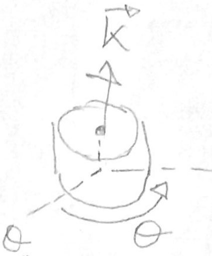
Modelo cinemático de velocidad

En esta sección se derivan las relaciones de velocidad, con respecto a las velocidades lineales y angulares del efector-final. Las relaciones de velocidad se determinan por los Jacobianos de la cinemática directa.

Velocidad angular: caso de eje fijo



$$\omega = \dot{\theta}\vec{k}$$

donde $\dot{\theta}$ es la derivada del tiempo de θ, $\vec{k}$ un vector en dirección del eje de rotación y ω es la velocidad angular. Dada la velocidad angular del cuerpo, la velocidad lineal v de cualquier punto en el cuerpo esta dada por:

$$v = \omega \times \vec{r}$$

donde $\vec{r}$ es un vector desde el origen al punto dado. La velocidad angular ω es una propiedad de la trama anexa al cuerpo. La velocidad angular no es una propiedad de un punto particular. Así que v corresponde a la velocidad lineal de un punto mientras ω corresponde a la velocidad angular de una trama rotando.

Matrices asimétricas.

Se dice que una matriz S es asimétrica si y sólo si

$$S^T + S = 0$$

donde,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -S_3 & S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo: si se definen a los tres vectores unitarios de un sistema de coordenadas como $\vec{i}$, $\vec{j}$ $\vec{k}$, representados como,

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices asimétricas $S(\vec{i})$, $S(\vec{j})$, $S(\vec{k})$ se definen como,

$$S(\vec{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\vec{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Derivada de una matriz de rotación

$$R(\theta) R(\theta)^T = I$$

obteniendo la derivada de la ecuación anterior se tiene

$$\frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T + R(\theta) \frac{dR^T}{d\theta} = 0$$

R. 41

Se define a S como,

$$S := \frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T$$

entonces la transpuesta de S es,

$$S^T = \left(\frac{dR}{dt} R(\theta)^T \right)^T = R(\theta) \frac{dR^T}{d\theta}$$

Por lo que se cumple

$$S + S^T = 0$$

Demostración

$$S = \frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{S}{R(\theta)^T}$$

$$R(\theta)^T = R(\theta)^{-1} = \frac{1}{R(\theta)}$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{S/1}{\frac{1}{R(\theta)}}$$

$$\frac{dR}{d\theta} = S R(\theta)$$

En otras palabras la matriz S es una matriz asimétrica. Entonces

$$S R(\theta) = \frac{dR}{d\theta} R(\theta) R(\theta)^T$$

$$\boxed{\frac{dR}{d\theta} = S R(\theta)} \qquad \dot{R}(\theta) = S R(\theta)$$

Ejemplo: Si $R = R_{x,\theta}$ donde $R_{x,\theta}$ se refiere a la matriz de rotación básica que se gira sobre el eje x, entonces

$$S = \frac{dR}{d\theta} R^T = \frac{d}{d\theta}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta & -c\theta \\ 0 & c\theta & -s\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{-s\theta c\theta + s\theta c\theta} & -s^2\theta - c^2\theta \\ 0 & c^2\theta + s^2\theta & \cancel{s\theta c\theta - s\theta c\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = S(i)$$

Velocidad angular: caso general

Suponiendo que $R(t)$ varia con el tiempo,

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t)$$

Como $S(t)$ es asimétrica puede representarse como $S(\omega(t))$ para un vector único $\omega(t)$. El vector $\omega(t)$ es la velocidad angular de una trama de rotación con respeto a una trama fija en un tiempo t.

$$\dot{R}(t) = S(\omega(t))R(t)$$

Cuando la trama fija es O_0 con respecto a una trama movil O_n.

$$\dot{R}^0_n = S(\omega^0_{0,n})R^0_n$$

Velocidad lineal de un punto fijo a una trama movil. Las coordenadas de p^1 con respeto a la trama O_0 estan dados por

$$p^0 = R^0_1 p^1$$

La velocidad $\dot{p}^0$ esta dada por

$$\dot{p}^0 = \dot{R}^0_1(t)p^1 + R^0_1(t)\cancel{\dot{p}^1}$$

debido a que p^1 se encuentra fijo a la trama O_1 y las coordenadas relativas a la trama O_1 no cambian entonces $\dot{p}^1 = 0$.

