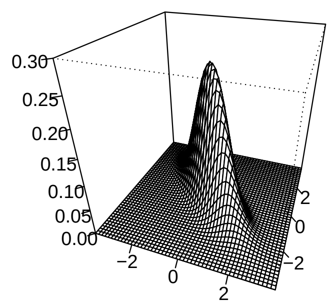
h_da
HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
fbmn
FACHBEREICH MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

Antje Jahn
Multivariate Statistik
Sommersemester 2019

Arbeitsblatt 2

A 1



a) Welche der folgenden Aussagen ist bezüglich der o.a. Abbildung wahr?
   i) Es ist die Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariable dargestellt.
   ii) Es ist die Verteilungsfunktion einer dreidimensionalen Zufallsvariable dargestellt.
   iii) Es ist die Dichtefunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariable dargestellt.
   iv) Es ist die Dichtefunktion einer dreidimensionalen Zufallsvariable dargestellt.
   v) Es ist weder eine Verteilungs- noch eine Dichtefunktion dargestellt.

b) Welche der folgenden Aussagen ist bezüglich der o.a. Abbildung wahr?
   i) Der Erwartungswert μ beträgt in etwa 0.25.
   ii) Der Erwartungswert ist μ ist $(0, 0)$.
   iii) Der Erwartungswert ist μ ist $(0, 0, 0.25)$.

c) Welche der folgenden Aussagen ist bezüglich der o.a. Abbildung wahr?
   i) Die zugrundeliegenden Zufallsvariablen sind positiv korreliert.
   ii) Die zugrundeliegenden Zufallsvariablen sind negativ korreliert.
   iii) Die zugrundeliegenden Zufallsvariablen sind unkorreliert.

A 2 Es sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor, $B \in \mathbb{R}^{k\times d}$ eine Matrix und $a \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}^k$ Vektoren. Sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Kovarianzmatrix von X. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $Cov(B \cdot X + b) = B \cdot \Sigma \cdot B^T$
b) $Var(a^T \cdot X) = a^T \cdot \Sigma \cdot a$

Folgende Eigenschaften der Kovarianz (für eindimensionale Zufallsvariablen) sollten bekannt sein und dürfen verwendet werden:

(*) $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$

(**) $Cov(aX, bY) = ab \cdot Cov(X, Y)$

(***) $Cov(X_1 + \dots + X_n, Y_1 + \dots + Y_m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j)$

Hinweise zu a)

- Definieren Sie zunächst einen neuen Zufallsvektor $Y := B \cdot X + b$
- Berechnen Sie für beliebiges i die i-te Komponente Y_i (Matrixmultiplikation)
- Berechnen Sie $Cov(Y_i, Y_j)$ und benutzen Sie dabei die (*), (**), (***)

Hinweise zu b)

- Definieren Sie zunächst eine neue Zufallsvariable $Y := a^T \cdot X$
- Nutzen Sie aus, dass Var(Y) = Cov(Y,Y) (Warum gilt das?)
- Nutzen Sie (**), (***) aus oder argumentieren Sie mit (a)

A 3 Zwei Aktien sind in einem Portfolio zu den relativen Anteilen r und $1 - r$ enthalten. Die Rendite dieser Aktien (R_1, R_2) sind zweidimensional normalverteilt mit Parametern

$$E(R_1) = \mu_1, \quad E(R_2) = \mu_2, \quad Var(R_1) = \sigma_1^2, \quad Var(R_2) = \sigma_2^2, \quad Cor(R_1, R_2) = \rho$$

a) Wie hoch ist die erwartete Portfoliorendite?
b) Wie ist die Portfoliorendite verteilt? Geben Sie auch die Parameter der Verteilung an.
c) Die Verteilungsfunktion von $R = (R_1, R_2)^T$ nehme an der Stelle $(0, 0)$ den Wert 0.159 an. Was sagt dann dieser Wert aus?

A 4 Sie erfahren, dass Sie in einer Klausur mit insgesamt 10 Aufgaben a 4 Punkten eine Gesamtpunktzahl von 30 Punkten erreicht haben.

a) Welche Punktzahl würden Sie für Ihre Lösung der ersten Aufgabe erwarten, wenn Sie ansonsten keine weitere Information haben?

b) Zeigen Sie, dass sich Ihre Intuition auch analytisch beweisen lässt: $X_1, \ldots X_n$ seien unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert, weiterhin sei $S_n = \sum X_i$. Zeigen Sie : $E(X_i|S_n = s) = \frac{s}{n}$.
Hinweis : Nutzen Sie $E(S_n|S_n = s) = s$ und berechnen Sie $E(S_n|S_n = s)$ auch über die Additivität bedingter Erwartungswerte.

A 5 Ein Elektrohandel verkauft Batterien in drei verschiedenen Packungsgrößen (2 Stück, 4 Stück, 10 Stück). Es wurde beobachtet, dass Frauen zwar häufiger größere Packungen kaufen als Männer (Frauen: 20% 2er-Pack, 30% 4er-Pack, 50% 10er-Pack; Männer 50% 2er-Pack, 25% 4er-Pack, 25% 10er-Pack). Allerdings sind auch nur 30% der Kunden weiblich.

Es sei X die Anzahl an Batterien in einer verkauften Packung (es gibt 2er, 4er und 10er Packs) und Y das Geschlecht des Kunden (0=weiblich, 1=männlich).

a) Bestimmen Sie $E(X|Y = 0)$ und $E(X|Y = 1)$.

b) Bestimmen Sie die durchschnittliche verkaufte Anzahl an Batterien innerhalb eines Einkaufs.