Опр Ориентир. объём п-да, постр. на упор. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ $= \pm V$

+ если правая тройки

− левая

$V = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ − компл-ие

Обоз: $V_\pm(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

смеш-ое произв-е

$S_\pm(\bar{a}, \bar{b})$ − ориентир. площадь

Пр. $\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3$ − правый ОНБ $\Rightarrow (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = 1$

Пр. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ − компл.

Пр' $S_\pm(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$

Пр $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) =$

$= -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$

Δ $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \pm V$ □

Теор (лин) $\forall \bar a, \bar b, \bar c, \bar d$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$(\bar a, \bar b, \bar c + \bar d) = (\bar a, \bar b, \bar c) + (\bar a, \bar b, \bar d)$$

$$(\bar a, \bar b, \lambda \bar c) = \lambda (\bar a, \bar b, \bar c)$$

Теор' $S_\pm(\bar a, \bar b + \bar c) = S_\pm(\bar a, \bar b) + S_\pm(\bar a, \bar c)$

$$S_\pm(\bar a, \lambda \bar b) = \lambda S_\pm(\bar a, \bar b)$$

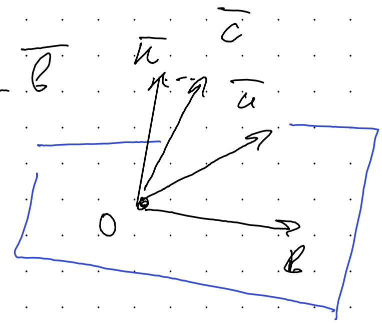
Δ Если $\bar a \parallel \bar b$ $\quad 0 = 0 + 0$

Если $\bar a \nparallel \bar b$

$\bar n \perp \sigma \Leftrightarrow \bar n \perp \bar a, \bar n \perp \bar b$

$|\bar n| = 1$

$\bar a, \bar b, \bar n$ – правая тройка



$$(\bar a, \bar b, \bar c) = \underbrace{|S_\pm(\bar a, \bar b)|}_{\text{осн.}} \cdot \underbrace{\pm h}_{\text{алгебраическая проекция вектора } c \text{ на } \bar n} =$$

$$= |S_\pm(\bar a, \bar b)| \cdot (\bar c, \bar n)$$

$$(\bar a, \bar b, \bar c + \bar d) = \ldots = |S_\pm(\bar a, \bar b)| \cdot (\bar c + \bar d, \bar n)$$

$\square$

Теор (вычг. объёмов) $e=(e_1, e_2, e_3)$ - ∀ базис

$\bar{a} = e\alpha \quad \bar{b} = e\beta \quad \bar{c} = e\gamma$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \Delta(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Сл. В правом ОНБ $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \Delta$

Сл. В ∀ базисе $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ - компланарны $\iff \Delta = 0$

Сл. $\operatorname{sign} \Delta > 0 \iff \bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ и $e_1\ e_2\ e_3$ - одинаково ориентир.

Теор (выч. площадей)

$e = (e_1, e_2)$ — $\forall$ базис на плоскости

$\bar a = e\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ $\bar b = e\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$

$S_\pm(\bar a, \bar b) = \Delta\, S_\pm(\bar e_1, \bar e_2)$, $\Delta = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$

Сл. В ОНБ $S_\pm(\bar a, \bar b) = \Delta$

Сл. В $\forall$ базисе $\bar a \parallel \bar b \Leftrightarrow \Delta = 0$

Сл. sign $\Delta > 0 \Leftrightarrow \bar a, \bar b$ и $\bar e_1, \bar e_2$ — один. ориентир

$\Delta(\bar a, \bar b, \bar c) = (\alpha_1\bar e_1 + \alpha_2\bar e_2 + \alpha_3\bar e_3,\ \beta_1\bar e_1 + \beta_2\bar e_2 + \beta_3\bar e_3,$
$\gamma_1\bar e_1 + \gamma_2\bar e_2 + \gamma_3\bar e_3) = 0 +$

