CentraleSupélec

Projet SDP
Mention IA
K. Belahcène, V. Mousseau M. Tydrichova, W. Ouerdane

1 Prologue

Le concours de l'internat de médecine vient de se terminer. Les futurs médecins ont tous passé les examens du concours qui leur donnera accès aux spécialités de médecine. Dans ce concours très exigeant, les étudiants sont évalués dans différents matières sur une échelle [0,100] et sont classés en fonctions de leur moyenne pondérée. En fonction de leur souhaits et de leur rang de classement, ils choisiront l'une des spécialités. Chaque spécialité étant un nombre de place fixée à l'avance, les futurs médecins choisissent leur spécialité dans l'ordre du classement. le choix de chacun est donc contraint par le nombre de place et les choix des précédents.

Candidat	Anatomie	Biologie	Chirurgie	Diagnostic	Epidemiologie	Forensic Pathology	Génétique
Xavier	85	81	71	69	75	81	88
Yvonne	81	81	75	63	67	88	95
weight	8	7	7	6	6	5	6

$$\underbrace{8 \times 85 + 7 \times 81 + 7 \times 71 + 6 \times 69 + 6 \times 75 + 5 \times 81 + 6 \times 88}_{x} \geq \underbrace{8 \times 81 + 7 \times 81 + 7 \times 75 + 6 \times 63 + 6 \times 67 + 5 \times 88 + 6 \times 95}_{y} \tag{1}$$

Les notes de Xavier et Yvonne ainsi que les poids des matières sont données dans le tableau ci-dessus, et le classement place Xavier avant Yvonne (la moyenne de Xavier étant supérieure à celle d'Yvonne, cf. (1)). Yvonne souhaite comprendre pourquoi elle est moins bien classé que Xavier, et la seule explication qui lui est fourni par l'algorithme est le calcul de l'équation (1).

La somme pondérée, est souvent considéré comme interprétable. Cela signifie que, pour justifier l'affirmation $x \succ y$, il serait suffisant révéler la formule de somme pondérée ainsi que les valeurs précises des notes et des pondérations qui le composent, et laisser le Yvonne effectuer le calcul de l'équation (1). Mais Yvonne ne s'en satisfait pas... Yvonne pourra trouver plus clair qu'on formule le raisonnement suivant : x est meilleur que y car

- l'avantage de x sur y en Anatomie pèse plus fort que son désavantage en Chirurgie,
- l'avantage de x en Diagnostic pèse plus fort que le désavantage en Forensic pathology,
- l'avantage de x en Epidemiologie pèse plus fort que le désavantage en Génétique
- x et y se valent en Biologie

Une telle explication ne fait pas appel au calcul de somme pondérée, mais décompose l'affirmation $x \succ y$ en arguments plus simples. C'est cette approche que l'on va adopter dans ce projet pour implémenter un algorithme qui calcule une explication de l'affirmation $x \succ y$ à partir de x, y et du vecteur de poids.

2 Formulation du problème

Dans le calcul de somme pondérée, les cours {ADE} privilégient x par rapport à y, tandis que les cours {CFG} sont en faveur de y (le cours B ne les différencient pas). Dans la justification de $x \succ y$, {ADE} constituents des arguments pour, {CFG} des arguments contre, et B est neutre. La contribution des cours à la somme pondérée dans l'affirmation $x \succ y$ est synthétisée dans le tableau ci-dessous. Une valeur strictement positive (négative, respectivement) correspond à un cours pour (contre, respectivement), et une valeur nulle à un cours neutre. On note $\texttt{pros}(x, y)$, $\texttt{cons}(x, y)$ et $\texttt{neutral}(x, y)$ ces ensembles de critères (dans notre exemple on a $\texttt{pros}(x{,}y) = \{A, D, E\}$, $\texttt{cons}(x{,}y) = \{C, F, G\}$ et $\texttt{neutral}(x, y) = \{B\}$).

