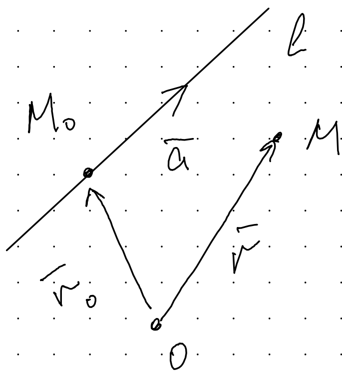
Новая глава (Предм: Векторная алгебра)

§ 1 Прямая на плоскости

$\forall$ ДСК



$\bar{a} \neq \bar{0}$ - напр. вектор

$\forall M(\vec{r})$

$M \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \bar{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{r} - \bar{r}_0 \parallel \bar{a}$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \; \bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{a}$

$r = \bar{r}_0 + t\bar{a}$

$$\vec{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a} \quad (1)$$ векторно парам. ур. прямой

$\bar{r}_0$ — радиус вектор произвольной точки на прямой

$\bar{a}$ — направляющий в.

$Oxy \quad \bar{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \bar{r}_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \bar{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} \quad (2)$$ каноническая запись ур-я прямой

$$Ax + By + C = 0 \quad (3)$$ общее ур-е прямой

$$|A| + |B| > 0$$

$\bar{n}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ – сопутствующий (нормальный в ПДСК)

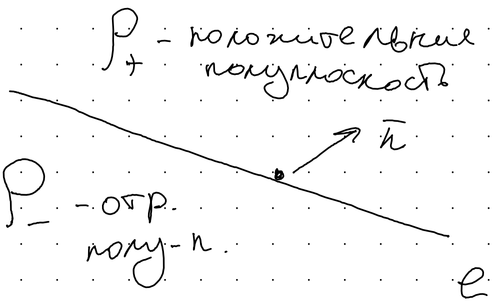
Пр l (3) $\bar{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ направл. $\Leftrightarrow$ $\boxed{A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0}$

Δ ... $\square$

След 1 $\quad \bar{a} := \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ – напр.

След 2 $\quad \bar{n} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ – не напр.

$\Delta \quad A^2 + B^2 > 0$



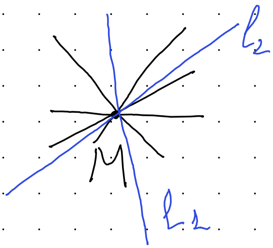
Лин. нер-во

I $\quad l \; (3), \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$M \in P_+ \iff Ax + By + C > 0$$

$\Delta \quad \ldots \quad \square$

Пучок прямых



Пучок с центром M –
$\{ l \mid l \ni M \}$

$l_1 \neq l_2 \qquad M = l_1 \cap l_2$

$l_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad L_1 = 0$

$l_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad L_2 = 0$

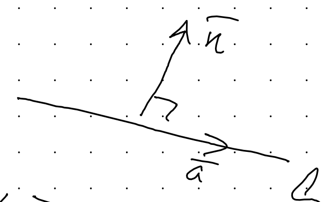
$l_3: \quad A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \qquad L_3 = 0$

Теор: $l_3 \in \Pi(M) \iff \exists \alpha_1 \alpha_2 \in \mathbb{R} : |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$

$L_3 = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$

$\Delta \ \ldots \ \square$

ПДСК



Пр $\quad \bar{n}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \perp l \qquad l\ (3)$

Δ $\bar{a}$ – направл-ий $\quad \bar{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \iff$

$\iff A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$

$\qquad \qquad (\bar{n}, \bar{a}) = 0 \qquad \square$

$\bar{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(\bar{r}, \bar{n}) + C = 0$ (4) - векторное нормальное ур. прямой

Метрические задачи

Угол $\angle(l_1, l_2)$

$l_1 - L_1 = 0$

$l_2 - L_2 = 0$

$\angle(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$

$\angle(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$

Теор: l (3) или (4) ПДСК

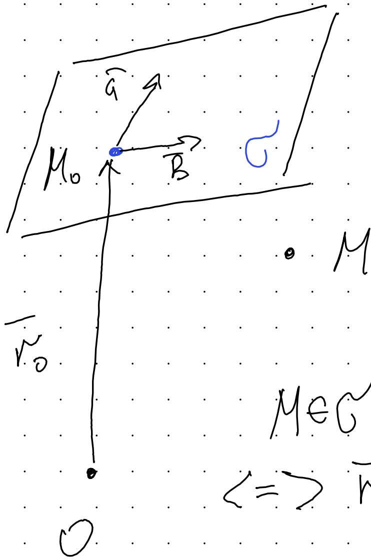
$M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Расстояние от M_0 до l

$$\rho(M_0, l) \underset{(4)}{=} \frac{|(\bar{r}_0, \bar{n}) + C|}{|\bar{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Δ ... $\square$

