FUNCIONES

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

FUNCIONES

Par Ordenado

Definición

Es un ente matemático denotado (a, b), compuesto por dos elementos dados en un cierto orden.

a: 1° coordenada del Par Ordenado.

b: 2° coordenada del Par Ordenado.

Ejemplo

Par ordenado de números reales:

$$(3, \sqrt{2})$$

Producto Cartesiano

Definición

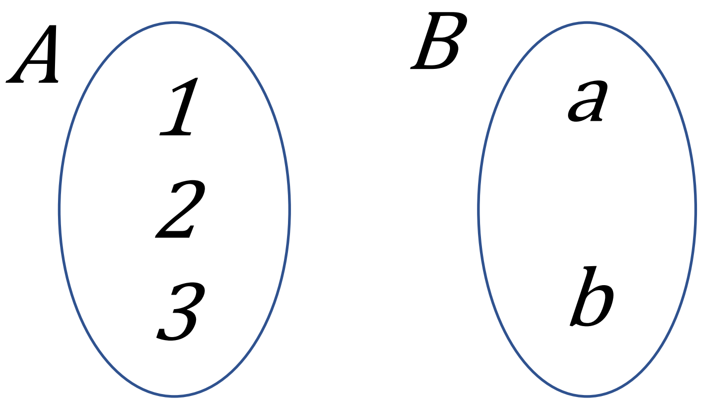
Sean A y B conjuntos.

$$A \times B = \{(a, b) \ / \ \ a \in A \ \wedge b \in B\}$$

Producto Cartesiano de A y B.

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3\}$,
$B = \{a, b\}$ conjuntos



$$A \times B = \{(1, a); (1, b); (2, a);$$
$$(2, b); (3, a); (3, b)\}$$

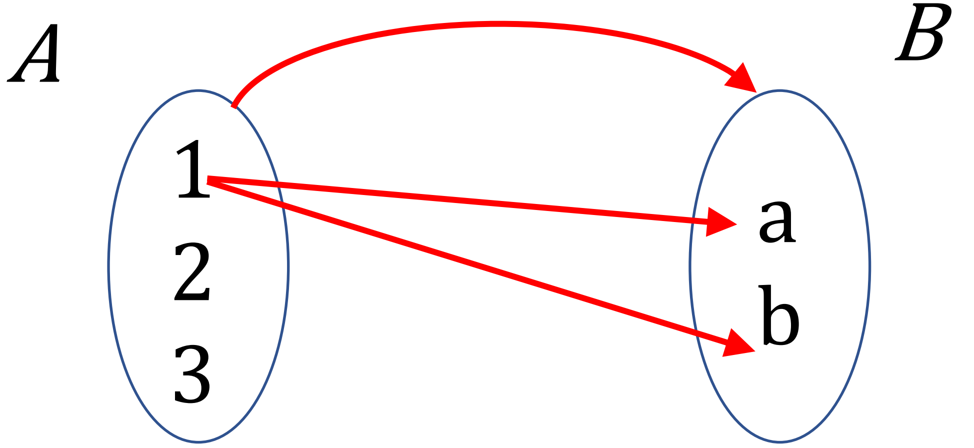
Relación

Definición

Sean A y B conjuntos.
R es una Relación de A en B si $R \subset A \times B$.

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b\}$



$$A \times B = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b)\}$$
$$R = \{(1, a); (1, b)\}$$

A: Conjunto de Partida

B: Conjunto de Llegada

Dominio de R:

$$D_R = \{x \in A / \exists\ y \in B \ \ tal\ que\ (x, y) \in R\ \}$$

Conjunto Imagen de R:

$$I_R = \{y \in B / \exists\ x \in A \ \ tal\ que\ (x, y) \in R\ \}$$

Si $(x, y) \in R$, se dice que y es imagen de x por R.

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b\}$; conjuntos.

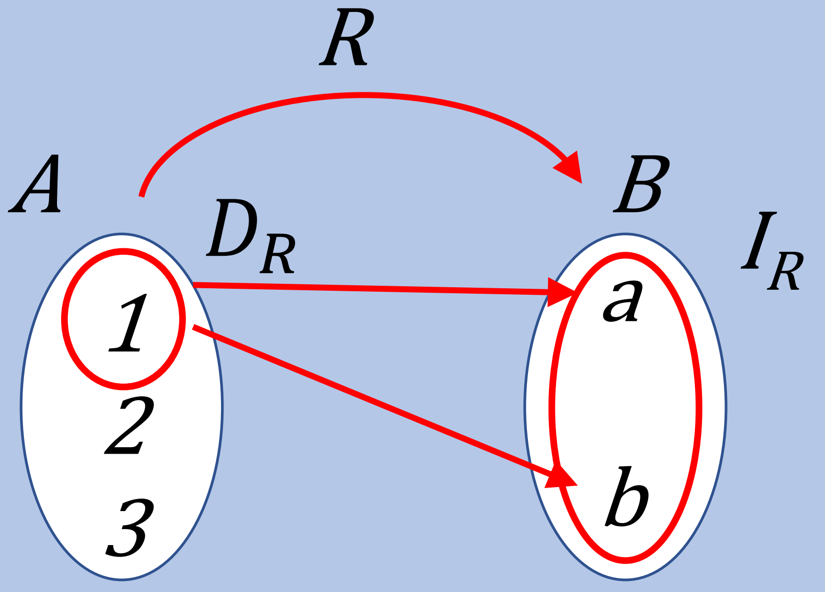
$R = \{(1, a); (1, b)\}$ Relación de A en B

$D_R = \{1\}$ Dominio de R

$I_R = \{a, b\}$ Conjunto imagen de R

a es imagen de 1 por R

b es imagen de 1 por R



Conjunto de partida

Conjunto de llegada

Relación inversa

Definición

Sea R relación de A en B.

$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A / (y, x) \in R\}$ es la relación inversa de R.

$$D_{R^{-1}} = I_R$$

$$I_{R^{-1}} = D_R$$

Ejemplo

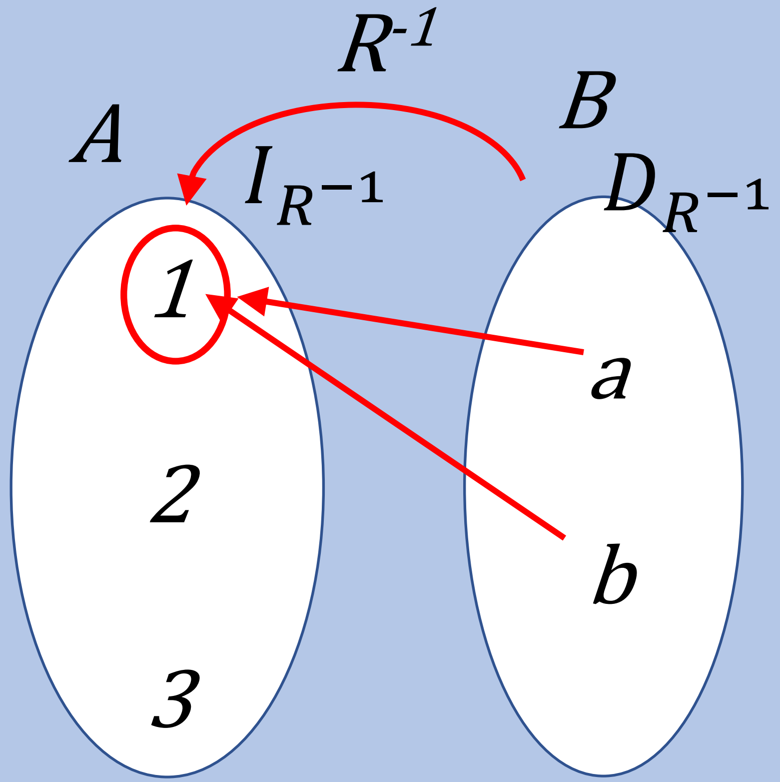
Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b\}$, conjuntos.