$$\dot{p}^0 = \dot{R}^0_1(t)p^1 = S(\omega^0)R^0_1 p^1 = S(\omega^0)p^0$$

$$\dot{p}^0 = \omega^0 \times p^0$$

suponiendo que la transformación homogenea es dependiente del tiempo, entonces:

$$H_1^0(t) = \begin{bmatrix} R_1^0(t) & O_1^0(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si se omite por simplicidad el argumento t y también supeíndices y los subíndices en R_1^0 y O_1^0 se escribe,

$$p^0 = Rp^1 + O$$

si se diferencia la expresión anterior,

$$\dot{p}^0 = \dot{R}p^1 + \dot{O}$$
$$= S(\omega)Rp^1 + \dot{O}$$
$$= \omega \times r + v$$

donde $r = Rp^1$ es el vector desde O_1 a p que se expresa en la orientación de la frama O_0 y v es la tasa a la cual el origen O_1 se mueve.

Derivación del Jacobiano

Considere un manipulador de n-eslabones y con variables de articulación $q_1, \ldots, q_n$ tal que:

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & O_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El objetivo de esta sección es relacionar la velocidad lineal y angular del efector-final con el vector de velocidades de articulación $\dot{q}(t)$. Se define la velocidad ω_n^0 del efector-final.

$$S(\omega_n^0) = \dot{R}_n^0 (R_n^0)^T$$

y la velocidad lineal del efector-final como,

$$v_n^0 = \dot{o}_n^0$$

se desean expresiones de la forma:

$$v_n^0 = J_v \dot{q}$$

$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{q}$$

donde J_v y J_ω son matrices $3 \times n$. Agrupando se tendrá,

$$\epsilon = J \dot{q}$$

donde ϵ y J estan dados por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} \quad y \quad J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix}$$

ϵ es llamada velocidad del cuerpo y J Jacobiano. La matriz J es una matriz de $6 \times n$ donde n es el número de articulaciones.

Velocidad angular

Si la i-esima articulación es revoluta, entonces la i-esima variable de articulación q_i se iguala como θ_i y el eje de rotación es z_{i-1}. Se propone a ω_i^{i-1} como la velocidad angular del eslabón i que se propaga por la rotación de la articulación i expresado relativo a la trama $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ (trama anterior).

La velocidad angular se expresa en la trama $i-1$ por,

$$\omega_i^{i-1} = \dot{q}_i \vec{z}_{i-1}^{\,i-1} = \dot{q}_i \vec{K}$$

donde $\vec{K}$ es el vector de coordenadas unitarias $[0,0,1]^T$.

Si la i-ésima articulación es prismática entonces el movimiento de la trama i relativa a la trama $i-1$ es una transportación y,

$$\omega_i^{i-1} = 0$$

En este caso $q_i \cong d_i$. La velocidad angular total del efector-final esta dada por:

$$\omega_n^0 = \rho_1 \dot{q}_1 \vec{K} + \rho_2 \dot{q}_2 R_1^0 \vec{K} + \cdots + \rho_n \dot{q}_n R_{n-1} \vec{K} = \sum_{i-1}^{n} \rho_i \dot{q}_i z_{i-1}^0$$

en donde $\rho_1 = 1$ si la articulación i es revoluta y $\rho_1 = 0$ si es prismática. También $z_{i-1}^0 = R_{i-1}^0 \vec{K}$

$$z_0^0 = \vec{K} = [0, 0, 1]^T$$

Demostración

$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{q}$$

$$J_\omega = \frac{\omega_n^0}{\dot{q}}$$

$$J_\omega = \frac{\rho \dot{q} z}{\dot{q}}$$

Entonces el Jacobiano de velocidad angular esta dado por:

$$J_\omega = [\rho_1 z_0 \cdots \rho_n z_{n-1}]$$

Velocidad lineal

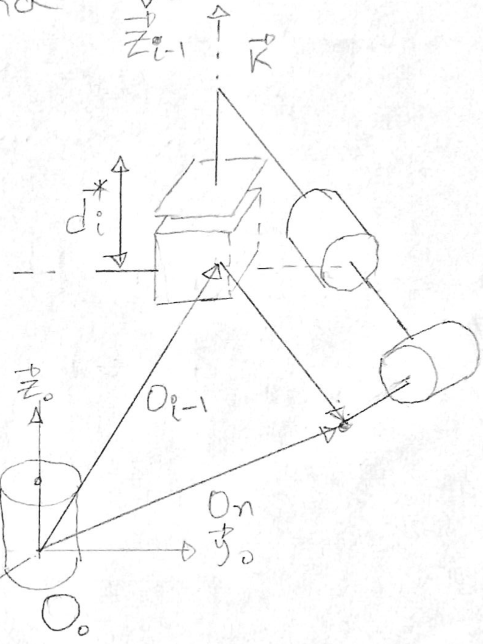
La velocidad lineal del efector-final es $\dot{o}_n^0$. Por la regla de la cadena de diferenciación

