VARIACIÓN DE FUNCIONES

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

Función creciente, decreciente, no creciente, no decreciente.

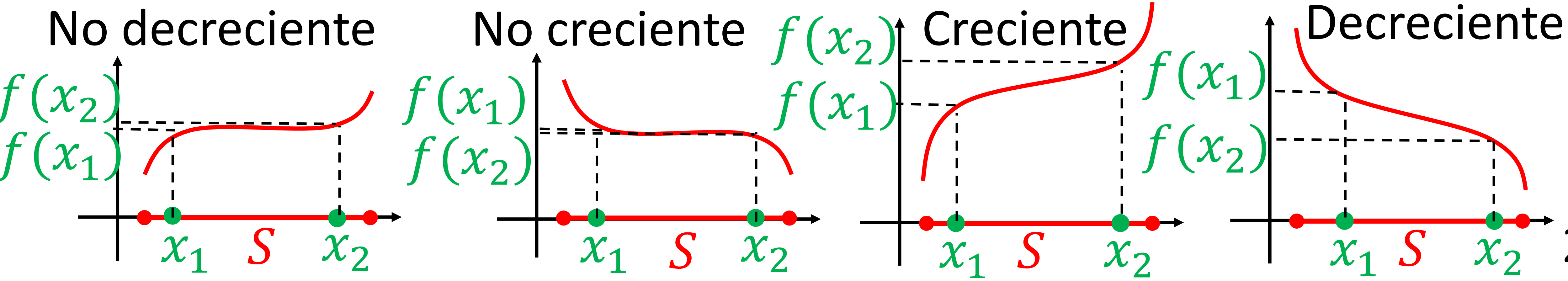
Definiciones: Sea $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. $S \subseteq D_f$. $x_1, x_2 \in S$. $x_1 < x_2$.

f es **no decreciente sobre S** si $f(x_1) \leq f(x_2)\ \ \forall x_1, x_2 \in S$.

f es **no creciente sobre S** si $f(x_1) \geq f(x_2)\ \ \forall x_1, x_2 \in S$.

f es **creciente sobre S** si $f(x_1) < f(x_2)\ \ \forall x_1, x_2 \in S$.

f es **decreciente sobre S** si $f(x_1) > f(x_2)\ \ \forall x_1, x_2 \in S$.



Función creciente, decreciente, no creciente, no decreciente.

Teorema Sea f continua sobre un intervalo J.

I. Si $f'(x) \geq 0$ en todo punto interior de J, entonces f es no decreciente sobre J.

II. Si $f'(x) \leq 0$ en todo punto interior de J, entonces f es no creciente sobre J.

III. Si $f'(x) > 0$ en todo punto interior de J, entonces f es creciente sobre J.

IV. Si $f'(x) < 0$ en todo punto interior de J, entonces f es decreciente sobre J.

Función creciente, decreciente, no creciente, no decreciente.

Demostración I.

Sean $x_1, x_2 \in J$; $x_1 < x_2$.

f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2), por lo que se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Entonces $\exists c \in (x_1, x_2) / f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; $f'(c) \geq 0$ por hipótesis

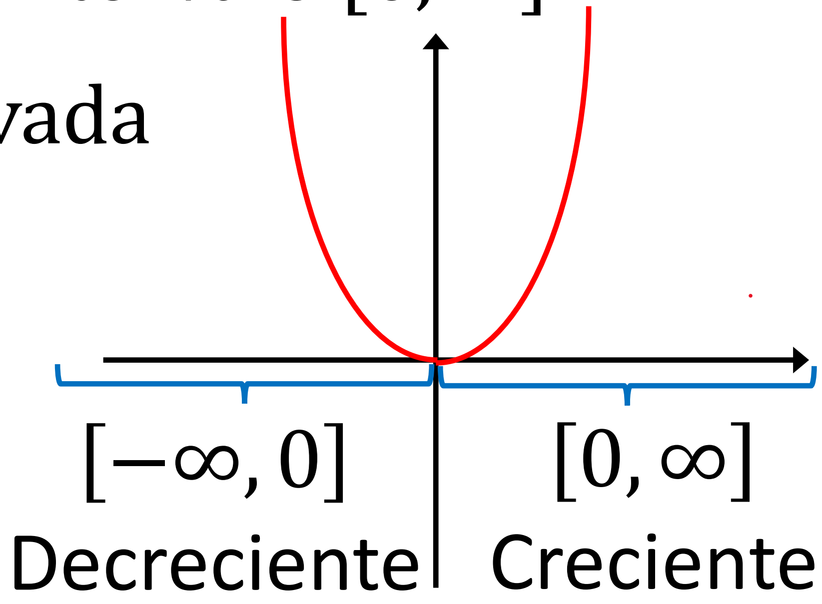
$x_2 - x_1 > 0$, por lo que debe cumplirse $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

Es decir, $f(x_1) \leq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in J$ y f es no decreciente sobre J.

Ejemplo Sea $f(x) = x^2$. Compruebe que f es decreciente en el intervalo $[-\infty, 0]$ y que es creciente en el intervalo $[0, \infty]$.

$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ raíz de la derivada

	$-\infty$	0	∞
x	$-$		$+$
$2x$	$-$		$+$



En esta tabla se indica que $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$ y, por consiguiente, $f(x) = x^2$ es decreciente sobre $[-\infty, 0]$. En cambio, $f'(x) > 0$ en $(0, \infty)$ y, por tanto, $f(x) = x^2$ es creciente sobre $[0, \infty]$.

Determinación de los extremos relativos o locales

Definición

Punto crítico

Sea $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. $A \subseteq D_f$. c punto interior de A.

c es punto crítico de f en A si $\nexists$ $f'(c)$ o si $f'(c) = 0$.

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encuentre los puntos críticos.

Dominio de f:

$$\left.\begin{array}{l}\text{En la función } \ln x \text{ debe cumplirse } x>0 \\ \text{Además, no se debe anular el denominador: } x \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow D_f = (0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Raíces de f': $1 - \ln x = 0$; $\ln x = 1 \Longrightarrow x = e$

Puntos donde f' no está definida: $x = 0 \quad (0 \notin D_f)$

En consecuencia, el único punto crítico es $\boxed{x = e}$.

Determinación de los extremos relativos o locales

Teorema

Condición necesaria para la existencia de extremos locales

Si una función f tiene un extremo local en un punto c entonces c es punto crítico de f.

Determinación de los extremos relativos o locales

Demostración

Existen dos alternativas: I) $\nexists\, f'(c)$. II) $\exists f'(c)$.

Si $\nexists\, f'(c)$, entonces c es punto crítico de f por definición.

Si $\exists f'(c)$, supongamos $f(c)$ es máximo local.

$$f'_{-}(c) = \lim_{0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Dado que $h < 0$ y que $f(c+h) - f(c) \leq 0$, resulta $f'_{-}(c) \geq 0 \quad (1)$.

Continúa

Determinación de los extremos relativos o locales

$$f'_{+}(c) = \lim_{0^{+}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Dado que $h > 0$ y que $f(c+h) - f(c) \leq 0$, resulta $f'_{+}(c) \leq 0 \ \ (2)$.

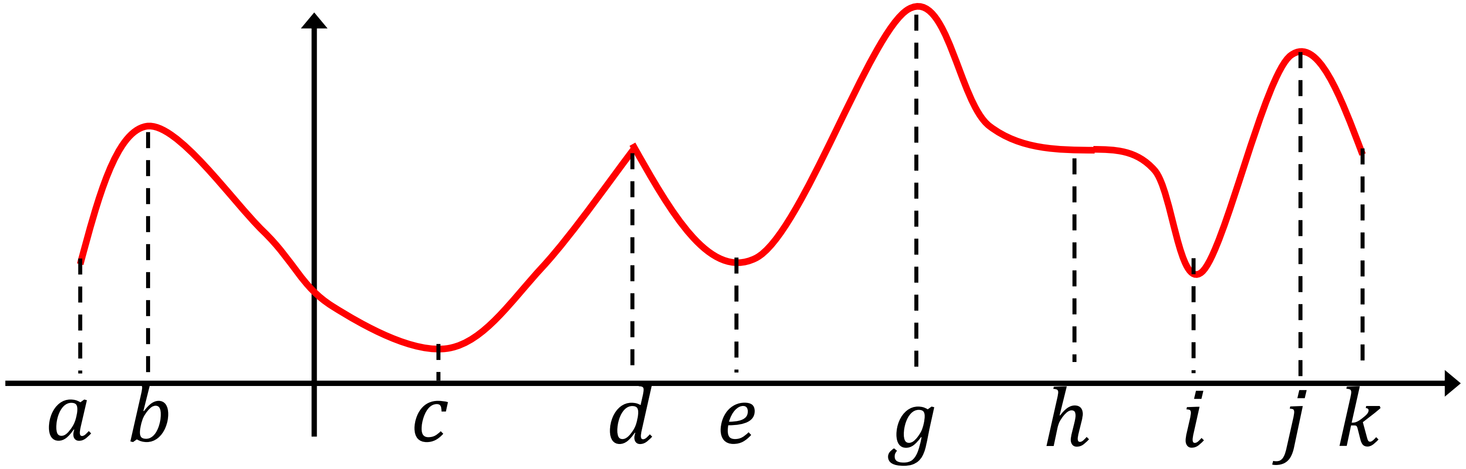
Como $\exists f'(c)$ debe cumplirse $f'_{-}(c) = f'_{+}(c) = 0$ por (1) y (2).

