§ Предел последовательности

Опр: Числовой посл-ю $\{X_n\}$ называется функ-я $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n = f(n)$

При этом пара (n, x_n) наз. элем-м посл-и, n - номер, X_n - знач. этого эл-та

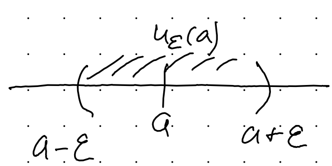
Пример $X_n = \begin{cases} 1, & n - \text{чет} \\ -1, & n - \text{неч} \end{cases}$

$\underset{n}{(2}, \underset{x_n}{1)}$, $(4, 1)$ - разл-е элементы

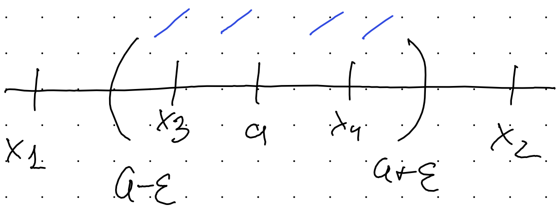
Опр: пусть $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$

ε - окрест. числа a наз.

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Опр: Б. говорить, что число $a \in \mathbb{R}$ явл. пределом посл. $\{x_n\}$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$ $(N \in \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$



$N = N(\varepsilon)$ - зависит от ε

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$x_n \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

где $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Замеч:

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$ - нерав-во треугол-ка (след. из аксиом)

2) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ - след-е из нер-ва Δ

Пример: Д-ть $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Решение: Треб. доказать

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$

* Можно было бы без исп-я целой части а по принципу Архимеда

Возьмем

целая часть

$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n \geq N \hookrightarrow$

$\hookrightarrow \quad n \geq N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\blacksquare$

Лемма 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \iff$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N': \forall n \geq N' \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Док-во $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ (2)

(2) $\overset{\text{опр}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow$

$\hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

(1) $\Rightarrow$ (2), т.к. $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ и если вып. (1), то можно взять $N = N'$ в (2) и усл. (2) будет выполнено

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть вып-я (2)

Пусть задано $\varepsilon > 0$, выберем $N' := N(\frac{\varepsilon}{2})$, где $N(\varepsilon)$ — из (2)

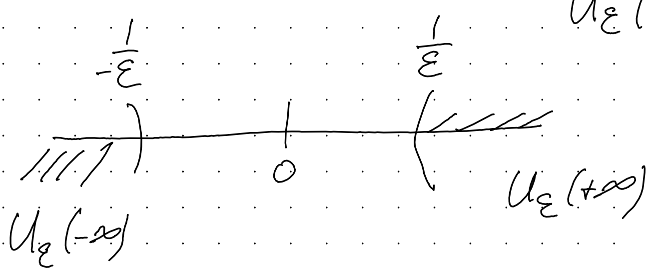
Пусть задано $\forall n \geq N' \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (1)$

(2), $N' = N(\frac{\varepsilon}{2})$

∎

Опр: $\forall \varepsilon > 0$ опр-м $U_\varepsilon(+\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$

$U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$

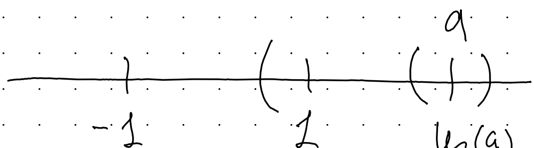


Опр: элемент $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ наз-е пределом послед-ти $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$

Опр: Посл. $\{x_n\}$ наз. сходящейся, если она имеет конечный предел.

