Appunti di Geometria 2

Anno Accademico 2020/2021

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUI BEEP BOOP"

Indice

I

Topologia generale

CAPITOLO 1

Spazi topologici

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, *UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

1.1 SPAZIO TOPOLOGICO

Definizione 1.1.0. Uno **spazio topologico** $(X, \mathcal{T})$ è un insieme X con una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ detta **topologia** che soddisfano i seguenti assiomi (detti **assiomi degli aperti**):

1. *Il vuoto e l'insieme stesso sono aperti della topologia*: $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.
2. *L'unione arbitraria di aperti è un aperto*: dati $\{A_i\}_{i \in I}$ tali che $A_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ $(|I| \leq \infty)$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.
3. *L'intersezione finita di aperti è aperta*: dati $\{A_i\}_{i \in I}$ tali che $A_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ $(|I| < \infty)$, allora $\bigcap_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di $\mathcal{T}$ si dicono **aperti** della topologia.

Definizione 1.1.1. Si può definire equivalentemente su X una topologia $\mathcal{T}$ usando gli **assiomi dei chiusi**:

1. *Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia*: $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.
2. *L'unione finita di chiusi è un chiuso*: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ $(|I| < \infty)$, allora $\bigcup_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.
3. *L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso*: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$ $(|I| \leq \infty)$, allora $\bigcap_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di $\mathcal{T}$ si dicono **chiusi** della topologia.

Osservazione. 1.1. *Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per soli due sottoinsiemi qualunque, in quanto poi è verificato per induzione.*

Esempio.

- **Topologia discreta**: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, *tutti* gli insiemi sono *aperti*.
- **Topologia banale**: $\mathcal{T} = \varnothing,\ X$, gli *unici* aperti sono *banali*.

1.1.1 *Distanza e spazi metrici*

Definizione 1.1.2. Su un insieme X una funzione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ è una **distanza** se:

1. *Positività della distanza*: $\forall x,\ y \in X \quad d(x,\ y) \geq 0$ e $d(x,\ y) = 0 \iff x = y$
2. *Simmetria*: $\forall x,\ y \in X \quad d(x,\ y) = d(y,\ x)$
3. **Disuguaglianza triangolare**: $\forall x,\ y,\ z \in X \quad d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$

Definizione 1.1.3. Uno **spazio metrico** (X, d) è un insieme su cui è definita una distanza.

Definizione 1.1.4. Definita la **palla aperta di centro** x come l'insieme degli elementi di X che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,\ y) < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia** $\mathcal{T}_d$ **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

Esempio.

- Su un qualunque insieme X si può definire la *distanza banale*:

$$d(x,\ y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \tag{1.2}$$

  In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.
- Su $X = \mathbb{R}$ si può definire come distanza il *valore assoluto* $d(x,\ y) = |x - y|$, che induce la **topologia Euclidea** $\mathcal{E}_{ucl}$, definita con le palle aperte di raggio ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \tag{1.3}$$

nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathscr{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su $X = \mathbb{R}^n$ si può definire come distanza la *norma Euclidea*: $d(x, y) = \|x - y\|$ che induce la *topologia Euclidea* $\mathscr{E}_{ucl}$ in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$
$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathscr{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

ATTENZIONE! Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme X nel modo seguente:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in CF) \text{ se } X \setminus A \text{ è finito.}$$
$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso } (C \in CF) \text{ se } C \text{ è finito.}$$

Alcune osservazioni:
- Se un aperto A è tale se il suo complementare $\mathscr{C}A$ è finito, si ha che:

$$A = \mathscr{C}(\mathscr{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \tag{1.4}$$

  In altre parole A è aperto è pari ad X privato al più di un numero finito di punti.
- Se X è finito, la topologia CF coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di X è finito e dunque un aperto.
- Se X è infinito, ad esempio $\mathbb{R}$, la topologia *non* è quella discreta: $[0, 1]$ per la topologia discreta è un chiuso ma per quella CF non lo è in quanto *non* è finito.

1.1.1.1 Norme esotiche

Possiamo definire su $\mathbb{R}^n$ una famiglia di distanze dette **norme**; qui di seguito ne elenchiamo alcune. Definiti i punti $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ abbiamo:
- **Norma infinito**: $d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$
- **Norma uno**: $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- **Norma due**: $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$
- **Norma p**: $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$

Si ha inoltre $\lim_{p \to +\infty} d_p = d_\infty$.
Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Supponiamo senza perdere di generalità che $d_\infty(x,\ y) = |x_1 - y_1|$.

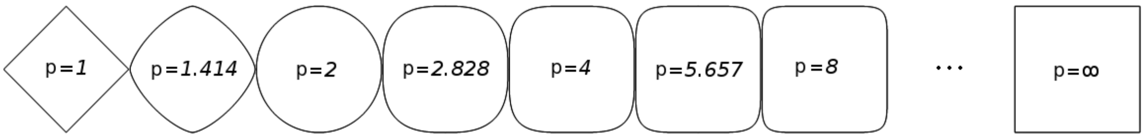
$$d_2(x,\ y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2} \geq \sqrt{|x_1 - y_1|^2} = |x_1 - y_1| = d_\infty(x,\ y)$$
$$d_2(x,\ y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leq |x_1 - y_1| + \ldots + |x_1 - y_1| = n|x_1 - y_1| = nd_\infty(x,\ y)$$

Notiamo che $|x_i - y_i|$ sono sempre positive, allora sia $a_i := |x_i - y_i|$. Segue che $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)^2$ perché $a_i, \ldots, a_n \geq 0$. Allora:

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \leq a_1 + \ldots + a_n \implies d_2 \leq d_1$$

Queste disuguaglianze danno le seguenti inclusioni[1]:

$$B_1(\varepsilon) \subseteq B_2(\varepsilon) \subseteq B_\infty(\varepsilon) \subseteq B_1(n\varepsilon) \tag{1.6}$$



Questo ci porta a dire che le topologie indotte da queste distanze sono la stessa.
Preso adesso $X = \mathscr{C}([0,\ 1]) = \{f : [0,\ 1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continua}\}$, esso è uno spazio vettoriale infinito, con $0_{\mathscr{C}} \equiv O_{[0,\ 1]}$ (cioè la funzione *identicamente nulla*). In questo caso possiamo comunque adattare le norme precedenti con delle "somme infinite", ovvero degli integrali.

- **Norma infinito**: $d_\infty(f,\ g) = \max\limits_{x \in [0,\ 1]} |f((x) - (y)|$
- **Norma uno**: $d_1(f,\ g) = \displaystyle\int_0^1 |f((x) - (y)|$
- **Norma due**: $d_2(f,\ g) = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f((x) - (y)|^2}$
- **Norma p**: $d_p(f,\ g) = \sqrt[p]{\displaystyle\int_0^1 |f((x) - (y)|^p}$

A differenza del caso su $\mathbb{R}^n$, ogni norma genera in realtà una topologia distinta!

1.1.2 *Finezza: confronto di topologia*

Definizione 1.1.5. Sia X un insieme e $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ due topologie di X. Si dice che $\mathcal{T}_1$ è **meno fine** di $\mathcal{T}_2$ se tutti gli aperti della prima topologia sono aperti della seconda:

$$\forall A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2 \tag{1.7}$$

In modo analogo si dice anche che $\mathcal{T}_2$ è **più fine** di $\mathcal{T}_1$.

In altre parole, una topologia più fine ha più aperti rispetto a quella confrontata.

Esempio.

- La *topologia banale* è la *meno fine* di tutte, dato che ogni topologia contiene $\varnothing$, X.
- La *topologia discreta* è la *più fine* di tutte, dato che ogni topologia è contenuta in

[1] Qui usiamo la notazione $B_i(r)$ per indicare la palla aperta di raggio r e centro fissato x rispetto alla norma i.

$\mathscr{P}(X)$.

- Su $\mathbb{R}$ la topologia dei complementari finiti è *meno fine* di quella euclidea. Infatti un aperto $A \in CF$ su $\mathbb{R}$ è definito come $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, cioè:

$$A = (-\infty,\ x_1) \cup (x_1,\ x_2) \cup \dots \cup (x_n,\ +\infty)$$

Per n punti gli $n+1$ intervalli ottenuti sono aperti della topologia euclidea; essendo unione di aperti, anche A è un aperto di $\mathscr{E}_{ucl}$

Osservazione. 1.2. *Se definiamo due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono due topologie di un insieme X, l'intersezione $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è anch'essa una topologia di X e, per costruzione, è meno fine di $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.*

1.1.3 *Base della topologia*

Definizione 1.1.6. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. $\mathscr{B}$ è una **base** per $\mathcal{T}$ se:

1. *La base è costituita da paerti per la topologia $\mathcal{T}$: $A \in \mathscr{B} \implies A \in \mathcal{T} (\mathscr{B} \subseteq \mathcal{T})$.*
2. *Tutti gli aperti della topologia sono unioni degli aperti delle basi: $A \in \mathcal{T} \implies \exists B_i \in \mathscr{B},\ i \in I : A = \bigcup_{i \in I} B_i$.*

Attenzione! La base $\mathscr{B}$ non è detto che sia una topologia! Ad esempio, le unioni sono aperti della topologia, ma non è detto che siano interni alla base $\mathscr{B}$.

Esempio.

- Nella *topologia euclidea* di $\mathbb{R}^n$ una base è

$$\mathscr{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0\} \tag{1.8}$$

Infatti, $\forall x \in A$ aperto $\exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq A$ per la definizione della topologia; segue che $A = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$.

- Nella *topologia euclidea* di $\mathbb{R}$ una base è

$$\mathscr{B} = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\} \tag{1.9}$$

Un'altra base per $\mathbb{R}$ nella $\mathscr{E}_{ucl}$ è

$$\mathscr{B} = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$$

Dato $x \in \mathbb{R}$, esiste sempre una successione $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$ decrescente o crescente tale che $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}^a$. Allora presa $a_n \searrow a$ e $b_n \nearrow b$, si ha:

$$(a,\ b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n,\ b_n)$$

Questa base con estremi razionali ha *infiniti elementi*, ma in *misura minore* rispetto a quella ad estremi reali.

[a] Per una discussione più approfondita a riguardo, si guardi sez. **XXX** a pag. **XXX**.

Teorema 1.1.0. Teorema delle basi. (Manetti, 3.7)
Sia X un insieme e $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. $\mathscr{B}$ è la base di un'*unica* topologia *se e solo se*:

1. *L'insieme X deve essere scritto come unione di elementi della famiglia*: $X = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$.
2. *Per ogni punto dell'intersezione di elementi della famiglia deve esserci un'altro elemento di essa che contiene il punto ed è sottoinsieme dell'intersezione*:

$$\forall A, B \in \mathscr{B}\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \mathscr{B} : x \in C \subseteq A \cap B \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B}$ la famiglia di sottoinsiemi che verifica i punti 1 e 2. Allora devo trovare una topologia di cui $\mathscr{B}$ è base. Definiamo $\mathcal{T}$ tale che:

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathscr{B}$$

Verifichiamo gli assiomi degli aperti su $\mathcal{T}$.

I $X \in \mathcal{T}$ per ipotesi 1, $\varnothing \in \mathcal{T}$ perché è l'unione sugli insiemi di indici vuoto ($I = \varnothing$).

II Sia $A_i = \bigcup_j B_{ij}$, con $B_{ij} \in \mathscr{B}$. Allora:

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \left(\bigcup_j B_{ij} \right) = \bigcup_{i,\,j} B_{ij} \implies \bigcup_{i,\,j} A_i \in \mathcal{T}$$

III Sia $A, B \in \mathcal{T}$, cioè $A = \bigcup_i A_i$ e $B = \bigcup_j B_j$ con $A_i, B_j \in \mathscr{B}$. Allora:

$$A \cap B = \left(\bigcup_i A_i \right) \cap \left(\bigcup_j B_j \right) = \bigcup_{i,\,j} \left(\underbrace{A_i \cap B_j}_{\in\mathcal{T} \text{ per l'ipotesi 2}} \right) \in \mathcal{T}$$

Esempio. Sia $X = \mathbb{R}$ e $\mathscr{B} = \{[a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$. Verifichiamo che $\mathscr{B}$ soddisfa il teorema appena enunciato.

1. $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,\ n)$.
2. Preso $[a, b) \cap [c, d)$ si ha che esso è $\varnothing$ o è $[e, f)$, con $e = \max\{a,\ c\}$, $f = \min\{b,\ d\}$; in entrambi i casi l'intersezione è elemento di $\mathscr{B}$.

Esiste dunque una topologia su $\mathbb{R}$ che ha base $\mathscr{B}$; questa *non* è base per la topologia Euclidea, ad esempio, dato che gli intervalli semiaperti non sono inclusi in $\mathscr{E}_{ucl}$.
Notiamo inoltre che $(a,\ b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n},\ b \right)$, dunque la topologia definita $\mathscr{B}$ comprende gli aperti della topologia Euclidea: $\mathscr{E}_{ucl}$ è meno fine di questa topologia.

1.1.4 *Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità*

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e un sottoinsieme $A \subseteq X$, si ha:

- A *aperto* della topologia se $A \in \mathcal{T}$.
- A *chiuso* della topologia se $\mathscr{C}A = X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Attenzione! Essere aperto oppure essere chiuso *non si escludono a vicenda*! Un insieme può essere aperto, chiuso, entrambi o nessuno dei due. Ad esempio, il vuoto e l'insieme stesso sono aperti e chiusi allo stesso tempo, dato che per ipotesi sono aperti i loro complementari $\mathscr{C}\varnothing = X \setminus \varnothing = X$ e $\mathscr{C}X = X \setminus X = \varnothing$ sono anch'essi aperti.

Definizione 1.1.7. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **chiusura** $\overline{A}$ di A è il più piccolo chiuso contente A:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C \tag{1.11}$$

Proprietà:

- $A \subseteq \overline{A}$.
- $\overline{A}$ è un chiuso in quanto intersezione (arbitraria) di chiusi.
- A è un chiuso $\iff A = \overline{A}$.

Definizione 1.1.8. Un punto x è **aderente** ad A se $x \in \overline{A}$.

Definizione 1.1.9. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. L'**interno** A° di A è il più grande aperto contenuto in A:

$$A^{\circ} = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ aperto}}} B \tag{1.12}$$

Proprietà:

- $A^{\circ} \subseteq A$.
- A° è un aperto in quanto unione (arbitraria) di aperti.
- A è un aperto $\iff A = A^{\circ}$.

