目录

第 1 讲　墙角模型

如果一个多面体的各个顶点都在同一个球面上，那么称这个多面体是球的内接多面体，这个球称为多面体的外接球．有关多面体外接球的问题，是立体几何的一个重点与难点，也是高考考查的一个热点．考查学生的空间想象能力以及化归能力．研究多面体的外接球问题，既要运用多面体的知识，又要运用球的知识，解决这类问题的关键是抓住内接的特点，即球心到多面体的顶点的距离等于球的半径．并且还要特别注意多面体的有关几何元素与球的半径之间的关系，而多面体外接球半径的求法在解题中往往会起到至关重要的作用．

球的内切问题主要是指球外切多面体与旋转体，解答时首先要找准切点，通过作截面来解决．如果外切的是多面体，则作截面时主要抓住多面体过球心的对角面来作．当球与多面体的各个面相切时，注意球心到各面的距离相等即球的半径，求球的半径时，可用球心与多面体的各顶点连接，球的半径为分成的小棱锥的高，用体积法来求球的半径．

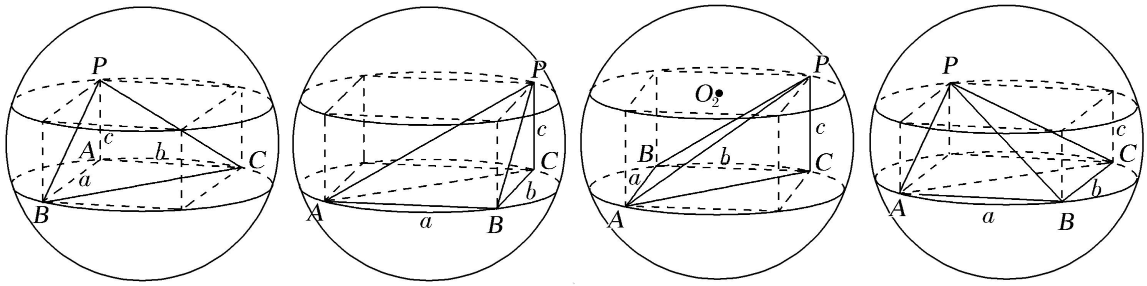
空间几何体的外接球与内切球十大模型

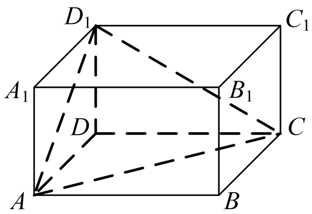
1．墙角模型；2．对棱相等模型；3．汉堡模型；4．垂面模型；5．切瓜模型；6．斗笠模型；7．鳄鱼模型；8．已知球心或球半径模型；9．最值模型；10．内切球模型．

【方法总结】

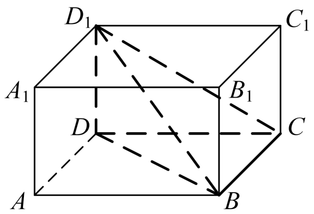
墙角模型是三棱锥有一条侧棱垂直于底面且底面是直角三角形模型，用构造法(构造长方体)解决．外接球的直径等于长方体的体对角线长(在长方体的同一顶点的三条棱长分别为 a，b，c，外接球的半径为 R，

则 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．)，秒杀公式：$R^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}$．可求出球的半径从而解决问题．有以下四种类型：

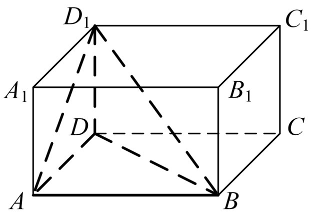




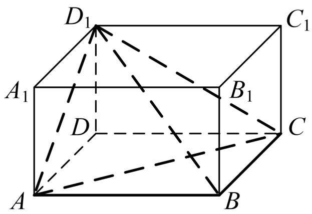
类型 I



类型 II



类型III



例外型

【例题选讲】

[例]　(1)已知三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点 A，B，C，D 都在球 O 的表面上，$AC\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，且 $AC=\sqrt{3}$，$BC=2$，$CD=\sqrt{5}$，则球 O 的表面积为(　　)

A．12π　　B．7π　　C．9π　　D．8π

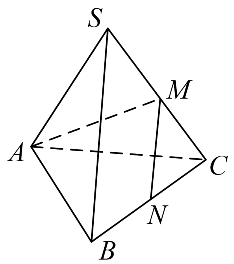
(2)若三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱两两垂直，且 $SA=2$，$SB=SC=4$，则该三棱锥的外接球半径为(　　)．

A．3　　B．6　　C．36　　D．9

(3)已知 S，A，B，C，是球 O 表面上的点，$SA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$SA=AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则球 O 的表面积等于(　　)．

A．4π　　B．3π　　C．2π　　D．π

(4)在正三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N 分别是棱 SC，BC 的中点，且 $AM\perp MN$，若侧棱 $SA=2\sqrt{3}$，则正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是________．



(5)(2019 全国Ⅰ)已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为(　　).

A．$8\sqrt{6}\pi$　　B．$4\sqrt{6}\pi$　　C．$2\sqrt{6}\pi$　　D．$\sqrt{6}\pi$

(6)已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小为$\frac{\pi}{3}$，点 $P\in\alpha$，点 P 在β 内的正投影为点 A，过点 A 作 $AB\perp l$，垂足为点 B，点 $C\in l$，$BC=2\sqrt{2}$，$PA=2\sqrt{3}$，点 $D\in\beta$，且四边形 $ABCD$ 满足$\angle BCD+\angle DAB=\pi$．若四面体 $PACD$ 的四个顶点都在同一球面上，则该球的体积为________．

【对点训练】

1．点 A，B，C，D 均在同一球面上，且 AB，AC，AD 两两垂直，且 $AB=1$，$AC=2$，$AD=3$，则该球的表面积为(　　)

A．7π　　　　B．14π　　　　C．$\frac{7}{2}\pi$　　　　D．$\frac{7\sqrt{14}\pi}{3}$

2．等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，将$\triangle ABC$ 沿 BC 边上的高 AD 折成直二面角 $B-AD-C$，则三棱锥 $B-ACD$ 的外接球的表面积为(　　)

A．5π　　　　B．$\frac{20}{3}\pi$　　　　C．10π　　　　D．34π

3．已知球 O 的球面上有四点 A，B，C，D，$DA\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$，$DA=AB=BC=\sqrt{2}$，则球 O 的体积等于________.

4．已知四面体 $P-ABC$ 四个顶点都在球 O 的球面上，若 $PB\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，且 $AC=1$，$AB=PB=2$，则球 O 的表面积为________.