$R = \{(1, a); (1, b)\}$ Relación de A en B

$R^{-1} = \{(a, 1); (b, 1)\}$ Relación inversa de R

$D_{R^{-1}} = I_R = \{a, b\}$ Dominio de R^{-1}

$I_{R^{-1}} = D_R = \{1\}$ Conjunto imagen de R^{-1}



Función

Definición

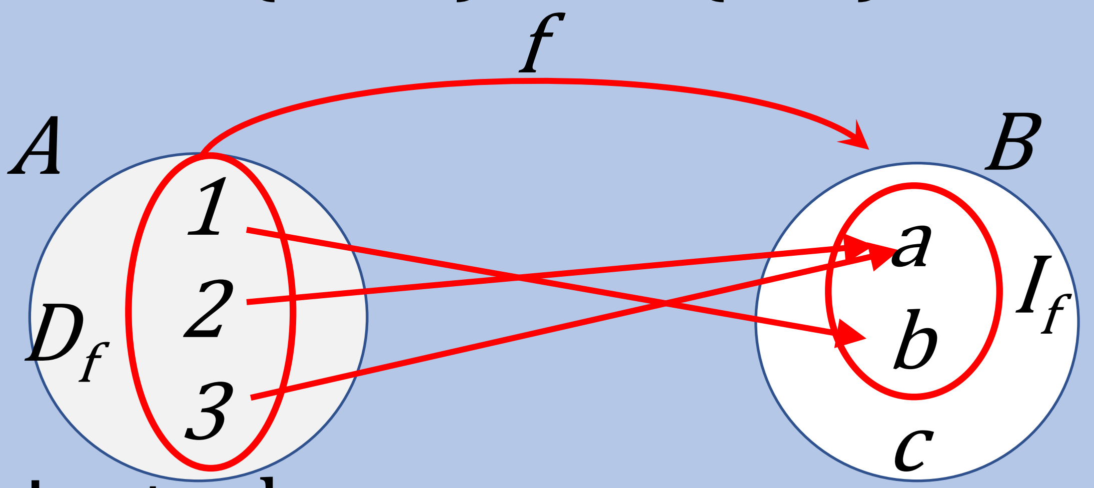
Sean A y B conjuntos.

Una función de A en B es una Relación de A en B en la que a cada elemento de A le corresponde uno y solo un elemento de B.

Pregunta: ¿Toda Relación de A en B es una Función de A en B?

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3\}, B = \{a, b\}$



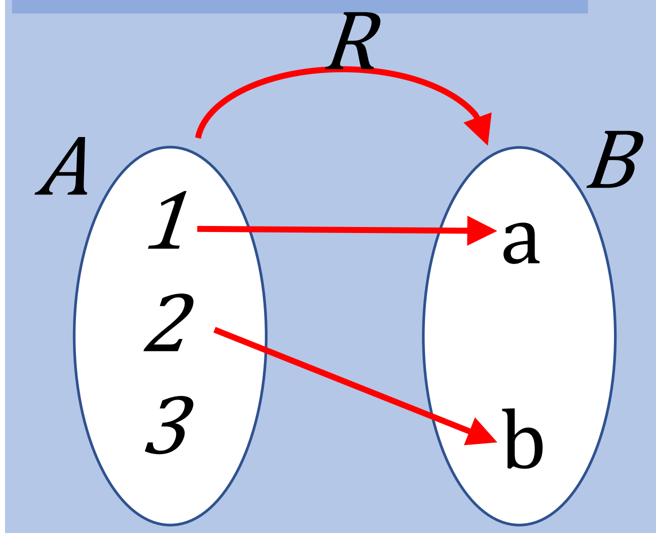
Conjunto de partida

Conjunto de llegada

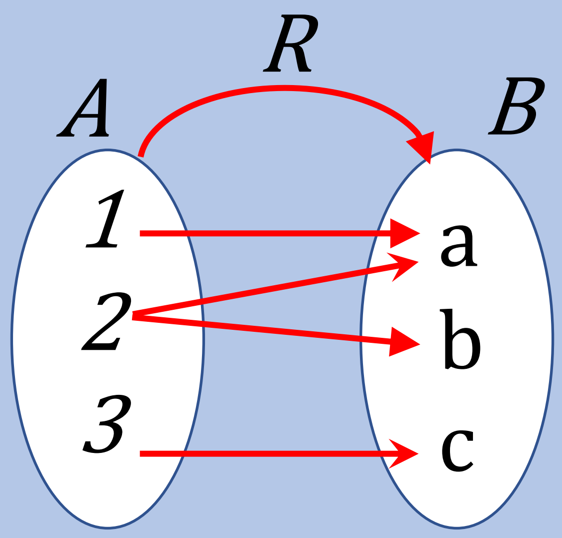
$D_f = \{1,2,3\}$ Dominio de f

$I_f = \{a, b\}$ Conjunto imagen de f

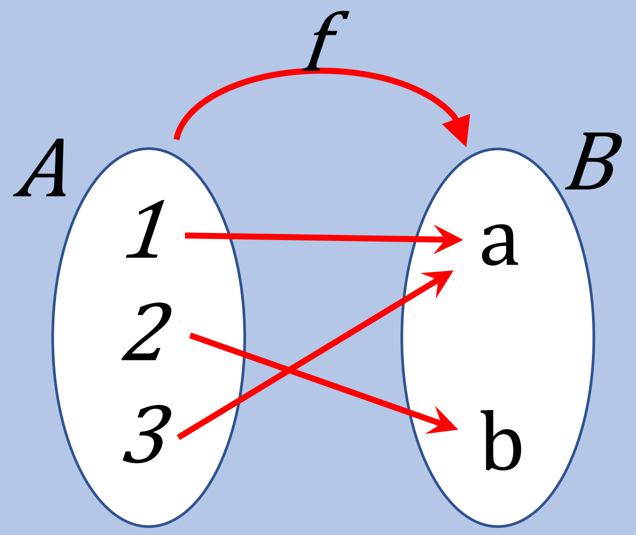
Ejemplo



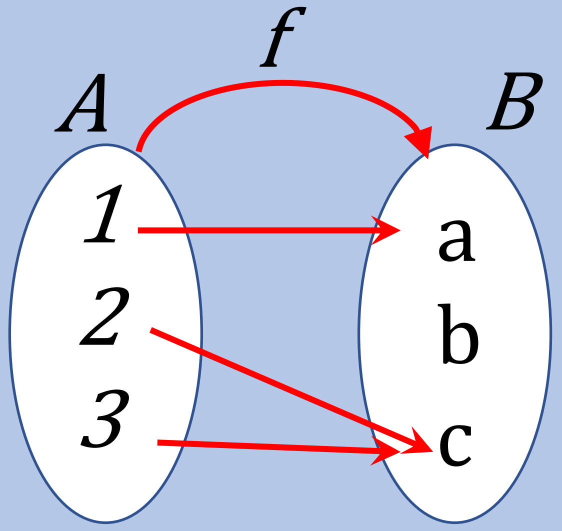
R no es función porque a 3 no corresponde ningún elemento de B.



R no es función porque a 2 corresponden dos elementos de B.



R es función.



R es función.

Notación: $\boxed{f\colon A \longrightarrow B; y = f(x)}$

f : Nombre de la función.

A : Conjunto de partida.

B : Conjunto de llegada.

$y = f(x)$: Regla de asignación.

Una función queda determinada especificando el Dominio, el Conjunto de llegada y la Regla de asignación.

Ejemplo

Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^2$$

Función real de variable real

Sea $f: A \longrightarrow B; y = f(x)$

f es una función real

si A $\subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$.

Se puede decir "función real".

Ejemplo

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}; y = 2x + 1$$

f es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ tal que $y = 2x + 1$.

Es una función real.

Gráfica de una función

Sea f función real.

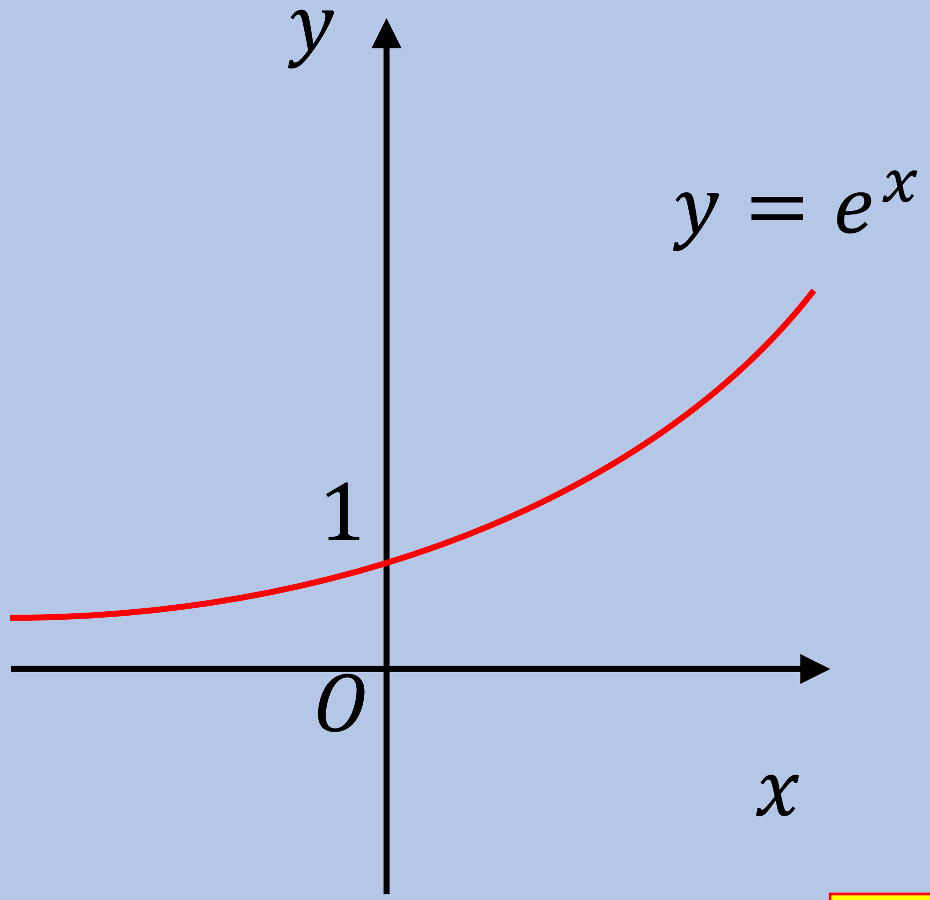
Gráfica de f:

$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D_f \wedge y = f(x)\}$

Representamos una función mediante un sistema de coordenadas cartesianas.

