§2 Сист. коорд.

Опр: ДСК (O, e)

дек

точка начала коорд.

базис

Опр: ПДСК – ДСК (O, e), e – ОНБ

прямоуг

Опр: Коорд. M в ДСК (O, e) наз коорд. $\overrightarrow{OM}$ в базисе e

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ – коорд. столбец

Точки $\longleftrightarrow$ коорд. столбцы

$$M \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{OM} = eX$$

<u>Предл.</u> $M \underset{(o,e)}{\longleftrightarrow} X$ $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = e\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix}$

$N \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} Y$

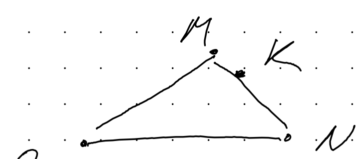
Δ $\overrightarrow{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$

$$e\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - e\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\square$

<u>Предл</u> деление отрезка в каком-то отношении λ

$M \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $N \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$



$\overline{MK} = \lambda \overline{MN}$

$$\Downarrow$$

$$K \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1 \\ (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2 \\ (1-\lambda)x_3 + \lambda y_3 \end{pmatrix}$$

Δ $\overline{OK} = \overline{OM} + \overline{MK} = \overline{OM} + \lambda \overline{MN} =$

$= \overline{OM} + \lambda(\overline{ON} - \overline{OM}) = (1-\lambda)\overline{OM} + \lambda \overline{ON}$

$\square$

Замена координат

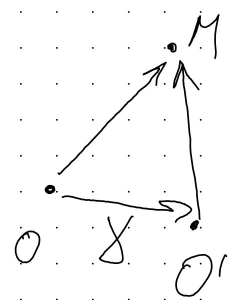
(O, e) $\qquad$ (O', e') $\qquad$ $\underset{e \to e'}{S}$ матрица перехода

$e' = eS$

$O' \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$

Теор: $M \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} X$ $\qquad$ $M \underset{(O',e')}{\longleftrightarrow} X'$

$X = SX' + \gamma$

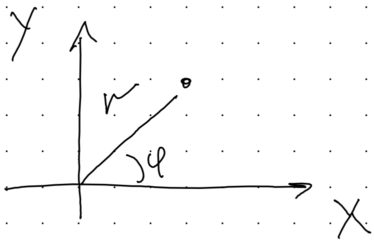


Δ $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$ – в базисе e

$X = \gamma + SX'$ $\qquad$ $O'M = e'X' = eSX'$

$\square$

Полярная СК на плоскости

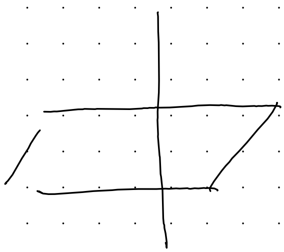


$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Цилиндр-ая СК



$$O_{xy} - (r, \varphi)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Сферические

$$(R, \varphi, \theta)$$

§ Скалярное Произведение

Опр: Ск. пр-е $\bar a$ и $\bar b$

$|\bar a|\cdot|\vec b|\cos\varphi$, $\varphi = \angle(\bar a, \bar b)$

* Геометр-ое опр-е

Обоз: $(\vec a \vec b)$

Пр $|\bar a| = \sqrt{(\bar a, \bar a)}$

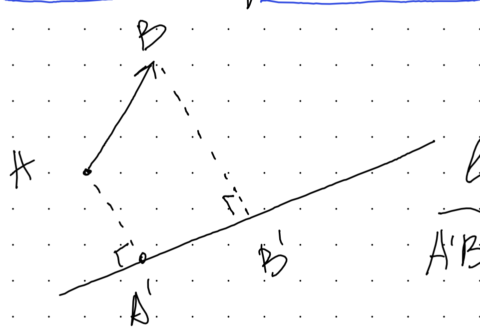
Следствие $|\bar a| = 0 \iff (\bar a, \bar a) = 0$

