



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

Trabajo Práctico:
Sistema Oscilatorio Amortiguado

MODELACIÓN NUMÉRICA

2° CUATRIMESTRE 2024

Alumno	Padrón	E-mail
Máximo Utrera	109651	mutrera@fi.uba.ar
Marcos Torasso	100959	mtorasso@fi.uba.ar
Lucas Jang	109151	ljang@fi.uba.ar

Fecha de Entrega: 26 de Noviembre de 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Oscilador armónico con excitación uniforme	3
2.1. Descripción del sistema	3
2.2. Confección del ponderado implícito	3
2.3. Resolución y comparación inicial	3
2.4. Análisis de estabilidad	5
2.5. Estimación de la frecuencia natural de oscilación	6
2.6. Análisis de Error y Orden de convergencia	6
2.7. Evaluación de tiempos de ejecución	6
2.8. Elección del método	7
3. Oscilador amortiguado accionado por un lomo de burro	8
3.1. Descripción del sistema	8
3.2. Resolución de sistema anterior con amortiguación	8
3.3. Resolución del sistema con loma de burro	9
3.4. Búsqueda de k y λ apropiado	9
3.5. Comparación de k y λ iniciales vs óptimos	10
4. Conclusiones	11

1 Introducción

El propósito del presente informe es abordar el análisis del comportamiento dinámico del sistema de suspensión de un vehículo mediante un modelo matemático que representa un oscilador amortiguado bajo diferentes condiciones de excitación. El sistema de suspensión tiene como objetivo principal garantizar el confort de los pasajeros al reducir las aceleraciones verticales generadas por irregularidades en el terreno y mantener el contacto adecuado entre los neumáticos y el suelo, incrementando la seguridad en la conducción.

El modelo matemático utilizado es la siguiente ecuación diferencial a la cual se llega mediante la aplicación de la ley de Newton ($\sum F = m \times a$):

$$\blacksquare \quad y'' = \frac{k}{m}(c - y) + \frac{\lambda}{m}(c' - y')$$

Siendo y la posición de la carrocería (y' : velocidad, y'' : aceleración), c la cota o elevación del terreno, k la constante elástica del muelle y λ la constante de amortiguación.

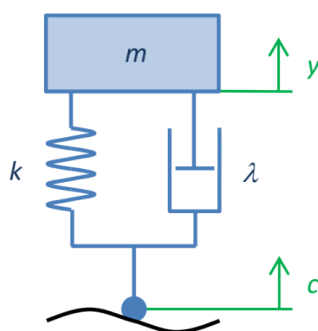


Figura 1: Esquema del modelo matemático

El trabajo se estructura en dos etapas de análisis:

1. **Oscilador armónico con excitación uniforme:** Se resuelve el sistema para condiciones iniciales específicas utilizando el método numérico de **ponderación implícita**, explorando el impacto del factor de ponderación (β), corroborando la frecuencia natural de oscilación experimental con la analítica y analizando el orden de convergencia de cada método. Asimismo, se elige la configuración más adecuada en términos de precisión, estabilidad y tiempo de ejecución.
2. **Oscilador amortiguado con excitación variable:** Se aborda la respuesta del sistema frente a un perfil de terreno con un lomo de burro. En esta etapa, se ajustan los valores de k y λ para optimizar la amortiguación bajo ciertas restricciones.

2 Oscilador armónico con excitación uniforme

2.1. Descripción del sistema

En esta etapa se llevarán a cabo varios análisis del método numérico de ponderación implícita, utilizando un sistema con las siguientes características:

- $T = 5s$ (periodo de simulación)
- $m = \frac{109651}{200} kg = 548,26kg$
- $k = 25000N/m$
- $\lambda = 0Ns/m$ (sin amortiguación)
- $c = 0,1m \quad \forall t$ (terreno cte.)

2.2. Confección del ponderado implícito

Previo a la resolución del sistema se determinaron las formulas matemáticas a implementar. Para esto y observando que la ecuación diferencial a resolver es de segundo orden y lineal, se decide realizar un cambio de variables de manera tal que se la pueda dividir en dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

- $y = u$
- $y' = u' = v$
- $y'' = u'' = v'$

Dadas las dos nuevas variables u y v , se pueden escribir las siguientes ecuaciones diferenciales donde las derivadas de las nuevas variables son funciones de u , v y t .

