Характеристические функ-ции

i - комплексная единица $i=\sqrt{-1}$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$ – фор-а Эйлера

$\exists$ $\xi + i\eta$ - комплексная с.в. где ξ и η с.в. с конечным первым моментом

Опр. $E[\xi + i\eta] = E[\xi] + iE[\eta]$

Опр. Хар-ой ф-ей с.в. ξ наз-ся ф-я

$$\varphi_\xi(t) = E\, e^{i\xi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1) Хар. ф-я существует для любой с.в. ξ при чём $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$

Док-во

т.к. $D\eta = E[\eta^2] - (E\eta)^2 \geq 0$, то

$$E[\eta^2] \geq (E\eta)^2$$

$$|\varphi_\xi(t)|^2 = |E e^{i\xi t}|^2 = |E\cos\xi t + iE\sin\xi t|^2 =$$

$$= |E\cos\xi t|^2 + |E\sin\xi t|^2 \le E\cos^2\xi t + E\sin^2\xi t =$$

$$= E[\cos^2 + \sin^2] = 1$$

Не доказали существование

2) $\exists\ \varphi_\xi(t)$ – хар-ая ф-я с.в. ξ

Тогда хар-ая ф-я с.в. $\eta = a + b\xi$

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{it(a+b\xi)} = e^{ita}\varphi_\xi(tb)$$

Док-во

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = E e^{it(a+b\xi)} = e^{ita} E e^{itb\xi} =$$

$$= e^{ita}\varphi_\xi(tb)$$

3) Хар-ая ф-я суммы незав-х случайных величин равна произв-ю хар-х ф-ий слагаемых: если случ-ые величины ξ и η независимы, то по

свойству $\overbrace{\qquad\qquad}^{?}$ мат-х ожиданий

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\xi} =$$

$$= \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

4) Пусть $\exists$ момент порядка $k \in \mathbb{N}$ случ-ой величины ξ т.е. $E|\xi|^k < \infty$. Тогда хар-ая ф-я $\varphi_\xi(t)$ непрерывно диф-ма k раз и её k-я производная в нуле связана с моментом порядка k равенством

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = \left(\frac{d^k}{dt^k} Ee^{it\xi}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \left(E i^k \xi^k e^{it\xi}\right)\Big|_{t=0} = i^k E\xi^k$$

5)

6) Существует взаимно однозначное соответствие между распред-ми и хар-ми ф-ми.
По хар-ой ф-ии можно востановить распр-е в частности если ξ абсолютно непрерывная величина то

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,\varphi_\xi(t)\,dt$$

(обратное преобразование Фурье)

7) TODO

Хар-ие ф-ии стандартных распр-ий

1) Распр-е Бернулли

$\xi \in B_p$

ξ	0	1
P_ξ	$1-p$	p

$$\varphi_\xi = E e^{i\xi t} = (1-p) E e^{i\cdot 0\cdot t} + p\cdot e^{i\cdot 1 t} =$$

$$= 1-p+pe^{it}$$

5) стандартное нормальное распр-е

$\xi \in N(0,1)$

$$f_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_\xi(t) = E e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx + t^2 - t^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \underbrace{e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} d(x-it)}_{\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

интеграл пуассона эйлера

6) Нормальное распр-е

$\xi \sim N(a, \sigma^2)$

$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \varphi_\eta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

$\xi = a + \sigma\eta$ и по св-ву 2

$\varphi_\xi = e^{iat} \cdot e^{-\frac{(t\sigma)^2}{2}}$

следствие: норм-е распр-е устойчиво отн-но суммиров-я если $\xi \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ - незав-ые случ-е, то $\xi + \eta \sim N(a_1 + a_2, \sigma^2 + \sigma^2)$

Док-во

$\varphi_{\xi+\eta} = \varphi_\xi \cdot \varphi_\eta = e^{ia_1 t} \cdot e^{-\frac{(t\sigma_1)^2}{2}} \cdot e^{ia_2 t} e^{-\frac{(t\sigma_2)^2}{2}}$

$= e^{i(a_1+a_2)t} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$ - хар-ая ф-я $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Лемма 1

$$\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$

второй классический предел, где показали что последнее слагаемое несущественно

Действительно

Разложим логарифм на ряд Маклорена и возьмем первый аргумент

$$\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\cdot\ln\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} =$$

$=$