вектор это частный случай матрицы

Операции над матрицами:

✓ Сложение

✓ Умножение на скаляр

✓ Транспонирование

операция отражения относительно главной диагонали матрицы

✓ Умножение

не коммутативность

ассоциативность $A(BC) = (AB)C$

дистрибутивность $A(B+C) = AB+AC$

Система линейных уравнений

Преобразования которые не меняют множество решений системы

1) обмен порядка строк
2) умножение стр. $(\lambda \neq 0)$
3) К стр. + (др. стр.) λ

$$\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & \\ 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ступенчатый вид. (Метод Гаусса)

$$\begin{array}{cc} 1 & \cdots \\ 0 & \\ 0 & \boxed{} \\ 0 & \end{array}$$

Нотации

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Определители = Детерминант

$\underset{1\times 1}{A} = (a)$, $\det A = a$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

геометрический смысл связан с объёмом

Есть алгоритм подсчёта определителей методу Крамера

гл.1 Векторы

$\mathbb{R}^3$ или $\mathcal{D}_3$

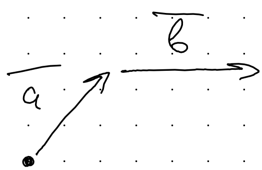
Мы работаем в геометрическом пространстве

Вектор = свободный вектор

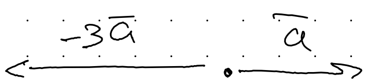
удовлетворяют свойствам

$$\begin{cases} \bar a = \bar a & \text{рефлексивность} \\ \bar a = \bar b \iff \bar b = \bar a & \text{симметричность} \\ \bar a = \bar b \ \wedge \ \bar b = \bar c \implies \bar a = \bar c & \text{транзитивность} \end{cases}$$

$\bar a + \bar b$



λa



В лин. алг. аксиомы абстр-го векторного простр-ва

Операции свойства

v1) $(\bar a + \bar b) + \bar c = \bar a + (\bar b + \bar c)$ (ассоциатив-ть сложения)

v2) $\exists \bar 0 : \bar a + \bar 0 = \bar 0 + \bar a = \bar a$ (наличие нулевого вектора)

v3) $\exists -\bar a : \bar a + (-\bar a) = 0$

v4) $\bar a + \bar b = \bar b + \bar a$ коммутативность

v5) $\alpha(\bar a + \bar b) = \alpha \bar a + \alpha \bar b$

v6) $1 \bar a$ нормировка

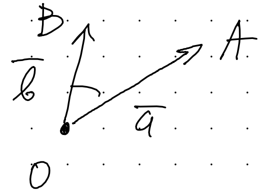
v7) $\alpha(\beta \bar a) = (\alpha \beta) \bar a$

Коллинеарны

$\bar a_1, \ldots \bar a_k$ коллинеарны, $\exists$ прямая ℓ,
$\ell \parallel a_1, \ldots \ell \parallel \bar a_k$

система векторов наз-ся компланарной если

$\bar a_1, \ldots, \bar a_k$ $\exists$ плоскость σ: $\sigma \parallel \bar a_1, \ldots \sigma \parallel \bar a_k$



Угол $\angle(\bar a, \bar b) =$
$= \angle AOB \in [0, \pi]$

$\angle(\bar 0, \bar a)$ - ? неопред-н

$\uparrow\uparrow$ Сонаправленные $\bar a$ и $\bar b$ $\Leftrightarrow \angle(\bar a, \bar b) = 0$

$\uparrow\downarrow$ Против. напр-ые $\bar a$ и $\bar b$ $\Leftrightarrow \angle(\bar a, \bar b) = \pi$

$\perp$ Перпендик = ортогональные $\Leftrightarrow \angle(\bar a, \bar b) = \pi/2$

$\bar b \parallel \bar a \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \bar b = \lambda \bar a$

$\bar b \uparrow\uparrow \bar a \Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \bar b = \lambda \bar a$

$\bar b \uparrow\downarrow \bar a \Leftrightarrow \exists \lambda \leq 0 \quad \bar b = \lambda \bar a$

Длина вектора

$|\overline{a}|$ или $\|\overline{a}\|$ (норма)

отнормируем $\overline{a} \neq \overline{0}$ $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$

Система векторов = набор векторов (с повторениями)

$\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_k$

Ортогональная система векторов

если $\overline{a}_i \perp \overline{a}_j$ $1 \leq i < j \leq k$

Ортонормированной если

$|\overline{a}_1| = \dots = |\overline{a}_k| = 1$

§ Линейная зависимость

$\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \quad > \lambda_1, \dots, \lambda_k \in R$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{a}_i$$

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k$$

лин. комб. $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_2$
с коэф $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

для $\bar{b}$ $\exists$ л.к. $\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{b}$
то $\bar{b}$ раскладывается по $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$
лин. выражается через $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$

л.к. тривиальна, если $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

$1 \cdot \bar{0}$ – не тривиальная

Опр $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ назыв. лин. зависимой
$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\ \ |\lambda_1| + \dots + |\lambda_k| > 0$

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{0}$$

Предложение (маленькая теорема)

$\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \qquad k \geq 2$

$\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ – л. зав. $\Leftrightarrow \exists$ один из них, который раскладывается по остальным

начало док-ва

$\triangle$ $\Rightarrow$ $\exists\ \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{0}$
нетрив. лин. з. ком., для опр-я $\lambda_k \neq 0$

$$a_k = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right) \bar{a}_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) \bar{a}_{k-1}$$

$\Leftarrow$ Пусть $\bar{a}_k = \mu_1 \bar{a}_1 + \dots + \mu_{k-1} \bar{a}_{k-1}$

$$\mu_1 \bar{a}_1 + \dots + \mu_{k-1} \bar{a}_{k-1} + (-1) \bar{a}_k = 0$$

$\square$