- $u' = f(u, v, t) = v$
- $v' = g(u, v, t) = \frac{k}{m}(c - u) + \frac{\lambda}{m}(c' - v)$

Luego de llegar a estas ecuaciones, se puede simplemente aplicar el método de ponderado implícito para calcular un determinado u y v , de esta manera se llega a las siguientes formulas finales para calcular dichos valores.

- $u_{n+1} = u_n + \Delta t[(1 - \beta) \times f(u_n, v_n, t_n) + \beta \times f(u_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1})]$
- $v_{n+1} = v_n + \Delta t[(1 - \beta) \times g(u_n, v_n, t_n) + \beta \times g(u_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1})]$

Donde Δt es un paso de tiempo utilizado para **discretizar** el mismo de manera tal que sea calculable numéricamente, β como fue mencionado anteriormente es el factor de ponderación entre los dos términos, los cuales son los métodos numéricos Euler explícito (evalúa la función en los valores anteriores) y Euler implícito (evalúa la función en el mismo valor que se busca)

Una vez encontradas estas dos formulas se implementaron programáticamente con el lenguaje de programación python, donde se calculan los valores u_{n+1} y v_{n+1} por medio de iteraciones hasta llegar a un error de 1×10^{-12} o a un total de 50 iteraciones (configurable) y cada nuevo valor calculado es guardado en un arreglo del tamaño de la discretización del tiempo.

2.3. Resolución y comparación inicial

Se resolvió el sistema utilizando el método anteriormente mencionado, con un paso $\Delta t = 0,005s$ y con distintos valores del factor de ponderación β para estudiar cómo responde el método a estas variaciones.

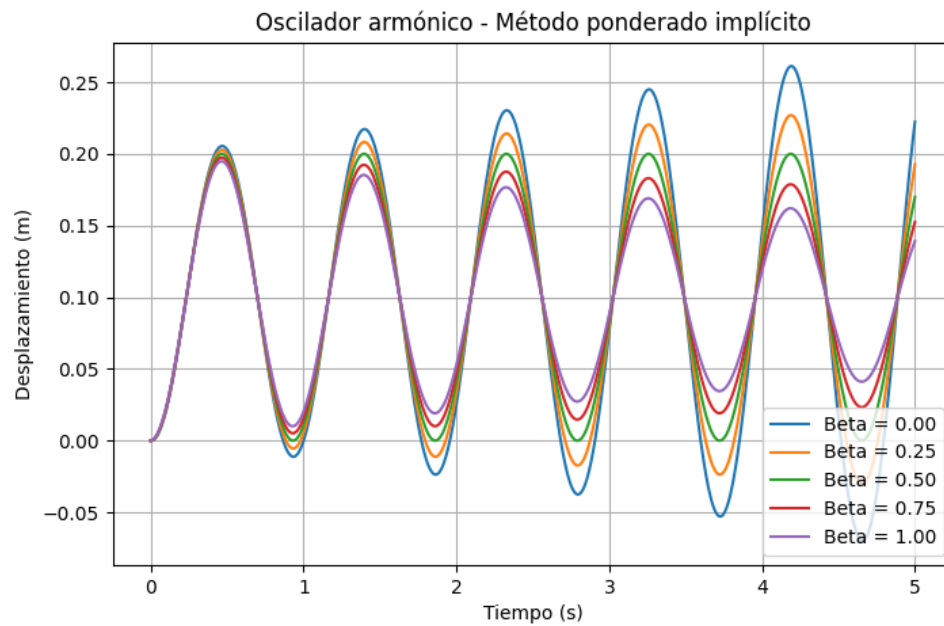
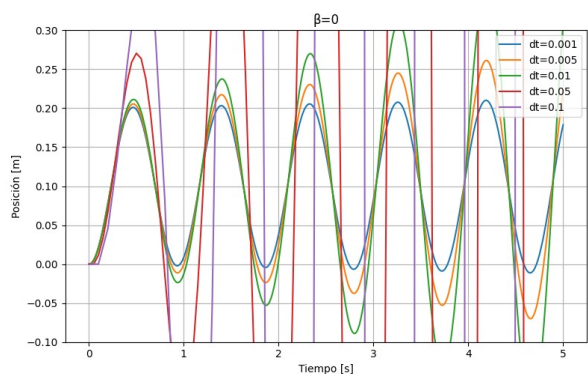