5．三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$PA=PB=PC=3$，$PA\perp PB$，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为(　　)

A．$\dfrac{27}{2}\pi$　　B．$\dfrac{27\sqrt{3}}{2}\pi$　　C．$27\sqrt{3}\pi$　　D．27π

6．在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，四面体 $ABCD$ 各顶点的坐标分别为 $A(2，2，1)$，$B(2，2，-1)$，$C(0，2，1)$，$D(0，0，1)$，则该四面体外接球的表面积是(　　)

A．16π　　B．12π　　C．$4\sqrt{3}\pi$　　D．6π

7．在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=90°$，且 $AB=1$，$BD=\sqrt{2}$，若将其沿 BD 折起使平面 $ABD\perp$平面 BCD，则三棱锥 $A-BDC$ 的外接球的表面积为(　D　)

A．2π　　B．8π　　C．16π　　D．4π

8．在正三棱锥 $S-ABC$ 中，点 M 是 SC 的中点，且 $AM\perp SB$，底面边长 $AB=2\sqrt{2}$，则正三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为(　　)

A．6π　　B．12π　　C．32π　　D．36π

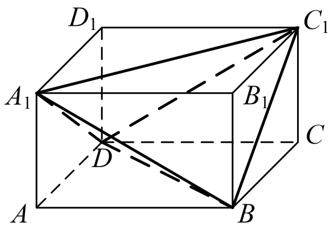
9．在古代将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑，已知四面体 $A-BCD$ 为鳖臑，$AB\perp$ 平面 BCD，且 $AB=BC=\frac{\sqrt{3}}{6}CD$，若此四面体的体积为$\frac{8\sqrt{3}}{3}$，则其外接球的表面积为________．

10．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 $3\sqrt{2}$的正方形，$AA_1=3$，E 是线段 A_1B_1 上一点，若二面角 $A-BD-E$ 的正切值为 3，则三棱锥 $A-A_1D_1E$ 外接球的表面积为________．

第 2 讲　对棱相等模型

【方法总结】

对棱相等模型是三棱锥的三组对棱长分别相等模型，用构造法(构造长方体)解决．外接球的直径等于长方体的体对角线长，即 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (长方体的长、宽、高分别为 a、b、c)．秒杀公式：$R^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{8}$(三棱锥的三组对棱长分别为 x、y、z)．可求出球的半径从而解决问题．



【例题选讲】

[例] (1)正四面体的各条棱长都为$\sqrt{2}$，则该正面体外接球的体积为________.

(2)在三棱锥$A-BCD$中，$AB=CD=2$，$AD=BC=3$，$AC=BD=4$，则三棱锥$A-BCD$外接球的表面积为________.

(3)在三棱锥$A-BCD$中，$AB=CD=6$，$AC=BD=AD=BC=5$，则该三棱锥的外接球的体积为____.

(4)在正四面体$A-BCD$中，E是棱AD的中点，P是棱AC上一动点，$BP+PE$的最小值为$\sqrt{7}$，则该正四面体的外接球的体积是(　　)

A．$\sqrt{6}\pi$　　B．6π　　C．$\frac{3\sqrt{6}}{}\pi$　　D．$\frac{3}{}\pi$

(5)已知三棱锥$A-BCD$，三组对棱两两相等，且$AB=CD=1$，$AD=BC=\sqrt{3}$，若三棱锥$A-BCD$的

外接球表面积为$\dfrac{9\pi}{2}$．则$AC =$________．

【对点训练】

1．已知正四面体$ABCD$的外接球的体积为$8\sqrt{6}\pi$，则这个四面体的表面积为________．

2．表面积为$8\sqrt{3}$的正四面体的外接球的表面积为(　　)

A．$4\sqrt{3}\pi$　　B．12π　　C．8π　　D．$4\sqrt{6}\pi$

3．已知四面体$ABCD$满足$AB=CD=\sqrt{6}$，$AC=AD=BC=BD=2$，则四面体$ABCD$的外接球的表面积是________．

4．三棱锥中$S-ABC$，$SA=BC=\sqrt{13}$，$SB=AC=\sqrt{5}$，$SC=AB=\sqrt{10}$．则三棱锥的外接球的表面积为______．

5．已知一个四面体 $ABCD$ 的每个顶点都在表面积为 9π的球 O 的表面上，且 $AB=CD=a$，$AC=AD=BC=BD=\sqrt{5}$，则 $a=$________.

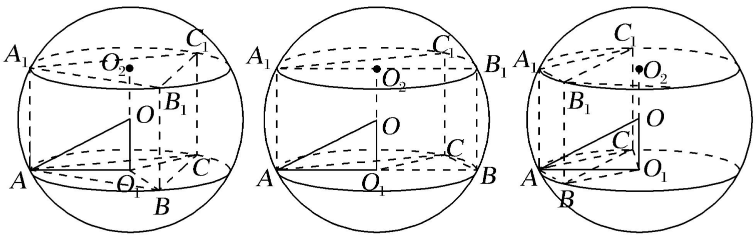
6．正四面体 $ABCD$ 中，E 是棱 AD 的中点，P 是棱 AC 上一动点，$BP+PE$ 的最小值为 $\sqrt{14}$，则该正四面体的外接球表面积是(　　)

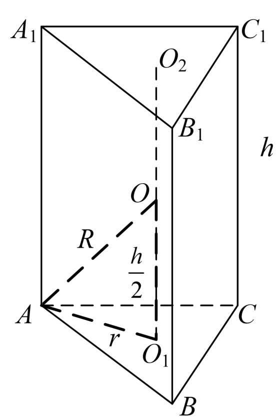
A．12π　　B．32π　　C．8π　　D．24π

第 3 讲　汉堡模型

【方法总结】

汉堡模型是直棱柱的外接球、圆柱的外接球模型，用找球心法(多面体的外接球的球心是过多面体的两个面的外心且分别垂直这两个面的直线的交点．一般情况下只作出一个面的垂线，然后设出球心用算术方法或代数方法即可解决问题．有时也作出两条垂线，交点即为球心．)解决．以直三棱柱为例，模型如下图，由对称性可知球心 O 的位置是$\triangle ABC$ 的外心 O_1 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的外心 O_2 连线的中点，算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，$OO_1=\frac{h}{2}$，$\therefore R^2=r^2+\frac{h^2}{4}$．





【例题选讲】

[例] (1) (2013 辽宁)已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上．若 $AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$，$AA_1=12$，则球 O 的半径为(　　)．

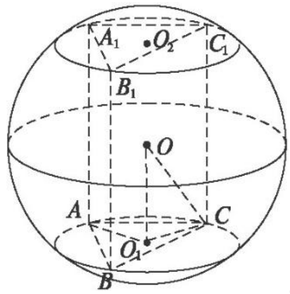
A．$\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$　　B．$2\sqrt{10}$　　C．$\dfrac{13}{2}$　　D．$3\sqrt{10}$