Cours	A	B	C	D	E	F	G
contribution à $x \succ y$	+32	0	-28	+36	+48	-35	-42

Dans la comparaison $x \succ y$, un trade-off de type (1-1) correspond à une paire de cours $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ où $\mathcal{P} \in \texttt{pros}(x, y)$,$\mathcal{C} \in \texttt{cons}(x, y)$ telle que la somme des contributions des cours $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ à la somme pondérée dans l'affirmation $x \succ y$ est positive. Ainsi (A,C) est un tradeoff de type (1-1) car $A \in \texttt{pros}(x{,}y)$, $C \in \texttt{cons}(x{,}y)$, et $32 - 28 > 0$. Calculez $\texttt{pros}(x, y)$ et $\texttt{cons}(x, y)$. Pouvez-vous énumérer la liste de tous les trade-off de type (1-1) pour la comparaison $x \succ y$?

Une explication de type (1-1) de l'affirmation $x \succ y$ (de longueur ℓ) est définie par l'ensemble $E = \{(P_1, C_1), \ldots, (P_\ell, C_\ell)\}$ trade-offs (1-1) disjoints tel que $\bigcup_{i=1}^{\ell} C_i = \texttt{cons}(x{,}y)$. Dans l'exemple, $\{(A, C), (D, F), (E, G)\}$ est une explication de type (1-1) de l'affirmation $x \succ y$ (de longueur 3). Cette explication pourra être transcrite par le raisonnement énoncé dans le préambule.

Question 1 : Formuler un programme d'optimisation linéaire qui calcule une explication de type (1-1) de la comparaison $x \succ y$ si elle existe, et retourne un certificat de non-existence dans le cas contraire. Implémentez cette formulation en utilisant un solveur d'optimisation.

On considère maintenant plus de candidats dont les notes sont reportées dans la table ci-dessous, et conduisent le classement suivant : $x \succ y \succ z \succ t \succ u \succ v \succ w \succ w'$.

Candidat	A	B	C	D	E	F	G
x	85	81	71	69	75	81	88
y	81	81	75	63	67	88	95
z	74	89	74	81	68	84	79
t	74	71	84	91	77	76	73
u	72	75	66	85	88	66	93
v	71	73	63	92	76	79	93
w	79	69	78	76	67	84	79
w'	57	76	81	76	82	86	77
weight	8	7	7	6	6	5	6

Montrer par un argument simple qu'il n'existe pas d'explication de type (1-1) de la comparaison $w \succ w'$. Pour étendre le langage d'explication on considère maintenant, dans l'affirmation $x \succ y$, des trade-offs de type (1-m) ($m \in \mathbb{N}^*$) définit par une paire $(\mathcal{P}, \{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_m\})$ où $\mathcal{P} \in \texttt{pros}(x, y)$, et $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_m \in \texttt{cons}(x, y)$ telle que la somme des contributions des cours $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_1$, ..., et $\mathcal{C}_m$ à la somme pondérée dans l'affirmation $x \succ y$ est positive. Par exemple, (A,{B,C,E}) est un trade-off de type (1-3) dans l'affirmation $w \succ w'$.

Une explication de type (1-m) de l'affirmation $x \succ y$ est définie par l'ensemble $E = \{(P_1, \mathcal{C}_1), \ldots, (P_\ell, C_\ell)\}$ ($\mathcal{P}_i \in \texttt{pros}(x, y)$ et $\mathcal{C}_i \subset \texttt{cons}(x, y)$) de trade-offs (1-m) disjoints tel que $\bigcup_{i=1}^{\ell} C_i = \texttt{cons}(x,y)$. Dans l'exemple ci-dessus, $\{(A, (B, C, E), (G, (F))\}$ est une explication de type (1-m) de l'affirmation $w \succ w'$ (de longueur 2).

Question 2 : Formuler un programme d'optimisation linéaire qui calcule une explication de type (1-m) de la comparaison $x \succ y$ si elle existe, et retourne un certificat de non-existence dans le cas contraire. Implémentez cette formulation en utilisant un solveur d'optimisation.

