
APPUNTI DI GEOMETRIA 2

Anno Accademico 2020/2021

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUI BEEP BOOP”



INDICE

INDICE ii

I TOPOLOGIA GENERALE 1

- 1 SPAZI TOPOLOGICI 3
 - 1.1 Spazio topologico 3
 - 1.2 Distanza e spazi metrici 4
 - 1.3 Distanza e spazi metrici 6
 - 1.3.1 Norme esotiche 7
 - 1.4 Finezza: confronto di topologia 8
 - 1.5 Base della topologia 9
 - 1.6 Altri concetti topologici: chiusura, interno, frontiera e densità 10
 - 1.7 Intorni 12
 - 1.8 Funzioni continue 12
 - 1.9 Topologia indotta 16
 - 1.10 Sottospazio topologico 16
 - 1.10.1 Immersione 17
 - 1.11 Prodotti topologici 18
 - 1.12 Assiomi di separazione: T_1 e Hausdorff 21
 - 1.13 Proprietà topologica 25

2 CONNESSIONE E COMPATTEZZA 27

II OMOTOPIA 29

I

TOPOLOGIA GENERALE

SPAZI TOPOLOGICI

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

1.1 SPAZIO TOPOLOGICO

DEFINIZIONE 1.1.0. Uno **spazio topologico** (X, \mathcal{T}) è un insieme X con una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ detta **topologia** che soddisfano i seguenti assiomi (detti **assiomi degli aperti**):

1. Il vuoto e l'insieme stesso sono aperti della topologia: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. L'unione arbitraria di aperti è un aperto: dati $\{A_i\}_{i \in I}$ tali che $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ ($|I| \leq \infty$), allora $\bigcup_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.
3. L'intersezione finita di aperti è aperta: dati $\{A_i\}_{i \in I}$ tali che $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ ($|I| < \infty$), allora $\bigcap_{i \in I} A_i = A \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di \mathcal{T} si dicono **aperti** della topologia.

DEFINIZIONE 1.1.1. Si può definire equivalentemente su X una topologia \mathcal{T} usando gli **assiomi dei chiusi**:

1. Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. L'unione finita di chiusi è un chiuso: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ ($|I| < \infty$), allora $\bigcup_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.
3. L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ ($|I| \leq \infty$), allora $\bigcap_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di \mathcal{T} si dicono **chiusi** della topologia.

OSSERVAZIONE. 1.1. Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per soli due sottoinsiemi qualunque, in quanto poi è verificato per induzione.

ESEMPIO.

- **Topologia discreta:** $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, tutti gli insiemi sono aperti.
- **Topologia banale:** $\mathcal{T} = \emptyset, X$, gli unici aperti sono banali.

1.2 DISTANZA E SPAZI METRICI

DEFINIZIONE 1.2.0. Su un insieme X una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una **distanza** se:

1. **Positività della distanza:** $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. **Simmetria:** $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. **Disuguaglianza triangolare:** $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

DEFINIZIONE 1.2.1. Uno **spazio metrico** (X, d) è un insieme su cui è definita una distanza.

DEFINIZIONE 1.2.2. Definita la **palla aperta di centro** x come l'insieme degli elementi di X che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad (1.1)$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia** \mathcal{T}_d **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

ESEMPIO.

- Su un qualunque insieme X si può definire la *distanza banale*:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (1.2)$$

In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.

- Su $X = \mathbb{R}$ si può definire come distanza il *valore assoluto* $d(x, y) = |x - y|$, che induce la **topologia Euclidea** \mathcal{E}_{ucl} , definita con le palle aperte di raggio ε :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \quad (1.3)$$

nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{uc\ell}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su $X = \mathbb{R}^n$ si può definire come distanza la *norma Euclidea*: $d(x, y) = \|x - y\|$ che induce la *topologia Euclidea* $\mathcal{E}_{uc\ell}$ in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{uc\ell}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

ATTENZIONE! Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme X nel modo seguente:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in CF) \text{ se } X \setminus A \text{ è finito.}$$

$$C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso } (C \in CF) \text{ se } C \text{ è finito.}$$

Alcune osservazioni:

- Se un aperto A è tale se il suo complementare $\mathcal{C}A$ è finito, si ha che:

$$A = \mathcal{C}(\mathcal{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \quad (1.4)$$

In altre parole A è aperto è pari ad X privato al più di un numero finito di punti.

- Se X è finito, la topologia CF coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di X è finito e dunque un aperto.
- Se X è infinito, ad esempio \mathbb{R} , la topologia *non* è quella discreta: $[0, 1]$ per la topologia discreta è un chiuso ma per quella CF non lo è in quanto *non* è finito.

DEFINIZIONE 1.2.3. Si può definire equivalentemente su X una topologia \mathcal{T} usando gli **assiomi dei chiusi**:

1. Il vuoto e l'insieme stesso sono chiusi della topologia: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. L'unione finita di chiusi è un chiuso: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ ($|I| < \infty$), allora $\bigcap_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.
3. L'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso: dati $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che $C_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$ ($|I| \leq \infty$), allora $\bigcup_{i \in I} C_i = C \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di \mathcal{T} si dicono **chiusi** della topologia.

OSSERVAZIONE. 1.2. Per verificare il terzo assioma degli aperti (o, equivalentemente, il secondo dei chiusi) è sufficiente verificare che sia vero per soli due sottoinsiemi qualunque, in quanto poi è verificato per induzione.

ESEMPIO.

- **Topologia discreta:** $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, tutti gli insiemi sono aperti.
- **Topologia banale:** $\mathcal{T} = \emptyset, X$, gli unici aperti sono banali.

1.3 DISTANZA E SPAZI METRICI

DEFINIZIONE 1.3.0. Su un insieme X una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una **distanza** se:

1. *Positività della distanza:* $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. *Simmetria:* $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. **Disuguaglianza triangolare:** $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

DEFINIZIONE 1.3.1. Uno **spazio metrico** (X, d) è un insieme su cui è definita una distanza.

DEFINIZIONE 1.3.2. Definita la **palla aperta di centro** x come l'insieme degli elementi di X che soddisfano la seguente condizione:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad (1.5)$$

Ogni spazio metrico ha una **topologia** \mathcal{T}_d **indotta dalla distanza**, i cui aperti sono definiti come:

$$A \subseteq X \text{ aperto } (A \in \mathcal{T}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

ESEMPIO.

- Su un qualunque insieme X si può definire la *distanza banale*:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (1.6)$$

In questo modo, ogni punto è una palla aperta e dunque ogni sottoinsieme è un aperto, dando allo spazio la *topologia discreta*. In particolare, ogni insieme può essere uno spazio metrico.