Definizione 1.1.10. Un punto x è **interno** ad A se $x \in A^{\circ}$.

Definizione 1.1.11. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **frontiera** ∂A di A sono i punti della chiusura di A non contenuti nel suo interno o, in altri termini, i punti aderenti sia ad A sia al suo complementare.

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \tag{1.13}$$

Proprietà:

- $\partial A \subseteq \overline{A}$.
- ∂A è un chiuso.

Definizione 1.1.12. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. A è **denso** è denso in X se $\overline{A} = X$ o, in altri termini, tutti i punti di X sono aderenti ad A.

Esempio. Il più piccolo chiuso contenente $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{R}$, poiché ogni reale è aderente ai razionali. Dunque $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

1.1.5 *Intorni*

Definizione 1.1.13. Sia X spazio topologico e $x \in X$. V è un **intorno** di x se $\exists A$ aperto tale che $x \in A \subseteq V$ o, in altri termini, se x è interno ad U. Definiamo inoltre la **famiglia degli intorni** di x $I(x) \subseteq \mathscr{P}(X)$:

$$I(x) = \{V \subseteq X \mid V \text{ è intorno di } x\} \tag{1.14}$$

Osservazione. 1.3. *Dato $A \subseteq X$, per ogni $x \in A$ tale che A è intorno di x si può definire un aperto $A_x \subseteq A$, con $x \in A_x$. L'unione arbitraria di questi A_x risulta essere contenuta in A e pari al suo interno. Dunque, si può definire l'interno di A come $A^{\circ} = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$; segue che A è aperto se e solo se A è intorno di ogni punto in A.*

Lemma 1.1.0. Proprietà degli intorni. (Manetti, 3.20, 3.21)

1. *Si possono estendere gli intorni*: $U \in I(x),\ U \subseteq V \implies V \in I(x)$
2. *Le intersezioni di intorni sono ancora intorni*: $U,\ V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$
3. *Caratterizzazione della chiusura per intorni*:
   $B \subseteq X$, allora $x \in \overline{B} \iff \forall U \in I(x) \quad U \cap B \neq \varnothing$.

Dimostrazione.

I L'aperto A che soddisfa la definizione di $U \in I(x)$ è per costruzione contenuto anche in V, dunque A è un aperto che soddisfa la definizione di V intorno di x.

II Definiti gli aperti $A_U \subseteq U$, $A_V \subseteq V$ che soddisfano la definizione di intorni di x, l'intersezione $A = A_U \cap A_V$ è un aperto contenente x. Dato che $A = A_U \cap A_V \subseteq U \cap V$, $U \cap V$ per definizione di intorno di x.

III Per contronominale.

$$\begin{aligned}
x \notin \overline{B} &\iff x \notin B \wedge x \notin \partial B \\
&\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \overline{B} \cap \overline{X \setminus B} \\
&\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \partial(X \setminus B) \\
&\iff x \in (X \setminus B)^{\circ} \\
&\iff \exists U \in I(X) \ : x \in U \subseteq X \setminus B \\
&\iff \exists U \in I(x) \ : U \cap B = \varnothing
\end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.1.14. Sia X spazio topologico, $x \in X$ e $I(x)$ la famiglia degli intorni di x. Una sottofamiglia $\mathscr{J} \subseteq I(x)$ è un **sistema fondamentale di intorni** di x se $\forall U \in I(x) \exists V \in \mathscr{J} : V \subseteq U$.

1.2 FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE 1.2.0. Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** se la controimmagine di aperti in Y è un aperto in X:

$$\forall A \text{ aperto in } Y,\ f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \tag{1.15}$$

Alternativamente, f è continua se la controimmagine di chiusi in Y è un chiuso in Y.

$$\forall C \text{ chiuso in } Y,\ f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \tag{1.16}$$

OSSERVAZIONE. 1.4.

- *Si ha la definizione di continuità con i chiusi perché la controimmagine si "comporta bene" con i complementari:*

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

- *È sufficiente verificare la definizione per gli aperti una base di Y perché la controimmagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:*

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$$

LEMMA 1.2.0. (MANETTI, 3.25)
Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione. f è continua iff $\forall A \subseteq X \quad f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per ogni funzione si ha:

- $f\left(f^{-1}(C)\right) \subseteq C$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\Longrightarrow$) Sia $A \subseteq X$. Dobbiamo dimostrare che $f\left(\overline{A}\right)\overline{f(A)}$. Sappiamo che se un insieme è contenuto in un altro, lo stesso vale per le immagini e le controimmagini. Allora:

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)}$$
$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$

$f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ è un chiuso (in X in quanto controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso) che contiene A. Ma allora anche la chiusura, che è il più piccolo chiuso contenente A, è contenuta in $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Segue quindi:

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$
$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}$$

$\Longleftarrow$) Sia $C \subseteq Y$ chiuso e sia $A = f^{-1}(C)$. Dobbiamo dimostrare che A è chiuso in X. Poiché $A \subseteq \overline{A}$ è vero per definizione, dimostriamo che $\overline{A} \subseteq A$. Per ipotesi:

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$$
$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(C)\right)} \subseteq \overline{C} = C$$

Applicando nuovamente la controimmagine:

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq C$$
$$\overline{A} = \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right)\right) \subseteq f^{-1}(C) = A$$

Dunque la controimmagine A di un chiuso C è un chiuso.

Teorema 1.2.0. Manetti, 3.26 La composizione di funzioni continue è continua.

$$f\colon Y \to Z\,,\ g\colon X \to Y \text{ continue} \implies f \circ g\colon X \to Z \text{ continua} \tag{1.17}$$

Dimostrazione. La controimmagine della composizione di funzioni $f \circ g$ è definita come $f^{-1}(f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1}$. Allora A aperto in $Z \implies f^{-1}(A)$ aperto $\implies g^{-1}\left(f^{-1}(A)\right)$ aperto.

Definizione 1.2.1. (Manetti, 3.27)
Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to Y$ funzione. Dato $x \in X$ f è **continua** in x se:

$$\forall U \in I(f(x)) \exists V \in I(x)\ :\ f(V) \subseteq U \tag{1.18}$$

Questa è la generalizzazione della definizione tradizionale della continuità affrontata in *Analisi UNO*.

Teorema 1.2.1. (Manetti, 3.28)
Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to Y$ funzione. f è continua per aperti $\iff$ f è continua in x $\forall x \in X$.

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) Sia $x \in X$ e $U \in I(f(x))$. Per definizione di intorno $\exists A$ aperto in Y tale che $f(x) \in A \subseteq U$. Basta porre $V = f^{-1}(A)$: per continuità è aperto in X e, dato che $x \in f^{-1}(A)$ perché $f(x) \in A$, allora V è intorno di x. Segue che $f(V) = f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A \subseteq U$.
$\Longleftarrow$) Sia $A \subseteq Y$ aperto. Dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(A)$ sia aperto. Preso $x \in f^{-1}(A)$ si ha che $f(x) \in A$; dunque A è, in quanto aperto, intorno di $f(x)$. Allora, poiché f è

continua in x, $\exists V \in I(x)$ tale che $f(V) \subseteq A$.
Segue che $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è intorno di x poiché contiene un intorno V dello stesso punto. Dunque $f^{-1}(A)$ aperto perché è intorno di ogni suo punto.

Definizione 1.2.2. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione.

- f è **aperta** se $\forall A$ aperto in X $f(A)$ è aperto in Y.
- f è **chiusa** se $\forall C$ chiuso in X $f(C)$ è chiuso in Y.

Osservazione. 1.5. *È sufficiente verificare la definizione di funzione aperta per gli aperti di una base di X perché l'immagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:*

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$$

Attenzione! Una funzione f aperta che non sia omeomorfismo non è necessariamente una funzione aperta. Si prenda $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \end{array}$ (la proiezione sulla prima coordinata):

- f è *continua* per ovvi motivi.
- f è *aperta*. Infatti, presa una base su $\mathbb{R}^2$ come $\{B_\varepsilon(x, y)\}$, si ha che $f(B_\varepsilon(x, y)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ che sono aperti in $\mathbb{R}$.
- f *non* è *chiusa*. Prendiamo $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$ e definiamo la funzione $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array}$ continua; vediamo facilmente come $C = g^{-1}(\{1\})$ e, essendo 1 chiuso in R, C è controimmagine continua di un chiuso e dunque chiuso.
  Si ha dunque $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che tuttavia non è un chiuso della topologia Euclidea in quanto non contiene infiniti punti (una base della $\mathscr{E}_{ucl}$ è formata da intervalli, che dunque contengono infiniti punti).

Definizione 1.2.3. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione. f è un **omeomorfismo** se è *biunivoca*, *continua* e la sua inversa è *continua*; più precisamente, esiste $g : Y \to X$ continua tale per cui $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$.
Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra i due; in notazione $X \cong Y$.

Lemma 1.2.1. (Manetti, 3.31)
Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione *continua*. Allora vale:

1. f omeomorfismo $\iff$ f aperta e biettiva.
2. f omeomorfismo $\iff$ f chiusa e biettiva.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima condizione, la seconda è analoga.
$\implies$) Un omeomorfismo è biettiva per definizione. Dimostriamo dunque che f sia

aperta, cioè $\forall A \in X$ aperto $f(A) \in Y$ è aperto. Ma definita $g: Y \to X$ l'inversa continua dell'omeomorfismo f (cioè $f^{-1} = g$), si ha che $\forall A \in X$ $g^{-1}(A) = f(A)$ è aperto.
$\Longleftarrow$) f è già biettiva e continua per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che l'inversa $g: Y \to X$ sia continua, cioè $\forall A \in X$ aperto $g^{-1}(A) \in Y$ è aperto. Ma $g^{-1}(A) = f(A)$ che è aperto perché f è aperta.

1.2.1 *Topologia indotta*

Definizione 1.2.4. Dati:

- Uno spazio topologico X.
- Un insieme Y.
- Una funzione $f: Y \to X$

Allora su Y si può definire la **topologia indotta** come la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono f continua.

1.3 SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO

Definizione 1.3.0. Sia X uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Su Y si può definire la seguente *topologia di sottospazio*:

$$U \subseteq Y \text{ aperto in } Y \iff \exists V \subseteq X \text{ aperto in } X (V \in \mathcal{T}) : U = V \cap Y \tag{1.19}$$

Definita l'**inclusione** $\begin{array}{c} i: Y \hookrightarrow X \\ y \mapsto y \end{array}$, la topologia di sottospazio è la topologia indotta da i, cioè la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono continua l'inclusione.

Dimostrazione. Dimostriamo la continuità dell'inclusione. Se A aperto in X, $i^{-1}(A) = A \cap Y$ (tutti gli elementi di A contenuti in Y) è aperto in Y per definizione.

Definizione 1.3.1. Sia X uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Allora:

- $A \subseteq Y$ **aperto** in $Y \iff A = U \cap Y$ con U aperto in X.
- $C \subseteq Y$ **chiuso** in $Y \iff C = U \cap Y$ con V chiuso in X.
- Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia di $X \implies \mathcal{B}' := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è base della topologia di sottospazio.

Osservazione. 1.6. *Se $A \subseteq Y$ è aperto della topologia di X, allora A è aperto in Y poiché $A = A \cap Y$.*

Esempio. Sia $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$ in topologia Euclidea.

- $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ è aperto in Y in quanto è già aperto in X.
- $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ è chiuso in Y in quanto è già chiuso in X.
- $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ è aperto in Y in quanto si ha, ad esempio, $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap Y$.

Lemma 1.3.0. (Manetti, 3.55)
Sia $A \subseteq Y \subseteq X$ con X spazio topologico e Y sottospazio topologico. Definiamo:

- $c\ell_Y(A) =$ chiusura di A in Y.
- $c\ell_X(A) =$ chiusura di A in X.

Allora $c\ell_Y(A) = c\ell_X(A) \cap Y$.

Dimostrazione. Preso $\mathscr{C} = \{C \subseteq X \mid C \text{ chiuso in } X \text{ e } A \subseteq C\}$, per definizione di chiusura si ha:

$$c\ell_X(A) = \bigcap_{C \in \mathscr{C}} C$$

Ora sia $\mathscr{C}' = \{C \cap Y \mid C \in \mathscr{C}\}$. Allora, usando i chiusi del sottospazio:

$$c\ell_Y(A) = \bigcap_{C \in \mathscr{C}} (C \cap Y) = \left(\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C \right) \cap Y = c\ell_Y(A)$$

.

1.3.1 *Immersione*

Definizione 1.3.2. Sia $f : X \to Y$ funzione tra X, Y spazi topologici. Se:

- f continua.
- f iniettiva

Allora f è un'**immersione** se e solo se ogni aperto in X è controimmagine di un aperto di Y per f, cioè se e solo se si ha che:

$$B \subseteq X \text{ è aperto in } X \iff B = f^{-1}(A),\ A \text{ aperto in } Y \tag{1.20}$$

Osservazione. 1.7. *Per costruzione f è immersione se la topologia su X è la topologia indotta, dunque la meno fine che rende f continua.*

Se sull'immagine $f(X) \subseteq Y$ mettiamo la topologia di sottospazio di Y, si ha che

$$f : X \to Y \text{ immersione} \iff f_\bullet : X \to f(X) \text{ è omeomorfismo}$$

Esempio. Esempio di *non* immersione.

$$\begin{aligned}[0,\,1) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t,\, \sin 2\pi t)\end{aligned} \tag{1.21}$$

Notiamo innanzitutto che $f([0,\,1)) = S^1$. Si ha:

- $f_\bullet$ è continua per ovvi motivi
- $f_\bullet$ iniettiva, dato che l'unico caso problematico poteva essere $t = 1$ che *non* nel dominio (si avrebbe avuto infatti $f_\bullet(0) = f_\bullet(1)$).
- $f_\bullet$ suriettiva per costruzione.