(2)设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱长都为 a，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为(　　)．

A．πa^2　　B．$\dfrac{7}{3}\pi a^2$　　C．$\dfrac{11}{3}\pi a^2$　　D．$\dfrac{3}{7}\pi a^2$

(3)(2009 全国Ⅰ)直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=120°$，则此球的表面积等于(　　)．

A．10π　　B．20π　　C．30π　　D．40π



(4)已知圆柱的高为 2，底面半径为$\sqrt{3}$，若该圆柱的两个底面的圆周都在同一个球面上，则这个球的表面积等于(　　)

A．4π　　B．$\dfrac{16\pi}{3}$　　C．$\dfrac{32\pi}{3}$　　D．16π

(5)若一个圆柱的表面积为12π，则该圆柱的外接球的表面积的最小值为(　　)

A．$(12\sqrt{5}-12)\pi$　　B．$12\sqrt{3}\pi$　　C．$(12\sqrt{3}+3)\pi$　　D．16π

【对点训练】

1．一直三棱柱的每条棱长都是 2，且每个顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为(　　)

A．$\dfrac{28\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{22}\pi}{3}$　　C．$\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{3}$　　D．$\sqrt{7}\pi$

2．一个正六棱柱的底面是正六边形，其侧棱垂直于底面，已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的体积为$\dfrac{9}{8}$，底面周长为 3，则这个球的体积为________.

3．已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，一个侧面的周长为 $6\sqrt{3}$，则正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为(　　)

A．4π　　B．8π　　C．16π　　D．32π

4．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上，若 $AB=3$，$AC=1$，$\angle BAC=60°$，$AA_1=2$，则该三棱柱的外接球的体积为(　　)

A．$\frac{40\pi}{3}$　　B．$\frac{40\sqrt{30}\pi}{27}$　　C．$\frac{320\sqrt{30}\pi}{27}$　　D．20π

5．已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，E，F 分别为 AB，CD 的中点，将四边形 $AEFD$ 沿 EF 折起，使二面角 $A-EF-C$ 的大小为 $120°$，则过 A，B，C，D，E，F 六点的球的表面积为(　　)

A．6π　　B．5π　　C．4π　　D．3π

6．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的表面上，若 $AB=AC=1$，$AA_1=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，则球 O 的体积为(　　)

A．$\dfrac{32\pi}{3}$　　B．3π　　C．$\dfrac{4\pi}{3}$　　D．8π

7．有一个圆锥与一个圆柱的底面半径相等，此圆锥的母线与底面所成角为 $60°$，若此圆柱的外接球的表面积是圆锥的侧面积的 4 倍，则此圆柱的高是其底面半径的(　　)

A．$\sqrt{2}$ 倍　　B．2 倍　　C．$2\sqrt{2}$ 倍　　D．3 倍

8．正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$，则该正四棱柱外接球的表面积为(　　)

A．12π　　B．14π　　C．16π　　D．18π

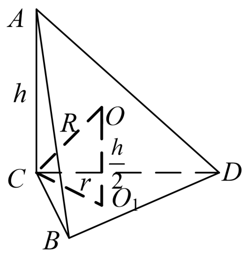
9．正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=\sqrt{2}$ ， $AA_1=2$ ，设四棱柱的外接球的球心为 O ，动点 P 在正方形 $ABCD$ 的边上，射线 OP 交球 O 的表面点 M ，现点 P 从点 A 出发，沿着 $A\to B\to C\to D\to A$ 运动一次，则点 M 经过的路径长为________.

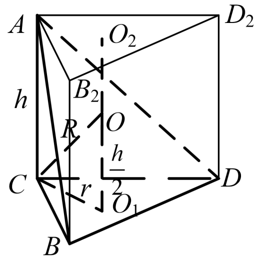
10．已知圆柱的上底面圆周经过正三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱的中点，下底面圆心为此三棱锥底面中心 O ．若三棱锥 $P-ABC$ 的高为该圆柱外接球半径的 2 倍，则该三棱锥的外接球与圆柱外接球的半径的比值为________.

第 4 讲　垂面模型

【方法总结】

垂面模型是有一条侧棱垂直底面的棱锥模型，可补为直棱柱内接于球，由对称性可知球心 O 的位置是 $\triangle CBD$ 的外心 O_1 与 $\triangle AB_2D_2$ 的外心 O_2 连线的中点，算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，$OO_1=\dfrac{h}{2}$，$\therefore R^2=r^2+\dfrac{h^2}{4}$．





【例题选讲】

[例]　(1)已知在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA\perp$ 平面 ABC，且 $\angle ACB=30°$，$AC=2AB=2\sqrt{3}$，$SA=1$．则该三棱锥的外接球的体积为(　　)

A．$\dfrac{13}{8}\sqrt{13}\pi$　　　B．13π　　　C．$\dfrac{\sqrt{13}}{6}\pi$　　　D．$\dfrac{13\sqrt{13}}{6}\pi$

(2)三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$AB\perp AC$，$PA=PC=AC=2$，$AB=4$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为(　　)

A．23π　　B．$\frac{23}{4}\pi$　　C．64π　　D．$\frac{64}{3}\pi$

(3)在三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 $SA\perp$ 底面 ABC，$AB=5$，$BC=8$，$\angle ABC=60°$，$SA=2\sqrt{5}$，则该三棱锥的外接球的表面积为(　　)

A．$\frac{64}{3}\pi$　　B．$\frac{256}{3}\pi$　　C．$\frac{436}{3}\pi$　　D．$\frac{2\,048\sqrt{3}}{27}\pi$

(4)在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp$ 底面 ABC，$\angle BAC=120°$，$PA=AB=AC=2$，若该三棱锥的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为(　　)

A．$10\sqrt{3}\pi$　　B．18π　　C．20π　　D．$9\sqrt{3}\pi$

(5)在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$\angle BAC=120°$，$AC=2$，$AB=1$，设D为BC中点，且直线PD与平面ABC所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则该三棱锥外接球的表面积为________.

