Aufgabe 1

```
set.seed(123)
gendata = function (x, beta, len) {
  return (beta * log(x) + rnorm(len))
}

alllin <- matrix(NA,nrow=10000,ncol=7)
colnames(alllin) <- c("fdach","y", "quadVor","EBias", "VarFDach","EQuadVor", "AIC")
allpol <- matrix(NA,nrow=10000,ncol=7)
colnames(allpol) <- c("fdach","y", "quadVor","EBias", "VarFDach","EQuadVor", "AIC")
for (i in 1:10000){
  x <- runif(100,1,5)
  residuen <- rnorm(100,0,1)
  b <- 4
  y <- b*log(x)+residuen
  lmlinear <- lm(y~x)
  lmpoly <- lm(y~x+I(x^2)+I(x^3)+I(x^4)+I(x^5))
  alllin[i,1] <- lmlinear$coefficients  %*% c(1,3)
  allpol[i,1] <- lmpoly$coefficients %*% c(1,3,3^2,3^3,3^4,3^5)

  alllin[i,2] <- b*log(3)+rnorm(1)
  allpol[i,2] <- alllin[i,2]

  alllin[i,3] <- (alllin[i,2]-alllin[i,1])^2
  allpol[i,3] <- (allpol[i,2]-allpol[i,1])^2
  alllin[i,7] <- AIC(object = lmlinear)
  allpol[i,7] <- AIC(object = lmpoly)
}
alllin[,4] <- mean(alllin[,1])-4*log(3)
allpol[,4] <- mean(allpol[,1])-4*log(3)

alllin[,5] <- var(alllin[,1])
allpol[,5] <- var(allpol[,1])


x3 <- rep(3,10000)
y3 <- gendata(x3, 4, 10000)
alllin[,6] <- mean((y3-alllin[,1])^2)
allpol[,6] <- mean((y3-allpol[,1])^2)

AIC100_lin <- mean(alllin[,7])
AIC100_poly <- mean(allpol[,7])
```

```
alllin20 <- matrix(NA,nrow=10000,ncol=7)
colnames(alllin20) <- c("fdach","y", "quadVor","EBias", "VarFDach","EQuadVor", "AIC")
allpol20 <- matrix(NA,nrow=10000,ncol=7)
colnames(allpol20) <- c("fdach","y", "quadVor","EBias", "VarFDach","EQuadVor", "AIC")
for (i in 1:10000){
  x <- runif(20,1,5)
  residuen <- rnorm(20,0,1)
  b <- 4
```

```
  y <- b*log(x)+residuen
  lmlinear <- lm(y~x)
  lmpoly <- lm(y~x+I(x^2)+I(x^3)+I(x^4)+I(x^5))
  alllin20[i,1] <- lmlinear$coefficients  %*% c(1,3)
  allpol20[i,1] <- lmpoly$coefficients %*% c(1,3,3^2,3^3,3^4,3^5)

  alllin20[i,2] <- b*log(3)+rnorm(1)
  allpol20[i,2] <- alllin20[i,2]

  alllin20[i,3] <- (alllin20[i,2]-alllin20[i,1])^2
  allpol20[i,3] <- (allpol20[i,2]-allpol20[i,1])^2

  alllin20[i,7] <- AIC(object = lmlinear)
  allpol20[i,7] <- AIC(object = lmpoly)
}

alllin20[,4] <- mean(alllin20[,1])-4*log(3)
allpol20[,4] <- mean(allpol20[,1])-4*log(3)

alllin20[,5] <- var(alllin20[,1])
allpol20[,5] <- var(allpol20[,1])

x4 <- rep(3,20)
y4 <- gendata(x4, 4, 20)
alllin20[,6] <- mean((y4-alllin20[,1])^2)
allpol20[,6] <- mean((y4-allpol20[,1])^2)

AIC20_lin <- mean(alllin20[,7])
AIC20_poly <- mean(allpol20[,7])
```