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = e^x$



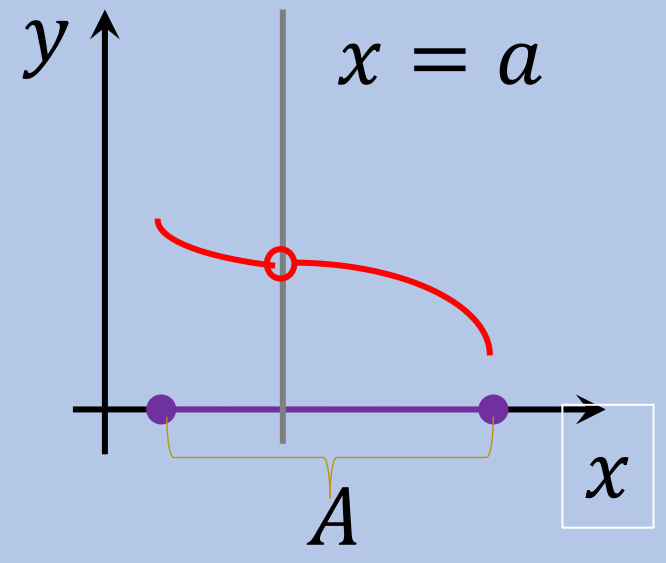
Para que una relación R sea función deben cumplirse las condiciones de existencia y de unicidad.

<u>Condición de existencia</u>

$\forall x \in A: \exists y \in B \; / \; (x, y) \in f$

En el gráfico: Toda recta paralela al eje y, $x = a$, con $a \in A$, corta a la curva de f en al menos un punto.

Ejemplo



El gráfico no representa una función de A en B porque existe al menos una recta $x = a$, con $a \in A$, que no intersecta al gráfico de la relación en ningún punto.

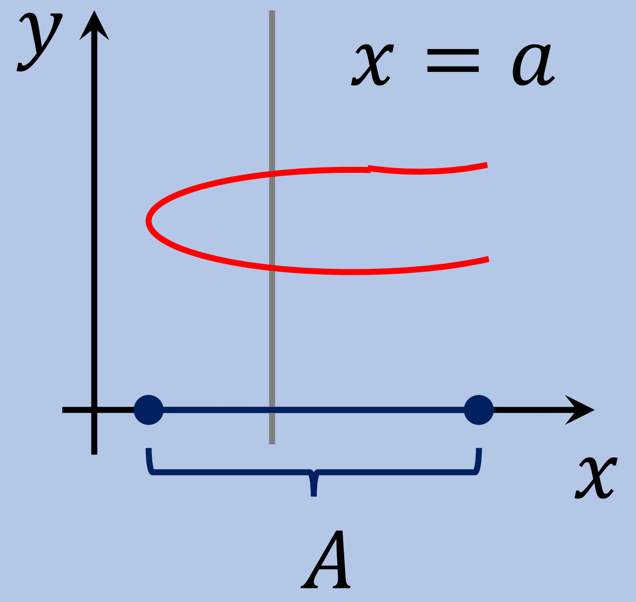
Condición de unicidad

Si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f \Longrightarrow y = z$

Si a x le corresponden los elementos y y z, entonces debe ser $y = z$.

En el gráfico: Toda recta paralela al eje y, $x = a$, con $a \in A$, corta a la curva de f en no más de un punto.

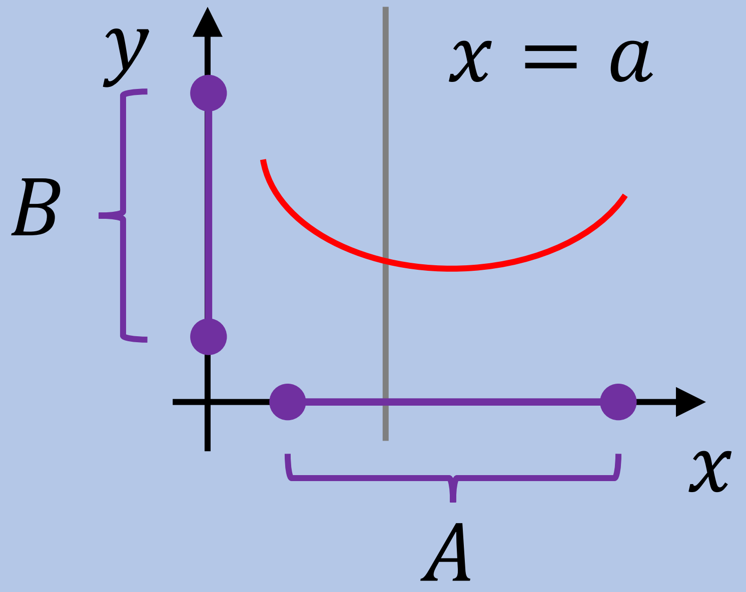
Ejemplo



El gráfico no representa una función porque existe al menos una recta $x = a$, con $a \in A$, que corta al gráfico de la relación en más de un punto.

Ejemplo

El gráfico representa una función de A en B porque toda recta $x = a$, con a $\in A$, corta al gráfico de la relación en uno y solo un punto.



Restricción del dominio

Sean $F: A \longrightarrow B; y = F(x)$

$$f: A_0 \longrightarrow B; y = f(x)$$

$$A_0 \subset A$$

Si $f(x) = F(x) \quad \forall x \in A_0$; entonces f es una "Restricción de F a A_0", se escribe $F|A_0$, y F es una "Extensión de f sobre A relativa a B".

Ejemplo

Sean $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^2$

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^2$$

Dado que $f(x) = F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; entonces f es una "Restricción de F a $\mathbb{R}_{\geq 0}$", y F es una "Extensión de f sobre $\mathbb{R}$ relativa a $\mathbb{R}$".

Álgebra de funciones

Igualdad de funciones

Sean

$$\boldsymbol{f: A \longrightarrow B; y = f(x)}$$

$$\boldsymbol{g: A \longrightarrow C; y = g(x)}$$

$\boldsymbol{f = g}$ **si** $\boldsymbol{f(x) = g(x)\ \forall x \in A}$

Ejemplo

Sean $f: [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}; y = x - 1$

$$g: [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}; y = \frac{x^2-1}{x+1}$$

$f = g$ ya que

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1 = f(x)$$

$$\forall x \in [0,10].$$

Suma y producto de funciones

Sean

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D_f} \longrightarrow \mathbb{R}; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{g}: \boldsymbol{D_g} \longrightarrow \mathbb{R}; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

$$[\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}]: \boldsymbol{D_f} \cap \boldsymbol{D_g} \longrightarrow \mathbb{R}; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

$$[\boldsymbol{fg}]: \boldsymbol{D_f} \cap \boldsymbol{D_g} \longrightarrow \mathbb{R}; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Ejemplo

Sean $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^2$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = e^x$$

$$[f + g]: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$y = x^2 + e^x$$

$$[fg]: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$y = x^2 e^x$$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: Conjunto de funciones reales

