Лекция 4 МатСтат Баженов

Основные распред-я мат. стат-ки

Опр. Случайная величина имеет норм. распр. $N(a, \sigma^2)$ с парам-ми $a \in \mathbb{R}$, σ^2, $\sigma^2 > 0$, если его плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Опр. Распр-е $N(0, 1)$ с парам-ми $a = 0$, $\sigma^2 = 1$ называется стандартным норм. распр., его плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Свойства норм. распр-я:

1) $EX = a \qquad Var X = DX = \sigma^2$

2) Линейность: если $X \in N(a, \sigma^2)$, то $bX + C \in N(b \cdot a + c, b^2\sigma^2)$

3) Стандартизация: $X \in N(a, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - a}{\sigma} \in N(0, 1)$

4) Устойчивость относительно под суммированием

$\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2) \quad \xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2) \quad \xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Распределение χ^2 „хи-квадрат"

Опр. Распр. „хи-квадрат" наз-ся распределением H_k с k степенями свободы наз-ся распр. суммы k квадратов незав-х стандартных нормальных величин

$$\chi_k^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2$$ где

$X_i \in N(0, 1)$ - независимые

Св-ва:

1) $E\chi^2 = k$

Док-во

$$DX_1 = EX_1^2 - \underbrace{(EX_1)^2}_{=0} = EX^2 = 1$$

$$E\chi_k^2 = E(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2) = kEX^2 = k$$

Распределение χ^2 устойчиво отн-но суммирования если

$X_1 \in \chi_n^2$ $X_2 \in \chi_m^2$ и независимы то

← степени свободы

$$X_1 + X_2 = \chi_{n+m}^2$$

Распределение „Стьюдента" (псевдоним автора)

Пусть случайные вел-ы

$X_0, X_1, \dots, X_k$ независимы и

$X_i \in N(0,1) \qquad 0 \le i \le k$

Распред. Стьюдента T_k с „k" степенями свободы наз-ся распр. с.в.

$$t_k = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\left(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2\right)}} = \frac{X_0}{\sqrt{\chi^2/k}}$$

Свойства:

1. $E t_k = 0$
2. $t_k \longrightarrow N(0,1)$ сходится по вер-ти к стандарт. норм. при $k > 30$

Док-во:

$$\frac{\chi_k^2}{k} \xrightarrow{P} \frac{k EX^2}{k} = 1 \Rightarrow t_k = \frac{X_0}{\sqrt{\chi^2/k}} \xrightarrow{P} X_0$$

Распределение Фишера Снедекора
(F- распределение)

Опр. Распр. Фишера Снедекора $F_{m,n}$ с m и n степенями свободы называется распр-е с.в.

$$f_{m,n} = \frac{\chi^2_m / m}{\chi^2_n / n}$$

Св-во:

$$E f_{m,n} = \frac{m}{n-2}$$

Преобразование нормальных выборок

$\exists \ \vec{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix}$ - выборка из $N(0;1)$, т.е. $\bar{X} \in N(0,1)$ - незав. с.в

$\exists A$ - невырожденная матрица порядка n рассмотрим набор с.в-н

$\vec{Y} = A\vec{X}$, координаты данного вектора

$$Y_i = a_{i1}\bar{X}_1 + a_{i2}\bar{X}_2 + \ldots + a_{in}\bar{X}_n$$

По свойствам норм. распр. эти компоненты - норм. с.в. но зависимы в общем случае.

Интересует случай когда $A = C$ - ортогональная матрица

Многомерное норм. распр-е

Опр: $\exists$ с. вектор $\vec{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n)$ имеет вектор средних

$$E\vec{\xi} = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ \vdots \\ E\xi_n \end{pmatrix} = \vec{a}, \quad K \text{ - симметричная}$$

положительно опред-ая мат. ?

Вектор $\vec{\xi}$ имеет многомерное норм. р. в $\mathbb{R}^n$ с параметрами $\vec{a}$ и K, обознач. $\xi \in N(\vec{a}, K)$, если его плотность

$$f_{a,K}(\vec{X}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det K}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{X} - \vec{a})^T K^{-1} (\vec{X} - \vec{a})\right)$$

Свойства

1) $K = D = \text{cov}$ дисперсия

матрица ковариации

единичная матрица

2) Если $K = E$, $\vec{a} = 0$, то имеем вектор из незав-х стандартных норм-х случ-х величин

Док-во

$\exists\ K = E\ ,\ \vec{a} = 0$

$$f(\vec{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1, \dots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{2}x_n^2\right)$$

множители
плотности стандартного норм. распр-я

$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$

Почему все величины незав-мы?
когда абсол-но непр-е распр-е незав-ы?
когда общая ф-я распр-я распад-ся
в отдел-е ф-ии распр-я
Так же и для плотностей