MSE	Linear	Poly
$n = 20$	0.9740106	0.9853232
$n = 100$	1.1391127	1.0490115

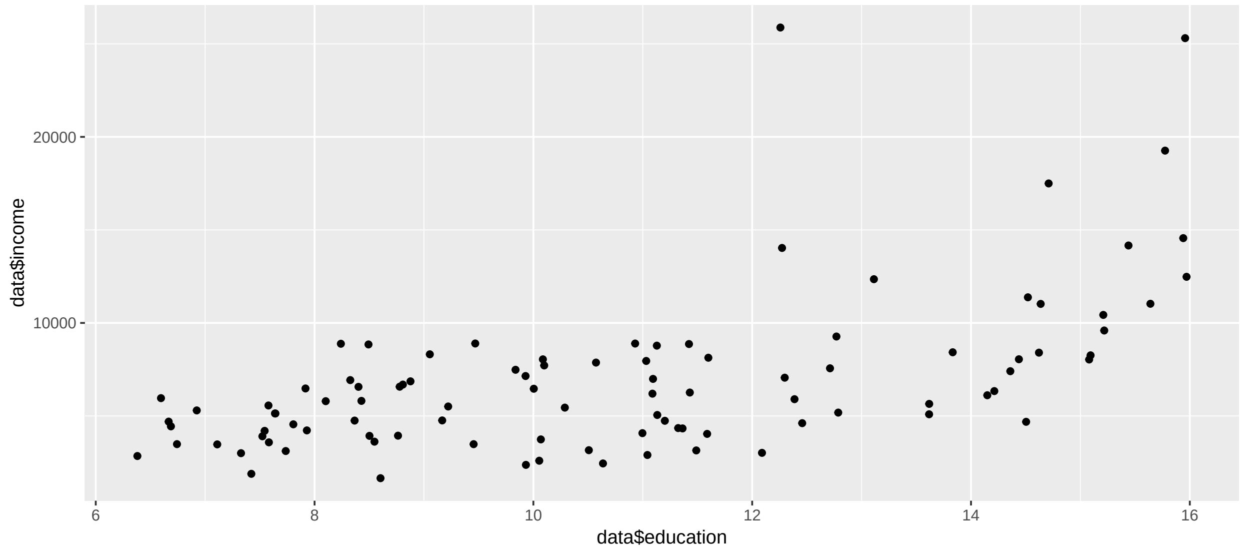
AIC	Linear	Poly
$n = 20$	61.7405211	62.1902208
$n = 100$	297.6640967	290.4355121

Der durchschnittliche AIC im Falle $n = 20$ ist für das lineare Modell mit AIC = 61.68768 kleiner als im polynomialen Modell mit AIC = 62.13233. Im Falle $n = 100$ ist das polynomiale Modell laut dem AIC besser (AIC = 290.6327) als das lineare Modell (AIC = 297.949). Dies stimmt mit den Ergebnissen der geschätzten quadratischen Vorhersagefehlern überein. Bei $n = 20$ ist das lineare Modell leicht besser, im Falle $n = 100$ produziert das polynomiale Modell die genaueren Vorhersagen.

