Decisión bayesiana y función de probabilidad

María Inés Stimolo y Pablo Ortiz

Revisando conceptos de teoría de probabilidad

En una ciudad se conoce que el 75% de la población económicamente activa (PEA) está ocupada.

Está ocupada?	Porcentaje
Si (O) No (NO)	75% 25%

Si se **seleccionada al azar** una persona que pertenece a la PEA ¿cual es la probabilidad de que la persona este ocupada?

Al seleccionar una personal al azar podemos tener dos resultados {ocupada, no ocupada} estamos ante un experimento aleatorio, ya que no conocemos con certeza el resultado.

La probabilidad es una función que le asigna a cada uno de los posibles resultados del experimento un valor entre cero y uno.

Con la información disponible, podemos asignar la proporción de ocupados como una medida de probabilidad la probabilidad de que una persona esté ocupada P(O)= 0,75. Por lo que la probabilidad de que no esté ocupada (evento complemento) es P(NO) = 0,25.

Revisando conceptos de teoría de probabilidad

Para las personas ocupadas tenemos información sobre el nivel educativo alcanzado.

Nivel de educación	Porcentaje dado que está ocupado
Primario (P)	15%
Secundario (S)	60%
Universitario o Postgrado (U)	25%

Probabilidad de que la persona seleccionada al azar tienen nivel de educación primaria dado que está ocupada

P (P/ O)= 0,15

La probabilidad condicionada entre A y B, $P(^{A}/_{B})$ es la posibilidad de que ocurra un evento A dado que ocurrió otro evento B. Y se calcula como el cociente entre la probabilidad de que ocurran los dos eventos A y B , probabilidad conjunta $P(A \cap B)$, dividido la probabilidad de la condición P(B)

$$P(^{A}/_{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

¿Cual es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar cumpla con las dos condiciones esté ocupada y tenga nivel primario?

La pregunta refiere a la probabilidad conjunta $P(O \cap P)$, se puede deducir de la probabilidad condicional

$$P(^{P}/_{O}) = \frac{P(O \cap P)}{P(O)}$$

La información disponible es $P(^{P}/_{O})$= 0,15 y $P(O)$=0,75

$P(^{P}/_{O}).P(O) = P(T \cap O)$ $\rightarrow$ $0{,}15 \times 0{,}75 = 0{,}1125$

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes permite encontrar una probabilidad condicionada (denominada a posteriori) a partir de probabilidades condicionadas del mismo espacio probabilístico (denominadas a priori).
Es la base de los algoritmos de clasificación Bayesiana. En clasificación Bayesiana el interés radica en encontrar la probabilidad de una **etiqueta (label)** dada **características (features)** observadas.

$$P\left({}^{Label}/_{features}\right) = \frac{\cancel{P(label, features)}}{P(features)} = \frac{P\left({}^{features}/_{label}\right) . P(label)}{P(features)}$$

Información conocida	Probabilidad a calcular
Probabilidad condicionada a priori $P\left({}^{features}/_{label}\right)$	Probabilidad condicionada a posteriori $P\left({}^{Label}/_{features}\right)$
Probabilidad de cada etiqueta $P(label)$	Probabilidad de la característica (probabilidad total) $P(features)$

Teorema de Bayes. Ejemplo

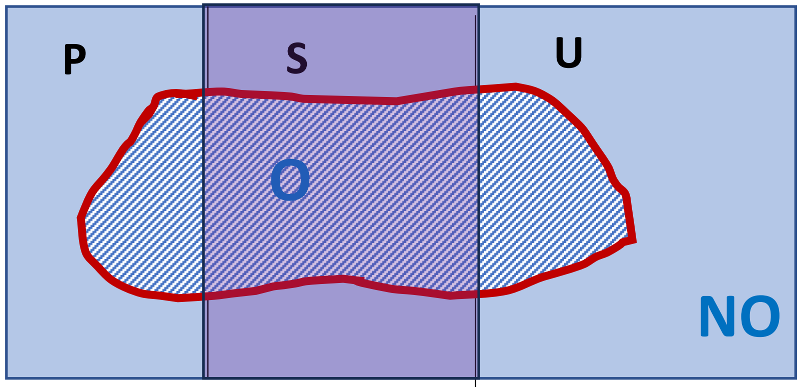
En una ciudad se conoce que el 75% de la población económicamente activa (PEA) está ocupada y que dentro de este grupo el nivel de educación es

Nivel de educación	Porcentaje dado que está ocupada	Porcentaje dado que no está ocupada
Primario	15%	70%
Secundario	60%	27%
Universitario o Postgrado	25%	3%

Si se selecciona una persona al azar y se observa su nivel de educación (característica) se quiere conocer la probabilidad de que esté ocupada (etiqueta).
Por ejemplo ¿cuál es la probabilidad de que teniendo nivel secundario esté ocupada?

$$P\left({}^{O}/_{S}\right) = \frac{P(O \cap S)}{P(S)}$$

Teorema de Bayes. Ejemplo



$$P(S) = P(O \cap S) + P(NO \cap S)$$

$$P(S) = P(\ O)P(^{S}/_{O}) + P(NO\ )P(^{S}/_{NO})$$

$P(S)$ se puede calcular a partir de las probabilidades a priori

Entonces la probabilidad condicionada a calcular que se denomina **probabilidad a posteriori** estará en función de las condicionadas dadas como información.

$$P(^{O}/_{S}) = \frac{P(\ O)P(^{S}/_{O})}{P(\ O)P(^{S}/_{o}) + P(O)P(^{S}/_{O})}$$

$$P(^{O}/_{S}) = \frac{0{,}75\ \times 0{,}6}{0{,}75\ \times 0{,}6 + 0{,}25 \times 0{,}27}$$

$$P(^{O}/_{S}) = \frac{0{,}75\ \times 0{,}6}{0{,}75\ \times 0{,}6 + 0{,}25 \times 0{,}27} = 0{,}8696$$

Variable aleatoria y función de probabilidad

Una **variable aleatoria X** es una función real definida sobre el espacio muestral Ω (conjunto de resultados de un experimento)

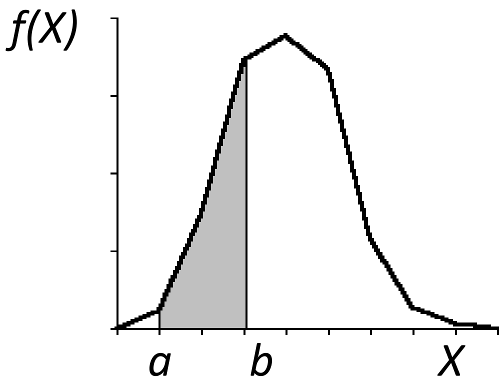
$$X: \Omega \rightarrow R$$

Tal que $[X \leq x]$ es un evento aleatorio para todo x que pertenece a los reales.

***X* es una variable aleatoria continua** si existe una función, f(x) llamada función de densidad que satisface las siguientes condiciones:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad -\infty < x < \infty$

los límites de integración denotan el recorrido de la variable



La probabilidad de que la variable *X* sea mayor que *a* y menor que *b es*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Alguna bibliografía y videos

Curso elemental de probabilidad y estadística de Luis Rincón

https://www.cimat.mx/~pabreu/LuisRinconI.pdf

Conceptos básicos de probabilidad

https://youtu.be/fNeDDPk-_x0

Conceptos de variable aleatoria y función de probabilidad

https://youtu.be/grsor9qC8d0