предложение

$$\Pi_p: \underbrace{\underbrace{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m}_{\text{подсистема}}, \dots, \overline{a}_k}_{\text{система}}$$

1) $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m$ — л. зав. $\Rightarrow$ $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_k$ — л. зав.

2) $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_k$ — л. незав. $\Rightarrow$ $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m$ — л. незав.

$\varnothing$ л. незав в согласии с 2)

логически эквивалентны, то можем доказать только одно

Δ

1) $\Leftrightarrow$ 2)

1) $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m$ — л. зав-а $\Rightarrow$

$$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \quad |\lambda_1| + \dots + |\lambda_m| > 0$$

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \dots + \lambda_m \overline{a}_m = \overline{0} \Rightarrow \underset{\lambda_i \neq 0}{\exists}\ \lambda_i \in \{\lambda_j \mid 1 \le j \le m\}$$

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \dots + \lambda_m \overline{a}_m + 0\,\overline{a}_{m+1} + \dots + 0\,\overline{a}_k = \overline{0}$$

$\square$

Пр

Пусть $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ – л. нез, $\bar{b}$

$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k \, (1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ коэф $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ определены единств-м образом

$\triangle$ Докажем от противного

Пусть $\bar{b} = \mu_1 \bar{a}_1 + \dots + \mu_k \bar{a}_k \quad (2)$

$(1) - (2): \quad \bar{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \bar{a}_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) \bar{a}_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_k - \mu_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_k = \mu_k \end{cases}$$

По опр. лин. незав.

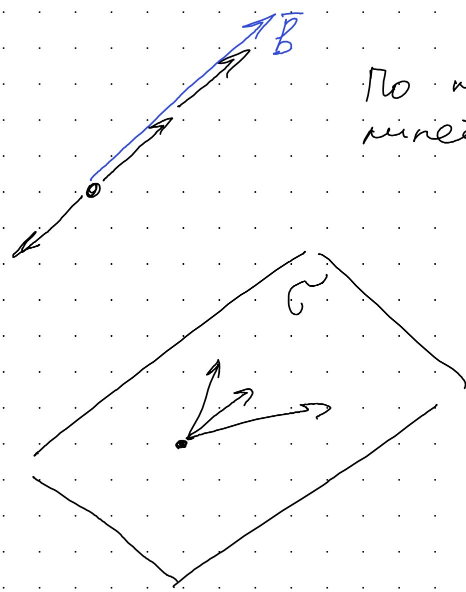
$\square$

Начинаем связь с геометрией $\downarrow$

Пр 1) $\bar a_1 \ldots \bar a_k$ коллинеарны, $\bar b$ раскл-ся по $\bar a_1, \ldots, \bar a_k \Rightarrow$ $\bar a_1, \ldots, \bar a_k, \bar b$ коллинеарных векторов

2) .... компланарна ...

Δ



По правилу взятия линейной комбинации

концы векторов придется лежать на одну плоскость

$\square$

Пр. 1) $\bar a_1 \neq \bar 0$ $\bar b \parallel \bar a_1 \Rightarrow \bar b$ раклад-ся по $\bar a_1$

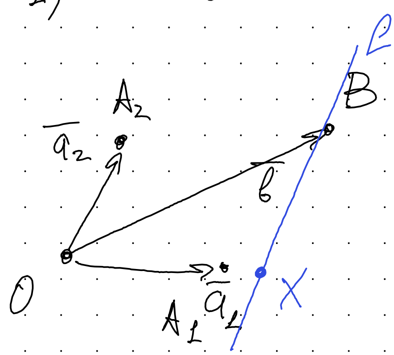
2) $\bar a_1 \nparallel \bar a_2$ $\bar a_1, \bar a_2, \bar b$ - компланарн. $\Rightarrow$ $\bar b$ расклад-ся по $\bar a_1, \bar a_2$

3) $\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3$ не компланарны, $\forall \bar b \Rightarrow$ $\bar b$ раскл-ся по $\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3$.

(*) На первой лекции договорились что нулевой вектор коллинеарен $\Rightarrow$ a_1 и $a_2 \neq \bar 0$

Δ 1) очев.

2)



$\overrightarrow{OA_1} = \bar a_1$

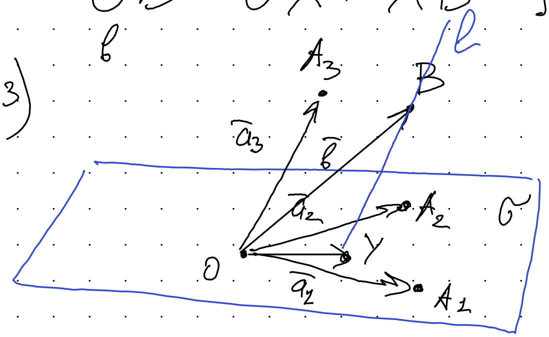
$\overrightarrow{OA_2} = \bar a_2$

$\overrightarrow{OB} = \bar b$

$l \ni B$, $l \parallel \overrightarrow{OA_2}$, $X = l \cap \overline{OA_1}$

$$\underbrace{\overrightarrow{OB}}_{b} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XB} = \lambda_1 \bar a_1 + \lambda_2 \vec a_2$$

3)



l - прямая $l \ni B$

$l \parallel \overrightarrow{OA_3}$

$Y = l \cap \sigma$

$OY = \lambda_1 \bar a_1 + \lambda_2 \bar a_2$

$\bar b = \overrightarrow{OB} = \overline{OY} + \overline{YB} \leftarrow \lambda_3 \bar a_3$ ∎