Entonces $f'(c) = 0$ y, por definición, c es punto crítico de f.

Ejemplo

$f(q)$ es extremo relativo $\Longrightarrow$ q es punto crítico de f

q es punto crítico de f $\not\Rightarrow$ $f(q)$ es extremo relativo



Puntos críticos	
b: $f'(b) = 0$	g: $f'(g) = 0$
c: $f'(c) = 0$	h: $f'(h) = 0$
d: $\nexists f'(d)$	i: $f'(i) = 0$
e: $f'(e) = 0$	j: $f'(j) = 0$

Extremos relativos	
$f(b)$	$f(g)$
$f(c)$	
$f(d)$	$f(i)$
$f(e)$	$f(j)$

Determinación de los extremos relativos o locales

Teorema: Condición suficiente de la derivada primera para la existencia de extremos locales

Sea f continua en $[a, b]$. $c \in (a, b)$ es punto crítico de f.

1. Si $f'(x) \geq 0 \; \forall \, x \in (a, c)$ y $f'(x) \leq 0 \; \forall \, x \in (c, b)$ entonces $f(c)$ es un máximo local de f en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) \leq 0 \; \forall \, x \in (a, c)$ y $f'(x) \geq 0 \; \forall \, x \in (c, b)$ entonces $f(c)$ es un mínimo local de f en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in (c, b)$ o si $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in (c, b)$ entonces $f(c)$ no es un extremo local de f en $[a, b]$.

Determinación de los extremos relativos o locales

Demostración

1. Si $f'(x) \geq 0 \; \forall \; x \; \in \; (a, c)$, entonces f es no decreciente sobre $[a, c]$.

   En consecuencia $f(x) \leq f(c) \; \forall \; x \; \in [a, c]$.

   Si $f'(x) \leq 0 \; \forall \; x \; \in \; (c, b)$, entonces f es no creciente sobre $[c, b]$.

   En consecuencia $f(c) \geq f(x) \; \forall \; x \; \in [c, b]$.

   Entonces $f(c)$ es un máximo local de f en $[a, b]$.

2. Semejante a 1.

Continúa

Determinación de los extremos relativos o locales

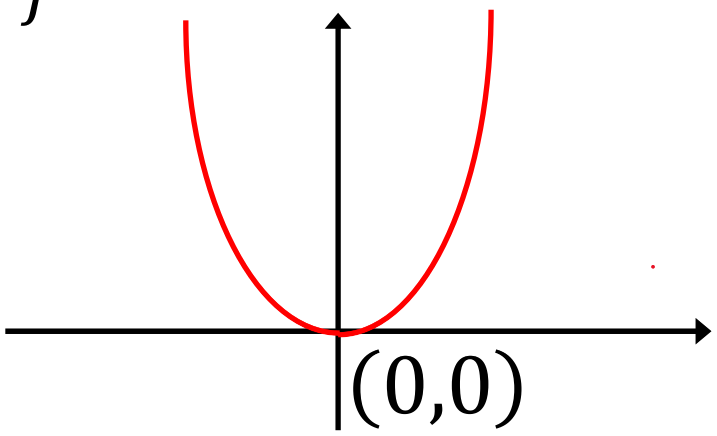
3. Si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, c)$, entonces f es creciente sobre $[a, c]$.
   En consecuencia $f(x) < f(c) \ \forall \ x \in [a, c]$.
   Si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (c, b)$, entonces f es creciente sobre $[c, b]$.
   En consecuencia $f(c) < f(x) \ \forall \ x \in [c, b]$.
   Entonces $f(c)$ no es extremo local de f en $[a, b]$.
   Si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, c)$, entonces f es decreciente sobre $[a, c]$.
   En consecuencia $f(x) > f(c) \ \forall \ x \in [a, c]$.
   Si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (c, b)$, entonces f es decreciente sobre $[c, b]$.
   En consecuencia $f(c) > f(x) \ \forall \ x \in [c, b]$.
   Entonces $f(c)$ no es extremo local de f en $[a, b]$.

Ejemplo Sea $f(x) = x^2$. Determine los extremos relativos de f.

En primer lugar determinamos el dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Puntos críticos: $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$-\infty$	0	∞
x	$-$		$+$
$2x$	$-$		$+$



Puesto que en $x = 0 \in D_f$ cambia el signo de la derivada primera, aplicando el teorema de la condición suficiente de la derivada primera, concluimos que $\boxed{f(0) = 0 \text{ es un mínimo relativo de } f.}$

Determinación de los extremos relativos o locales

Teorema

Condición suficiente de la derivada segunda para la existencia de extremos locales

Sea $f'(c) = 0$. $\exists\ f''(c)$.

1. Si $f''(c) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en c.
2. Si $f''(c) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en c.

Determinación de los extremos relativos o locales

Demostración

1. Sea $f''(c) = \lim\limits_{c} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \lim\limits_{c} \frac{f'(x)}{x-c} < 0$

   Existe un entorno $V_{\delta(c)} = (a, b)/$

   $x - c < 0\ \forall\, x\ \in [a, c]$ y $x - c > 0\ \ \forall x\ \in [c, b]$,

   por lo que debe cumplirse

   $f'(x) > 0\ \forall\, x\ \in (a, c)$ y $f'(x) < 0\ \forall\, x\ \in (c, b)$;

   lo que implica que

   f es creciente en $[a, c]$ y es decreciente en $[c, b]$.

   En definitiva, $f(c)$ es máximo local de f.

2. Semejante a **1.**

Ejemplo Sea $f(x) = x^2$.

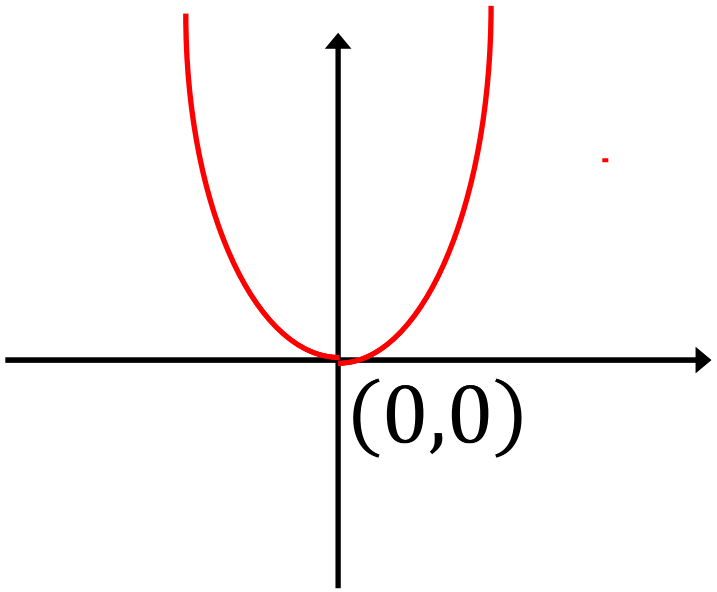
Determine los extremos relativos de f.

En primer lugar determinamos el dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Puntos críticos: $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = c = 0$ punto crítico de f.

$f''(0) = 2 > 0$

$\boxed{c = 0 \in D_f \text{ es un mínimo relativo de } f.}$



Generalización del criterio de la derivada 2º para derivadas de orden superior

Sea $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$; con $n \in \mathbb{N}$ y n impar,

entonces

1. Si $f^{(n+1)}(c) < 0 \implies f$ tiene un máximo relativo en c.
2. Si $f^{(n+1)}(c) > 0 \implies f$ tiene un mínimo relativo en c.

Ejemplo Sea $f(x) = x^4$.

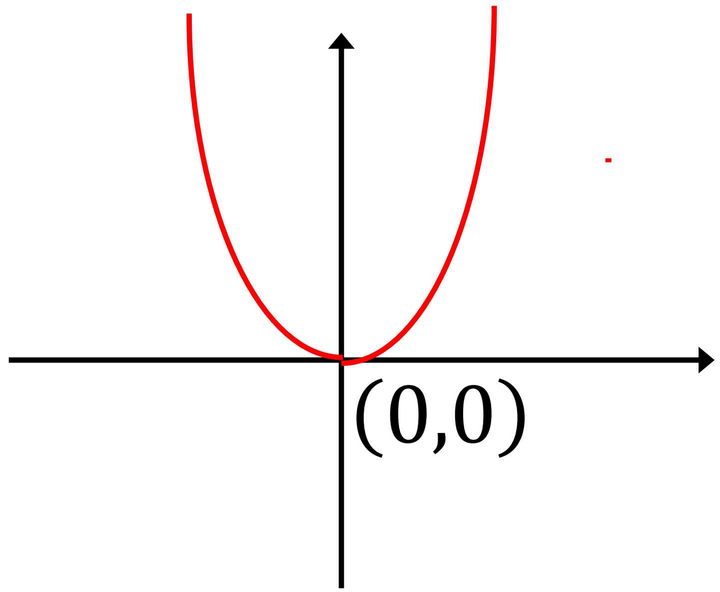
Determine los extremos relativos de f.

