

## — Übungsblatt 3 (T &amp; P) —

**Aufgabe 7 (T & P)****(Automatische Differentiation)**

Mit Hilfe der sogenannten Differentiationsarithmetik sollen die Werte der Funktion

$$f(x) = x \cdot \frac{4+x}{3-x}$$

und die Werte ihrer Ableitung  $f'(x)$  an verschiedenen Stellen  $x$  berechnet werden.

Die Differentiationsarithmetik ist eine Arithmetik geordneter Paare der Form

$$U = (u, u') \quad \text{mit} \quad u, u' \in \mathbb{R}.$$

In der ersten Komponente von  $U$  steht der Funktionswert, in der zweiten der Wert der Ableitung.

Die Rechenregeln für die Arithmetik lauten dann

$$\begin{aligned} U + V &= (u, u') + (v, v') = (u + v, u' + v') \\ U - V &= (u, u') - (v, v') = (u - v, u' - v') \\ U * V &= (u, u') * (v, v') = (u * v, u * v' + u' * v) \\ U / V &= (u, u') / (v, v') = (u/v, (u' - u * v' / v) / v), \quad v \neq 0, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Komponente jeweils die entsprechende Differentiationsregel verwendet wird.

Als Ausgangswerte für die Funktionswertberechnung benötigt man die Paar-Darstellungen  $X$  und  $C$  der unabhängigen Variable  $x$  und eventueller Konstanten  $c$ . Für die unabhängige Variable  $x$  – also für  $f(x) = x$  – folgt wegen  $\frac{dx}{dx} = 1$

$$X = (x, 1).$$

Für eine beliebige Konstante  $c$  – also für  $f(x) = c$  – folgt wegen  $\frac{dc}{dx} = 0$

$$C = (c, 0).$$

Definiert man nun einen Datentyp `Diff` als Java-Klasse mit zwei Instanzvariablen für den Funktionswert und den Wert der Ableitung, Instanzmethoden `plus`, `minus`, `times` und `divby` (für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) sowie je eine Methode für die Erzeugung einer unabhängigen Variable  $x$  und für die Erzeugung einer Konstanten als `Diff`-Objekt, dann lässt sich  $f$  als Methode mit Parameter `x` und Ergebnistyp `Diff` formulieren, die mit den `Diff`-Methoden anstelle der Operatoren arbeitet. Als Ergebnis ergibt sich wegen

$$f(X) = f((x, 1)) = (f(x), f'(x))$$

ein Paar (vom Typ `Diff`), das den Funktionswert und den Wert der Ableitung enthält.

Schreiben Sie eine entsprechende Java-Klasse `Diff` mit folgenden Bestandteilen:

- Zwei private `double`-Variablen für den Funktionswert und den Ableitungswert.
- Einen privaten Konstruktor, der den Funktionswert und den Ableitungswert mit seinen Parameterwerten initialisiert.
- Eine öffentliche Klassenmethode `public static Diff diffVar (double x)` die ein `Diff`-Objekt für eine unabhängige Variable  $x$  erzeugt und zurück liefert.
- Eine öffentliche Klassenmethode `public static Diff diffConst (double c)` die ein `Diff`-Objekt für eine Konstante  $c$  erzeugt und zurück liefert.
- Öffentliche Getter-Methoden `getF` (für den Funktionswert) und `getDf` (für den Ableitungswert).
- Öffentliche Methoden
  - `public Diff plus (Diff v)`
  - `public Diff minus (Diff v)`
  - `public Diff times (Diff v)`
  - `public Diff divby (Diff v)`für die vier Grundoperationen, die jeweils ein neues Objekt vom Typ `Diff` zurück liefern.

Schreiben Sie dann eine Java-Klasse `DiffTest` mit

- einer Klassenmethode `f` mit einem `Diff`-Parameter für die Funktion

$$f(x) = x \cdot \frac{4 + x}{3 - x}$$

und

- einer `main`-Methode, in der ein `double`-Wert  $x$  eingelesen und mittels der `Diff`-Funktion `f` die Werte von  $f(x)$  und  $f'(x)$  berechnet und ausgegeben werden.

**Hinweis:** Die Konstanten 4 bzw. 3 in der Funktion  $f$  haben als `Diff`-Variablen die Darstellung  $(4, 0)$  bzw.  $(3, 0)$ . Der  $x$ -Wert muss als unabhängige Variable  $(x, 1)$  dargestellt werden.

Wie müsste die Klasse `Diff` erweitert werden, wenn man auch elementare mathematische Funktionen wie zum Beispiel Sinus behandeln wollte?