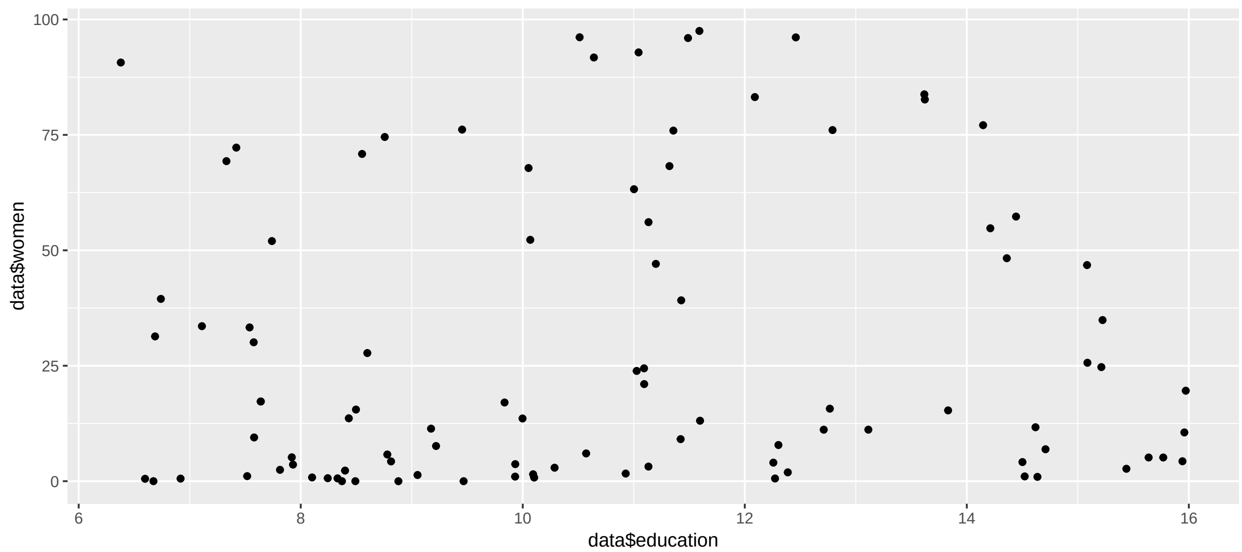
Aufgabe 2

a)

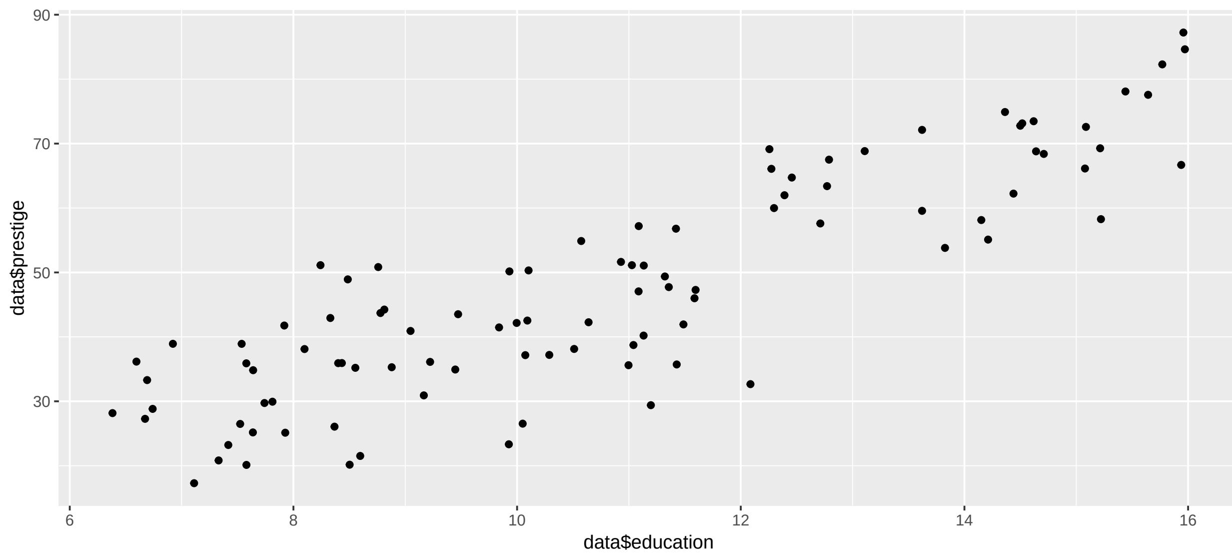
```
library(car)
library(ggplot2)
data <- Prestige
data$census <- NULL
data <- data[complete.cases(data),]
data$type1 <- as.numeric((data$type))
ggplot(data=data,aes(x=data$education,y=data$income))+geom_jitter()
```



