sottospazio generato** da S, denotato con $\langle S \rangle$, è l'intersezione in $\mathbb{P}^n(V)$ di tutti i sottospazi proiettivi contenenti S, ed è il più piccolo sottospazio contenente S.

- $\langle S \rangle = S \iff S$ è un sottospazio proiettivo.

- Se $S = \{P_1, \dots, P_m\}$ è finito, scriviamo $\langle P_1, \dots, P_m \rangle$ per il sottospazio generato da $P_1, \dots, P_m$.

Definizione 10.4.1. Dati due sottospazi proiettivi $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{P}^n(V)$, cioè:

$$T_i = \mathbb{P}^n(W_i) \quad W_i \subseteq V,\ i = 1, 2$$

Allora il sottospazio generato da $T_1 \cup T_2$ è denotato con $T_1 + T_2 = \langle T_1, T_2 \rangle$ e si chiama **sottospazio somma**. In particolare, si ha:

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(W_1 + W_2) \tag{10.13}$$

Dimostrazione.
$\subseteq$) $\mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$ è un sottospazio proiettivo che contiene, in quanto $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$ vettorialmente, sia $T_1 = \mathbb{P}^n(W_1)$ sia $T_2 = \mathbb{P}^n(W_2)$. In particolare, contiene la loro unione[a], dunque $\langle T_1, T_2 \rangle \langle T_1 \cup T_2 \rangle \subseteq \mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$.
$\supseteq$) Abbiamo che $T_i \subseteq \langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(U)$, con U un sottospazio vettoriale di V. In particolare, si ha che $W_1, W_2 \subseteq U$, da cui $W_1 + W_2 \subseteq U$. Passando allo spazio proiettivo:

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \mathbb{P}^n(U) \subseteq \mathbb{P}^n(W_1 + W_2)$$

[a] Ricordiamo che non è essa un sottospazio, ma un sottoinsieme.

Proposizione 10.4.0. Formula di Grassmann proiettiva
Siano T_1, T_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(V)$. Si ha:

$$\dim \langle T_1, R_2 \rangle + \dim (T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 \tag{10.14}$$

Dimostrazione. Posti $T_i = \mathbb{P}^n(W_i)$, con $W_i \subseteq V$ sottospazi vettoriali. Dalla *formula di Grassmann vettoriale*:

$$\dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Sottraendo 1 a tutte le dimensioni, otteniamo le dimensioni dei corrispettivi spazi proiettivi e dunque la formula proiettiva.

Corollario 10.4.0. Siano T_1, T_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(V)$ con $\dim \mathbb{P}^n(P) = n$. Allora:

$$\dim (T_1 \cap T_2) \leq \dim T_1 + \dim T_2 - n \tag{10.15}$$

In particolare $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ se $\dim T_1 + \dim T_2 \geq n$.

Dimostrazione.

$$\dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 - \dim\langle T_1,\ T_2\rangle \leq \dim T_1 + \dim T_2 - n$$

Chiaramente se $\dim T_1 + \dim T_2 \geq n$, allora $\dim(T_1 \cap T_2) \geq 0$ e dunque $T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$.

Esempio. Nel piano proiettivo, due rette sono *sempre incidenti*. Infatti, le rette hanno dimensione 1, mentre $\dim \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = 2$, dunque vale $1 + 1 \leq 2$, pertanto due rette si incontrano sempre.

Osservazione. Se consideriamo l'insieme *finito di punti*, possiamo considerare lo spazio S *generato* da $P_1,\ \ldots,\ P_m$, cioè $S = \langle P_1,\ \ldots,\ P_m\rangle$; inoltre, si ha:

$$\dim S \leq m - 1$$

Infatti, se $P_i = [v_i]$ con $v_i \in V$, allora:

$$S = \mathbb{P}^n\underbrace{(\mathscr{L}(v_1,\ \ldots,\ v_m))}_{\dim \mathscr{L} \leq m}$$

10.5 Punti linearmente indipendenti e in posizione generale

Definizione 10.5.0. Siano $P_1,\ \ldots, P_m \in \mathbb{P}^n(V)$. Diciamo che i punti $P_1,\ \ldots,\ P_m$ sono **linearmente indipendenti** se, scelti $v_1,\ \ldots,\ v_m \in V \setminus \{0\}$ tali che $P_i = [v_i]\ \forall i$, i vettori $v_1,\ \ldots,\ v_m$ sono *linearmente indipendenti* in V.
Se così non è, diciamo che $P_1,\ \ldots, P_m$ sono linearmente dipendenti.

Osservazione.

- La definizione è *ben posta*. Dati $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, si ha che:

$$v_1,\ \ldots,\ v_m \text{ sono indipendenti} \iff \lambda_1 v_1,\ \ldots,\ \lambda_m v_m \text{ sono indipendenti.}$$

- Se $\dim \mathbb{P}^n(V) = n$, $\mathbb{P}^n(V)$ contiene al più $n+1$ punti indipendenti.
- $P_1,\ \ldots,\ P_m$ sono indipendenti se e solo se $\dim\langle P_1,\ \ldots,\ P_m\rangle = m - 1$.

Esempi.

- *Due* punti $P,\ Q$ sono indipendenti se e solo se $P \neq Q$. Infatti, se $P = [v]$ e $Q = [w]$, allora:

$$P \text{ e } Q \text{ sono indipendenti} \iff v \text{ e } w \text{ sono indipendenti} \iff v \nsim w \iff P \neq Q$$

  In tal caso $\langle P,\ Q\rangle$ è l'unico *retta* contenente P e Q, che indicheremo anche con $\overline{PQ}$.
- *Tre* punti $P_1,\ P_2,\ P_3$ sono indipendenti se e solo se sono *distinti* e *non allineati*, cioè appartenenti alla stessa retta. In tal caso $\langle P_1,\ P_2,\ P_3\rangle$ è l'unico *piano* contenente i tre punti.

DEFINIZIONE 10.5.1. Dati dei punti $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{P}^n(V)$, diciamo che sono **in posizione generale** se vale una delle due condizioni seguenti:

- $m \leq n+1$ e i punti sono *linearmente indipendenti*.
- $m > n+1$ e ogni scelta di $n+1$ punti tra loro sono linearmente indipendenti.

ESEMPIO.

- Se $n = 1$, cioè $\mathbb{P}^n(V)$ è una *retta proiettiva*, allora $P_1, \ldots, P_m$ sono in posizione generale se e solo se $P_1, \ldots, P_m$ sono *tutti distinti*.
- Se $n = 2$, cioè $\mathbb{P}^n(V)$ è una *piano proiettivo*, allora $P_1, \ldots, P_m$ sono in posizione generale se e solo se $P_1, \ldots, P_m$ sono a 3 a 3 *non* allineati.

10.5.1 *Impratichiamoci! Punti linearmente indipendenti*

ESERCIZIO. F.F.P., 2.1.
Si mostri che i punti del piano proiettivo reale:

$$\left(\frac{1}{2} : 1 : 1\right) \quad \left(1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right) \quad (2 : -1 : 2) \tag{10.16}$$

Sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

SOLUZIONE. Per verificare che i 3 punti sono allineati, dobbiamo verificare che i corrispondenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono dipendenti. Riscriviamo i seguenti punti per facilitarci i calcoli:

$$\left(\frac{1}{2} : 1 : 1\right) = (1 : 2 : 2) \quad \left(1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right) = (3 : 1 : 4)$$

Verifichiamolo la dipendenza con il determinante.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione della retta è data dall'equazione del piano vettoriale in $\mathbb{R}^3$ generate da 2 dei 3 vettori:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = x_0(8-2) - x_1(4-6) + x_2(1-6) = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2$$

Verifichiamo che contenga anche il terzo:

$$6 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 = 0$$

10.6 RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DI UN SOTTOSPAZIO PROIETTIVO

Sia $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ un sottospazio proiettivo di dimensione m. Allora esistono sempre $m+1$ punti $P_0, \dots, P_m \in S$ linearmente indipendenti che generano S. Infatti, se $S = \mathbb{P}^n(W)$ con $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale di dimensione $m+1$, possiamo scegliere una base $\{w_0, \dots, w_m\}$ di W tale per cui:

$$P_i = [w_i] \in S$$

Sono linearmente indipendenti (perché lo sono i vettori della base) e generano S.
Allora, tutti e soli i punti di S sono della forma:

$$[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m] \quad \lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$$

Supponiamo ora di aver fissato una base $\{e_0, \dots, e_n\}$ di V e quindi di aver considerato il corrispondente *riferimento proiettivo*. In coordinate vettoriali di V, un punto di W è $x = (x_0, \dots, x_n)$ se e solo se:

$$x = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m$$

Il punto P_i in V avrà coordinate $(P_{0,i}, \dots, P_{n,i})$ $\forall i = 1, \dots, m$, dunque il generico vettore x di W è espresso da:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 P_{0,0} + \lambda_1 P_{0,1} + \dots + \lambda_m P_{0,m} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 P_{n,0} + \lambda_1 P_{n,1} + \dots + \lambda_m P_{n,m} \end{cases} \tag{10.17}$$

Anche i punti di S sono date da queste coordinate, dunque questa viene definita la **rappresentazione parametrica** del sottospazio S, con $(\lambda_0 : \dots : \lambda_m)$ le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^n(W)$ date dalla base $\{w_0, \dots, w_m\}$.

Esempio. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ consideriamo i punti:

$$A = (1 : 0 : -1 : 4) \quad B = (2 : 3 : 0 : 5)$$

Allora, la rappresentazione parametrica del sottospazio S con $(\lambda : \mu)$ è:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + 2\mu \\ x_1 = 3\mu \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 4\lambda - 5\mu \end{cases}$$

10.6.1 *Coordinate proiettive e punti in posizione generale*

Osservazione. Sia $\mathbb{P}^n(V)$ con un riferimento proiettivo fissato. Consideriamo i punti fondamentali $P_0, \dots, P_n$ e il punto unità U.

- $P_0, \dots, P_n, U$ sono $n+2$ punti.
- $P_0, \dots, P_n, U$ sono in posizione generale: essendo $P_i = [e_i]$ con $e_0, \dots, e_n$ base di V, allora $P_0, \dots, P_n$ sono indipendenti. Se sostituiamo l'i-esimo punto con $U = [e_1 + \dots + e_n]$, allora:

  $$P_0, \dots, \check{P}_i, \dots, U$$

  Sono indipendenti $\forall i = 0, \dots, n$.[a]

[a] Indichiamo con $\check{P}_i$ il punto che sostituiamo.

OSSERVAZIONE. Sia $\mathscr{B} = \{e_0, \ldots, e_n\}$ una base che induce un *riferimento proiettivo* su $\mathbb{P}^n(V)$.
Per ogni i sia $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e consideriamo $v_i = \lambda_i e_i$. Allora $\mathscr{B}' = \{v_0, \ldots, v_n\}$ è ancora una base e i *punti fondamentali* del riferimento indotto da $\mathscr{B}'$ sono *gli stessi* del riferimento indotto da $\mathscr{B}$. Infatti:

$$[e_i] = [v_i] = P_i$$

Però i due riferimenti sono **diversi**; dato v espresso nella base $\mathscr{B}$:

$$v = x_0 e_0 + \ldots + x_n e_n$$

La sua classe in $\mathbb{P}^n(V)$, rispetto a $\mathscr{B}$, è:

$$[v] = (x_0 : \ldots : x_n)$$

Possiamo partire dall'espressione di v nella base $\mathscr{B}$ a quella nella base $\mathscr{B}'$, moltiplicando e dividendo ogni e_i per il corrispettivo λ_i:

$$v = \frac{x_0}{\lambda_0}(\lambda_0 e_0) + \ldots + \frac{x_n}{\lambda_n}(\lambda_n e_n) = \frac{x_0}{\lambda_0} v_0 + \ldots + \frac{x_n}{\lambda_n} v_n$$

Passiamo dunque alla base $\mathscr{B}'$ alla classe in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$:

$$[v] = \left(\frac{x_0}{\lambda_0} : \ldots : \right)$$

Notiamo che effettivamente il punto $[v]$ non cambia, ma i riferimenti *non* sono multipli e quindi sono diversi!

- *Conoscere* i punti fondamentali *non basta* a determinare la base $\mathscr{B}$.
- Riferimenti proiettivi *diversi* possono avere gli *stessi* punti fondamentali.

OSSERVAZIONE. Supponiamo di avere $n+2$ punti $P_0, \ldots, P_{n+1}$ in $\mathbb{P}^n(V)$, cioè $\forall i = 0, \ldots, n+1$ $\exists v_i \in V : P_i = [v_i]$. Allora:

$$P_0, \ldots, P_{n+1} \text{ sono in posizione generale } \iff v_0, \ldots, v_n \text{ sono indipendenti e}$$
$$v_{n+1} = a_0 v_0 + \ldots + a_n v_n \text{ con } a_i \neq 0 \ \forall i = 0, \ldots, n$$

Infatti, se $v_0, \ldots, v_n$ è una base (in quanto sono indipendenti), $v_0, \ldots, \check{v}_i, \ldots, v_n, v_{n+1}$ sono indipendenti se e solo se $a_i \neq 0$.