- Su $X = \mathbb{R}$ si può definire come distanza il *valore assoluto* $d(x, y) = |x - y|$, che induce la **topologia Euclidea** \mathcal{E}_{ucl} , definita con le palle aperte di raggio ε :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \quad (1.7)$$

nel seguente modo:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

- Su $X = \mathbb{R}^n$ si può definire come distanza la *norma Euclidea*: $d(x, y) = \|x - y\|$ che induce la *topologia Euclidea* \mathcal{E}_{ucl} in modo analogo al caso precedente.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto } (A \in \mathcal{E}_{ucl}) \text{ se } \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

ATTENZIONE! Non tutte le topologie sono indotte da una distanza! Definiamo la **topologia dei complementari finiti** sull'insieme X nel modo seguente:

$A \subseteq \mathbb{R}$ aperto ($A \in CF$) se $X \setminus A$ è finito.

$C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso ($C \in CF$) se C è finito.

Alcune osservazioni:

- Se un aperto A è tale se il suo complementare $\mathcal{C}A$ è finito, si ha che:

$$A = \mathcal{C}(\mathcal{C}A) = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus \{\text{un numero finito di punti}\} \quad (1.8)$$

In altre parole A è aperto è pari ad X privato al più di un numero finito di punti.

- Se X è finito, la topologia CF coincide con la topologia discreta: ogni sottoinsieme di X è finito e dunque un aperto.
- Se X è infinito, ad esempio \mathbb{R} , la topologia *non* è quella discreta: $[0, 1]$ per la topologia discreta è un chiuso ma per quella CF non lo è in quanto *non* è finito.

1.3.1 Norme esotiche

Possiamo definire su \mathbb{R}^n una famiglia di distanze dette **norme**; qui di seguito ne elenchiamo alcune. Definiti i punti $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ abbiamo:

- **Norma infinito:** $d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$
- **Norma uno:** $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- **Norma due:** $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
- **Norma p:** $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$

Si ha inoltre $\lim_{p \rightarrow +\infty} d_p = d_\infty$.

Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \quad (1.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo senza perdere di generalità che $d_\infty(x, y) = |x_1 - y_1|$.

$$d_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} \geq \sqrt{|x_1 - y_1|^2} = |x_1 - y_1| = d_\infty(x, y)$$

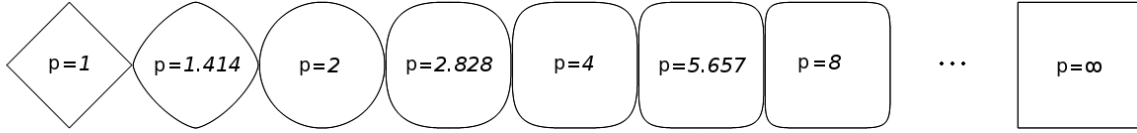
$$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_1 - y_1| = n|x_1 - y_1| = n d_\infty(x, y)$$

Notiamo che $|x_i - y_i|$ sono sempre positive, allora sia $a_i := |x_i - y_i|$. Segue che $a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)^2$ perché $a_i, \dots, a_n \geq 0$. Allora:

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq a_1 + \dots + a_n \implies d_2 \leq d_1$$

Queste disuguaglianze danno le seguenti inclusioni¹:

$$B_1(\varepsilon) \subseteq B_2(\varepsilon) \subseteq B_\infty(\varepsilon) \subseteq B_1(n\varepsilon) \quad (1.10)$$



Questo ci porta a dire che le topologie indotte da queste distanze sono la stessa.

Preso adesso $X = \mathcal{C}([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$, esso è uno spazio vettoriale infinito, con $0_{\mathcal{C}} \equiv 0_{[0, 1]}$ (cioè la funzione *identicamente nulla*). In questo caso possiamo comunque adattare le norme precedenti con delle “somme infinite”, ovvero degli integrali.

■ **Norma infinito:** $d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$

■ **Norma uno:** $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

■ **Norma due:** $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$

■ **Norma p:** $d_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx}$

A differenza del caso su \mathbb{R}^n , ogni norma genera in realtà una topologia distinta!

1.4 FINEZZA: CONFRONTO DI TOPOLOGIA

DEFINIZIONE 1.4.0. Sia X un insieme e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ due topologie di X . Si dice che \mathcal{T}_1 è **meno fine** di \mathcal{T}_2 se tutti gli aperti della prima topologia sono aperti della seconda:

$$\forall A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2 \quad (1.11)$$

In modo analogo si dice anche che \mathcal{T}_2 è **più fine** di \mathcal{T}_1 .

In altre parole, una topologia più fine ha più aperti rispetto a quella confrontata.

ESEMPIO.

- La *topologia banale* è la *meno fine* di tutte, dato che ogni topologia contiene \emptyset, X .
- La *topologia discreta* è la *più fine* di tutte, dato che ogni topologia è contenuta in $\mathcal{P}(X)$.
- Su \mathbb{R} la topologia dei complementari finiti è *meno fine* di quella euclidea. Infatti un aperto $A \in CF$ su \mathbb{R} è definito come $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, cioè:

$$A = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, +\infty)$$

Per n punti gli $n + 1$ intervalli ottenuti sono aperti della topologia euclidea; essendo unione di aperti, anche A è un aperto di \mathcal{E}_{ucl}

¹Qui usiamo la notazione $B_i(r)$ per indicare la palla aperta di raggio r e centro fissato x rispetto alla norma i .

OSSERVAZIONE. 1.3. Se definiamo due topologie \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 sono due topologie di un insieme X , l'intersezione $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è anch'essa una topologia di X e, per costruzione, è meno fine di \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 .

1.5 BASE DELLA TOPOLOGIA

DEFINIZIONE 1.5.0. Sia (X, \mathcal{T}) uno spazio topologico. \mathcal{B} è una **base** per \mathcal{T} se:

1. La base è costituita da aperti per la topologia \mathcal{T} : $A \in \mathcal{B} \implies A \in \mathcal{T} (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T})$.
2. Tutti gli aperti della topologia sono unioni degli aperti delle basi: $A \in \mathcal{T} \implies \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I: A = \bigcup_{i \in I} B_i$.

ATTENZIONE! La base \mathcal{B} non è detto che sia una topologia! Ad esempio, le unioni sono aperti della topologia, ma non è detto che siano interni alla base \mathcal{B} .

ESEMPIO.

- Nella topologia euclidea di \mathbb{R}^n una base è

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\} \quad (1.12)$$

Infatti, $\forall x \in A$ aperto $\exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq A$ per la definizione della topologia; segue che $A = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$.

- Nella topologia euclidea di \mathbb{R} una base è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1.13)$$

Un'altra base per \mathbb{R} nella \mathcal{E}_{ucl} è

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Dato $x \in \mathbb{R}$, esiste sempre una successione $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$ decrescente o crescente tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, essendo \mathbb{Q} denso in \mathbb{R}^a . Allora presa $a_n \searrow a$ e $b_n \nearrow b$, si ha:

$$(a, b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

Questa base con estremi razionali ha *infiniti elementi*, ma in *misura minore* rispetto a quella ad estremi reali.

^aPer una discussione più approfondita a riguardo, si guardi sez. XXX a pag. XXX.