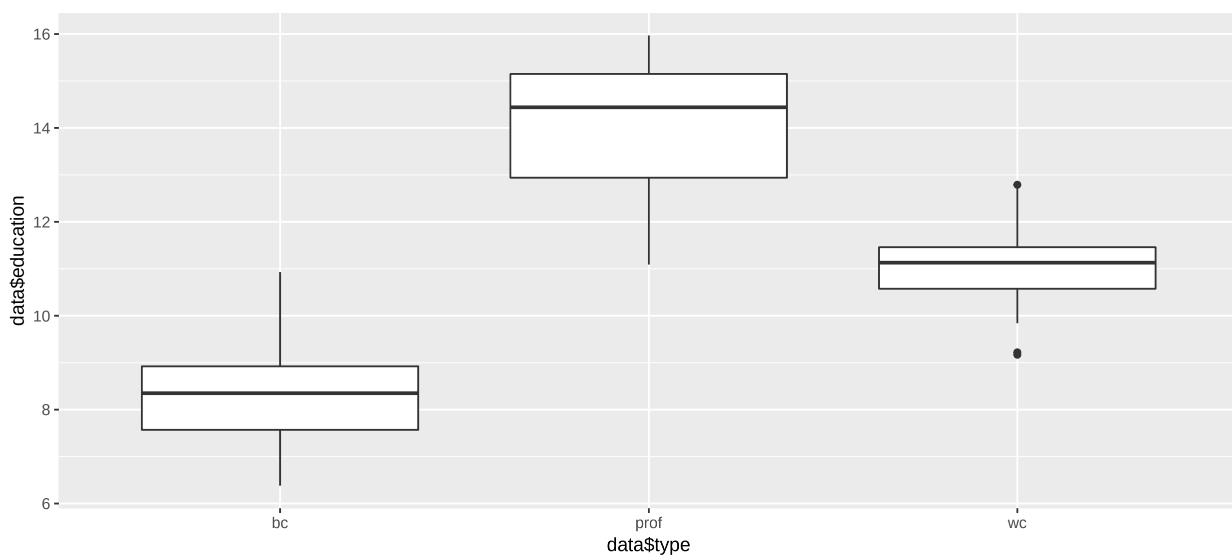

```
ggplot(data=data,aes(x=data$education,y=data$women))+geom_jitter()
```



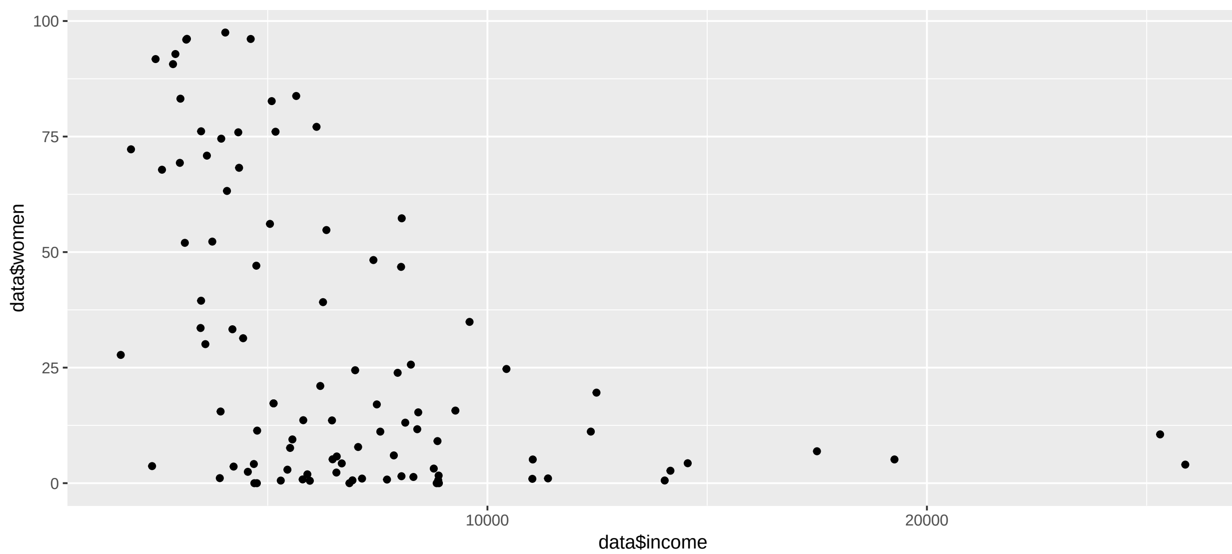

```
ggplot(data=data,aes(x=data$education,y=data$prestige))+geom_jitter()
```