【对点训练】

1．三棱锥$S-ABC$中，$SA\perp$底面ABC，若$SA=AB=BC=AC=3$，则该三棱锥外接球的表面积为(　　)

A．18π　　B．$\dfrac{21\pi}{2}$　　C．21π　　D．42π

2．四面体 $ABCD$ 的四个顶点都在球 O 的表面上，$AB\perp$平面 BCD，$\triangle BCD$ 是边长为 3 的等边三角形，若 $AB=2$，则球 O 的表面积为(　　)

A．4π　　B．12π　　C．16π　　D．32π

3．已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$SA\perp$平面 ABC，$SA=2\sqrt{3}$，$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$，则球 O 的表面积为(　　)

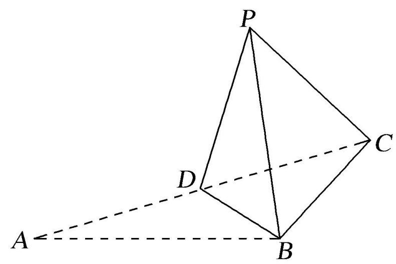
A．4π　　B．12π　　C．16π　　D．64π

4．在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp$底面 ABC，$\angle BAC=60°$，$PA=2$，$AB=AC=\sqrt{3}$，若该三棱锥的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为(　　)

A．$\dfrac{4\pi}{3}$　　B．$\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$　　C．8π　　D．12π

5．在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AC=CD=\sqrt{2}$，$AB=AD=BD=BC=1$，若三棱锥的所有顶点，都在同一球面上，则球的表面积是________．

6．如图，在△ABC 中，$AB=BC=\sqrt{6}$，$\angle ABC=90°$，点 D 为 AC 的中点，将△ABD 沿 BD 折起到△PBD 的位置，使 $PC=PD$，连接 PC，得到三棱锥 $P-BCD$，若该三棱锥的所有顶点都在同一球面上，则该球的表面积是(　　)



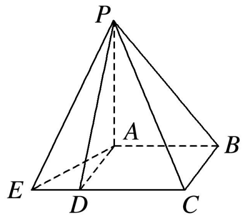
A．7π　　B．5π　　C．3π　　D．π

7．已知点 P，A，B，C，D 是球 O 表面上的点，$PA\perp$平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正方形．若 $PA=2\sqrt{6}$，则△OAB 的面积为(　　)．

A．$\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$6\sqrt{3}$

8．三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=\sqrt{15}$，$AC=6$，$PC\perp$平面 ABC，$PC=2$，则该三棱锥的外接球表面积为________．

9．中国古代数学经典《九章算术》系统地总结了战国、秦、汉时期的数学成就，书中将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑，如图为一个阳马与一个鳖臑的组合体，已知 $PA\perp$平面 $ABCE$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$AD=\sqrt{5}$，$ED=\sqrt{3}$，若鳖臑 $P-ADE$ 的外接球的体积为 $9\sqrt{2}\pi$，则阳马 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为________．

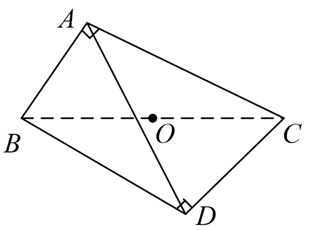


10．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AP=2$，点 M 是矩形 $ABCD$ 内（含边界）的动点，且 $AB=1$，$AD=3$，直线 PM 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$．记点 M 的轨迹长度为 α，则 $\tan\alpha=$________．；当三棱锥 $P-ABM$ 的体积最小时，三棱锥 $P-ABM$ 的外接球的表面积为________．

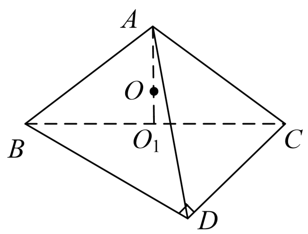
第 5 讲　切瓜模型

【方法总结】

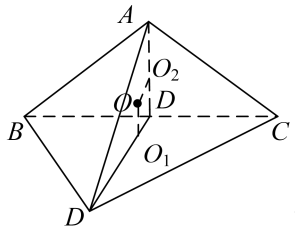
切瓜模型是有一侧面垂直底面的棱锥型，常见的是两个互相垂直的面都是特殊三角形且平面 $ABC\perp$平面 BCD，如类型Ⅰ，$\triangle ABC$ 与$\triangle BCD$ 都是直角三角形，类型Ⅱ，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$\triangle BCD$ 是直角三角形，类型Ⅲ，$\triangle ABC$ 与$\triangle BCD$ 都是等边三角形，解决方法是分别过$\triangle ABC$ 与$\triangle BCD$ 的外心作该三角形所在平面的垂线，交点 O 即为球心．类型Ⅳ，$\triangle ABC$ 与$\triangle BCD$ 都一般三角形，解决方法是过$\triangle BCD$ 的外心 O_1 作该三角形所在平面的垂线，用代数方法即可解决问题．设三棱锥 $A-BCD$ 的高为 h，外接球的半径为 R，球心为 O．$\triangle BCD$ 的外心为 O_1，O_1 到 BD 的距离为 d，O 与 O_1 的距离为 m，则$\begin{cases}R^2=r^2+m^2,\\R^2=d^2+(h-m)^2,\end{cases}$ 解得 R．可用秒杀公式：$R^2=r_1^2+r_2^2-\dfrac{l^2}{4}$(其中 r_1、r_2 为两个面的外接圆的半径，l 为两个面的交线的长)



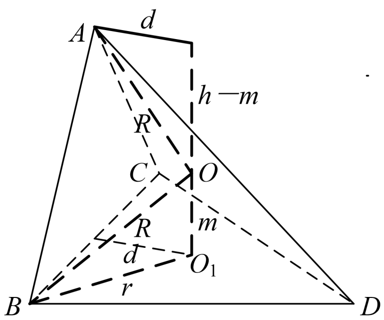
类型Ⅰ



类型Ⅱ



类型Ⅲ

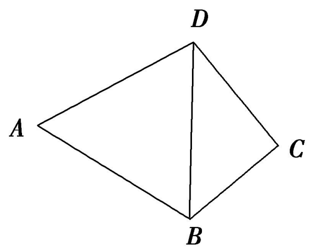


类型Ⅳ

【例题选讲】

[例]　(1)已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，$V_{P\text{-}ABC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\angle APC=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle BPC=\dfrac{\pi}{3}$，$PA\perp AC$，$PB\perp BC$，且平面 $PAC\perp$平面 PBC，那么三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为________．

(2)如图，已知平面四边形 $ABCD$ 满足 $AB=AD=2$，$\angle A=60°$，$\angle C=90°$，将$\triangle ABD$ 沿对角线 BD 翻折，使平面 $ABD\perp$平面 CBD，则四面体 $ABCD$ 外接球的体积为________.

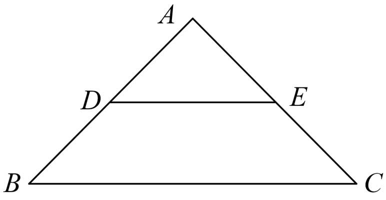


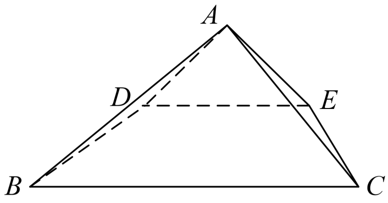
(3)已知三棱锥 $A-BCD$ 中，$\triangle ABD$ 与$\triangle BCD$ 是边长为 2 的等边三角形且二面角 $A-BD-C$ 为直二面角，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为(　　)

A．$\dfrac{10\pi}{3}$　　B．5π　　C．6π　　D．$\dfrac{20\pi}{3}$

(4)已知ΔABC 是以 BC 为斜边的直角三角形，P 为平面 ABC 外一点，且平面 $PBC\perp$平面 ABC，$BC=3$，$PB=2\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{5}$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为________.