TEOREMA 1.5.0. TEOREMA DELLE BASI. (MANETTI, 3.7)

Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X . \mathcal{B} è la base di un'unica topologia se e solo se:

1. L'insieme X deve essere scritto come unione di elementi della famiglia: $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
2. Per ogni punto dell'intersezione di elementi della famiglia deve esserci un'altro

elemento di essa che contiene il punto ed è sottoinsieme dell'intersezione:

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in A \cap B \quad \exists C \in \mathcal{B} : x \in C \subseteq A \cap B \quad (1.14)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{B} la famiglia di sottoinsiemi che verifica i punti 1 e 2. Allora devo trovare una topologia di cui \mathcal{B} è base. Definiamo \mathcal{T} tale che:

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathcal{B}$$

Verifichiamo gli assiomi degli aperti su \mathcal{T} .

- I $X \in \mathcal{T}$ per ipotesi 1, $\emptyset \in \mathcal{T}$ perché è l'unione sugli insiemi di indici vuoto ($I = \emptyset$).
- II Sia $A_i = \bigcap_j B_{ij}$, con $B_{ij} \in \mathcal{B}$. Allora:

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i \left(\bigcap_j B_{ij} \right) = \bigcap_{i,j} B_{ij} \implies \bigcap_{i,j} B_{ij} \in \mathcal{T}$$

- III Sia $A, B \in \mathcal{T}$, cioè $A = \bigcap_i A_i$ e $B = \bigcap_j B_j$ con $A_i, B_j \in \mathcal{B}$. Allora:

$$A \cap B = \left(\bigcap_i A_i \right) \cap \left(\bigcap_j B_j \right) = \bigcap_{i,j} \left(\underbrace{A_i \cap B_j}_{\in \mathcal{T} \text{ per l'ipotesi 2}} \right) \in \mathcal{T}$$

ESEMPIO. Sia $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Verifichiamo che \mathcal{B} soddisfa il teorema appena enunciato.

- 1. $\mathbb{R} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, n)$.
- 2. Preso $[a, b) \cap [c, d)$ si ha che esso è \emptyset o è $[e, f)$, con $e = \max\{a, c\}$, $f = \min\{b, d\}$; in entrambi i casi l'intersezione è elemento di \mathcal{B} .

Esiste dunque una topologia su \mathbb{R} che ha base \mathcal{B} ; questa *non* è base per la topologia Euclidea, ad esempio, dato che gli intervalli semiaperti non sono inclusi in \mathcal{E}_{ucl} .

Notiamo inoltre che $(a, b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b \right)$, dunque la topologia definita \mathcal{B} comprende gli aperti della topologia Euclidea: \mathcal{E}_{ucl} è meno fine di questa topologia.

1.6 ALTRI CONCETTI TOPOLOGICI: CHIUSURA, INTERNO, FRONTIERA E DENSITÀ

Ricordiamo che, dato uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) e un sottoinsieme $A \subseteq X$, si ha:

- A aperto della topologia se $A \in \mathcal{T}$.
- A chiuso della topologia se $\mathcal{C}A = X \setminus A \in \mathcal{T}$.

ATTENZIONE! Essere aperto oppure essere chiuso *non si escludono a vicenda!* Un insieme può essere aperto, chiuso, entrambi o nessuno dei due. Ad esempio, il vuoto e l'insieme stesso sono aperti e chiusi allo stesso tempo, dato che per ipotesi sono aperti i loro

complementari $\mathcal{C}\emptyset = X \setminus \emptyset = X$ e $\mathcal{C}X = X \setminus X = \emptyset$ sono anch'essi aperti.

DEFINIZIONE 1.6.0. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **chiusura** \overline{A} di A è il più piccolo chiuso contenente A :

$$\overline{A} = \bigcup_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C \quad (1.15)$$

PROPRIETÀ:

- $A \subseteq \overline{A}$.
- \overline{A} è un chiuso in quanto intersezione (arbitraria) di chiusi.
- A è un chiuso $\iff A = \overline{A}$.

DEFINIZIONE 1.6.1. Un punto x è **aderente** ad A se $x \in \overline{A}$.

DEFINIZIONE 1.6.2. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. L'**interno** A° di A è il più grande aperto contenuto in A :

$$A^\circ = \bigcap_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ aperto}}} B \quad (1.16)$$

PROPRIETÀ:

- $A^\circ \subseteq A$.
- A° è un aperto in quanto unione (arbitraria) di aperti.
- A è un aperto $\iff A = A^\circ$.

DEFINIZIONE 1.6.3. Un punto x è **interno** ad A se $x \in A^\circ$.

DEFINIZIONE 1.6.4. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. La **frontiera** ∂A di A sono i punti della chiusura di A non contenuti nel suo interno o, in altri termini, i punti aderenti sia ad A sia al suo complementare.

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \quad (1.17)$$

PROPRIETÀ:

- $\partial A \subseteq \overline{A}$.
- ∂A è un chiuso.

DEFINIZIONE 1.6.5. Sia X spazio topologico e $A \subseteq X$. A è **denso** in X se $\overline{A} = X$ o, in altri termini, tutti i punti di X sono aderenti ad A .

ESEMPIO. Il più piccolo chiuso contenente \mathbb{Q} è \mathbb{R} , poiché ogni reale è aderente ai razionali. Dunque \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

1.7 INTORNI

DEFINIZIONE 1.7.0. Sia X spazio topologico e $x \in X$. V è un **intorno** di x se $\exists A$ aperto tale che $x \in A \subseteq V$ o, in altri termini, se x è interno ad U . Definiamo inoltre la **famiglia degli interni** di x $I(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$:

$$I(x) = \{V \subseteq X \mid V \text{ è intorno di } x\} \quad (1.18)$$

OSSERVAZIONE. 1.4. Dato $A \subseteq X$, per ogni $x \in A$ tale che A è intorno di x si può definire un aperto $A_x \subseteq A$, con $x \in A_x$. L'unione arbitraria di questi A_x risulta essere contenuta in A e pari al suo interno. Dunque, si può definire l'interno di A come $A^\circ = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$; segue che A è aperto se e solo se A è intorno di ogni punto in A .

LEMMA 1.7.0. PROPRIETÀ DEGLI INTORNI. (MANETTI, 3.20, 3.21)

1. Si possono estendere gli interni: $U \in I(x), U \subseteq V \implies V \in I(x)$
2. Le intersezioni di interni sono ancora interni: $U, V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)$
3. Caratterizzazione della chiusura per interni:
 $B \subseteq X$, allora $x \in \overline{B} \iff \forall U \in I(x) \quad U \cap B \neq \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE.

- I L'aperto A che soddisfa la definizione di $U \in I(x)$ è per costruzione contenuto anche in V , dunque A è un aperto che soddisfa la definizione di V intorno di x .
- II Definiti gli aperti $A_U \subseteq U, A_V \subseteq V$ che soddisfano la definizione di interni di x , l'intersezione $A = A_U \cap A_V$ è un aperto contenente x . Dato che $A = A_U \cap A_V \subseteq U \cap V$, $U \cap V$ per definizione di intorno di x .
- III Per contronominale.

$$\begin{aligned} x \notin \overline{B} &\iff x \notin B \wedge x \notin \partial B \\ &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \overline{B \cap X \setminus B} \\ &\iff x \in X \setminus B \wedge x \notin \partial(X \setminus B) \\ &\iff x \in (X \setminus B)^\circ \\ &\iff \exists U \in I(x) : x \in U \subseteq X \setminus B \\ &\iff \exists U \in I(x) : U \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.7.1. Sia X spazio topologico, $x \in X$ e $I(x)$ la famiglia degli interni di x . Una sottofamiglia $\mathcal{J} \subseteq I(x)$ è un **sistema fondamentale di interni** di x se $\forall U \in I(x) \exists V \in \mathcal{J} : V \subseteq U$.