En primer lugar determinamos el dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Puntos críticos: $f'(x) = 4x^3 = 0 \Longrightarrow c = 0$ punto crítico de f.

$f''(0) = f'''(0) = 0; f^{(IV)}(0) = 24 > 0$

$\boxed{x = 0 \in D_f \text{ es un mínimo relativo de } f.}$

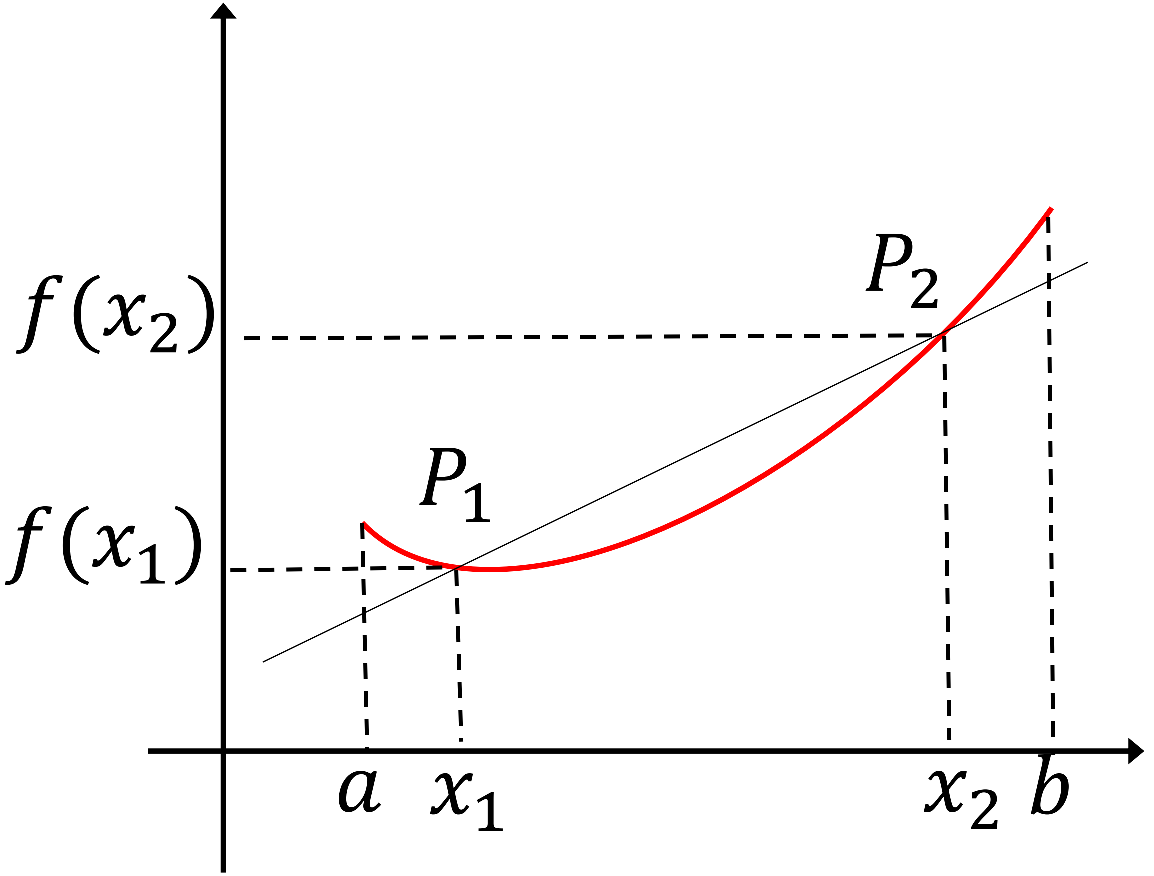


Definición

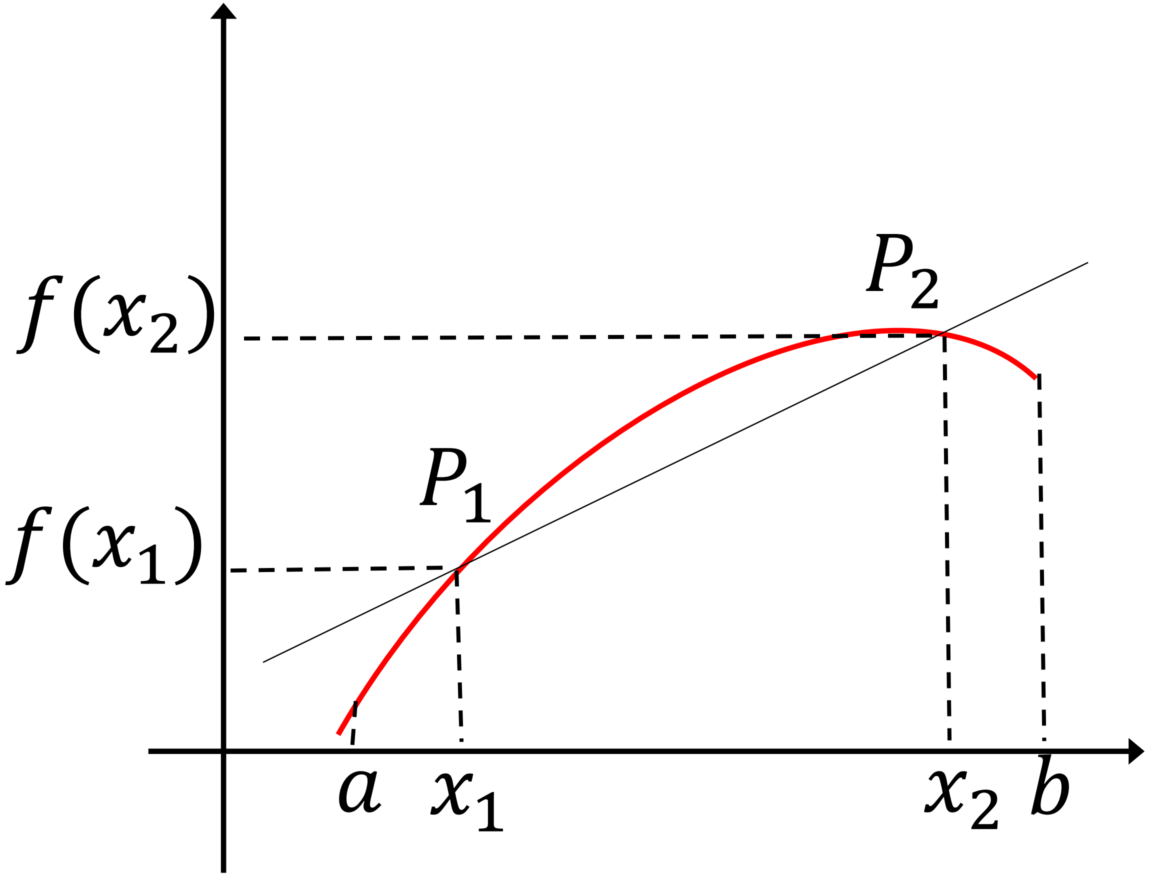
Sea f continua en $[a, b]$;

$x_1, x_2 \in [a, b]$; $\quad x_1 < x_2$.

***f* es convexa** (o cóncava positiva) en $[a, b]$ si la recta secante a la curva de f, que pasa por los puntos $P_1 = \left(x_1, f(x_1)\right)$ y $P_2 = (x_2, f(x_2))$, está arriba de la curva de f en $[x_1, x_2]$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$.



f es cóncava (o cóncava negativa) en $[a, b]$ si la recta secante a la curva de f, que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, f(x_1))$ y $P_2 = (x_2, f(x_2))$, está abajo de la curva de f en $[x_1, x_2]$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$.



Concavidad y convexidad

Teorema

1. Si $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$, entonces f es convexa en (a, b).

2. Si $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$, entonces f es cóncava en (a, b).

Definición: Punto de inflexión

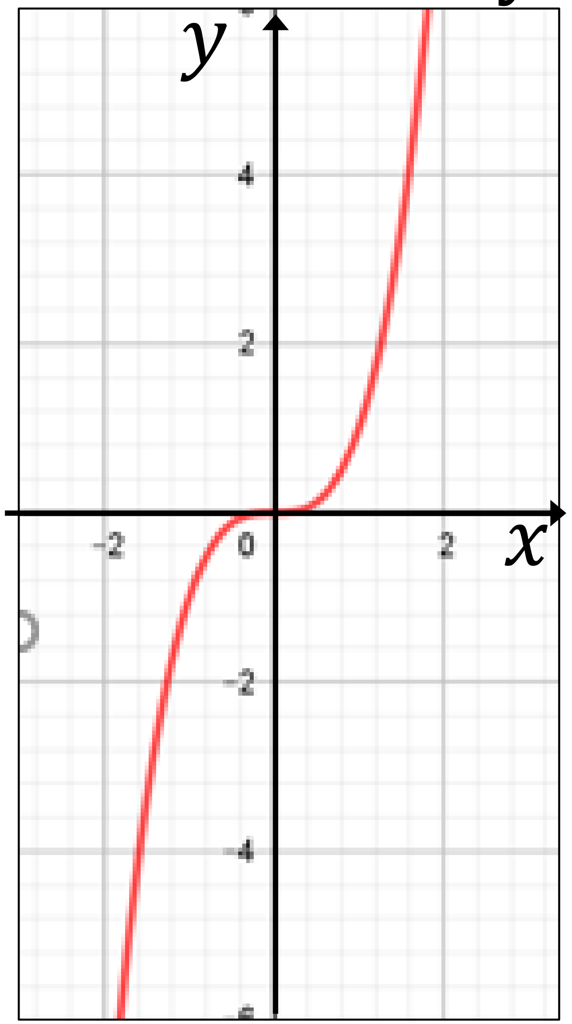
Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua. $c \in (a,b)$. f es derivable en c (f no presenta un punto anguloso en $x = c$).