(5)已知等腰直角三角形 ABC 中，$AB=AC=2$，D，E 分别为 AB，AC 的中点，沿 DE 将△ABC 折成直二面角(如图)，则四棱锥 $A-DECB$ 的外接球的表面积为________.





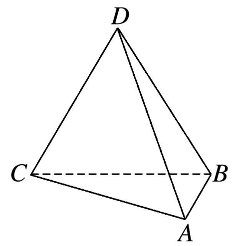
【对点训练】

1．把边长为 3 的正方 $ABCD$ 沿对角线 AC 对折，使得平面 $ABC\perp$ 平面 ADC，则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的表面积为(　　)

A．32π　　B．27π　　C．18π　　D．9π

2．在三棱锥 $A-BCD$ 中，△ACD 与△BCD 都是边长为 4 的正三角形，且平面 $ACD\perp$平面 BCD，则该三棱锥外接球的表面积为________.

3．已知如图所示的三棱锥 $D-ABC$ 的四个顶点均在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 和$\triangle DBC$ 所在的平面互相垂直，$AB=3$，$AC=\sqrt{3}$，$BC=CD=BD=2\sqrt{3}$，则球 O 的表面积为(　　)



A．4π　　B．12π　　C．16π　　D．36π

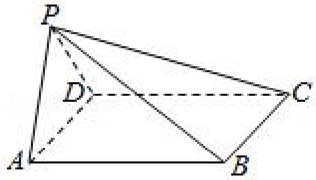
4．在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，ΔABC 是边长为 2 的正三角形，若 $\angle BDC=\frac{\pi}{4}$，三棱锥的各个顶点均在球 O 上，则球 O 的表面积为(　　).

A．$\frac{52\pi}{3}$　　B．3π　　C．4π　　D．$\frac{28\pi}{3}$

5．已知空间四边形 $ABCD$，$\angle BAC=\dfrac{2}{3}\pi$，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$BD=4$，$CD=2\sqrt{5}$，且平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，则该几何体的外接球的表面积为(　　)

A．24π　　　　B．48π　　　　C．64π　　　　D．96π

6．如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD=2\sqrt{2}$，$PA=PD=AB=2$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为(　　)



A．2π　　　　B．4π　　　　C．8π　　　　D．12π

7．在四棱锥 $A-BCDE$ 中，ΔABC 是边长为 6 的正三角形，$BCDE$ 是正方形，平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$，则该四棱锥的外接球的体积为(　　)

A．$21\sqrt{21}\pi$　　B．84π　　C．$7\sqrt{21}\pi$　　D．$28\sqrt{21}\pi$

8．已知空间四边形 $ABCD$，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$BD=CD=6$，且平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，则空间四边形 $ABCD$ 的外接球的表面积为(　　)

A．60π　　B．36π　　C．24π　　D．12π

9．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=AC=4$，$\angle BAC=120^{\circ}$，$PB=PC=4\sqrt{3}$，平面 $PBC\perp$ 平面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为______．

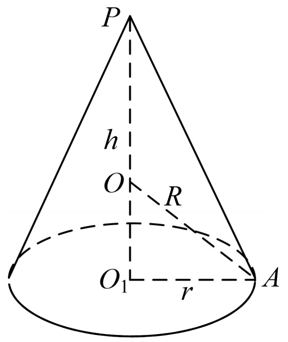
10．在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，$AP=2\sqrt{5}, AB=6, \angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$，且直线 PA 与平面 ABC 所成角的正切值为 2，则该三棱锥的外接球的表面积为(　　)

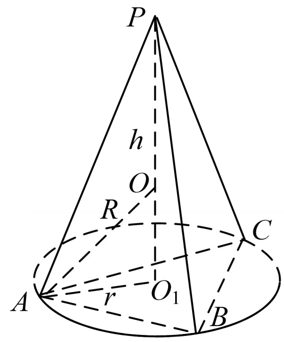
A．13π　　B．52π　　C．$\frac{52\pi}{3}$　　D．$\frac{52\sqrt{13}\pi}{3}$

第 6 讲　斗笠模型

【方法总结】

圆锥、顶点在底面的射影是底面外心的棱锥．秒杀公式：$R=\frac{h^2+r^2}{2h}$(其中 h 为几何体的高，r 为几何体的底面半径或底面外接圆的圆心)





【例题选讲】

[例]　(1)一个圆锥恰有三条母线两两夹角为 60°，若该圆锥的侧面积为 $3\sqrt{3}\pi$，则该圆锥外接球的表面积为________.

(2)(2020·全国I)已知 A，B，C 为球 O 的球面上的三个点，$\odot O_1$ 为$\triangle ABC$ 的外接圆．若$\odot O_1$ 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 O 的表面积为(　　)

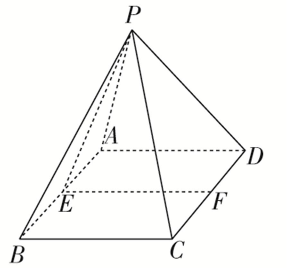
A．64π　　B．48π　　C．36π　　D．32π

(3)在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC=2\sqrt{6}, AC=AB=4$，且 $AC\perp AB$，则该三棱锥外接球的表面积为________.

(4)正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为 4，底面边长为 2，则该球的表面积为(　　)

A．$\dfrac{81\pi}{4}$　　B．16π　　C．9π　　D．$\dfrac{27\pi}{4}$

(5)如图所示，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，E，F 分别是 AB，CD 的中点，$\cos\angle PEF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，若 A，B，C，D，P 在同一球面上，则此球的体积为________.



(6)在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC=\sqrt{2}$，$AB=AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，则该三棱锥外接球的体积为(　　)

A．$\frac{4\pi}{}$　　B．$\frac{8\sqrt{2}}{}\pi$　　C．$4\sqrt{3}\pi$　　D．$\frac{32}{}\pi$

【对点训练】

1．已知圆锥的顶点为 P，母线 PA 与底面所成的角为 $30°$，底面圆心 O 到 PA 的距离为 1，则该圆锥外接球的表面积为________.