$$v_n^0 = \dot{o}_n^0 = \frac{\partial o_n^0}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial o_n}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial o_n}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

Tal que la i-ésima columna de J_v, que se denota por J_{v_i} esta dada por

$$J_{v_i} = \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i}$$

esta expresión es la velocidad lineal del efector-final que resultará si $\dot{q}_i = 1$ y las otras $\dot{q}_j = 0$. Esto es, la i-ésima columna del Jacobiano se puede generar manteniendo todas las articulaciones fijas pero la i-ésima en movimiento a una velocidad unitaria.

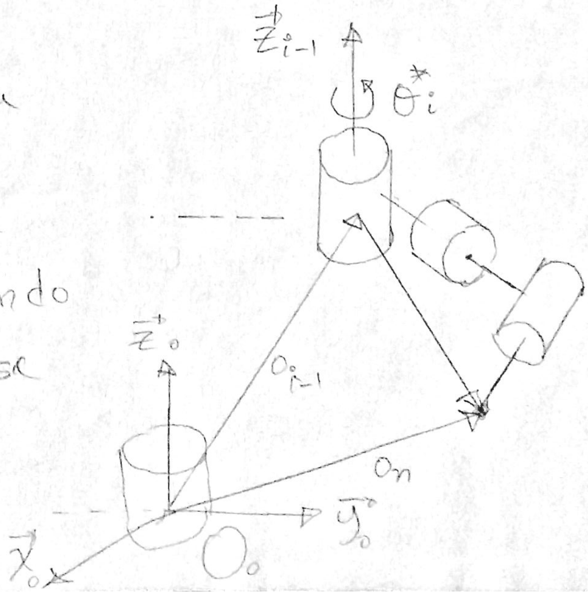


En el dibujo se muestra una articulación prismática que se mueve a lo largo del eje $\vec{z}_{i-1}$ con una velocidad $\frac{d}{dt} d_i$ cuando todas las demás articulaciones se mantienen fijas, resultando en:

es unitaria porque no rota

$$\frac{d}{dt} O_n^0(t) = \frac{d}{dt} d_i(t) R_{i-1}^0 \vec{k} = \frac{d}{dt} d_i(t) z_{i-1}^0 = J_{v_i} \dot{d}_i = v_n^0$$

por lo tanto $J_{v_i} = z_{i-1}^0$



En este dibujo se muestra una articulación revoluta i, que rota alrededor del eje z_{i-1} con una velocidad angular $\frac{d}{dt} \theta_i z_{i-1}$ cuando todas las demás articulaciones se mantienen fijas, resultando en:

$$\frac{d}{dt} o_n^0(t) = \omega \times r = \left[\dot{\theta} z_{i-1}\right] \times \left[o_n - o_{i-1}\right] = J_{v_i} \dot{\theta}_i$$

por lo tanto,

$$J_{v_i} = z_{i-1}^0 \times \left[o_n - o_{i-1}\right]$$

De lo anterior se tiene que la mitad superior del Jacobiano J_v esta dada por

$$J_v = \left[J_{v_1} \cdots J_{v_n}\right]$$

donde la i-esima columna J_{v_i} es

$$J_{v_i} = \begin{cases} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) & \text{para la articulación revoluta } i \\ z_{i-1} & \text{para la articulación prismática } i \end{cases}$$

La mitad inferior del Jacobiano esta dada por

$$J_\omega = \left[J_{\omega_1} \cdots J_{\omega_n}\right]$$

donde la i-esima columna J_{ω_i} es

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1} & \text{para la articulación revoluta } i \\ 0 & \text{para la articulacion prismática } i \end{cases}$$

Por lo tanto para un Jacobiano de n-eslabones se tendrá,

$$J = \left[J_1 \; J_2 \cdots J_n\right]$$