Введение

Логические операции: $\neg$ (не), и, или, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

A, B – величины принимающие зн. истина или ложь

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

A	B	A и B	A или B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$
И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	И

Замеч.

$$\neg (A \text{ и } B) \Leftrightarrow \neg A \text{ или } \neg B$$

$$\neg (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \text{ и } \neg B$$

Кванторы

$\forall$ для любого

$\exists$ существует

Логические связки:

$\hookrightarrow$ выполняется

$:$ такой что

$x \in X$ x является элементом мн-ва X

$X \subset Y$ мн-во X явл-ся подмн-в Y

$X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X \hookrightarrow x \in Y$

, если

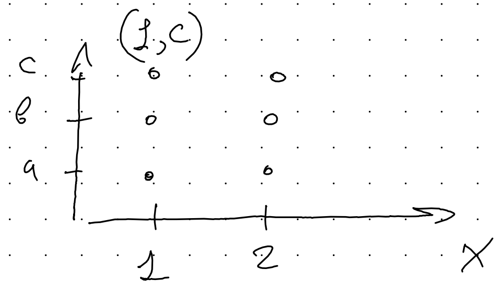
$$\neg(\forall x \hookrightarrow P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x \hookrightarrow \neg P(x)$$

Опр: Декартовым произведением мн-в X и Y наз. мн-во $X \times Y$, сост. из всех (упоряд) пар (x, y) эл-ов $x \in X$ и $y \in Y$

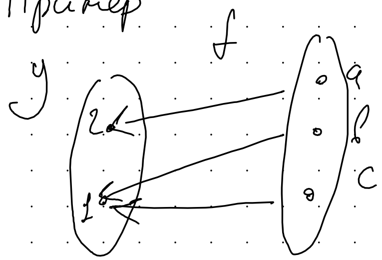
Пример

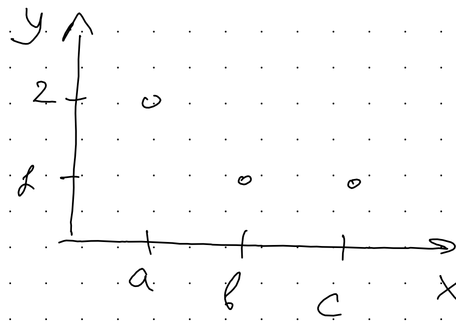
$X = \{1, 2\}$ $\qquad$ $Y = \{a, b, c\}$



Опр: Будем говорить, что м/у мн-и X и Y зад. ~~отношение~~ соотвествие f, если задано некоторое мн-во $G_f \subset X \times Y$ называемое графиком. f при этом б. говорить, что $x \in X$ соотв-т элементу $y \in Y$ при соотв-ии f если $(x, y) \in G_f$

Пример





Опр: Соответствие f наз однозначным, если $\forall x \in X$ $\forall y_1, y_2 \in Y$:

$(x_1, y_1) \in G_f$ и $(x_1, y_2) \in G_f$

$\Rightarrow y_1 = y_2$

Область опр-я соотв-я f наз-ся множ-во $D_f := \{x \in X : (x, y) \in G_f\}$

Опр: Функция $f : X \to Y$ (из X в Y) называется соотв-ие между X и Y, обладающее св-ми:

1) однозначность 2) $D_f = X$

Гл 1 Предел последов-ти

§1 Аксиомы действ-х чисел

Опр: Б. гов что на множ-в X задана какая-то бинарная опер-я $+$ $(\cdot)$ если задана функция $f: X \times X \to X$ и $\forall\, x, y \in X \hookrightarrow x+y = f(x,y)$

$$x \cdot y = f(x,y)$$

Задано бинарное отношение например $\leq$ если задана ф-я P: $X \times X \to \{\text{Ист}, \text{Лож}\}$

$\forall\, x, y \in X \hookrightarrow x \leq y \Leftrightarrow P(x,y) = \text{Ист} \Leftrightarrow$

$$P(x,y)$$

Опр. Множ-во $\mathbb{R}$ действ-х (вещ-х) чисел наз-ся множество на котор-м определены опер-ции $+, \cdot$ и бинар-е опер-е $\leq$ удовл-е след-м 16 аксиомам:

коммутативность

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a+b = b+a$

2) ассоциативность

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$

3) сущ-е нейтрального элемента по сложению

$\exists 0 \in R : \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow x+0=x$

4) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists (-a) \in R : a+(-a)=0$

Аксиомы абелевой группы по сложению

5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$

7) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow x \cdot 1 = x$

8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$

✓ 5–8 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ абелева гр. по умнож-ю