2．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC=\sqrt{3}$，侧棱 PA 与底面 ABC 所成的角为 $60°$，则该三棱锥外接球的体积为(　　)

A．π　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．4π　　D．$\frac{4\pi}{3}$

3．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC=\sqrt{6}$，$AC=AB=2$，且 $AC\perp AB$，则该三棱锥外接球的表面积为(　　)

A．4π　　B．8π　　C．16π　　D．9π

4．已知体积为 $\sqrt{3}$ 的正三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心为 O，若满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则此三棱锥外接球的半径是(　　)

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt[3]{2}$　　D．$\sqrt[3]{4}$

5．已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的各顶点都在同一球面上，底面正方形的边长为 $\sqrt{2}$，若该正四棱锥的体积为2，则此球的体积为(　　)

A．$\frac{124\pi}{3}$　　B．$\frac{625\pi}{81}$　　C．$\frac{500\pi}{81}$　　D．$\frac{256\pi}{9}$

6．已知圆锥的顶点为S，母线SA，SB互相垂直，SA与圆锥底面所成角为$30°$，若ΔSAB的面积为8，则该圆锥外接球的表面积是________.

7．已知圆台O_1O_2上底面圆O_1的半径为2，下底面圆O_2的半径为$2\sqrt{2}$，圆台的外接球的球心为O，且球心在圆台的轴O_1O_2上，满足$|O_1O|=3|OO_2|$，则圆台O_1O_2的外接球的表面积为________.

8．在六棱锥$P-ABCDEF$中，底面是边长为$\sqrt{2}$的正六边形，$PA=2$且与底面垂直，则该六棱锥外接球的体积等于________.

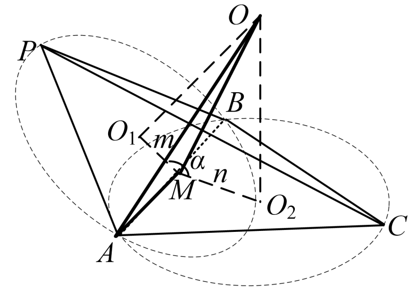
9．在三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=PC=2$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{10}$，$\angle APC=\dfrac{\pi}{2}$，则三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为________.

10．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC=9\sqrt{2}$，$AB=8$，$AC=6$．顶点 P 在平面 ABC 内的射影为 H，若 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ 且 $\mu+2\lambda=1$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为________．

第 7 讲　鳄鱼模型

【方法总结】

鳄鱼模型即普通三棱锥模型，用找球心法可以解决．如果已知其中两个面的二面角，则可用秒杀公式：$R^2=\dfrac{m^2+n^2-2\,mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}$(其中 $l=|AB|$)解决．



【例题选讲】

[例]　(1)在三棱锥 $A-BCD$ 中，ΔABD 和 ΔCBD 均为边长为 2 的等边三角形，且二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $60°$，则三棱锥的外接球的表面积为　　　　．

(2)在等腰直角ΔABC中，$AB=2$，$\angle BAC=90^\circ$，AD为斜边BC的高，将ΔABC沿AD折叠，使二面角$B-AD-C$为60°，则三棱锥$A-BCD$的外接球的表面积为________．

(3)在四面体$ABCD$中，$AB=AD=2$，$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=90°$，二面角$A-BD-C$的大小为150°，则四面体$ABCD$外接球的半径为________．

(3)在三棱锥$S-ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=BC=\sqrt{2}$，$SA=SC=2$，二面角$S-AC-B$的余弦值是$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，若S，A，B，C都在同一球面上，则该球的表面积是(　　)

A．4π　　　　B．6π　　　　C．8π　　　　D．9π

(4)已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，$PA=PB=3\sqrt{2}$，且二面角 $P-AB-C$ 的大小为 $150°$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为(　　)

A．100π　　B．108π　　C．110π　　D．111π

(5)在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，三角形 PAC 为等边三角形，二面角 $P-AC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$，当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大值为 $\frac{1}{3}$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为________.

(6)在体积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$的四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为边长为2的正方形，ΔPAB为等边三角形，二面角$P-AB-C$为锐角，则四棱锥$P-ABCD$外接球的半径为(　　)

A．$\frac{\sqrt{21}}{\ }$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{3}{\ }$

【对点训练】

1．在三棱锥$S-ABC$中，$SB=SC=AB=BC=AC=2$，二面角$S-BC-A$的大小为60°，则三棱锥$S-ABC$外接球的表面积是(　　)

A．$\frac{14\pi}{3}$　　B．$\frac{16\pi}{3}$　　C．$\frac{40\pi}{9}$　　D．$\frac{52\pi}{9}$

2．已知三棱锥 $A-BCD$，$BC=6$，且 ΔABC 、ΔBCD 均为等边三角形，二面角 $A-BC-D$ 的平面角为 $60°$，则三棱锥外接球的表面积是________．

3．已知边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，沿对角线 AC 折成二面角 $B-AC-D$ 的大小为 θ 的四面

体且 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为________.

4．在三棱锥 $P-ABC$ 中，顶点 P 在底面 ABC 的投影 G 是 ΔABC 的外心，$PB=BC=2$，且面 PBC 与底面 ABC 所成的二面角的大小为 $60°$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为________.

5．直角三角形 ABC，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，$AC+BC=2$，将 ΔABC 绕 AB 边旋转至 $\Delta ABC'$ 位置，若二面角 $C-AB-C'$ 的大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$，则四面体 $C'-ABC$ 的外接球的表面积的最小值为(　　)

A．6π　　B．3π　　C．$\dfrac{3}{2}\pi$　　D．2π

6．已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=BD=AD=2$，$BC=1$，$CD=\sqrt{3}$，若二面角 $A-BD-C$ 的取值范围为$[\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{3}]$，则该几何体的外接球表面积的取值范围为________．

7．在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ΔABC 是边长为 3 的等边三角形，$SA=\sqrt{3}$，$SB=2\sqrt{3}$，二面角 $S-AB-C$ 的大小为 $60°$，则此三棱锥的外接球的表面积为________．

8．在四面体 $ABCD$ 中，$BC=CD=BD=AB=2$，$\angle ABC=90^{\circ}$，二面角 $A-BC-D$ 的平面角为150°，则四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为(　　)

A．$\frac{31}{3}\pi$　　B．$\frac{124}{3}\pi$　　C．31π　　D．124π

9．在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=BC=CD=DA=\sqrt{7}$，$BD=2\sqrt{3}$，二面角 $A-BD-C$ 是钝角．若三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 2．则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积是(　　)

A．12π　　B．$\frac{37}{3}\pi$　　C．13π　　D．$\frac{53}{4}\pi$

10．在平面五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A=60^{\circ}$，$AB=AE=6\sqrt{3}$，$BC\perp CD$，$DE\perp CD$，且 $BC=DE=6$．将五边形 $ABCDE$ 沿对角线 BE 折起，使平面 ABE 与平面 $BCDE$ 所成的二面角为120°，则沿对角线 BE 折起后所得几何体的外接球的表面积是________．