Tuttavia $f_\bullet$ *non* è immersione, dato che $f_\bullet^{-1}$ non è continua. Preso $P = (1,\ 0) \in S^1$, $f_\bullet^{-1}$ non è continua in P. Infatti, gli intorni di 0 in $[0,\ 1)$ sono del tipo $U = [0,\ \varepsilon)$, dunque dovrei trovare $\forall U$ un intorno V di $P \in S^1\ :\ f_\bullet^{-1}(V) \subseteq U$.
Tuttavia, solo la parte superiore di $V \in I(P)$ ha la controimmagine interna ad U: la parte inferiore, poiché sono le immagini di punti prossimi all'estremo 1 del dominio, non hanno controimmagini in U. Pertanto, non abbiamo l'omeomorfismo di $f_\bullet$ e dunque l'immersione.

Definizione 1.3.3. Sia $f: X \to Y$ funzione tra $X,\ Y$ spazi topologici.

- f si dice **immersione aperta** se f è chiusa.
- f si dice **immersione chiusa** se f è aperta.

Lemma 1.3.1. (Manetti, 3.59)
Sia $f: X \to Y$ funzione *continua* tra $X,\ Y$ spazi topologici.

1. f iniettiva e aperta $\implies$ f è immersione (aperta)
2. f iniettiva e chiusa $\implies$ f è immersione (chiusa)

Dimostrazione. Dimostriamo il caso chiuso, il caso aperto è analogo. Preso $C \subseteq X$ chiuso, sappiamo che $f(C)$ è chiuso in Y, ma possiamo sempre dire che $f(C) = f(C) \cap f(X)$ in quanto $f(C) \subseteq \cap f(X)$. Dunque $f(C)$ è un chiuso del sottospazio $f(X)$. Segue che ogni chiuso di C è un chiuso dell'immagine di f, dunque $f_\bullet: X \to f(X)$ è:

- Continua perché lo è f.
- Biunivoca perché $f_\bullet$ è iniettiva in quanto lo è f e suriettiva per definizione.
- Chiusa per costruzione.

$f_\bullet$ è dunque omeomorfismo ed f è immersione (chiusa).

1.4 PRODOTTI TOPOLOGICI

Definizione 1.4.0. Siano $P,\ Q$ spazi topologici e $P\times Q$ il suo prodotto cartesiano. Definite le **proiezioni**:

$$\begin{aligned} p: P\times Q &\to P \\ (x,\ y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} q: P\times Q &\to Q \\ (x,\ y) &\mapsto y \end{aligned} \tag{1.23}$$

La **topologia prodotto** $\mathscr{P}$ è la topologia *meno fine* fra quelli che rendono p e q *continue*. In particolare, ricordando l'osservazione 1.2, la topologia prodotto è l'intersezione di *tutte* le topologia che rendono continue p e q.

Teorema 1.4.0. (Manetti, 3.61)

1. Una *base* della topologia $\mathscr{P}$ è data dagli insiemi della forma $U \times V$ dove $U \subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto.

2. p, q sono aperte; inoltre $\forall (x, y) \in P \times Q$ le restrizioni:

$$\begin{aligned} p_{|} : P \times \{y\} &\to P \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} q_{|} : \{x\} \times Q &\to Q \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned} \tag{1.25}$$

Sono *omeomorfismi*.

3. Data $f : X \to P \times Q$ con X spazio topologico, si ha che:

$$f \text{ continua} \iff f_1 = p \circ f,\ f_2 = q \circ f \text{ continue} \tag{1.26}$$

Dimostrazione.

I Dimostriamo che:

A) La famiglia $\{U \times V\}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$.

B) P è meno fine di $\mathcal{T}$.

C) $\mathcal{T}$ è meno fine di P.

In questo modo avremo che la topologia $\mathcal{T}$ è la topologia prodotto $\mathscr{P}$ e ne conosceremo una base.

a) Segue dal teorema delle basi 1.1 (Manetti, 3.7). Infatti

i. $P \times Q$ appartiene alla famiglia $\{U \times V\}$, dato che per definizione gli insiemi stessi P e Q sono aperti.

ii. L'intersezione di due elementi della famiglia appartiene alla famiglia: $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.

b) Per definizione $\mathscr{P}$ è la meno fine fra tutte le topologie sul prodotto. Dunque, per dimostrare A) basta vedere che p, q sono continue rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.

Presa la proiezione p, sia $U \subseteq P$ aperto. Si ha che $p^{-1}(U) = U \times Q$ è aperto in $\mathcal{T}$ in quanto è prodotto di aperti; in particolare sta nella base! Dunque p è continua, e un ragionamento analogo vale per q.

c) Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di $\mathcal{T}$ è anche aperto di $\mathscr{P}$.

Presi $U \subseteq P$, $V \subseteq Q$ allora:

$$U \times V = (U \cap P) \times (V \cap Q) = (U \times P) \cap (V \times Q) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

Poichè p, q sono continue e U, V sono aperti, anche $p^{-1}(U), q^{-1}(V)$ sono aperti; segue che la loro intersezione è aperta e dunque $U \times V$ è aperto della topologia $\mathcal{T}$.

II Dimostriamo il caso con $p_{|}$, dato che il caso con $q_{|}$ è analogo. Preso un aperto della base $U \times V$, studiamo gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$.

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } y \notin V \\ U \times \{y\} & \text{se } y \in V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$ sono tutte e solo le unioni di $U \times \{y\}$, al variare di Y di aperti dello spazio P. Si ha dunque:

$$p_{|}(U \times \{y\}) = U$$

Dunque, essendo $p_|$ continua perché restrizione della proiezione (che è continua per definizione), biettiva per costruzione e aperta per i risultati appena ottenuti si ha che $P \times \{y\}$ e P sono omeomorfi, cioè $p_|$ è omeomorfismo.
Per dimostrare che p sia aperta, preso A aperto in $P \times Q$, si ha:

$$p(A) = p\left[\bigcup_{y \in \mathbb{Q}} (A \cap P \times \{y\})\right] = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} p(A \cap P \times \{y\}) \tag{1.27}$$

Per i ragionamenti della prima parte, $A \cap P \times \{y\}$ è aperto di $P \times \{y\}$ e sappiamo dunque che $p_|(A \cap P \times \{y\})$ è aperto: ne segue che $p(A \cap P \times \{y\})$ è aperto in P al variare di y. Allora anche $p(A)$ è aperto (in quanto è unione di aperti) e dunque p è aperta.

III $\Longrightarrow$) Poiché $f : X \to P \times Q$, $p : P \times Q \to P$ e $q : P \times Q \to Q$ sono continue, le composizioni $f_1 = p \circ f : X \to P$, $f_2 = q \circ f : X \to Q$ sono banalmente continue.
$\Longleftarrow$) Dobbiamo dimostrare che f sia continua. Sia $A = U \times V \subseteq P \times Q$ aperto della base:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}\left(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)\right) = f^{-1}\left(p^{-1}(U)\right) \cap f^{-1}\left(q^{-1}(V)\right) \\ &= (pf)^{-1}(U) \cap (qf)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Per ipotesi pf, qf sono continue, dunque loro controimmagini di aperti sono ancora aperti; inoltre, essendo la loro intersezione un aperto, segue l'implicazione.

Proposizione 1.4.0. Siano X, Y spazi topologici e $X \times Y$ il prodotto. Allora:

1. Date le basi $\mathscr{B}$ della topologia di X e $\mathscr{C}$ della topologia di Y, allora:

$$\mathscr{D} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B},\ V \in \mathscr{C}\} \tag{1.28}$$

è una base per la topologia prodotto.

2. Dati $x \in X$, $y \in Y$, siano $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni di x e $\mathscr{V} = \left\{V_j\right\}_{j \in J}$ un sistema fondamentale di intorni di y. Poniamo $Wij := U_i \times V_j \subseteq X \times Y$. Allora:

$$\mathscr{W} = \left\{W_{ij}\right\}_{j \in J} \tag{1.29}$$

è un sistema fondamentale di intorni di $(x, y) \in X \times Y$.

3. Se $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, allora $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare, il prodotto di chiusi è chiuso.

Dimostrazione.

I Segue dalla dimostrazione dal primo punto del teorema 1.4 ((Manetti, 3.61)).

II Per definizione di sistema fondamentale di intorni si ha:

$$\begin{aligned} \forall U \in I(x)\ \exists U_i \in \mathscr{U} &: U_i \in U \\ \forall V \in I(y)\ \exists V_i \in \mathscr{V} &: V_j \in V \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$) Per ogni intorno U di x e V di y, si ha $W \in I(x, y)$. Inoltre, presi gli intorni U_i e V_j definiti come sopra, si ha che $W_{ij} = U_i \times V_j \in I(x, y)$ per definizione di topologia prodotto; segue che, per ogni intorno W di questa forma esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$$

$\Longleftarrow$) Prendiamo un intorno $W \in I(x, y)$, esiste un aperto $W' \subsetneq W$. Poiché W' appartiene al prodotto $X \times Y$, si ha che $W' = \bigcup_k U_k \times V_k$ con U_k e V_k aperti di X e Y. Preso allora $(x, y) \in W'$, esiste gli aperti U_k e V_k che contengono rispettivamente x e y.
Segue dunque che $U_k \in I(x)$ e $V_k \in I(y)$ e dunque dal sistema fondamentale di intorni si ha che $\exists U_i \in \mathscr{U}$, $V_j \in \mathscr{V}$ tali che $U_i \in U_k$, $V_j \in V_k$. Allora definito $W_{ij} = U_i \times V_j$, si ha per ogni intorno W di esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U_k \times V_k \subseteq W' \subseteq W$$

III

$$\begin{aligned}
(xy) \in \overline{A \times B} &\iff \forall W \in I(x, y) \quad W \cap (A \times B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \times V) \cap (A \times B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad U \cap A \neq \varnothing,\ V \cap B \neq \varnothing \\
&\iff \forall U \in I(x) \quad U \cap A \neq \varnothing, \forall V \in I(y) \quad V \cap B \neq \varnothing \\
&\iff x \in \overline{A} \wedge y \in \overline{B} \iff ()(xy) \in \overline{A} \times \overline{B}
\end{aligned}$$

In particolare, se A e B sono chiusi, avendo che $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$, otteniamo:

$$A \times B = \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$$

Osservazione. 1.8. *Il prodotto di un numero* ***finito*** *di spazi topologici è pari al prodotto di due spazi:*

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

In particolare una base di aperti di $X_1 \times \ldots \times X_n$ è data da:

$$\mathscr{B} = \{A_1 \times \ldots \times A_n \mid A_i \text{ aperto in } X_i\}$$

1.5 ASSIOMI DI SEPARAZIONE: T1 E HAUSDORFF

Definizione 1.5.0. Uno spazio topologico X si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso, in particolare se e solo se tutti i punti sono chiusi.
In termini di intorni, X è **T1** se presi due punti distinti x e y esiste un intorno per il

punto x che non contiene y e viceversa:

$$\forall x,\, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{array}{ll} \exists U \in I(x) & y \notin U \\ \exists V \in I(y) & x \notin V \end{array} \tag{1.30}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che la definizione di **T1** implica quella per intorni e viceversa.
$\implies$) Siano $x,\, y \in X \quad x \neq y$. Per ipotesi $\{x\}$ è chiuso, dunque $V = X \setminus \{x\}$ è aperto. Poiché $y \neq x$, allora $y \notin \{x\} \implies y \in V$, ed essendo V aperto, $V \in I(y)$. Dunque V è intorno di y e banalmente $x \notin V$.
$\impliedby$) Dobbiamo dimostrare che $\forall x \quad \{x\}$ è chiuso, cioè $A = X \setminus \{x\}$ è aperto. Sia $y \in A$: $y \notin \{x\} \implies y \neq x$. Per ipotesi allora esiste un intorno V di y tale che $x \notin V$. Necessariamente si ha che $V \subseteq A$, dunque A è anch'esso intorno di y. Per l'arbitrarietà di y, A è intorno di ogni suo punto, dunque A è aperto.

Osservazione. 1.9.

1. *X è **T1** se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:*

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U \tag{1.31}$$

2. *Ogni spazio metrico è **T1***

Dimostrazione.

I $\implies$) Se X è **T1**, allora $\forall \{y\} \subseteq X$ è chiuso. Fissato x, prendiamo $y \in \bigcap_{U \in I(x)} U$. Allora $\forall U \in I(x)\ \{y\} \cap U \neq \varnothing$. Da ciò segue che $x \in \overline{\{y\}} = \{y\}$, cioè $y = x$. Allora $\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$.
$\impliedby$) Per dimostrare che X è **T1** è sufficiente dimostrare che $\{x\}$ è chiuso, dato che ogni insieme finito in X si può vedere come unione finita di singoletti $\{x\}$ e per gli assiomi dei chiusi otteniamo un chiuso. In particolare, ci basta dimostrare che $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$, essendo l'altra implicazione ovvia per definizione.
Sia $y \in \overline{\{x\}}$. Per definizione di chiusura $\forall V \in I(y)\ \ V \cap \{x\} \neq \varnothing \implies \forall V \in I(y)\ \ V \cap \{x\} = \{x\}$, cioè l'intersezione dei V deve incontrare $\{x\}$:

$$\bigcap_{V \in I(y)} V \cap \{x\} = \{x\}$$

Per ipotesi, $\displaystyle\bigcap_{V \in I(y)} V = \{y\}$, dunque $\{y\} \cap \{x\} = \{x\} \implies y \in \{x\} \implies \overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$ e vale le ipotesi.

II Se X è metrico e $x \in X$, il sistema fondamentale di intorni di X sono gli intorni centrati in X di raggio arbitrario, cioè $B_\varepsilon(x)$. Allora:

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}$$

E per la proposizione precedente si ha che X metrico è **T1**.

DEFINIZIONE 1.5.1. Uno spazio topologico X si dice di **Hausdorff** o **T2** se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$\forall x,\, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{matrix} : U \cap V = \varnothing \tag{1.32}$$

OSSERVAZIONE. 1.10.

1. *X è di* ***Hausdorff*** *se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:*

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U} \tag{1.33}$$

2. *Essere* ***Hausdorff*** *implica essere* ***T1****, ma non il viceversa.*
3. *Ogni spazio metrico è di* ***Hausdorff****.*

DIMOSTRAZIONE.

I $\implies$) Sia X di **Hausdorff**. Fissato x, sia $y \in \overline{U}$, con $U \in I(x)$. Per definizione di $\overline{U}$, $\forall V \in I(y) \quad V \cap U \neq \varnothing$. Se $y \neq x$, si avrebbe un assurdo, dato che $\nexists V \in I(y) : U \cap V = \varnothing$ e dunque X non sarebbe di **Hausdorff**.
$\impliedby$) Dobbiamo dimostrare che X è di **Hausdorff**. Sia $x \neq y$. Allora $y \notin \{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$. Allora, per definizione di chiusura si ha che $\forall U \in I(x)\ \exists V \in I(y) : V \cap U = \varnothing$. Segue dunque la tesi.