1.8 FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE 1.8.0. Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice **continua** se la controimmagine di aperti in Y è un aperto in X :

$$\forall A \text{ aperto in } Y, f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \quad (1.19)$$

Alternativamente, f è continua se la controimmagine di chiusi in Y è un chiuso in X .

$$\forall C \text{ chiuso in } Y, f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \quad (1.20)$$

OSSERVAZIONE. 1.5.

- Si ha la definizione di continuità con i chiusi perché la controimmagine si “comporta bene” con i complementari:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

- È sufficiente verificare la definizione per gli aperti una base di Y perché la controimmagine si “comporta bene” con le unioni di insiemi:

$$f^{-1}\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$$

LEMMA 1.8.0. (MANETTI, 3.25)

Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ funzione. f è continua *iff* $\forall A \subseteq X \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per ogni funzione si ha:

- $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

\Rightarrow) Sia $A \subseteq X$. Dobbiamo dimostrare che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sappiamo che se un insieme è contenuto in un altro, lo stesso vale per le immagini e le controimmagini. Allora:

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq \overline{f(A)} \\ A &\subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \end{aligned}$$

$f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso (in X in quanto controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso) che contiene A . Ma allora anche la chiusura, che è il più piccolo chiuso contenente A , è contenuta in $f^{-1}(\overline{f(A)})$. Segue quindi:

$$\begin{aligned} \overline{A} &\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \\ f(\overline{A}) &\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)} \end{aligned}$$

\Leftarrow) Sia $C \subseteq Y$ chiuso e sia $A = f^{-1}(C)$. Dobbiamo dimostrare che A è chiuso in X .

Poiché $A \subseteq \bar{A}$ è vero per definizione, dimostriamo che $\bar{A} \subseteq A$. Per ipotesi:

$$\begin{aligned} f(\bar{A}) &\subseteq \overline{f(A)} \\ f(\overline{f^{-1}(C)}) &\subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \bar{C} = C \end{aligned}$$

Applicando nuovamente la controimmagine:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C)})) \subseteq f^{-1}(C) = A \end{aligned}$$

Dunque la controimmagine A di un chiuso C è un chiuso.

TEOREMA 1.8.0. (MANETTI, 3.26) La composizione di funzioni continue è continua.

$$f: Y \rightarrow Z, g: X \rightarrow Y \text{ continue} \implies f \circ g: X \rightarrow Z \text{ continua} \quad (1.21)$$

DIMOSTRAZIONE. La controimmagine della composizione di funzioni $f \circ g$ è definita come $f^{-1}(f \circ g) = g^{-1} \circ f^{-1}$. Allora A aperto in $Z \implies f^{-1}(A)$ aperto $\implies g^{-1}(f^{-1}(A))$ aperto.

DEFINIZIONE 1.8.1. (MANETTI, 3.27)

Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ funzione. Dato $x \in X$ f è **continua** in x se:

$$\forall U \in I(f(x)) \exists V \in I(x) : f(V) \subseteq U \quad (1.22)$$

Questa è la generalizzazione della definizione tradizionale della continuità affrontata in *Analisi UNO*.

TEOREMA 1.8.1. (MANETTI, 3.28)

Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ funzione. f è continua per aperti $\iff f$ è continua in $x \forall x \in X$.

DIMOSTRAZIONE. \implies) Sia $x \in X$ e $U \in I(f(x))$. Per definizione di intorno $\exists A$ aperto in Y tale che $f(x) \in A \subseteq U$. Basta porre $V = f^{-1}(A)$: per continuità è aperto in X e, dato che $x \in f^{-1}(A)$ perché $f(x) \in A$, allora V è intorno di x . Segue che $f(V) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$.

\impliedby) Sia $A \subseteq Y$ aperto. Dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(A)$ sia aperto. Preso $x \in f^{-1}(A)$ si ha che $f(x) \in A$; dunque A è, in quanto aperto, intorno di $f(x)$. Allora, poiché f è continua in x , $\exists V \in I(x)$ tale che $f(V) \subseteq A$.

Segue che $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è intorno di x poiché contiene un intorno V dello stesso punto. Dunque $f^{-1}(A)$ aperto perché è intorno di ogni suo punto.

DEFINIZIONE 1.8.2. Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ funzione.

- f è **aperta** se $\forall A$ aperto in X $f(A)$ è aperto in Y .

- f è **chiusa** se $\forall C$ chiuso in X $f(C)$ è chiuso in Y .

OSSERVAZIONE. 1.6. È sufficiente verificare la definizione di funzione aperta per gli aperti di una base di X perché l'immagine si "comporta bene" con le unioni di insiemi:

$$f\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f(A_i)$$

ATTENZIONE! Una funzione f aperta che non sia omeomorfismo non è necessariamente una funzione aperta. Si prenda $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x$ (la proiezione sulla prima coordinata):

- f è continua per ovvi motivi.
- f è aperta. Infatti, presa una base su \mathbb{R}^2 come $\{B_\varepsilon(x, y)\}$, si ha che $f(B_\varepsilon(x, y)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ che sono aperti in \mathbb{R} .
- f non è chiusa. Prendiamo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ e definiamo la funzione $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto xy$ continua; vediamo facilmente come $C = g^{-1}(\{1\})$ e, essendo 1 chiuso in \mathbb{R} , C è controimmagine continua di un chiuso e dunque chiuso. Si ha dunque $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che tuttavia non è un chiuso della topologia Euclidea in quanto non contiene infiniti punti (una base della \mathcal{E}_{ucl} è formata da intervalli, che dunque contengono infiniti punti).

DEFINIZIONE 1.8.3. Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ funzione. f è un **omeomorfismo** se è *biunivoca*, *continua* e la sua inversa è *continua*; più precisamente, esiste $g: Y \rightarrow X$ continua tale per cui $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$.
 Due spazi topologici si dicono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo fra i due; in notazione $X \cong Y$.

LEMMA 1.8.1. (MANETTI, 3.31)

Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ funzione *continua*. Allora vale:

1. f omeomorfismo $\iff f$ aperta e biettiva.
2. f omeomorfismo $\iff f$ chiusa e biettiva.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima condizione, la seconda è analoga.

\implies) Un omeomorfismo è biettivo per definizione. Dimostriamo dunque che f sia aperta, cioè $\forall A \in X$ aperto $f(A) \in Y$ è aperto. Ma definita $g: Y \rightarrow X$ l'inversa continua dell'omeomorfismo f (cioè $f^{-1} = g$), si ha che $\forall A \in X$ $g^{-1}(A) = f(A)$ è aperto.