第 8 讲　已知球心或球半径模型

【例题选讲】

[例]　(1)(2017·全国Ⅰ)已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的直径．若平面 $SCA\perp$平面 SCB，$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9，则球 O 的表面积为________．

(2)已知三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，AB 为球 O 的直径，若该三棱锥的体积为$\sqrt{3}$，$BC=3$，$BD=\sqrt{3}$，$\angle CBD=90^{\circ}$，则球 O 的体积为________．

(3)(2012全国Ⅰ)已知三棱锥$S-ABC$的所有顶点都在球O的球面上，$\triangle ABC$是边长为1的正三角形，SC为球O的直径，且$SC=2$，则此棱锥的体积为(　　)

A．$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)(2020·新高考全国I)已知直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长均为2，$\angle BAD=60°$．以D_1为球心，$\sqrt{5}$为半径的球面与侧面BCC_1B_1的交线长为________．

(5)三棱锥$S-ABC$的底面各棱长均为3，其外接球半径为2，则三棱锥$S-ABC$的体积最大时，点S

到平面 ABC 的距离为(　　)

A．$2+\sqrt{3}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．3　　D．2

【对点训练】

1．已知三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 满足 $AB=2\sqrt{2}$，$\angle ACB=90°$，PA 为球 O 的直径且 $PA=4$，则点 P 到底面 ABC 的距离为(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

2．已知矩形 $ABCD$ 的顶点都在球心为 O，半径为 R 的球面上，$AB=6$，$BC=2\sqrt{3}$，且四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为 $8\sqrt{3}$，则 R 等于(　　)

A．4　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{4\sqrt{7}}{9}$　　D．$\sqrt{13}$

3．已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点均在某球面上，PC 为该球的直径，$\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，

三棱锥 $P-ABC$ 的体积为$\frac{16}{3}$，则此三棱锥的外接球的表面积为(　　)

A．$\frac{16\pi}{3}$　　B．$\frac{40\pi}{3}$　　C．$\frac{64\pi}{3}$　　D．$\frac{80\pi}{3}$

4．已知三棱锥 $A-SBC$ 的体积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，各顶点均在以 PA 为直径球面上，$AB=AC=\sqrt{2},\ BC=2$，则这个球的表面积为_____________.

5．(2017·全国III)已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为________.

6．(2020·全国I)已知A，B，C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，

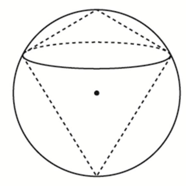
$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为(　　)

A．64π　　B．48π　　C．36π　　D．32π

7．(2020·全国II)已知$\triangle ABC$是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，且其顶点都在球O的球面上．若球O的表面积为16π，则O到平面ABC的距离为(　　)

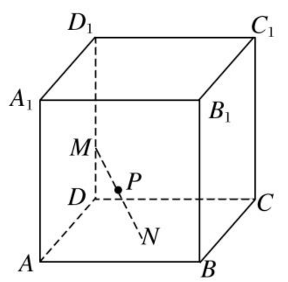
A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．如图，半径为R的球的两个内接圆锥有公共的底面，若两个圆锥的体积之和为球的体积的$\frac{3}{8}$，则这两个圆锥高之差的绝对值为(　　)



A．$\frac{R}{2}$　　B．$\frac{2R}{3}$　　C．$\frac{4R}{3}$　　D．R

9．如图，已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，长为 2 的线段 MN 的一个端点 M 在棱 DD_1 上运动，点 N 在正方体的底面 $ABCD$ 内运动，则 MN 的中点 P 的轨迹的面积是(　　)



A．4π　　B．π　　C．2π　　D．$\frac{\pi}{2}$

10．在三棱锥 $A-BCD$ 中，底面为 Rt △，且 $BC \perp CD$，斜边 BD 上的高为 1，三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的直径是 AB，若该外接球的表面积为16π，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为________.

第 9 讲　最值模型

【方法总结】

最值问题的解法有两种方法：一种是几何法，即在运动变化过程中得到最值，从而转化为定值问题求解．另一种是代数方法，即建立目标函数，从而求目标函数的最值．

【例题选讲】

[例]　(1)已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点 P，A，B，C 在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为$\sqrt{3}$的等边三角形，

O　　　　　36π，　么 P　　　　ABC 距　　　　　　　　　　　　　．

(2)在四面体 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=CD=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{2}$，当四面体 $ABCD$ 的体积最大时，其外接球的表面积为(　　)

A．2π　　　　B．3π　　　　C．6π　　　　D．8π

(3)已知四棱锥 $S-ABCD$ 的所有顶点在同一球面上，底面 $ABCD$ 是正方形且球心 O 在此平面内，当四棱锥的体积取得最大值时，其表面积等于 $16+16\sqrt{3}$，则球 O 的体积等于(　　)

A．$\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$　　　　B．$\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$　　　　C．$\dfrac{32\sqrt{2}\pi}{3}$　　　　D．$\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$

(4)三棱锥 $A-BCD$ 内接于半径为$\sqrt{5}$的球 O 中，$AB=CD=4$，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为(　　)

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{16}{3}$　　D．$\frac{32}{3}$

(5)已知正四棱柱的顶点在同一个球面上，且球的表面积为12π，当正四棱柱的体积最大时，正四棱柱的高为________．

【对点训练】

1．三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在体积为$\frac{500\pi}{3}$的球的表面上，底面ABC所在的小圆面积为16π，则该三棱锥的高的最大值为(　　)

A．4　　B．6　　C．8　　D．10

2．(2015·全国Ⅱ)已知A，B是球O的球面上两点，$\angle AOB=90°$，C为该球面上的动点．若三棱锥$O-ABC$体积的最大值为36，则球O的表面积为(　　)

A．36π　　B．64π　　C．144π　　D．256π

3．已知点 A，B，C，D 均在球 O 上，$AB=BC=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{3}$．若三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 3，则球 O 的表面积为________．

4．在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，$CD=AC=\sqrt{3}$，当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时，其外接球的表面积为________．

5．已知三棱锥 $D-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{2}$，若三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 2，则球 O 的表面积为(　　)

A．8π　　B．9π　　C．$\dfrac{25\pi}{3}$　　D．$\dfrac{121\pi}{9}$

6．三棱锥 $A-BCD$ 的一条棱长为 a，其余棱长均为 2，当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时，它的外接球的

表面积为(　　)

A．$\frac{21\pi}{4}$　　B．$\frac{20\pi}{3}$　　C．$\frac{5\pi}{4}$　　D．$\frac{5\pi}{3}$

7．已知三棱锥 $O-ABC$ 的顶点 A，B，C 都在半径为 2 的球面上，O 是球心，$\angle AOB=120°$，当$\triangle AOC$ 与$\triangle BOC$ 的面积之和最大时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积为(　　)