II Avendo per ogni coppia di punti distinti due intorni disgiunti in quanto **Hausdorff**, banalmente i due intorni verificano la definizione di **T1** per intorni.
Il viceversa *non* è vero: prendendo la topologia dei complementari finiti CF su uno spazio X *non* finito, essa è **T1** ma non **Hausdorff**.

III Presi $x \neq y$, allora $d(x, y) = d > 0$. Dunque, per disuguaglianza triangolare si ha sempre che:
$$B_{d/4}(Y) \cap B_{d/4}(Y) = \varnothing$$

PROPOSIZIONE 1.5.0. 1.21(MANETTI, 3.6.8)
Sottospazi e prodotti di spazi di **Hausdorff** sono **Hausdorff**.

DIMOSTRAZIONE.

- Sia $Y \subseteq X$ con X spazio topologico, Y con la topologia di sottospazio. Prendiamo $x,\, y \in Y$ con $x \neq y$.
  X di **Hausdorff** implica che $\exists U,\ V \subseteq X$ intorni rispettivamente di x e y tali che $U \cap V = \varnothing$. Basta prendere allora $U \cap Y,\ V \cap Y$: sono intorni sempre di x e y in Y che restano comunque disgiunti.

- Sia $X \times Y$ con X, Y spazi topologici. Prendiamo $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Questo significa che $x_1 \neq x_2$ oppure $y_1 \neq y_2$.
  Scegliamo senza perdita di generalità $x_1 \neq x_2$. Essendo X di **Hausdorff**, $\exists U_1, U_2$ (intorni) aperti in X tali che $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2 : U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Allora:

$$\begin{matrix} U_1 \times Y \text{ intorno di } (x_1, y_1) \\ U_2 \times Y \text{ intorno di } (x_2, y_2) \end{matrix} \implies U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = (U_1 \cap U_2) \times (Y \cap Y) = \varnothing$$

Teorema 1.5.0. (Manetti, 3.69)
Sia X spazio topologico. La **diagonale** $\Delta \subseteq X \times X$ è l'insieme delle coppie che hanno uguali componenti:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \tag{1.34}$$

Si ha:
X di **Hausdorff** $\iff$ Δ chiuso in $X \times X$.

Dimostrazione. $\implies$) Dobbiamo dimostrare che Δ è chiuso, cioè $X \times X \setminus \Delta$ aperto, ovvero $X \times X \setminus \Delta$ è intorno di ogni suo punto.
Preso $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta \implies x \neq y$ dato che *non* appartiene alla diagonale. Essendo X di **Hausdorff**, $\exists U, V : x \in U, y \in V$ (intorni) aperti disgiunti. Allora $U \times V \cap \Delta = \varnothing$: se così non fosse, ci potrebbero essere dei valori della diagonale che appartengono ad $U \times V$, cioè esisterebbe almeno una coppia (x', y') tale che $x' = y'$, ovvero gli intorni non sarebbero disgiunti. Allora $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$.
$\impliedby$) Siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Allora $(x, y) \in\subseteq X \times X \setminus \Delta$, che è aperto per ipotesi. Necessariamente esiste un aperto della base della topologia prodotto che contiene la coppia: $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$. Per gli stessi ragionamenti dell'altra implicazione, si ha che $x \in U$, $y \in V$ con U, V aperti (e dunque intorni) disgiunti. Segue che X è di **Hausdorff**.

Proposizione 1.5.1.

1. Siano $f, g \colon X \to Y$ continue, Y di **Hausdorff**. Sia C il luogo dei punti dove f e g coincidono:
$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \tag{1.35}$$
Allora C è chiuso.
2. Sia $f \colon X \to X$ continua, X di **Hausdorff**. Sia $F_{ix}(f)$ il luogo dei **punti fissi** di f e g coincidono:
$$F_{ix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\} \tag{1.36}$$
Allora $F_{ix}(f)$ è chiuso.
3. Siano $f, g \colon X \to Y$ continue, Y di **Hausdorff** e $A \subseteq X$ *denso* in X. Allora
$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x) \implies \forall x \in X \quad f(x) = g(x) \tag{1.37}$$
4. Sia $f \colon X \to Y$ continua, Y di **Hausdorff**. Sia Γ_f il **grafico** di f le insieme delle coppie $(x, f(x))$ formate dai punti del dominio e le corrispettive immagini tramite f.
$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \tag{1.38}$$

Allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$.

Dimostrazione.

I Definiamo la funzione $\begin{aligned} h\colon X &\to X \times Y \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$. Essa è continua perché le componenti sono continue; considerata la diagonale Δ_Y di $Y \times Y$, si ha che $C = h^{-1}(\Delta_Y)$ è la controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso e quindi chiuso.

II Basta porre al punto 1 $g = Id_X$.

III Per ipotesi $A \subseteq h^{-1}(\Delta_Y)$. In quanto A è denso in X, $\overline{A} = X$. Dunque:

$$X = \overline{A} \subseteq \overline{h^{-1}(\Delta_Y)} = h^{-1}(\Delta_Y)$$

Questo è vero in quanto Y è di **Hausdorff** e la diagonale Δ_Y è un chiuso: segue che $h^{-1}(\Delta_Y)$ è chiuso e dunque pari alla sua chiusura. Si ha la tesi.

IV Definiamo la funzione continua $\begin{aligned} l\colon X \times Y &\to Y \times Y \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y) \end{aligned}$. Allora $\Gamma_f = l^{-1}(\Delta_Y)$ è un chiuso.

1.6 PROPRIETÀ TOPOLOGICA

Definizione 1.6.0. Una **proprietà topologica** P è una caratteristica degli spazi topologici per cui se ogni spazio X che possiede quella proprietà P è omeomorfo ad uno spazio Y, allora anche Y ha quella proprietà (e viceversa):

$$X \cong Y \implies [X \text{ ha } P \iff Y \text{ ha } P] \tag{1.39}$$

In altre parole, una proprietà topologica è **invariante** rispetto agli omeomorfismi.

Osservazione. 1.11. *Per verificare che P è una proprietà topologica dati due spazi omeomorfi $X \cong Y$, basta in realtà verificare solo che se X ha la proprietà P allora anche Y la ha. Invece, si può verificare che due spazi* ***non*** *sono omeomorfi trovando una proprietà topologica che non condividono tra di loro.*

Esercizio. (Manetti, 3.56)
Siano X, Y spazi topologici con Y di **Hausdorff**. Se esiste $f : X \to Y$ continua e iniettiva, allora X è di **Hausdorff**.

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Essendo f iniettiva, $f(x) \neq f(y) \in Y$: in quanto Y è di **Hausdorff**, $\exists U, V$ (intorni) aperti disgiunti in Y che contengono rispettivamente $f(x)$ e $f(y)$.
Per continuità di f le controimmagini di questi intorni aperti sono aperti e per iniettività sono ancora disgiunti: $\exists f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ (intorni) aperti disgiunti che contengono rispettivamente x e y. Segue che X è di **Hausdorff**.

Proposizione 1.6.0. Essere di **Hausdorff** è una proprietà topologica, ovvero:

$$X \cong Y \implies [X \text{ è di } \mathbf{Hausdorff} \implies Y \text{ è di } \mathbf{Hausdorff}] \tag{1.40}$$

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo tra i due spazi. Allora f è per definizione continua e iniettiva. Per l'esercizio 1.1 (Manetti, 3.56) segue che X di **Hausdorff** $\implies$ Y di **Hausdorff**.

Teorema 1.6.0. $X,\ Y$ di **Hausdorff** $\iff$ $X \times Y$ di **Hausdorff**.

Dimostrazione.

$\implies$) Si veda la proprietà (Manetti, 3.6.8).

$\impliedby$) Si fissi $y_0 \in Y$. Definita la funzione $\begin{aligned} f : X &\to X \times Y \\ x &\mapsto (x,\ y_0) \end{aligned}$, essa è continua ed iniettiva, dunque per l'esercizio 1.1 (Manetti, 3.56) segue che X è di **Hausdorff**. Definito $x_0 \in X$ e $\begin{aligned} f : Y &\to X \times Y \\ y &\mapsto (x_0,\ y) \end{aligned}$, allo stesso modo si verifica che Y è di **Hausdorff**.

CAPITOLO 2

Connessione e compattezza

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, *UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

2.1 connessione

Definizione 2.1.0. Uno spazio topologico X si dice **connesso** se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono $\varnothing$, X.
Uno spazio non *connesso* si dice **sconnesso** oppure **non connesso**.

Lemma 2.1.0. (Manetti, 4.2)
Sono condizioni equivalenti:

1. X è *sconnesso*.
2. $X = A \cup B$ con A, B aperti, non vuoti, disgiunti
3. $X = A \cup B$ con A, B chiusi, non vuoti, disgiunti

Dimostrazione.
$2 \iff 3$) Sono equivalenti: se A è aperto e disgiunto da B tale che $X = A \cup B$ significa che $B = \mathscr{C}A = X \setminus A$ e dunque chiuso; analogamente per B aperto si ha che A è chiuso: allora A, B chiusi e aperti propri.
$1 \implies 2$) Esiste $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$ con A aperto e chiuso. Allora basta porre $B = \mathscr{C}A = X \setminus A$: essendo il complementare di A è aperto e chiuso, sono disgiunti e tali per cui $B \neq X$, $B \neq \varnothing$. A e B soddisfano la tesi. $2 \implies 2$) A aperto, B aperto $\implies$ A chiuso perché $A = \mathscr{C}X = X \setminus B$. Inoltre A non vuoto, B non vuoto $\implies$ $A \neq X$. Dunque A è aperto, chiuso e $A \neq \varnothing$, X e pertanto soddisfa la tesi: esiste un sottoinsieme aperto e chiuso che non il vuoto o l'insieme stesso.

Osservazione. 2.1. *Il lemma 2.1* (Manetti, 4.2) *ci dice che è sufficiente trovare solo due* *aperti (o chiusi) che soddisfano la condizione di cui sopra per affermare la sconnessione. Viceversa, per dimostrare la connessione, dobbiamo dimostrare che per ogni coppia di aperti (o chiusi) non vuoti, la cui unione è X, essi non siano disgiunti.*

Esempi. Esempi di spazi topologici *sconnessi* in topologia Euclidea.
- $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$
- $X = [0,\ 1] \cup (2,\ 3)$

Lemma 2.1.1. (Manetti, 4.4)
Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$ con A aperto e chiuso. Sia $Y \subseteq X$, Y *connesso*. Allora $Y \cap A = \varnothing$ (cioè $Y \subseteq Y \setminus A$) oppure $Y \subseteq A$.

Dimostrazione. Consideriamo $Y \cap A$: esso è intersezione di due aperti e chiusi per ipotesi (Y è aperto e chiuso perché *connesso*), cioè è aperto e chiuso. Essendo Y *connesso*, un suo sottoinsieme aperto e chiuso o è l'insieme vuoto oppure è l'insieme stesso, cioè $Y \cap A = \varnothing$ (cioè $Y \subseteq Y \setminus A$) oppure $Y \cap A = Y$ (cioè $Y \subseteq A$).

Teorema 2.1.0. (Manetti, 4.6)
Con la topologia Euclidea, $X = [0,\ 1]$ è *connesso*.

Dimostrazione. Supponiamo $X = [0,\ 1] = C \cup D$ con:
- $C,\ D$ entrambi chiusi.
- $C,\ D$ entrambi aperti.

Dobbiamo dimostrare che $C,\ D$ *non* sono disgiunti, ovvero $C \cap D \neq 0$. Supponiamo sia $0 \in C$ e poniamo $d = \inf D$. Essendo D un chiuso, $d \in \overline{D} = D$.
- Se $d = 0$, $d \in C \cap D \neq \varnothing$.
- Se $d > 0$ allora $[0,\ d) \subseteq C$ perché *non sta* in D. Il passaggio alla chiusura mantiene l'inclusione, dunque $[0,\ d] \subseteq \overline{C} = C$. Segue che $d \in C$ e dunque $C \cap D \neq \varnothing$.

Teorema 2.1.1. (Manetti, 4.7)
L'immagine continua di un *connesso* è un *connesso*:

$$f : X \to Y \ \text{continua},\ X \ \text{connesso} \implies f(X) \ \text{connesso} \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.2. Sia $Z \subseteq f(X)$, Z aperto, chiuso in $f(X)$ non vuoto. Per dimostrare che $f(X)$ sia connesso ci è sufficiente dimostrare che $Z = f(X)$: in questo modo gli unici aperti e chiusi sono i sottoinsiemi impropri:
- Z aperto: $\exists A$ aperto in $Y : Z = A \cap f(X)$.
- Z chiuso: $\exists C$ chiuso in $Y : Z = C \cap f(X)$.

Allora:
- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \implies f^{-1}(Z)$ è uguale alla controimmagine continua di un aperto in Y, cioè è uguale ad un aperto di X.

- $f^{-1}(Z) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(C) \implies f^{-1}(Z)$ è uguale alla controimmagine continua di un chiuso in Y, cioè è uguale ad un chiuso di X

Segue che $f^{-1}(Z)$ è aperto e chiuso in X. Notiamo inoltre che, essendo $Z \neq \varnothing$, allora $f^{-1}(Z) \neq \varnothing$: essendo X *connesso* per ipotesi, necessariamente $f^{-1}(Z) = X$.

Osservazione. 2.2. *Dal teorema precedente segue che essere connesso è una proprietà topologica! Infatti, se vale per una qualunque funzione continua $f : X \to Y$, allora varrà anche per omeomorfismi tra X e Y; in particolare, si avrà per suriettività che $f(X) = Y$ connesso.*

Definizione 2.1.1. Un **arco** o **cammino** α da un punto x a un punto y in uno spazio topologico X è una funzione continua che parametrizza un *percorso* finito fra gli estremi x e y:

$$\alpha : [0,\ 1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y \tag{2.2}$$

Definizione 2.1.2. Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** o **c.p.a.** o *path-connected* se per ogni coppia di punti in X esiste un arco che li collega:

$$\forall x,\ y \in X\ \exists\, \alpha : [0,\ 1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y \tag{2.3}$$

Teorema 2.1.3. (Manetti, 4.7)
X **c.p.a.** $\implies$ X *connesso*.

