APUNTES DE ROBOTICA

MODELO CINEMÁTICO DE VELOCIDAD

Abril 2020

MAXIMILIANO PONCE

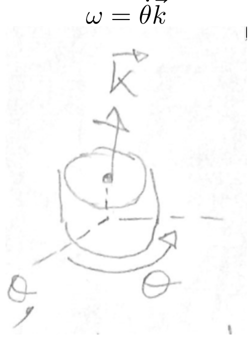
Contents

1 Modelo cinemático de velocidad

En esta sección se derivan las relaciones de velocidad, con respecto a las velocidades lineales y angulares del efector final. Las relaciones de velocidad se determinan por los Jacobianos de la cinemática directa.

2 Velocidad angular: Caso de eje fijo

$$\omega = \dot{\theta}\vec{k}$$



donde $\dot{\theta}$ es la derivada con respecto al tiempo de θ, $\vec{k}$ es un vector en dirección del eje de rotación y ω es la velocidad angular. Dada la velocidad angular del cuerpo, la velocidad lineal de cualquier punto en el cuerpo esta dada por:

$$v = \omega \times \vec{r}$$

donde $\vec{r}$ es un vector desde el origen al punto dado. La velocidad angular ω es una propiedad de la trama anexa al cuerpo. La velocidad angular no es una propiedad de un punto particular. Asi que v corresponde a la velocidad lineal de un punto mientras ω corresponde a la velocidad angular de una trama rotando.

3 Matrices asimétricas

Se dice que una matriz S es asimétrica si y sólo si:

$$S^T + S = 0$$

donde,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo: si se definen a los tres vectores unitarios de un sistema de coordenadas como $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, representados como:

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices asimétricas $S(\vec{i}), S(\vec{j}), S(\vec{k})$ se definen como:

$$S(\vec{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, S(\vec{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Derivada de una matriz de rotación:

$$R(\theta) \cdot R(\theta)^T = I$$

Obteniendo la derivada de la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{dR}{d\theta}\cdot R(\theta)^T + R(\theta)\cdot\frac{dR^T}{d\theta} = 0$$

Se define a S como,

$$S := \frac{dR}{d\theta}\cdot R(\theta)^T$$

entonces, la transpuesta de S es,

$$S^T = \left(\frac{dR}{d\theta}\cdot R(\theta)^T\right)^T = R(\theta)\cdot\frac{dR^T}{d\theta}$$

Por lo que se cumple

$$S + S^T = 0$$

Demostración

$$S = \frac{dR}{d\theta}\cdot R(\theta)^T$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{S}{R(\theta)^T}$$

$$R(\theta)^T = R(\theta)^{-1} = \frac{1}{R(\theta)}$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{S}{\frac{1}{R(\theta)}}$$

$$\frac{dR}{d\theta} = S\cdot R(\theta)$$

En otras palabras la matriz S es una matriz asimétrica. Entonces,

$$S\cdot R(\theta) = \frac{dR}{d\theta}R(\theta)R(\theta)^T$$

$$\boxed{\frac{dR}{d\theta} = SR(\theta)} \quad \dot{R}(\theta) = SR(\theta)$$

Ejemplo: Si $R = R_{\vec{x},\theta}$ donde $R_{\vec{x}}$ se refiere a la matriz de rotación básica que se gira sobre el eje x, entonces

$$S = \frac{dR}{d\theta}R^T = \frac{d}{d\theta}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}\right\}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -s\theta & -c\theta\\ 0 & c\theta & -s\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & s\theta\\ 0 & -s\theta & c\theta\end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \cancel{-s\theta c\theta + s\theta c\theta} & -s^2\theta - c^2\theta\\ 0 & c^2\theta + s^2\theta & \cancel{s\theta c\theta - s\theta c\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = S(i)$$

4 Velocidad angular: Caso general

Suponiendo que $R(t)$ varia con el tiempo,

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t)$$

Como $S(t)$ es asimétrica puede representarse como $S(\omega(t))$ para un vector único $\omega(t)$. El vector $\omega(t)$ es la velocidad angular de una trama de rotación con respecto a una trama fija en un tiempo t.