Si $f''(x) > 0\ \forall\, x \in (a,c)$ y $f''(x) < 0\ \forall\, x \in (c,b)$ o

Si $f''(x) < 0\ \forall\, x \in (a,c)$ y $f''(x) > 0\ \forall\, x \in (c,b)$

entonces $\mathrm{P} = (c, f(c))$ es un punto de inflexión de f en $[a,b]$.

Ejemplo Sea $f(x) = x^3$. Determine los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.



$D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2$, f es derivable en $\mathbb{R}$.

$f''(x) = 6x,\ 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

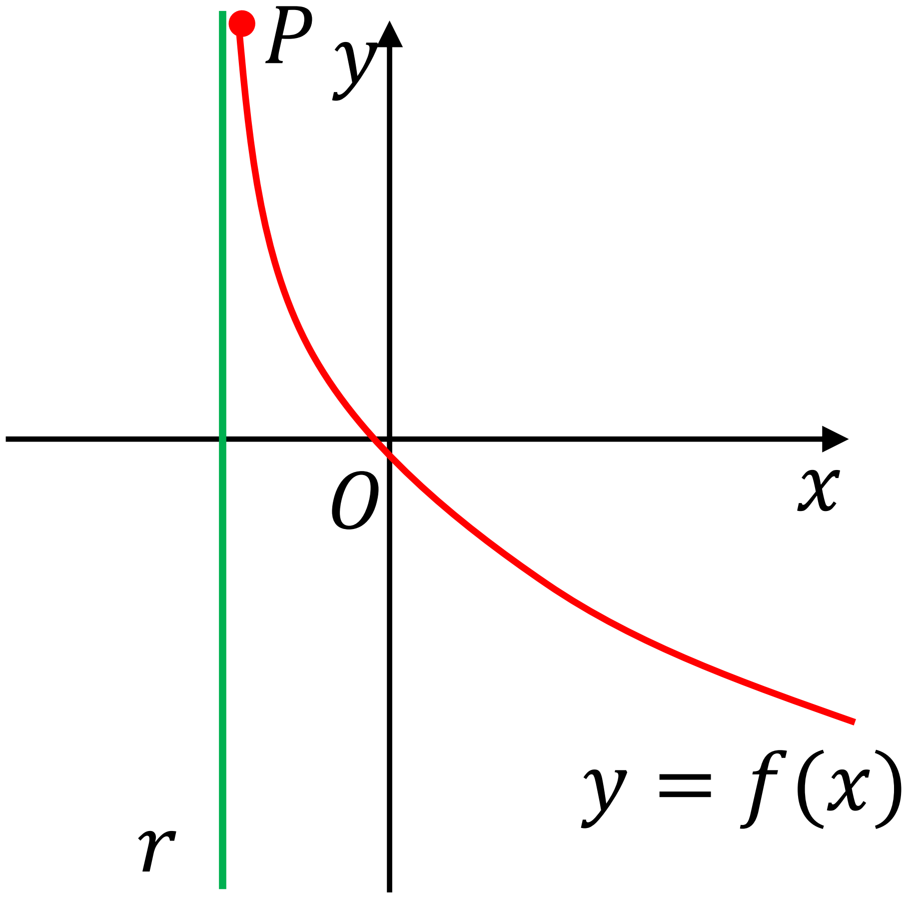
Signo de f'' en cada intervalo:

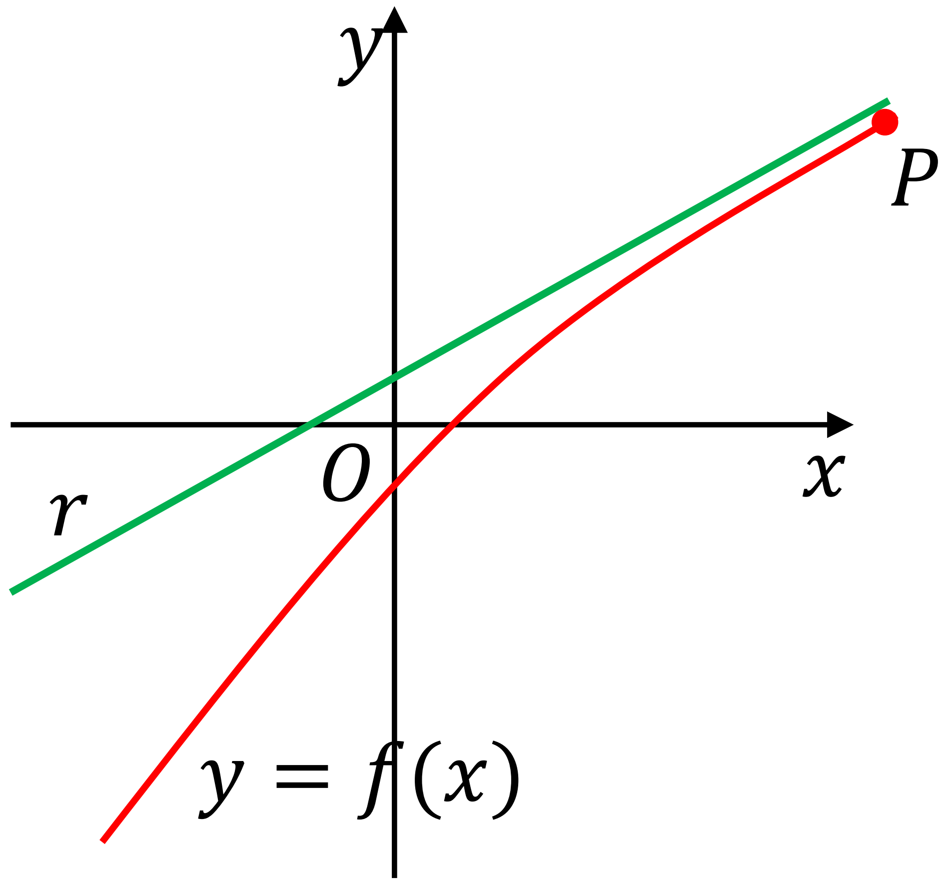
	$-\infty$	0	∞
x	$-$		$+$
$6x$	$-$		$+$
	Cóncava		Convexa

$P = (0,0)$ es punto de inflexión

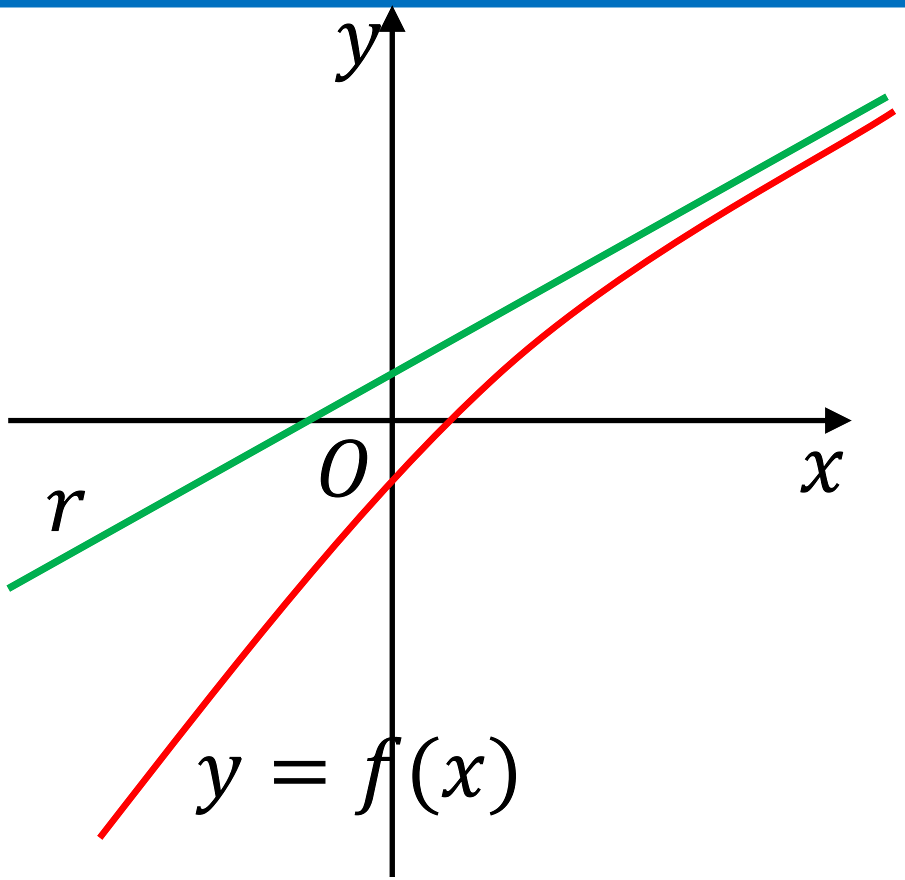
Asíntotas

Dada una función f, una asíntota de f es una recta r tal que, a medida que un punto genérico P de la curva de f se aleja del origen del sistema de coordenadas, la distancia de r a P tiende a 0.





