Hypotesis testing

General alg. to test hyp. about mean:

- random sample $x = (x_1, \dots x_n)$
- consider point estimate $\hat{\mu} = \bar{x}$
- corresponding test statistic

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum^{n} X_i \, , \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ indep-t}$$

- In case H_0 is true

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2) \, , \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Application for one population:
z-test and t-test

Consider test stat-s Z or T.
Under H_0 their distr-s are

$$Z(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \text{if } \sigma \text{ known}$$
(z-test)

$$T(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(f), \quad \text{if } \sigma \neg \text{known}$$
(t-test)

$f = n-1$

- Evaluate the statistics on the sample, i.e. $z = Z(x)$ or $t = T(x)$

The hyp. test dep-s on the form of H_1 and if σ known

1) σ known

2) σ ¬ known

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ (two-sided h.)

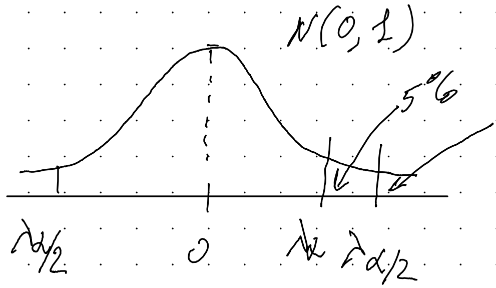
$|z| > \lambda_{\alpha/2} \xrightarrow{+}$ reject H_0 $\quad |t| > t_{\alpha/2}(f) \xrightarrow{+}$ reject H_0

$H_1 : \mu < \mu_0$ (left-sided h.)

$z < -\lambda_\alpha \xrightarrow{+}$ reject H_0 $\quad t < -t_\alpha(f) \xrightarrow{+}$ r. H_0

$H_1: \mu > \mu_0$ (right-sided h.)

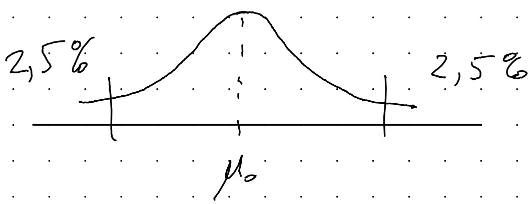
$z > \lambda_\alpha \xrightarrow{+}$ reject H_0 $\quad t > t_\alpha(f) \xrightarrow{+}$ reject H_0



$\alpha = 0{,}05$

area under the curve

2,5% of total probability



Example

$H_0: \mu_0 = 5700$ $\quad \sigma = 659$

$H_1: \mu > 5700$ $\quad n = 36$

$\lambda_{0{,}05} = 1{,}645$

z - statistic

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5950 - 5700}{659/\sqrt{36}} = 2{,}28$$

$z = 2{,}28 > \lambda_{0{,}05} = 1{,}645 \Rightarrow$ reject H_0

Example (continue): p-value

p-value is the probability of commiting Type I error for our observed sample

For z-test in our example, tests statistic under H_0 is $Z \sim N(0,1)$. The observed statistic value is $z = 2{,}28$ $\Rightarrow$

$$p = P(Z > z \mid H_0) = P(Z > 2{,}28 \mid Z \sim N(0,1))$$

$$= 1 - \Phi(2{,}28) = 0{,}0113$$

As probability is small we have strong evidence in favor of rejecting H_0

Decision rule when using a p-value for testing at α significance level:

- if p-value $\leq \alpha$ reject null hypothesis
- if p-value $> \alpha$ do not reject H_0

$$
\text{p-value} = \begin{cases} 1-\Phi(z) & \text{for righ-sided } H_1 \\ & \mu > \mu_0 \\ \Phi(z) & \text{for left-sided } H_1 \\ & \mu < \mu_0 \\ 2(1-\Phi(|z|)) & \text{for a two-sided} \\ & \mu \neq \mu_0 \end{cases}
$$

In R:

$\Phi(z)$ pnorm(z)

t-test to find $P(T<t)$ pt(t, df=f)

Difference of two Population means (indep. samples)

$\exists$ two indep. samples $x_1, \dots, x_{n_1}$ and $\vec{y} = (y_1, \dots y_{n_2})$

corresponding distr-s $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Algorithm:

- Form an estimate

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x} - \bar{y}$$

- Corresponding test statistic

$$T(X-Y) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - E(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{Var(\bar{X} - \bar{Y})}} \sim F$$

where $E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$

- Distribution of $T(X-Y)$ depends on σ_1^2 and σ_2^2

> σ_s known $\Rightarrow Var(\bar{X}-\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

$$T(X-Y) = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

> σ_s ¬known but <u>equal</u>

$$Var(\bar{X}-\bar{Y}) = s^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

$$T(\ -\ ) = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

where

$$s = \left(\frac{\sum^{n_1}(X_i-\bar{X})^2 + \sum^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right)^{0{,}5}$$

- If no information about σ_1 and σ_2

$$\widehat{Var}(\bar{X}-\bar{Y}) = \left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)$$

$$T(\cdot -) =$$

Example

$H_0 \quad \mu_1 = \mu_2$?