$$\dot{R}(t) = S(\omega(t))R(t)$$

Cuando la trama fija es O_0 con respecto a una trama movil O_n,

$$\dot{R}_n^0 = S(\omega_{o,n}^0)R_n^0$$

Velocidad lineal de un un punto fijo a una trama movil. Las coordenadas de p^1 con respecto a la trama O_0 estan dados por:

$$p^0 = R_1^0p^1$$

La velocidad $\dot{p}^0$ esta dado por

$$\dot{p}^0 = \dot{R}_1^0(t)p^1 + R_1^0(t)\cancel{\dot{p}^1}$$

debido a que p^1 se encuentra fijo a la trama O_1 y las coordenadas relativas a la trama O_1 no cambian entonces

$$\dot{p}^1 = 0 \quad \dot{p}^0 = \dot{R}_1^0(t)p^1 = S(\omega^0)R_1^0 p^1 = S(\omega^0)p^0$$

$$\dot{p}^0 = \omega^0 \times p^0$$

Suponiendo que la transformación homogenea es dependiente del tiempo, entonces:

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0(t) & O_1^0(t) \\ O & 1 \end{bmatrix}$$

Si se omite por simplicidad el argumento t y también superíndices y los subíndices en R_1^0 y O_1^0 se escribe,

$$p^0 = Rp^1 + O$$

Si se diferencia la expresión anterior,

$$\dot{p}^0 = \dot{R}p^1 + \dot{O}$$
$$\dot{p}^0 = S(\omega)R_{p^1} + \dot{O}$$
$$\dot{p}^0 = \omega \times r + \upsilon$$

donde $r = R_{p^1}$ es el vector dese O_1 a p que se expresa en la orientación de la trama O_0 y υ es la tasa a la cual el origen O_1 se mueve.

5 Derivación del Jacobiano

Considere un manipulador de n-eslabones y con variables de articulación $q_1 \ldots, q_n$ tal que:

$$T_n^o(q) = \begin{bmatrix} R_n^o(q) & O_n^o(q) \\ O_n & 1 \end{bmatrix}$$

El objetivo de esta sección es relacionar la velocidad lineal y angular del efector-final con el vector de velocidades de articulación $\dot{q}(t)$. Se defina la velocidad ω_n^o del efector-final:

$$S(\omega_n^o) = \dot{R}_n^o(R_n^0)^T$$

y la velocidad lineal del efector-final como,

$$\upsilon_n^o = \dot{O}_n^o$$

Se desean expresiones de la forma:

$$\upsilon_n^o = J_\upsilon \dot{q}$$
$$\omega_n^o = J_\omega \dot{q}$$

donde J_υ y J_ω son matrices $3 \times n$. Agrupando se tendrá,

$$\epsilon = J\dot{q}$$

donde ϵ y J estan dados por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \upsilon_n^o \\ \omega_n^o \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} J_\upsilon \\ J_\omega \end{bmatrix}$$

ϵ es llamada velocidad del cuerpo y J Jacobiano. La matriz J es una matriz de $6 \times n$ donde n es el número de articulaciones.

6 Velocidad angular

Si la i-ésima articulación es revoluta, entonces la i-ésima variable de articulación q_i se iguala como θ_i y el eje de rotación es $\vec{z}_{i-1}$. Se propone a ω_i^{i-1} como la velocidad angular del eslabón i que se propaga por la rotación de la articulación i expresado relativo a la trama $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ (trama anterior).

La velocidad angular se expresa en la trama $i-1$ por,

$$\omega_i^{i-1} = \dot{q}_i \vec{z}_{i-1}^{i-1} = \dot{q}_i \vec{k}$$

donde $\vec{k}$ es el vector de coordenadas unitarias $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.
Si la i-ésima articulación es prismática, entonces $i-1$ es una transportación y,

$$\omega_i^{i-1} = O$$

En este caso $\dot{q}_i \neq d_i$. La velocidad angular total del efector-final esta dada por:

$$\omega_n^o = \rho_1 \dot{q}_1 \vec{k} + \rho_2 \dot{q}_2 R_1^o \vec{k} + \cdots + \rho_n \dot{q}_n R_{n-1}^o \vec{k} = \sum_{i-1}^{n} \rho_n \dot{q}_i z_{i-1}^o$$

en donde $\rho_1 = 1$ si la articulación i es revoluta y $\rho_1 = 0$ si es prismática. También $z_{i-1}^o = R_{i-1}^o \vec{k}$