Figura 2: Comparación de diferentes valores de β

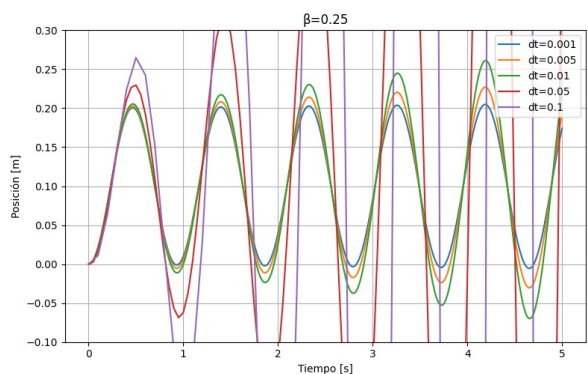
Observamos que para $\beta = 0,5$ el desplazamiento máximo se mantiene constante con el paso del tiempo, mientras que para $\beta > 0,5$ el desplazamiento se va reduciendo con cada oscilación. Por el contrario, para β menores a 0,5 el desplazamiento máximo aumenta en cada oscilación.

2.4. Análisis de estabilidad

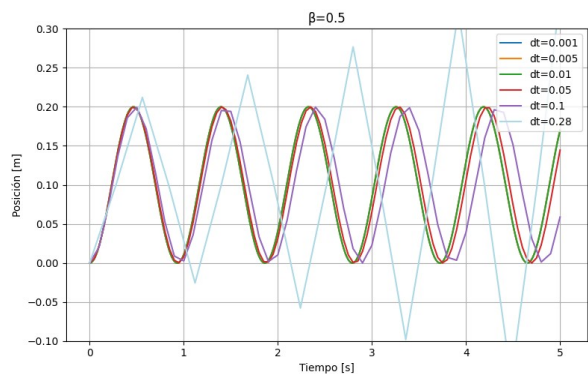
A continuación se muestra un gráfico para cada valor de β estudiado, variando el paso Δt hasta experimentar inestabilidad.



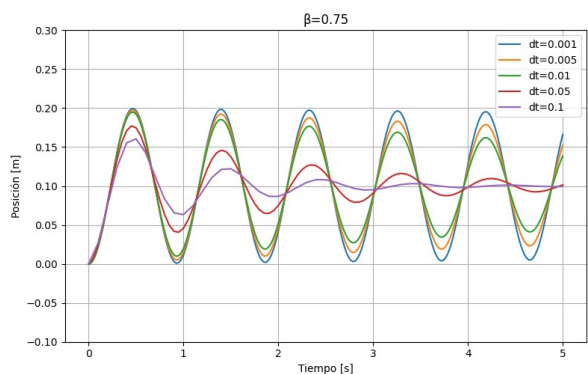
(a) Análisis para $\beta = 0,25$



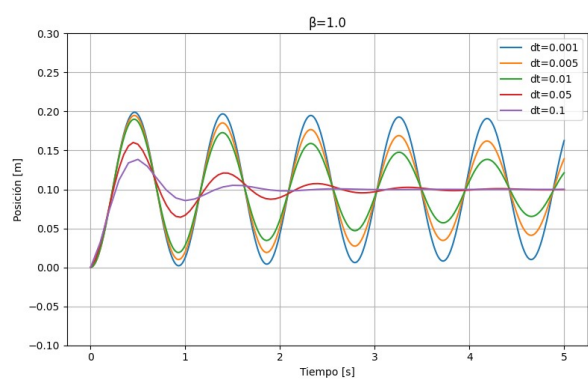
(b) Análisis para $\beta = 0,25$



(c) Análisis para $\beta = 0,5$



(d) Análisis para $\beta = 0,75$



(e) Análisis para $\beta = 1$

Figura 3: Análisis de estabilidad para diferentes valores de β .

