PRODUCTO PUNTO
PRODUCTO VECTORIAL

Producto punto

Definición

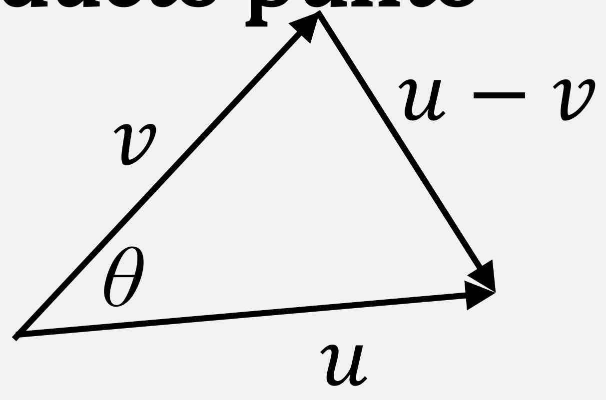
Sean u y v vectores.

El producto punto de u y v es el escalar:

$$u.v = \begin{cases} \|u\|\|v\| \cos\theta & \text{si } u \neq 0 \; y \; v \neq 0; \qquad \theta = ang(u, v) \\ 0 & \text{si } u = 0 \; o \; v = 0 \end{cases}$$

Deducción de la fórmula de cálculo del producto punto

Sean u y v vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$.



Aplicamos el teorema del coseno:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\theta$$

Reemplazamos los módulos y la expresión del producto punto:

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 - 2u.v$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado:

$${u_1}^2 - 2u_1v_1 + {v_1}^2 + {u_2}^2 - 2u_2v_2 + {v_2}^2 =$$

$$= {u_1}^2 + {u_2}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 - 2u.v$$

Despejamos $u.v$ y cancelamos los términos opuestos:

$$\boxed{u.v = u_1v_1 + u_2.v_2}$$

En $\mathbb{R}^3$: $\boxed{u.v = u_1v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}$

Ejemplo

1. Sean $u = (-2,3)$; $v = (1, 4)$. Calcule $u.v$.

$$u.v = (-2)1 + 3.4 = 10$$

2. Sean los puntos $P = (2, -1,0)$; $Q = (3,4, -1)$ y $R = (2,3, -1)$.

   Calcule $(Q - P).(R - P)$.

$$u = Q - P = (1,5, -1)$$

$$v = R - P = (0,4, -1)$$

$$u.v = 1.0 + 5.4 + (-1)(-1) = 21$$

Propiedades Sean u, v, w vectores de $\mathbb{R}^n$. $k\in\mathbb{R}$.

1. $u.v = v.u$ Simetría
2. $u.(v + w) = u.v + u.w$ Distributividad
3. $k(u.v) = (ku).v = u.(kv)$ Homogeneidad
4. $u.u \geq 0$ y $u.u = 0 \Leftrightarrow u = 0$ Positividad

Ejemplo

Aplique la propiedad de homogeneidad a $u = (-2,1)$, $v = (3,1)$ y $k = -2$.

$$k(u.v) = -2\big((-2)3 + 1.1\big) = 10$$

$$(ku).v = \big(-2(-2,1)\big).(3,1) = 10$$

$$u.(kv) = (-2,1).(-2(3,1)) = 10$$

Aplicaciones

1. **Módulo de un vector**

$$\|u\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = \sqrt{u.u}$$

2. **Distancia entre dos puntos**

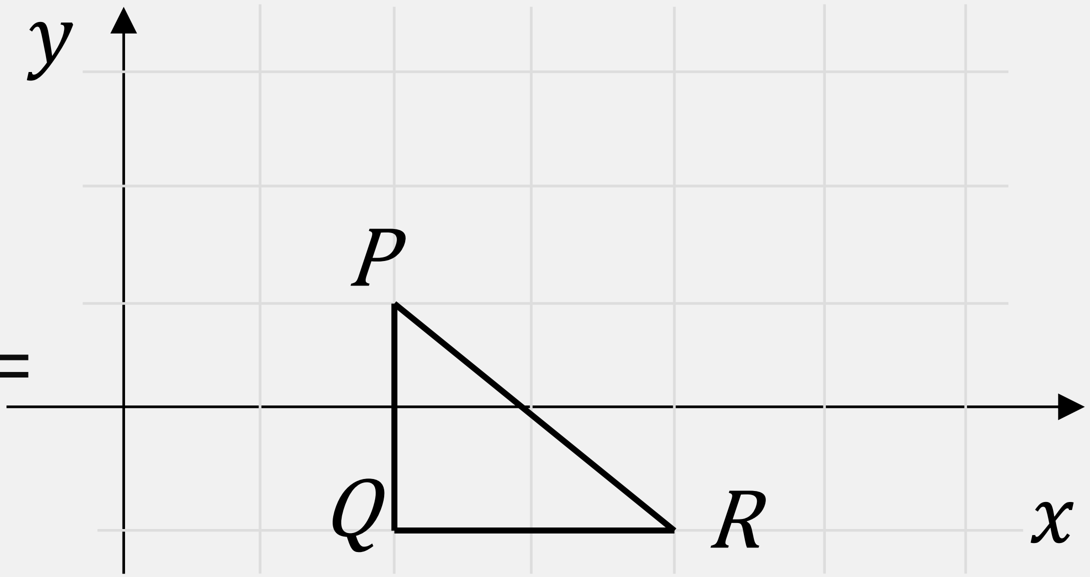
$$d(P,Q) = \|Q - P\| = \sqrt{(Q-P).(Q-P)}$$

