DERIVADA

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

DERIVADA

Interpretación geométrica

Sean $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in D_f$.

r': recta secante por P y Q.

r: recta tangente por P.

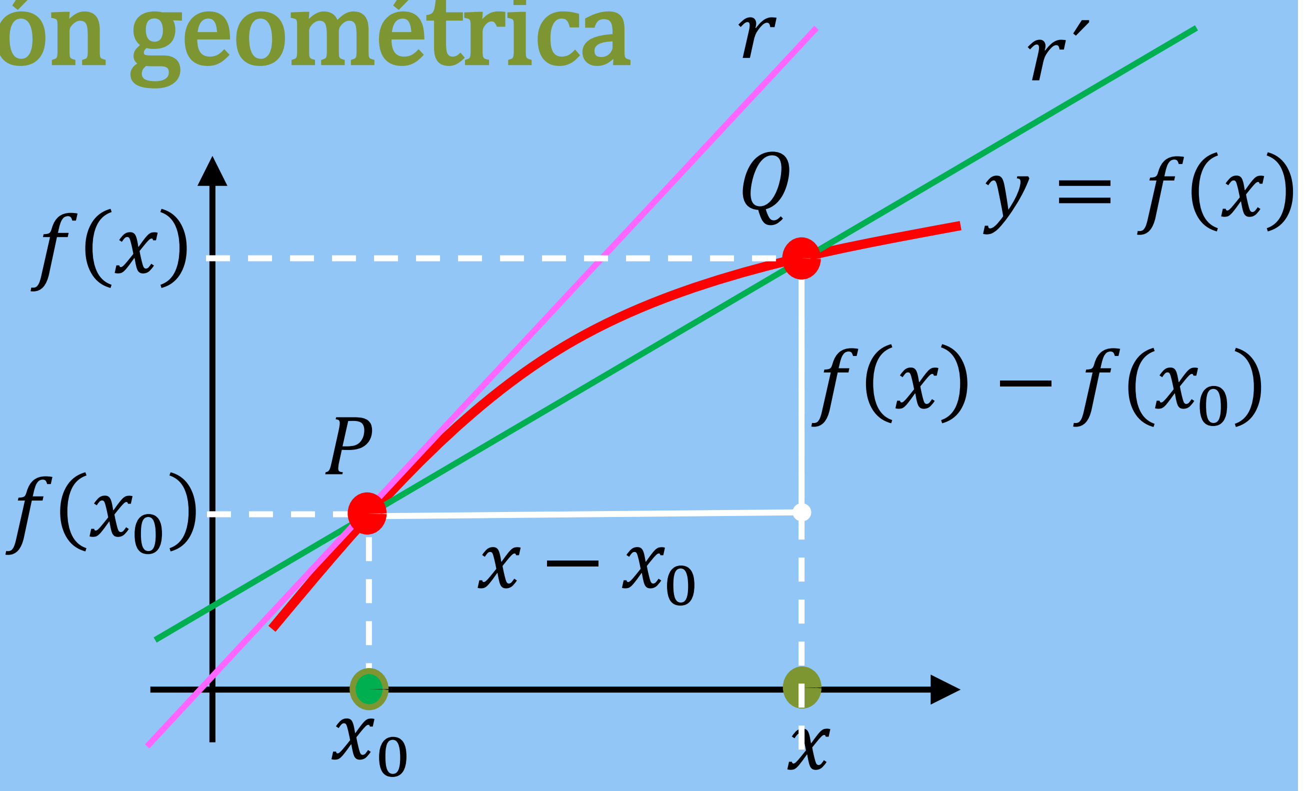
Si Q tiende a $P \Longrightarrow r'$ tiende a r

Pendiente de r':

$$m' = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pendiente de r:

$$m = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$$



$f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0. Es la pendiente de la recta tangente a la curva de f en x_0.