Se observa que con $\beta = 0$ para $\Delta t > 0,005$ el método se vuelve inestable en el periodo estudiado. Para $\beta = 0,25$ esta inestabilidad ocurre cuando $\Delta t > 0,01$ y con un $\beta = 0,5$ no ocurre hasta llegar a un paso muy grande como lo es $\Delta t > 0,28$.

A diferencia de los métodos anteriormente mencionados, para $\beta = 0,75$ y $\beta = 1$ se observa que el método converge a una recta constante lo que produce que el error este acotado entre el valor de amplitud máxima y 0, lo cual es un indicador de que el método se vuelve incondicionalmente estable.

Por lo tanto se determina que un paso de tiempo en el cual todos los métodos dan resultados aceptables es 0,005, sin embargo el mejor paso de tiempo probado es 0,001 y es el que se usara para las resoluciones de sistemas, sin embargo se usara el anterior Δt mencionado en algunas comparaciones.

2.5. Estimación de la frecuencia natural de oscilación

En esta sección se estimara la frecuencia natural de oscilación utilizando el método con factor de ponderación $\beta = 0,5$, y un paso de tiempo $\Delta t = 0,005$ y se comparara con el valor que se obtiene de forma analítica al aplicar la formula $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Para la estimación se resolverá el sistema, y se medirá el promedio de los periodos de oscilación, en base a esto se usara la formula $2\pi/T_{promedio}$.

De esta forma se llega a un $\omega_{experimental} = 6,7470 rad/s$ y se observa que es muy cercano al valor exacto $\omega_{analitico} = 6,7527 rad/s$.

2.6. Análisis de Error y Orden de convergencia

A continuación se hace un análisis de los errores de cada método, y se determina su orden de convergencia experimentalmente, estudiando como evoluciona el error a lo largo que se aumenta Δt . Para determinar el error de una cierta simulación se la compara con la solución analítica de un oscilador armónico con excitación uniforme.

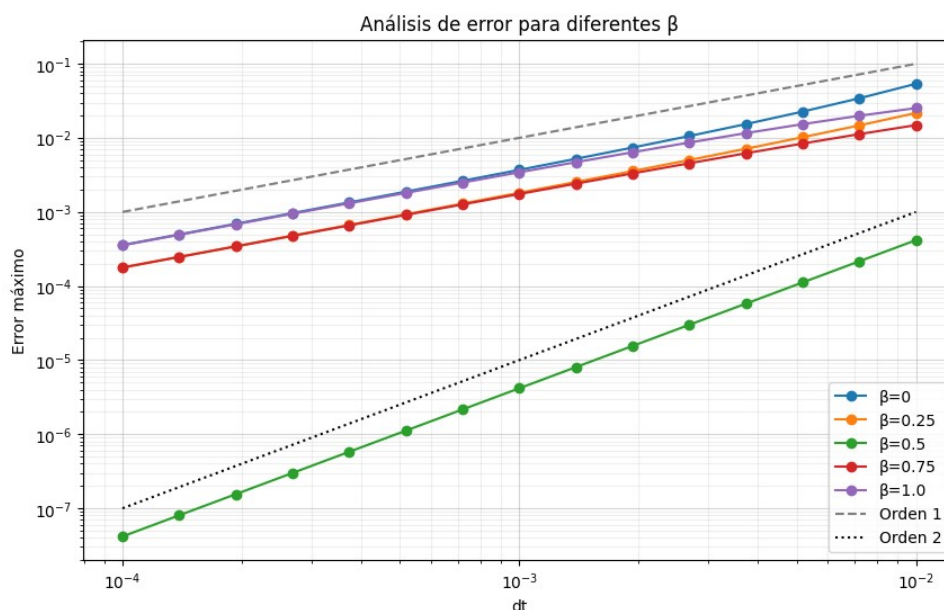


Figura 4: Evolución de error al aumentar Δt

Como se puede observar en el gráfico el método con factor $\beta = 0,5$ es decir el método de Crank-Nicolson, no solo es el que menos error tiene de todos, sino que este error se asemeja a un orden 2, mientras que los demás métodos se asemejan a un orden 1 lo cual coincide con lo esperado teóricamente. Esto se corrobora por medio de un ajuste lineal en escala $\log - \log$ y observando la pendiente, llegando a la siguiente tabla:

β	Orden
0.00	1.07
0.25	1.03
0.50	2.00
0.75	0.97
1.00	0.94

Cuadro 1: Órdenes de convergencia para diferentes valores de β

2.7. Evaluación de tiempos de ejecución

Luego de haber analizado y descubierto cual es el método mas confiable en términos de error, estabilidad y convergencia, se estudia el tiempo de ejecución de este y los demás métodos. Para hacer estas mediciones se ejecutaran simulaciones como se hizo anteriormente pero esta vez midiendo el tiempo que demoran.