TEOREMA 10.6.0. Sia $\mathbb{P}^n(V)$ di dimensione n. Dati $n+2$ punti $P_0, \ldots, P_{n+1}$ in *posizione generale*, esiste una base $\mathscr{B} = \{e_0, \ldots, e_n\}$ di V tale che:

$$P_0 = [e_0], \ldots, P_n = [e_n], P_{n+1} = [e_0 + \ldots + e_n] \tag{10.18}$$

Inoltre, se $\mathscr{B}' = \{f_0, \ldots, f_n\}$ è un'altra base di V che soddisfa la condizione sopra, allora

$\mathscr{B}$ è proporzionale a $\mathscr{B}$, cioè $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, : \, f_i = \lambda e_i \; \forall i = 0, \dots, n$.

Dimostrazione. Sia $P_i = [v_i]$ al variare di $i = 0, \dots, n+1$. I punti $P_0, \dots, P_n$ sono indipendenti[a], dunque per definizione $v_0, \dots, v_n$ è una base di V. Definiamo:

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Ma allora, per l'osservazione precedente, $\lambda_i \neq 0 \; \forall i$ perché i punti sono in posizione generale.
Consideriamo $_0 = \lambda_0 v_0$, $e_1 = \lambda_1 v_1, \dots, e_n = \lambda_n v_n$. Si ha che $\mathscr{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$ è una base di V perché $\lambda_i \neq 0 \; \forall i$. Segue che:

$$[e_i] = [v_i] = P_i \; \forall i = 0, \dots, n$$
$$[e_0 + \ldots + e_n] = [\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n] = [v_{n+1}] = P_{n+1}$$

Adesso, sia $\mathscr{B}')\{f_0, \dots, f_n\}$ come da ipotesi. Allora $[f_i] = P_i = [e_n] \; \forall i = 0, \dots, n$, cioè $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, : \, f_i = \mu_i e_i \; \forall i = 0, \dots, n$. Inoltre, soddisfa anche $[f_0 + \ldots + f_n] = P_{n+1}$, pertanto:

$$[f_0 + \ldots + f_n] = [e_0 + \ldots + e_n]$$

In altre parole, $\exists \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che:

$$\begin{array}{ccc} f_0 + \ldots + f_n & = & \mu(e_0 + \ldots + e_n) \\ \shortparallel & & \\ \mu_0 e_0 + \ldots + \mu_n e_n & & \end{array}$$

$e_0, \dots, e_n$ è una base: per l'unicità della scrittura deve essere $\mu = \mu_0 = \ldots = \mu_n$, cioè $f_i = \mu e_i \; \forall i = 0, \dots, n$.

[a] Perchè se $N+2$ punti sono in posizione generale, presi $n+1$ punti fra di loro sono indipendenti.

10.7 TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

Definizione 10.7.0. Un'applicazione $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$ tra spazi proiettivi si dice **trasformazione proiettiva** o **isomorfismo proiettivo** se $\exists \; \varphi : V \longrightarrow V'$ isomorfismo che induce un altro isomorfismo lineare:

$$\widetilde{\varphi} : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(V') \\ [v] & \longmapsto & [\varphi(v)] \end{array} \tag{10.19}$$

Tale per cui $f = \widetilde{\varphi}$.
Se $V = V'$, diciamo che f è una **proiettività** di $\mathbb{P}^n(V)$.

Dimostrazione.

- $\widetilde{\varphi}$ **è ben definita**:
  1. $\varphi(v) \neq 0$ perché $v \neq 0$ e φ è iniettiva, pertanto $\ker \varphi = \{0\}$ e dunque l'unico vettore mappato a 0 tramite φ è solo 0.
  2. Se $[v] = [w]$, allora $w \sim v$, cioè $w = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; segue che per

linearità di φ $\varphi(w) = \lambda(v) \implies [\varphi(w)] = [\varphi(v)]$

- $\widetilde{\varphi}$ **è iniettiva**: se $\widetilde{\varphi}([v]) = \widetilde{\varphi}([w])$, allora

$$[\varphi(v)] = [\varphi(w)] \implies \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, : \, \varphi(w) = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v)$$

Poichè φ è iniettiva, segue che $w = \lambda v$ e dunque $[v] = [w]$.

- $\widetilde{\varphi}$ **è suriettiva**: infatti, se $[w] \in \mathbb{P}^n(V')$, essendo φ suriettiva esiste un vettore v tale che $w = \varphi(v)$. Segue che $[w] = [\varphi(v)] = \varphi([v])$.

Dato che spazi *vettoriali* della *stessa dimensione* sono sempre *isomorfi*, due spazi *proiettivi* della *stessa dimensione* sono sempre *isomorfi* e $\mathbb{P}^n(V)$ è sempre isomorfo a $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, con $\dim V = n+1$.

Lemma 10.7.0. Siano $\varphi, \psi : V \longrightarrow V'$ isomorfismi. Allora:

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, : \, \psi = \lambda\varphi \tag{10.20}$$

Dimostrazione.

$\Longleftarrow$) Se $v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, allora $\psi(v) = \lambda\psi(v)$. Segue:

$$\implies \widetilde{\psi}([v]) = [\psi(v)] = [\psi(v)] = \widetilde{\psi}([v])$$

$\Longrightarrow$) Sia $h := \varphi^{-1} \circ \psi : V \longrightarrow V$ automorfismo. Vogliamo mostrare che $h = \lambda Id_V$ con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Se $v \in V \setminus \{0\}$, abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\varphi}([v]) & = & \psi([v]) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ [\varphi(v)] & & [\psi(v)] \end{array} \implies \lambda_v \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, : \, \varphi(v) = \lambda_v \psi(v) \implies h(v) = \psi^{-1}(\varphi(v)) = \lambda_v v$$

Segue che v è autovettore di h $\forall v \in V \setminus \{0\}$, in particolare ogni vettore non nullo è autovettore di h. Segue che h è diagonalizzabile e ha un unico autovalore λ. Infatti, presi λ_1 e λ_2, si avrebbero i seguenti autovalori indipendenti:

$$v_1 \in V_{\lambda_1} \setminus \{0\} \qquad v_2 \in V_{\lambda_2} \setminus \{0\}$$

E considerato che:

$$\begin{array}{l} h(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ h(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ h(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2) \\ h(v_1 + v_2) = h(v_1) + h(v_2) \end{array} \implies \lambda(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

Da cui segue, in quanto v_1, v_2, $v_1 + v_2 \neq 0$, che $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ e quindi è unico.
Allora, $h = \lambda Id_V$ e pertanto $\varphi = \lambda\psi$.

10.7.1 *Gruppo lineare proiettivo*

Osservazione. Consideriamo $\mathbb{P}^n(V)$ e l'insieme delle proiettività $\mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$.

- La *composizione* di proiettività è una *proiettività* (banalmente *indotta* dalla composizione delle applicazioni lineari).

- Poichè $Id_{\mathbb{P}^n(V)} = \widetilde{Id_V} \implies$ L'identità $Id_{\mathbb{P}^n(V)}$ è una *proiettività*.
- Se $\widetilde{\varphi} \ : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$, allora $\widetilde{\varphi^{-1}} = f^{-1} : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$. In altre parole, l'*inversa* di una proiettività è ancora una proiettività.

L'insieme delle proiettività risulta un **gruppo** rispetto alla *composizione*.

Definizione 10.7.1. Il **gruppo lineare proiettivo** $\mathbb{P}\mathrm{GL}_n(V)$ è il gruppo delle proiettività dello spazio vettoriale V con operazione la composizione di proiettività ed elemento neutro $Id_{\mathbb{P}^n(V)}$.

10.7.1.1 Descrizione matriciale del gruppo lineare proiettivo

Consideriamo gli isomorfismi $\mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$: sappiamo che la matrice associata agli isomorfismi è una matrice invertibile, cioè si ha una *isomorfismo di gruppi* fra l'insieme degli isomorfismi in $\mathbb{K}^{n+1}$ al *gruppo generale lineare* $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$:

$$\left\{\text{isomorfismi } \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}\right\} \leftrightarrow \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$$

E con il gruppo lineare proiettivo si può fare? Consideriamo:

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \\ \varphi_A &\longmapsto \widetilde{\varphi}_A \end{aligned} \tag{10.21}$$

φ è *omomorfismo* di gruppi *suriettivo*, ma non iniettivo. Infatti, il nucleo non è *triviale*:

$$\ker\phi = \left\{\varphi_A \mid \varphi_A = Id_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})} = \widetilde{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}}\right\} = \{\varphi_A \mid \varphi = \lambda I,\ \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\} = \{\varphi_A \mid A = \lambda I,\ \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\}$$

Tuttavia, possiamo per il Teorema dell'isomorfismo per i gruppi considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \\ \frac{\mathrm{GL}(n+1,\, \mathbb{K})}{\{\lambda I \,\mid\, \lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}\}} \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

E si ha pertanto l'isomorfismo:

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \cong \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\}} = \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda I\}}$$

Si può anche considerare l'isomorfismo tra $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\}$ e $\mathbb{K}\setminus\{0\}$, e riscrivere l'isomorfismo trovato come:

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \cong \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\mathbb{K}\setminus\{0\}}$$

Esempio. Consideriamo la seguente proiettività della *retta proiettiva* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (x_0 : x_1) &\longmapsto (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1) \end{aligned}$$

Considerato il gruppo lineare proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathrm{GL}(2,\, \mathbb{R})}{\{\lambda I\}}$, per definizione di f si ha

$f = \widetilde{\varphi}$. In particolare, la matrice associata a φ è:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

E dunque possiamo scrivere l'applicazione lineare φ come:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &\longmapsto A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E dunque f si può anche scrivere come:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ [v] &\longmapsto [Av] \end{aligned}$$

Notiamo che se la matrice associata a φ fosse $2A$, per *proporzionalità* si avrebbe comunque la stessa proiettività f. In modo analogo, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ induce la *stessa proiettività* f di A.

10.7.2 *Proprietà delle trasformazioni proiettive*

Osservazione. Se f è una proiettività di $\mathbb{P}^n(V)$ e $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ un sottospazio proiettivo, allora $f(S)$ è ancora un sottospazio proiettivo della stessa dimensione di S. Se $S = \mathbb{P}^n(W)$ e consideriamo per definizione $f = \widetilde{\varphi}$ con $\varphi : V \longrightarrow V$, allora:

$$\forall [v] \in S \; f([v]) = \widetilde{\varphi}([v]) = [\varphi(v)], \; \varphi(v) \in W$$

$$f(S) = \mathbb{P}^n(\varphi(W)) \tag{10.22}$$

Definizione 10.7.2. Due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{P}^n(V)$ si dicono **proiettivamente equivalenti** se $\exists f$ proiettività di $\mathbb{P}^n(V)$ tale che:

$$B = f(A) \tag{10.23}$$

Esempio. Due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(V)$ della *stessa* dimensione sono sempre *proiettivamente equivalenti.*

Teorema 10.7.0. Siano $\mathbb{P}^n(V)$ e $\mathbb{P}^n(V')$ di dimensione n. Siano:

- $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}^n(V)$ in posizione generale.
- $Q_0, \ldots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}^n(V')$ in posizione generale.

Allora $\exists!\; f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$ trasformazione proiettiva tale che $f(P_i) = Q_i \; \forall i = 0, \ldots, n+1$.
In particolare: se una proiettività fissa $n+2$ punti in posizione generale, allora è l'identità.

Dimostrazione.

- **Esistenza**: Siano, $\forall i$:
  - $P_i = [v_i]$ $v_i \in V$.
  - $Q_i = [w_i]$ $w_i \in V'$.

  Sappiamo, dall'osservazione a pag. 10.9, che:
  - $v_0, \dots, v_n$ è base di V, con $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_i \neq 0$ $\forall i$.
  - $w_0, \dots, w_n$ è base di V', con $w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n$ con $\mu_i \neq 0$ $\forall i$.

  A meno di cambiare i rappresentanti dei punti, possiamo supporre senza perdita di generalità che $\lambda_i = \mu_i = 1$. Si ha dunque:

$$v_{n+1} = v_0 + \dots + v_n$$
$$w_{n+1} = w_0 + \dots + w_n$$

  Sia $\varphi : V \longrightarrow V'$ l'applicazione lineare tale per cui $\varphi(v_i) = w_i$ $\forall i = 0, \dots, n$. Per linearità:

$$\varphi(v_{n+1}) = \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) = w_0 + \dots + w_n = w_{n+1}$$

  Poiché $\operatorname{Im}\varphi$ contiene una base per costruzione, φ è suriettiva. In particolare, essendo endomorfismo ($\dim V = \dim V'$), φ è anche *isomorfismo*.
  Allora $f := \widetilde{\varphi}\ \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$ è una *trasformazione proiettiva* e:

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = (w_i) = Q_i \ \forall i = 0, \dots, n+1$$

- **Unicità**: sia $g : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V')$ un'altra trasformazione proiettiva tale che $g(P_i) = Q_i$ $\forall i = 0, \dots, n+1$. Per definizione, esiste $\psi : V \longrightarrow V'$ isomorfismo per cui $g = \widetilde{\psi}$ e:

$$[\psi(v_i)] = [w_i] \ \forall i$$

  Si ha che $\exists a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\psi(v_i) = a_i w_i$. Allora:

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+1} w_{n+1} & = & \psi(v_{n+1}) & = & \psi(v_0 + \dots + v_n) \\ \parallel & & & & \parallel \\ a_{n+1}(w_0 + \dots + w_n) & & & & \psi(v_0) + \dots + \psi(v_n) \\ \parallel & & & & \parallel \\ a_{n+1} w_0 + \dots + a_{n+1} w_n & & & & a_0 w_0 + \dots + a_n w_n \end{array}$$

  Poiché $w_0, \dots, w_n$ è base, la scrittura è unica. Segue che $a_0 = a_1 = \dots = a_{n+1} = a$. Allora:

$$\begin{aligned} &\psi(v_i) = a w_i = a\varphi(v_i) \\ &\implies \psi = a\varphi \\ &\implies g = \widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi} = f \end{aligned}$$

Esempi.