Derivada de una función en un punto

Definición

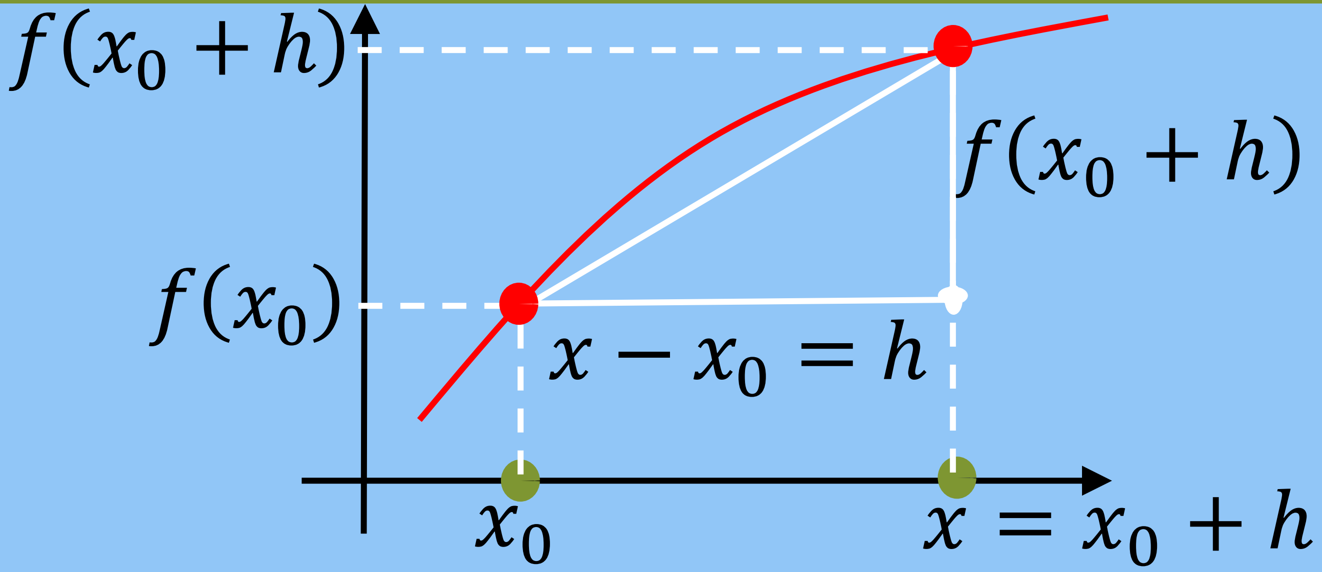
Sea f una función definida en un intervalo abierto J y $x_0 \in J$.

La derivada de f en x_0 es el número $\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$.

Si el límite existe se dice que f es derivable o diferenciable en x_0.

Observaciones

1. $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



2. Notación: Derivada de f en x_0: $$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} = Df(x_0) = y'_{x_0}$$

Función derivada de f: $$f'(x) = \frac{dy}{dx} = Df(x) = y'$$

3. Si existe $f'(x_0)$, entonces las derivadas izquierda y derecha en x_0 son iguales: $\underbrace{\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'_-(x_0)} = \underbrace{\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'_+(x_0)}$

$$\boxed{f'_-(x_0) = f'_+(x_0)}$$

4. Si $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty}$, la función no es diferenciable en x_0, pero se dice que la derivada de f en x_0 es ∞. En ese caso la tangente a la curva de f es paralela al eje y.

5. Si $\exists\ f'\ \forall x \epsilon (a,b)$, se dice que $\boxed{f \text{ es derivable sobre } (a,b).}$

Si además $\exists f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, $\boxed{f \text{ es derivable sobre } [a,b].}$

Ejemplo

1. Sea $f(x) = k$. Aplicando la definición deduzca $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0} \frac{k-k}{h} = 0$$

La derivada de una constante es 0: $y = k \qquad \Longrightarrow \qquad y' = 0.$

2. Sea $f(x) = x^2$. Aplicando la definición deduzca $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{0} 2x + h = 2x$$

De igual modo se demuestra que si $y = x^m \quad \Longrightarrow \quad y' = mx^{m-1}$

Ejemplo 3. Sea $f(x) = sen\ x$. A partir de la definición deduzca $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0} \frac{sen\ (x+h) - sen\ x}{h} =$$

$$= \lim_{0} \frac{2sen\ \left(\frac{x+h-x}{2}\right) cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{0} \frac{sen\ \left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

Entonces, si $y = sen\ x$, $y' = \cos x$.