Asíntotas oblicuas



$r: y = ax + b$ asíntota oblicua

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

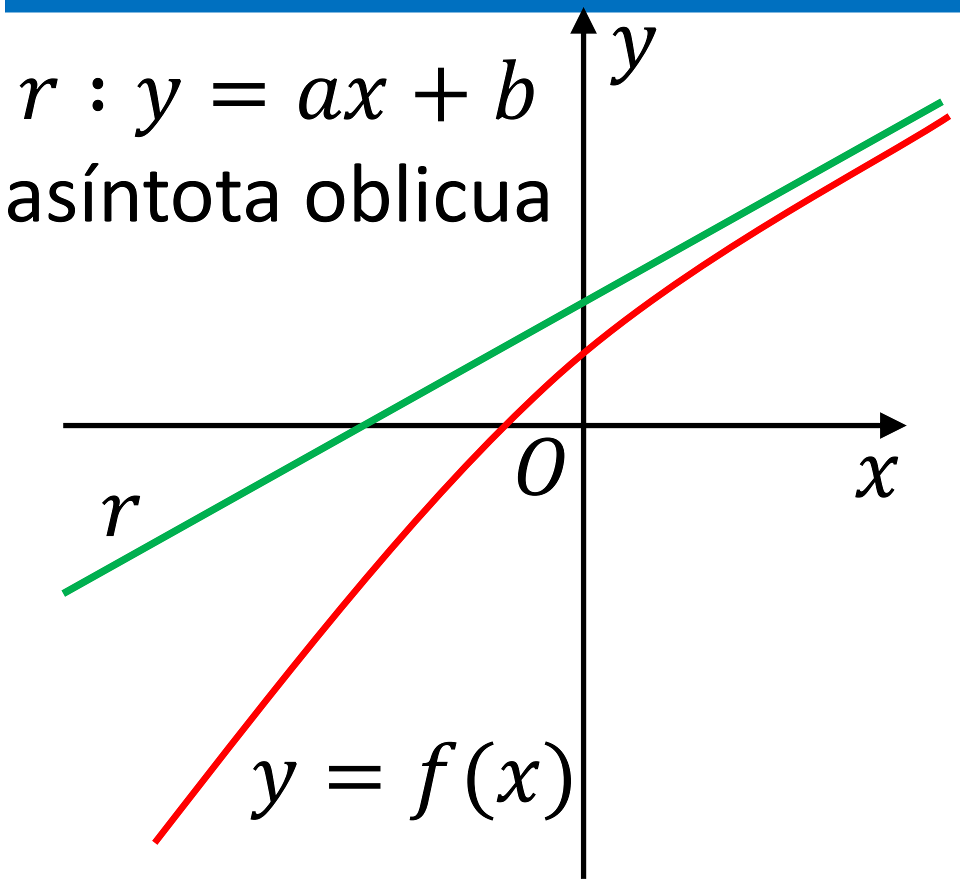
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$$

Notas:

1) Si alguno de los límites no existe, la función no tiene asíntota oblicua.

2) Si $a = 0$ y existe b, la asíntota es horizontal, $r: y = b$.

Asíntotas oblicuas



<u>Deducción de las fórmulas de a y de b</u>

Por definición, r es asíntota de f si la diferencia entre f y r tiende a 0 cuando x tiende a + o a – infinito.

$$\lim_{\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Despejamos a:

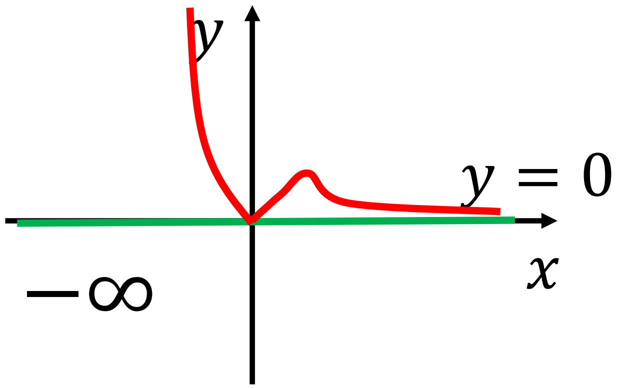
$$a = \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} = \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - 0 = \boxed{\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

Conocido a, despejamos b: $\boxed{b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax}$

Ejemplo

$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Determine las asíntotas oblicuas de f.

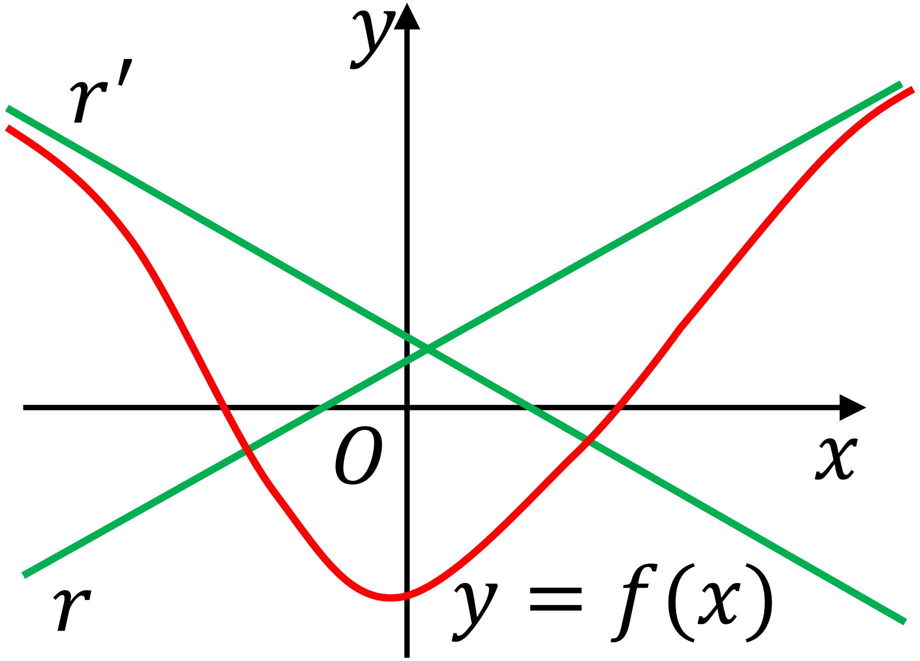
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{xe^x} = 0 \quad ; \quad \underbrace{a = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{xe^x} = -\infty}_{\text{no tiene asíntota oblicua para } x \to -\infty}$$



$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Asíntota cuando x tiende a ∞: $\boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas



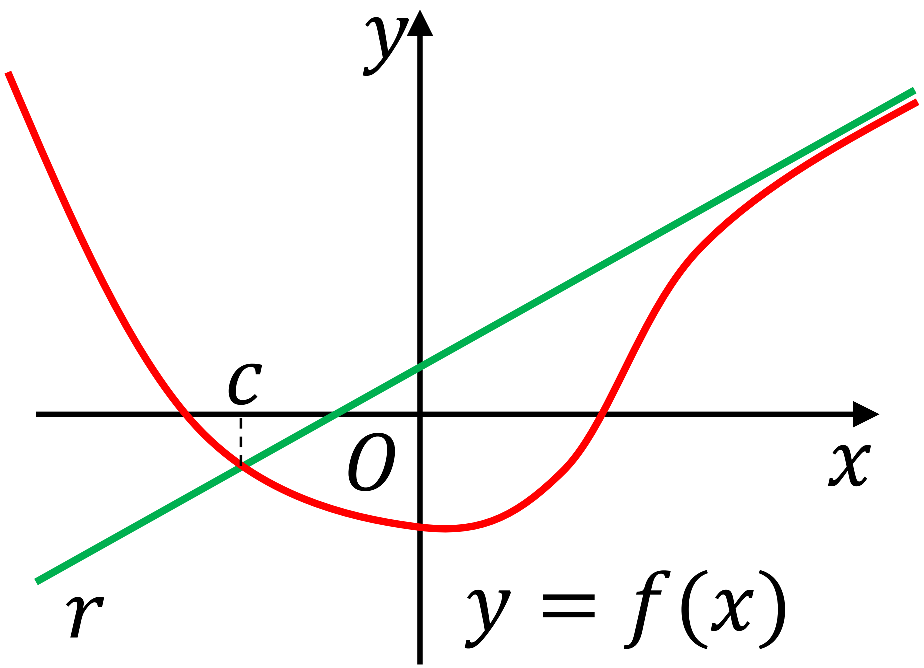
Una función puede tener:

- Dos asíntotas oblicuas distintas, una para x que tiende a ∞ y otra para x que tiende a $-\infty$.
- Una única asíntota solo para x que tiende a ∞ o a $-\infty$.
- Una única asíntota para x que tiende a ∞ y a $-\infty$.
- Ninguna asíntota.