Пр $\bar a \perp \bar b \iff (\bar a, \bar b) = 0$

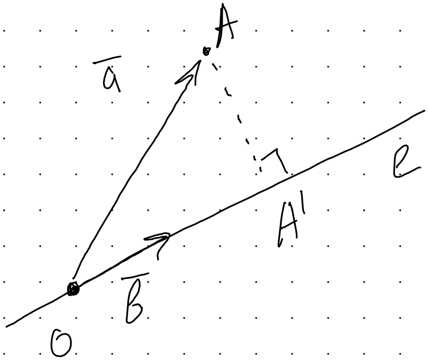
$\triangle$ Если $\bar a \neq \bar 0$, $\bar b \neq \bar 0$

$\cos\varphi = 0 \iff (\bar a, \bar b) = 0$ $\square$

Проектир-е вектора на направление



$\overline{A'B'}$ — проекция $\overline{AB}$ на l



$\bar{b}$ - направл-й вектор l

$\bar{b} \neq 0$

OA' - проекция $\vec{a}$ на $\bar{b}$

$\parallel$

$pr_{\bar{b}}\,\bar{a}$

Пр $\bar{b} \neq 0 \Rightarrow pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{\underbrace{(\bar{b}, \bar{b})}_{const}}\,\bar{b}$

Δ

$$|pr_{\bar{b}}\,\bar{a}| = |\bar{a}| \cos\varphi$$

– алгебраическая проекция знак указывает на сонаправл-ть

$$pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = |\bar{a}| \cos\varphi \, \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{|\bar{a}||\bar{b}| \cos\varphi}{|\bar{b}|^2}\,\bar{b}$$

$\square$

Теорема $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) $(\bar{a},\bar{a}) \geq 0$, причём $(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

2) $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$

3) $\left.\begin{aligned} &(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c}) \\ &(\lambda\bar{a},\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b}) \end{aligned}\right\}$ линейность по 1-у аргументу

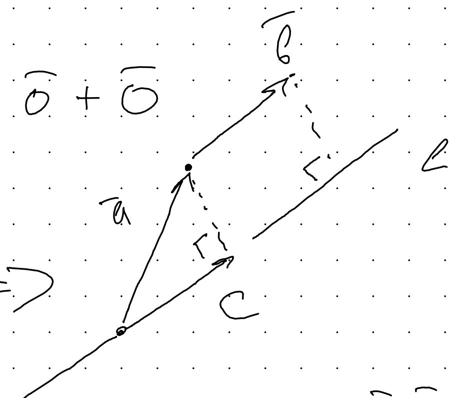
выполняется по второму аргументу

Δ 1) и 2) очевидно

3)

Если $\bar{c} = 0 \Rightarrow \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$

Если $\bar{c} \neq 0$



$pr_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b}) = pr_{\bar{c}}\bar{a} + pr_{\bar{c}}\bar{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{a}+\bar{b},\bar{c})}{\cancel{(\bar{c},\bar{c})}}\bar{c} = \frac{(\bar{a},\bar{c})}{\cancel{(\bar{c},\bar{c})}}\cdot\bar{c} + \frac{(\bar{b},\bar{c})}{\cancel{(\bar{c},\bar{c})}}\bar{c}$$

$\bar{c} \neq \bar{0}$

Если $\bar{b} \neq 0$

$$pr_{\bar{b}}\lambda\bar{a} = \lambda\, pr_{\bar{b}}\bar{a} \Rightarrow \frac{(\lambda\bar{a},\bar{b})}{\cancel{(\bar{b},\bar{b})}}\bar{b} = \lambda\frac{(\bar{a},\bar{b})}{\cancel{(\bar{b},\bar{b})}}\bar{b}$$