Propiedades de la suma y producto de funciones

Sean $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

A1. $f + g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

A2. $(f + g) + h = f + (g + h)$

A3. $f + g = g + f$

A4. $f + 0 = f$

M1. $fg \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

M2. $(fg)h = f(gh)$

M3. $fg = gf$

M4. $f1 = f$

D. $f(g + h) = fg + fh$

$0: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = 0$

$1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = 1$

Recíproca de una función

Sea $g\colon D_g \to \mathbb{R};\, y = g(x)$

$$\left[\frac{1}{g}\right]\colon D_{\frac{1}{g}} \longrightarrow \mathbb{R};\; y = \frac{1}{g(x)}$$

$$D_{\frac{1}{g}} = D_g - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$$

Cociente de funciones

Sean $f\colon D_f \to \mathbb{R};\, y = f(x)$ y

$g\colon D_g \to \mathbb{R};\, y = g(x)$

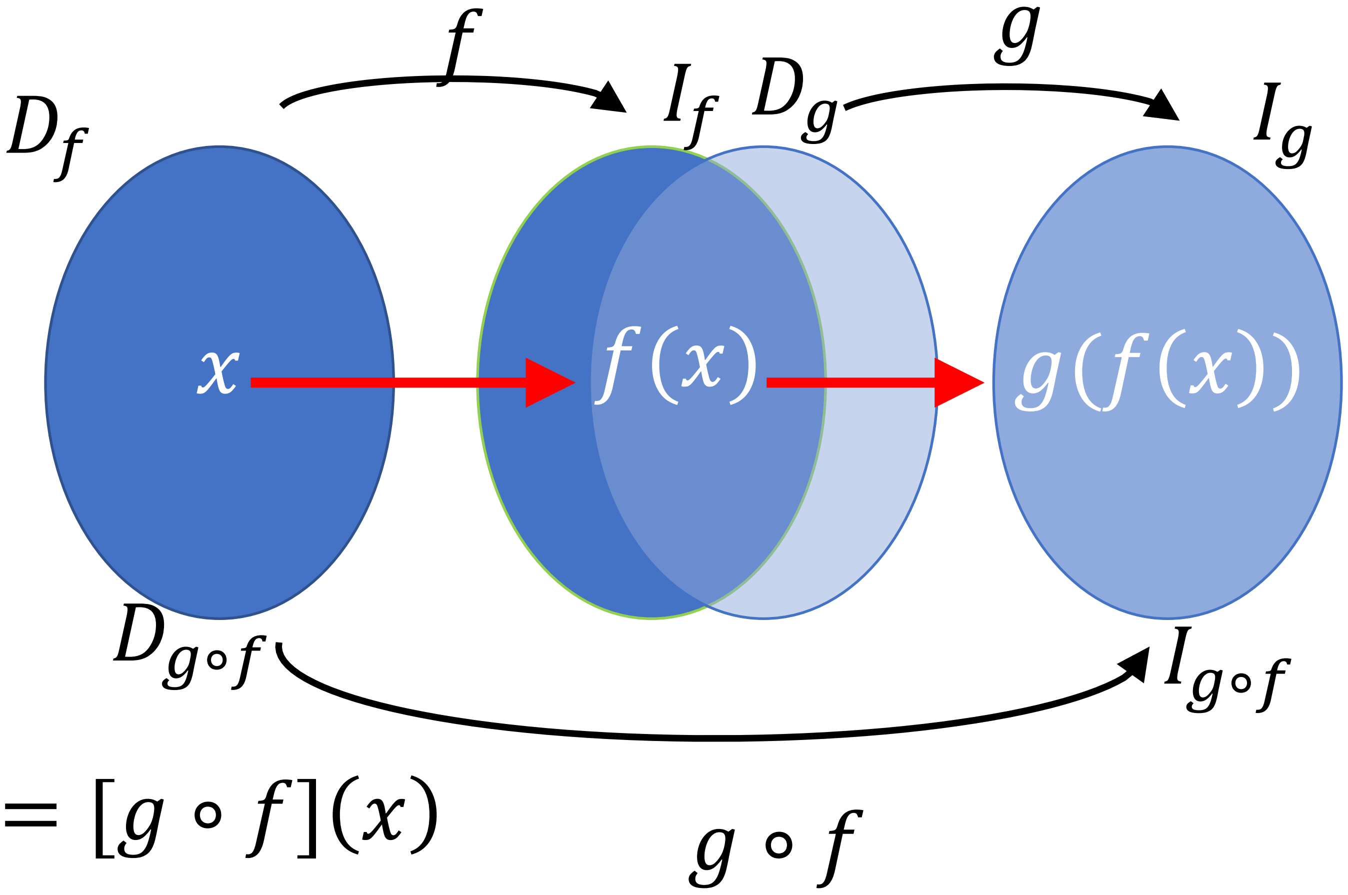
$$\left[\frac{f}{g}\right]\colon D_{\frac{f}{g}} \longrightarrow \mathbb{R};\; y = \frac{f(x)}{g(x)};\qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$$

Composición de funciones

Sean $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}; y = f(x)$

$g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}; y = g(x)$

$D_g \cap I_f \neq \emptyset$



$g \circ f: D_{g\circ f} \longrightarrow \mathbb{R}; y = g\big(f(x)\big) = [g \circ f](x)$

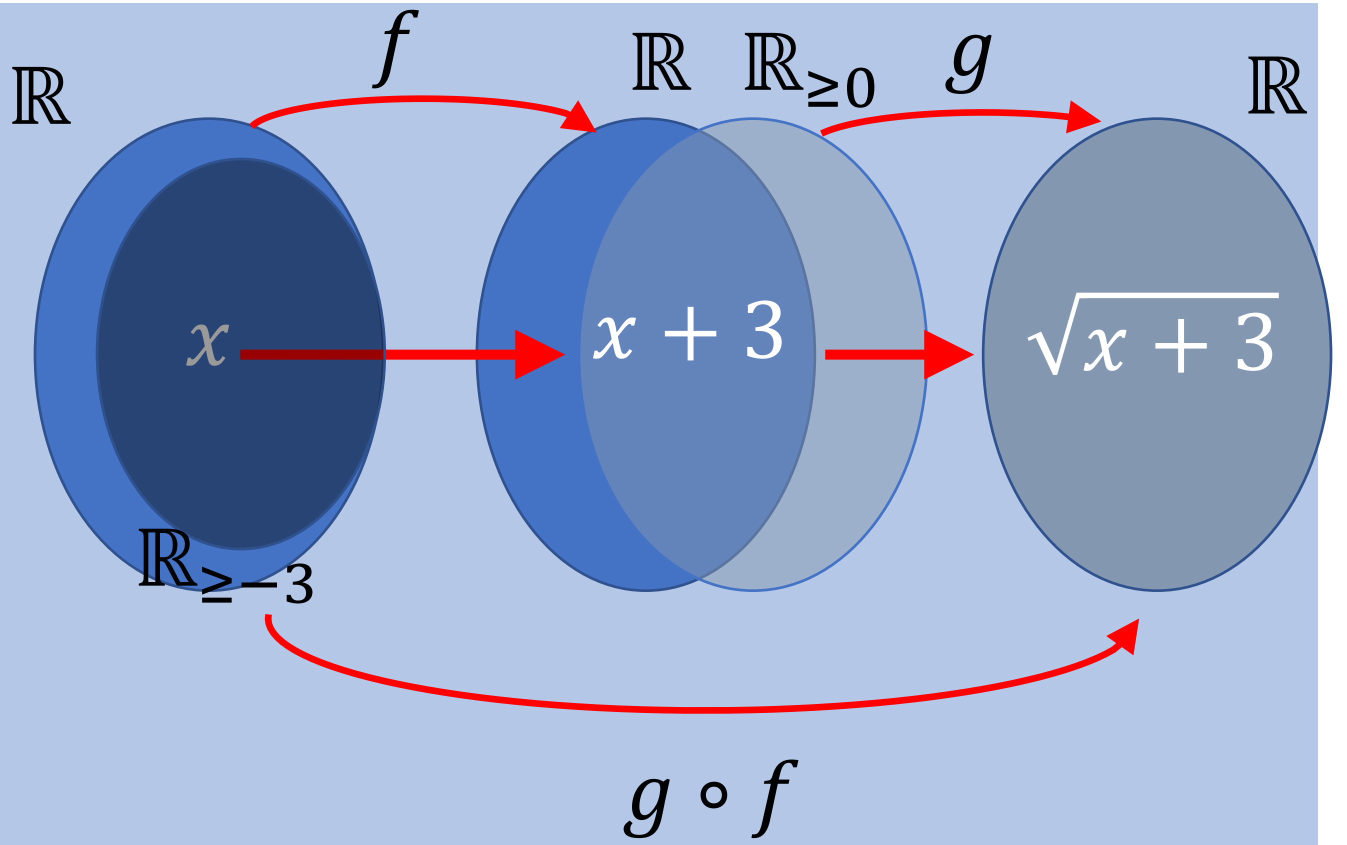
en donde

$D_{g\circ f} = \left\{x \in D_f / f(x) \in D_g\right\}$

Ejemplo

Sean $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x + 3$

$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}; y = \sqrt{x}$



$D_g \cap I_f = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \neq \emptyset$

Determinación de $D_{g \circ f}$: $x + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -3 \Longrightarrow D_{g \circ f} = [-3, \infty)$

$g \circ f: [-3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}; y = \sqrt{x + 3}$

Propiedades de la composición de funciones

Sean $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

1. $f \circ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

2. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

3. $f \circ I = I \circ f = f$ en donde $I: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x$ (función identidad)

4. $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

5. $(fg) \circ h = (f \circ g)(g \circ h)$

En general: $f \circ g \neq g \circ f$

Ejemplo

Sean $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^2$, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x + 1$

Halle, si es posible, el dominio y regla de asignación de $g \circ f$ y de $f \circ g$.