Dimostrazione. Sia $X = A \cup B$, con $A,\ B$ aperti non vuoti. Vogliamo dimostrare che $A \cap B \neq \varnothing$. Essendo non vuoti, prendiamo $a \in A,\ b \in B$. In quanto X è **c.p.a.**, esiste il cammino (continuo) $\alpha : [0,\ 1] \to X$ tale che $\alpha(a) = a,\ \alpha(1) = b$.
Studiamo la controimmagine di α:

$$\alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(A \cup B) = [0,\ 1]$$
$$[0,\ 1] = \alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$$

$\alpha^{-1}(A),\ \alpha^{-1}(B)$ sono entrambi aperti e non vuoti in quanto controimmagini (continue) di aperti non vuoti ($0 \in \alpha^{-1}(A),\ 1 \in \alpha^{-1}(B)$).
Poiché $[0,\ 1]$ è connesso, allora le controimmagini trovate non sono disgiunte. Segue allora:

$$\exists t \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) \implies \alpha(t)\, \alpha\left(\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)\right) \subset \alpha\left(\alpha^{-1}(A)\right) \cap \alpha\left(\alpha^{-1}(B)\right) = A \cap B$$

Definizione 2.1.3. Dati due cammini in uno spazio X:

$$\alpha: [0,\ 1] \to X \quad \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y$$
$$\beta: [0,\ 1] \to X \quad \beta(0) = y,\ \beta(1) = z$$

Allora possiamo creare un cammino $\alpha * \beta$ con la **congiunzione di cammini**:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Lemma 2.1.2. Sia $A,\ B$ **c.p.a**, $A \cap B \neq \varnothing \implies A \cup B$ **c.p.a.**

Dimostrazione. Se $x, y \in A$ oppure $x,\ y \in B$ esiste per ipotesi un arco che li collega. Dobbiamo allora trovare un arco in $A \cup B$ da x a y $\forall x \in A, y \in B$. Preso $z \in A \cap B$, per ipotesi esistono due cammini ad esso:

$$\alpha: [0,\ 1] \to A \quad \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = z$$
$$\beta: [0,\ 1] \to B \quad \beta(0) = z,\ \beta(1) = z$$

Usando la *giunzione di cammini*, si ha:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Il cammino $\alpha * \beta: [0,\ 1] \to A \cup B$ è quello richiesto.

Osservazione. 2.3.

- *Usando la giunzione di cammini, si ha che:*

  $$X \text{ è } \textbf{c.p.a.} \iff \exists z \in X : \forall x \in X \quad \exists\, \alpha: [0,\ 1] \to X \ : \alpha(0) = z,\ \alpha(1) = x$$

  *In altre parole, uno spazio è **c.p.a.** se e solo se esiste un punto per cui ogni altro punto è collegato tramite un arco.*
- *Per ogni arco α esiste l'arco inverso, percorso al contrario: $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$*

Definizione 2.1.4. In $\mathbb{R}^n$, un **segmento** $\overline{PQ}$ è la combinazione lineare tra i punti P e Q, parametrizzato come:

$$\overline{PQ} = \{P + tQ \mid t \in [0,\ 1]\} \tag{2.6}$$

DEFINIZIONE 2.1.5. Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se per ogni coppia di punti esiste un segmento che li collega contenuto interamente in Y.

$$\forall P,\ Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \tag{2.7}$$

DEFINIZIONE 2.1.6. Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è **stellato** per P se esiste un $P \in Y$ tale che per ogni altro punto esiste un segmento che li collega contenuto interamente in Y.

$$\exists P \in Y : \forall Q \in Y \quad \overline{PQ} \subseteq Y \tag{2.8}$$

ESEMPI.

- Gli intervalli aperti e semiaperti sono **c.p.a**, dunque sono *connessi*: l'arco α è banalmente il segmento pari all'intervallo aperto.
- Preso $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso*, qualunque segmento è anche per costruzione un arco: X è anche **c.p.a** e dunque *connesso*.
- $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *non* è *convesso* (per $(0, 1)$ e $(0, -1)$ non si hanno segmenti interni ad X) ma è **c.p.a.** (basta prendere un cammino che "giri attorno" all'origine) e dunque è *connesso*.
- Preso $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *stellato* per $P \in X$, qualunque segmento con P è anche per costruzione un arco: X è anche **c.p.a** per l'osservazione 2.3 e dunque connesso.
- Ogni insieme *convesso* è anche *stellato* per P, basta fissare un qualunque punto come nostro P. In generale, un insieme è convesso se e solo se è stellato per ogni suo punto.

CAPITOLO 3

Azioni di gruppo

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, *UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

3.1 Azione di un gruppo su un insieme

[...]

3.2 Stabilizzatore di un elemento

Definizione 3.2.0. Lo **stabilizzatore di un elemento** è l'insieme degli elementi di G che fissano x:

$$H_x := \{g \in G \mid g.x = x\} \tag{3.1}$$

H_x è un *sottogruppo di isotropia* di x. Inoltre, se H_x è banale, allora l'azione è **libera**.

Dimostrazione. H_x è chiuso rispetto all'azione:

- $1_G \in H_x$ per definizione dell'azione g. ($1_G.x = x\ \forall x$).
- $\forall g,\ h \in H_x$, allora $(gh).x = g.(h.x) = g.x = x$.

Osservazione. 3.1. *L'insieme ${}^{G}/_{H_x}$ dei laterali sinistri di H_x in G è in corrispondenza biunivoca con l'orbita $O(x)$. Inoltre, se G è finito, la cardinalità dell'orbita è pari all'indice di H_x in G.*

Dimostrazione. Sia data:

$$\begin{aligned} \alpha : {}^{G}/_{H_x} &\to O(x) \\ g.H_x &\mapsto g.x \end{aligned}$$

Mostriamo che α è ben definita e biunivoca.

1. *Ben definizione*: se $g.H_x = \tilde{g}.H_x$ allora $g^{-1}\tilde{g} = h \in H_x \implies \tilde{g} = gh \in H_x$. Si ha:

$$\alpha(\tilde{g}.H_x) = \tilde{g}.x = (gh).x = g.(h.x) = g.x = \alpha(g.H_x)$$

Poiché $g.H_x = \tilde{g}.H_x \implies g.x = \tilde{g}.x$ la funzione è ben definita.

2. *Iniettività*:

$$\begin{aligned}\alpha(g_1.H_x) = \alpha(g_2.H_x) &\implies g_1.x = g_2.x \implies g_2^{-1}.(g_1.x) = g_2^{-1}.(g_2.x)\\ &\implies \left(g_2^{-1}.g_1\right).x = 1_G.x = x\end{aligned}$$

Ne segue che $\left(g_2^{-1}g_1\right) \in H_x \implies g_2^{-1}g_1 = h \in H_x \implies g_1.H_x = g_2.H_x$.

3. *Suriettività*: se $y \in O(x)$, per definizione $\exists g \in G : y = g.x$, cioè $y = \alpha(g.H_x)$. Ne consegue, dal teorema di Lagrange, che $|O(x)| = [G : H_x] = \frac{|G|}{|H_x|}$.

Osservazione. 3.2. *Punti nella stessa orbita hanno stabilizzatori* ***coniugati****:*

$$x_2 = g.x_1 \implies H_{x_2} = g.H_{x_1}.g^{-1} \tag{3.2}$$

Dimostrazione. $\subseteq$) Sia $h \in H_{x_2}$. Si ha:

$$h.x_2 = x_2 \implies h.(g.x_1) = g.x_1 \implies \left(g^{-1}hg\right).x_1 = x_1$$

Segue che $\forall h \in H_{x_2}$ $g^{-1}hg \in H_{x_1}$, ma allora $h = g\left(g^{-1}h^{-1}g\right)g^{-1} \in g.H_{x_1}.g^{-1}$. Pertanto per l'arbitrarietà di h si ha $H_{x_2} \subseteq g.H_{x_1}.g^{-1}$
$\supseteq$) Sia $h \in H_{x_1}$ e consideriamo ghg^{-1}. Se moltiplico (con l'azione .) per x_2:

$$\left(ghg^{-1}\right).x_2 = \left(ghg^{-1}\right).g.x_1 = (gh).\left(g^{-1}g\right).x_1 = (gh).x_1 = g.(h).x_1 = g.x_1 = x_2$$

Pertanto $\forall h \in H_{x_1}$ $\left(ghg^{-1}\right).x_2 = x_2$ e per l'arbitrarietà di h si ha $g.H_{x_1}.g^{-1} \subseteq H_{x_2}$

3.3 Azione per omeomorfismi

Definizione 3.3.0. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Diciamo che G **agisce per omeomorfismi** se $\forall g \in G$ l'applicazione:

$$\begin{aligned}\theta_g : X &\to X\\ x &\mapsto g.x\end{aligned} \tag{3.3}$$

è un *omeomorfismo*.
Questo è equivalente a chiedere che l'azione sia data da un *omomorfismo* di gruppi:

$$\Phi : G \to \{\text{omeomorfismi } X \to X\} \leq S(x) \tag{3.4}$$

Esercizio. G agisce per omeomorfismi se e solo se θ_g è continua $\forall g \in G$.

Dimostrazione. ...

Proposizione 3.3.0.

1. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X per omeomorfismo. Sia π la proiezione dall'insieme allo spazio delle orbite X/G:
$$\pi \colon X \to X/G \tag{3.5}$$
Allora π è aperta e, se G è finito, π è anche chiusa.
2. Sia X di **Hausdorff** e G gruppo finito che agisce su X per omeomorfismi. Allora X/G è di Hausdorff.

Dimostrazione.

I Sia $A \subseteq X$ un aperto. Vogliamo dimostrare che $\pi(A)$ è aperto in X/G. Un aperto della topologia quoziente è tale se la controimmagine dell'aperto nel quoziente è un aperto: si deve allora dimostrare che $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto in X.
Ogni elemento di A è contenuto in un orbita, dunque $\pi(A)$ contiene le orbite degli $x \in A$; la controimmagine $\pi^{-1}(\pi(A))$ risulta dunque pari all'unione di *tutte* le orbite in X che intersecano l'insieme A:
$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g.A$$
Ma allora $g.A = \{g.x \mid x \in A\}$ è un aperto $\forall g \in G$ poiché un omeomorfismo porta aperti in aperti; l'unione di aperti è aperta, dunque $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto in X cioè $\pi(A)$ è aperto in X/G.
Preso C chiuso, dobbiamo allo stesso modo dimostrare $\pi(C)$ chiuso in X/G, cioè $\pi^{-1}(\pi(C))$ chiuso in X. Usando lo stesso ragionamento, otteniamo che:
$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g.C$$
Con $g.C = \{g.x \mid x \in C\}$ chiuso per omeomorfismo. In particolare, essendo G finito, segue che l'unione dei $g.C$ è finita e dunque anch'essa è un chiuso. Segue dunque $\pi^{-1}(\pi(C))$ chiuso in X e $\pi(C)$ chiuso in X/G.

II Siano $p,\ q \in X/G$ distinti. Vogliamo dimostrare che esistono intorni di p e q disgiunti.
Siano $x,\ y \in X$ tali che $\pi(x) = p$ e $\pi(y) = q$ e consideriamo il gruppo finito $G = \{g_1 = 1_G,\ g_2,\ \dots,\ g_n\}$. Le orbite di x e y sono diverse: se così non fosse, si avrebbe $\pi(x) = \pi(y)$ e cioè $p = q$, il che è assurdo! Allora:
$$g_i.x \neq g_y.y \quad \forall i,\ j$$
Definiti gli (intorni) aperti $U \in I(x)$ e $V \in I(x)$ disgiunti (in quanto X di **Hausdorff**), possiamo considerare gli altri (intorni) aperti disgiunti $g_i.U \in I(g_i.x)$, $g_i.V \in I(g_i.y)$.

Allora:

$$\tilde{U} := \bigcup_i g_i . U \qquad \tilde{V} := \bigcup_i g_i . V \tag{3.6}$$

Sono entrambi aperti. Vogliamo costruire $U \in I(x)$ e $V \in I(x)$ in modo che siano (intorni) aperti disgiunti tali che, costruiti come sopra $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, si abbia $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$. Così, passando al quoziente con π, si otterranno degli intorni $\pi\left(\tilde{U}\right)$ di p e $\pi\left(\tilde{V}\right)$ di q che soddisfano $\pi\left(\tilde{U}\right) \cap \pi\left(\tilde{V}\right) = \varnothing$.

- Costruiamo U e V: $\forall i$ sappiamo che $x \neq g_i . y$ in X (in quanto le orbite di x e y sono distinte. In quanto X è di **Hausdorff**, si ha che $\forall i \, \exists U_i$, V_i (intorni) aperti disgiunti tali che $x \in U_i$ e $g_i . y \in V_i$. Notiamo che $y \in g_i^{-1} . V_i$; allora definiamo

$$U := \bigcap_i^n U_i \in I(x) \qquad V := \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1} . V_i \in I(y)$$

- Ricaviamo $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$: $\forall i$ (e quindi per ogni elemento di G) abbiamo:

$$U \cap (g_i . V) \subseteq U_i \left(g_i . g_i^{-1} . V_i\right) = U_i \cap V_i = \varnothing \implies U \cap (g_i . V) = \varnothing$$

Allora $\forall i$, j abbiamo:

$$(g_i . U) \cap \left(g_j . V\right) = (g_i . U) \cap \left(g_i g_i^{-1} g_j . V\right) = g_i . \left(U \cap \left(g_i^{-1} g_j\right) . V\right)$$

Ma $g_i^{-1} g_j \in G$, dunque $U \cap \left(g_i^{-1} g_j\right) . V = \varnothing$. Segue che:

$$(g_i . U) \cap \left(g_j . V\right) = \varnothing \implies \left(\bigcup_i g_i . U\right) \cap \left(\bigcup_i g_i . V\right) = \varnothing \implies \tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$$

Esempio. $(\mathbb{Z}, +)$ agisce in $\mathbb{R}$ per **traslazione**:

$$m . x = x + m \tag{3.7}$$

Se mettiamo ad $\mathbb{R}$ la topologia Euclidea, allora l'azione è per omeomorfismi, dato che fissato $m \in \mathbb{Z}$: $\begin{array}{rl} \theta_m : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + m \end{array}$ è continua.

