```
set.seed(42)
```

Arbeitsblatt 6

Aufgabe 2

Wir können die Unkorreliertheit einerseits beweisen durch

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) &= \operatorname{Cov}\left((A^T X)_i, (A^T X)_j\right) && (1)\\
&= \operatorname{Cov}\left(A^T X\right)_{ij} && (2)\\
&= \left(A^T \operatorname{Cov}(X)\, A\right)_{ij} && (3)\\
&= \left(A^T \Sigma A\right)_{ij} && (4)\\
&= \Lambda_{ij} && (5)\\
&= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} && (6)
\end{aligned}
$$

Alternativ zur besseren Vorstellung. Sei e_i der i-te Einheitsvektor, dann erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) &= \operatorname{Cov}\left((A^T X)_i, (A^T X)_j\right) && (7)\\
&= \operatorname{Cov}\left(e_i^T A^T X, e_j^T A^T X\right) && (8)\\
&= e_i^T \operatorname{Cov}\left(A^T X, A^T X\right) e_j && (9)\\
&= e_i^T A^T \operatorname{Cov}(X, X)\, A e_j && (10)\\
&= e_i^T A^T \Sigma A e_j && (11)\\
&= e_i^T \Lambda e_j && (12)\\
&= e_i^T \Lambda e_j && (13)\\
&= \Lambda_i e_j && (14)\\
&= \Lambda_{ij} && (15)
\end{aligned}
$$