- In una *retta proiettiva* (dim 1), una proiettività è determinata dalle immagini di 3 *punti distinti*, dato che è equivalente alla condizione di "*punti in posizione generale*".
- In un *piano proiettivo* (dim 2), una proiettività è determinata dalle *immagini* di 4 punti, a 3 a 3 *non allineati*.

- Se $A,\ B \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ sono insiemi finiti, ciascuno contenente k punti in posizione generale, con $k \leq n+2$, allora A e B sono sempre proiettivamente equivalenti.

Esempio. Approfondiamo l'ultimo esempio. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (dim 2), si prenda $A = \{P_1,\ P_2\}$, $B = \{Q_1,\ Q_2\}$ con $P_1 \neq P_2$, $Q_1 \neq Q_2$. Ho due punti distinti sia in A e B, dunque esiste sempre una proiettività $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tale che $f(A) = B$.
Se invece A e B contengono 3 punti, se i 3 punti in A *sono allineati* mentre i 3 punti in B *non* lo sono, allora A e B *non* sono proiettivamente equivalenti.

10.7.3 *Trasformazioni proiettive in coordinate*

Supponiamo di avere fissato dei *riferimenti proiettivi* su $\mathbb{P}^n(V)$ e $\mathbb{P}^n(V')$, dati da delle basi $\mathscr{B}$ di V e $\mathscr{B}'$ di V', e sia $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ una trasformazione proiettiva.
Sappiamo che $f = \widetilde{\varphi}$ con $\varphi : V \longrightarrow V'$ isomorfismo lineare.
Sia $A \in \mathrm{GL}(n+1,\ \mathbb{K})$ la matrice associata a φ rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$. Abbiamo visto che φ è determinata solo a meno di multipli: chiaramente, lo stesso è vero anche per A.
Siano allora:

$$P = (x_0 : \ \dots : \ x_n) \in \mathbb{P}^n(V)$$
$$f(P) = (y_0 : \ \dots : \ y_n) \in \mathbb{P}^n(V')$$

Allora $\exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\rho y = Ax$.

Osservazione. Cambiamenti di coordinate.
Se in $\mathbb{P}^n(V)$ abbiamo due riferimenti proiettivi, uno dalla dalla base $\mathscr{B}$, e uno dalla base $\mathscr{B}'$, sia M la *matrice del cambiamento di base* in V tale che:

$$x' = Mx$$

Con x in coordinate rispetto alla base $\mathscr{B}$ e x' in coordinate rispetto alla base $\mathscr{B}'$. Allora, se $P \in \mathbb{P}^n(V)$ ha coordinate:

$$(x_0 : \ \dots : \ x_n) \text{ rispetto a } \mathscr{B}\ (x'_0 : \ \dots : \ x'_n) \text{ rispetto a } \mathscr{B}'$$

Esiste $\rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\rho x' = Mx$.

10.7.4 *Punti fissi di proiettività*

Definizione 10.7.3. Sia $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ una proiettività. Un **punto fisso** è un punto $P \in \mathbb{P}^n(V)$ tale che:

$$f(P) = P \tag{10.24}$$

Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ un *automorfismo* tale che $f = \widetilde{\varphi}$, e sia $P = [v]$, con $v \in V \setminus \{0\}$. Allora:

$$\begin{aligned} & f(P) = [\varphi(v)] = [v] \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ : \ \varphi(v) = \lambda v \\ \iff & v \text{ è un autovettore per } \varphi \end{aligned}$$

In particolare, φ è invertibile, dunque *non* ha l'autovettore *nullo*. Segue che i punti fissi di f sono tutti e soli i punti $[v]$ con v autovettore di φ.

Osservazione.

1. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora ogni proiettività ha almeno un punto fisso, dato che φ ha sempre almeno un autovettore.
2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim \mathbb{P}^n(V) = n$, allora $\dim V = n+1$. Il *polinomio caratteristico* $C_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha grado $n+1$. Se n è *pari*, φ ha almeno un autovalore, dato che il polinomio caratteristico ha grado $n+1$ *dispari*: infatti, o è di grado *uno* (e quindi ha banalmente soluzione) oppure, in quanto si può decomporre in fattori a coefficienti reali al più di grado *due*, ammetterà *sempre* almeno un fattore di grado *uno*.
3. Portiamo un controesempio al caso n dispari. Sia $\begin{aligned} f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ (x : y) &\longmapsto (-y : x) \end{aligned}$. La matrice A associata a f è:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Il polinomio caratteristico *non* ha radici *reali*:
$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1$$
Segue che A non ha autovettori reali e pertanto f *non* ha punti fissi.
4. In generale, l'*insieme* dei punti fissi di $f : \mathbb{P}^n(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(V)$ è dato da:
$$\{\mathbb{P}^n(V_\lambda) \mid \lambda \text{ autovalore di } \varphi\}$$
Questo è un insieme di sottospazi proiettivi a 2 a 2 disgiunti.

Definizione 10.7.4. Se $S \subseteq \mathbb{P}^n(V)$ è un sottospazio, diciamo che S è **fisso** per f proiettività se:
$$f(S) = S \tag{10.25}$$

10.7.5 *Impratichiamoci! Trasformazioni proiettive*

Esercizio. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ determinare la proiettività f tale che:
$$f(2:1) = (1:1) \quad f(1:2) = (0:1) \quad f(1:-1) = (1:0)$$

Soluzione. Notiamo che i punti:
$$(2:1) \quad (1:2) \quad (1:-1)$$
E:
$$(1:1) \quad (0:1) \quad (1:0)$$
Sono distinti, dunque sono in posizione generale e la proiettività è garantita. Prendiamo

la generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associata a φ indotta da f e consideriamo $\rho y = Ax$:

$$\begin{cases} \rho y_0 = a x_0 + b x_1 \\ \rho y_1 = c x_0 + d x_1 \end{cases}$$

Imponiamo il passaggio per $f(2\colon 1) = (1\colon 1)$:

$$\begin{cases} \rho = 1a + b \\ \rho = 2c + d \end{cases} \implies 2a + b = 2c + d$$

In sostanza, *eliminiamo* il parametro ρ per ottenere un'equazione lineare *omogenea* tra gli elementi della matrice.
Facciamo lo stesso con i rimanenti punti $f(1\colon 2) = (0\colon 1)$ e $f(1\colon -1) = (1\colon 0)$, utilizzando rispettivamente $\mu y = Ax$ e $\alpha y = Ax$:

$$\begin{cases} 0 = a + 2b \\ \rho = c + 2d \end{cases} \implies a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = a - b \\ 0 = c - d \end{cases} \implies c - d = 0$$

Costruiamo così un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 incognite a, b, c, d, con una matrice dei coefficienti di rango 3:

$$\begin{cases} 2a + b = 2c + d \\ a + 2b = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2c \\ b = -c \\ c = c \\ d = c \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ c & c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A meno di multipli, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice cercata. Segue dunque che la proiettività cercata è:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (x_0\colon x_1) &\longmapsto (2x_0 - x_1\colon x_0 + x_1) \end{aligned}$$

10.8 GEOMETRIA AFFINE E GEOMETRIA PROIETTIVA

Abbiamo già accennato all'esistenza di una relazione che intercorre fra *geometria affine* e *geometria proiettiva*. Diamo innanzitutto qualche richiamo dei concetti della geometria affine.

Definizione 10.8.0. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Uno **spazio affine** di dimensione n su V (con spazio vettoriale associato V di dimensione n)

è un insieme $\mathscr{A}(V)$ non vuoto di *punti* (elementi) tale che sia data un'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(V) \times \mathscr{A}(V) &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

Che alla coppia di punti (P, Q) associa il vettore di V con punto iniziale P e punto finale Q e tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

1. $\forall P \in \mathscr{A}(V)$, $\forall v \in V$ esiste un unico punto $Q \in \mathscr{A}(V)$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$.
2. $\forall P, Q, R \in \mathscr{A}(V)$ terna di punti di $\mathscr{A}(V)$ si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Definizione 10.8.1. Un **riferimento affine** $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ sullo spazio $\mathscr{A}(V)$ è assegnato fissando un punto $O \in \mathscr{A}(V)$ detta **origine** ed una base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ di V. Dunque, per ogni $P \in \mathscr{A}(V)$ si ha la n-upla $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dette *coordinate affini* del punto $P \in \mathscr{A}(V)$ (uniche per riferimento affine fissato) tale per cui:

$$P = \overrightarrow{OV} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \tag{10.26}$$

Per i nostri scopi, parleremo spesso degli spazi affini di dimensione n su $\mathbb{K}$.

Definizione 10.8.2. Un'**affinità** o **trasformazione lineare affine** di $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ è un'applicazione:

$$\varphi : \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) \tag{10.27}$$

Della forma $\varphi(x) = Ax + b$ con $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ un'applicazione lineare invertibile e b una *traslazione*.

Definizione 10.8.3. Un **sottospazio affine** di $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ è un *traslato* di un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{K}^n$:

$$S = W + x_0 = \{w + x_0 \mid w \in W,\ x_0 \in \mathscr{A}(W)\} \tag{10.28}$$

Osservazione.

- W è l'unico traslato di S per l'origine ($x_0 = O$) e si dice **sottospazio direttore** di S, cioè ne dà appunto la *direzione*. Si definisce $\dim S := \dim W$.
- Un punto in $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ è un sottospazio affine di dimensione 0 ($W = \{0\}$; dopotutto non ha particolarmente senso parlare di direzione del punto).
- Una **retta affine** r in $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ è un sottospazio affine di dim 1: $W = \mathscr{L}(v)$, cioè r si può individuare assegnando un punto $P \in r$ e un qualsiasi vettore v *parallelo* alla retta r.
- Un **piano affine** π in $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ è un sottospazio affine di dim 2: $W = \mathscr{L}(v, w)$, cioè π si può individuare assegnando un punto $P \in r$ e una coppia di vettori l.i. *paralleli* al piano π.
- Un **iperpiano affine** è un sottospazio di dimensione $n+1$.
- Due sottospazi affini della stessa dimensione si dicono **paralleli** se hanno lo *stesso* sottospazio direttore.

Esempio. Consideriamo $r = W + x_0$ retta affine, che ha dunque $\dim r = \dim W = 1$. W è la retta vettoriale in $\mathbb{K}^n$, mentre un qualunque $v \in W \setminus \{0\}$ è la *direzione* della retta.

Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{K}^n$ può essere descritti con equazioni cartesiane oppure in forma parametrica.
Equazioni cartesiane. S è visto come l'insieme delle *soluzioni* del seguente sistema lineare:

$$Ax = b \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) \tag{10.29}$$

Con b che descrive la traslazione dovuta a $x_0 \in \mathscr{A}(W)$. In tal caso W è il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$Ax = 0 \tag{10.30}$$

Forma parametrica. Supponiamo $\dim S = \dim W = m$. Siano $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ i vettori di una base di W; rispetto ad una base di $\mathbb{K}^n$, e dunque rispetto ad un sistema di riferimento affine con origine O, essi sono espressi nelle componenti:

$$v_i = (V_{i,1}, \ldots, V_{i,n}) \in \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$$

Consideriamo $S = W + c$, con il punto $c = (C_1, \ldots, C_n)$ rispetto allo stesso sistema affine di prima.
I punti x di S in forma parametrica sono dati da:

$$x = t_1 v_1 + \ldots + t_m v_m + c \quad t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{K} \tag{10.31}$$

Da cui otteniamo il sistema $n \times (m+1)$ seguente:

$$\begin{cases} X_1 = t_1 V_{1,1} + \ldots + t_m V_{m,1} + C_1 \\ \vdots \\ X_n = t_1 V_{1,n} + \ldots + t_m V_{m,n} + C_n \end{cases} \tag{10.32}$$

Esempio. La retta r ($\dim W = 1$) passante per c con direzione v è descritto parametricamente da:

$$\begin{cases} X_1 = tV_1 + c_1 \\ \vdots \\ X_n = tV_n + c_n \end{cases}$$

Consideriamo ora lo *spazio proiettivo numerico*:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n\left(\mathbb{K}^{n+1}\right)$$

E i punti in coordinate omogenee $(x_0 : \ldots : x_n)$ rispetto ad un dato sistema di riferimento proiettivo. Consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{P}^n$:

$$U_0 := \{P = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\} \tag{10.33}$$

La condizione $x_0 \neq 0$ è *ben posta*; infatti, se $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, allora $x_0 \neq 0 \iff \lambda x_0 \neq 0$. Consideriamo anche il suo complementare, che è l'iperpiano coordinato rispetto alla prima coordinata omogenea:

$$\mathbb{P}^n \setminus = H_0 = \{P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \{P = (0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n\} \tag{10.34}$$

Sia $P \in U_0$: allora essendo $a_0 \neq 0$ si ha $P = (a_0 : \dots : a_n) = \left(1 : \frac{a_1}{a_0} \dots : \frac{a_n}{a_0}\right)$. In particolare, $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$ sono univocamente determinate da P.