\impliedby) f è già biettiva e continua per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che l'inversa $g: Y \rightarrow X$ sia continua, cioè $\forall A \in X$ aperto $g^{-1}(A) \in Y$ è aperto. Ma $g^{-1}(A) = f(A)$ che è aperto perché f è aperta.

1.9 TOPOLOGIA INDOTTA

DEFINIZIONE 1.9.0. Dati:

- Uno spazio topologico X .
- Un insieme Y .
- Una funzione $f: Y \rightarrow X$

Allora su Y si può definire la **topologia indotta** come la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono f continua.

1.10 SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO

DEFINIZIONE 1.10.0. Sia X uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Su Y si può definire la seguente *topologia di sottospazio*:

$$U \subseteq Y \text{ aperto in } Y \iff \exists V \subseteq X \text{ aperto in } X (V \in \mathcal{T}) : U = V \cap Y \quad (1.23)$$

Definita l'**inclusione** $i: Y \hookrightarrow X$, $y \mapsto y$, la topologia di sottospazio è la topologia indotta da i , cioè la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono continua l'inclusione.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la continuità dell'inclusione. Se A aperto in X , $i^{-1}(A) = A \cap Y$ (tutti gli elementi di A contenuti in Y) è aperto in Y per definizione.

DEFINIZIONE 1.10.1. Sia X uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Allora:

- $A \subseteq Y$ **aperto** in $Y \iff A = U \cap Y$ con U aperto in X .
- $C \subseteq Y$ **chiuso** in $Y \iff C = U \cap Y$ con U chiuso in X .
- Se \mathcal{B} è una base della topologia di $X \implies \mathcal{B}' := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è base della topologia di sottospazio.

OSSERVAZIONE. 1.7. Se $A \subseteq Y$ è aperto della topologia di X , allora A è aperto in Y poiché $A = A \cap Y$.

ESEMPIO. Sia $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$ in topologia Euclidea.

- $A = (\frac{1}{2}, 1)$ è aperto in Y in quanto è già aperto in X .
- $A = [\frac{1}{2}, 1]$ è chiuso in Y in quanto è già chiuso in X .
- $B = (\frac{1}{2}, 1]$ è aperto in Y in quanto si ha, ad esempio, $A = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap Y$.

LEMMA 1.10.0. (MANETTI, 3.55)

Sia $A \subseteq Y \subseteq X$ con X spazio topologico e Y sottospazio topologico. Definiamo:

- $\text{cl}_Y(A)$ = chiusura di A in Y .
- $\text{cl}_X(A)$ = chiusura di A in X .

Allora $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y$.

DIMOSTRAZIONE. Preso $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid C \text{ chiuso in } X \text{ e } A \subseteq C\}$, per definizione di chiusura si ha:

$$\mathcal{cl}_X(A) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

Ora sia $\mathcal{C}' = \{C \cap Y \mid C \in \mathcal{C}\}$. Allora, usando i chiusi del sottospazio:

$$\mathcal{cl}_Y(A) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}'} (C \cap Y) = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap Y = \mathcal{cl}_X(A) \cap Y = \mathcal{cl}_Y(A)$$

1.10.1 Immersione

DEFINIZIONE 1.10.2. Sia $f: X \rightarrow Y$ funzione tra X, Y spazi topologici. Se:

- f continua.
- f iniettiva

Allora f è un'**immersione** se e solo se ogni aperto in X è controimmagine di un aperto di Y per f , cioè se e solo se si ha che:

$$B \subseteq X \text{ è aperto in } X \iff B = f^{-1}(A), A \text{ aperto in } Y \quad (1.24)$$

OSSERVAZIONE. 1.8. Per costruzione f è immersione se la topologia su X è la topologia indotta, dunque la meno fine che rende f continua.

Se sull'immagine $f(X) \subseteq Y$ mettiamo la topologia di sottospazio di Y , si ha che

$$f: X \rightarrow Y \text{ immersione} \iff f_\bullet: X \rightarrow f(X) \text{ è omeomorfismo}$$

ESEMPIO. Esempio di *non* immersione.

$$\begin{aligned} [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Notiamo innanzitutto che $f([0, 1)) = S^1$. Si ha:

- f_\bullet è continua per ovvi motivi
- f_\bullet iniettiva, dato che l'unico caso problematico poteva essere $t = 1$ che *non* nel dominio (si avrebbe avuto infatti $f_\bullet(0) = f_\bullet(1)$).
- f_\bullet suriettiva per costruzione.

Tuttavia f_\bullet *non* è immersione, dato che f_\bullet^{-1} non è continua. Preso $P = (1, 0) \in S^1$, f_\bullet^{-1} non è continua in P . Infatti, gli intorno di 0 in $[0, 1)$ sono del tipo $U = [0, \varepsilon)$, dunque dovrei trovare $\forall U$ un intorno V di $P \in S^1$: $f_\bullet^{-1}(V) \subseteq U$.

Tuttavia, solo la parte superiore di $V \in I(P)$ ha la controimmagine interna ad U : la parte inferiore, poiché sono le immagini di punti prossimi all'estremo 1 del dominio, non hanno controimmagini in U . Pertanto, non abbiamo l'omeomorfismo di f_\bullet e dunque l'immersione.

DEFINIZIONE 1.10.3. Sia $f: X \rightarrow Y$ funzione tra X, Y spazi topologici.

- f si dice **immersione aperta** se f è chiusa.
- f si dice **immersione chiusa** se f è aperta.

LEMMA 1.10.1. MANETTI, 3.59

Sia $f: X \rightarrow Y$ funzione *continua* tra X, Y spazi topologici.

1. f iniettiva e aperta $\implies f$ è immersione (aperta)
2. f iniettiva e chiusa $\implies f$ è immersione (chiusa)

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il caso chiuso, il caso aperto è analogo. Preso $C \subseteq X$ chiuso, sappiamo che $f(C)$ è chiuso in Y , ma possiamo sempre dire che $f(C) = f(C) \cap f(X)$ in quanto $f(C) \subseteq f(X)$. Dunque $f(C)$ è un chiuso del sottospazio $f(X)$. Segue che ogni chiuso di C è un chiuso dell'immagine di f , dunque $f_\bullet: X \rightarrow f(X)$ è:

- Continua perché lo è f .
- Biunivoca perché f_\bullet è iniettiva in quanto lo è f e suriettiva per definizione.
- Chiusa per costruzione.

f_\bullet è dunque omeomorfismo ed f è immersione (chiusa).

1.11 PRODOTTI TOPOLOGICI

DEFINIZIONE 1.11.0. Siano P, Q spazi topologici e $P \times Q$ il suo prodotto cartesiano. Definite le **proiezioni**:

$$\begin{aligned} p: P \times Q &\rightarrow P \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} q: P \times Q &\rightarrow Q \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned} \tag{1.27}$$

La **topologia prodotto** \mathcal{P} è la topologia *meno fine* fra quelli che rendono p e q *continue*. In particolare, ricordando l'osservazione 1.3, la topologia prodotto è l'intersezione di *tutte* le topologia che rendono continue p e q .