$$z_o^o = \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Entonces J Jacobiano de velocidad angular esta dado por:

$$J_\omega = \begin{bmatrix} \rho_1 z_o \cdots \rho_n z_{n-1} \end{bmatrix}$$

Demostración

$$\omega_n^o = J_\omega \dot{q}$$

$$J_\omega = \frac{\omega_n^o}{\dot{q}}$$

$$J_\omega = \frac{\rho \dot{q} z}{\dot{q}}$$

7 Velocidad lineal

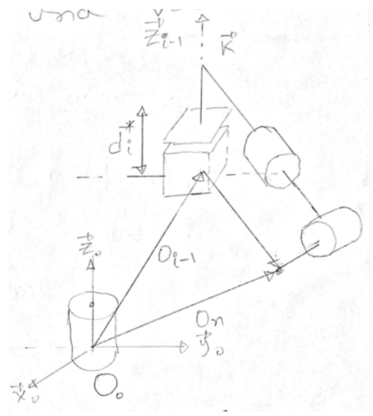
La velocidad lineal del efector-final es $\dot{O}_n^o$. Por la regla de la cadena de diferenciación

$$v_n^o = \dot{O}_n^o = \frac{\partial O_n^o}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial O_n^o}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial O_n^o}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial O_n^o}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Tal que la i-ésima columna de J_v, que se denota por J_{v_i} esta dada por

$$J_{v_i} = \frac{\partial O_n^o}{\partial q_1}$$

esta expresión es la velocidad lineal de efector-final que resultará si $\dot{q}_i = 1$ y las otras $\dot{q}_i = 0$. Esto es, la i-ésima columna del Jacobiano se puede generar manteniendo todas las articulaciones fijas pero la i-ésima en movimiento a una velocidad unitaria.



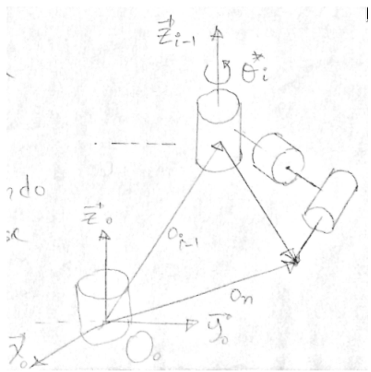
r

En el dibujo se muestra una articulación prismática que se mueve a lo largo del eje $\vec{z}_{i-1}$ con una velocidad $\frac{d}{dt}d_i$ cuando todas las demás articulaciones se mantienen fijas, resultando en:

$$\frac{d}{dt}O_n^o(t) = \frac{d}{dt}d_i(t)R_{i-1}^o\vec{k} = \frac{d}{dt}d_i(t)z_{i-1}^0 = J_{v_i}\dot{d}_i = v_n^0$$

por lo tanto

$$J_{v_i} = z_{i-1}^0$$



En este dibujo se muestra una articulación revolita i, que rota alrededor del eje z_{i-1} con una velocidad angular $\frac{d}{dt}\theta_i z_{i-1}$, cuando todas las demás articulaciones se mantienen fijas, resultando en:

$$\frac{d}{dt}O_n^0 = \omega \times r = \left[\dot{\theta} z_{i-1}\right] \times \left[O_n - O_{i-1}\right] = J_{v_i}\dot{\theta}_i$$

por lo tanto

$$J_{v_i} = z_{i-1}^0 \times \left[O_n - O_{i-1}\right]$$

De lo anterior se tiene que la mitad superior del Jacobiano J_v esta dada por

$$J_v = \left[J_{v_1} \cdots J_{v_n}\right]$$

donde la i-ésima columna J_v es

$$J_{v_i} = \begin{cases} z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) & \text{para la articulación revoluta } i \\ z_{i-1} & \text{para la articulación prismática } i \end{cases}$$

La mitad inferior del Jacobiano esta dada por

$$J_\omega = \begin{bmatrix} J_{\omega_1} \cdots J_{\omega_n} \end{bmatrix}$$

donde la i-ésima columna J_ω es

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1} & \text{para la articulación revolita } i \\ 0 & \text{para la articulación prismática } i \end{cases}$$

por lo tanto para un Jacobiano de n-eslabones se tendrá,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \cdots & J_n \end{bmatrix}$$