Esempio. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \left\{\text{rette vettoriali in } \mathbb{R}^3\right\}$ con punti di componenti $(x_0 : x_1 : x_2)$. Allora H_0 è una retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e risulta:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{P = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \{P = (0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^n\} \\ &= \left\{\text{rette vettoriali di } \mathbb{R}^3 \text{ contenute nel piano affine } x_0 = 0\right\} \end{aligned}$$

Infatti, prendiamo $\mathscr{A}\left(\mathbb{R}^3\right)$ e consideriamo il piano $x_0 = 1$, parallelo al piano $x_0 = 0$. Se $r \subseteq \mathbb{R}^3$ è una retta vettoriale che *non* appartiene al piano affine $\{x_0 = 0\}$ ($r \not\subseteq \{x_0 = 0\}$), r interseca il piano $x_0 = 1$ in un solo punto! In particolare, se r ha direzione (a_0, a_1, a_2), il punto nel piano $\{x_0 = 1\}$ avrà coordinate $\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}\right)$.

Possiamo identificare $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ con $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$. Consideriamo le due funzioni seguenti:

$$\begin{aligned} j = j_0 : \quad \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) &\longrightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^n \\ (X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (1 : x_1 : \dots : X_n) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \phi : \quad U_0 \subseteq \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) \\ (x_0 : \dots : X_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{aligned} \tag{10.35}$$

- ϕ è ben definita, dato che $x_0 \neq 0$ per definizione di U_0.
- j e ϕ sono l'una l'inversa dell'altra:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) &\xrightarrow{\quad j \quad} U_0 \xrightarrow{\quad \phi \quad} \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) \\ (X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (1 : X_1 : \dots : X_n) \longmapsto (X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_0 &\xrightarrow{\quad \phi \quad} \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{\quad j \quad} U_0 \\ (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \longmapsto \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right) = (x_0 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

Si ha dunque che j e ϕ sono *biunivoche*. In questo modo identifichiamo $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ con $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$, mentre l'iperpiano H_0 corrisponde allo spazio proiettivo di dimensione $n-1$; si ha dunque:

$$\mathbb{P}^n = U_0 \amalg H_0 = \mathscr{A}(\mathbb{K}^n) \amalg \mathbb{P}^{n-1} \tag{10.36}$$

La coppia (U_0, j) è detta **carta affine** di $\mathbb{P}^n$.
In altre parole, $\mathbb{P}^n$ si può vedere come un'estensione o *ampliamento* dello spazio affine $\mathbb{K}^n$.
Diciamo allora che:

- I punti di H_0 sono detti **punti impropri** o **punti all'infinito**.
- H_0 è detto **iperpiano improprio** o **iperpiano all'infinito**.
- I punti di $U_0 = \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ sono detti **punti propri**.

Intuitivamente... In molti casi, possiamo liberamente parlare di $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ come lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ inteso in senso *geometrico* come insieme di punti con un punto qualunque come origine.

ESEMPIO. Consideriamo la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. L'iperpiano all'infinito è:

$$H_0 = \left\{P = (x_0 \colon x_1) \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 = 0\right\} = \{(0 \colon 1)\}$$

Mentre invece l'insieme dei punti propri è:

$$U_0 = \left\{P = (x_0 \colon x_1) \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 \neq 0\right\} = \{(0 \colon 1)\}$$

In particolare, si ha la corrispondenza biunivoca $U_0 \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathbb{K}$:

$$(x_0 \colon x_1) = \left(1 \colon \frac{x_1}{x_0}\right) \mapsto \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K}$$

In altre parole, si può vedere la retta proiettiva come il campo $\mathbb{K}$ con l'aggiunto di un unico punto, l'*infinito* ∞.

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \bigcup (0 \colon 1) = \mathbb{K} \bigcup \{\infty\} \tag{10.37}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, essendo $S^1 \setminus \{1 \text{ punto}\} \cong \mathbb{R}$, si ha:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \bigcup \{\infty\} \cong S^1 \tag{10.38}$$

10.8.1 *Chiusura proiettiva di un sottospazio affine*

DEFINIZIONE 10.8.4. Sia $r \subseteq \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ una retta affine. La **chiusura proiettiva** di r è il sottospazio proiettivo $\overline{r} \subseteq \mathbb{P}^n$ generato da $r \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$.

PROPOSIZIONE 10.8.0. $\overline{r}$ è una *retta proiettiva* e si ha:

$$\overline{r} = r \bigcup P_\infty \tag{10.39}$$

Dove $P_\infty = \overline{r} \cap H_0$ è detto *punto all'infinito* o *punto improprio* della retta r.

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ la direzione di r e $w \in r$ un punto della retta. Allora r ha descrizione parametrica in $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$:

$$\begin{cases} X_1 = tv_1 + w_1 \\ \vdots \\ X_n = tv_n + w_n \end{cases} \qquad t \in \mathbb{K}$$

Consideriamo la retta proiettiva $R \subseteq \mathbb{P}^n$ con descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = tv_1 + sw_1 \\ \vdots \\ x_n = tv_n + sw_n \end{cases} \qquad (s: t) \in \mathbb{P}^1$$

R è la retta proiettiva per i punti:

$$t = 0 : \ (1: w_1 : \ldots : w_n) \quad t = 1 : \ (0: v_1 : \ldots : v_n) = P_\infty$$

Ponendo $s = 1$ otteniamo:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = tv_1 + w_1 \\ \vdots \\ x_n = tv_n + w_n \end{cases} \qquad t \in \mathbb{K}$$

Al variare di $t \in \mathbb{K}$, questi sono tutti e soli i punti di $j(r) \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$. Si ha dunque che R è una retta proiettiva contente r:

$$\begin{aligned} R &= r \bigcup P_\infty \\ P_\infty &= R \cap H_0 = \{(0: v_1 : v_n)\} \end{aligned}$$

R è necessariamente il più piccolo sottospazio proiettivo contenente r, dato che è la retta più un solo punto. Pertanto, $R = \overline{r}$.

Osservazione.

1. Il punto improprio di r è:

$$P_\infty = (0: v_1 : \ldots : v_n)$$

E corrisponde esattamente alla *direzione* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ di r. Poiché $P_\infty = [v]$ con v la direzione di r, ne segue che l'iperpiano improprio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è:

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^n) = \{\text{rette vettoriali in } \mathbb{K}^n\} = \\ &= \{\text{direzioni delle rette affini in } \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)\} \end{aligned}$$

2. Due rette affini $r_1, r_2 \subseteq \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ hanno lo stesso punto improprio se e solo hanno la *stessa direzione*, cioè se sono *parallele*.
Se $r_1 \neq r_2$ e r_1 e r_2 sono parallele, allora $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ in $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$, ma $\overline{r_1} \cap \overline{r_2} = P_\infty$ in $\mathbb{P}^n$. Ciò ci porta a dire che due rette parallele r_1 e r_2 si incontrano sempre all'*infinito*!
3. Se $n = 2$, cioè operando in $\mathbb{P}^2$, due rette distinte $r_1, r_2 \subseteq \mathscr{A}\left(\mathbb{K}^2\right)$ sono o *incidenti* o *parallele*, ma in $\mathbb{P}^2$ si intersecano sempre.
4. Viceversa: sia $l \subseteq \mathbb{P}^n$ una retta proiettiva. Abbiamo due casi:
   - $l \subseteq H_0$, $l \cap U_0 = \varnothing$.
   - $l \nsubseteq H_0 \implies l + H_0 = \mathbb{P}^n$.

Infatti, si ha che $l + H_0$ è un sottospazio proiettivo che contiene strettamente H_0, dato che $l \nsubseteq H_0$, e usando la formula di Grassmann otteniamo:

$$\dim(l + H_0) = \dim l + \dim H_0 - \dim(l \cap H_0) = 1 + n - 1 + 0 = n = \dim \mathbb{P}^n \implies l + H_0 = \mathbb{P}^n$$

Sempre dalla formula di Grassmann:

$$\dim(l \cap H_0) = 0 \implies l \cap H_0 = \{1\text{punto}\} = \{Q\}$$

Cioè $l \cap U_0 = l \setminus \{Q\}$. In altre parole, l è una retta affine in $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ con un *punto improprio* Q e necessariamente l è la chiusura proiettiva di $l \setminus \{Q\}$.

5. Sia $n = 2$, cioè operiamo in $\mathbb{P}^2$. Una retta $r \subseteq \mathscr{A}\left(\mathbb{K}^2\right)$ è descritta da un'equazione lineare:

$$ax + by + c = 0 \quad (a,\ b) \neq (0,\ 0) \tag{10.40}$$

Con la corrispondenza biunivoca fra le coordinate $(x,\ y)$ vettoriali e $(X_1,\ X_2)$ affini. Abbiamo tuttavia anche la corrispondenza con le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^2$, rispettivamente $(x\colon y\colon z)$ e $({}_0\colon x_2\colon x_3)$.
Chiamiamo $(x\colon y\colon z)$ le coordinate omogenee su $\mathbb{P}^2$ con:

$$H_0 = \left\{P = (x\colon y\colon z) \in \mathbb{P}^2 \mid z = 0\right\} = \left\{P = (x\colon y\colon 0) \in \mathbb{P}^2\right\}$$

Allora la chiusura proiettiva $\overline{r} \subseteq \mathbb{P}^2$ di r ha in $\mathbb{P}^2$ l'equazione lineare omogenea seguente:

$$ax + by + cz = 0 \tag{10.41}$$

Infatti, per $z = 1$ si ottiene l'equazione di r, mentre ponendo $z = 0$ (cioè il passaggio per H_0) troviamo il punto improprio P_∞ di r:

$$\begin{cases} z = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases} \qquad P_\infty = (-b\colon a\colon 0)$$

La direzione della retta $ax+by+c = 0$ è data dal punto improprio P_∞ e corrisponde al vettore $(-b, a\colon 0)$.

Generalizziamo ora il concetto di chiusura proiettiva a un generico sottospazio affine.

Definizione 10.8.5. Dato $S \subseteq \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ un sottospazio affine con $S \neq \varnothing$, la chiusura proiettiva $\overline{S} \subseteq \mathbb{P}^n$ di S è il sottospazio proiettivo generato da S. Esso ha dimensione $\dim \overline{S} = \dim S = m$.

Equazioni cartesiane. Se S come sottospazio affine è dato in forma cartesiana dal sistema lineare $h \times (n + 1)$ seguente:

$$Ax + b = 0 \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$$

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1 + \ldots + a_{1,n}X_n + b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}X_1 + \ldots + a_{h,n}X_n + b_h = 0 \end{cases}$$

Allora $\overline{S}$ è descritto dal sistema lineare omogeneo $h \times (n+1)$ in $(x_0, \ldots, x_n)$ seguente:

$$(A \mid b)x = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n$$

$$* \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n + b_1 x_0 = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \ldots + a_{h,n}x_n + b_h x_0 = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Studiamo le dimensioni di S e $\overline{S}$ usando i sistemi cartesiani appena definiti:

$$\begin{aligned} \dim S &= \dim \mathbb{K}^n - \operatorname{rk}\,(A) = n - \operatorname{rk}\,(A) \\ \dim \overline{S} &= \dim \mathbb{P}^n - \operatorname{rk}\,(A \mid b) - 1 = (n + 1 - \operatorname{rk}\,(A \mid b)) - 1 = n - \operatorname{rk}\,(A \mid b) \end{aligned}$$

Per Rouché-Capelli vale $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\,(A \mid b)$ in quanto $S \neq \varnothing$. In questo modo abbiamo dimostrato che $\dim \overline{S} = \dim S$.

I *punti impropri* del sottospazio affine S sono dati da $\overline{S} \cap H_0$, con $\overline{S}$ la chiusura proiettiva di S e H_0 l'iperpiano improprio. Dal sistema $*$ si ha che $\overline{S} \cap H_0$ è dato da:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \ldots + a_{h,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Esso corrisponde al sistema lineare omogeneo in $\mathbb{K}^n$ $Ax = 0$ associato al sistema lineare $Ax + b = 0$ che definisce S. In altre parole, $\overline{S} \cap H_0$ corrisponde al *sottospazio vettoriale direttore* $W \subseteq \mathbb{K}^n$ e vale $\overline{S} \cap H_0 = \mathbb{P}^n(W)$ direzione di S. La sua dimensione per definizione di direzione è:

$$\dim\left(\overline{S} \cap H_0\right) = \dim S - 1 = \dim \overline{S} - 1$$

Equazioni parametriche. Se S ($\dim S = m$) è data in *forma parametrica* e il sottospazio direttore $W \subseteq \mathbb{K}^n$ ha una base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ (tali che $v_i = (V_{i,1}, \ldots, V_{i,n}) \in \mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$ per un dato sistema di riferimento affine), posto $c \in S$ ricordiamo che l'espressione parametrica di S è:

$$X = t_1 v_1 + \ldots + t_m v_m + c \qquad t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} X_1 = t_1 V_{1,1} + \ldots + t_m V_{m,1} + C_1 \\ \vdots \\ X_n = t_1 V_{1,n} + \ldots + t_m V_{m,n} + C_n \end{cases}$$

Allora, $\overline{S}$ è il sottospazio generato dagli $m+1$ punti *indipendenti*:

$$(0 \colon v_{i,1} \colon \ldots \colon v_{in}) \quad i = 1, \ldots, m (1 \colon c_1 \colon \ldots \colon c_n) \tag{10.42}$$

Pertanto, $\overline{S}$ ha descrizione parametrica:

$$\begin{cases} x_0 = t_0 \\ x_1 = t_1 v_{1,1} + \ldots + t_m v_{m,1} + t_0 C_1 \\ \vdots \\ x_n = t_1 v_{1,n} + \ldots + t_m v_{m,n} + t_0 C_n \end{cases}$$

Con $(t_0 : \ldots : t_m) \in \mathbb{P}^m$.