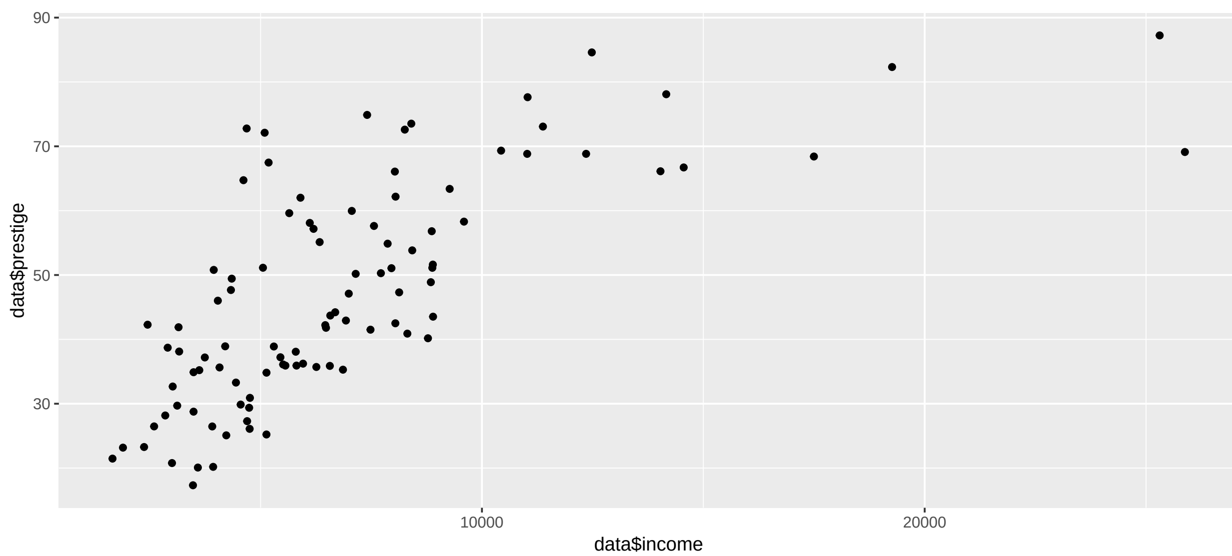

```
ggplot(data=data,aes(x=data$type,y=data$education))+geom_boxplot(aes(group=data$type))
```



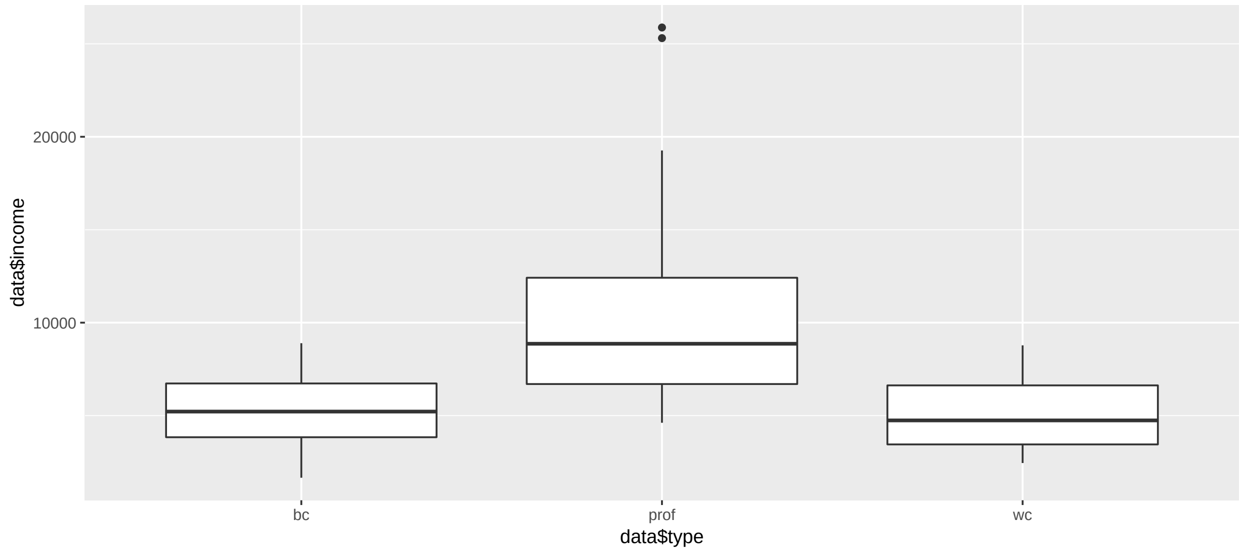

```
ggplot(data=data,aes(x=data$income,y=data$women))+geom_jitter()
```