3. **Ángulo entre vectores**

Sean u, v vectores no nulos.

$$\theta = arc\cos\frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$

Ejemplo Sea el triángulo definido por los puntos $P = (2,1)$; $Q = (2,-1)$ y $R = (4,-1)$. Calcule la longitud del lado $\overline{PR}$; la distancia entre los puntos P y Q y el ángulo interior en el vértice R.



1. Longitud de $\overline{PR}$:

   $\|R - P\| = \|(2,-2)\| =$

   $= \sqrt{(2,-2).(2,-2)} = 2\sqrt{2}$

2. $d(P,Q) = \|Q - P\| = \|(0,-2)\| =$

   $= \sqrt{(0,-2).(0,-2)} = 2$

3. Ángulo en vértice R.

   Es el ángulo entre los vectores $u = Q - R$ y $v = P - R$.

   $$\theta = arc\ cos \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} = arc\ cos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Aplicaciones

4. **Vectores unitarios**

Si $\|u\| = 1$, se dice que u es un vector unitario.

Sea $v \neq 0$.

u es un **vector unitario de $\boldsymbol{v}$** si u es un vector unitario y tiene la misma dirección que v.

$$\boxed{\boldsymbol{u} = \pm \frac{\mathbf{1}}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}}$$

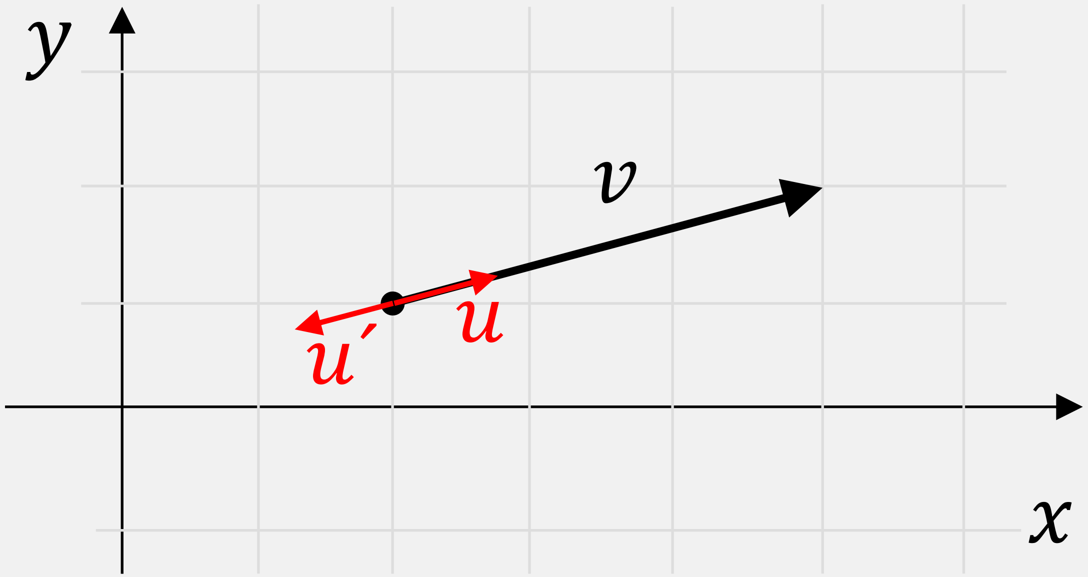
Deducción de la expresión del vector unitario de un vector v

Sean $v \neq 0$. u: vector unitario de v.

$u = kv$ pues u y v son colineales.

$\|u\| = |k|\|v\| = 1$

por ser u vector unitario.