TEOREMA 1.11.0. MANETTI, 3.61

1. Una *base* della topologia \mathcal{P} è data dagli insiemi della forma $U \times V$ dove $U \subseteq P$ aperto, $V \subseteq Q$ aperto.
2. p, q sono aperte; inoltre $\forall (x, y) \in P \times Q$ le restrizioni:

$$\begin{aligned} p|: P \times \{y\} &\rightarrow P \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned} q|: \{x\} \times Q &\rightarrow Q \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned} \tag{1.29}$$

Sono *omeomorfismi*.

3. Data $f: X \rightarrow P \times Q$ con X spazio topologico, si ha che:

$$f \text{ continua} \iff f_1 = p \circ f, f_2 = q \circ f \text{ continue} \quad (1.30)$$

DIMOSTRAZIONE.

I Dimostriamo che:

- A) La famiglia $\{U \times V\}$ è base per una topologia \mathcal{T} .
- B) \mathcal{P} è meno fine di \mathcal{T} .
- C) \mathcal{T} è meno fine di \mathcal{P} .

In questo modo avremo che la topologia \mathcal{T} è la topologia prodotto \mathcal{P} e ne conosceremo una base.

- a) Segue dal teorema delle basi 1.1 (Manetti, 3.7). Infatti
 - i. $P \times Q$ appartiene alla famiglia $\{U \times V\}$, dato che per definizione gli insiemi stessi P e Q sono aperti.
 - ii. L'intersezione di due elementi della famiglia appartiene alla famiglia: $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.
- b) Per definizione \mathcal{P} è la meno fine fra tutte le topologie sul prodotto. Dunque, per dimostrare A) basta vedere che p, q sono continue rispetto alla topologia \mathcal{T} .

Preso la proiezione p , sia $U \subseteq P$ aperto. Si ha che $p^{-1}(U) = U \times Q$ è aperto in \mathcal{T} in quanto è prodotto di aperti; in particolare sta nella base! Dunque p è continua, e un ragionamento analogo vale per q .

- c) Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di \mathcal{T} è anche aperto di \mathcal{P} . Presi $U \subseteq P, V \subseteq Q$ allora:

$$U \times V = (U \cap P) \times (V \cap Q) = (U \times P) \cap (V \times Q) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

Poichè p, q sono continue e U, V sono aperti, anche $p^{-1}(U), q^{-1}(V)$ sono aperti; segue che la loro intersezione è aperta e dunque $U \times V$ è aperto della topologia \mathcal{T} .

- II Dimostriamo il caso con $p|$, dato che il caso con $q|$ è analogo. Preso un aperto della base $U \times V$, studiamo gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$.

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \notin V \\ U \times \{y\} & \text{se } y \in V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$ sono tutte e solo le unioni di $U \times \{y\}$, al variare di U di aperti dello spazio P . Si ha dunque:

$$p|(U \times \{y\}) = U$$

Dunque, essendo $p|$ continua perché restrizione della proiezione (che è continua per definizione), biettiva per costruzione e aperta per i risultati appena ottenuti si ha che $P \times \{y\}$ e P sono omeomorfi, cioè $p|$ è omeomorfismo.

Per dimostrare che p sia aperta, preso A aperto in $P \times Q$, si ha:

$$p(A) = p \left[\bigcap_{y \in Q} (A \cap P \times \{y\}) \right] = \bigcap_{y \in Q} p(A \cap P \times \{y\}) \quad (1.31)$$

Per i ragionamenti della prima parte, $A \cap P \times \{y\}$ è aperto di $P \times \{y\}$ e sappiamo dunque che $p|_{(A \cap P \times \{y\})}$ è aperto: ne segue che $p(A \cap P \times \{y\})$ è aperto in P al variare di y . Allora anche $p(A)$ è aperto (in quanto è unione di aperti) e dunque p è aperta.

- III \Rightarrow) Poiché $f: X \rightarrow P \times Q$, $p: P \times Q \rightarrow P$ e $q: P \times Q \rightarrow Q$ sono continue, le composizioni $f_1 = p \circ f: X \rightarrow P$, $f_2 = q \circ f: X \rightarrow Q$ sono banalmente continue.
 \Leftarrow) Dobbiamo dimostrare che f sia continua. Sia $A = U \times V \subseteq P \times Q$ aperto della base:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}(p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)) = f^{-1}(p^{-1}(U)) \cap f^{-1}(q^{-1}(V)) \\ &= (pf)^{-1}(U) \cap (qf)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Per ipotesi pf , qf sono continue, dunque loro controimmagini di aperti sono ancora aperti; inoltre, essendo la loro intersezione un aperto, segue l'implicazione.

PROPOSIZIONE 1.11.0. Siano X , Y spazi topologici e $X \times Y$ il prodotto. Allora:

1. Date le basi \mathcal{B} della topologia di X e \mathcal{C} della topologia di Y , allora:

$$\mathcal{D} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{C}\} \quad (1.32)$$

è una base per la topologia prodotto.

2. Dati $x \in X$, $y \in Y$, siano $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di interni di x e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un sistema fondamentale di interni di y . Poniamo $W_{ij} := U_i \times V_j \subseteq X \times Y$. Allora:

$$\mathcal{W} = \{W_{ij}\}_{j \in J} \quad (1.33)$$

è un sistema fondamentale di interni di $(x, y) \in X \times Y$.

3. Se $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, allora $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare, il prodotto di chiusi è chiuso.

DIMOSTRAZIONE.

- I Segue dalla dimostrazione dal primo punto del teorema 1.4 (MANETTI, 3.61).
 II Per definizione di sistema fondamentale di interni si ha:

$$\begin{aligned} \forall U \in I(x) \exists U_i \in \mathcal{U} : U_i \subseteq U \\ \forall V \in I(y) \exists V_j \in \mathcal{V} : V_j \subseteq V \end{aligned}$$

\Rightarrow) Per ogni intorno U di x e V di y , si ha $W \in I(x, y)$. Inoltre, presi gli interni U_i e V_j definiti come sopra, si ha che $W_{ij} = U_i \times V_j \in I(x, y)$ per definizione di topologia prodotto; segue che, per ogni intorno W di questa forma

esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U \times V \subseteq W$$

\Leftarrow) Prendiamo un intorno $W \in I(x, y)$, esiste un aperto $W' \subseteq W$. Poiché W' appartiene al prodotto $X \times Y$, si ha che $W' = \bigcap_k U_k \times V_k$ con U_k e V_k aperti di X e Y . Preso allora $(x, y) \in W'$, esiste gli aperti U_k e V_k che contengono rispettivamente x e y .