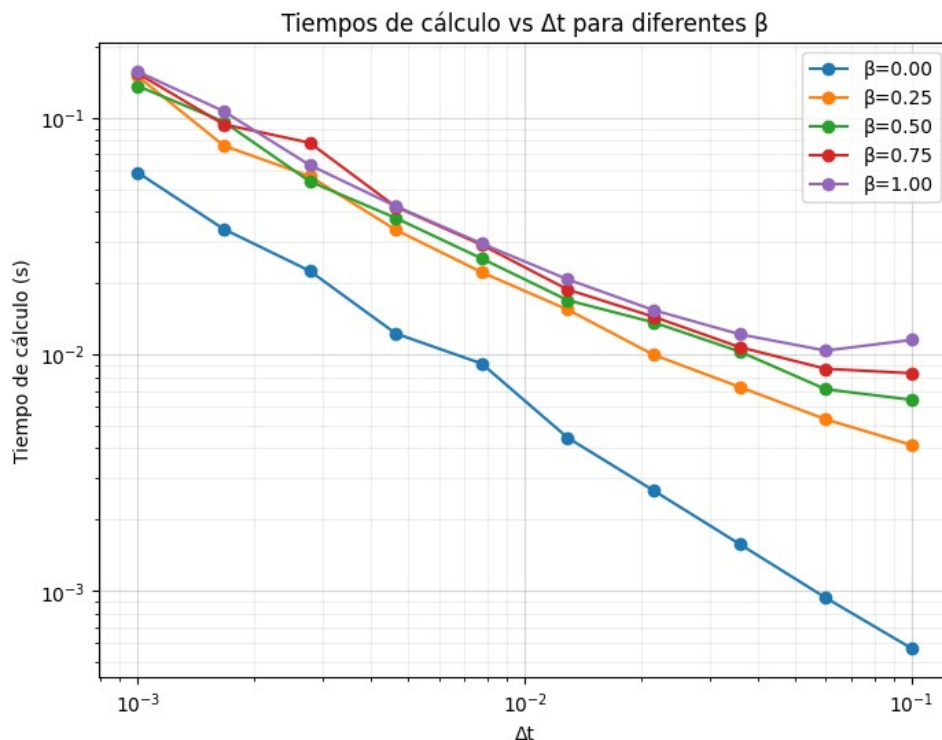


Figura 5: Tiempos de ejecución

Observando el gráfico se determinó que el método de ponderación implícita demorara más a medida que más se asemeja al método de Euler implícito (es decir si el factor β es mayor), y demorara menos si esa semejanza se da con Euler explícito (con β más chicos). Esto tiene sentido teórico ya que para poder resolver un sistema implícito hace falta un despeje si la ecuación a resolver es lineal, o hace falta la resolución de un sistema de ecuaciones en otros casos, mientras que la resolución de sistemas explícitos es directa.

2.8. Elección del método

En síntesis el método con factor $\beta = 0,5$ (Crank-Nicolson) presenta un error del orden 2 (pendiente 2 en escala logarítmica), mientras los demás tienen orden 1. Esto resulta en errores significativamente menores - aproximadamente dos órdenes de magnitud menos para pasos pequeños, como se ve en la figura 4 de evolución de errores. Por otro lado, si bien los tiempos de cálculo son mayores que cuando $\beta = 0$ y $\beta = 0,25$, la diferencia en el error es un compromiso aceptable considerando la gran mejora en precisión obtenida. Por lo tanto se eligió el método Crank-Nicolson.

