A 1 In dieser Übung soll die Kreiszahl π approximiert werden. Erzeuge hierzu n Tupel (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$ mit $x_i, y_i \sim u([-1,1])$ und hieraus die Variable $z_i = 4 \cdot 1_{(x_i^2+y_i^2 \leq 1)}(x_i, y_i)$. Approximiere die Zahl π durch $\overline{z}$. Stelle in der Tabelle die Approximation und den Fehler in Abhängigkeit von n dar. Wähle hierbei $n = 10^k,\ k \in \{1, \dots, 8\}$. Stimmt die Genauigkeit mit der Tschebischeff-Schätzung aus der Vorlesung überein?

A 2 In dieser Übung soll der Wert 1.96 als 0.975-Quantil der Standardnormalverteilung mit Hilfe von Monte-Carlo-Integration überprüft werden.

a) Erzeuge Hierzu n gleichverteilte Zufallszahlen auf dem Intervall $[-1.96, 1, 96]$ und bestimme $2 \cdot 1.96 \cdot \overline{\varphi(x)}$, wobei φ die Dichte der Standardnormalverteilung ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$. Stelle Analog zu A1 für verschiedene n die Approximation und ihre Genauigkeit in einer Tabelle dar. Wähle die gleichen Werte für n wie in A1. (Hinweis: Der gesuchte Integralwert ist 0.95!)

b) Führe für die Werte $n = 10^5, n = 10^6$ und $n = 10^7$ jeweils 200 Approximationen durch und stelle die Verteilung der Schätzer für $p = 0.95$ in einer gemeinsamen Abbildung dar. Interpretiere das Ergebnis.

A 3 In dieser Übung soll eine Fläche mit Hilfe von Monte-Carlo-Integration berechnet werden. Als umgebendes Rechteck wählen wir $[-7, 7] \times [-4, 4]$, die Fläche A ist durch folgende Ungleichungen definiert:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} - 1 \leq 0 \wedge \\
&\qquad \left((|x| \geq 4 \wedge -\frac{3\sqrt{33}}{7} \leq y \leq 0) \vee (|x| \geq 3 \wedge y \geq 0) \right) \\
&\vee \quad (-3 \leq y \leq 0 \wedge -4 \leq x \leq 4 \wedge \\
&\qquad -\frac{(3\sqrt{33} - 7)x^2}{112} + \frac{|x|}{2} + \sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2} - y - 3 \leq 0) \\
&\vee \quad \left(y \geq 0 \wedge \frac{3}{4} \leq |x| \leq 1 \wedge -8|x| - y + 9 \geq 0 \right) \\
&\vee \quad \left(\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{4} \wedge 3|x| - y + \frac{3}{4} \geq 0 \wedge y \geq 0 \right) \\
&\vee \quad \left(|x| \leq \frac{1}{2} \wedge y \geq 0 \wedge \frac{9}{4} - y \geq 0 \right) \\
&\vee \quad (1 \leq |x| \leq 3 \wedge y \geq 0 \\
&\qquad \wedge -\frac{|x|}{2} - \frac{3}{7}\sqrt{10}\sqrt{4 - (|x| - 1)^2} - y + \frac{6\sqrt{10}}{7} + \frac{3}{2} \geq 0)
\end{aligned}
$$

Erzeuge $n = 10^5$ Tupel (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$ mit $x_i \sim u([-7, 7])$ und $y_i \sim u([-4, 4])$ und bilde hieraus die Bernoulli-Variable $z_i = 1_A(x_i, y_i)$.

a) Selle die Fläche A anhand der Punkte, die in A liegen, graphisch dar. Wenn die Ungleichungen richtig umgesetzt wurde, sollte Dir die Fläche bekannt vorkommen.

b) Berechne näherungsweise den Flächeninhalt von A mit Hilfe der Formel $A \approx 14 \cdot 8 \cdot \overline{z}$.