Praktikum 9

Aufgabe 1

a)

Aufgabe 2

a)

Sei λ fest.

$$\hat{f}(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} K_\lambda(x, x_i) y_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} K_\lambda(x, x_i)\right)^{-1}$$

Der Tricube-Kern ist definiert als

$$K_\lambda(x, x_i) = \begin{cases} \left(1 - \left|\frac{x - x_i}{\lambda}\right|^3\right)^3, & |x - x_i| \leq \lambda \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für x_i fest ist $K_\lambda(x, x_i)$ für jedes x_i ohne $|x - x_i| = \lambda$ als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Folglich bleiden die Punkte

$$|x - x_i| = \lambda \implies x_0 = \lambda + x_i \text{ und } x_0 = x_i - \lambda$$

als kritische Stellen auf Stetigkeit zu prüfen. Der Kern ist offensichtlich stetig in x_0, da der Wert beidseitig problemlos gegen 0 konvergiert. Wir prüfen die Differenzierbarkeit:

Sei $x_0 = \lambda + x_i$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} &= \frac{1}{h}\left(\left(1 - \left|\frac{\lambda + x_i - x_i + h}{\lambda}\right|^3\right)^3 - \left(1 - \left|\frac{\lambda + x_i - x_i}{\lambda}\right|^3\right)\right) && (1) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\left(1 - \left|1 + \frac{h}{\lambda}\right|^3\right)^3 - (1 - 1)^3\right) && (2) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(1 - \left(1 + \frac{h}{\lambda}\right)^3\right)^3 && (3) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(1 - \left(1 + 3\frac{h}{\lambda} + 3\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^3}{\lambda^3}\right)^3\right)^3 && (4) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(3\frac{h}{\lambda} + 3\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^3}{\lambda^3}\right)^3 = 0 && (5)
\end{aligned}$$

und der linksseitige Beweis $(-h)$ folgt analog.

Sei $x_0 = x_i - \lambda$.

$$\lim_{h\to 0} = \frac{1}{h}\left(\left(1-\left|\frac{x_i-\lambda-x_i+h}{\lambda}\right|^3\right)^3 - \left(1-\left|\frac{-\lambda+x_i-x_i}{\lambda}\right|^3\right)\right) \tag{6}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\left(1-\underbrace{\left|1-\frac{h}{\lambda}\right|^3}_{<0 \text{ für } h\to 0}\right)^3 - (1-1)^3\right) \tag{7}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1-\left(1-\frac{h}{\lambda}\right)^3\right)^3 \tag{8}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1-\left(1-3\frac{h}{\lambda}+3\frac{h^2}{\lambda^2}-\frac{h^3}{\lambda^3}\right)^3\right)^3 \tag{9}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(-3\frac{h}{\lambda}+3\frac{h^2}{\lambda^2}-\frac{h^3}{\lambda^3}\right)^3 = 0 \tag{10}$$

und der linksseitige Beweis $(-h)$ folgt analog.

Somit ist $K_\lambda(x, x_i)$ stetig differenzierbar und folglich ist $\hat{f}(x)$ ist Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar.

b)

Nimmt man nun den Epanechnikov Kernel

$$K_\lambda(x, x_i) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{x-x_i}{\lambda}\right)^2\right), & |x-x_i| \leq \lambda \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

dann sieht man, dass der Beweis der differenzierbarkeit analog verläuft. Der einzige nennenswerte Unterschied ist der Wegfall der beiden kubischen Potzen zu einer quadratischen Potenz.

Somit bleibt in Schritt (10) ein Term der Form

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}a\left(b\frac{h}{\lambda}+c\frac{h^2}{\lambda^2}\right), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

und dieser konvergiert wieder problemlos gegen 0 und wir erhalten die Differenzierbarkeit.

c)

Ersetzen wir im Beweis der Differenzierbarkeit alle Vorkommen von λ durch eine variable Funktion $h_\lambda(x) > 0$, so verändert sich im Beweis nichts grundlegen. Die Limiten konvergieren und der Kernel Smoother bleibt differenzierbar.