¿Está definida $g \circ f$? $I_f = \mathbb{R}_{\geq 0} \Longrightarrow D_g \cap I_f = \mathbb{R}_{\geq 0} \neq \emptyset$; está definida.

¿Está definida $f \circ g$? $I_g = \mathbb{R} \Longrightarrow D_f \cap I_g = \mathbb{R} \neq \emptyset$; está definida.

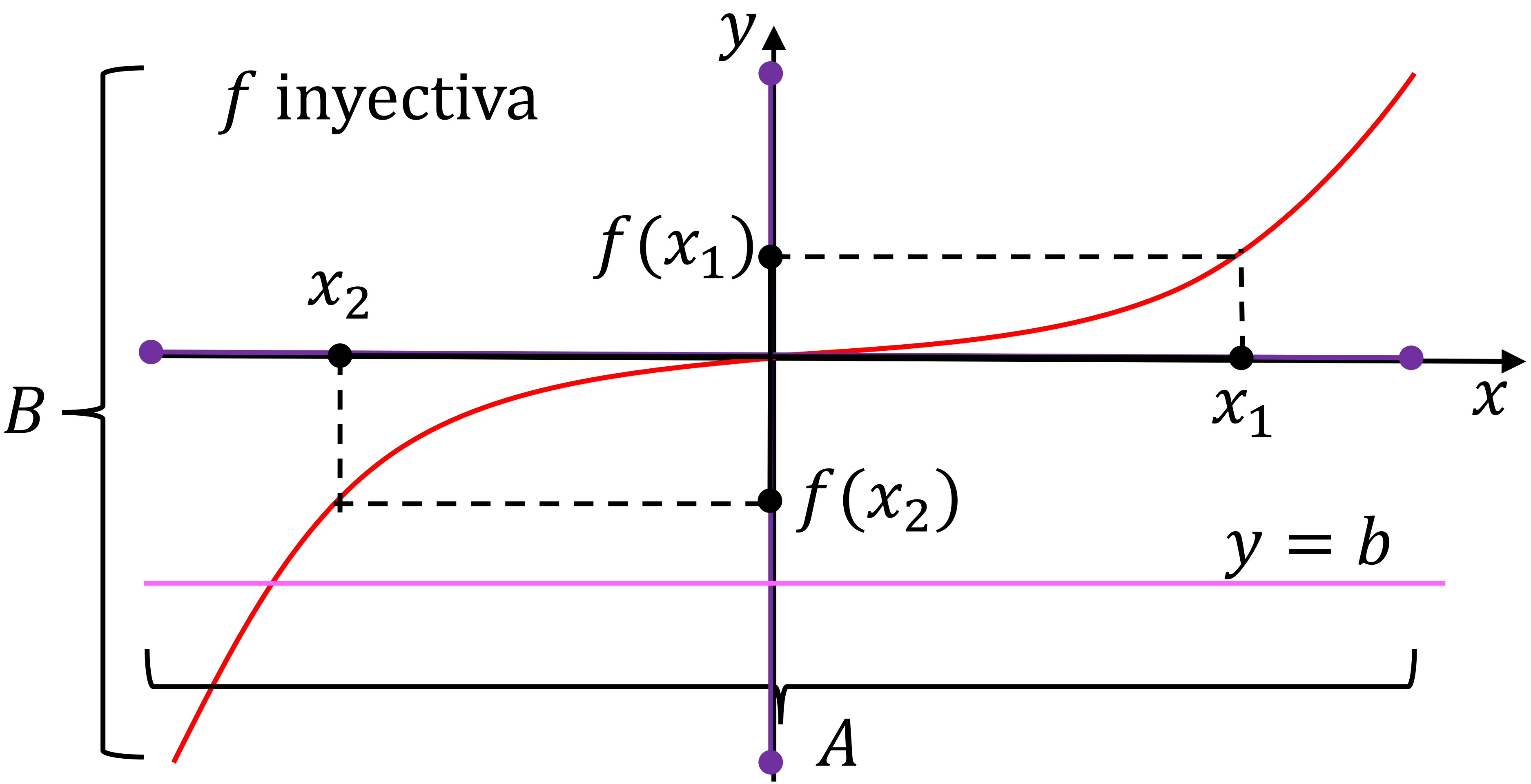
$$g \circ f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$f \circ g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = f\big(g(x)\big) = f(x+1) = (x+1)^2$$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

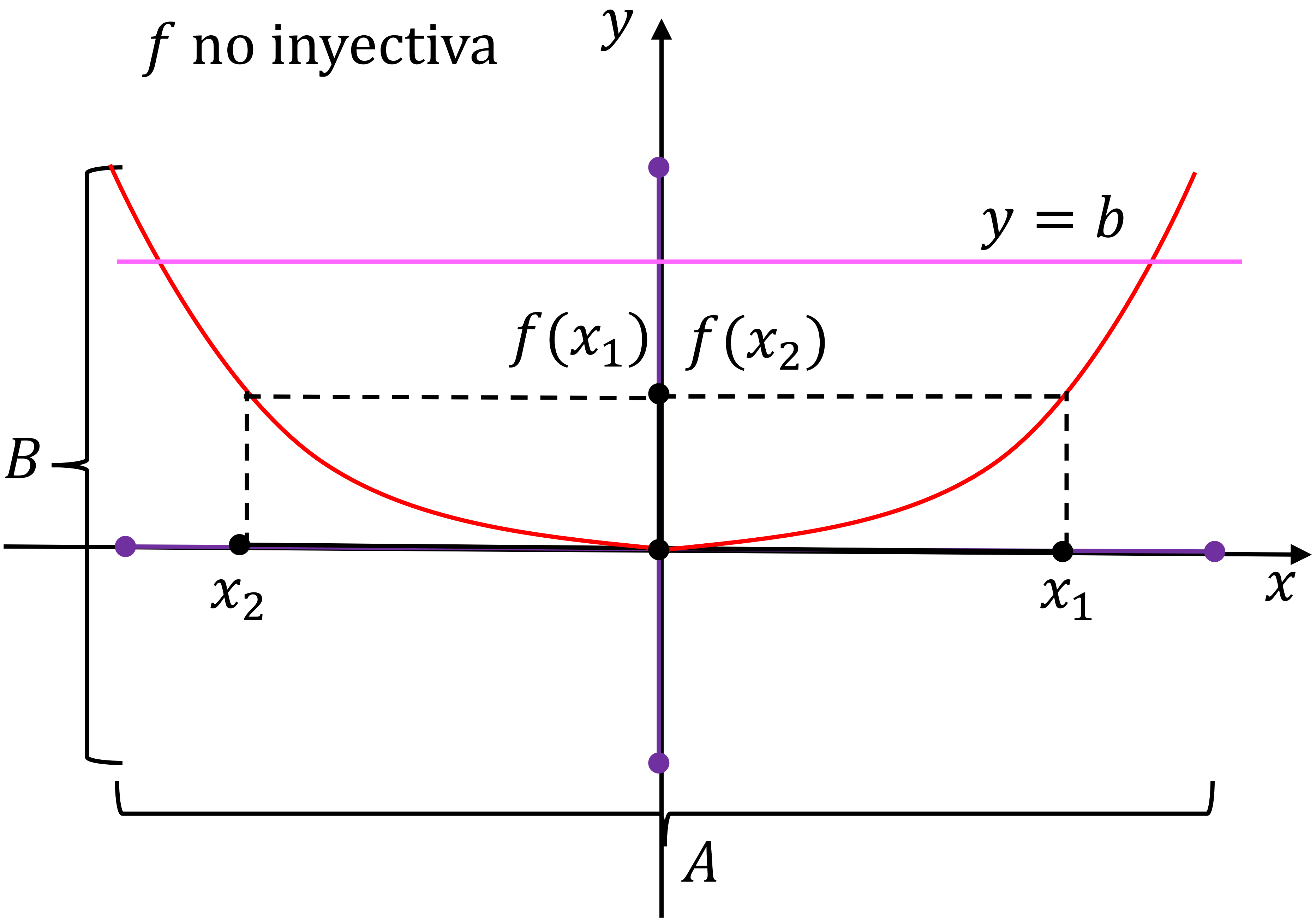
Función inyectiva

Sea $f: A \longrightarrow B$; f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



f es inyectiva si toda recta $y = b$, con $b \in B$, corta a la curva en no más de un punto.