Teorema que relaciona derivabilidad con continuidad

Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Demostración:

Sea f derivable en x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

En consecuencia, f es continua en x_0.

Continuidad no implica derivabilidad

Lo demostraremos con un ejemplo: Sea $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Las derivadas laterales en $x_0 = 0$ son

$$f'_{-}(0) = \lim_{0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Como las derivadas laterales son distintas, f no es derivable en 0.

Continúa

Ahora veremos si f es continua en 0:

$$f(0) = |0| = 0$$

$$\lim_{0^-} |x| = \lim_{0^-} -x = 0$$

$$\lim_{0^+} |x| = \lim_{0^+} x = 0$$

Como los límites laterales son iguales a 0, resulta

$$\lim_{0} |x| = 0$$

Y como $f(0) = \lim_{0} |x| = 0$ concluimos que f es continua en 0.

En definitiva, siendo f continua, no es derivable.

Ejemplo 4. Sea $f(x) = \log_b x$. A partir de la definición deduzca $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0} \frac{\log_b(x+h) - \log_b(x)}{h} =$$

$$= \lim_{0} \frac{1}{h} \log_b\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{0} \frac{1}{h} \log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{0} \frac{x}{h} \log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{0} \log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_b \lim_{0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_b e$$

Entonces, si $y = \log_b x$; resulta $y' = \frac{1}{x} \log_b e$.

Si $b = e$: $y = \ln x$ entonces $y' = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$.

Álgebra de derivadas

Teorema: álgebra de derivadas

Sean f, g derivables en un intervalo abierto J. $k \in \mathbb{R}$.

Entonces $f+g$ es derivable en J y $[f+g]' = f' + g'$

kf es derivable en J y $[kf]' = kf'$

fg es derivable en J y $[fg]' = f'g + fg'$

$\frac{1}{g}$ es derivable en J y $\left[\frac{1}{g}\right]' = -\frac{g'}{g^2}$ si $g(x) \neq 0 \ \forall x \epsilon J$

$\frac{f}{g}$ es derivable en J y $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ si $g(x) \neq 0 \ \forall x \epsilon J$

Demostración de la derivada del producto: Sean f, g derivables $\forall x \in J$.

$$[fg]'(x) = \lim_{0} \frac{[fg](x+h) - [fg](x)}{h} = \lim_{0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$=$$

$$= \lim_{0} \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{0} g(x+h) \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{0} f(x) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{0} g(x+h) f'(x) + \lim_{0} f(x) g'(x) =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ejemplo Derive las siguientes funciones:

a) $y = sen\ (x)\ \ln(x)$

$$y' = \cos(x)\ \ln(x) + sen\ (x)\frac{1}{x}$$

b) $y = \frac{x^2}{\ln(x)}$

$$y' = \frac{2x\ \ln(x) - x^2\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{2x\ \ln(x) - x}{(\ln(x))^2}$$

c) $y = 4(sen\ (x) + \sqrt{x})$

$$y' = 4\left(\cos(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Ejemplo 5. Sea $y = \tan x$, aplicando el álgebra de derivadas deduzca y'.

$$y = \tan x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cos x - sen\ x\ (-sen\ x)}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Entonces si $y = \tan x$; resulta $y' = \frac{1}{cos^2 x}$.

