Аксиоматическое опреде-е теории вероятности

Определение дал Колмогоров в 1929-1933

I Ω - пространство эл-х исходов эксперимента (неделимых исходов)

II Опр. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется сигма-алгебра событий если:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \neg A \in \mathcal{F}$
3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Note: 2 и 3 $\Rightarrow$ 1

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{F}$$

Свойства:

1) $\varnothing \in \mathcal{F}$

Док-во

$$\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$$

2) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Док-во $\exists A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A}_1, \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \tilde{F} \Rightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \tilde{F}$$

3) $A, B \in \tilde{F} \Rightarrow A \setminus B \in \tilde{F}$

Док-во

$A, B \in \tilde{F} \Rightarrow \overline{B} \in \tilde{F} \Rightarrow A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \tilde{F}$

Пример:

1) $\tilde{F} = \{\varnothing, \Omega\}$

2) $\tilde{F} = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$

3) $\tilde{F}$ - бореливская σ алгебра

$\Omega = \mathbb{R}$

σ-алгебра это такая системы множеств в которое входит пустое и универсальное и замкнутое отн-но и замкнутое относительно $\cup$ $\cap$ и $\overline{}$.

III опр. $\exists\ \Omega$ – прост-во элем-х исходов и $\mathcal{F}$ – σ-алгебра на Ω

Вероятностью на $(\Omega, \mathcal{F})$ наз-ся ф-я $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со св-ми

A1 $P(A) \geq 0$ – услов-е неотр-ти

A2 $A_1, A_2, \dots, A_n \dots \in \mathcal{F}$ – попарно несовместные, то

$$P\left(\sum^{\infty} A_i\right) = \sum^{\infty} P(A_i)$$ – свойство счётной аддитивности

меры из мат. Анализа (measure)

A3 $P(\Omega) = 1$ – условие норм-ти

Опр: Вероятностным пространством наз-ся тройка объектов $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

простр-во эл-х исходов

σ-алгебра

вер-ть

Свойства вер-ти

1) $P(\varnothing) = 0$ Док-во $\varnothing$ и Ω – несовм-ны $\Rightarrow$

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) \cdot 1$$

2) Формула обратной вер-ти

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Док-во

A и $\bar{A}$ – несовместные события

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

3) $0 \leq P(A) \leq 1$

a) по А1 $P(A) \geq 0$

b) $P(A) = 1 - \underbrace{P(\bar{A})}_{\geq 0} \leq 1$

Min 25:56