Упорядоченная пара

(a, b) $a, b \in \mathbb{R}$

(b, a)

а) $(a, b) = (c, d) \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

б) $(a, b) + (c, d) \underset{\text{по определению}}{=} (a + c, b + d)$

в) $(a, b) \cdot (c, d) \underset{=}{} (ac - bd, ad + bc)$

$\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow (a, 0)$

$\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow (b, 0)$

$a + b \Rightarrow (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$

$a \, b \Rightarrow (a \cdot b, 0) = (a, 0)(b, 0)$

Свойство
  ассоциативности

$a \, b \, c = (a \, b) c = a (b c)$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (b, 0) \boxed{(0, 1)}$$

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) =$$
$$= (-1, 0) = -1$$

$$(-i)^2 = -1$$

$$\boxed{a + bi}$$

$$a + bi - c + di = (a-c) + (b-d)i$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i \qquad \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = x + iy$$

$$z_1 = z_2(x + iy)$$
$$z_1 = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x) \cdot \enclose{circle}{i} \quad ?$$

$$\begin{cases} a_2 x - b_y y = a_2 \\ b_2 x + a_2 y = b_1 \end{cases}$$

$$\Delta = a_2^2 + b_2^2 > 0$$

По cramer's rule

$$Z = a + bi$$

$$Re\, Z = a$$
$$\color{red}{?}\, Im\, Z = b$$

$$Z = a + bi \qquad \overline{Z} = a - bi \qquad \text{комплексно сопряжённое}$$

Модуль комплексного числа
$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$$

1) $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$

2) $\left| \dfrac{Z_1}{Z_2} \right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

$$Z_2 \neq 0$$

3) $Z \overline{Z} = |Z|^2 = a^2 + b^2$

$$Z = a + bi$$

$$\overline{\overline{Z}} = Z$$

$$Z = \overline{Z} \quad \text{если } Z \in \mathbb{R}$$

4) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Пример:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$z_1 = -1 + 5i$

$z_2 = 7 + 3i$

$$\frac{-1+5i}{7-3i} = \frac{(-1+5i)(7-3i)}{(7-3i)(7-3i)} = \frac{-7 + 35i + 3i - 15i}{7^2 + (-3)^2}$$

Что-то про
бином Ньютона

Пример:

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2}{2} = \frac{2i - 2i}{2} = 0$$

Пример

$$(2+i)^2 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3 =$$
$$= 2 + 11i$$

Пример (тригонометрия)

$$z = \left(1 + \cos\frac{8}{7}\pi\right) + i\,\sin\frac{8}{7}\pi$$

$$|z|^2 = \left(1 + \cos\right)^2 + \left(\sin\right)^2 = 2 + 2\cos\frac{8\pi}{7}$$

$$|z| = 2\sin\frac{\pi}{14}$$