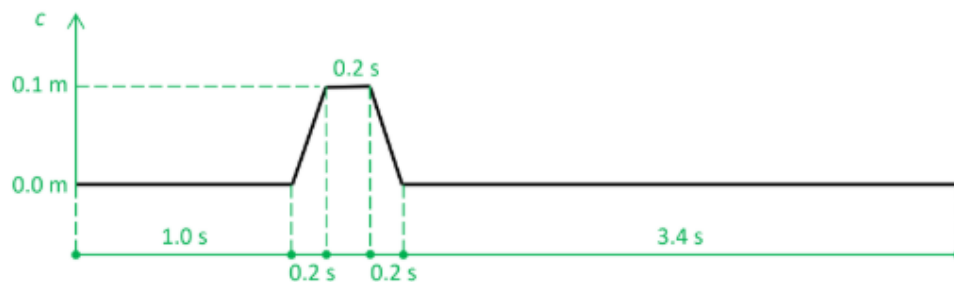
3 Oscilador amortiguado accionado por un lomo de burro

En esta etapa se resolverá el sistema anterior introduciendo amortiguación, así como también se resolverá un nuevo sistema en el que c ya no es constante sino que cambia con respecto a un terreno con lomo de burro. Luego de esto se hará una búsqueda de los valores de k y λ mas apropiados para las restricciones que se introducirán.

3.1. Descripción del sistema

Este nuevo sistema tendrá las mismas características del anterior con la diferencia que se introduce una constante de amortiguación no nula, y un c que varia como indica el siguiente gráfico.

- $T = 5s$ (periodo de simulación)
- $m = \frac{109651}{200} kg = 548,26kg$
- $k = 25000N/m$
- $\lambda = 750Ns/m$



3.2. Resolución de sistema anterior con amortiguación

Como primer sistema amortiguado se tomo el sistema de la etapa anterior, se le agrego amortiguación y se lo resolvió utilizando los 5 métodos evaluados con la intención de comparar como se comportan cuando el segundo termino de la ecuación diferencial no se anula.

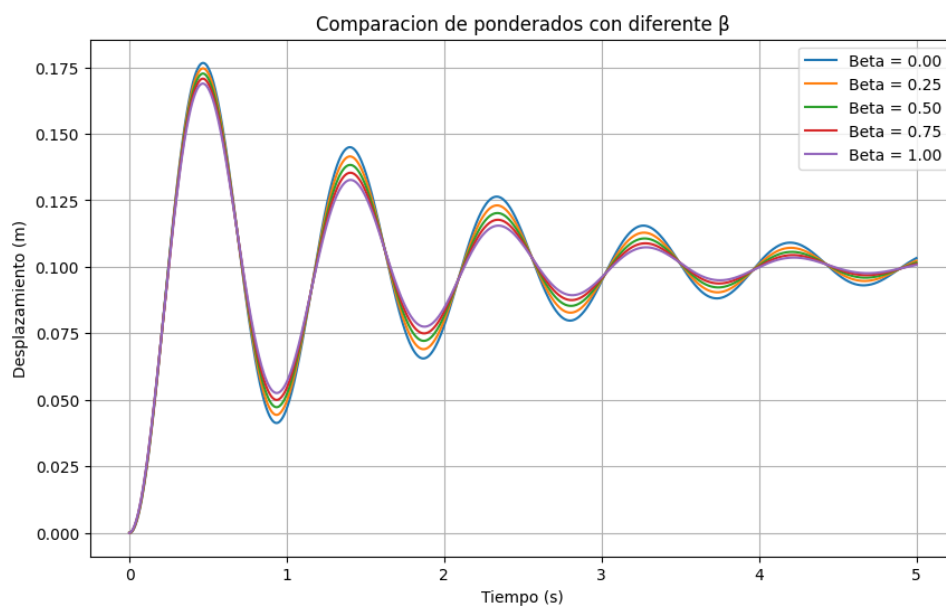
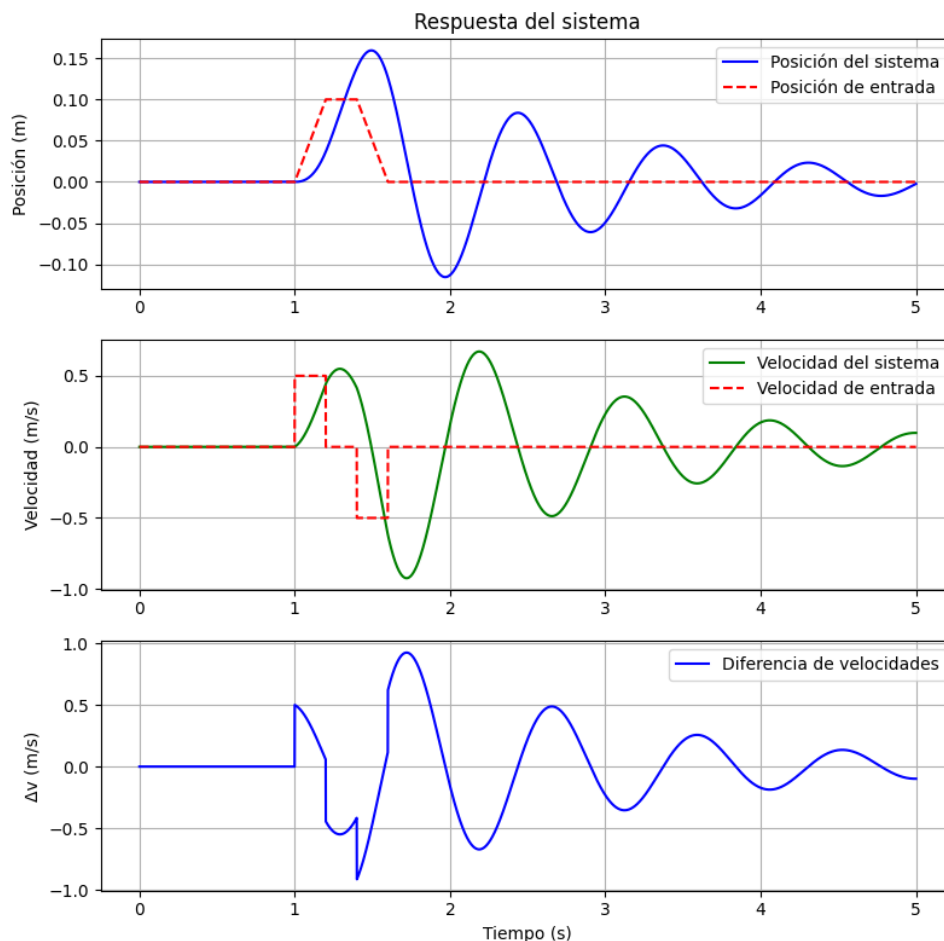