Теорема о связи линейной зав-ти, компланарности и коллинеарности

1) $\bar{a}_1$ – лин. зав $\Leftrightarrow$ $\bar{a}_1 = 0$
2) $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ – лин зав $\Leftrightarrow$ $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$
3) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ – лин. зав $\Leftrightarrow$ $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ компл.
4) $\forall$ $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ – лин. зав. (лн в 3х мерном пространстве)

Δ 1) очевидно

2) $\Rightarrow$

3) $\Rightarrow$ $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ - лин. зав. $\Rightarrow$
$\exists$ один из них выраж-ся через другие,
$\bar{a}_3 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$
любые 2 вектора
a_1, a_2 компланарны $\Rightarrow$ $a_1\ a_2\ a_3$ компллан-ы

$\Leftarrow$ 1случай) $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2 \xRightarrow{п2)} \bar{a}_1, \bar{a}_2$ – л. зав. $\Rightarrow$

$\xRightarrow[\text{по пред.}]{} \underbrace{a_1\ a_2\ a_3}_{\text{лин. зав.}}$

2 случай) $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2 \xRightarrow[\text{по пред.}]{} \bar{a}_3$ лин. выр-ся $\bar{a}_1\ \bar{a}_2$
$\Rightarrow a_1\ a_2\ a_3$ лин. зав.

4) 1 сл.) $\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3$ компл. $\overset{3)}{\Longrightarrow}$ лин. зав.

2 сл) $\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3$ не компланар. $\underset{\text{пред.}}{\Longrightarrow}$ a_4 раскладывается по $\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3 \Rightarrow$ лин зав.

Базисы

Опр. Упорядоченная сист. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ называется базисом $\bar{V}$ если

1) $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$ – лин. незав.
2) $\forall\ \bar{a} \in \bar{V}$ линейно выражается через $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$

Т. (описание базисов)

1) $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ – базис на плоскости $\Leftrightarrow$ $n=2$, $e_1 \not\parallel e_2$
2) $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ – базис в простр-е $\Leftrightarrow$ $n=3$, $e_1 e_2 e_3$ – некомпланар.

Δ 1) 1 сл.) $n \geq 3 \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – лин. зав

2 сл) если $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ колл $\Rightarrow$ не базис

Остается $e_1 \not\parallel e_2$

2)

1сл) $n \geq 4 \Rightarrow$ лин. зав. против-е условию 1) опр-я базиса

2сл) $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ компл $\Rightarrow$ не базис
против-е 2) опр. базис.

3сл) $\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3$ не компл. $\Rightarrow$ лин. незав.
$\Rightarrow \forall a \in V$ лин. выражается через $\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3$

$\square$

Координаты в базисе $e = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$

$\forall \bar{a} \in V$ имеет единств. разложение

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_2 \bar{e}_n$$

$$\bar{a} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \leftarrow$$ коорд. столбец $\bar{a}$ в базисе e

$$\bar{a} = e\alpha$$

$$V \xleftrightarrow{e\text{-базис}} \mathbb{R}^3$$

Пр. $e = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ – базис

$\bar{a} = e\alpha$

$\bar{b} = e\beta$

$\Downarrow$

$\bar{a} + \bar{b} = e(\alpha + \beta)$

$\lambda \bar{a} = e(\lambda \alpha)$

$\Delta \begin{cases} \bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n \\ \bar{b} = \beta_1 \bar{e}_1 + \ldots + \beta_n e_n \end{cases} \Rightarrow \bar{a} + \bar{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1)\bar{e}_1 + \ldots$

$\ldots + (\alpha_n + \beta_n) e_n$

Замена базиса и координат

$e = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ $\quad \bar{a} = e\alpha$

$e' = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ $\quad \phantom{\bar{a}} = e'\alpha'$

Опред. $\quad \underset{n \times n}{S}$

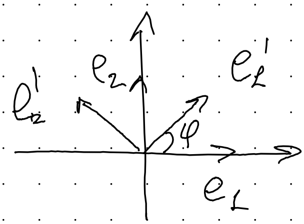
S – матрица перехода от e к e' если j-й столбец S – координ-й столбец e'_j в базисе e

$S_{e\to e'}$ $\qquad S = \left(\boxed{\vdots} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \right)$

$e'_1 \ e'_2 \ e'_3$ в базисе e

Пример

$n=2$



$e = (\bar e_1, \bar e_2)$

ортонорм. базис

$\bar e_1 \perp \bar e_2$

$|e_1| = |e_2| = 1$

$$S_{e\to e'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

матрица поворота

$$S_{e\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{единичная матрица } E$$

Символическое обозначение

$\underset{e\to e'}{S}$ $\qquad e' = eS$

Теор. $\qquad \bar{a} = e\alpha \qquad \underset{e\to e'}{S}$

$\quad \| \quad e'\alpha'$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = S\alpha'$$

Δ „Доказательство"

$$\bar{a} = e'\alpha' = e(S\alpha') \Rightarrow S\alpha' = \alpha$$

Задание убедиться в ассоциативности

T. (о сквозной замене)

e, e', e'' - базисы

$\underset{e\to e'}{S} \quad \underset{e'\to e''}{R} \Rightarrow \underset{e\to e''}{S\cdot R}$

Δ „док-во"

$$\begin{cases} e' = eS \\ e'' = e'R \end{cases} \Rightarrow e'' = eSR$$

$\boxtimes$

Пример $e'' = e$ $\underset{e \to e'}{S}$ $\underset{e' \to e}{R}$

$SR = E$