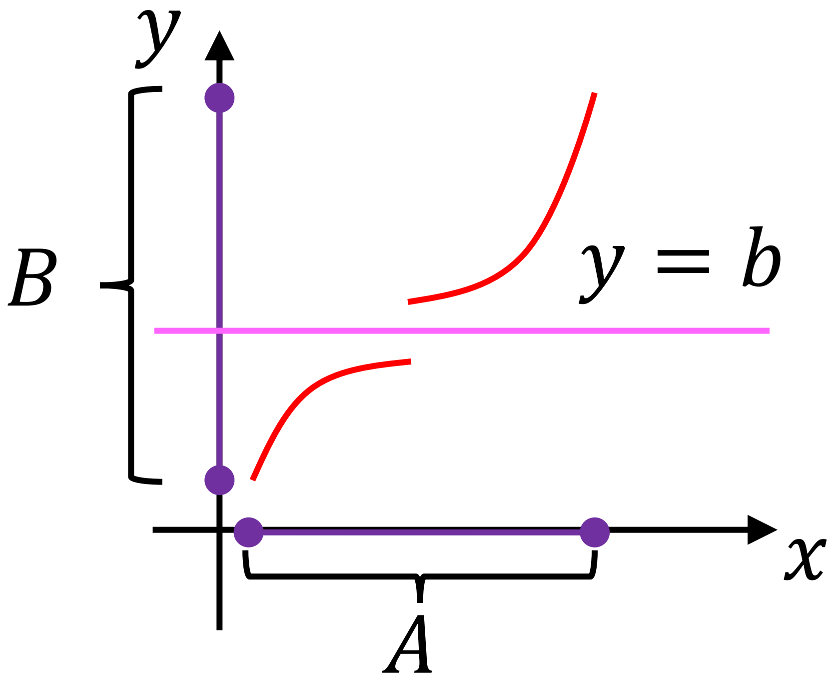
f no inyectiva



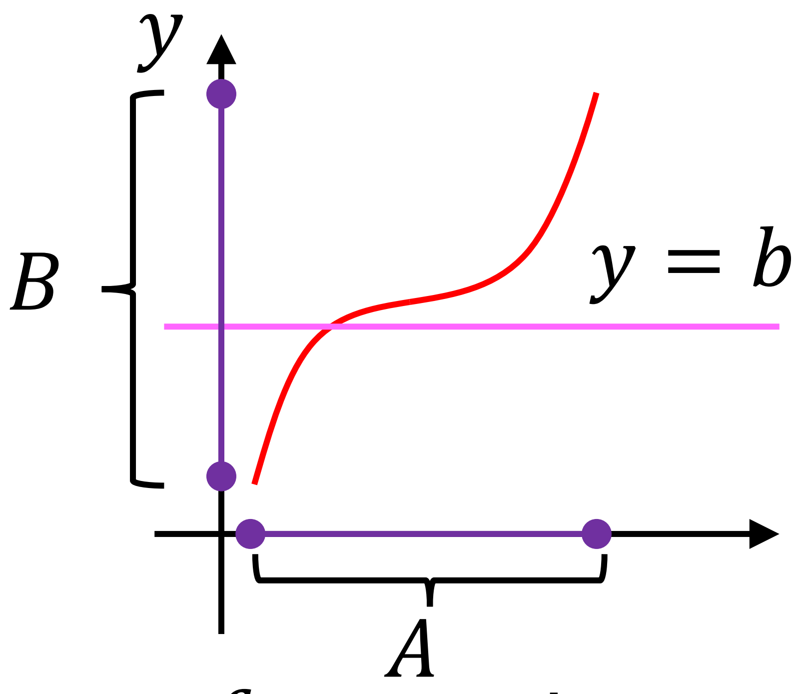
f es inyectiva si toda recta $y = b$, con $b \in B$, corta a la curva en no más de un punto.

Función suryectiva

Sea $f: A \longrightarrow B$; f es suryectiva si $\forall\ y \in B: \exists\ x \in A / y = f(x)$.



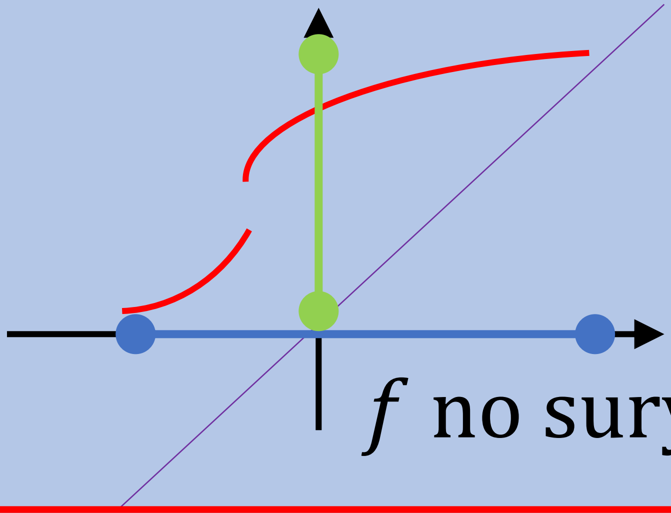
f no suryectiva



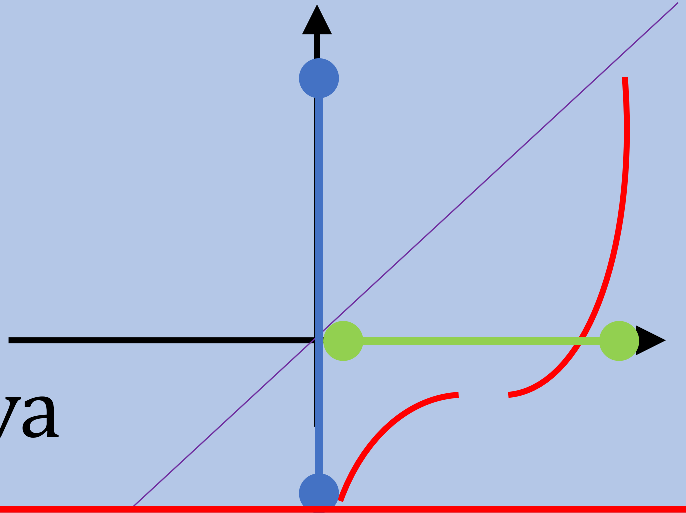
f suryectiva

f es suryectiva si toda recta $y = b$, con $b \in B$, corta a la curva en al menos un punto.

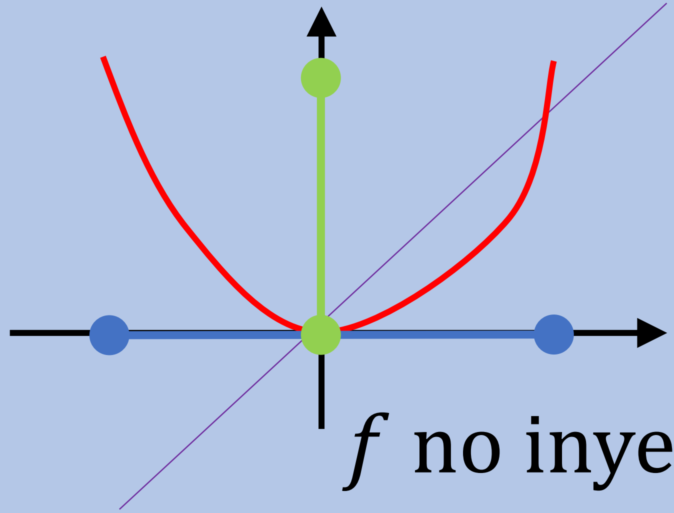
Ejemplo Muestre con gráficos que la relación inversa de una función no suryectiva y de una función no inyectiva no es función.