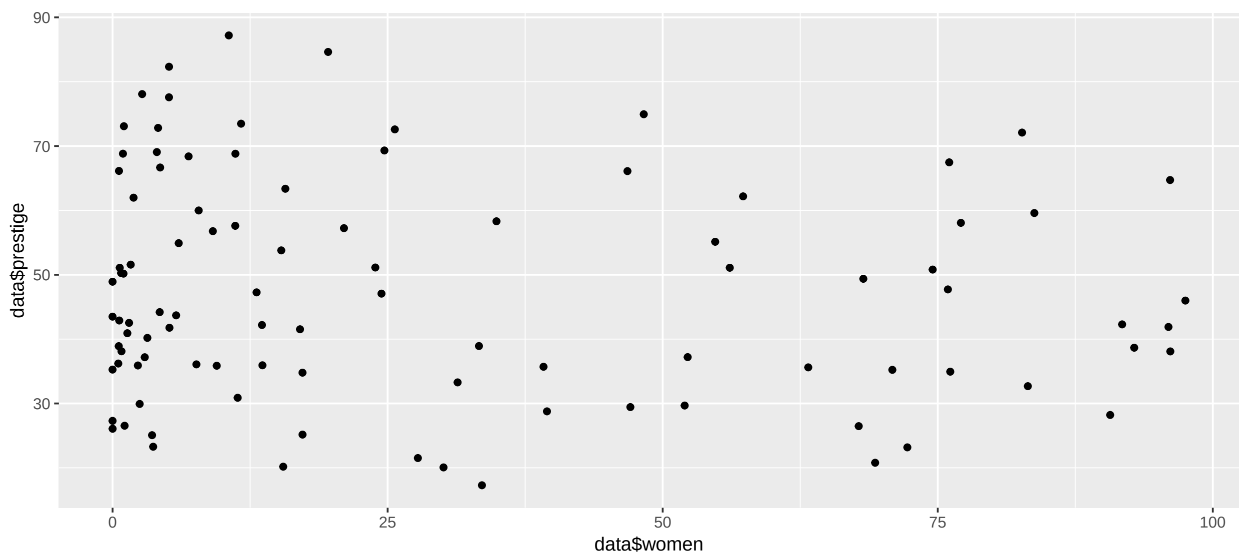

```
ggplot(data=data,aes(x=data$income,y=data$prestige))+geom_jitter()
```