Teorema: Derivada de la función compuesta

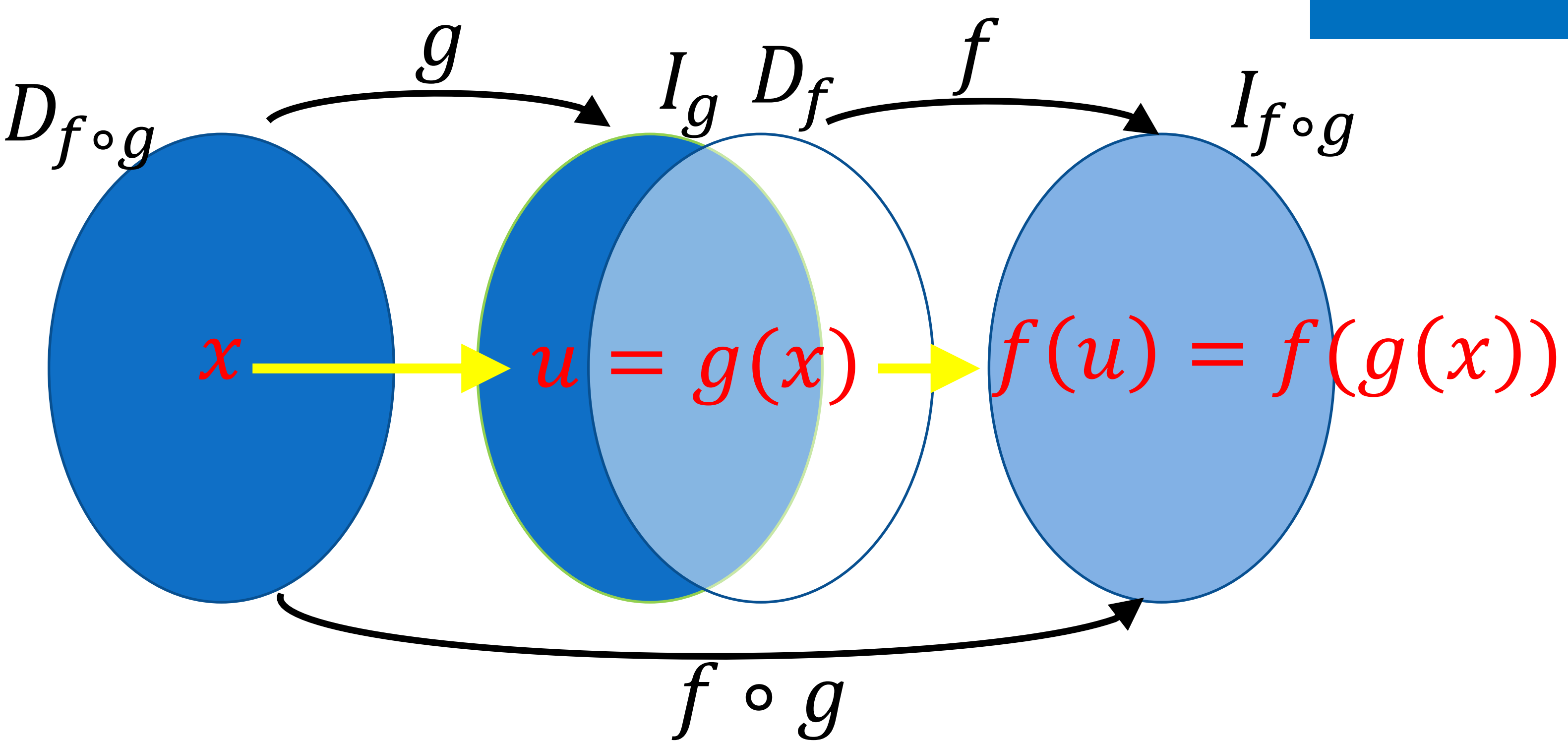
Sean g derivable en x y f derivable en $g(x)$.

Entonces $f \circ g$ es derivable en x

y $[f \circ g]'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Nota: Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$; entonces