Despejamos k: $k = \pm \frac{1}{\|v\|}$

Reemplazamos k en la expresión de u: $u = \pm \frac{1}{\|v\|} v$.

$\boxed{u = \frac{1}{\|v\|} v}$; $\boxed{u´ = -\frac{1}{\|v\|} v}$. u y $u´$ son vectores unitarios de v.

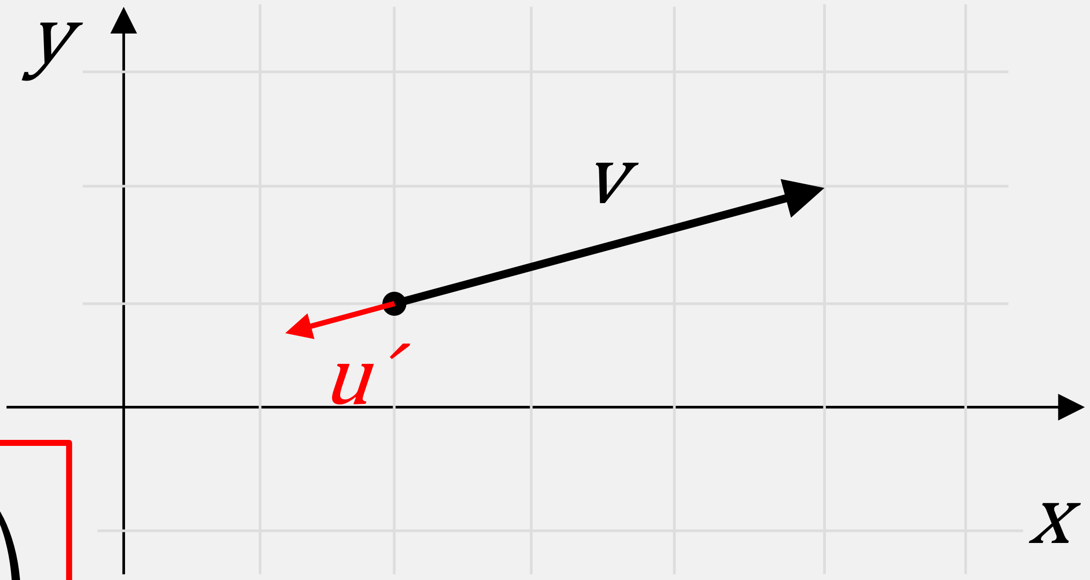
Ejemplo

Sea $v = (3,1)$. Halle el vector unitario de v de sentido contrario a v.

$$u' = -\frac{1}{\|v\|}v$$

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$u' = -\frac{\sqrt{10}}{10}(3,1) = \boxed{\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)}$$



Aplicaciones

5. Ortogonalidad

Sean u, v vectores no nulos. θ, el ángulo entre ambos.

$$u \perp v \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow cos\,\theta = 0 \Leftrightarrow u.v = 0$$

Dado que $u.0 = 0$, para todo vector u, se dice que el vector nulo es perpendicular a todo otro vector.

$$\boldsymbol{u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0}$$

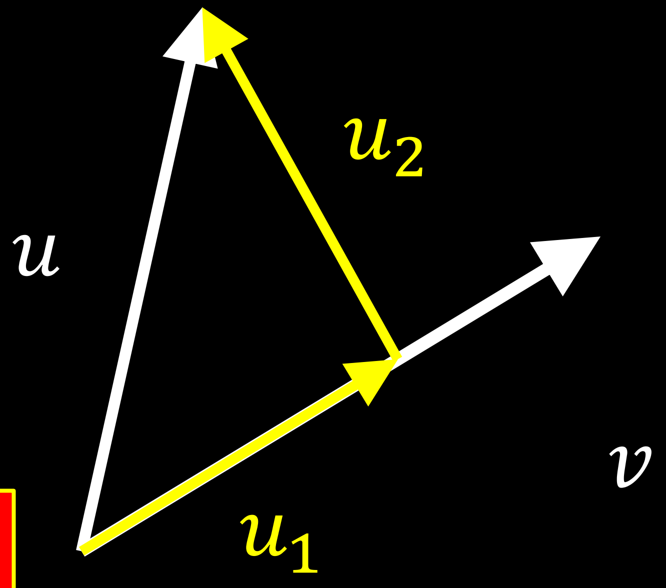
Aplicaciones

6. Descomposición de un vector en dos direcciones perpendiculares

Sean u y v, vectores no nulos.