Т.к. плотность совместного распр-я
равна произведению частных $\Rightarrow$ незав-е
распр-я

3) $\exists\ \vec{X}$ состоит из незав-х норм. стандартных величин, B - невырожденная матрица порядка n, тогда вектор $\vec{Y} = B\vec{X} + \vec{a}$ имеет многомерное норм. распр-е с параметрами $\vec{a}$ и $K = BB^T$ эквивалентное опр-е многомерных нормальных распр-ий (все они получаются таким образом)

Или случайный вектор имеет многом. норм. распр. если все его компоненты и нет функциональной зав-ти одной компоненты от остальных

4) Пусть случ. вектор $\vec{X}$ состоит из незав-х станд. н. случ. величин

C – ортогональная матрица, тогда $\vec{Y} = C\vec{X}$ также состоит из незав-х станд. норм. случ. величин

Док-во

Если C – ортогон-ая м. т.е $C^{-1} = C^{T}$ то $K = CC^{T} = E$ тогда применяем свойство (2) $\Rightarrow \vec{Y}$ состоит из незав-х стан. н. в.

5) Пусть $\vec{\xi}$ имеет многомерное нормальное распр-е с парам-ми $\vec{a}$ и K тогда вектор $\vec{\eta} = B^{-1}(\vec{\xi} - \vec{a})$, где $B = \sqrt{K}$ состоит из незав-х станд. случ-х величин.

б) $\exists$ $\vec{\xi}$ сл. вектор имеет многомерное нормальное распр-е с парам. $\vec{a}$ и K

компоненты вектора $\vec{\xi}$ iff они не коррелированы т.е. матрица ковариации K диагональная

$$K = diag(D\xi_1 \ldots)$$

Следствие

Если плотность совместного распр-е нормальных сл. величин не нулевые, то они независимы тогда и только тогда когда их коэф-т корреляции равен 0

$\eta = 0$

Теорема (многомерная центральная предельная теорема)

Среднее арифметич независ-х одинаково распр-х слабо сходится к многомерному нормальному распр-ю

Лемма Фишера

Пусть в. $\vec{X}$ состоит из независимых нормальных станд-х величин ($X_i \in N(0,1)\ \forall i$)

$\vec{Y} = C\vec{X}$ где C - ортогональная м.

тогда $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$ с.в.

$T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \ldots - Y_k^2$ не зав-т от с.в. $Y_1, \ldots, Y_k$

и имеют распр-е χ^2_{n-k}

Док-во

т.к. C - ортогональная матрица, то

$$\|\vec{X}\| = \|\vec{Y}\| \iff \sum^n X_i^2 = \sum^n Y_i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \ldots - Y_k^2 =$$

$$= Y_{k+1}^2 + Y_{k+2}^2 + \ldots + Y_n^2 \in \chi^2_{n-k}$$

т.к. по св-у (4) многом-х сл-х н. в.

т.к. $Y_i \in N(0,1)$ - незав-ые

Основная теорема

Пусть $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ выборка из $N(a, \sigma^2)$

$\overline{X}$ - выбор. сред. S^2 - исправ. выбор. дисп.

Тогда имеют место след. распр-я:

1) $\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma} \in N(0,1)$

2) $\sum\limits_{i=1}^n \left(\dfrac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 \in \chi^2_n$

3) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\in\chi^2_{n-1}$

4) $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{S}\in T_{n-1}$

5) $\overline{X}$ и S^2 – независ. с.в.

Док-во

1) $X\in N(a,\sigma^2)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\in N(n\cdot a,n\sigma^2)\Rightarrow$

$\Rightarrow\overline{X}\in N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\overline{X}-a\in N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\in N(0,1)$

2) т.к. $\forall i$, $\frac{X_i-a}{\sigma}\in N(0,1)$, то

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-a}{\sigma}\right)^2\in\chi^2_n$ по опр-ю

3) $\sum^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-a}{\sigma}-\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\right)^2=\sum^{n}(Z_i-\overline{Z})^2$

$Z_i=\frac{X_i-a}{\sigma}\in N(0,1)$ и $\overline{Z}=\frac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{n}=\frac{1}{n}\sum\frac{X_i-a}{\sigma}=$

$=\frac{\overline{X}-a}{\sigma}$

поэтому можно считать

$X_i \in N(0,1)$ применим лемму Фишера

1:17

5) $\sum^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ незав. от $\sqrt{n}\ \overline{X}$ и

с.в. S^2 и $\overline{X}$ – независимы

4) $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{S} = \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{\sigma}}_{\text{стандарт. норм. распр. по 1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}\frac{(n-1)}{(n-1)}}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} \in$

$\in T_{n-1}$ – распр. стьюдента с $n-1$ ст. св.

х числитель и знам. независимы согласно

....