- *Orbite*: $O(x) = \{x + m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ rappresenta tutti i numeri che hanno mantissa uguale (ad esempio, preso $x = 1.5$, nella sua orbita abbiamo 1.5, 2.5, -1.5, 25.5, $\ldots$).
- *Stabilizzatore*: $H_x = \{m \in Z \mid x + m = x\} = \{0\}$ è banale, dunque l'azione è libera.
- *Spazio delle orbite*: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è insiemisticamente in corrispondenza biunivoca con $[0, 1)$, in particolare un sistema di rappresentanti di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sono le orbite al variare di $x \in [0, 1)$. Inoltre, lo spazio delle orbite è compatto essendo immagine continua di un compatto ($\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Si può dimostrare che è omeomorfo a S^1.

Dimostrazione. Consideriamo $\begin{array}{rl} f : R & \to S^1 \subseteq \mathbb{R} \\ t & \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{array}$.

- f è continua.
- f è suriettiva.
- $f(t_1) = f(t_2) \iff t_1 - t_2 \in \mathbb{Z} \iff t_1,\ t_2$ nella stessa orbita $\iff \pi(t_1) = \pi(t_2)$

Allora la relazione di equivalenza indotta da f è quella dell'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$.
Inoltre, f induce $\overline{f} : {}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}} \to S^1$ continua per le proprietà della topologia quoziente e che rende commutativo il diagramma a lato. Infatti $\overline{f}$ è biunivoca in quanto suriettiva (lo è f) ed iniettiva (per conseguenza del sistema di rappresentanti che si ha su ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ {}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}} \arrow[ur, dotted, "\exists \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre, essendo ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$ compatto ed S^1 di **Hausdorff**, $\overline{f}$ è chiusa e dunque $\overline{f}$ è l'*omeomorfismo* cercato. Per questo motivo, si ha anche che f è un'*identificazione* aperta.

Digressione. Si può sempre vedere $\mathbb{R}^2$ come lo spazio dei complessi $\mathbb{C}$. Allora $S^1 \in \mathbb{C} \implies S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$. La funzione di prima si può anche riscrivere come:

$$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \leftrightarrow \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \leftrightarrow e^{2\pi i t} \tag{3.8}$$

Esempio. $G = GL(n,\ \mathbb{R})$ agisce su $\mathbb{R}^n$ con l'azione di moltiplicazione matrice per vettore:

$$A.\underline{v} = A\underline{v} \tag{3.9}$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato $A \in G$: $\begin{aligned} \theta_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \underline{v} &\mapsto A\underline{v} \end{aligned}$ è continua.

- *Orbite*: definite $O(\underline{v}) = \{A\underline{v} \mid A \in G\}$ ci sono solo due orbite, $[\underline{0}]$ e $[\underline{v}]$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$, dato che ogni vettore può essere scritto come prodotto di un vettore per un'opportuna matrice di cambiamento di base.
- *Spazio delle orbite*: ${}^{\mathbb{R}^n}\!/\!_{G} = \{[\underline{0}],\ [\underline{v}]\}$. Considerando la proiezione al quoziente $\pi : \mathbb{R}^n \to {}^{\mathbb{R}^n}\!/\!_{G}$, si ha che $\pi^{-1}([\underline{v}]) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, che è un aperto ma *non* è un chiuso. Per definizione di aperto della topologia quoziente $\{[\underline{v}]\}$ è aperto ma non chiuso in ${}^{\mathbb{R}^n}\!/\!_{G}$, dunque non tutti i punti nello spazio delle orbite son chiusi. Segue che ${}^{\mathbb{R}^n}\!/\!_{G}$ non è **T1** e tanto meno è di **Hausdorff**.

Esempio. $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, inteso come gruppo moltiplicativo, agisce su $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con l'azione di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda.\underline{x} = \lambda\underline{x} \tag{3.10}$$

L'azione è per omeomorfismi, dato che fissato $\lambda \in G$: $\begin{aligned} \theta_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \underline{x} &\mapsto \lambda\underline{x} \end{aligned}$ è continua.

- *Orbite*: $O(\underline{x}) = \{\lambda\underline{x} \mid \lambda \in G\}$ rappresentano tutte le rette vettoriali passanti per l'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$ a cui son state tolte l'origine.
- *Spazio delle orbite*: $\frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{G} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è lo **spazio proiettivo reale**, spazio topologico rispetto alla topologia quoziente indotta dall'azione. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di **Hausdorff** e *compatto*.

Definizione 3.3.1. Lo **spazio proiettivo reale** $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (o $\mathbb{RP}^n$) di dimensione n è lo spazio topologico delle rette vettoriali passanti origine in $\mathbb{R}^{n+1}$, a cui son state tolte l'origine. È definito come lo spazio quoziente rispetto all'azione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{R}^*} \tag{3.11}$$

Proposizione 3.3.1. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di **Hausdorff**, *compatto* e **c.p.a.**.

Dimostrazione.

I Dati $p,\ q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $p \neq q$ essi sono della forma $p = [\underline{x}]$ e $q = \left[\underline{y}\right]$. Allora:

$$[\underline{x}] \neq \left[\underline{y}\right] \mathscr{L}_0(\underline{x}) \neq \mathscr{L}_0\left(\underline{y}\right)$$

Con $\mathscr{L}_0(\underline{x}),\ \mathscr{L}_0\left(\underline{y}\right)$ le rette vettoriali descritte da $\underline{x}$ e $\underline{y}$.
Prendiamo gli (intorni) aperti disgiunti $U \setminus 0 \in I(\underline{x})$, $V \setminus 0 \in I\left(\underline{y}\right)$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Allora, passando al quoziente, $\pi(U \setminus 0)$ e $\pi(V \setminus 0)$ formano due fasci di rette a forma di "doppio cono infinito" con vertice nell'origine; questi due coni sono (intorni) aperti in quanto

$$\pi^{-1}(\pi(U \setminus 0)) = U \setminus 0 \qquad \pi^{-1}(\pi(V \setminus 0)) = V \setminus 0$$

Inoltre sono intorni disgiunti di p e q, dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di **Hausdorff**.

II Per dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto, mostreremo che $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dato che $S^n \subseteq R^{n+1} \setminus \{0\}$ è compatto.
Notiamo che, presa l'orbita di un vettore $\underline{v}$, si ha:

$$[\underline{v}] = \{\lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\} = \left\{ \underbrace{\lambda \|\underline{v}\|}_{=\mu \in \mathbb{R}^*} \underbrace{\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}}_{\in S^1} \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \right\} = \{\mu \underline{x} \mid \mu \in \mathbb{R}^*\} = [\underline{x}]$$

Dunque ogni orbita dello spazio proiettivo reale si può scrivere come l'orbita di un vettore appartenente alla sfera S^n. Segue che non solo π è suriettiva, ma anche $\pi_{|S^n}$ è suriettiva, cioè $\pi_{|S^n}(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; segue dunque che $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Dato che S^n è compatto e **c.p.a.**, segue che anche lo spazio proiettivo reale è compatto e **c.p.a.** (in quanto immagine continua tramite π di S^n).

CAPITOLO 4

Successioni

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, *UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

4.1 numerabilità

Definizione 4.1.0. Un insieme X è **numerabile** se è finito oppure esiste una biezione tra l'insieme X e i naturali $\mathbb{N}$.

Definizione 4.1.1. Uno spazio topologico X è **a base numerabile** se esiste una base $\mathscr{B}$ della topologia tale che $\mathscr{B}$ sia numerabile. Si dice anche che X soddisfa il **secondo assioma di numerabilità**.

Definizione 4.1.2. Uno spazio topologico X è *primo-numerabile* se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile. Si dice anche che X soddisfa il **primo assioma di numerabilità**.

Osservazione. 4.1.

1. *Il secondo assioma di numerabilità implica il primo.*
2. *Se X è finito, X soddisfa sempre i due assiomi.*
3. *Se X è spazio metrico, X è sempre primo-numerabile.*
4. *Se X è a base numerabile, ogni sottospazio Y di X è a base numerabile. In particolare Y è primo-numerabile.*
5. *Se X e Y sono a base numerabile, allora $X \times Y$ è a base numerabile. In particolare $X \times Y$ è primo-numerabile.*
6. *Non è vero che il quoziente di X spazio a base numerabile (o primo-numerabile) è sempre a base numerabile (o primo-numerabile).*

Dimostrazione.

I Se X ha base numerabile $\mathscr{B}$ e $x \in X$, allora $\{A \in \mathscr{B} \mid x \in A\}$ è un sistema fondamentali di intorni di x ed è chiaramente numerabile.

II Ogni base e sistema fondamentale di intorni contiene necessariamente un numero finito di elementi.

III Preso $x \in X$, allora $\{B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni ed è numerabile.

IV Se $\mathscr{B}$ è una base numerabile per X, $\{A \cap Y \mid A \in \mathscr{B}\}$ è base numerabile per Y.

V Se $\mathscr{B}_X$ è una base numerabile per X e $\mathscr{B}_Y$ base numerabile per Y, allora $\{A \times B \mid A \in \mathscr{B}_X,\ B \in \mathscr{B}_Y\}$ è base di $X \times Y$ numerabile: il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili rimane numerabile.

VI La contrazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ad un punto, cioè il quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, non è primo-numerabile nè tanto meno a base numerabile, pur essendo $\mathbb{R}$ a base numerabile in quanto metrico[a].

[a] Nelle “Note aggiuntive”, a pag. 55, si può trovare la dimostrazione di ciò.

Esempio. $\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea è *a base numerabile*. Presa infatti:

$$\mathscr{B} = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$$

- È numerabile (è definita con i razionali $\mathbb{Q}$, che sono numerabili)
- È una base perché, dati $x,\ y \in \mathbb{R}$, $x < y$:

$$(x,\ y) = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ x<a<b<y}} (a,\ b)$$

Proposizione 4.1.0. *Sia X a base numerabile. Allora ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento numerabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A}$ un ricoprimento aperto di X, $\mathscr{B}$ una base numerabile per X e $x \in X$. Allora $\exists U_x \in \mathscr{A}$ tale che $x \in U_x$. Essendo $\mathscr{B}$ base, $\exists B_x \in \mathscr{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq U_x$. Abbiamo così determinato un sottoinsieme numerabile della base $\mathscr{B}$:

$$\tilde{\mathscr{B}} := \{B_x \mid x \in X\}$$

Allora esiste in particolare $E \subseteq X$ numerabile tale che:

$$\tilde{\mathscr{B}} := \{B_x \mid x \in E\}$$

Se consideriamo ora $\tilde{\mathscr{A}} := \{U_x \mid x \in E\}$, notiamo che:

- $\tilde{A} \subseteq A$.
- $\tilde{A}$ è numerabile perché lo è E.
- $X = \bigcup_{B_x \in \tilde{\mathscr{B}}} B_x = \bigcup_{x \in E} B_x \subseteq \bigcup_{x \in E} U_x$.

Segue che $\tilde{\mathscr{A}}$ è un sottoricoprimento numerabile di A.

Definizione 4.1.3. Uno spazio topologico X si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme E *denso* e *numerabile*.

Esempi.
- Se X è numerabile, allora è separabile perché l'insieme stesso è un sottoinsieme numerabile e denso.
- $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è separabile perché si ha $E = \mathbb{Q}^n$ denso in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.1.0. Se X è *a base numerabile*, allora è *separabile*.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B}$ una base numerabile. Per ogni $U \in \mathscr{B}$ sia $x_U \in U$ un punto e sia:

$$E = \{x_U \mid U \in \mathscr{B}\}$$

- E è numerabile perché lo è $\mathscr{B}$: abbiamo preso un punto per ogni elemento della base numerabile.
- E è denso: se $A \subseteq X$ è aperto *non* vuoto, allora $\exists U \in \mathscr{B}$ tale che $x_u \in U \subseteq A \implies x_U \in A \implies E \cap A \neq \varnothing$.

Proposizione 4.1.1. Se X è spazio metrico, X è sempre primo-numerabile ed è:

$$\textit{a base numerabile} \iff \textit{separabile}$$

Dimostrazione.
$\implies$) Sempre vera per ogni spazio anche non metrico (lemma 4.1).
$\impliedby$) Sia $E \subseteq X$ sottoinsieme numerabile e denso e consideriamo:

$$\mathscr{B} = \{B_{1/n}(e) \mid e \in E,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Questo insieme è numerabile: mostriamo che sia una base. Per far ciò fissiamo $U \subseteq X$ aperto e prendiamo $x \in U$: vogliamo trovare un aperto di $\mathscr{B}$ contenuto in U contenente x.[a]
Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $B_{1/n}(x) \subseteq$. Cerchiamo opportuni $e \in E,\ m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$x \in B_{1/m}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$$

Consideriamo la palla $B_{1/2n}(x)$. Siccome E è denso in X, $\exists e \in E \cap B_{1/2n}(x)$.
Prendiamo ora la balla $B_{1/2n}(e) \in \mathscr{B}$:
- *contiene* x perché se $e \in B_{1/2n}(x) \implies d(e, y) < \frac{1}{2n} \implies x \in B_{1/2n}(e)$
- $B_{1/2n}(e) \subseteq B_{1/n}(x) \subseteq U$; infatti, preso $y \in B_{1/2n}(e)$ si ha:

$$d(x, y) \leq d(x, e) + d(e, y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$\implies y \in B_{1/n}(x) \subseteq U.$$

Segue la tesi.

[a] Gli elementi della base sono già aperti banalmente. Per l'arbitrarietà di x, troviamo un ricoprimento aperto di U costituito da aperti di $\mathscr{B}$ contenuto interamente in U, cioè $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Esempio. Si può vedere che $\mathbb{R}^n$ è base numerabile anche perché è uno spazio metrico ed è separabile.

Attenzione! Un insieme con una certa topologia può essere a base numerabile (o primo-numerabile), ma non necessariamente rispetto ad un altra!

Esempio. Retta di Sorgenfrey.
Consideriamo $X = \mathbb{R}$ con la topologia avente come base:

$$\mathscr{B} = \{[a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b\} \tag{4.1}$$

Mostriamo $\mathscr{B}$ è base per una topologia, è separabile, primo-numerabile ma *non* è a base numerabile.