10.8.2 *Impratichiamoci! Geometria affine e geometria proiettiva*

Esercizio. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora, preso $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con la topologia quoziente, mostrare che U_0 è un aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e che $j : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_0$

Soluzione. ...

Vediamo un esempio di proiettività di $\mathbb{P}^1$.

Esempio. Si consideri $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ con $\infty = (0 : 1)$. Sia $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ una proiettività (dunque biunivoca) definita come $f(x_0 : x_1) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)$. Si ha che: $f(0 : 1) = (b : d)$, mentre la sua controimmagine è $f(-b : a) = (0 : 1)$, infatti siccome le coordinate sono omogenee basta porre $ax_0 + bx_1 = 0$.
Sia $t = \frac{x_1}{x_0}$ la coordinata affine su $\mathbb{K}$, se $x_0 \neq 0$ tutti i punti $(x_0 : x_1)$ si possono scrivere come $(x_0 : x_1) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right) = (1 : t)$, il che corrisponde al punto $t \in \mathbb{K}$. Vediamo ora come si comporta l'immagine grazie a queste osservazioni se $ax_0 + bx_1 \neq 0$:

$$f(x_0 : x_1) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1) = \left(1 : \frac{cx_0 + dx_1}{ax_0 + bx_1}\right) = \left(1 : \frac{x_0\left(c + d\frac{x_1}{x_0}\right)}{x_0\left(a + b\frac{x_1}{x_0}\right)}\right) = \left(1 : \frac{dt + c}{bt + a}\right)$$

Dunque la proiettività f corrisponde alla trasformazione $F : \mathbb{K} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ con $F(t) = \begin{cases} \frac{dt+c}{bt+a}, & t \in \mathbb{K},\ t \neq -\frac{a}{b} \\ \infty, & t = -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{b}, & t = \infty \end{cases}$ dove per $t = -\frac{a}{b}$ si ottiene $f(-b : a) = (0 : 1) = \infty$, mentre la prima equazione è detta *trasformazione lineare fratta*, che è definita sulla retta affine tranne dove si annulla il denominatore.
Notiamo che F diventa un'affinità $\begin{aligned} F : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto \alpha t + \beta \end{aligned}$ se e solo se il denominatore diventa una costante ponendo $b = 0$, ovvero se è della forma $F(t) = \alpha$, il che significa che la proiettività fissa il punto all'infinito, ovvero $f(0 : 1) = (0 : 1)$, mentre la parte affine viene mandata in sè stessa.n
Questo ragionamento si può vedere anche in dimensione superiore.

10.9 SPAZI PROIETTIVI COMPLESSI

10.9.1 *Varietà compatta*

Ricordiamo... Nel caso di $\mathbb{R}^n$ si è già visto che lo spazio proiettivo reale è un quoziente del tipo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = {}^{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\sim}$ dunque è dotato in maniera naturale di una topologia.
Si può anche vedere come quoziente della sfera S^n dove si identificano i punti antipodali grazie alla suriezione $\pi : S^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, è anche una varietà topologica compatta di dimensione n. Inoltre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$ e abbiamo analizzato il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Anche nel caso complesso per $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = {}^{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}/_{\sim}$ si ha in maniera naturale una topologia quoziente data dalla topologia euclidea su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
Vogliamo vedere che è una varietà topologica compatta di dimensione **2n**. Questo perché mentre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è localmente euclideo di dimensione n, si ha che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ localmente è come $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, dunque la dimensione topologica è $2n$.

Teorema 10.9.0. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà topologica di dimensione $2n$.

Dimostrazione.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è *connesso* perché è quoziente di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ che è connesso.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è *compatto*: per avere la tesi lo si vuole vedere come quoziente di un compatto o immagine tramite una funzione continua di un compatto. Per la relazione di equivalenza, due vettori $z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon w = \lambda z$. Vogliamo ora restringerci alla sfera (la cui dimensione è data da $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \supset S^{2n+1}$) e dimostrare che ogni punto del quoziente è equivalente ad un punto della sfera. Per fare ciò si sfrutta la corrispondenza fra numeri complessi e reali e la norma:

$$z_j = x_j + iy_j \implies z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \longleftrightarrow (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2}$$

$$\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (|x_j|^2 + |y_j|^2) \quad \wedge \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ \|\lambda z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda z_j|^2} = |\lambda| \|z\|$$

$$z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \implies \|z\| \neq 0 \wedge \lambda = \frac{1}{\|z\|} \implies \underbrace{\frac{1}{\|z\|} z}_{\in S^{2n+1}} \sim z \implies \pi(S^{2n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

  Nel caso reale i punti sulla sfera sono equivalenti solo se antipodali, nel caso complesso S^{2n+1} invece $z, w \in S^{2n+1}$ si ha $z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon w = \lambda z$ siccome $w, z \in S^{2n+1}$ hanno norma unitaria, dunque $1 = \|w\| = \|\lambda z\| = \lambda| \|z\| = |\lambda|$. Siccome ci sono infiniti numeri di norma 1 in $\mathbb{C}$, allora ci sono infiniti numeri nella stessa classe, infatti i punti $\lambda z \in S^{2n+1}$ sono tutti equivalenti.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è T_2, basta dimostrare che π_0 è un'identificazione chiusa. Sia $C \subset S^{2n+1}$ un chiuso, allora $\pi_0(C) \iff \pi_0^{-1}(\pi_0(C))$ è chiusa in S^{2n+1}. In effetti la relazione di equivalenza su S^{2n+1} viene da un'azione del gruppo $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ rispetto al prodotto con elemento neutro 1 quale $\begin{aligned} F : S^1 \times S^{2n+1} &\longrightarrow S^{2n+1} \\ (\lambda, z) &\longmapsto \lambda z \end{aligned}$. Si ha che F è un'applicazione continua e siccome $S^1 \times S^{2n+1}$ è compatto e S^{2n+1} è T_2 allora F è chiusa. Dato un chiuso $C \subseteq S^{2n+1}$, allora data la controimmagine dell'immagine agisco sui punti di C con tutti gli elementi di S^1, ovvero prendo tutte le orbite che intersecano C, ottenendo quanto segue: $\pi_0^{-1}(\pi_0(C)) = F(S^1 \times C) \subseteq S^{2n+1} \implies \pi_0^{-1}(\pi_0(C))$ chiuso $\implies \pi_0(C)$ chiuso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \implies \pi_0$ applicazione chiusa $\implies \pi_0$ identificazione. Pertanto $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è anche quoziente di S^{2n+1}. Siccome

S^{2n+1} è un compatto in un T_2 per e siccome π_0 è un'identificazione allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è T_2.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è localmente euclideo di dimensione $2n$: per dimostrarlo sfruttiamo la costruzione ovvero identificando degli aperti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con $\mathbb{K}^n$, quale la famiglia $U_j := \{z_j \neq 0\} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus H_j$, con H_j j-esimo iperpiano coordinato. Per semplicità lavoreremo con $j = 0$.

  Si considera la proiezione al quoziente $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e la controimmagine $\pi^{-1}(U_0) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \mid z_0 \neq 0\}$ aperto in $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ perché abbiamo tolto un iperpiano, pertanto U_0 è aperto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Questo vale per tutti gli U_j. Ricordando la costruzione si considerano le mappe biunivoche e una inversa dell'altra

$$j : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & U_0 \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & (1 : z_1 : \dots : z_n) \end{array} \quad \text{e} \quad \phi : \begin{array}{ccc} U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (z_0 : \dots : z_n) & \longmapsto & \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right) \end{array}.$$

  Mostriamo che j e ϕ cono omeomorfismi, in questo caso siccome sono già biunivoche e una inversa dell'altra basta dimostrare che sono entrambe continue.

  Per mostrare che j è continua sfruttiamo il diagramma a lato, ovvero la fattorizzazione di j in $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ tramite:

$$\widetilde{j}((z_1, \dots, z_n)) = (1, z_1 \dots, z_n)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathbb{C}^n \arrow[ur, "\widetilde{j}"] \arrow[rr, "j"'] & & U_0 \end{tikzcd}$$

  e la proiezione π. Siccome $\widetilde{j}$ e π sono continue allora anche j che è la loro composizione lo è.

  Per la continuità dell'inversa ϕ invece si procede con la fattorizzazione nella controimmagine di U_0 tramite π tramite una restrizione dell'inversa di π e $\hat{\phi}$ che sostanzialmente ha le stesse coordinate di ϕ. Definiamo dunque $p := \pi|_{\pi^{-1}(U_0)} : \pi^{-1}(U_0) \longrightarrow U_0$ e

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_0) \subset \mathbb{C}^{n+1} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\widehat{\phi}"] & \\ U_0 \arrow[rr, "\phi"'] & & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

  $\widehat{\phi}(z_0, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right)$. Entrambe sono continue, infatti la prima è la restrizione di una funzione continua e la seconda è ben definita ($U_0 = \{z_0 \neq 0\}$) e continua, inoltre lavora solo con vettori e non classi di equivalenza!
  Per dimostrare che ϕ è continua sfruttiamo le proprietà della topologia quoziente (vedasi 4.1.1), pertanto vogliamo dimostrare che p è un'identificazione: è già continua e suriettiva, basta solo che sia aperta o chiusa per il teorema 4.1.

  Osserviamo che $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è anch'essa un quoziente dato dall'azione del gruppo [a] $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ rispetto al prodotto per la moltiplicazione su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Essa inoltre è un'azione per omeomorfismi, infatti fissato $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si ha che $\theta_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ z & \longmapsto & \lambda z \end{array}$ è continua, per la proposizione 5.1 si ha che $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è un'applicazione aperta, pertanto anche p che è una sua restrizione ad un aperto è aperta (verifica per esercizio), pertanto dalle considerazioni di cui sopra p è un'identificazione.
  Ne segue che U_0 è un aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ omeomorfo a $\mathbb{C}^n$ e quindi a $\mathbb{R}^{2n}$. Allo stesso

modo, $\forall j \in \{0, \ldots, n\}$, U_j è un aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ omeomorfo a $\mathbb{C}^n$ tramite la mappa
$$\begin{aligned} \phi_j : \quad & U_j \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_0 : \ldots : z_n) & \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right) \end{aligned}$$
, e siccome in coordinate omogenee c'è sempre un elemento non nullo (si lavora su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$) allora ogni punto sta in uno degli aperti U_j, pertanto $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U_0 \cup \cdots \cup U_n \implies \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è localmente euclideo di dimensione $2n$, dunque è una varietà topologica compatta.

[a] questo vale in generale per gli spazi proiettivi vedasi

Osservazione.
- Su un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi si ha sempre la mappa ϕ_j che è un corrispondenza biunivoca fra i sottoinsiemi U_j (complementari di un iperpiano coordinato) e $\mathbb{K}^n$ (senza aspetto topologico) e vale sempre che lo spazio proiettivo è unione di tali U_j.
  In particolare nel caso reale, tali U_j sono aperti ed il ragionamento è analogo a quello fatto poc'anzi nel caso complesso.
- Non abbiamo dimostrato che è a base numerabile perché essendo compatto segue dal teorema , inoltre si potrebbe dimostrare facilmente "a mano" sfruttando che gli aperti U_j sono a base numerabile, dunque anche la loro unione finita lo è.

10.9.1.1 Retta proiettivo complessa

Cosa succede per la retta proiettiva complessa? Essa è una varietà topologica compatta di dimensione 2 (dunque una superficie topologica compatta) che abbiamo già classificato! Scopriamo di che superficie si tratta. Si ha che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{(0:1)\}$ con $U_0 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, pertanto la retta proiettiva complessa è un piano unito ad un punto. Dimostriamo ora che è omeomorfa a S^2, detta anche *sfera di Riemann* , e analizziamo poi la differenza con il piano proiettivo reale.

Teorema 10.9.1. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$

Intuitivamente... Per ottenere la sfera si può pensare di richiudere il piano su se stesso con aggiunto il punto all'infinito $\{(0:1)\}$.