$r : y = ax + b$ asíntota oblicua para x que tiende a ∞.

$r\,' : y = a'x + b'$ asíntota oblicua para x que tiende a $-\infty$.

Asíntotas oblicuas

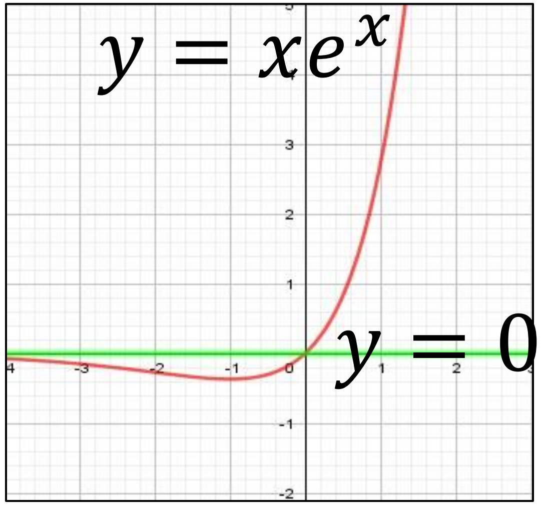


La curva de una función que tiene asíntota, se va acercando a la asíntota sin llegar a cortarla cuando x tiende a ∞, o a $-\infty$. Pero la curva de la función sí puede cortar a la asíntota en un valor $x = c$ finito.

Ejemplo Sea $f(x) = xe^x$. Determine las asíntotas oblicuas de f.

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x}{x} = \infty$, f no tiene asíntotas cuando x tiende a ∞.

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

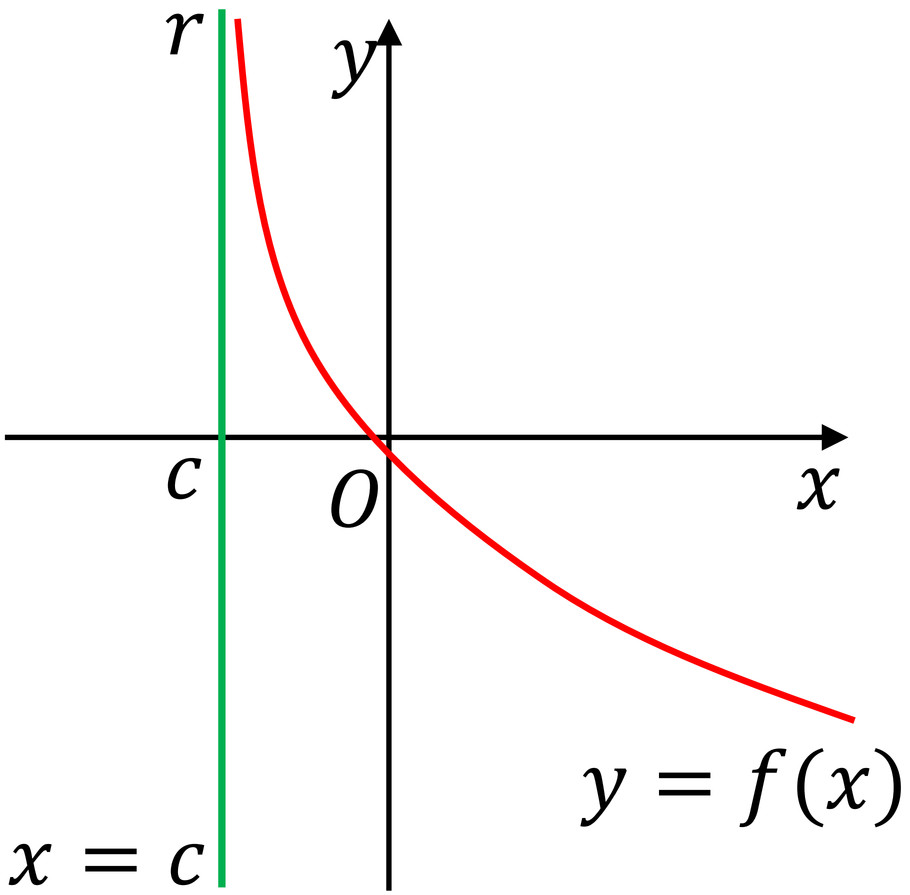


$$b = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to\infty} -xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

Asíntota cuando x tiende a $-\infty$: $\boxed{y = 0}$

Nota: la asíntota corta a la curva en el punto $(0,0)$.

Asíntotas verticales

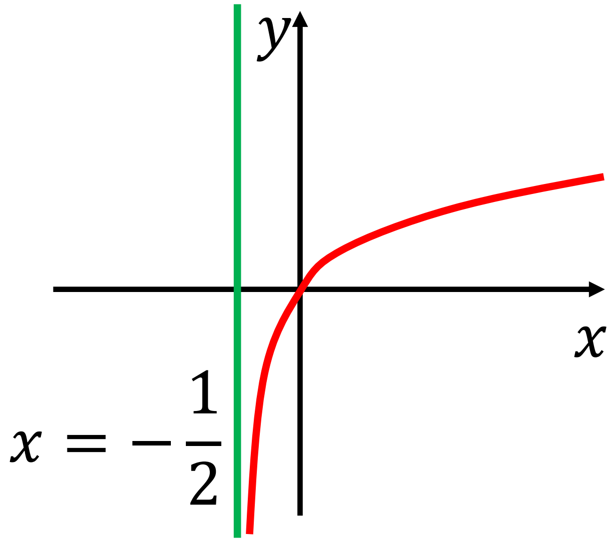


$r : x = c$ asíntota vertical

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty}$$

Ejemplo Caso 1) Se anula el denominador

$$y = \frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$$

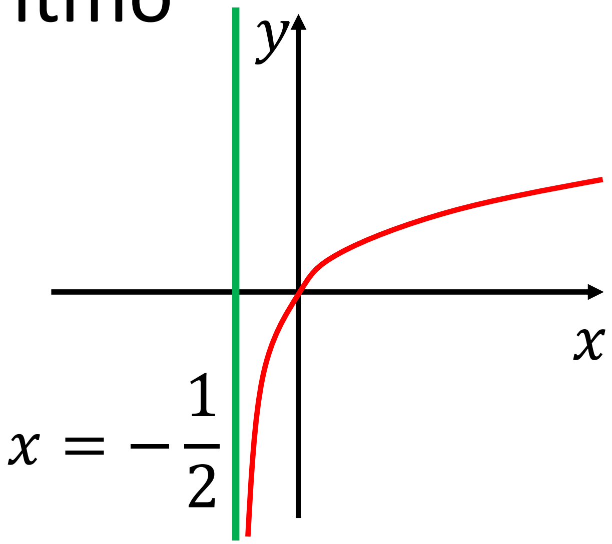


El denominador se anula si $2x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{2x}{\sqrt{2x+1}} = -\infty \implies \boxed{x = -\frac{1}{2}} \text{ Asíntota vertical}$$

Ejemplo

Caso 2) Se anula el argumento del logaritmo



$$y = \ln(2x + 1)$$

El argumento se anula si $\quad 2x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^{+}} \ln(2x + 1) = -\infty \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}} \quad \text{Asíntota vertical}$$

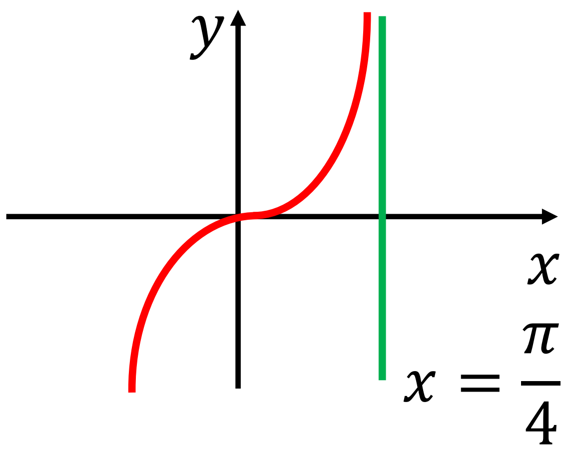
Ejemplo

Caso 3) Función trigonométrica que tiende a $\pm\infty$.