u_1 y u_2 son vectores tales que

$u_1 + u_2 = u$



$u_1 \parallel v$ $\qquad$ $u_2 \perp v$

$$\boxed{u_1 = proy_v u = \frac{u.v}{v.v} v}$$

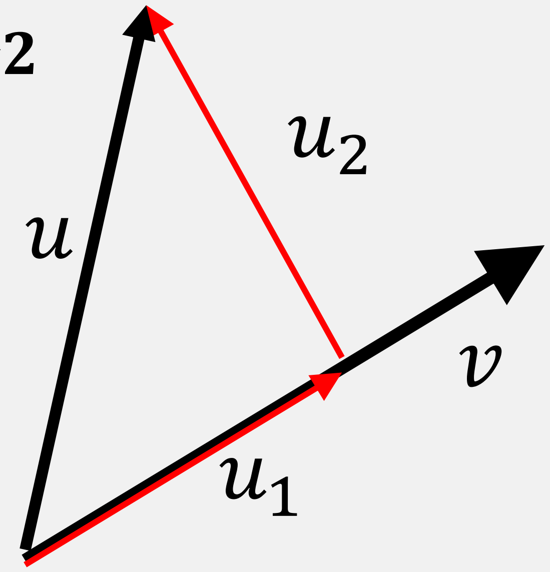
$$\boxed{u_2 = u - u_1}$$

$proy_v u$: proyección ortogonal de u sobre v.

u_2 : proyección de u ortogonal a v.

Deducción de las expresiones de los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$

Sean $u,\ v$ vectores no nulos.



$$u_1 + u_2 = u \qquad (1)$$

$$u_1 \parallel v \Leftrightarrow u_1 = kv \qquad (2)$$

$$u_2 \perp v \Leftrightarrow u_2 . v = 0$$

Hacemos el producto punto de ambos miembros de (1) por el vector v:

$$u_1 . v + \underbrace{u_2 . v}_{0} = u . v \qquad (3)$$

En (3) reemplazamos u_1 por kv y cancelamos $u_2 . v$:

$$k(v . v) = u . v \qquad (4)$$

Continúa

Continuación

De (4) despejamos k:

$$k = \frac{u.v}{v.v}$$

y reemplazamos k en (2):

$$\boxed{u_1 = \frac{u.v}{v.v} v = proy_v u}$$ Proyección ortogonal de u sobre v

Despejamos u_2 de (1):

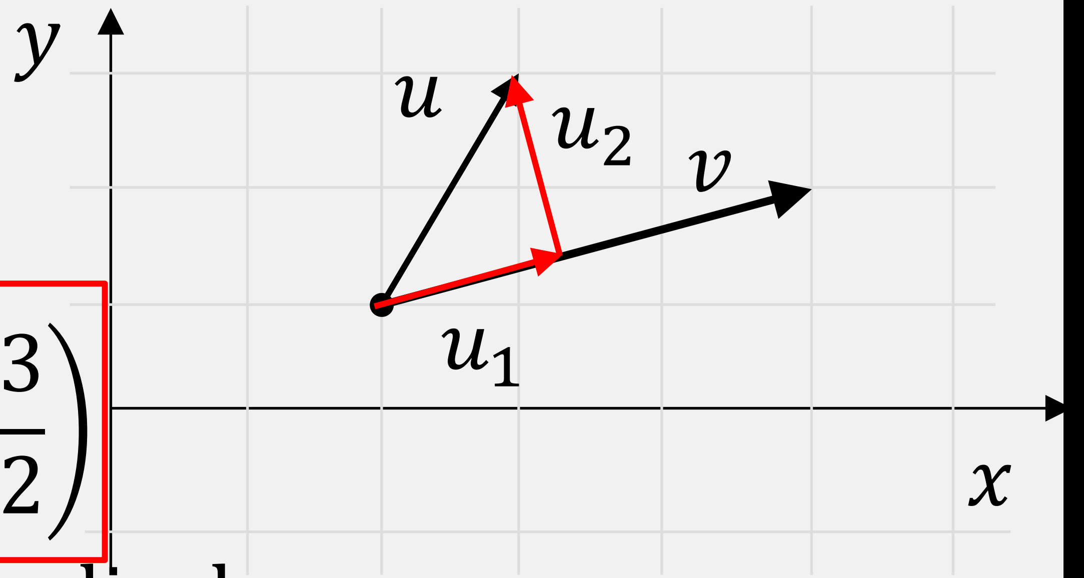
$$\boxed{u_2 = u - u_1}$$ Proyección de u ortogonal a v

Ejemplo

Sean $u = (1,2)$; $v = (3,1)$. Descomponga el vector u en una dirección paralela a v y otra perpendicular a v. Luego compruebe que el vector perpendicular a v, lo es.

$$u_1 = \frac{u.v}{v.v}v = \frac{5}{10}(3,1) = \boxed{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

$$u_2 = u - u_1 = (1,2) - \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$$



Comprobación de que u_2 y v son perpendiculares:

$u_2 \perp v \Leftrightarrow u_2.v = 0$; $u_2.v = \left(-\frac{1}{2}\right).3 + \frac{3}{2}.1 = 0$, por tanto, son perpendiculares.

