§4 Св-ва пределов, связ. с арифм. опер.

бесконечно малой

Опр. посл. $\{x_n\}$ наз. б. м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Замечание:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{a_n - a\} - \text{б. м.}$$

$\Updownarrow$ опр $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

1) если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - б. м., то $\{a_n + b_n\}$ - б. м.

Док-во: Пусть зад. $\forall \varepsilon > 0$

т.к. $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - б. м.

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \exists N := \max\{N_1, N_2\} : \forall n \geq N \hookrightarrow$$

$$|a_n + b_n| \underset{\text{нерав. треуг.}}{\leq} |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{a_n + b_n\} - \text{б.м.} \quad \blacksquare$$

Т1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

Док-во

$$a_n + b_n - (a+b) = \overbrace{(a_n + b_n - a}^{\text{б.м.}} - b) \text{ - бм. по 11}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{б.м.}}$$

$\blacksquare$

Л2 Если $\{a_n\}$ - б.м., $\{b_n\}$ - б.м., то $\{a_n \cdot b_n\}$ - б.м.

Док-во:

$\{b_n\}$ - огр. $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \hookrightarrow |b_n| \le M$

Пусть задано $\forall \varepsilon > 0$

$\{a_n\}$ б.м $\Rightarrow \exists N : \forall n \ge N \hookrightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

$\Rightarrow \forall n \ge N \hookrightarrow |a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \Rightarrow$ ☐

Т2 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ тогда

$\exists \lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

Док-во:

$a_n \cdot b_n - a \cdot b = a_n \cdot b_n - a_n b + a_n \cdot b - a \cdot b =$

$= \underbrace{a_n}_{\text{огр. с.к. сх-ся}} \underbrace{(b_n - b)}_{\text{б.м.}} + \underbrace{(a_n - a)}_{\text{б.м}} \underbrace{b}_{\text{огр.}}$

б.м. по Л2

б.м. по Л1 $\Rightarrow$ ☐