$\square$

ОНБ $\quad e = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$

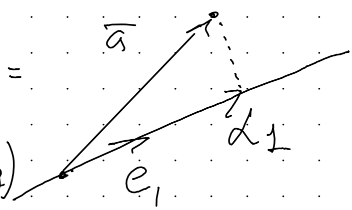
Пр $\quad$ в ОНБ e

$$\bar{a} = e\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_i = (a, \bar{e}_i)$$

$$\Delta \quad \bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$$

$$(\bar{a}, \bar{e}_1) = (\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3, \bar{e}_1) =$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\cancel{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}}_{1} + \alpha_2 \underbrace{\cancel{(\bar{e}_2, \bar{e}_1)}}_{0} + \alpha_3 \underbrace{\cancel{(\bar{e}_3, \bar{e}_1)}}_{0}$$



$$\alpha_1 = pr_{e_1} \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \bar{e}_1$$

Теорема: в ОНБ $\bar{a} = e\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ $\bar{b} = e\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$$

экз

$$\Delta \; (\bar{a}, \bar{b}) = (\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3, \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_3 \bar{e}_3) =$$

$$= \alpha_1 \beta_1 \underbrace{\cancel{(\bar{e}_1 \bar{e}_1)}}_{1} + \alpha_2 \beta_2 \underbrace{\cancel{(\bar{e}_2 \bar{e}_2)}}_{1} + \alpha_3 \beta_3 \underbrace{\cancel{(\bar{e}_3 \bar{e}_3)}}_{1} + 0$$

Сл-е В ОНБ $\bar{a} = e\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$

$\bar{b} = e\beta \Rightarrow \quad \cos\varphi = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$

Замечание* Если $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – $\forall$ базис

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}} \underset{3\times 3}{\Gamma} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}}$$

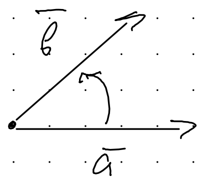
$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1 \bar{e}_1), & (e_1 e_2) & (e_1 e_3) \\ (\bar{e}_2 e_1) & & \\ (\bar{e}_3 \bar{e}_1) & & \end{pmatrix}$$

Матрица Грама

§4 Ориентированные объёмы и площади

Ориентация на плоскости

Упоряд-ая $\bar a, \bar b$ $\quad \bar a \not\parallel \bar b$



$\measuredangle(\bar a, \bar b)$ – мин. угол пов ↺ от $\bar a$ до $\bar b$

$\measuredangle(\bar b, \bar a)$

Лемма

$$\measuredangle(\bar a, \bar b) + \measuredangle(\bar b, \bar a) = 2\pi$$

Опр.

$\measuredangle(\bar a, \bar b) < \pi \Rightarrow \bar a, \bar b$ – полож. ориентир.

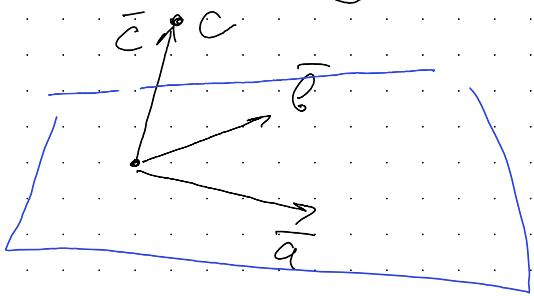
$\qquad\quad > \pi \Rightarrow \bar a, \bar b$ – отр. ориентир.

Пр $a \not\parallel b$

$\bar a, \bar b$ – полож-о ориентир. $\Leftrightarrow$ $\bar b, \bar a$ – отр. ориентир

Ориентация в пространстве

$\bar a, \bar b, \bar c$ – упор. тройка некомпл. в-в.



Базис $\bar a, \bar b, \bar c$ – пол-о ориентир. (правая тройка)

Если при взгляде из C $\bar a, \bar b$ – пол. ориентир.

Предл. $\bar a, \bar b, \bar c$ – правая тройка $\Leftrightarrow$

$\bar b, \bar a, \bar c$ – лев $\Leftrightarrow$ $\bar b\ \bar c\ \bar a$ – прав.

$\Leftrightarrow$ $\bar c\ \bar a\ \bar b$ – прав

$\triangleright$ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - пр $\Leftrightarrow$ $\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}$ - лев

$$\left.\begin{matrix} \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \\ \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} \\ \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b} \end{matrix}\right\}$$ однонапр-ые

$\square$