Testing hypotheses about proportions

Лекция 7 (Баженов)

I Критерий χ^2 для проверки парам-ой гипотезы

Пусть $\overline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ неизвестного распр-е F

Проверяется основная сложная гипотеза $H_0: F \in F_0$, где F_0 - распр-е изв-го типа опр-ое набором из m неизв-х параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$

$H_1: F \notin F_0$

Пусть $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$ оценки неизвест-х парам-ов $\theta = (\theta_1 \dots \theta_m)$ методом максимального правдоподобия.

Пусть выборка разбита на "k" интервалов $A_i = [a_i, a_{i+1})$, n_i - соотв-ие (эмпирические) частоты этих интервалов, $1 \le i \le k$

Пусть p_i - теор-ие вер-ти попадания случайной величины с распр-м $F_{\hat{\theta}}$ в данные интервалы $p_i = F_{\hat{\theta}}(\quad - F_{\hat{\theta}}($

$n_i' = n p_i$ – теор-ие частоты попадания в эти интервалы

В качестве статистики критерия берется функция

$$K = \sum^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \sum^{k} \frac{n_i^2}{n_i'} - n$$

Теорема (Фишера) (?)

Если H_0 $F \in F_0$, то

$$K = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_0'} \longrightarrow \chi^2_{k-m-1}$$

k – число интервалов

m – число парам-ов распр-я

Для заданного ур-я знач-ти α нах. $t_{крит.}$ т. ч.

$$P(\chi^2_{k-m-1} \geq t_{кр.}) = \alpha$$

критерий согласия

$$\begin{cases} H_0 \quad F \in F_0 \quad \text{если} \quad K < t_{кр.} \\ H_1 \quad F \notin F_0 \quad \text{если} \quad K \geq t_{кр.} \end{cases}$$

Note

хи2 обр. nx $(\alpha, k-m-1)$

Remark:

$n_i \geq 5$, если это не так то сливаем соседний интервал

Remark 2:

При этом критерии выборку лучше разбивать на равнонаполненные интервалы

Remark 3:

Объём выборки $n \geq 30$

Remark 4: число интервалов k желательно брать много, но чтобы частота должна быть большой

Пример

Имеется выборка в виде вариационного ряда $\vec{X} = (5{,}2; \dots; 22{,}8)$ $n = 120$

При разбиении $k=8$ интервалов одинаковой длины получим интервал

A_i	$[5.2, 7.4)$	$[7{,}4, 9{,}6)$	$[9{,}6, 11.8)$	$[11.8, 14)$	$[14, 16{,}2]$	$[16{,}2, 18.4)$
n_i	12	17	14	13	18	14

A_i	18,4 20,6	$[20{,}6, 22.8]$	Σ
n_i	13	19	120

Проверить гипотезу о равномерности распр-я при ур-не знач-ти $\alpha = 0{,}05$

$H_0 \quad F \in U(a, b)$

$H_1 \quad F \notin U(a, b)$

Оценки методом максимального правдоп-я

$a^* = X_{min} = 5{,}2$

$b^* = X_{max} = 22{,}8$

$U(5.2,\ 22.8) \qquad p_i = \frac{1}{8}$ получ теор. частоты

$n_i' = n p_i = 120 \cdot \frac{1}{8} = 15$

Вычислим статистику

$$\chi^2 = \sum^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \frac{(12-15)^2}{15} + \frac{(17-15)^2}{15} + \ldots + =$$

$$= \frac{48}{15} = 3{,}2$$

При $\alpha = 0{,}05$ числе степ-й свободы

$k - m - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$

$t = $ хи2. обр. пх $(0{,}05,\ 5) = 11{,}07$

Т.к.

$\chi^2_{\text{набл.}} = 3{,}2 < 11{,}07 = \chi^2_{\text{теор.}}$ то

H_0 не отклоняется

II Критерий χ^2

Постановка задачи отл. от пред-ей след-им: Проверяется основная простая гипотеза

$$\begin{cases} H_0: \; F = F_n, & \text{где } F_n \text{ - распр. изв-го типа с данными изв-ми параметрами} \\ H_1: \; F \neq F_n \end{cases}$$

В качестве статистики берем ту же ф-ю $K = \sum^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$

Теор. (Пирсона)

Если $H_0: F = F_n$ верна, то стат-ка $K = \sum^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \to \chi^2_{k-1}$ в остальном критерий аналогичный предыдущему

III Критерий Колмогорова

40:00