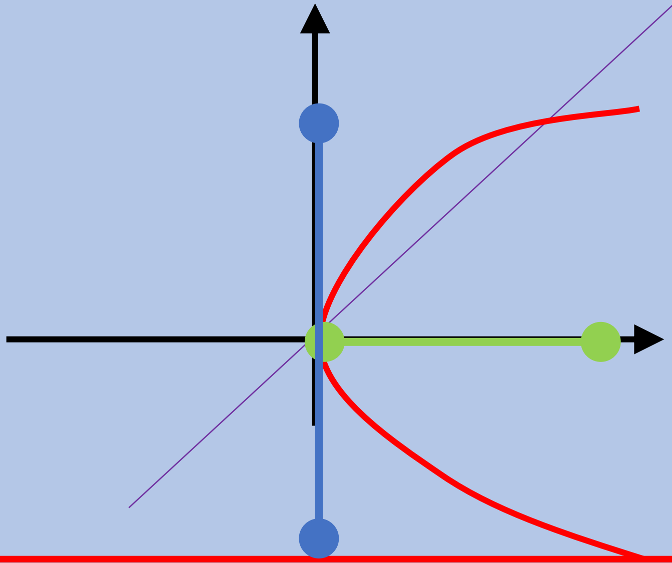
f no suryectiva



La relación inversa no es función porque no se cumple la condición de existencia.



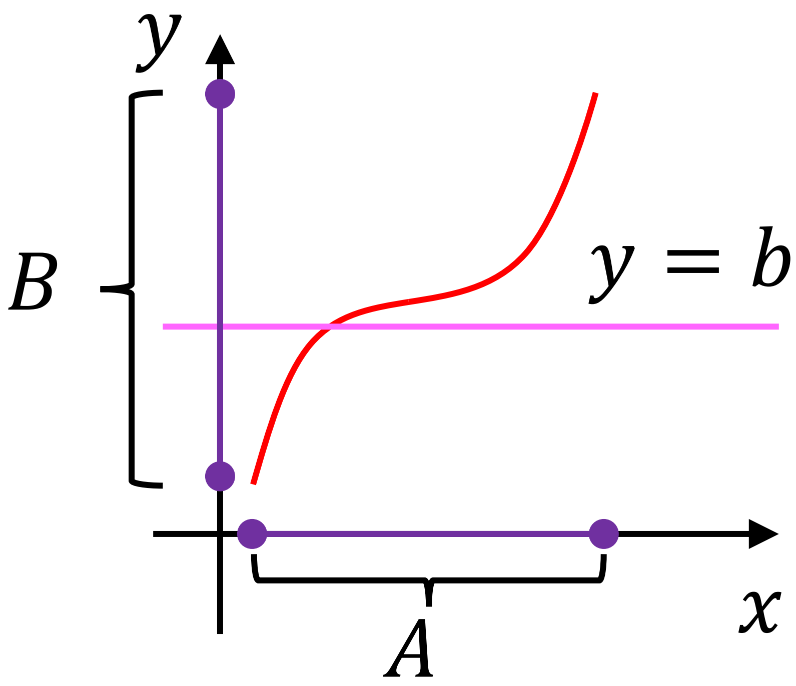
f no inyectiva



La relación inversa no es función porque no se cumple la condición de unicidad.

Función biyectiva

Sea $f: A \longrightarrow B$; f es biyectiva si f es inyectiva y suryectiva.



f biyectiva

f es biyectiva si toda recta $y = b$, con $b \in B$, corta a la curva en uno y solo un punto.

Ejemplo

1. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^2$. Determine si f es inyectiva.

Despejamos x: $x = \pm\sqrt{y}$

Para cada $y \in I_f$ existe más de un $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$; por tanto, f no es inyectiva.

2. Sea $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}; y = \text{sen}\, x$. Determine si f es inyectiva.

Despejamos x: $x = arc\ sen\ y$

Para cada valor de y en el intervalo

de definición de la función, x es único, por tanto f es inyectiva.

Ejemplo

1. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^3$. Determine si f es suryectiva.

Despejamos x: $\quad x = \sqrt[3]{y}$

Para cada $y \in I_f$ existe algún $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$; por tanto, f es suryectiva.

2. Sea $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}; y = tg\ x$. Determine si f es suryectiva.

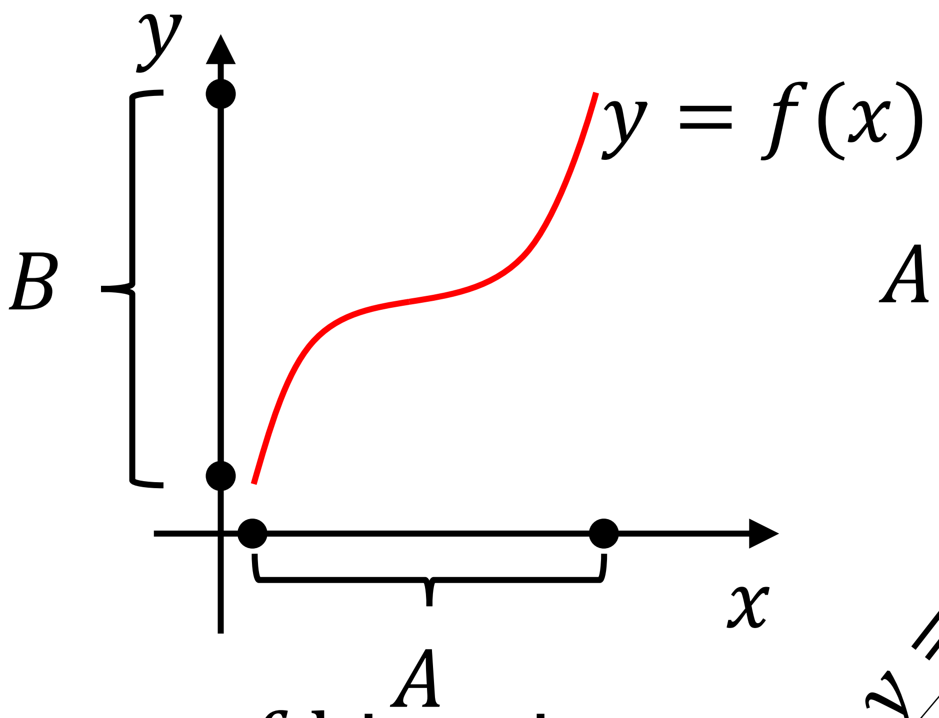
Despejamos x: $\quad x = arc\ tg\ y$

Para cada valor de $y \in I_f = \mathbb{R}$, existe algún x tal que $y = f(x)$, por tanto f es suryectiva.

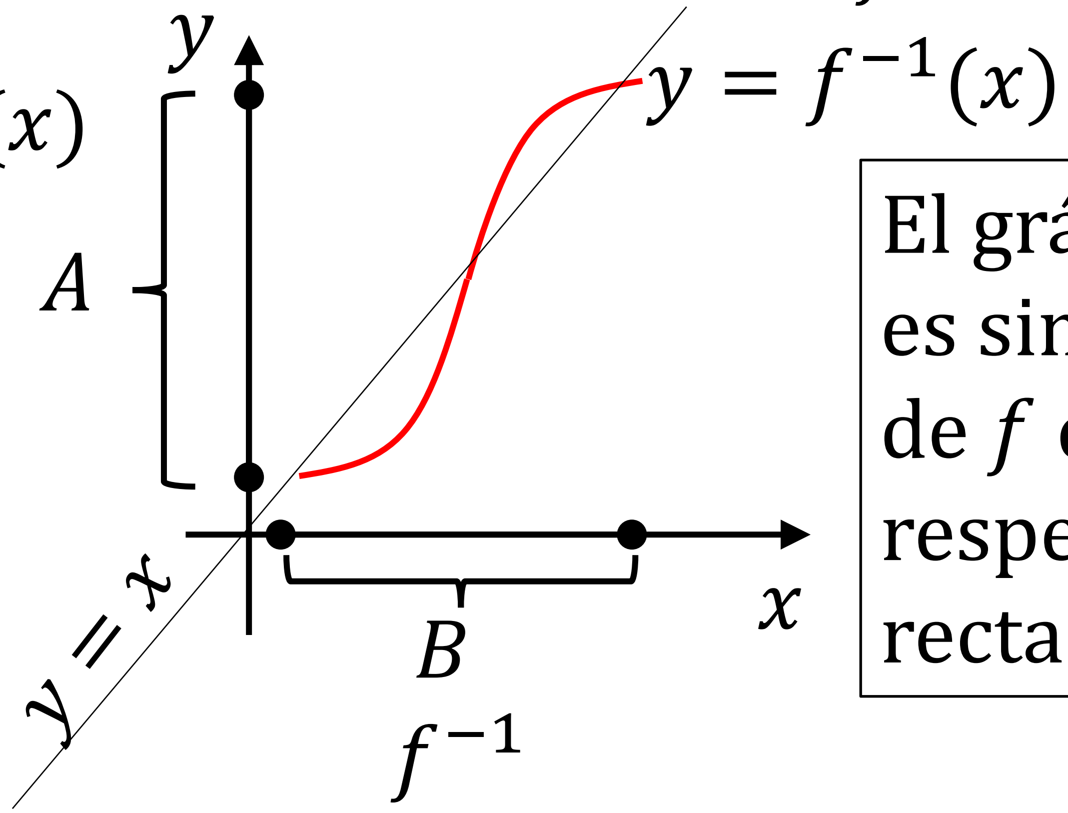
Función inversa

Sea $f: A \longrightarrow B$; función biyectiva.