§2 Плоскость в Пространстве



$M_0 \in \sigma$

$\bar a \parallel \sigma$

$\bar b \parallel \sigma$

$\bar a \not\parallel \bar b$

$M \in \sigma \iff \overrightarrow{M_0M}, \bar a, \bar b$ — компланарны

$\iff \bar r - \bar r_0, \bar a, \bar b$ — компл. $\iff$

$\iff \bar r - \bar r_0$ — линейно выраж-ся через $\bar a, \bar b$

$$\exists\, t, s \in \mathbb{R} \quad \bar r - \bar r_0 = t\bar a + s\bar b$$

$$\bar r = \bar r_0 + t\bar a + s\bar b \quad (1) \qquad \bar a \not\parallel \bar b$$

$$\bar r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \bar r_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \bar a \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \bar b \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 + s\beta_1 \\ \ldots \\ \end{cases} \quad (1')$$

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{a}, \bar{b}) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{Ax + By + Cz + D}_{L = L(x,y,z)} = 0 \quad (3)$$ общее ур-е

$\bar{n}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ - сопутств-ий

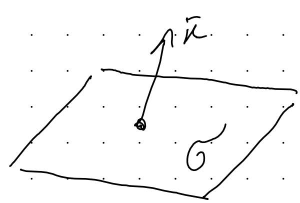
$$|A| + |B| + |C| > 0$$

Пред σ (3) $\bar{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ $\forall$ ДСК

$$\alpha \parallel \sigma \iff A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0$$

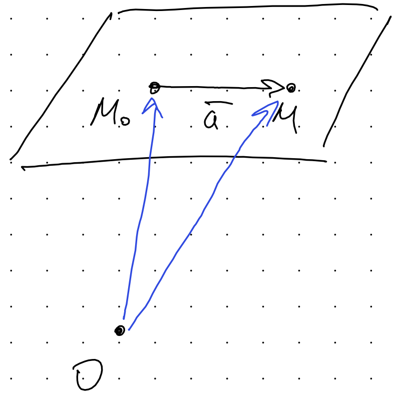
Сл. Если $A \neq 0$ $\bar{a} = \begin{pmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$

Сл $\bar{n}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \nparallel \sigma$



$\Delta \quad \forall M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \sigma$

$M \begin{pmatrix} x_0 + \alpha_1 \\ y_0 + \alpha_2 \\ z_0 + \alpha_3 \end{pmatrix}$



$\bar{a} \parallel \sigma \Leftrightarrow M \in \sigma \Leftrightarrow$

$$A(x_0 + \alpha_1) + B(y_0 + \alpha_2) + C(z_0 + \alpha_3) + D = 0$$

$$\underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_{0} + A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0 \quad \blacksquare$$

Взаимное расположение плоскостей $\forall$ДСК

Теор. (2 плоскостей) $\sigma_1 \quad L_1 = 0 \quad \bar{n}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 \quad L_2 = 0 \quad \bar{n}_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$

1) Если $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$ после домножения на λ

$D \neq D_1 \Rightarrow \sigma_1 \parallel \sigma_2$

$D = D_1 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$

2) если $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2 \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 = l$

прямая

$\bar{a}$ - напр-щий

$$\bar{a} := \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Δ $\quad \bar{a} \neq \bar{0}$

$\bar{a} \parallel \sigma_1$

$\bar{a} \parallel \sigma_2$

$$\bar{a} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\square$

T (3 плоскости)

$\sigma_1 \quad L_1 = 0 \qquad n_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 \quad L_2 = 0$

$\sigma_3 \quad L_3 = 0$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ имеют ед. точку $\Leftrightarrow$ $\bar{n}_1\ \bar{n}_2\ \bar{n}_3$ не-компл.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Δ 1сл. $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma_1 \parallel \sigma_2 \\ \sigma_1 = \sigma_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ утв-е false

2сл $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2 \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 - \ell$ с напр. $\bar{a}$

Утв.е о 3х плоскостях верно

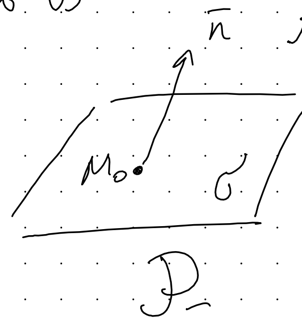
$\sigma_3 \cap \ell$ = ед.ая точка $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{a} \nparallel \sigma \Leftrightarrow_{\text{крит. }\parallel}$

$$A_3 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_3 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \square$$

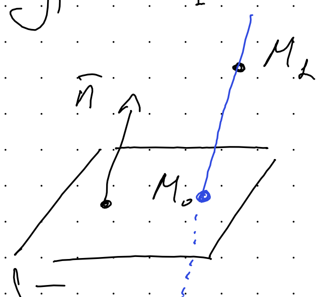
Линейное нерав-во

P_+ - полож. полупрост.



Теор. (о линейном неравенстве)

$$M_1 \in \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in P_+ \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$$



Δ $\overline{M_1M_0} \parallel \bar{n}$

$$M_1 \in P_+ \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : \overline{M_0M_1} = \lambda \bar{n}$$

$$M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \overline{M_0M_1} = t \cdot \bar{n} \quad M_1 = \begin{pmatrix} x_0 + tA \\ y_0 + tB \\ z_0 + tC \end{pmatrix}$$

$$A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + C(z_0 + tC) + D =$$

$$= \underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_{0} + t(A^2 + B^2 + C^2)$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0 \Leftrightarrow t > 0 \Leftrightarrow M_1 \in P_+$$

$\square$