Figura 6: Sistema anterior con amortiguación y diferentes β

Se puede observar como el sistema ya no oscila indefinidamente sino que la amplitud de dicha oscilación disminuye a lo largo del tiempo hasta eventualmente estabilizarse.

3.3. Resolución del sistema con loma de burro

A continuación se resolverá el nuevo sistema con lomo de burro utilizando el método elegido en la anterior sección y un paso de tiempo $\Delta t = 0,001$, y luego se graficará como cambia la posición de la carrocería, la velocidad en el eje vertical de la misma y la diferencia de velocidades entre la velocidad de c y v a lo largo del tiempo.



3.4. Búsqueda de k y λ apropiado

Como se pudo observar en el gráfico de la resolución del sistema, la posición de la carrocería varía mucho en poco tiempo y lo mismo ocurre con su velocidad vertical. De ser usado este sistema de amortiguación se traduciría en un vehículo con falta de confort y seguridad.

Por eso es que en esta sección se buscarán los valores de las constantes de elasticidad y amortiguación más adecuadas en el marco de una serie de nuevas restricciones que serán introducidas, estas son:

- El sistema de amortiguación no puede comprimirse más de $0,05m$, es decir $y - c \geq -0,05m$.
- La aceleración vertical y'' al pasar por el lomo de burro debe minimizarse.
- Las oscilaciones en la carrocería después del lomo de burro deben minimizarse.

Para lograr esto se confeccionó un algoritmo de búsqueda de estos parámetros de manera tal que dado un rango en el que las constantes se pueden encontrar, se ejecuta una simulación de un sistema con muchos valores diferentes dentro de ese rango y se las compara para encontrar la mejor simulación que cumple las restricciones. Entonces se ejecutó este algoritmo con los rangos para las constantes $5000 < k < 40000$, $100 < \lambda < 5000$, y se encontró que los valores óptimos fueron $k \approx 16616$ y $\lambda \approx 2839$.