Determinantes

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matriz cuadrada.

El determinante de A es una función

$$det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R};\, A \longmapsto \det A$$

que asigna a cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ un número denotado $\det A$, o $|A|$, o $D(A)$; que se verá a continuación.

- Si $n = 1$: $\quad A = [a]$;

entonces $\quad \det A = a.$

- Si $n = 2$: $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$;

entonces

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ejemplo

1. Sea $A = [3]$;

$$\det A = 3$$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$;

$$\det A = 2(-2) - (-1)3 = -1$$

- Si $n > 2$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$; entonces

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}C_{ir} \qquad (1)$$

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{r=1}^{n} a_{rj}C_{rj} \qquad (2)$$

El determinante de la matriz A es la sumatoria de los elementos de una fila cualquiera (1), o columna cualquiera (2), cada uno multiplicado por el cofactor correspondiente.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Desarrollaremos el determinante de A por la fila 3:

$$\det A = -C_{31} + 2C_{32}$$

El mismo resultado se obtiene desarrollando el determinante por otra fila o por una columna, por ejemplo, por la columna 1:

$$\det A = C_{11} - C_{31}$$

Cofactor de orden ij:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

A_{ij}: submatriz que se obtiene suprimiendo en la matriz A la fila i y la columna j.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \det A_{22} =$$

$$= (-1)^4 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1[1.0 - (-2)(-1)] = -2$$

Ejemplo

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollaremos el determinante de A por la fila 3:

$$\det A = -C_{31} + 2C_{32}$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det A_{31} = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3.1 - (-2)2 = 7$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = (-1)\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-2)0 - 1.1 = -1$$

$$\det A = -C_{31} + 2C_{32} = -7 + 2(-1) = \boxed{-9}$$

Producto vectorial

Definición

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$,

$$v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3.$$

El producto vectorial de u y v es el vector:

$$u \times v =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Ejemplo

Sean $u = (1,3,-2)$

$$v = (0,2,1)$$

Calcule $u \times v$.

$$u \times v =$$

$$= (3 + 4, 0 - 1, 2 - 0) =$$

$$= \boxed{(7,-1,2)}$$

Cálculo del Producto vectorial por determinantes

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$,

$$v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$u \times v = (C_{31}, C_{32}, C_{33})$$

Ejemplo

Sean $u = (1,3,-2)$

$$v = (0,2,1)$$

Calcule el producto $u \times v$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$u \times v = (C_{31}, C_{32}, C_{33}) = \boxed{(7,-1,2)}$$

Propiedades

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}^3$.

1. $u \times v = -v \times u$
2. $u \times v = 0 \Leftrightarrow u \parallel v$
3. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$

   $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
4. $u \times v \perp u$ y $u \times v \perp v$
5. $\|u \times v\|^2 + (u.v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$
6. $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| sen\theta; \quad \theta = ang(u, v);$ u y v no son nulos

Demostración de la propiedad 1

$u \times v = -v \times u$. Haremos la operación indicada en cada miembro y comprobaremos la validez de la igualdad .

$u \times v = (C_{31}, C_{32}, C_{33})$ $\qquad$ $v \times u = (C'_{31}, C'_{32}, C'_{33})$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ . & . & . \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

$$C_{31} = u_2 v_3 - u_3 v_2 \quad ; \quad C'_{31} = v_2 u_3 - v_3 u_2 \implies C_{31} = -C'_{31}$$

$$C_{32} = u_3 v_1 - u_1 v_3 \quad ; \quad C'_{32} = v_3 u_1 - v_1 u_3 \implies C_{32} = -C'_{32}$$

$$C_{33} = u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad ; \quad C'_{33} = v_1 u_2 - v_2 u_1 \implies C_{33} = -C'_{33}$$

Por consiguiente $u \times v = -v \times u$

Demostración de la propiedad 3

$u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$.

Haremos las operaciones indicadas en cada miembro y comprobaremos la validez de la igualdad.

La primera componente de $u \times (v + w)$ es

$u_2(v_3+w_3) - u_3(v_2+w_2)$

Aplicamos la propiedad distributiva y ordenamos los términos

$(u_2 v_3 - u_3 v_2) + (u_2 w_3 - u_3 w_2)$

Esta expresión es la primera componente de $(u \times v) + (u \times w)$.