Segue dunque che $U_k \in I(x)$ e $V_k \in I(y)$ e dunque dal sistema fondamentale di intorni si ha che $\exists U_i \in \mathcal{U}, V_j \in \mathcal{V}$ tali che $U_i \subseteq U_k, V_j \subseteq V_k$. Allora definito $W_{ij} = U_i \times V_j$, si ha per ogni intorno W di (x, y) esiste W_{ij} tale che:

$$W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq U_k \times V_k \subseteq W' \subseteq W$$

III

$$\begin{aligned} (x, y) \in \overline{A \times B} &\iff \forall W \in I(x, y) \quad W \cap (A \times B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x), \forall V \in I(y) \quad U \cap A \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in I(x) \quad U \cap A \neq \emptyset, \forall V \in I(y) \quad V \cap B \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{A} \wedge y \in \overline{B} \iff (x, y) \in \overline{A \times B} \end{aligned}$$

In particolare, se A e B sono chiusi, avendo che $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$, otteniamo:

$$A \times B = \overline{A \times B} = \overline{A \times B}$$

OSSERVAZIONE. 1.9. Il prodotto di un numero **finito** di spazi topologici è pari al prodotto di due spazi:

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

In particolare una base di aperti di $X_1 \times \dots \times X_n$ è data da:

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \text{ aperto in } X_i\}$$

1.12 ASSIOMI DI SEPARAZIONE: T1 E HAUSDORFF

DEFINIZIONE 1.12.0. Uno spazio topologico X si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso, in particolare se e solo se tutti i punti sono chiusi.

In termini di intorni, X è **T1** se presi due punti distinti x e y esiste un intorno per il punto x che non contiene y e viceversa:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{aligned} &\exists U \in I(x) \quad y \notin U \\ &\exists V \in I(y) \quad x \notin V \end{aligned} \quad (1.34)$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che la definizione di T_1 implica quella per intorni e viceversa.

\Rightarrow) Siano $x, y \in X$ $x \neq y$. Per ipotesi $\{x\}$ è chiuso, dunque $V = X \setminus \{x\}$ è aperto. Poiché $y \neq x$, allora $y \notin \{x\} \Rightarrow y \in V$, ed essendo V aperto, $V \in I(y)$. Dunque V è intorno di y e banalmente $x \notin V$.

\Leftarrow) Dobbiamo dimostrare che $\forall x$ $\{x\}$ è chiuso, cioè $A = X \setminus \{x\}$ è aperto. Sia $y \in A$: $y \notin \{x\} \Rightarrow y \neq x$. Per ipotesi allora esiste un intorno V di y tale che $x \notin V$. Necessariamente si ha che $V \subseteq A$, dunque A è anch'esso intorno di y . Per l'arbitrarietà di y , A è intorno di ogni suo punto, dunque A è aperto.

OSSERVAZIONE. 1.10.

1. X è T_1 se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} U \quad (1.35)$$

2. Ogni spazio metrico è T_1

DIMOSTRAZIONE.

I \Rightarrow) Se X è T_1 , allora $\forall \{y\} \subseteq X$ è chiuso. Fissato x , prendiamo $y \in \bigcup_{U \in I(x)} U$. Allora $\forall U \in I(x)$ $\{y\} \cap U \neq \emptyset$. Da ciò segue che $x \in \overline{\{y\}} = \{y\}$, cioè $y = x$. Allora $\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} U$.

\Leftarrow) Per dimostrare che X è T_1 è sufficiente dimostrare che $\{x\}$ è chiuso, dato che ogni insieme finito in X si può vedere come unione finita di singoletti $\{x\}$ e per gli assiomi dei chiusi otteniamo un chiuso. In particolare, ci basta dimostrare che $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$, essendo l'altra implicazione ovvia per definizione.

Sia $y \in \overline{\{x\}}$. Per definizione di chiusura $\forall V \in I(y)$ $V \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset \Rightarrow \forall V \in I(y)$ $V \cap \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow \{x\} \subseteq V$, cioè l'intersezione dei V deve incontrare $\{x\}$:

$$\bigcup_{V \in I(y)} V \cap \{x\} = \{x\}$$

Per ipotesi, $\bigcup_{V \in I(y)} V = \{y\}$, dunque $\{y\} \cap \{x\} = \{x\} \Rightarrow y \in \{x\} \Rightarrow \overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$ e vale le ipotesi.

II Se X è metrico e $x \in X$, il sistema fondamentale di intorni di X sono gli intorni centrati in X di raggio arbitrario, cioè $B_\varepsilon(x)$. Allora:

$$\bigcup_{U \in I(x)} U = \bigcup_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}$$

E per la proposizione precedente si ha che X metrico è T_1 .

DEFINIZIONE 1.12.1. Uno spazio topologico X si dice di **Hausdorff** o T_2 se per ogni coppia

di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{matrix} : U \cap V = \emptyset \quad (1.36)$$

OSSERVAZIONE. 1.11.

1. X è di **Hausdorff** se e solo se per ogni punto $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} \overline{U} \quad (1.37)$$

2. Essere **Hausdorff** implica essere **T1**, ma non il viceversa.
 3. Ogni spazio metrico è di **Hausdorff**.

DIMOSTRAZIONE.

- I \implies) Sia X di **Hausdorff**. Fissato x , sia $y \in \overline{U}$, con $U \in I(x)$. Per definizione di \overline{U} , $\forall V \in I(y) \quad V \cap U \neq \emptyset$. Se $y \neq x$, si avrebbe un assurdo, dato che $\nexists V \in I(y) : U \cap V = \emptyset$ e dunque X non sarebbe di **Hausdorff**.
 \Leftarrow) Dobbiamo dimostrare che X è di **Hausdorff**. Sia $x \neq y$. Allora $y \notin \{x\} = \bigcup_{U \in I(x)} \overline{U}$. Allora, per definizione di chiusura si ha che $\forall U \in I(x) \exists V \in I(y) : V \cap U = \emptyset$. Segue dunque la tesi.
 II Avendo per ogni coppia di punti distinti due intorni disgiunti in quanto **Hausdorff**, banalmente i due intorni verificano la definizione di **T1** per intorni. Il viceversa *non* è vero: prendendo la topologia dei complementari finiti CF su uno spazio X non finito, essa è **T1** ma non **Hausdorff**.
 III Presi $x \neq y$, allora $d(x, y) = d > 0$. Dunque, per disuguaglianza triangolare si ha sempre che:

$$B_{d/4}(y) \cap B_{d/4}(y) = \emptyset$$

PROPOSIZIONE 1.12.0. 1.21MANETTI, 3.6.8

Sottospazi e prodotti di spazi di **Hausdorff** sono **Hausdorff**.

DIMOSTRAZIONE.