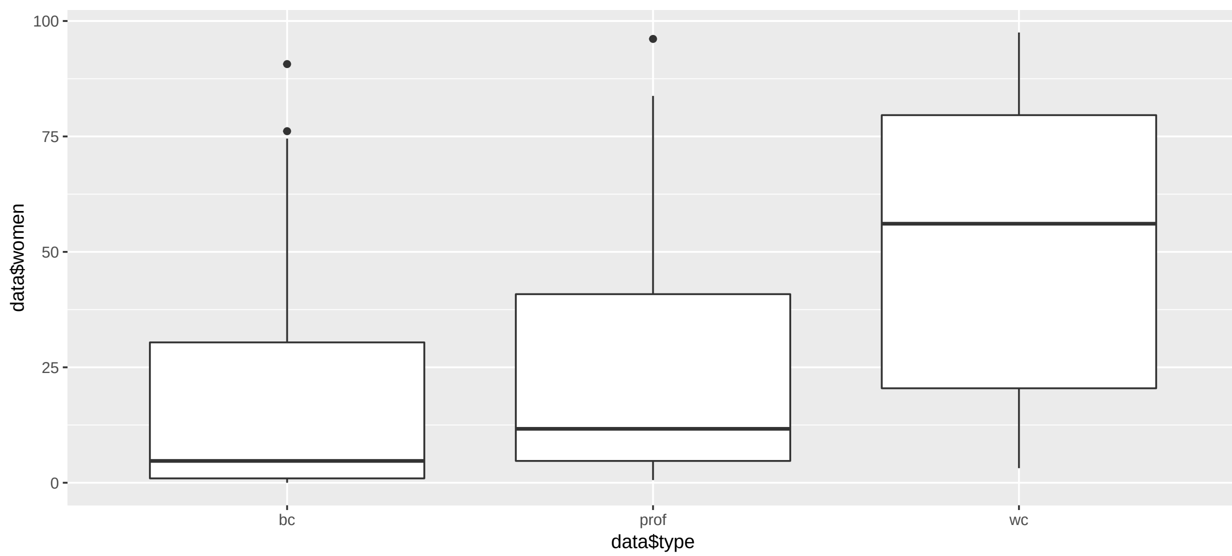

```
ggplot(data=data,aes(x=data$type,y=data$income))+geom_boxplot(aes(group=data$type))
```