Repitiendo el procedimiento para la 2° y la 3° componentes se prueba que $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$.

Demostración de la propiedad 4

Demostraremos que $u \times v \quad \perp \quad u$:

Haremos el producto punto $(u \times v).u$ y comprobaremos que el resultado es 0, por tanto, ambos vectores son perpendiculares.

Aplicamos la fórmula de cálculo del producto punto:

$$(u \times v).u = (u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3$$

Aplicamos la propiedad distributiva y cancelamos los términos opuestos:

$$u_2v_3u_1 - u_3v_2u_1 + u_3v_1u_2 - u_1v_3u_2 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 = 0$$

Por lo que $u \times v \quad \perp \quad u$. La demostración de $u \times v \ \perp v$ es similar.

Demostración de la propiedad 6

$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen\theta$; $\theta = ang(u, v)$; u y v no son nulos

Suponemos demostrada la propiedad 5:

$$\|u \times v\|^2 + (u.v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$$

Reemplazamos $(u.v)$ por la definición de producto punto:

$$\|u \times v\|^2 + \|u\|^2\|v\|^2 cos^2\theta = \|u\|^2\|v\|^2$$

Reemplazamos $cos^2\theta$ por $1 - sen^2\theta$:

$$\|u \times v\|^2 + \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 sen^2\theta = \|u\|^2\|v\|^2$$

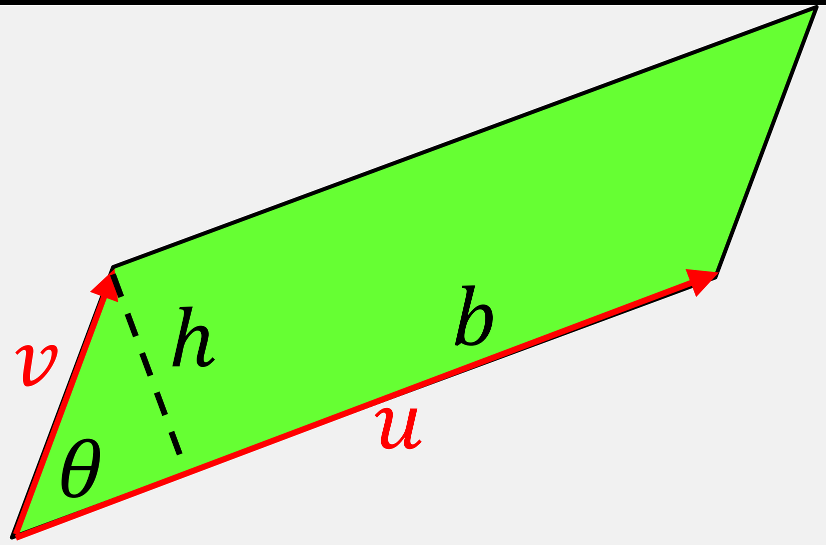
Cancelamos $\|u\|^2\|v\|^2$ y pasamos $-\|u\|^2\|v\|^2 sen^2\theta$ al 2° miembro:

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 sen^2\theta$$

Aplicamos la raíz cuadrada: $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen\theta$

Aplicación de la propiedad 6

Sean los vectores no nulos u y v.



Dos vectores definen un paralelogramo.

El área del paralelogramo es

$A = b.h \quad (1)$, donde b es la base del paralelogramo y h es la altura.

$b = \|u\| \qquad$ y $\qquad h = \|v\| sen\,\theta$

Reemplazamos b y h en (1):

$A = \|u\|\|v\| sen\theta$

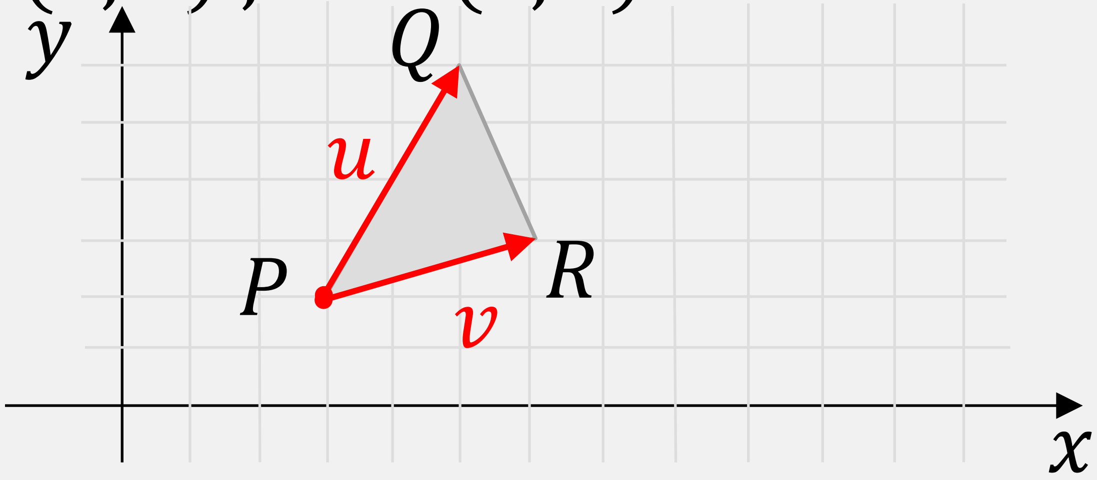
Y por la propiedad 6 del producto vectorial:

$$\boxed{A = \|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen\theta}$$

Ejemplo

Sean $P = (3,2)$; $Q = (5,6)$; $R = (6,3)$

Calcule el área del triángulo de vértices P, Q y R.



$u = Q - P$ y $v = R - P$.

Los vectores pueden considerarse de $\mathbb{R}^3$ con la tercera componente nula. $u = (2,4,0)$; $v = (3,1,0)$

$$A = \frac{1}{2}\|u \times v\| \quad ; \; u \times v = (0,0,-10) \quad ; \; \|u \times v\| = \sqrt{(-10)^2} = 10$$

$$A = \frac{1 \times 10}{2} = 5$$

Demostración de la propiedad 2

Por la propiedad 6:

$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen\theta$; $\theta = ang(u, v)$; u y v no son nulos

Entonces

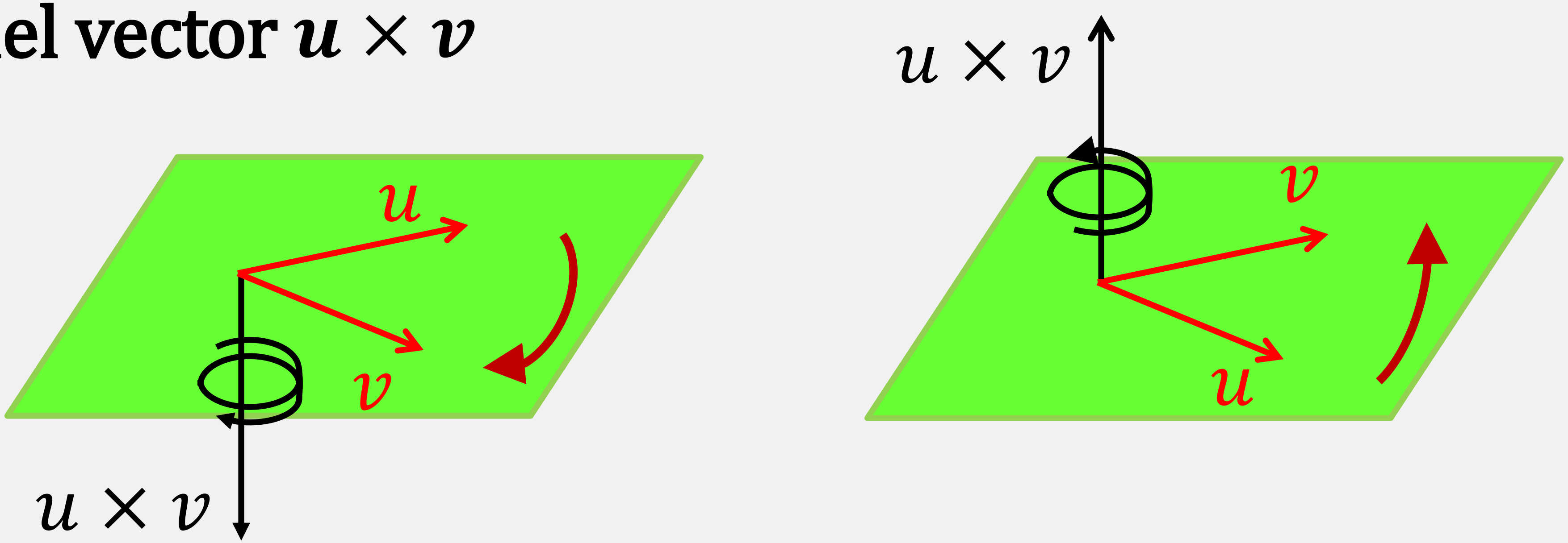
$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen\theta = 0 \Leftrightarrow sen\,\theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \text{ ó} \\ \theta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow u \parallel v$$

Si $u = o$ ó $v = o$; entonces $u \times v = 0$ y $\|u \times v\| = 0$

por lo que se dice que el vector nulo es colineal a todo otro vector.

