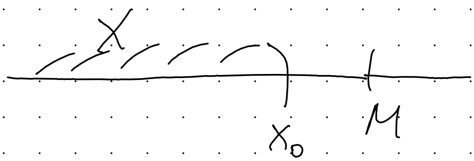
§ Точные грани множеств

Опр: число $M \in \mathbb{R}$ наз. верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \hookrightarrow x \le M$



Опр: множ-во $X \subset \mathbb{R}$ наз-ся ограничено сверху, если $\exists\, M \in \mathbb{R}$, M - верхняя грань X, т.е $\exists\, M \in \mathbb{R} \hookrightarrow x \le M$

Замечание:

При изменении порядка квант. смысл выражение может изм-ся.
Например, если в предыдущ-м выраж-ии изм. порядок кв-в, то получ

$\forall x \in X \;\; \exists\, M \in \mathbb{R} : x \le M$

это условие верно, в т.ч. для неогр-го сверху мн-ва

$\forall x \in X \;\exists\, M = x \in \mathbb{R}$ и при этом $x \le M$

Аналогич-но опр-ся нижн-я грань и огр. м-во.

Опр: Мн-во $X \subset \mathbb{R}$ не огр., если оно огр. св и снизу.

Опр. минимальным элементом мн-ва $X \subset \mathbb{R}$ наз $M \in \mathbb{R}$:

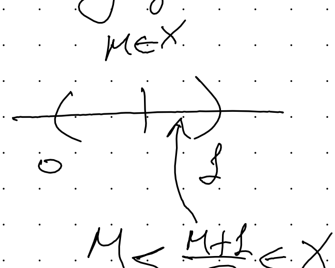
1) $M \in X$
2) M – нижняя грань X, т.е.
   $\forall x \in X \hookrightarrow M \leq x$

(пишут $M = \min X$)

Аналог. опр. $\max X$

Замеч. Даже если X огр. сверху, то $\max X$ может не существовать

Напр. $X = (0, 1)$



Опр: число $M \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью (супремум) мн-ва X, пишут $M = \sup X$, если M явл-ся минимальной верхней гранью мн-ва X, т.е.

1) M явл-ся верхней гранью X и

2) $\forall M' \in \mathbb{R} \hookrightarrow (M'$ явл-ся верх. гр. $X \Rightarrow M \leq M')$

Замечание

если P_1 и P_2 – высказыв. прин. зн. П, Л, то $(P_1 \Rightarrow P_2) \Leftrightarrow (\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1)$

В этом состоит метод док-ва от противного

верхней гранью

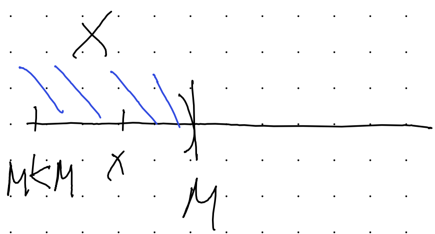
$2) \Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R} \hookrightarrow \neg(M \leq M') \Rightarrow \neg(M'$ явл в. гр. $X)$

$\Leftrightarrow M' < M \Rightarrow \exists x \in X : x > M'$

Итак, $M = \sup X \iff$

$$\begin{cases} 1) \ \forall x \in X \hookrightarrow x \le M \\ 2) \ \forall M' < M \ \exists \ x \in X : x > M' \end{cases}$$

Определение точной верхней грани



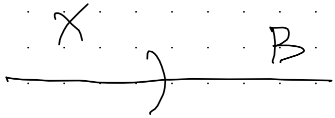
Докажем теорему о $\exists$ и единствен-ти супремума

T1 Пусть м-во $X \subset \mathbb{R}$ огр. св-ху. Тогда
$\exists! \ \sup X \in \mathbb{R}$

существует единственный

Док-во: Рассмотрим $B = \{ b \in \mathbb{R} :$ b верх-яя грань $X \}$

$B \neq \varnothing$, т.к. X — огр. сверху



$\forall x \in X \ \forall b \in B \hookrightarrow x \le b$ (по опр. верхней грани) $\Rightarrow$
аксиома непрерывности

$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ \forall b \in B \hookrightarrow x \le c \le b$

Докажем $c = \sup X$

(с явл-се точкой верх-й гр. X)

$\forall x \in X \hookrightarrow x \le c \Rightarrow c$ верх-я грань X

$\forall b \in \mathbb{R}$ b верх. гр. X $\hookrightarrow c \le b \Rightarrow$

$\Rightarrow c$ - мин-я верх-я грань X $\Rightarrow$

$\Rightarrow c$ явл-я точн-я верх. гр. X

Осталось доказать ед-ть ед-ть точн-й верх-й грани X

предположим c_1 и c_2 - разл. точные верх. грани X $\Rightarrow$ c_1 и c_2 разл-е мин-е элементы м-ва B

$$c_1 \ne c_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c_1 < c_2 \\ \text{или} \\ c_2 < c_1 \end{array}\right.$$

Пусть $c_1 < c_2$. Тогда c_2 не явл-ся мин-м элементом B $\Rightarrow$ противоречие

$\boxtimes$

Заметим:

Если X не огр. св-ху, то
$\nexists$ $M \in R$ M - верх. гр. X (по опр)

Опр. Если X неогр. св., то
$\sup X = +\infty$

Замечание: Для любого не пустого мн-ва $X \subset R$
$\exists!$ $\sup X \in R \cup \{+\infty\}$

Если X огр. св., то $\sup X \in R$
иначе $\sup X = +\infty$

Замечание:

$M = \sup X \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 1) \ \forall x \in X \hookrightarrow x \le M \\ 2) \ \forall M' < M \ \exists \ x \in X : \ M' < x \end{cases}$$

Аналогично $\inf X$ – макс нижняя грань X

Т.2. (Принцип Архимеда)

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

Док-во: Предположим противное

$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x \geq n \Rightarrow$

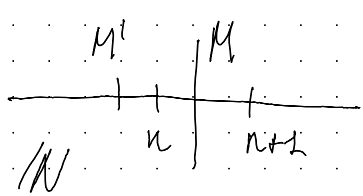
$\Rightarrow x$ – верх-я гр. $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ огр. св-у

Применим Т.1 $\exists M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N} : n > M'$

п.2 опр. sup для $M' := M - 1$

$M' < M$



Обозначим $n_1 := n + 1$

опр. $\mathbb{N} \Rightarrow n_1 \in \mathbb{N}$

$n > M' = M - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n_1 = n + 1 > M$

это противоречит тому, что M – верх. гр. $\mathbb{N}$

$\square$

Опр: Число $y \in R$ наз. целой частью числа $x \in \mathbb{R}$, пишут $y = [x]$, если
1) $y \in \mathbb{Z}$
2) $y \in (x-1, x]$

Замечание

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ [x]$

Это доказ-ся с помощью Т1 или Т2