Montrer qu'il n'existe pas d'explication de type (1-m) pour la comparaison $u \succ v$.

On considère maintenant, dans l'affirmation $x \succ y$, des trade-offs de type (m-1) ($m \in \mathbb{N}^*$) définit par une paire $(\{\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_m\}, \mathcal{C})$ où $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_m \in \texttt{pros}(x, y)$, et $\mathcal{C} \in \texttt{cons}(x, y)$ telle que la somme des contributions des cours $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_m$, et $\mathcal{C}$ à la somme pondérée dans l'affirmation $x \succ y$ est positive. Par exemple, ({A,B,C},D) est un trade-off de type (3-1) dans l'affirmation $u \succ v$.

Une explication de type (m-1) de l'affirmation $x \succ y$ est définie par l'ensemble $E = \{(P_1, C_1), \ldots, (P_\ell, C_\ell)\}$ ($\mathcal{P}_i \subset \texttt{pros}(x, y)$ et $\mathcal{P}_i \in \texttt{cons}(x, y)$) de trade-offs (1-m) disjoints tel que $\bigcup_{i=1}^{\ell} C_i = \texttt{cons}(x,y)$. Dans l'exemple ci-dessus, $\{((A, B, C), D), ((E), F)\}$ est une explication de type (3-1) de l'affirmation $u \succ v$ (de longueur 2).

Trouver une explication de type (m-1) pour la comparaison $y \succ z$.

Question 3 : Formuler un programme d'optimisation linéaire qui calcule une explication de type (m-1) de la comparaison $x \succ y$ si elle existe, et retourne un certificat de non-existence dans le cas contraire. Implémentez cette formulation en utilisant un solveur d'optimisation.

Montrer que pour la comparaison $z \succ t$, il n'existe aucune explication de type (m-1), ni de type (1-m). Montrer qu'il existe une explication combinant des trade-offs de type (m-1) et (1-m) pour cette comparaison.

Question 4 : Formuler un programme d'optimisation linéaire qui calcule une explication incluant des trade-offs de type (1-m) ou (m-1) de la comparaison $x \succ y$ si elle existe, et retourne un certificat de non-existence dans le cas contraire. Implémentez cette formulation en utilisant un solveur d'optimisation.

Les notes de deux candidats supplémentaires au concours viennent d'arriver et sont fournies dans la table ci-dessous. Saurez-vous expliquer à a_2 qu'il est moins bien classé que a_1 avec une explication de type (1-m) ou (m-1) ?

Candidat	A	B	C	D	E	F	G
a_1	89	74	81	68	84	79	77
a_2	71	84	91	79	78	73,5	77

Une fois les éléments ci-dessus mis en place, il vous est demandé une mise en oeuvre sur un jeu de données réel traité par regression logistique (vous pouvez utiliser le jeu de données ci-dessous, ou un autre de votre choix) :

- Le jeu de données original est disponible sur UCI Machine Learning repository (Wolberg et al., 1993). `https://archive.ics.uci.edu/dataset/15/breast+cancer+wisconsin+original` Ce jeu de données (néttoyé) a déjà été utilisé à des fins d'évaluation comparative dans Ustun et Rudin (2016) et est disponible à l'adresse `https://github.com/ustunb/miplib2017-slim/tree/master/models/data`

3 Travail demandé et organisation du projet

Le projet doit être réalisé en groupe de trois étudiants. Deux séances de cours seront consacrées à ce projet (15/12/2025 et 19/01/2026). La présence de tous aux deux séances projet est obligatoire et sera contrôlée. La participation active aux deux séances projet fait partie intégrante de l'évaluatrion du projet. A l'issue de la séance du 15/12/2025, un rendu intermédiaire est demandé, et devra être déposé dans l'espace Edunao du cours. Pour le rendu intermédiaire, l'attendu est que la question 1 (au minimum) devra être traitée.
Les soutenances sont planifiées le 03/02/2026. Lors de la soutenance, la présence et la participation de chacun des membre du trinôme est requise.