Dimostrazione. Costruiamo l'omeomorfismo con $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sfruttando la *proiezione stereografica*. Definiamo la funzione $F : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ prima sulla restrizione della sfera senza il polo nord $N = (0,0,1)$ e poi la estendiamo anche in N

$$S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{p_N} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[F_{|S^2\setminus\{N\}}]{k} \mathbb{C} \xrightarrow{j} U_0$$

con $p_N : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ proiezione stereografica da N, con $\begin{aligned} k : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto x + iy \end{aligned}$

e con $\begin{aligned} j : \mathbb{C} & \longrightarrow U_0 \\ w & \longmapsto (1 : w) \end{aligned}$. Poniamo $F_{|S^2\setminus\{N\}} := j \circ k \circ p$ e $F(N) := (0:1)$ e ricordiamo che

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{(0\colon 1)\}$.
Siccome j, k, p sono omeomorfismi allora la loro composizione $F_{|_{S^2\setminus\{N\}}}$ è biunivoca e continua su $S^2 \setminus \{N\}$. Perché F sia continua in tutti i suoi punti basta che sia continua in un aperto contenente N. Per poter di nuovo sfruttare la proiezione stereografica però dal polo sud $S = (0, 0, -1)$ scegliamo l'aperto $S^2 \setminus \{S\}$. Dunque ora dobbiamo mostrare la continuità di $F_{|_{S^2\setminus\{S\}}}$.
Scriviamo le due proiezioni stereografiche: fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sulla sfera allora consideriamo le semirette uscenti da N e da S che passano per P_0 [a]

$$NP_0\colon \begin{cases} x = 0 + tx_0 \\ y = 0 + ty_0 \\ z = 1 + t(z_0 - 1) \end{cases} \quad \wedge \quad SP_0\colon \begin{cases} x = 0 + tx_0 \\ y = 0 + ty_0 \\ z = -1 + t(z_0 + 1) \end{cases}$$

Per trovare le immagini delle proiezioni stereografiche intersechiamo le due semirette con il piano xy, ovvero poniamo $z = 0$, ottenendo così

$$1 + t(z_0 - 1) = 0 \implies t = \tfrac{1}{1-z_0} \quad \wedge \quad -1 + t(z_0 + 1) = 0 \implies t = \tfrac{1}{1+z_0}$$

Notiamo che i denominatori non si annullano in entrambi i casi per la definizione delle proiezioni stereografiche sulla sfera meno N ed S rispettivamente.
Ne segue che l'immagine di $\mathbb{R}^2$ tramite la mappa standard k è

$$\left(\tfrac{x_0}{1-z_0}, \tfrac{y_0}{1-z_0}\right) \mapsto w = \tfrac{x_0}{1-z_0} + i\tfrac{y_0}{1-z_0} \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad \left(\tfrac{x_0}{1+z_0}, \tfrac{y_0}{1+z_0}\right) \mapsto u = \tfrac{x_0}{1+z_0} + i\tfrac{y_0}{1+z_0} \in \mathbb{C}$$

Si ha che $w = \frac{1}{u}$ e viceversa $u = \frac{1}{w}$, poiché quando $P_0 \in S^2 \setminus \{N, S\}$ allora $w, u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, verifichiamolo sfruttando le proprietà dei numeri complessi:

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{x_0}{1+z_0} - i\frac{y_0}{1+z_0}} = \frac{1 + z_0}{x_0 - iy_0} \overset{!}{=} \frac{(x_0 + iy_0)(1 + z_0)}{x_0^2 + y_0^2} \overset{!!}{=} \frac{(x_0 + iy_0)(1 + z_0)}{1 - z_0^2} = \frac{x_0 + iy_0}{1 - z_0} = w$$

dove (!) indica che il passaggio è dovuto al fatto che siccome $P_0 \neq N, S$ allora $x_0 + iy_0 \neq 0$, mentre (!!) segue dal fatto che il punto sta sulla sfera, per cui $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \implies x_0^2 + y_0^2 = 1 - z_0^2$.
Abbiamo dunque ottenuto $F_{|_{S^2\setminus\{N,S\}}}$ come una composizione di mappe

$$S^2 \setminus \{N, S\} \xrightarrow{p_N} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[F_{|_{S^2\setminus\{N,S\}}}]{k} \mathbb{C} \xrightarrow{j} U_0$$

dove $j(w) = (1\colon w) = \left(1\colon \frac{1}{u}\right) = (\overline{u}\colon 1)$ in quanto si lavora con coordinate omogenee. Inoltre c'è un'estensione continua su $S^2 \setminus \{S\}$

$$\begin{array}{ccccccccc} S^2 \setminus \{S\} & \xrightarrow{p_S} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{k} & \mathbb{C} & \xrightarrow{c} & \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & U_0 \\ P & \longmapsto & & & u & \longmapsto & \overline{u} & \longmapsto & (\overline{u}\colon 1) \end{array}$$

con c coniugio.
Dunque F è continua, chiusa (compatto in T_2) e biunivoca, pertanto F è un omeomorfismo.

[a] le equazioni sono scritte in forma parametrica, pertanto abbiamo evidenziato il punto per cui passano e la direzione $P_0 - N$ per esempio

Osservazione. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \neq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
Notiamo che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono entrambe compattificazioni del piano, ma in modo profondamente diverso!
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$, ovvero è l'unione di un piano con un punto all'infinito.
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \cup S^1$, ovvero il piano unito alla retta impropria $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, topologicamente è l'interno del disco omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ unito al bordo che è S^1 con la relazione di equivalenza per i punti antipodali.

10.10 BIRAPPORTO

Torniamo ad analizzare il caso di spazi proiettivi su un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi. Andremo a definire
Sia $\mathbb{P}^1(V)$ una retta proiettiva, ovvero $\dim V = 2$.

Definizione 10.10.0. Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$ dei punti con P_1, P_2, P_3 distinti. Il **birapporto** dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 (ordinati) è

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\} \tag{10.43}$$

con $\beta = \infty$ se $y_0 = 0$ e dove $(y_0 : y_1)$ sono le coordinate di P_4 nel riferimento proiettivo in cui P_1 è il primo punto fondamentale, P_2 il secondo e P_3 il punto unità, ovvero se $P_1 = (1:0), P_2 = (0:1), P_3 = (1:1)$

Osservazione.
1. $y_0, y_1 \in \mathbb{K} \implies \beta \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
2. β è ben definito perché P_1, P_2, P_3 sono distinti $\implies$ sono in posizione generale [a] $\implies$ determinano in maniera univoca il riferimento proiettivo per il teorema sul riferimento proiettivo e punti in posizione generale
3. per ipotesi i primi tre punti sono distinti, mentre non si fanno ipotesi sul quarto punto, vediamo cosa succede in casi speciali

$$P_4 = P_1 \iff (y_0 : y_1) = (1:0) \iff \beta = 0$$
$$P_4 = P_2 \iff (y_0 : y_1) = (0:1) \iff \beta = \infty$$
$$P_4 = P_3 \iff (y_0 : y_1) = (1:1) \iff y_0 = y_1 \iff \beta = 1$$

dunque $\beta \in \{0, 1, \infty\}$ esattamente quando P_4 coincide con uno dei primi 3 punti.
Quindi se P_1, P_2, P_3, P_4 sono distinti allora $\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.
Viceversa se $a \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ e $P_4 = (1:a)$ allora $\beta = a$, dunque β assume tutti i valori possibili in $\mathbb{K}$.

[a] In una retta proiettiva essere distinti equivale ad essere in posizione generale

Vogliamo ora scoprire come si calcola il birapporto in un sistema di riferimento qualsiasi e non solo quello dato nella definizione.

Teorema 10.10.0. Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$ dei punti nella retta proiettiva con P_1, P_2, P_3 distinti. Supponiamo che $P_i = (\lambda_1 : \mu_i), i = 1, \ldots, 4$. Allora

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}} \tag{10.44}$$

Dimostrazione. $P_1 \neq P_2 \implies (\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ sono una base di $\mathbb{K}^2$. Siano ora $a, b \in \mathbb{K}$: $(\lambda_3, \mu_3) = a(\lambda_1, \mu_1) + b(\lambda_2, \mu_2) = (a\lambda_1, a\mu_1) + (b\lambda_2, b\mu_2)$, ovvero faccio una combinazione lineare e porto dentro gli scalari. Per costruzione è la base che dà il riferimento proiettivo con P_1, P_2 punti fondamentali e P_3 punto unità, basta riscalare in modo tale che sia la somma degli altri due vettori. Per ottenere P_4, lo scrivo come combinazione lineare di tali 2 vettori: $\exists c, d \in \mathbb{K}$: $(\lambda_4, \mu_4) = c(a\lambda_1, a\mu_1) + d(b\lambda_2, b\mu_2) \implies P_4$ ha coordinate $(c : d)$ nel nuovo riferimento proiettivo $\implies \beta = \frac{d}{c}$.
Per non appesantire la scrittura useremo come la seguente notazione per i determinanti: $\delta_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix}$.
Notiamo che la prima combinazione lineare dà il seguente sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite a, b : $\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_3 \\ \mu_1 a + \mu_2 b = \mu_3 \end{cases}$

Risolvendo il sistema con il metodo di Cramer si ottiene: $a = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\delta_{32}}{\delta_{12}}$ e $b = \dfrac{\delta_{13}}{\delta_{12}}$

La seconda combinazione lineare invece dà un sistema lineare in c, d, dove sostituisco i valori di a, b trovati :

$$\begin{cases} (a\lambda_1)c + (b\lambda_2)d = \lambda_4 \\ (a\mu_1)c + (b\mu_2)d = \mu_4 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}}\lambda_1 c + \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}\lambda_2 d = \lambda_4 \\ \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}}\mu_1 c + \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}\mu_2 d = \mu_4 \end{cases} \implies \begin{cases} (\delta_{32}\lambda_2)c + (\delta_{13}\lambda_2)d = \delta_{12}\lambda_4 \\ (\delta_{32}\mu_2)c + (\delta_{13}\mu_2)d = \delta_{12}\mu_4 \end{cases}$$

Si applica ancora Cramer e si sfrutta che il determinante è lineare in ogni colonna, dunque possiamo fare uscire i δ_{ij} e riscriverli riordinando gli indici: scambiamo l'ordine delle colonne a patto di cambiare segno, tuttavia essendo una frazione e facendolo per entrambi il segno non cambia, idem per d:

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{12}\lambda_4 & \delta_{13}\lambda_2 \\ \delta_{12}\mu_4 & \delta_{13}\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{32}\lambda_1 & \delta_{13}\lambda_2 \\ \delta_{32}\mu_1 & \delta_{13}\mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{\delta_{12}}\cancel{\delta_{13}}\delta_{42}}{\delta_{32}\cancel{\delta_{13}}\cancel{\delta_{12}}} = \frac{-\delta_{24}}{\delta_{23}} = \frac{\delta_{24}}{\delta_{23}}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{32}\lambda_1 & \delta_{12}\lambda_4 \\ \delta_{32}\mu_1 & \delta_{12}\mu_4 \end{vmatrix}}{\delta_{32}\delta_{13}\delta_{12}} = \frac{\cancel{\delta_{32}}\cancel{\delta_{12}}\delta_{14}}{\cancel{\delta_{32}}\delta_{13}\cancel{\delta_{12}}} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{13}}$$

$$\implies \beta = \frac{d}{c} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{13}} \cdot \frac{\delta_{23}}{\delta_{24}}$$

Osservazione. Il birapporto può anche essere definito tramite questa formula, che è ben definita: supponiamo di moltiplicare i punti per uno scalare: succede sia al numeratore sia al denominatore, dunque si semplifica, pertanto il birapporto così definito non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee. Inoltre al denominatore il primo determinante è sempre diverso da 0 perché i punti sono distinti. Il secondo determinante al denominatore è nullo quando $P_2 = P_4$, il che torna con quanto definito prima.

Tips & Tricks! Se tutti e 4 i punti sono diversi da $(0\colon 1)$, ovvero se $\forall i,\ \lambda_i \neq 0$
$P_i = (1\colon z_i), i = 1,\ldots,4$ allora $\beta(P_1,P_2,P_3,P_4) = \dfrac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}$.
Infatti $P_i = (\lambda_i\colon \mu_i) = (1\colon z_i)$, cioé $z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$, per la linearità delle colonne si ottiene

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1} & \frac{\mu_4}{\lambda_4} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_4 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2(z_4 - z_1)$$

Si procede allo stesso modo per gli altri determinanti e le λ si semplificano.

Ricordiamo... Date due rette proiettive $\mathbb{P}^1(V)$ e $\mathbb{P}^1(V')$, e $P_1,P_2,P_3 \in \mathbb{P}^1(()V)$ distinti e $Q_1,Q_2,Q_3 \in \mathbb{P}^1(V')$ distinti, esiste sempre ed è unica una trasformazione proiettiva $d : \mathbb{P}^1(()V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$ tale che $f(P_i) = Q_i,\ i = 1,2,3$

Ci domandiamo ora se è possibile farlo anche con quattro punti, per riuscirci sfruttiamo il birapporto.

Teorema 10.10.1. Siano $\mathbb{P}^1(V)$ e $\mathbb{P}^1(V')$ due rette proiettive e siano i punti $P_1,P_2,P_3,P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$ di cui i primi 3 distinti, e $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 \in \mathbb{P}^1(V')$ di cui i primi 3 distinti. Allora $\exists$ trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$ tale che $f(P_i) = Q_i, \forall i = 1,\ldots,4 \iff \beta(P_1,P_2,P_3,P_4) = \beta(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$, ovvero se il birapporto delle quaterne è lo stesso.