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

8．(2018·全国III)设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为(　　)

A．$12\sqrt{3}$　　B．$18\sqrt{3}$　　C．$24\sqrt{3}$　　D．$54\sqrt{3}$

9．已知球的直径 $SC=4$，A，B 是该球球面上的两点，$\angle ASC=\angle BSC=30°$，则棱锥 $S-ABC$ 的体积最大

为(　　)

A．2　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

10．四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，矩形的四个顶点 A，B，C，D 在球 O 的同一个大圆上，且球的表面积为 16π，点 P 在球面上，则四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值为(　　)

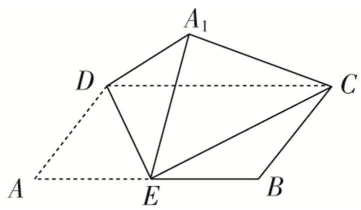
A．8　　B．$\frac{8}{3}$　　C．16　　D．$\frac{16}{3}$

11．(2016·全国Ⅲ)在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球．若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是(　　)

A．4π　　B．$\frac{9\pi}{2}$　　C．6π　　D．$\frac{32\pi}{3}$

12．已知半径为 1 的球 O 中内接一个圆柱，当圆柱的侧面积最大时，球的体积与圆柱的体积的比值为________．

13．如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2AD=2a$，E 是 AB 的中点，将$\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成$\triangle A_1DE$，连接 A_1C．若当三棱锥 A_1-CDE 的体积取得最大值时，三棱锥 A_1-CDE 外接球的体积为$\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$，则 $a=$(　　)



A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

14．已知三棱锥 $S-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上，且该三棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$，$SA\perp$ 平面 ABC，$SA=4$，$\angle ABC=120°$，则球 O 的体积的最小值为________.

第 10 讲　内切球模型

【方法总结】

以三棱锥 $P-ABC$ 为例，求其内切球的半径.

方法：等体积法，三棱锥 $P-ABC$ 体积等于内切球球心与四个面构成的四个三棱锥的体积之和；

第一步：先求出四个表面的面积和整个锥体体积；

第二步：设内切球的半径为 r，球心为 O，建立等式：$V_{P-ABC}=V_{O-ABC}+V_{O-PAB}+V_{O-PAC}+V_{O-PBC}\Rightarrow V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot r+\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot r+\frac{1}{3}S_{\triangle PAC}\cdot r+\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot r=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC})\cdot r$；

第三步：解出 $r=\frac{3V_{P-ABC}}{S_{O-ABC}+S_{O-PAB}+S_{O-PAC}+S_{O-PBC}}=\frac{3V}{S_{表}}$.

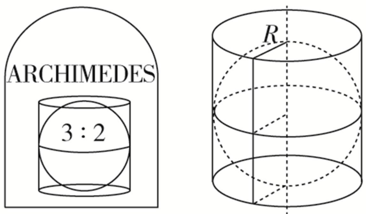
秒杀公式（万能公式）：$r=\frac{3V}{S_{表}}$

【例题选讲】

[例]　(1)已知一个三棱锥的所有棱长均为 $\sqrt{2}$，则该三棱锥的内切球的体积为________.

(2)(2020·全国III)已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为________.

(3)阿基米德(公元前287年～公元前212年)是古希腊伟大的哲学家、数学家和物理学家，他和高斯、牛顿并列被称为世界三大数学家．据说，他自己觉得最为满意的一个数学发现就是“圆柱内切球体的体积是圆柱体积的三分之二，并且球的表面积也是圆柱表面积的三分之二”．他特别喜欢这个结论．要求后人在他的墓碑上刻着一个圆柱容器里放了一个球，如图，该球顶天立地，四周碰边．若表面积为54π的圆柱的底面直径与高都等于球的直径，则该球的体积为(　　)



A．4π　　B．16π　　C．36π　　D．$\frac{64\pi}{3}$

(4)已知三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱 PA，PB，PC 两两互相垂直，且 $PA=PB=PC=2$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球与内切球的半径比为________.

(5)正四面体的外接球和内切球上各有一个动点 P 、 Q ，若线段 PQ 长度的最大值为 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ ，则这个四面体的棱长为________.

【对点训练】

1．若一个正四面体的表面积为 S_1，其内切球的表面积为 S_2，则 $\frac{S_1}{S_2}=$________.

2．已知一个平放的各棱长为 4 的三棱锥内有一个小球 O(重量忽略不计)，现从该三棱锥顶端向内注水，小球慢慢上浮，当注入的水的体积是该三棱锥体积的 $\frac{7}{8}$ 时，小球与该三棱锥各侧面均相切(与水面也相切)，则小球的表面积等于(　　)

A．$\frac{7\pi}{6}$　　B．$\frac{4\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

3．已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，且 $PA=PB=PC=PD$，若一个半径为 1 的球与此四棱锥所有面都相切，则该四棱锥的高是(　　)

A．6　　B．5　　C．$\frac{9}{2}$　　D．$\frac{9}{4}$

4．将半径为 3，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形围成一个圆锥，则该圆锥的内切球的表面积为(　　)

A．π　　B．2π　　C．3π　　D．4π

5．体积为$\frac{4\pi}{3}$的球与正三棱柱的所有面均相切，则该棱柱的体积为________.

6．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 $2a$ 的正方形，$PD\perp$底面 $ABCD$，且 $PD=2a$，若在这个四棱锥内放一个球，则该球半径的最大值为________．

7．一个棱长为 6 的正四面体内部有一个任意旋转的正方体，当正方体的棱长取得最大值时，正方体的外接球的表面积是 (　　)

A．4π　　B．6π　　C．12π　　D．24π

8．在《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马．若四棱锥 $M-ABCD$ 为阳马，侧棱 $MA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $MA=BC=AB=2$，则该阳马的外接球与内切球表面积之和为________．

9．在三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB=6$，$BC=8$，$AC=10$，二面角 $S-AB-C$、$S-AC-B$、$S-BC-A$ 的大小均为 $\frac{\pi}{4}$，设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心为 O，直线 SO 交平面 ABC 于点 M，则三棱锥 $S-ABC$ 的内切球半径为________．$\frac{SO}{OM}=$________．

10．已知直三棱柱 $ABC-AB_1C_1$ 中， $AC=BC=2$ ， $AC\perp BC$ ，设二面角 $C-AB-C_1$ 的平面角为 θ ，且 $\tan\theta=\sqrt{2}$ ，现在该三棱柱的内部空间放一个小球 O_1，设小球 O_1 的表面积为 S_1，三棱柱的外接球 O_2 的表面积为 S_2， 则 $\dfrac{S_1}{S}$ 的最大值为________.