

Assignment 2 Aufgabe E

Donnerstag, 7. November 2019 14:25

E Neural Networks XOR

(5 points)

We described a neural network that represents an XOR gate in class.

- Write down a function, that consists of all modular parts of that network. Use the functions of AND, OR and NOT and stitch it together.
- Use explicit weights, for example the ones we used in class.

Gegeben:

Zur Vereinfachung werden alle θ auf 1 gesetzt

$$\text{AND}(x_1, x_2) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + b \quad \begin{cases} > 0 : 1 \\ \leq 0 : 0, \text{ mit } \theta_1 = 1; \theta_2 = 1; b = -1 \end{cases}$$

$$\text{OR}(x_1, x_2) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + b \quad \begin{cases} > 0 : 1 \\ \leq 0 : 0, \text{ mit } \theta_1 = 1; \theta_2 = 1; b = 0 \end{cases}$$

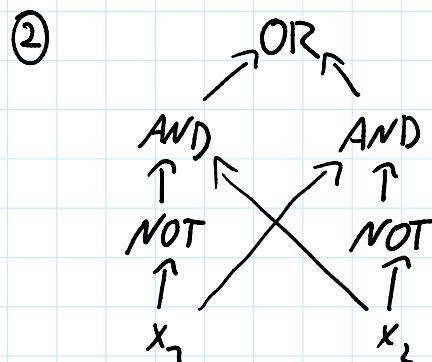
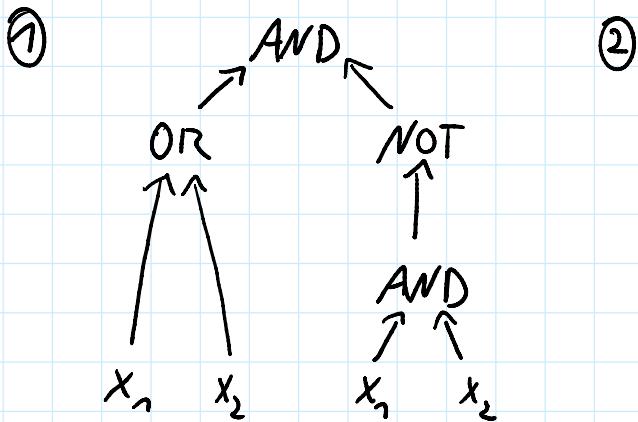
$$\text{NOT}(x_1) = \theta_1 x_1 + b \quad \begin{cases} (> 0 : 1) \\ \leq 0 : 0 \end{cases}, \text{ mit } \theta_1 = -1; b = 1$$

\Rightarrow Es ist keine Aufteilung notwendig, da als Funktionswerte lediglich 1 bzw. 0 möglich sind, wenn wie hier für x_1 nur 1 und 0 eingesetzt wurden

Gesucht:

$$\text{XOR}(x_1, x_2)$$

Skizzen:



Rechnerisch:

$$\textcircled{1} \quad \text{XOR}(x_1, x_2) = \text{AND}(\text{OR}(x_1, x_2) + \text{NOT}(\text{AND}(x_1, x_2)))$$

$$\textcircled{2} \quad \text{XOR}(x_1, x_2) = \text{OR}(\text{AND}(\text{NOT}(x_1), x_2), \text{AND}(x_1, \text{NOT}(x_2)))$$

Hilfsfunktionen:

$$h = \begin{cases} \leq 0 & | x=0 \\ > 0 & | x=1 \end{cases}$$

$$\text{AND}(x_1, x_2) = h(x_1 + x_2 - 1)$$

$$\text{OR}(x_1, x_2) = h(x_1 + x_2)$$

Berechnungen:

Es gibt vier mögliche Kombinationen für $\text{XOR}(x_1, x_2)$

$$1. \text{ XOR } (0, 0)$$

$$2. \text{ XOR } (0, 1)$$

$$3. \text{ XOR } (1, 0)$$

$$4. \text{ XOR } (1, 1)$$

Komplementär, da hier nur Werte addiert bzw. subtrahiert werden

$$\textcircled{1} \quad \text{XOR } (x_1, x_2)$$

$$= h(\text{OR}(x_1, x_2) + \text{NOT}(h(x_1 + x_2 - 1)) - 1)$$

$$= h(h(x_1 + x_2) + \text{NOT}(h(x_1 + x_2 - 1)) - 1)$$

$$= h(h(x_1 + x_2) + (-h(x_1 + x_2 - 1)) + 1) - 1$$

Beweis:

$$\text{XOR } (0, 0)$$

$$= h(h(0+0) + (-h(0+0-1)) + 1) - 1$$

$$= h(h(0) + (-h(1) + 1) - 1)$$

$$= h(0 + (-1 + 1) - 1)$$

$$= h(-1)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$\text{XOR } (0, 1)$$

$$= h(h(0+1) + (-h(0+1-1)) + 1) - 1$$

$$= h(h(1) + (-h(0) + 1) - 1)$$

$$= h(1 + (0+1) - 1)$$

$$= h(1 + 1 - 1)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

$XOR(1, 1)$

$$= h(h(1+1) + (-h(1+1-1)+1)-1)$$

$$= h(1 + (-h(1))+1)-1$$

$$= h(1 + (-1+1)-1)$$

$$= h(0)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

② $XOR(x_1, x_2)$

$$= h(AND(NOT(x_1), x_2) + AND(x_1, NOT(x_2)))$$

$$= h(h(NOT(x_1), x_2 - 1) + h(x_1 + NOT(x_2) - 1))$$

$$= h(h(-x_1 + 1 + x_2 - 1) + h(x_1 - x_2 + 1 - 1))$$

$$= h(h(-x_1 + x_2) + h(x_1 - x_2))$$

Beweis:

$XOR(0, 0)$

$$= h(h(-0+0) + h(0-0))$$

$$= h(h(0) + h(0))$$

$$= h(0+0)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$XOR(0, 1)$

$$= h(h(-0+1) + h(0-1))$$

$$= h(h(1) + h(-1))$$

$$= h(1 + 0)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

$XOR(1,1)$

$$= h(h(-1+1) + h(1-1))$$

$$= h(h(0) + h(0))$$

$$= h(0+0)$$

$$= \underline{0}$$