En definitiva: $\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow u \parallel v$

Sentido del vector $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$



Se dibujan sendos representantes de u y de v con igual origen. Si u gira hacia v recorriendo el menor ángulo, entonces $u \times v$ "avanza" igual que un tirabuzón cuando gira en el mismo sentido.

Producto mixto

Definición

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$,

$$v = (v_1, v_2, v_3),$$

$$w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3.$$

El producto triple de u, v y w es el número: $(u \times v).w$

Cálculo de $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$D(A) = w_1 C_{31} + w_2 C_{32} + w_3 C_{33} = (C_{31}, C_{32}, C_{33}).w = (u \times v).w$$

De modo que el producto triple $(u \times v).w$ es el determinante de la matriz 3x3 que se obtiene colocando las componentes u, v y w como 1°, 2° y 3° fila, respectivamente.

Ejemplo Sean $u = (2, -1, 0)$, $v = (1, 0, 2)$, $w = (3, -1, 2)$

Calcule los productos mixtos $(u \times v).w$ y $u.(v \times w)$.

Cálculo de $(u \times v).w$:

Construimos la matriz A colocando los vectores u, v y w como 1°, 2° y 3° fila, respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D(A) = (u \times v).w = 3C_{31} - C_{32} + 2C_{33} = 3(-2) - (-4) + 2.1 = 0$$

$$\boxed{(u \times v).w = 0}$$

Ejemplo Cálculo de $u.(v \times w)$:

Recordemos que $u.(v \times w) = (v \times w).u$ por la propiedad de simetría del producto punto. Por lo que formamos la matriz A colocando las componentes de los vectores v, w y u, en ese orden, como filas.

$$A` = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(A´) = u.(v \times w) = 2C`_{31} - C`_{32} = 2(2) - (4) = 0$$

Por consiguiente, $\boxed{(u \times v).w = u.(v \times w) = 0}$

Dado que el resultado siempre es el mismo, se estila escribir uvw en lugar de $(u \times v).w$ ó $u.(v \times w)$, ya que es indistinto dónde se ubiquen las operaciones $\times$ y .

Propiedades:

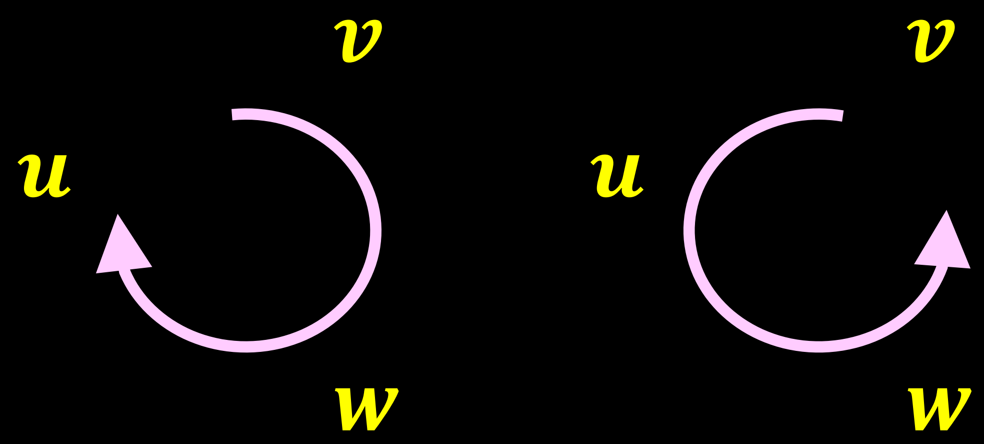
1. $(u \times v).\, w = u.\,(v \times w)$; por lo que se puede escribir: uvw.

2. $uvw = vwu = wuv$

   $uwv = vuw = wvu$

   y

   $uvw = -uwv$



Ejemplo Sean $u=(-2,1,0\ ), v=(1,-1,2\ ),\ w=(1,1,-3\ )$

Calcule los productos mixtos uvw , vwu y vuw

uvw:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

vwu:

$$A` =\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

vuw:

$$A`` =\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$uvw\ =C_{31}+C_{32}-3C_{33}=2+4-3.1=3$$

$$vwu\ =-2C`_{31}+C`_{32}=-2.1+5=3$$

$$vuw=C``_{31}+C``_{32}-3C``_{33}=-2-4-3(-1)=-3$$