$$y = \mathrm{tg}(2x)$$

La tangente tiende a $\pm\infty$ cuando el ángulo tiende a $\frac{\pi}{2}$ por izquierda y por derecha, respectivamente:

$$2x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



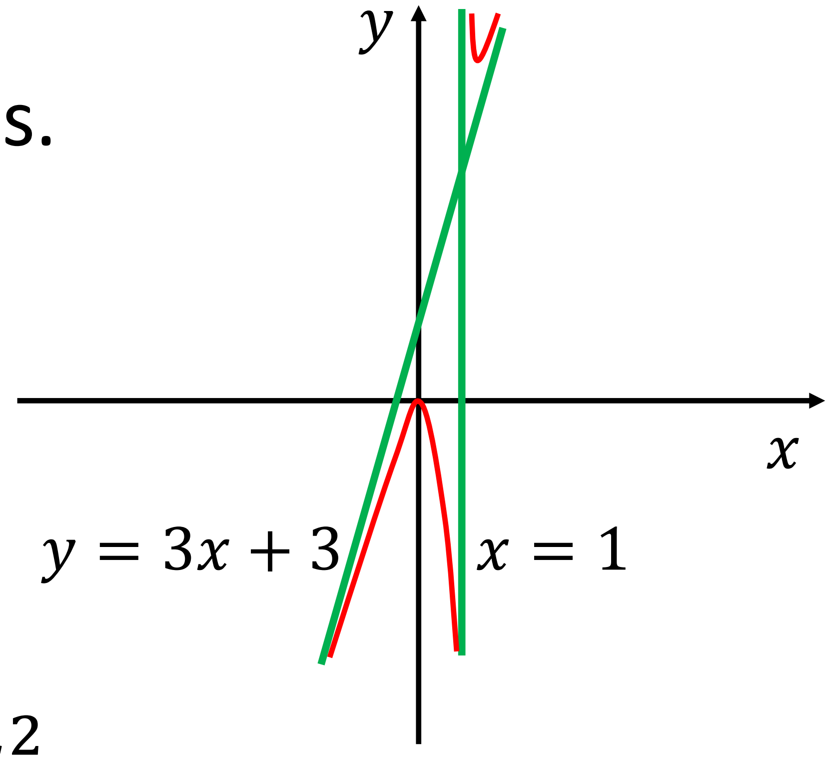
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \mathrm{tg}(2x) = \infty \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$ Asíntota vertical

Ejemplo

$f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$. Obtenga las asíntotas.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2}{x-1} = -\infty \quad ; \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2}{x-1} = \infty$$

Asíntota vertical: $\boxed{x = 1}$



$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x(x-1)} = 3 \quad ; \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x-1} - 3x = 3$$

Asíntota oblicua cuando x tiende a ∞ y a $-\infty$: $\boxed{y = 3x + 3}$

Estudio completo de una función

1. Dominio. Puntos de discontinuidad, clasificación.
2. Asíntotas verticales.
3. Paridad. Periodicidad.
4. Raíces.
5. Signos.
6. Puntos críticos. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
7. Intervalos de concavidad y de convexidad. Puntos de inflexión.
8. Asíntotas oblicuas.
9. Gráfico.
10. Conjunto imagen. Supremo, Ínfimo. Extremos absolutos.

Ejemplo 1. Dominio

a. Sea $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+x}$ Descartamos de $\mathbb{R}$ las raíces del denominador.

Raíces del denominador: $x = 0$ y $x = -\frac{1}{2}$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$

b. Sea $f(x) = \ln(2x - 1)$

El argumento debe ser mayor que 0.

$2x - 1 > 0 \Longrightarrow x > \frac{1}{2}$. $D_f = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

c. Sea $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ El radicando de una raíz con índice par debe ser mayor o igual a 0.

$2x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. $D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Ejemplo 1. Puntos de discontinuidad - Clasificación

a. Sea $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+x}$

Puntos de discont.: $x = 0$ y $x = -\frac{1}{2}$ (Raíces del denominador)

$\lim_{0} \frac{3x^2}{2x^2+x} = \lim_{0} \frac{3x}{2x+1} = 0$ Discontinuidad evitable en $x = 0$.

$\lim_{-\frac{1}{2}} \frac{3x^2}{2x^2+x} = \pm\infty$ Discontinuidad esencial en $x = -\frac{1}{2}$.

b. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ Puntos donde cambia la regla de asignación: $x = 0$ y $x = 1$.

f es continua en $x = 0$ pues $\lim_{0} f(x) = f(0) = 0$

Discontinuidad esencial en $x = 1$ pues no existe el límite $\lim_{1} f(x)$

Ejemplo

3. Paridad

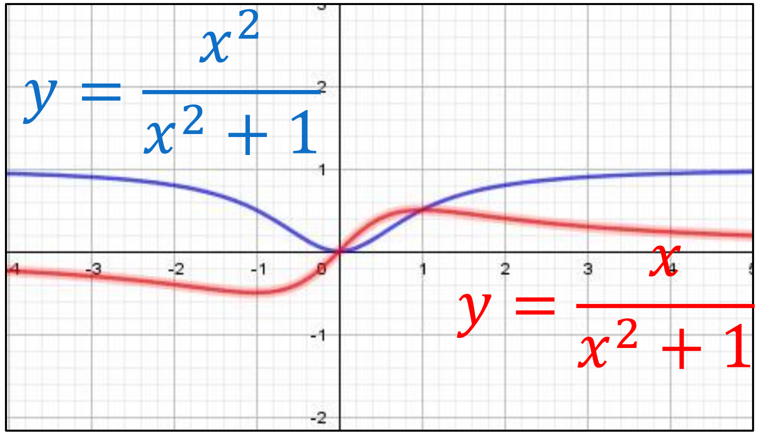
Si $f(x) = f(-x)$ la función es par (simétrica respecto al eje y).

Si $f(x) = -f(-x)$ la función es impar (simétrica respecto al origen).

Si $f(x) \neq \begin{cases} f(-x) \\ -f(-x) \end{cases}$ la función no tiene paridad (no tiene simetría).

a. Sea $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x) \Longrightarrow f \text{ es par}$$



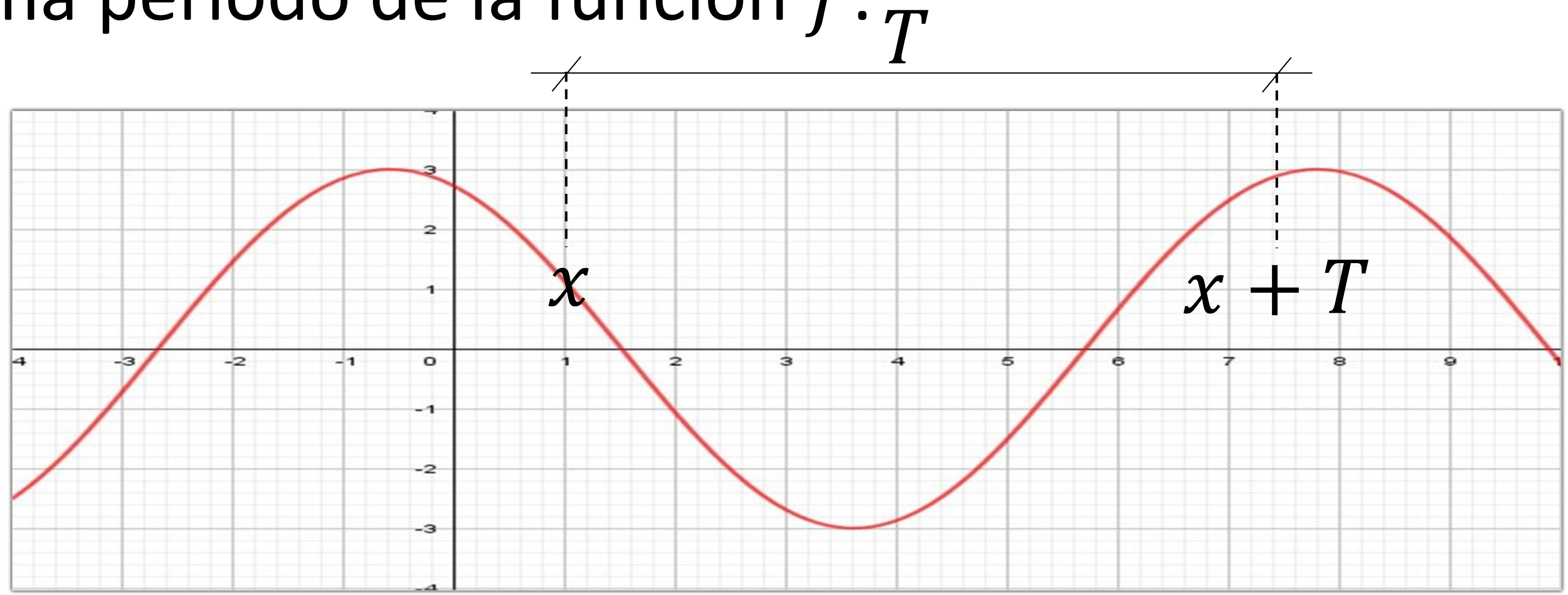
b. Sea $y = \frac{x}{x^2+1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x) \Longrightarrow f \text{ es impar}$$

Ejemplo 3. Periodicidad

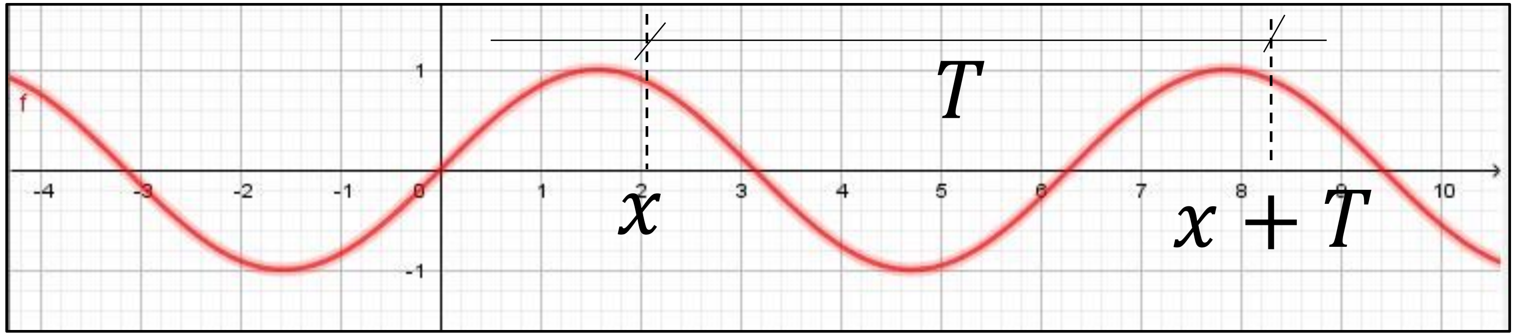
Sean $T \in \mathbb{R}_{>0}; k \in \mathbb{Z}$.