$$y' = f'(u)u'$$



Ejemplo

Sea $y = \ln(x^2 + 3x)$

$$u = x^2 + 3x \quad ; \quad u' = 2x + 3$$

Entonces $y = f(u) = \ln u$

$$y' = f'(u)\,u' = \frac{1}{u}u'$$

$$y' = \frac{2x+3}{x^2+3x}$$

Ejemplo

6. Sea $f(x) = \cos x$. Con el teorema anterior deduzca $f'(x)$.

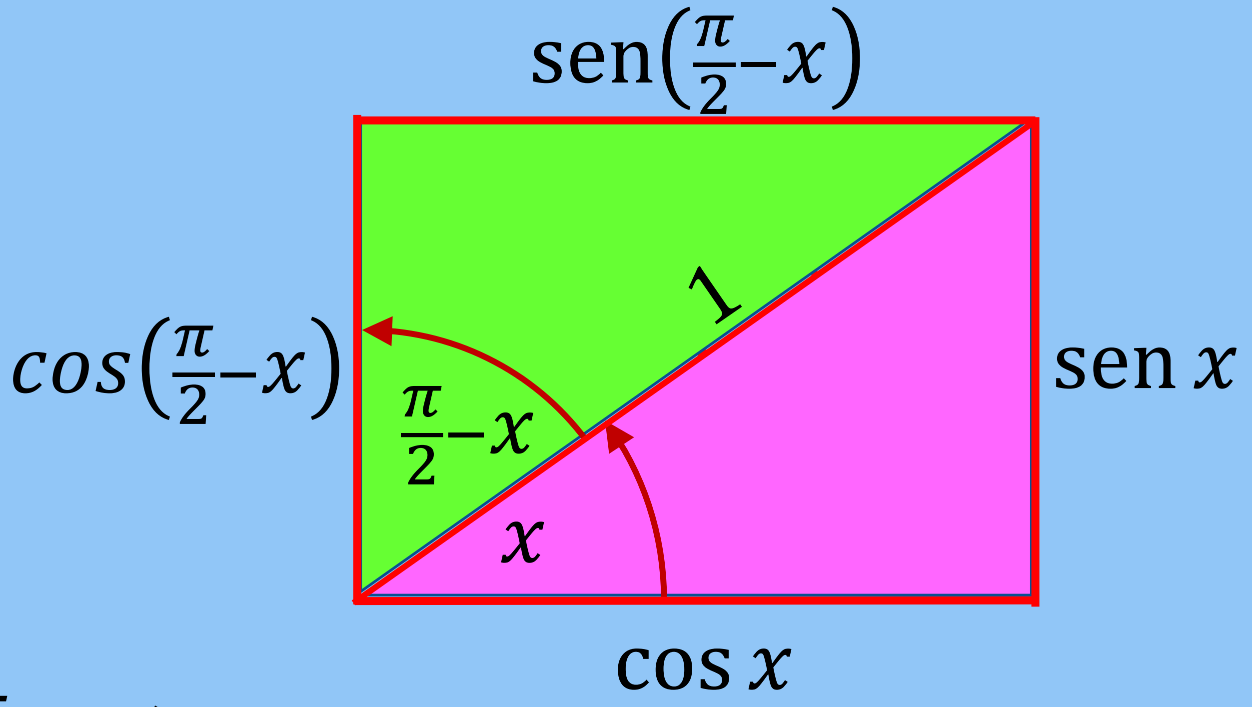
$$y = \cos x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$u = \frac{\pi}{2} - x; \quad u' = -1$$

$$y' = \cos u \quad u'$$

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$y' = -sen\,x$$



En definitiva: si $y = \cos x$; entonces $y' = -sen\,x$

Método logarítmico de derivación

Sea $y = f^{g}$ función expopotencial

$$\ln y = \ln f^{g} = g \ln f$$

$$\frac{y'}{y} = g' \ln f + g \frac{f'}{f}$$

$$y' = y\left(g' \ln f + g \frac{f'}{f}\right)$$

$$\boldsymbol{y' = f^{g}\left(g' \ln f + g \frac{f'}{f}\right)}$$

Ejemplo 7. Sea $f(x) = e^x$. Aplicando el método logarítmico deduzca $f'(x)$.

$$y = e^x$$

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$\frac{y'}{y} = 1$$

$$y' = y$$

$$y' = e^x$$

Derivadas sucesivas

- Si f es una función derivable en un intervalo abierto J, entonces $f' = [f]'$ es la derivada primera de f en J.
- Si f' es derivable en un intervalo abierto J, entonces $f'' = [f']'$ es la derivada segunda de f en J.
- Si f'' es derivable en un intervalo abierto J, entonces $f''' = [f'']'$ es la derivada tercera de f en J.

$$\vdots$$

- Si $f^{(n-1)}$ es derivable en un intervalo abierto J, entonces $f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]'$ es la derivada enésima de f en J.