9) ассициативность которая св-ет слож-е и умножение

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a(a+b) = a \cdot b + a \cdot c$

Аксиомы связ-е с отношением порядка

10) $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq a$

11) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq b$ или $b \leq a$

12) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ и $b \leq a \hookrightarrow a = b$

13) Свойство транзитивности

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b$ и $b \leq c \hookrightarrow a \leq c$

Аксиомы связи отношения порядка и сложение и умножения

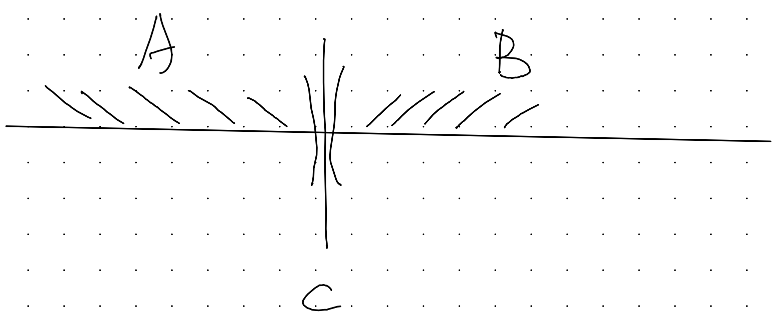
14) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

15) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b$ и $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Показывает отличие действ-х от рац-х чисел

Аксиома непрерывности:

16) $\forall A, B \subset \mathbb{R}: (\forall a \in A \ \forall b \in B \Rightarrow a \leq b)$
$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A$ и $\forall b \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow a \leq c$ и $c \leq b$



Пример: Доказать, что если $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b = a$, то $b = 0$

Док-во:

$$b = b+0 \overset{4}{=} b + (a + (-a)) \overset{2}{=} (b+a) + (-a) \overset{1}{=}$$

$$\overset{\text{условие}}{=} a + (-a) \overset{4}{=} 0$$

Д/З

Пусть X — множ-во, на котором опр. опер. $+$ и вып-н акс.

1) $\forall a, b, c \in X \hookrightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$

2) $\exists 0 \in X : \forall a \in X \hookrightarrow a + 0 =$

Верно ли, что если $x \in X : \forall a \in X \hookrightarrow$

$\hookrightarrow a + x = 0$ то $x = 0$

Опр $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x - y := x + (-y)$

если $y \neq 0$ то $\frac{x}{y} := x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$

$$x \neq y \Leftrightarrow \neg(x = y)$$

$$x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ и } x \neq y$$

$$x > y \Leftrightarrow y < x$$

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$

Опр: Мн-во $\mathbb{N}$ нат. чисел наз-ся мн-во чисел вида $1, \underbrace{1+1}_{2}, \underbrace{1+1+1}_{3}, \ldots$

Точнее: $\mathbb{N}$ – пересечение всех множеств $X \subset \mathbb{R}$ таких что: 1) $1 \in X$

2) если $x \in X$, то $x + 1 \in X$

Замечание

$\mathbb{N}$ удовл-т усл. (1), (2)

Опр: множ-м целых чисел наз

$\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N}$ или $-x \in \mathbb{N}$ или $x = 0\}$

Опр: Множ-м рац. чисел наз-ся

$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Пример:

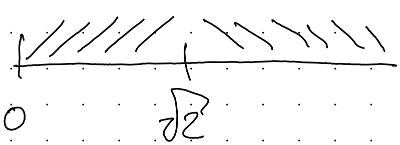
$A = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0$ и $a \cdot a < 2\}$

$B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0$ и $b \cdot b > 2\}$

Тогда $\forall a \in A \ \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b$

но не существует $c \in \mathbb{Q}$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

$$a \leq c \leq b$$



Поэтому, если в аксиоме непрерывности зам $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}$ то неверное утв-е

Замеч:

Если в аксиомах 1-15 $\mathbb{R}$ зам. на $\mathbb{Q}$ то получится верное утв.

Наряду с $x \in \mathbb{R}$ будем использовать символы $+\infty$, $-\infty$ для которых не опред. опер-ии $+, \cdot$, но опр-м $\leq$

Положим по определению:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$

(т.е. $-\infty < x$ и $x < +\infty$)

и $-\infty < +\infty$ А значит верно $\leq$

Множество $\overline{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ наз. расширенной числовой прямой

Опр: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - интервал

$[a,b]$ . . . $\leq$ $\leq$

$[a,b)$ . . . $\leq$ $<$

$(a,b]$ . . . $<$ $\leq$