$f^{-1} = \{(f(x), x) / x \in A\}$ es la función inversa de f.



f biyectiva



f^{-1}

El gráfico de f^{-1} es simétrico al de f con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}; y = \frac{x-1}{x+2}$. Determine si f es biyectiva. Si no lo fuera, modifique D_f y B para que lo sea y defina la función inversa. Grafique.

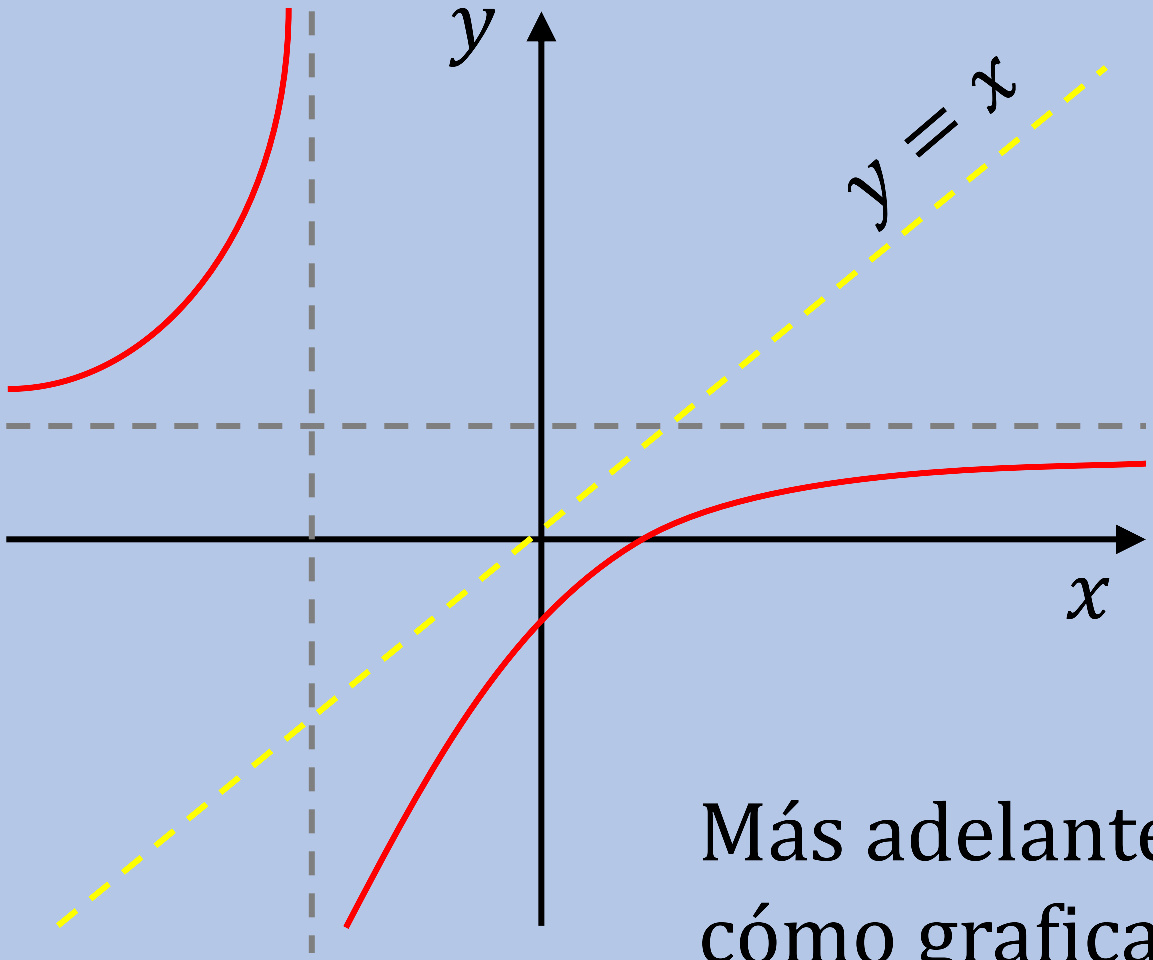
Despejamos x: $x = \frac{-2\left(y-\frac{1}{2}\right)}{y-1}$ (*). Debe cumplirse $y \neq 1$para que f sea suryectiva. f es inyectiva. Modificamos B para que sea biyectiva:

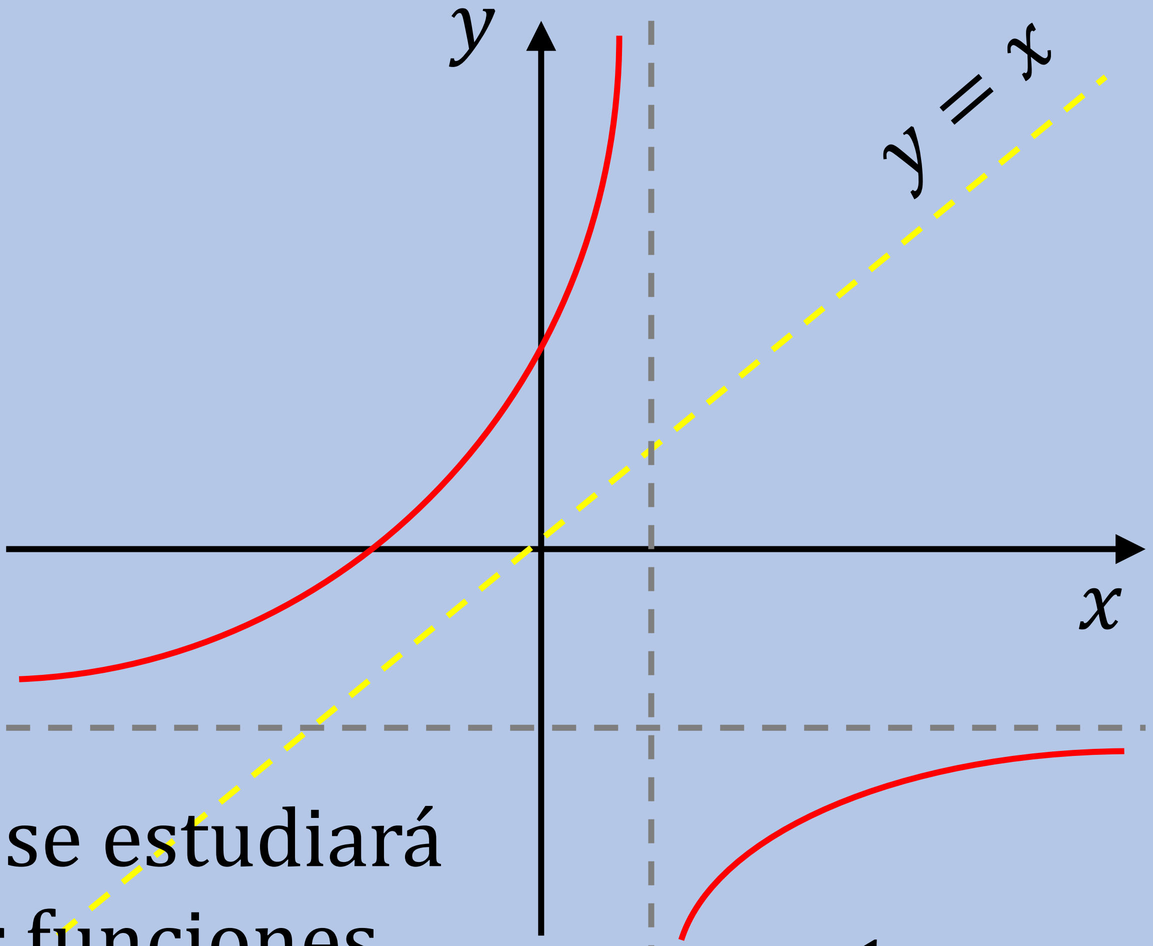
$f: \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}; y = \frac{x-1}{x+2}$

En (*) cambiamos y por x: $y = \frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-1}$ Regla de asignación de f^{-1}.

Definimos f^{-1}: $\quad f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\}; y = \frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-1}$

Ejemplo Gráficos de f y de f^{-1}:





Más adelante se estudiará cómo graficar funciones.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x-1}$$