Teorema: Derivada de la función inversa

Sea f una función biyectiva en un intervalo abierto J

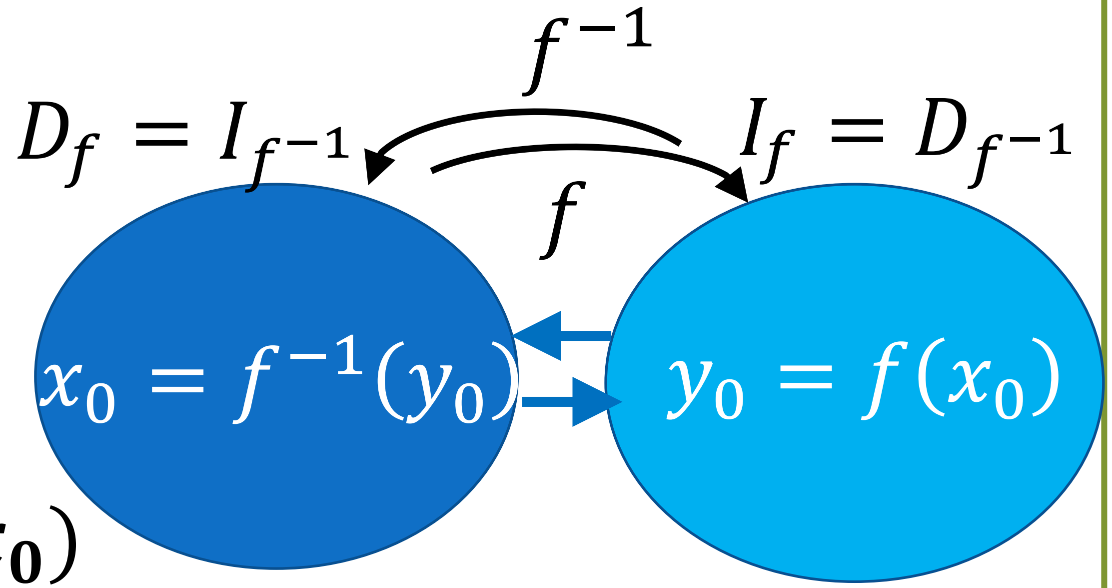
y f^{-1} su función inversa.

Si f es derivable en $x_0 \in J$

y $f'(x_0) \neq 0$,

entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$

y se cumple $\left[f^{-1}\right]'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.



Ejemplo 8. Deduzca la derivada de la función $arc\ sen\ x$.

Sea $y = f(x) = sen\ x$ definida en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

f es biyectiva en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $\quad f^{-1}(x) = arc\ sen\ x$.

Por el teorema anterior:

$$[arc\ sen\ ]'(y_0) = [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - {y_0}^2}}$$

Cambiando y_0 por x_0 y si $y = arc\ sen\ x$, se tiene $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tabla de derivadas

1. $y = k \qquad y' = 0$	6. $y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x}$
2. $y = x^m \qquad y' = mx^{m-1}$	7. $y = sen\, x \qquad y' = cos\, x$
	8. $y = cos\, x \qquad y' = -sen\, x$
3. $y = e^x \qquad y' = e^x$	9. $y = tan\, x \qquad y' = \frac{1}{cos^2 x}$
4. $y = a^x \qquad y' = a^x \ln a$	10. $y = arc\ sen\, x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $y = \log_b x \qquad y' = \frac{1}{x} \log_b e$	11. $y = arc\ tan\, x \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

Tabla de derivadas

1. $y = k$	$y' = 0$
2. $y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$
3. $y = e^u$	$y' = e^u u'$
4. $y = a^u$	$y' = a^u \ln a\, u'$
5. $y = \log_b u$	$y' = \frac{1}{u} \log_b e\, u'$
6. $y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} u'$
7. $y = sen\, u$	$y' = cos\, u\, u'$
8. $y = cos\, u$	$y' = -sen\, u\, u'$
9. $y = tan\, u$	$y' = \frac{u'}{cos^2 u}$
10. $y = arc\ sen\, u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $y = arc\ tan\, u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$