Osservazione. Consideriamo solo i primi 3 punti e scegliamone dei rappresentanti: $v_1,v_2,v_3 \in V\colon P_i = [v_i],\ i = 1,2,3$ e $v_3 = v_1 + v_2$. Dunque $\{v_1,v_2\}$ è base di V che dà il riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^1(V)$ in cui $P_1 = (1\colon 0), P_2 = (0\colon 1), P_3 = (1\colon 1)$. Sia $P_4 = [v_4]$ con $v_4 = av_1 + bv_2$. Allora $P_4 = (a\colon b)$ e $\beta(P_i) = \frac{b}{a}$.
Allo stesso modo per l'altra quaterna, siano $v_1',v_2',v_3' \in V'\colon Q_i = [v_i'],\ i = 1,2,3$ e
$v_3' = v_1' + v_2'$.
Siccome P_1,P_2,P_3 e Q_1,Q_2,Q_3 sono in posizione generale allora esiste ed è unica una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}^1(V) \longrightarrow \mathbb{P}^1(V')$ tale che $f(P_i) = Q_i$. Inoltre $f = \widetilde{\varphi}$ con $\varphi : V \longrightarrow V'$ applicazione lineare tale che $\varphi(v_1) = v_1',\ \varphi(v_2) = v_2'$, ovvero porta una base di V in una base di $V' \implies \varphi(v_4) = \varphi(av_1 + bv_2) = av_1' + bv_2' \implies f(P_4) = [\varphi(v_4)] = (a\colon b)$ nel riferimento in $\mathbb{P}^1(V')$.

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) Siccome la f è unica e $f(P_4) = Q_4 \implies Q_4 = (a\colon b)$ nel riferimento in cui $Q_1 = (1\colon 0), Q_2 = (0\colon 1), Q_3 = (1\colon 1) \implies \beta(Q_i) = \frac{b}{a} = \beta(P_i)$.
$\Longleftarrow$) Se $\beta(Q_i) = \frac{b}{a}$ allora distinguiamo i casi in cui il birapporto è nel campo o infinito

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{K} \implies Q_4 = \left(1\colon \frac{b}{a}\right) = (a\colon b) = f(P_4)$$
$$\frac{b}{a} = \infty \implies a = 0 \implies Q_4 = (0\colon 1) = f(P_4)$$

Corollario 10.10.0. Siano $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ e siano i punti $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ di cui i primi 3 distinti, e $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ di cui i primi 3 distinti. Allora $\exists$ proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ t.c. $f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, \dots, 4 \iff \beta(P_i) = \beta(Q_i)$, ovvero se il birapporto delle quaterne è lo stesso.

Osservazione. Sia $\mathcal{S} = \{$quaterne ordinate di punti distinti in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$. Siano due quaterne $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \in \mathcal{S}$, esse sono *proiettivamente equivalenti* se $\exists f$ proiettività t.c. $f(P_i) = Q_i, \forall i = 1, 2, 3, 4$, ovvero per il teorema precedente se le due quaterne hanno lo stesso birapporto.
Notiamo che quella appena data è una relazione di equivalenza (verifica per esercizio), per cui le classi di equivalenza proiettiva di 4 punti distinti e ordinati in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sono in corrispondenza biunivoca con il campo meno lo 0 e l'1 visto che sono 4 punti distinti, val a dire

$$\mathcal{S}/\sim \leftrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$$

Si ha dunque che ad ogni quaterna di punti distinti associamo il suo birapporto (applicazione suriettiva) e per ogni elemento nel campo troviamo una quaterna di punti distinti con tale birapporto (quozientando l'applicazione è iniettiva)

Osservazione. In dimensione maggiore generalmente il birapporto non è definito, a meno che i 4 punti sono allineati su una retta proiettiva r.

Esempi.
Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ consideriamo due quaterne di punti distinti quali $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$. Grazie al birapporto analizziamo per ciascuna delle due quaterne in che posizione sono: generale (ovvero a tre a tre non allineati), o non in posizione generale, in cui si differenzia se i punti allineati sono 3 o 4. Se i punti P_i sono proiettivamente equivalenti ai punti Q_i, allora tali posizioni devono essere mantenute: le proiettività mandano rette in rette, posizioni generali in posizioni generali. Per contronominale, se si verificano casi diversi per le due quaterne possiamo afermare che non sono proiettivamente equivalenti.

1. P_i e Q_i sono in *posizione generale*. Vogliamo vedere se sono proiettivamente equivalenti, per farlo dobbiamo controllare se le dimensioni sono giuste: siccome abbiamo 4 punti e $4 = \dim \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) + 2$ allora $\exists!$ proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tale che $f(P_1) = Q_i, i = 1, \dots, 4$, dunque hanno lo stesso birapporto e sono sempre

proiettivamente equivalenti

2. P_1, P_2, P_3 allineati ma P_4 no, idem per i Q_i, ovvero $P_1, P_2, P_3 \in r$ retta proiettiva. Vogliamo dimostrare che anche in questo caso le quaterne sono proiettivamente equivalenti, Scegliamo dei rappresentanti $P_i = [v_i]$, $i = 1,2,3,4, v_i \in \mathbb{K}^3$ t.c. $v_3 = v_1 + v_2$, il che è possibile perché i punti sono allineati. Si ha che $\{v_1, v_2, v_3$ è una base di $\mathbb{K}^3\}$ visto che $P_4 \notin r$ allora v_4 non è linearmente dipendente da v_1, v_2. Allo stesso modo sia $Q_i = [w_i]$, $i = 1,2,3,4, w_i \in \mathbb{K}^3$ t.c. $w_3 = w_1 + w_2$ con $\{w_1, w_2, w_4\}$ base di $\mathbb{K}^3$.
   Definiamo $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ lineare t.c. $\varphi(v_1) = w_1, \varphi(v_2) = w_2, \varphi(v_4) = w_4 \implies \varphi(v_3) = \varphi(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 = w_3$. Dunque $f = \widetilde{\varphi} : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una proiettività che manda P_i in Q_i, $\forall i = 1,2,3,4$

3. Siccome tutti i punti sono allineati allora è definito il loro birapporto. Se le due quaterne sono proiettivamente equivalenti, sia $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ la proiettività, essa porta una quaterna nell'altra e necessariamente una retta nell'altra, ovvero $f(r) = s$, dunque la restrizione alle due rette $f_{|_r} : r \longrightarrow s$ porta P_i in Q_i, $\forall i \implies \beta(P_i) = \beta(Q_i)$.
   Viceversa se $\beta(P_i) = \beta(Q_i)$ allora $\exists\ g : r \longrightarrow s$ trasformazione proiettiva che manda P_i in Q_i, $\forall i = 1,2,3,4$. Si ha che g si estende in maniera non unica ad una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Infatti dati $r = \mathbb{P}(U)$, $U \subset \mathbb{K}^3$ e $s0\mathbb{P}(W)$, $W \subset \mathbb{K}^3$ (gli ultimi sono piani vettoriali), si ha che $g = \widetilde{\psi}$ con $\psi : U \longrightarrow W$ isomorfismo lineare. Vogliamo estenderla ad un automorfismo lineare $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ scegliendo basi con due vettori nel pinao ed uno esterno, ovvero $u_1, u_2 \in U$ base di U e $u_3 \notin U$. Dunque $\psi(u_1), \psi(u_2)$ è una base di W e $w_3 \notin W \implies \{u_1, u_2, u_3\}$ base di $\mathbb{K}^3$, $\{\psi(u_1), \psi(u_2), \psi(u_3)\}$ un'altra base. Ponendo $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ tale che $\varphi(u_1) := \psi(u_1), \varphi(u_2) := \psi(u_2), \varphi(u_3) := w_3$ si ha $f = \widetilde{\varphi}$.
   In questo caso dunque i punti sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso birapporto.

10.11 RETTE NEL PIANO PROIETTIVO

Una retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ ha equazione $r\colon a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ che è un'equazione lineare omogenea in coordinate omogenee, dunque è determinata dai coefficienti a_0, a_1, a_2 dell'equazione con la proprietà che devono essere non tutti nulli e in più fissati i coefficienti l'equazione è determinata a meno di costante moltiplicativa non nulla. Dunque si può associare a r un punto del piano proiettivo dato esattamente dai coefficienti delle coordinate omogenee, ovvero $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ per cui si ha una corrispondenza biunivoca fra le rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (che non va pensato come lo stesso piano)

$$\{\text{rette in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\} \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$$

$$r\colon a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \longrightarrow (a_0 : a_1 : a_2)$$

Notiamo che ciò funziona bene con $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, infatti le coordinate omogenee si comportano proprio come i coefficienti dell'equazione.

ESEMPIO. Retta nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$l_i: x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \leftrightarrow (1: 1: 2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Quando pensiamo a $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ come lo spazio che parametrizza le rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, lo denotiamo con $\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{K})\right)^*$ e lo chiamiamo *piano proiettivo duale*. .
In prima istanza questo significa semplicemente che si interpreta un punto del duale come un punto associato ad una retta.

10.11.1 *Fascio di rette*

DEFINIZIONE 10.11.0. Un **fascio** di rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è l'insieme delle rette di equazione

$$\mathscr{F}: \lambda l_1 + \mu l_2 = 0, \ (\lambda: \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

dove l_1, l_2 sono due rette fissate e distinte.

OSSERVAZIONE. Possiamo pensare al fascio di rette come una collezione di rette le cui equazioni si ottengono come combinazione lineare delle due rette del fascio con λ, μ come parametri.

ESEMPIO. Consideriamo le rette $l_1: x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$ e $l_2: 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0$. Il fascio di rette determinato da l_1, l_2 è

$$\begin{gathered}(\lambda + 3\mu)x_0 + (\lambda - 2\mu)x_1 + 2(\lambda + 2\mu)x_2 = 0 \\ (\lambda: \mu) = (1: 0) \to l_1 \\ (\lambda: \mu) = (0: 1) \to l_2 \\ (\lambda: \mu) = (1: 1): 4x_0 - x_1 + 6x_2 = 0\end{gathered}$$

OSSERVAZIONE. Abbiamo detto che ad ogni retta corrisponde un punto del piano proiettivo duale, ci chiediamo ora a cosa corrisponda la costruzione del fascio.
Il fascio $\mathscr{F}$ corrisponde alla retta passante per i punti corrispondenti a l_1 e l_2

$$\begin{gathered}l_1: a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \to (a_0: a_1: a_2) \\ l_2: b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \to (b_0: b_1: b_2) \\ \mathscr{F}: (\lambda a_0 + \mu b_0)x_0 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2 = 0 \to (\lambda a_0 + \mu b_0: \lambda a_1 + \mu b_1: \lambda a_2 + \mu b_2)\end{gathered}$$

Esempio. Fascio visto come retta per due punti del duale

$$l_1 \leftrightarrow (1:1:2) = Q_1$$
$$l_2\colon 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \leftrightarrow (3:-2:4) = Q_2$$
$$\mathscr{F} \leftrightarrow (\lambda + 3\mu\colon \lambda - 2\mu\colon 2(\lambda + 2\mu))$$

che è la retta $\overline{Q_1Q_2}$ in forma *parametrica*.

Osservazione. Siccome due rette distinte nel piano si intersecano in un punto solo, sia $P := l_1 \cap l_2$. Allora

- ogni retta del fascio passa per P perché è lì che la combinazione lineare si annulla
- P è l'unico punto comune a tutte le rette del fascio $\mathscr{F}$
- viceversa, ogni retta per P appartiene al fascio $\mathscr{F}$

Ciò significa che $\mathscr{F}$ è la famiglia delle rette per il punto fissato P, che è detto **punto base** del fascio.

Esempio. Punto base di un fascio

$$\begin{cases} l_1\colon x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \\ l_2\colon 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_1 + 4x_2 = -5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$
$$\implies x_1 = 2, x_2 = -5, x_0 = -2 + 10 = 8$$
$$P = (8:2:-5) = l_1 \cap l_2$$

Tale fascio $\mathscr{F}$ corrisponde alla retta in $\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{K})\right)^*$ per i punti $Q_1 = (1:1:2)$ e $Q_2 = (3:-2:4)$ che è già scritta in forma parametrica. Cerchiamo ora l'equazione cartesiana della retta $\overline{Q_1Q_2}$ nelle coordinate $(a_0 : a_1 : a_2)$:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8a_0 + 2a_1 - 5a_2 = 0$$

Notiamo che i coefficienti della retta ottenuta sono esattamente le coordinate omogenee di P che è intersezione delle due rette.

Più in generale, fissato un punto base $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, l'insieme delle rette per P in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ quale $\mathscr{F}_P = \{\text{rette per } P \text{ in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\}$ è un fascio di rette corrispondente a una retta nel piano proiettivo duale $\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{K})\right)$. Se le coordinate sono $P = (c_0 : c_1 : c_2)$, la retta corrispondente nel piano proiettivo duale $\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{K})\right)^*$ ha equazione $c_0a_0 + c_1a_1 + c_2a_2 = 0$. Infatti data una retta r qualsiasi di equazione $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, il punto P appartiene a r, ovvero $P \in r$, se e solo se vale l'equazione $c_0a_0 + c_1a_1 + c_2a_2 = 0$.
Per scrivere il fascio $\mathscr{F}$ in forma parametrica scelgo due rette distinte passanti per P.

Esempio. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ scrivere in forma parametrica il fascio delle rette per il punto base P di coordinate $(1:-1:4)$.
Scegliamo 2 rette distinte a caso che passano per il punto P, ad esempio $l_1\colon x_0 + x_1 = 0$ e

$l_2 \colon 4x_0 - x_2 = 0$. Il fascio sarà

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\colon \qquad & \lambda(x_0 + x_1) + \mu(4x_0 - x_2) = 0 \\ & (\lambda + 4\mu)x_0 + \lambda x_1 - \mu x_2 = 0,\ (\lambda \colon \mu) \in \mathbb{P}^1 \end{aligned}$$

Ovvero se facciamo variare λ e μ otteniamo tutte le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che passano per P.