- *Base per una topologia*: usiamo il teorema delle basi (Manetti, 3.7), pag. 8.
  I $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$ è ovvio.
  II Prendiamo $A = [a,\ b)$, $B = [c,\ d)$ e consideriamo:

  $$\forall x \in A \cap B = [\max\{a,\ b\},\ \min\{c,\ d\})$$

  Allora basta prendere $C = A \cap B \in \mathscr{B}$ per soddisfare $x \in C \subseteq A \cap B$.
- *Separabile*: $E = \mathbb{Z}$ è numerabile ed è denso perché vale sempre $[a,\ b) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$, dunque ogni aperto non vuoto interseca E; segue che X è separabile.
- *Primo-numerabile*: s $a \in \mathbb{R}$ allora $\left\{\left[a,\ a+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di a numerabile. Preso U intorno di a, $\exists b > a$ tale che $[a,\ b) \subseteq U$; inoltre, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a + \frac{1}{n} < b$, cioè:

  $$\left[a,\ a+\frac{1}{n}\right) \subseteq [a,\ b) \subseteq U$$

- *Non a base numerabile*: presa una base $\tilde{\mathscr{B}}$ per X, mostriamo che non è numerabile. Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora:

  $$[x,\ \infty) = \bigcup_{y > x} [x,\ y)$$

  È aperto. In particolare, esiste un aperto dipendente dal punto x, cioè $U(x) = [x,\ b) \in \tilde{\mathscr{B}}$ (per un certo $b > x$) per cui $x \in U(x) \subseteq [x,\ \infty)$.
  Notiamo che se $x \neq y$, allora $U(x) \neq U(y)$: preso $y > x$, segue che $x \notin [y,\ \infty) \supseteq U(y) \implies x \notin U(y) \implies U(x) \neq U(y)$. L'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \tilde{\mathscr{B}} \\ x &\mapsto U(x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

è iniettiva, dunque $\tilde{\mathscr{B}}$ non è in iniezione con i naturali e pertanto $\tilde{\mathscr{B}}$ *non* è numerabile.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Primo numerabile} \arrow[dl, shift left, "\text{se X è metrico}"'] \\
\text{A base numerabile} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{Separabile}
\end{tikzcd}$$

4.2 SUCCESSIONI

Definizione 4.2.0. Una **successione** in uno spazio topologico X è una funzione $a\colon \mathbb{N} \to X$ che indichiamo con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}$.

Definizione 4.2.1. Sia $\{a_n\}$ una successione in X. Diciamo che $\{a_n\}$ **converge** a $p \in X$ se $\forall U \in I(p)\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U,\ \forall n \geq n_0$.

Osservazione. 4.2. *Se X è di* ***Hausdorff****, una successione convergente ha un* ***unico*** *limite.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\{a_n\}$ converga a p e q. Mostriamo che $p = q$.
Siano $U \in I(p)$ e $V \in I(q)$.

- Siccome $\{a_n\}$ converge a p, $\exists n_0$ tale che $a_n \in U \forall n \geq n_0$.
- Siccome $\{a_n\}$ converge a 1, $\exists n_1$ tale che $a_n \in V \forall n \geq n_1$.

$$\implies a_n \in U \cap V\ \forall n \geq \max_{n_0,\, n_1} \implies U \cap V \neq \varnothing \implies p = q$$

L'ultima implicazione deriva dal fatto che X è di **Hausdorff**. Infatti, se in **Hausdorff** $p \neq q \implies U \cap V = \varnothing$, vale anche la sua negazione: $U \cap V \neq \varnothing \implies p = q$.

Definizione 4.2.2. Se X è di **Hausdorff** e $\{a_n\}$ è convergente, ha senso parlare del **limite** della successione:

$$p = \lim_{n\to+\infty} a_n \tag{4.3}$$

Se X *non* è di **Hausdorff**, la stessa successione può convergere a più punti, dunque non esiste il limite della successione.

Esempi.

- Se X ha la topologia banale $\mathcal{T} = \{X, \varnothing\}$, l'unico intorno di qualunque punto è X. Allora ogni successione $\{a_n\}$ in X converge sempre ad un qualunque punto p.
- Se X ha la topologia discreta, $\{a_n\}$ successione in X converge a $p \iff \exists n_0 : a_n = p,\ \forall n \geq n_0$, cioè se la successione è finitamente costante. Infatti, nella topologia discreta anche il singoletto $\{p\}$ è intorno di p, dunque eventualmente la successione avrà solo termini nel singoletto.

Osservazione. 4.3. *Se X spazio metrico:*

$$a_n \text{ CONVERGE A } p \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \tag{4.4}$$

Dimostrazione.
$\implies$) $U = B_\varepsilon(p)$ è l'intorno di convergenza che soddisfa l'implicazione.
$\impliedby$) Sia $U \in I(p)$. Allora $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(p) \subseteq U$. Ma allora, dato che per le ipotesi $\exists n_0 : d(p, a_n) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$, cioè $a_n \in B_\varepsilon(p) \subseteq U \implies a_n \in U \forall n \geq n_0$.

4.2.1 *Punti di accumulazione*

Definizione 4.2.3. Un punto $p \in X$ è **punto di accumulazione per la successione** $\{a_n\}$ se:

$$\forall U \in I(p),\ \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \geq N : a_n \in U \tag{4.5}$$

Esercizio. Se X è spazio metrico, allora:

$$p \text{ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER } a_n \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 : d(x, y) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \tag{4.6}$$

Definizione 4.2.4. Un punto $p \in X$ è **punto di accumulazione per il sottoinsieme** $B \subseteq X$ se:

$$\forall U \in I(p), \exists b \in B \colon b \in U \setminus \{p\} \tag{4.7}$$

L'insieme dei punti di accumulazione per il sottoinsieme B è chiamato **derivato** di B.

Esercizio. Data la successione $\{a_n\}$ in X e definito $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$:
- $p \in X$ punto di accumulazione per la successione non è mai punto di accumulazione per l'insieme A.
- $p \in X$ punto di accumulazione per l'insieme A in generale non è punto di accumulazione per la successione; se X è metrico allora vale l'implicazione

4.2.2 *Sottosuccessioni*

Definizione 4.2.5. Una **sottosuccessione** di $\{a_n\}$ è la composizione di $a \colon \mathbb{N} \to X$ con un'applicazione *strettamente crescente* $\begin{array}{l} k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto k(n) \end{array}$. Si indica con $\left\{a_{k_n}\right\}$.

Lemma 4.2.0. ▲ Sia $\{a_n\}$ una successione su X e $p \in X$. Valgono le seguenti implicazioni:

$$\text{1 } \{a_n\} \text{ converge a } p \tag{4.8}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{2 } \{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \tag{4.9}$$

$$\Downarrow \ *$$

$$\textcircled{3}\ p \text{ è un punto di accumulazione per } \{a_n\} \tag{4.10}$$

$$\Downarrow \textcircled{**}$$

$$\textcircled{4}\ p \in \overline{A} \text{ dove } A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \tag{4.11}$$

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2) La sottosuccessione convergente è la successione stessa.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Sia $\left\{a_{k(n)}\right\}$ una sottosuccessione convergente a p e sia $U \in I(p)$.
Se $a_{k(n)}$ converge a p si ha che $\exists n_0 : a_{k(n)} \in U,\ \forall n \geq n_0$. Poichè $k(n)$ è strettamente crescente, $\exists n_1 : k(n) \geq N,\ \forall n \geq n_1$. Allora preso:

$$n = \max\{n_0,\ n_1\}$$

Abbiamo che $a_{k(n)} \in U,\ k(n) \geq N$.[a] Segue che p è punto di accumulazione per $\{a_n\}$.
(3) $\Longrightarrow$ (4) $p \in \overline{A} \iff \forall U \in I(p)\ A \cap U \neq \varnothing$. Allora sia U intorno di p: voglia che $U \cap A \neq \varnothing$. Essendo p punto di accumulazione per $\{a_n\}$, $\exists n\ a_n \in U \Longrightarrow U \cap A \neq \varnothing$.

[a] L'intorno U è arbitrario.

Lemma 4.2.1. Sia X *primo-numerabile*, $\{a_n\}$ successione in X e $p \in X$. Allora vale anche il viceversa di (*), cioè:

$$\{a_n\} \text{ ha una sottosuccessione convergente a } p \iff p \text{ è di accumulazione per } \{a_n\} \tag{4.12}$$

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) Vale per (*).
$\Longleftarrow$) Sia $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sistema fondamentale di intorni di p numerabile per ipotesi (X primo-numerabile). Consideriamo i seguenti insiemi:

$$\tilde{U}_m := U_1 \cap \ldots U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- $\tilde{U}_m$ è intorno di p, in quanto intersezione *finita* di intorni di p.
- $\tilde{U}_m = U_1 \cap \ldots U_m \supseteq U_1 \cap \ldots U_m \cap U_{m+1} = \tilde{U}_{m+1}$.

Segue che $\left\{\tilde{U}_m\right\}$ è ancora un sistema fondamentale di intorni (numerabile) di p, infatti, se V è intorno di p, $\exists m : V \supseteq U_m \supseteq \tilde{U}_m$.
A meno di sostituire U_m con $\tilde{U}_m$, possiamo supporre che $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \ldots$.
Costruiamo una sottosuccessione di $\{a_n\}$ convergente a p. Sicuramente:

- $\exists k(1) \in \mathbb{N} : a_{k(1)} \in U_1$.
- $\exists k(2) \geq k(1) + 1 : A_{k(2)} \in U_2$.

E così via: $\forall m\ \exists k(m) \geq k(m-1) + 1$ tale che $a_{k(m)} \in U_m$, ottenendo una sottosuccessione $\left\{a_{k(m)}\right\}$. Notiamo in particolare che:

$$☺ \text{ Se } m_2 \geq m_1, \text{ allora } a_{k(m_2)} \in U_{m_2} \subseteq U_{m_1}.$$

Mostriamo che $\{A_{k(n)}\}$ converge a p.
Sia V intorno di p. Dal sistema fondamentale di intorni $\exists m_0$ tale che $U_{m_0} \subseteq V$. Da ☺ si ha che $\forall m \geq m_0$ $a_{k(m)} \in U_{m_0} \subseteq V$.

Proposizione 4.2.0. **Caratterizzazione della chiusura in termini di successioni.**
Sia X uno spazio topologico *primo-numerabile*. Sia $Y \subseteq X$ e $p \in X$. Sono equivalenti

- Esiste una successione in Y convergente a p.
- p è di accumulazione per una successione in Y.
- $p \in \overline{Y}$

Dimostrazione.
1 $\implies$ 2 Non è necessario che X sia primo-numerabile, è immediato dal lemma 4.2 ▲ (pag. 42).
2 $\implies$ 3 Non è necessario che X sia primo-numerabile. Se p di accumulazione per $\{a_n\}$ con $a_n \in y$ $\forall n \implies A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$. Allora segue dal lemma 4.2 ▲ (pag. 42) che $p \in A = \overline{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{Y}$
3 $\implies$ 1 Sia $\{U_n\}$ un sistmea fondamentale di intorni di p tale che $U_n \supseteq U_{n+1}$ $\forall n$. Allora:

$$p \in \overline{Y} \implies \forall n\ Y \cap U_n \neq \varnothing \implies \forall n\ \exists y_n \in Y \cap U_n$$

In modo analogo a ☺ (pag. 43), se $n_2 \geq n_1$, allora $y_{n_2} \in U_{n_2} \subseteq U_{n_1}$. Allora $\{y_n\}$ è una successione in Y, mostriamo che converge a p.
Sia V intorno di p. Dal sistema fondamentale di intorni $\exists n_0$ tale che $U_{n_0} \subseteq V$. Dal ragionamento analogo a ☺ si ha che $\forall n \geq n_0$ $y_n \in U_{n_0} \subseteq V$.

4.3 Successioni e compatti

Proposizione 4.3.0. (Manetti, 4.46)
Sia X spazio topologico e sia $K_n \subseteq X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ un sottospazio chiuso, *compatto* e non vuoto. Supponiamo inoltre che:

$$K_n \supseteq K_n + 1\ \forall n \implies K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

Allora: $\bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \varnothing$.

Dimostrazione. Iniziamo in K_1. Consideriamo $A_n := K_1 \setminus K_n$:

- K_n chiuso in $X \implies K_n$ chiuso in K_1. Allora A_n completementare di un chiuso, dunque aperto in K_1 $\forall m \geq 1$.
- $K_n \supseteq K_{n+1} \implies A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

Sia allora $N \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = A_N = K_1 \setminus \underbrace{K_N}_{\neq\varnothing} \subsetneqq K_1$$

Allora nessuna unione *finita* degli A_n ricopre K_1, cioè $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subsetneqq K_1$, altrimenti $\{A_n\}$ sarebbe un ricoprimento aperto di K_1 che *non* ammette sottoricoprimento finito (assurdo, in quanto K_1 è *compatto*!).

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} K_1 \setminus K_n = K_1 \setminus \left(\bigcap_{n\geq 1} K_n \right) \subsetneq K_1 \implies \bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \varnothing$$

LEMMA 4.3.0. In uno spazio topologico *compatto* X ogni successione in X ha punti di accumulazione.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_n\}$ successione in X; per definizione:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per } \{a_n\} \iff \forall U \in I(p),\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : a_n \in U$$

Per N fissato sia $A_N := \{a_n \mid n \geq N\} \subseteq X$. Allora:

$$p \in X \text{ punto di accumulazione per}$$
$$\{a_n\} \iff \forall U \in I(p),\ \forall N \in \mathbb{N}\ U \cap A_N \neq \varnothing \iff \forall N \in \mathbb{N},\ p \in \overline{A_N} := C_N$$

Dunque $\{$punti di accumulazione di $\{a_n\}\} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} C_N$ e:

$$\{a_n\} \text{ ha punti di accumulazione } \iff \textstyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} C_N \neq \varnothing$$

- $A_B \neq \varnothing$ per definizione, dunque C_N è un chiuso non vuoto.
- X è compatto, C_N chiuso in X compatto $\implies C_N$ *compatto*.