3.5. Comparación de k y λ iniciales vs óptimos

A continuación se observa la diferencia entre la solución del sistema con los valores de k y λ iniciales y los valores óptimos calculados.

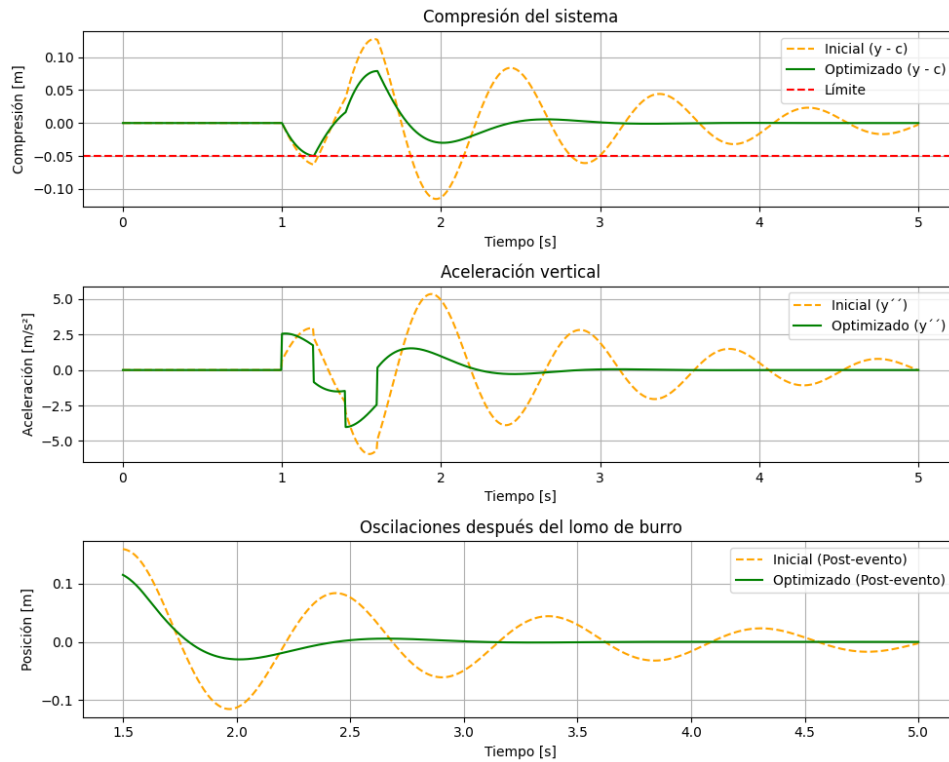


Figura 7: Comparación de ponderados con diferente β

Como se puede ver el sistema con los nuevos valores no se comprime en mas de $-0,05$ (límite) mientras que el anterior si lo hacia, también se puede ver una menor aceleración vertical y una gran mejora en las oscilaciones de la carrocería después del lomo de burro. Por lo tanto se puede asegurar que se ha mejorado el sistema oscilatorio amortiguado por medio de la búsqueda de las constantes de elasticidad y amortiguación utilizando el método numérico de ponderación implícita con un factor de ponderación $\beta = 0,5$.

4 Conclusiones

Este informe analizó el comportamiento dinámico de un sistema de suspensión vehicular utilizando un modelo matemático de oscilador amortiguado. A través de dos etapas de análisis, primero se evaluaron las respuestas a una excitación uniforme y luego a un terreno con un lomo de burro, optimizando la amortiguación para mejorar el confort y la seguridad.

Se demostró que el método de ponderación implícita con $\beta = 0,5$ (Crank-Nicolson) fue el más preciso, con un orden de convergencia de 2, y con medianamente cortos tiempos de ejecución. En la segunda etapa, al ajustar las constantes de elasticidad (k) y amortiguación (λ), se logró mejorar significativamente la respuesta del sistema, reduciendo las oscilaciones y mejorando el confort del vehículo.

En conclusión, el uso del método numérico adecuado y la optimización de parámetros claves del sistema de suspensión permiten un mejor desempeño en condiciones de terreno irregular, validando el modelo propuesto y sus aplicaciones en la mejora del diseño de suspensiones vehiculares.