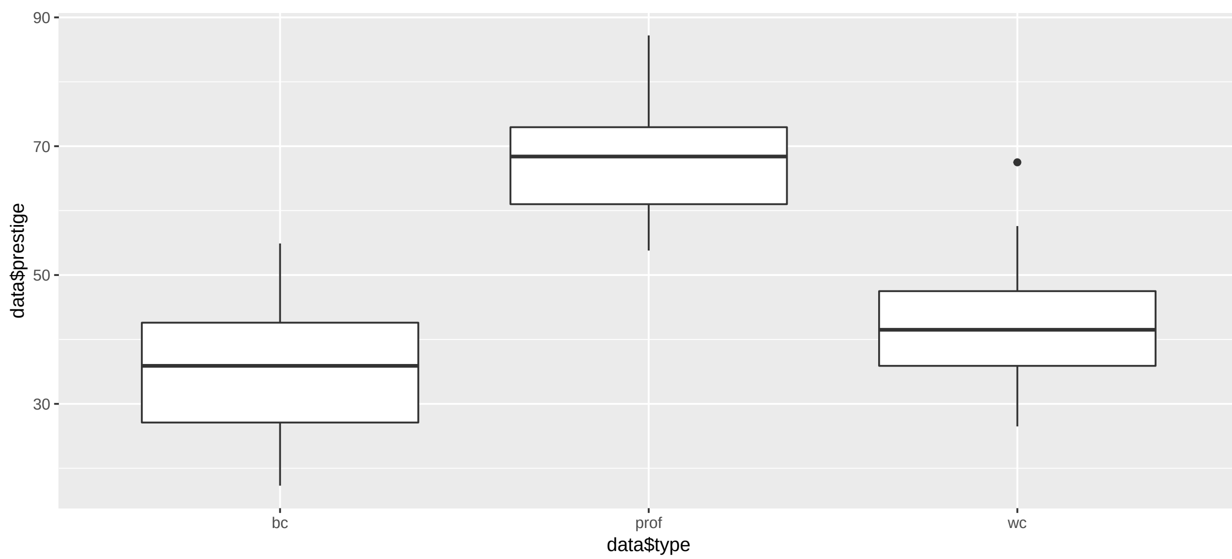

```
ggplot(data=data,aes(x=data$women,y=data$prestige))+geom_jitter()
```




```
ggplot(data=data,aes(x=data$type,y=data$women))+geom_boxplot(aes(group=data$type))
```




```
ggplot(data=data,aes(x=data$type,y=data$prestige))+geom_boxplot(aes(group=data$type))
```




```
data$type <- NULL
```

```
# 1.
model1 <- lm(data = data, prestige~income)

# 2.
model2 <- lm(data = data, prestige~education)

# 3.
model3 <- lm(data = data, prestige~type1)

# 4.
model4 <- lm(data = data, prestige~women)
```

```r
# 5.
model5 <- lm(data = data, prestige~education+income)

#6.
model6 <- lm(data = data, prestige~education+type1)

#7.
model7 <- lm(data = data, prestige~education+women)

#8.
model8 <- lm(data = data, prestige~education+income+type1)

#9.
model9 <- lm(data = data, prestige~education+income+type1+women)

n_var <- dim(data)[1]

train_error <- function(n_var, model){
  return((1/n_var)*sum(residuals(model)^2))
}

opt_term <- function(n_var, p, model){
  return(((2*var(residuals(model)))/n_var) * p)
}

test_error_exp <- function(opt_term, train_error){
  return(opt_term + train_error)
}

results <- matrix(NA, ncol = 5, nrow = 9)
colnames(results) <- c("N_Param", "Trainingsfehler", "Optimismusterm",  "Erwarteter_Testfehler", "AIC")
rownames(results) <- c("model1", "model2", "model3","model4", "model5", "model6", "model7", "model8", "m
```

```r
model_list <- list(model1, model2, model3, model4, model5, model6, model7, model8, model9)
for (model in 1:length(model_list)){
  p <- length(model_list[[model]]$coefficients)
  results[model,1] <- length(model_list[[model]]$coefficients)
  results[model,2] <- train_error(n_var, model_list[[model]])
  results[model,3] <- opt_term(n_var, p, model_list[[model]])
  results[model,4] <- test_error_exp(results[model,3], results[model,2])
  results[model,5] <- AIC(model_list[[model]])
}
```

```
round(results,2)
#>        N_Param Trainingsfehler Optimismusterm Erwarteter_Testfehler    AIC
#> model1       2          146.18           6.03                152.20 772.62
#> model2       2           72.09           2.97                 75.06 703.34
#> model3       2          262.83          10.84                273.67 830.12
#> model4       2          285.74          11.78                297.53 838.31
#> model5       3           53.80           3.33                 57.13 676.67
#> model6       3           62.77           3.88                 66.65 691.78
#> model7       3           64.30           3.98                 68.27 694.13
#> model8       4           50.66           4.18                 54.84 672.78
#> model9       5           50.59           5.22                 55.81 674.65
```

- Länge der Ausbildung scheint den größten Einfluss auf die abhängige Variable zu haben, da das Modell 4 das beste Modell mit nur einer unabhängigen Variable ist.
- Modell 5 bietet aufbauend auf der Variablen Länge der Ausbildung die höchste Genaugkeit, durch Hinzunahme der Variable Einkommen. Frauenanteil (Modell 7) und Berufsklasse (Modell 6) sind dagegen laut AIC schlechtere Modelle.
- Weitere Hinzunahme der unabhängigen Variablen Berufsklasse und Frauenanteil führt zu keiner Verbesserung der Modellgüte.
- Modell 5 scheint das robusteste Modell zu sein, in dem nur signifikante unabhängige Variablen vorkommen. Das Risiko für Overfitting ist klein.

b)

Der AIC ist ein Vergleichswert und keine Kenngröße. Dies liegt insbesondere daran, dass der AIC zur Berechnung auf Maximum Likelihood basiert und dieser ist abhängig von der Anzahl an Messungen. Deshalb muss man, um AIC-Werte miteinander vergleichen zu können, die Modelle auf den gleichen Daten trainieren.