$(e_1, e_2, e_2) = 0$

$+\alpha_1\beta_2\gamma_3(\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3) + \alpha_1\beta_3\gamma_2(\bar e_1, \bar e_3, \bar e_2) +$
$+\alpha_2\beta_3\gamma_1(\bar e_2, \bar e_3, \bar e_1) + \alpha_2\beta_1\gamma_3(\bar e_2, \bar e_1, \bar e_3) +$
$+\alpha_3\beta_1\gamma_2(\bar e_3, \bar e_1, \bar e_2) + \alpha_3\beta_2\gamma_1(\bar e_3, \bar e_2, \bar e_1)$

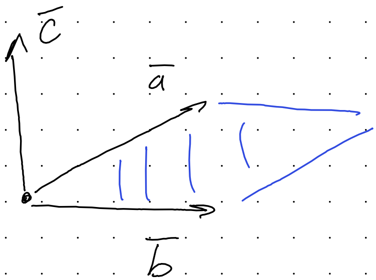
$(\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$ $-(\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$

! вынести $(e_1 e_2 e_3)$

§ 5 Векторное произведение

Обоз: $[\bar a, \bar b]$ или $\bar a \times \bar b$

1) $\bar a \parallel \bar b \Rightarrow [\bar a, \bar b] = 0$



2) $\bar a \nparallel \bar b$

$\bar c$

1. $\bar c \perp \bar a$, $\bar c \perp \bar b$
2. $|\bar c| = |S_{\pm}(\bar a, \bar b)|$

*Презрение к размерности

3. $\bar a, \bar b, \bar c$ – правая тройка

Пр. $\bar a \parallel \bar b \Leftrightarrow [\bar a, \bar b] = \bar 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar a, \bar b, [a, b]$ – компланарн.

Δ $\Rightarrow$

$\Leftarrow$ $\bar a \nparallel \bar b \Rightarrow$ из опр $[\bar a, \bar b] \neq 0$

?

Доказат-во

□

Пр В пространстве ОНБ $e_1\ e_2\ e_3$

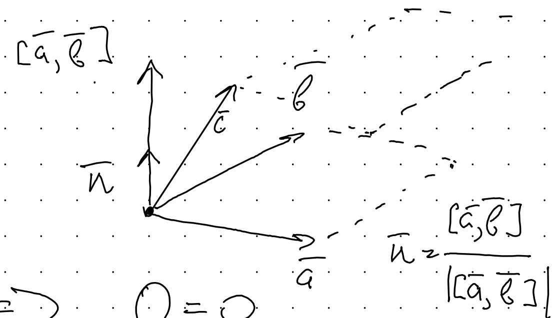
$[\bar e_1\ \bar e_2] = \bar e_3$ $[\bar e_1, \bar e_3] = \bar e_2$ $[\bar e_2, \bar e_3] = e_1$

□

Теор. (о смешанном произв.) $\forall\ \bar a, \bar b, \bar c$

1) $(\bar a, \bar b, \bar c) = ([\bar a, \bar b], \bar c)$

2) $(\bar a, \bar b, \bar c) = (\bar a, [\bar b, \bar c])$



Δ 1) 1 сл. $\bar a \parallel \bar b \Rightarrow 0 = 0$

2 сл. $\bar a \nparallel \bar b$ $\qquad [\bar a, \bar b] = \bar X$

$$(\bar a, \bar b, \bar c) = \underbrace{S_{осн}}_{=|[\bar a, \bar b]|} \cdot \underbrace{\pm h}_{=(\bar c, \bar n)} = \cancel{|\bar X|} \cdot \left(\bar c, \frac{\bar X}{\cancel{|\bar X|}}\right) =$$

$$= (\bar c, \bar X) = (\bar c, [a, b])$$

2) $(\bar a, \bar b, \bar c) = (\bar b, \bar c, \bar a) \underset{(1)}{=} ([\bar b, \bar c], \bar a) =$

$$= (\bar a, [\bar b, \bar c])$$

$\square$

Теор (лин.) $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, $\forall \lambda \in R$

1) $[\bar{a}, \bar{a}] = \bar{0}$

2) $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$

3) $[\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$

$[\lambda\bar{a}, \bar{b}] = \lambda[\bar{a}, \bar{b}]$

лин. по 1у арг.