Замеч. Напр., посл $x_n = \begin{cases} 1 & n - \text{чет} \\ -1 & n - \text{нечет.} \end{cases}$

не имеет ни конечного не бескон-го предела



Л2 (о непересе-я окр-ях)
Пусть $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, $A < B$
тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall a \in U_\varepsilon(A) \ \forall b \in U_\varepsilon(B)$
$\hookrightarrow a < b$ и след-но $U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B) = \varnothing$

Доказ-во: возможно 4 случая

			Опред. $\varepsilon > 0$
1)	$A \in \mathbb{R}$	$B \in \mathbb{R}$	$\varepsilon := \lvert A - B \rvert / 2$
2)	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$\varepsilon := 1/\lvert B \rvert + 1$
3)	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$\varepsilon := \frac{1}{\lvert A \rvert + 1}$
4)	$-\infty$	$+\infty$	$\varepsilon := 1$

Пусть зад. $\forall a \in U_\varepsilon(A)\ \forall b \in U_\varepsilon(B)$,
Тр. док: $a < b$

1сл) $a < A+\varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2} = B-\varepsilon < b$

2сл) $a < -\frac{1}{\varepsilon} = -|B|-1 \leq B-1 < B-\varepsilon < b \Rightarrow$
$a < b$

3сл) анал.

4сл) $a < -\frac{1}{\varepsilon} < 0 < \frac{1}{\varepsilon} < b$

$\blacksquare$

T1 Последовательность $\{x_n\}$ не может иметь 2х разл-х пределов в $\overline{\mathbb{R}}$
D-во: предположим противное
$A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ – различные пределы $\{x_n\}$
Для определ-и будем считать $A < B$
Восп-ся Л2 $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0\ U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \varnothing$
По опр-ю предела для данного ε_0
$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow x_n \in U_{\varepsilon_0}(A)$
$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow x_n \in U_{\varepsilon_0}(B)$

Возьмём $n = \max\{N_1, N_2\}$

Тогда $n \geq N_1$ и $n \geq N_2$ $\Rightarrow$

$x_n \in U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \varnothing$ прот-е

Опр: Посл $\{x_n\}$ наз. ограниченной, если мн-во её значений огр-но

Замечание: мн-во $X \subset \mathbb{R}$ явл огр. $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \hookrightarrow |x| \leq M$

T2: Если последов-ть сходится, то она огр-на

Док-во: Пусть $\exists\, a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Возьмём опр. предела для $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon = 1 \Rightarrow$

$\forall n \geq N \hookrightarrow |x_n| = |x_n - a + a| \underset{\text{нер.}\Delta}{\leq} |x_n - a| + |a| \leq$

$\leq 1 + |a|$

Возьмём $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |a|\}$ – ~~этот~~

maximum сущ-ет т.к. число элементов данного мн-ва конечно (док-ся индукцией по по-ису элементов) тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq M$ (достаточно рассмотр-ть

случаи 1) $n < N$ тогда это след-ет из опр. max

2) $n \geq N \Rightarrow |x_n| \leq 1 + |a| \leq M$

<u>Опр</u> Послед-ть $\{x_n\}$ наз-ся беск. большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$

т.е. $x_n \in (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$

<u>Зад.</u> Как связано усл-е

1) $\{x_n\}$ – б.б

2) $\{x_n\}$ – неогр.

(2): $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} \; |x_n| > M$

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть вып-но (1)

Пусть задано $\forall M \in \mathbb{R}$

Если $M < 0$, то возьмём $n = 1 \Rightarrow |x_n| > M$

Если $M = 0$, то возьмём $\varepsilon = 1$

Если $M > 0$, то возьмём $M = \frac{1}{\varepsilon}$

Применим усл. (1) $\Rightarrow \exists N: |x_N| > \frac{1}{\varepsilon} =$

$$= \begin{cases} 1, & M = 0 \\ M, & M > 0 \end{cases} \Rightarrow \exists n = N: |x_n| > M$$

$(2) \not\Rightarrow (1)$

$$x_n = \begin{cases} 1 & n\text{-нечёт} \\ n, & n\text{-чёт} \end{cases} \Rightarrow \{x_n\}\text{- неогр. не ЯВЛ. б.б.}$$