- Sia $Y \subseteq X$ con X spazio topologico, Y con la topologia di sottospazio. Prendiamo $x, y \in Y$ con $x \neq y$.
 X di **Hausdorff** implica che $\exists U, V \subseteq X$ intorni rispettivamente di x e y tali che $U \cap V = \emptyset$. Basta prendere allora $U \cap Y, V \cap Y$: sono intorni sempre di x e y in Y che restano comunque disgiunti.
- Sia $X \times Y$ con X, Y spazi topologici. Prendiamo $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Questo significa che $x_1 \neq x_2$ oppure $y_1 \neq y_2$.
 Scegliamo senza perdita di generalità $x_1 \neq x_2$. Essendo X di **Hausdorff**, $\exists U_1, U_2$

(intorni) aperti in X tali che $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Allora:

$$\begin{array}{l} U_1 \times Y \text{ intorno di } (x_1, y_1) \\ U_2 \times Y \text{ intorno di } (x_2, y_2) \end{array} \implies U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = (U_1 \cap U_2) \times (Y \cap Y) = \emptyset$$

TEOREMA 1.12.0. MANETTI, 3.69

Sia X spazio topologico. La **diagonale** $\Delta \subseteq X \times X$ è l'insieme delle coppie che hanno uguali componenti:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \quad (1.38)$$

Si ha:

X di **Hausdorff** $\iff \Delta$ chiuso in $X \times X$.

DIMOSTRAZIONE. \implies) Dobbiamo dimostrare che Δ è chiuso, cioè $X \times X \setminus \Delta$ aperto, ovvero $X \times X \setminus \Delta$ è intorno di ogni suo punto.

Preso $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta \implies x \neq y$ dato che *non* appartiene alla diagonale. Essendo X di **Hausdorff**, $\exists U, V : x \in U, y \in V$ (intorni) aperti disgiunti. Allora $U \times V \cap \Delta = \emptyset$: se così non fosse, ci potrebbero essere dei valori della diagonale che appartengono ad $U \times V$, cioè esisterebbe almeno una coppia (x', y') tale che $x' = y'$, ovvero gli intorni non sarebbero disgiunti. Allora $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$.

\impliedby) Siano $x, y \in X, x \neq y$. Allora $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$, che è aperto per ipotesi. Necessariamente esiste un aperto della base della topologia prodotto che contiene la coppia: $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$. Per gli stessi ragionamenti dell'altra implicazione, si ha che $x \in U, y \in V$ con U, V aperti (e dunque intorni) disgiunti. Segue che X è di **Hausdorff**.

PROPOSIZIONE 1.12.1.

1. Siano $f, g: X \rightarrow Y$ continue, Y di **Hausdorff**. Sia C il luogo dei punti dove f e g coincidono:

$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \quad (1.39)$$

Allora C è chiuso.

2. Sia $f: X \rightarrow X$ continua, X di **Hausdorff**. Sia $F_{ix}(f)$ il luogo dei **punti fissi** di f e g coincidono:

$$F_{ix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\} \quad (1.40)$$

Allora $F_{ix}(f)$ è chiuso.

3. Siano $f, g: X \rightarrow Y$ continue, Y di **Hausdorff** e $A \subseteq X$ *denso* in X . Allora

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x) \implies \forall x \in X \quad f(x) = g(x) \quad (1.41)$$

4. Sia $f: X \rightarrow Y$ continua, Y di **Hausdorff**. Sia Γ_f il **grafico** di f le insieme delle coppie $(x, f(x))$ formate dai punti del dominio e le corrispondenti immagini tramite f .

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \quad (1.42)$$

Allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$.

DIMOSTRAZIONE.

- I Definiamo la funzione $h: X \rightarrow X \times Y$
 $x \mapsto (f(x), g(x))$. Essa è continua perché le componenti sono continue; considerata la diagonale Δ_Y di $Y \times Y$, si ha che $C = h^{-1}(\Delta_Y)$ è la controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso e quindi chiuso.
- II Basta porre al punto $1 \ g = Id_X$.
- III Per ipotesi $A \subseteq h^{-1}(\Delta_Y)$. In quanto A è denso in X , $\overline{A} = X$. Dunque:

$$X = \overline{A} \subseteq \overline{h^{-1}(\Delta_Y)} = h^{-1}(\Delta_Y)$$

Questo è vero in quanto Y è di **Hausdorff** e la diagonale Δ_Y è un chiuso: segue che $h^{-1}(\Delta_Y)$ è chiuso e dunque pari alla sua chiusura. Si ha la tesi.

- IV Definiamo la funzione continua $l: X \times Y \rightarrow Y \times Y$
 $(x, y) \mapsto (f(x), y)$. Allora $\Gamma_f = l^{-1}(\Delta_Y)$ è un chiuso.

1.13 PROPRIETÀ TOPOLOGICA

DEFINIZIONE 1.13.0. Una **proprietà topologica** P è una caratteristica degli spazi topologici per cui se ogni spazio X che possiede quella proprietà P è omeomorfo ad uno spazio Y , allora anche Y ha quella proprietà (e viceversa):

$$X \cong Y \implies [X \text{ ha } P \iff Y \text{ ha } P] \quad (1.43)$$

In altre parole, una proprietà topologica è **invariante** rispetto agli omeomorfismi.

OSSERVAZIONE. 1.12. Per verificare che P è una proprietà topologica dati due spazi omeomorfi $X \cong Y$, basta in realtà verificare solo che se X ha la proprietà P allora anche Y la ha. Invece, si può verificare che due spazi **non** sono omeomorfi trovando una proprietà topologica che non condividono tra di loro.

ESERCIZIO. MANETTI, 3.56

Siano X, Y spazi topologici con Y di **Hausdorff**. Se esiste $f: X \rightarrow Y$ continua e iniettiva, allora X è di **Hausdorff**.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Essendo f iniettiva, $f(x) \neq f(y) \in Y$: in quanto Y è di **Hausdorff**, $\exists U, V$ (intorni) aperti disgiunti in Y che contengono rispettivamente $f(x)$ e $f(y)$.

Per continuità di f le controimmagini di questi intorni aperti sono aperti e per iniettività sono ancora disgiunti: $\exists f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ (intorni) aperti disgiunti che contengono rispettivamente x e y . Segue che X è di **Hausdorff**.

PROPOSIZIONE 1.13.0. Essere di **Hausdorff** è una proprietà topologica, ovvero:

$$X \cong Y \implies [X \text{ è di Hausdorff} \implies Y \text{ è di Hausdorff}]$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $f: X \rightarrow Y$ un omeomorfismo tra i due spazi. Allora f è per definizione continua e iniettiva. Per l'esercizio 1.1 (MANETTI, 3.56) segue che X di **Hausdorff** $\implies Y$ di **Hausdorff**.

TEOREMA 1.13.0. X, Y di **Hausdorff** $\iff X \times Y$ di **Hausdorff**.

DIMOSTRAZIONE. \implies) Si veda la proprietà (textscManetti, 3.6.8).

\impliedby) Si fissi $y_0 \in Y$. Definita la funzione $f: X \rightarrow X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$, essa è continua ed iniettiva, dunque per l'esercizio 1.1 (MANETTI, 3.56) segue che X è di **Hausdorff**. Definito $x_0 \in X$ e $f: Y \rightarrow X \times Y$, $y \mapsto (x_0, y)$, allo stesso modo si verifica che Y è di **Hausdorff**.

CAPITOLO 2

CONNESSIONE E COMPATTEZZA

“BEEP BOOP INSERIRE CITAZIONE QUA BEEP BOOP.”

NON UN ROBOT, UN UMANO IN CARNE ED OSSA BEEP BOOP.

II

OMOTOPIA