Δ Введём $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ - ОНБ

Можем доказать равенство векторов покоорд-но

$$([\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}], \bar{e}_1) \overset{?}{=} ([\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}], e_1)$$

1я коорд. $[\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}]$ 1я коорд

$$(\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}, \bar{e}_1) \overset{?}{=} ([\bar{a}, \bar{c}], \bar{e}_1) + ([\bar{b}, \bar{c}], \bar{e}_1)$$

$$(\bar{a}, \bar{c}, \bar{e}_1) + (\bar{b}, \bar{c}, \bar{e}_1)$$

расписали в ориентир. объём

? Почему мы можем поставить знак =

Повторяем с e_2 e_3 и тем самым равенство доказано покоорд.

3) доказ-ся аналог-но но проще

∇

$\square$

Теор. (вычисл-е) в правом ОНБ

$e = (e_1\ e_2\ e_3]$ $\quad \bar{a} = e\alpha \quad \bar{b} = e\beta$

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

Δ $[\bar{a}, \bar{b}] = [\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 e_3, \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_3 \bar{e}_3]$

$$= 0 + 0 + 0 + \alpha_1 \beta_2 \overset{e_3}{[\bar{e}_1, \bar{e}_2]} + \alpha_1 \beta_3 [\bar{e}_1, \bar{e}_3] +$$

$$+ \alpha_2 \beta_1 \overset{-e_3}{[\bar{e}_2, \bar{e}_1]} + \alpha_2 \beta_3 [\bar{e}_2, \bar{e}_3] +$$

$$+ \alpha_3 \beta_1 \underset{-e_2}{[\bar{e}_3, \bar{e}_1]} + \alpha_3 \beta_2 [\bar{e}_3, \bar{e}_2] =$$

$$= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \bar{e}_1 + (\qquad) \bar{e}_2 + (\qquad) \bar{e}_3$$

$\square$

Замечание* в любом базисе e

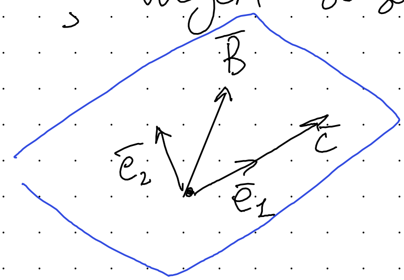
$$\begin{vmatrix} [e_2, e_3], & [e_1, e_3], & [e_1, e_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Теор $\forall\ \bar a, \bar b, \bar c$ **БАЦ - ЦАБ**

$$[a,[b,c]] = \bar b(\bar a, \bar c) - \bar c(\bar a, \bar b)$$

Δ

e - ОНБ, введём базис



$\bar a \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ $\bar b \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar e_1 \parallel \bar c$

$\bar e_2, \bar c, \bar b$ - компланарные

$$[\bar b, \bar c] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\gamma_1 \beta_2 \bar e_3$$

$$\parallel$$

$$e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$[\bar a, [\bar b, \bar c]] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & -\gamma\beta_2 \end{vmatrix} = -\gamma\alpha_2\beta_2 \bar e_1 + \gamma\alpha_1\beta_2 \bar e_2$$

$$\parallel$$

$$e\begin{pmatrix} -\gamma\alpha_2\beta_2 \\ \gamma\alpha_1\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{a}, \bar{c}) = \alpha_1 \gamma$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

$$\bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \gamma \beta_1 \\ \alpha_1 \gamma \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} \gamma(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \gamma \beta_2 \\ \alpha_1 \gamma \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\square$$