Poiché $A_N = \{a_n \mid n \geq N\} \supseteq A_{N+1} = \{a_n \mid n \geq N+1\}$, si ha:

$$C_N = \overline{A_N} \subseteq \overline{A_{N+1}} = C_{N+1}$$

Abbiamo trovato una successione di compatti contenuto l'uno nel successivo. Allora per la proposizione 4.4 (pag. 44, (MANETTI, 4.46)). si ha che $\bigcap_{n\geq 1} C_N \neq \varnothing$. Segue che esiste un punto di accumulazione per la successione.

4.3.1 *Compattezza per successioni*

DEFINIZIONE 4.3.0. Sia X spazio topologico. X si dice **compatto per successioni** se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

OSSERVAZIONE. 4.4. *Per il lemma 4.2 ▲ (pag. 42), se X è compatto per successioni allora ogni successione in X ha un punto di accumulazione.*

LEMMA 4.3.1. Sia X *primo-numerabile.* Allora:

1. X compatto per successioni $\iff$ Ogni successione in X ha un punto di accumulazione.
2. X compatto $\implies$ X compatto per successioni.

Dimostrazione.

I $\implies$) Vale per l'osservazione precedente.
$\impliedby$) Vale per il lemma 4.3, pag. 43: se ogni successione ha un punto di accumulazione in X primo numerabile, allora ogni sottosuccessione ammette una sottosuccessione convergente a p, cioè X è compatto per successioni.

II Se X è compatto, allora ogni successione in X ha dei punti di accumulazione e per il punto 1) segue che X è compatto per successioni.

Proposizione 4.3.1. Caratterizzazione della compattezza in termini di successioni
Sia X uno spazio topologico a base numerabile. Allora sono equivalenti:

1. X compatto.
2. X compatto per successioni
3. Ogni successione in X ammette un punto di accumulazione.

Dimostrazione. Sappiamo già che 2) $\iff$ 3) e 1) $\implies$ 2) dal lemma precedente. Dobbiamo dimostrare 2) $\implies$ 1). Dimostriamo per contronominale ($\neg 1) \implies \neg 2)$): se X *non* è compatto, allora X non è compatto per successioni, cioè esiste una sottosuccessione in X che *non* ha alcuna sottosuccessione convergente.

- X *non* compatto $\implies \exists \tilde{\mathscr{A}}$ ricoprimento aperto di X che *non* ha sottoricoprimenti finiti.
- X a *base numerabile* $\implies \exists \mathscr{A}$ sottoricoprimento di $\tilde{\mathscr{A}}$ che sia numerabile.

Poiché ogni sottoricoprimento di $\mathscr{A}$ è anche un sottoricoprimento di $\tilde{\mathscr{A}}$, significa che $\mathscr{A}$ *non* ha sottoricoprimenti finiti. Definiamo:

$$\mathscr{A} := \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Allora:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j \subsetneq X \implies \exists x_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Costruisco così una successione $\{x_n\}$ successione in X tale per cui:

$$☹\ x_n \notin A_j \ \forall j \leq n.$$

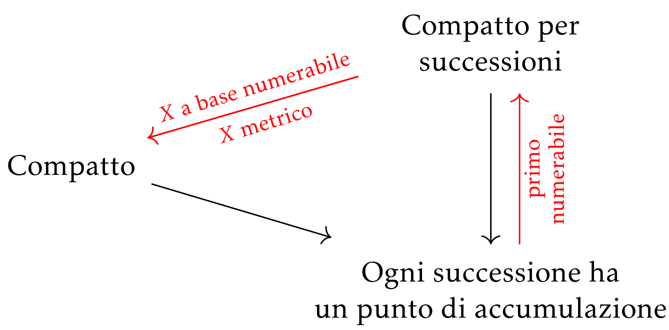
Mostriamo che $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti. Sia $\left\{x_{k(n)}\right\}$ una sottosuccessione arbitraria di $\{x_n\}$ e sia $p \in X$, mostriamo che essa non converga ad un qualunque p.

- $\mathscr{A}$ è un (sotto)ricoprimento di $X \implies \exists N : p \in A_N$
- Da ☹ (pag. 46) abbiamo che $x_n \notin A_N \ \forall n \geq N$ (dato che $x_n \ /A_j \ \forall j \leq n$, in particolare in A_N per ogni $n \geq N$); si ha allora $x_{k(n)} \notin A_n \ \forall n : k(n) \geq N$

Essendo $k(n)$ crescente, $\exists n_0 : k(n) \geq N \ \forall n \geq n_0$. Segue che se $n \geq n_0$ allora $x_k(n) \notin A_N$
Poiché A_N è intorno di p, segue che $\left\{x_{k(n)}\right\}$ non converge a p.

Teorema 4.3.0. Sia X spazio metrico. Allora:

$$X \text{ compatto} \iff X \text{ compatto per successioni} \tag{4.13}$$



4.4 SPAZI METRICI COMPLETI

Definizione 4.4.0. Sia $(X,\ d)$ uno spazio metrico. Una successione $\{a_n\}$ si dice **di Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : d\left(a_n,\ a_m\right) < \varepsilon,\ \forall n,\ m \geq n_0 \tag{4.14}$$

Definizione 4.4.1. Uno spazio metrico $(X,\ d)$ si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Osservazione. 4.5.

1. *Ogni successione convergente è di Cauchy.*
2. *Una successione di Cauchy è convergente se e solo se ha punti di accumulazione.*
3. *Una successione di Cauchy è convergente se ha una sottosuccessione convergente.*
4. *Se X è compatto, allora ogni successione di Cauchy è convergente.*
5. *Se X è spazio metrico compatto, allora X è spazio metrico completo; non è vero il viceversa.*

Dimostrazione.

I Se $a_n \to p$ per $n \to +\infty$ significa che:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : d\left(a_n,\ p\right) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$$

Considerati $n,\ m \geq n_0$ si ha:

$$d\left(a_n,\ a_m\right) \leq d\left(a_n,\ p\right) + d\left(p,\ a_n\right) < 2\varepsilon \tag{4.15}$$

Per l'arbitrarietà di ε vale la convergenza.

II $\Longrightarrow$) Sempre vera per 4.2 ▲ (pag. 42).
$\Longleftarrow$) Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy e sia p un punto di accumulazione.

Sia $\varepsilon > 0$: dalla definizione di successione di Cauchy $\exists n_0$ tale per cui $d(a_n, a_m) < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_0$.
Essendo p di accumulazione, $\exists n_1 \geq n_0$ tale per cui $d\left(p, a_{n_1}\right) < \varepsilon$. Allora, se $n \geq n_0$ si ha:

$$d(a_n, p) \leq d\left(a_n, a_{n_1}\right) + d\left(a_{n_1}, p\right) < 2\varepsilon$$

Dunque $\{a_n\}$ converge a p.

III Poiché X è metrico, X è primo-numerabile, dunque avere un punto di accumulazione è equivalente ad avere una sottosuccessione convergente.

IV Se X è compatto, ogni successione ha punti di accumulazione, in particolare quelle di Cauchy: per il punto 2) tutte le successioni di Cauchy risultano allora convergenti.

V Segue dal punto 4). Un controesempio del viceversa è R^n, dato che è completo ma non è compatto (si veda il teorema seguente).

Teorema 4.4.0. $\mathbb{R}^n$ in metrica euclidea è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ di Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Mostriamo che $\{a_n\}$ è eventualmente limitata[a]. Poiché la successione di Cauchy è definita per ogni ε, fissiamo $\varepsilon = 1$. Allora:

$$\exists n_0 : \|a_n - a_m\| \leq 1 \ \forall n, m \geq n_0$$

Sia $M := \max_{n_0, \ldots, n_0} \|a_n\|$. Se $n \geq n_0$ si ha:

$$\|a_n\| = \|a_n - a_{n_0} + a_{n_0}\| =\leq \|a_n - a_{n_0}\| + \|a_{n_0}\| \leq 1 + M$$

Questo significa che $\{a_n\} \subseteq \overline{B_{1+M}(0)}$. Questa palla chiusa è uno spazio metrico *indotto* in $\mathbb{R}^n$ e compatto, cioè è uno *spazio metrico completo*. Allora la successione di Cauchy, trovandosi in uno spazio metrico completo, converge in esso, e dunque converge anche in $\mathbb{R}^n$.

[a] Supponendo chiaramente che la successione sia ben definita, ci interessa solamente che la successione sia limitata dopo un n_0: prima di ciò ho un numero finito di termini $a_0, \ldots, a_{n_0} < \infty$ e posso chiaramente prendere una palla (chiusa) che li contenga, ad esempio di raggio $M + 1$ con M definito come nella dimostrazione.

Attenzione! La **completezza** *non* è una proprietà topologica! Per esempio, $\mathbb{R}$ e $(0, 1)$ con metrica euclidea sono omeomorfi rispetto alla topologia indotta dalla metrica, ma $\mathbb{R}$ abbiamo appena dimostrato che è completo, mentre $(0, 1)$ si può vedere che non lo è!

II

Omotopia

Capitolo 5

Omotopia

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, *UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

5.1 Lemma di incollamento

Lemma 5.1.0. Lemma di incollamento
Siano X, Y spazi topologici e $X = A \cup B$. Siano $f: A \to Y$ e $g: B \to Y$ continue tali che $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A \cap B$, cioè $f_{|A\cap B} = g_{|A\cap B}$.
Consideriamo l'**incollamento** $h: X \to Y$ definito da:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases} \tag{5.1}$$

Se A e B sono entrambi aperti in X, oppure se A e B sono entrambi chiusi in X, allora h è continua.

Dimostrazione. Supponiamo A e B aperti. Sia $U \subseteq Y$ aperto. Allora:

$$h^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\subseteq B} \cap \underbrace{g^{-1}(U)}_{\subseteq B}$$

Essendo f, g continue, segue che $f^{-1}(U)$ è aperto in A e $g^{-1}(U)$ è aperto in B.
In quanto A, B aperti, per definizione di aperto del sottospazio[a] $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(U)$ sono aperti su $X \implies h^{-1}(U)$ aperto.
Il caso di A e B chiuso è esattamente analogo.

[a] Poichè un aperto del sottospazio è dato dall'intersezione del sottospazio con un aperto di X, se abbiamo che anche il sottospazio è aperto di X, l'intersezione è aperta: in questo caso ogni aperto del sottospazio è anche aperto di X.

5.2 COMPONENTE CONNESSA E COMPONENTE C.P.A.

Riprendiamo la trattazione delle componenti connesse e **c.p.a.** introdotte nel capitolo **XXX**.

Definizione 5.2.0. Una **componente connessa** di X spazio topologico è uno spazio $C \subseteq X$ *connesso* tale per cui:

$$C \subseteq A \subseteq X \text{ con } A \text{ connesso} \implies C = A \tag{5.2}$$

Osservazione. 5.1.

- *Le componenti connesse formano una partizione di X.*
- *Se $x \in X$ si può definire la componente connessa che contiene x:*

$$C(x) = \bigcup \{C \subseteq X \mid x \in C,\ C \text{ connesso}\} \tag{5.3}$$

item Le componenti connesse possono essere viste come classi di equivalenza per la seguente relazione di equivalenza su X:

$$x,\ y \in X \qquad x \sim_C y \iff \exists C \subseteq X \text{ connesso} : x,\ y \in C \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo che la relazione è di equivalenza:

- Riflessiva: $x \sim_C x$ è vero, dato che $\{x\}$ è sempre un connesso.
- Simmetrica: ovvia dalla definizione.
- Transitiva: Supponiamo $x \sim_C y$, $y \sim_C z$. Allora $\exists C,\ D \subseteq X$ connessi tale che $x,\ y \in C$ e $y,\ z \in D$. Allora $C \cup D$ contiene sia x che z. Inoltre, essendo $y \in C \cap D \implies C \cap D \neq \varnothing$, dunque $C \cup D$ è un connesso: vale $x \sim_C z$.
  Mostriamo che le classi di equivalenza sono le componenti connesse per x.
  $\subseteq$) Se $C \subseteq X$ è una componente connessa, allora $\forall x, y \in C$ si ha $x \sim_C y$, cioè C è interamente contenuta in $C_0 = [x] = [y]$ classe di equivalenza per $\sim_C$: $C \subseteq C_0$.
  $\supseteq$) Sia $z \in C_0$ classe di equivalenza e sia $x \in C$ componente connessa. Allora: $x \sim_C z \implies \exists T \subseteq X$ connesso : $x,\ z \in T$.
  Consideriamo $C \cup T$. C e T sono connessi, $x \in C \cap T \implies C \cap T \neq \varnothing$: $C \cup T$ è ancora connessa. In quanto C è componente connessa, dato che $C \subseteq C \cup T$ per definizione segue che $C = C \cup T$, cioè $T \subseteq C$. Ma allora $z \in C$ e segue che $C_0 \subseteq C$.

III

Appendici

CAPITOLO 6

NOTE AGGIUNTIVE

"BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP."

NON UN ROBOT, *UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.*

Riportiamo alcune note e dimostrazioni aggiuntive che possono risultare utili al lettore.

6.1 CAPITOLO 6: SUCCESSIONI

La dimostrazione seguente sulla non prima-numerabilità del quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ è adattata da Brian M. Scott [**scott:nonum**] su Mathematics Stack Exchange.

Dimostrazione. Si consideri la contrazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ad un punto, cioè il quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e si definisca la classe di equivalenza degli interi come $[0]$.
Sia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di intorni aperti di $[0]$; cerchiamo un intorno aperto di $[0]$ che non ne contiene nessuno come sottoinsieme, mostrano in tal modo che non formano un sistema fondamentale di intorni di $[0]$ e pertanto che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ non è primo-numerabile per $[0]$.
Sia π la mappa quoziente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$ esiste un $\varepsilon_{n,k} \in (0,1)$ tale che:

$$U_n \supseteq \pi\left[\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}(k-\varepsilon_{n,k}, k+\varepsilon_{n,k})\right]$$

Per $k \in \mathbb{Z}$ sia $\delta_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{k,k}$, e sia:

$$V = \pi\left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k-\delta_k, k+\delta_k)\right]$$

Chiaramente V è un intorno aperto di $[0]$, e vogliamo dimostrare che $U_n \nsubseteq V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per mostrare ciò, fissiamo $n \in \mathbb{N}$; si ha $\delta_n < \varepsilon_{n,n}$, quindi possiamo sceglie un numero reale $x \in (n+\delta_n, n+\varepsilon_{n,n})$. Ma allora $\pi(x) \in U_n \setminus V$, e dunque $U_n \nsubseteq V$.