Osservazione. Interpretazione affine
Se interpretiamo $\mathbb{K}^2 = U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e consideriamo il fascio di rette proiettive $\mathscr{F}$ con punto base P in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, allora ci sono 2 possibilità: P è punto base proprio o all'infinito.
Se P è un punto proprio, allora $P \in \mathbb{K}^2$ e $\mathscr{F}$ corrisponde alle rette affini in $\mathbb{K}^2$ per il punto P a meno di passare alla chiusura proiettiva dalla retta proiettiva a quella affine.
Se P invece è un punto improprio, corrisponde ad una direzione di rette nel piano affine e $\mathscr{F}$ corrisponde a tutte le rette affini che hanno questa direzione fissata, ovvero è un fascio di rette parallele.
Il caso proiettivo dunque è interessante perché la distinzione fra questi due tipi di fasci è data solo dal fatto se il punto P è proprio o improprio.

10.11.2 *Interpretazione duale*

Sappiamo che $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è il proiettivizzato di $\mathbb{K}^3$, ovvero $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$, inoltre dal corso di Geometria 1 sappiamo che $\left(\mathbb{K}^3\right)^* = \{$ forme lineari α su $\mathbb{K}^3\}$ del tipo $\alpha : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ e $\alpha(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. L'unica differenza che per ora osserviamo da quanto visto nel corso precedente è la numerazione delle coordinate da 0 a 2.
Quando consideriamo la retta $r \colon a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, allora stiamo dicendo che r corrisponde ad un piano proiettivo che è esattamente il proiettivizzato del nucleo di α, che è un piano vettoriale $\ker\alpha \subset \mathbb{K}^3$ la cui equazione è proprio quella di r.
Stiamo dunque considerando $\left(\mathbb{P}^2\right)^* = \mathbb{P}\left((\mathbb{K}^3)^*\right) \ni [\alpha] \leftrightarrow r$, infatti α è una forma lineare non nulla determinata a meno di multipli. Passando alle coordinate si riottiene quanto visto prima, infatti si ha che $\{x_0, x_1, x_2\}$ è una base di $(\mathbb{K}^3)^*$ che induce le coordinate proiettive $(a_0 \colon a_1 \colon a_2)$ su $\left(\mathbb{P}^2\right)^*$. Pertanto tale interpretazione astratta diventa operativa (con dei numeri) fissando la base naturale delle forme lineari che è data dalle coordinate proiettive associate: scrivo α come combinazione lineare della base, e i coefficienti saranno le coordinate omogenee.
Più in generale, dato uno spazio vettoriale V, il suo spazio proiettivo associato $\mathbb{P}(V)$ ed il suo spazio vettoriale duale $V* = \{$ forme lineari $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{K}\}$, si ha che $\mathbb{P}(V*) = (\mathbb{P}(V))^*$.
In particolare si ha una corrispondenza biunivoca

$$(\mathbb{P}(V))^* \longrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$$

$$[\alpha] \longrightarrow \mathbb{P}(\ker\alpha) \subset \mathbb{P}(V)$$

In coordinate, ad un piano di equazione $\underbrace{a_0x_0 + \cdots + a_nx_n}_{\alpha} = 0$ associamo il punto $(a_0 \colon \ldots \colon a_n)$, nello stesso modo in cui ad un vettore associo i coefficienti della scrittura secondo una tale base.

10.12 CONICHE NEL PIANO PROIETTIVO

Nel corso di Geometria 1 abbiamo già analizzato le coniche nel piano affine $\mathscr{A}(\mathbb{R}^2)$ e le abbiamo classificate a meno di rototraslazione. Generalizziamo ora al caso proiettivo tenendo conto del fatto che nel piano proiettivo le coordinate sono omogenee.
Consideriamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ con coordinte omogenee $(x_0 : x_1 : x_2)$. Indicheremo con $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ l'anello dei polinomi in x_0, x_1, x_2 a coefficienti in $\mathbb{K}$. Se $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ è un polinomio qualsiasi, l'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ non dà una condizione ben definita in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: ad esempio $x_0 + 1 = 0$ non ha senso perché x_0 è determinato solo a meno di multipli. Cerchiamo dunque dei polinomi che ha senso studiare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

DEFINIZIONE 10.12.0. POLINOMIO OMOGENEO
Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio. Si dice che F è un **polinomio omogeneo** se tutti i monomi a coefficienti non nulli hanno lo stesso grado.

Notiamo che la definizione è significativa per polinomi a più variabili, altrimenti i polinomi omogenei sarebbero solo monomi.

ESEMPIO. Un esempio di polinomio omogeneo è $F = x_0^3 + x_0x_1^2 - 3x_1x_2x_3 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$, che p un polinomio omogeneo di grado 3.
Un polinomio non omogeneo invece è $G = x_0^3 - x_1x_2 + 1$

OSSERVAZIONE. Considerato il caso del grado pari a 1, se $\deg F = 1$, ovvero $F = a_0x_0 + \cdots + a_nx_n + b$, allora F è omogeneo $\iff b = 0$

OSSERVAZIONE. Se $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ è omogeneo di grado d allora

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n) \tag{10.45}$$

Infatti F è somma di monomi di grado d del tipo $ax_0^{i_0}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ con $\sum_{j_0}^n i_j = d$ e si ha che $a(\lambda x_0)^{i_0}(\lambda x_1)^{i_1}\cdots(\lambda x_n)^{i_n} = \lambda^{i_0+\cdots+i_n}(ax_0^{i_0}\dots x_n^{i_n}) = \lambda^d(ax_0^{i_0}\dots x_n^{i_n})$

Torniamo al piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ con le coordinate omogenee $(x_0 : x_1 : x_2)$ e consideriamo $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio omogeneo nelle coordinate omogenee di grado d. Se abbiamo un punto $P = (c_0 : c_1 : c_2) \in \mathbb{P}^2$, allora tutte le possibili scelte per le coordinate di P sono $(\lambda c_0 : \lambda c_1 : \lambda c_2)$ con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e valutando F otteniamo $F(\lambda c_0, \lambda c_1, \lambda c_2) = \lambda^d F(c_0, c_1, c_2)$, e questo ci dice che F si annulla in una scelta di coordinate se e solo se si annulla in qualsiasi scelta di coordinate, ovvero

$$F(c_0, c_1, c_2) = 0 \iff F(\lambda c_0, \lambda c_1, \lambda c_2) = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Pertanto l'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ è ben posta in $\mathbb{P}^2$.

ESEMPIO. Si ha che $x_0^2 - x_1x_2 = 0$ definisce un sottoinsieme del piano proiettivo.

Le coniche sono esattamente i sottoinsiemi di $\mathbb{P}^2$ che sono dati da polinomi omogenei di grado 2. Una **curva algebrica piana proiettiva** è data da un polinomio omogeneo $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ a meno di multipli. Se $G = \lambda F$ con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ considereremo G e F come la stessa curva.
La curva C ha un **supporto** $\{P \in \mathbb{P}^2 \mid F(P) = 0\}$ che è l'insieme dove il polinomio si annulla. F è l'equazione della curva C e oltre al supporto vogliamo ricordarci anche di essa, a meno

di multipli. Questo perché l'equazione determina il supporto, ma in generale non vale il contrario, come nel caso dell'ellisse immaginario.
Le curve che andremo a studiare sono sottoinsiemi di $\mathbb{P}^2$ che sono luoghi di zeri di polinomi omogenei, inserendo anche la nozione di molteplicità per la curva.
Sia $F = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \implies C$ è una retta. Siccome il grado della curva C è dato dal grado dell'equazione F, allora le curve di grado 1 sono le rette proiettive.
Le coniche che vogliamo studiare sono le curve di grado 2. Inoltre diremo che una curva C è reale se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) ed è complessa se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$).

V

Appendici

CAPITOLO 11

Note aggiuntive

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

Riportiamo alcune note e dimostrazioni aggiuntive che possono risultare utili al lettore.

11.1 Capitolo 6: successioni

La seguente dimostrazione sulla non prima-numerabilità del quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è adattata da Brian M. Scott [**scott:nonum**] su Mathematics Stack Exchange.

Dimostrazione. Si consideri la contrazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ad un punto, cioè il quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e si definisca la classe di equivalenza degli interi come $[0]$.
Sia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di intorni aperti di $[0]$; cerchiamo un intorno aperto di $[0]$ che non ne contiene nessuno come sottoinsieme, mostrano in tal modo che non formano un sistema fondamentale di intorni di $[0]$ e pertanto che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ non è primo-numerabile per $[0]$.
Sia π la mappa quoziente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$ esiste un $\varepsilon_{n,k} \in (0,1)$ tale che:

$$U_n \supseteq \pi\left[\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}(k-\varepsilon_{n,k}, k+\varepsilon_{n,k})\right]$$

Per $k \in \mathbb{Z}$ sia $\delta_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{k,k}$, e sia:

$$V = \pi\left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k-\delta_k, k+\delta_k)\right]$$

Chiaramente V è un intorno aperto di $[0]$, e vogliamo dimostrare che $U_n \nsubseteq V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per mostrare ciò, fissiamo $n \in \mathbb{N}$; si ha $\delta_n < \varepsilon_{n,n}$, quindi possiamo sceglie un numero reale $x \in (n+\delta_n, n+\varepsilon_{n,n})$. Ma allora $\pi(x) \in U_n \setminus V$, e dunque $U_n \nsubseteq V$.

11.2 CAPITOLO 11: FORMA CANONICA DI JORDAN

La seguente dimostrazione sul determinante di una matrice a blocchi e del suo polinomio caratteristico si basa su integrazioni proprie da Jean Marie [**jeanmarie:blockdet**] e da Ben Grossmann [**bengrossman:blockdet**] su Mathematics Stack Exchange.

Dimostrazione. Data una matrice quadrata $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right)$ definita dai blocchi $\mathbf{A}$ di dimensione $n \times n$, $\mathbf{B}$ di dimensione $n \times m$, $\mathbf{C}$ di dimensione $m \times n$ e $\mathbf{D}$ di dimensione $m \times m$. Supponendo $\mathbf{A}$ blocco invertibile, si può scomporre la matrice nel seguente modo:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA^{-1}} & \mathbf{I_m} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D - CA^{-1}B} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{A^{-1}B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I_m} \end{array}\right) \tag{11.1}$$

Calcoliamo il determinante di $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right)$, notando che $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA^{-1}} & \mathbf{I_m} \end{array}\right)$ e $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{A^{-1}B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I_m} \end{array}\right)$ sono triangolari con diagonale di 1.

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) &= \det\left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA^{-1}} & \mathbf{I_m} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D - CA^{-1}B} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{A^{-1}B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I_m} \end{array}\right)\right) = \\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{CA^{-1}} & \mathbf{I_m} \end{array}\right)\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D - CA^{-1}B} \end{array}\right)\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{A^{-1}B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I_m} \end{array}\right) = \\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D - CA^{-1}B} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ci serve calcolare il determinante di una *matrice diagonale a blocchi*. Presa allora:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right)$$

Possiamo riscriverla come:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I_m} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right)$$

Grazie alle formule di Laplace, possiamo calcolare il determinante delle due matrici sfruttando le matrici identità presenti. Ad esempio, sviluppando rispetto le righe o le colonne sulla seconda:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_n} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = 1 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_{n-1}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I_{n-2}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = \ldots = 1^n \cdot \det \mathbf{Q} = \det \mathbf{Q}$$

Il risultato è analogo per la prima. Dunque, concludendo:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \det(\mathbf{A})\det\left(\mathbf{D} - \mathbf{CA^{-1}B}\right) \tag{11.2}$$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D}) \tag{11.3}$$

Come ultima conseguenza, se vogliamo studiare il polinomio caratteristico $C_A(t)$ di una matrice A a blocchi diagonali **B** e **C**, abbiamo che:

$$C_A(t) = \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} - tI & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} - tI \end{array}\right) = \det(\mathbf{B} - tI)\det(\mathbf{C} - tI) = C_B(t)C_C(t) \tag{11.4}$$

11.2.1 *Convergenza*

Tutti i ragionamenti qui presenti si applicano anche alle successioni e serie di potenze.

Definizione 11.2.0. Dato un insieme E e un successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n : E \longrightarrow X$ con X metrico, si dice che la successione è uniformemente convergente su E con limite $f : E \longrightarrow X$ se:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ x \in E d(f_n(x),\ f(x)) < \varepsilon \tag{11.5}$$

Definizione 11.2.1. Criterio di Weierstrass o M-test
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni *reali* o *complesse* definite su un insieme A e che esista una successione di numeri *non negativi* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che soddisfino la seguente relazione:

$$\forall n \geq 1,\ x \in A : |f_n(x)| \leq M_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \tag{11.6}$$

Allora la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \tag{11.7}$$

Converge *assolutamente* e *uniformemente* su A

Si usa spesso l'*M-test* assieme al **teorema del limite uniforme**.

Definizione 11.2.2. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni *reali* o *complesse* continue sullo spazio topologico A nel quale sono definite; se la successione converge uniformemente su A allora il limite converge ad una funzione continua. In particolare, lo stesso si ha nel caso di una serie.