Si $f(x) = f(x + kT)\ \ \forall x \in D_f$ se dice que f es periódica; y si T es el menor valor para el que se cumple la expresión anterior, entonces T se llama período de la función f.



Ejemplo 3. Periodicidad

$$f(x) = sen\,(x) = sen\,(x + 2\pi k); \quad T = 2\pi$$

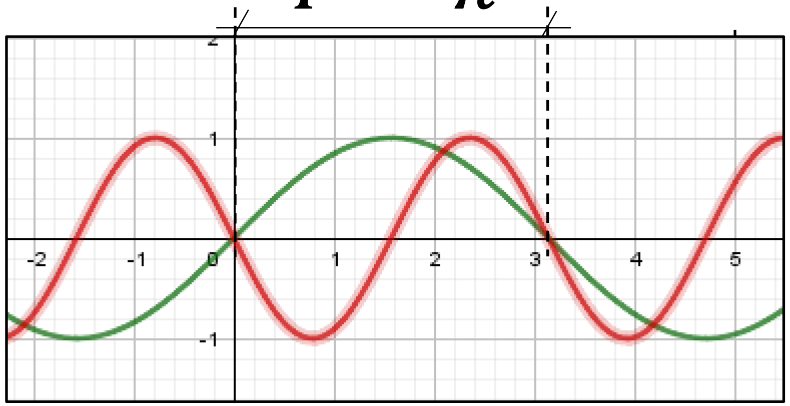


$y = sen\,(x)$

a. Halle el período de $f(x) = sen\,(2x - \pi)$

$2x = 2\pi; \qquad x = T = \pi;$

$T = \pi$

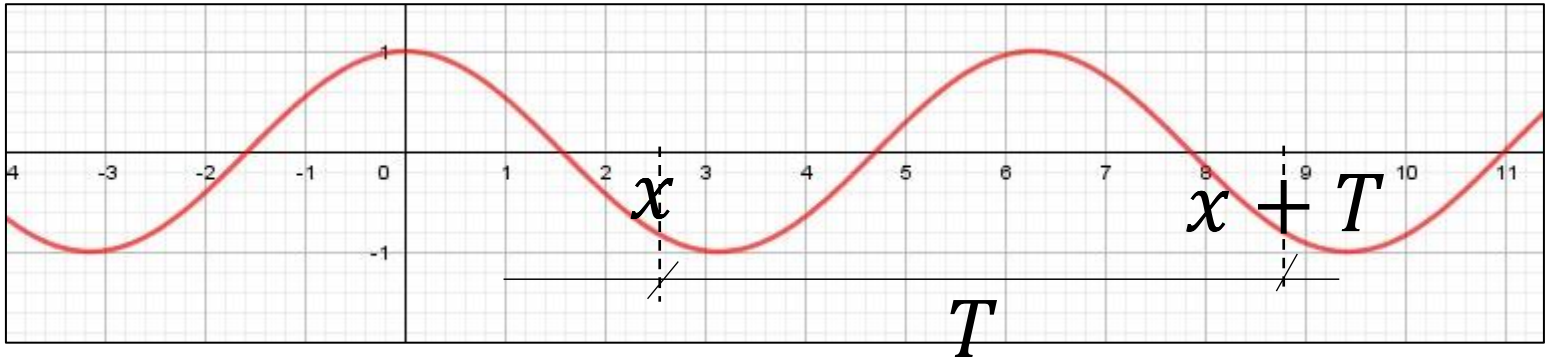


$y = sen\,(2x - \pi)$

$y = sen\,(x)$

Ejemplo 3. Periodicidad

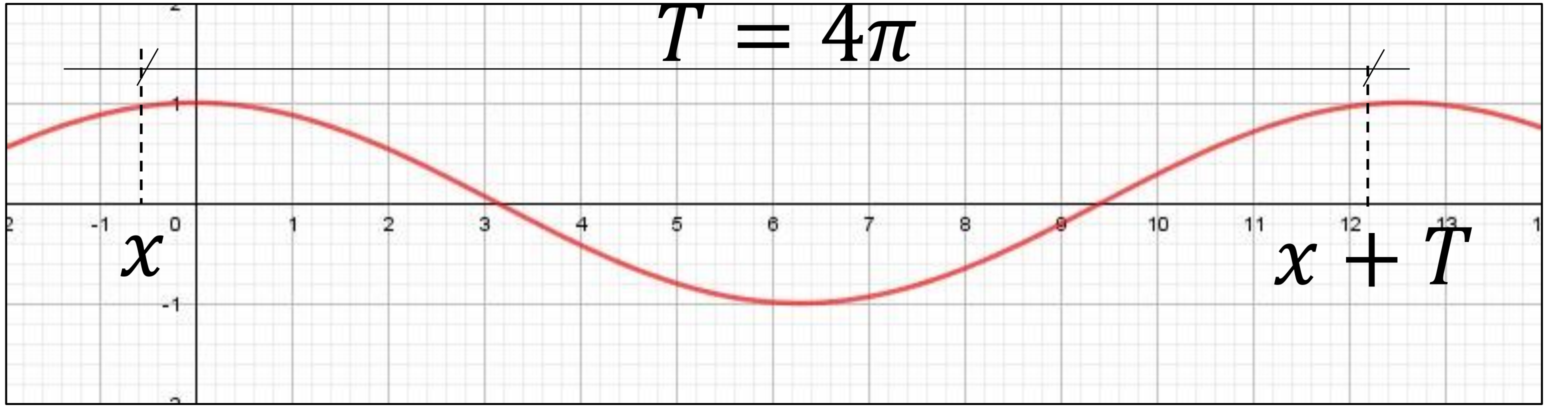
$$f(x) = cos\,(x) = cos\,(x + 2\pi k); \quad T = 2\pi$$



$$y = cos\,(x)$$

b. Halle el período de $f(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$2\pi = \frac{x}{2}$; $\qquad x = T = 4\pi$

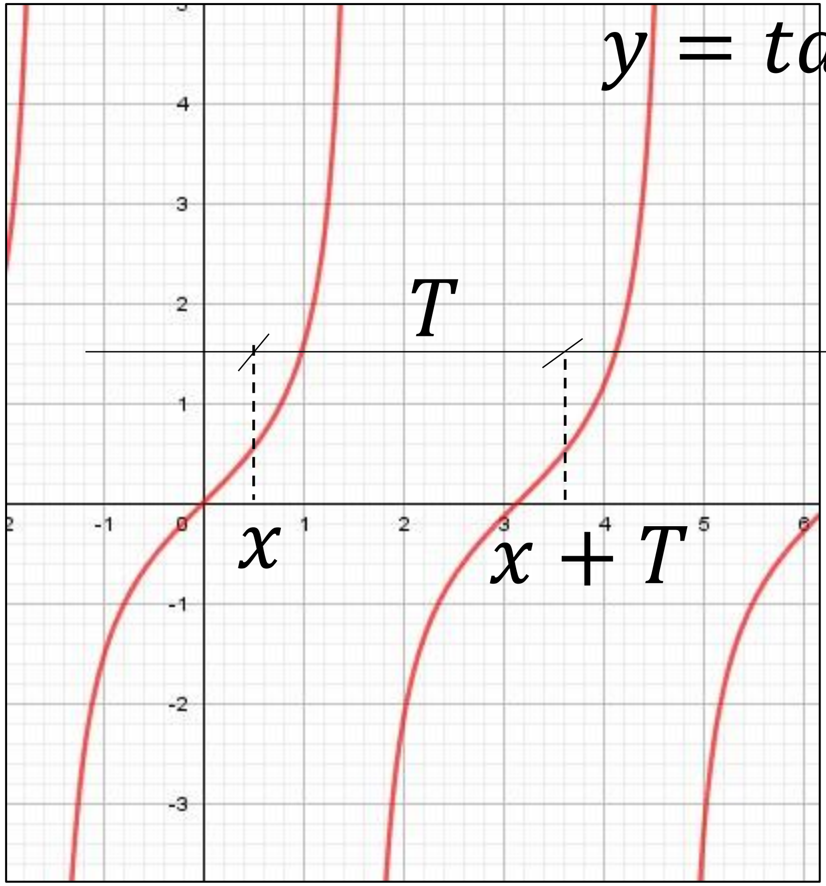


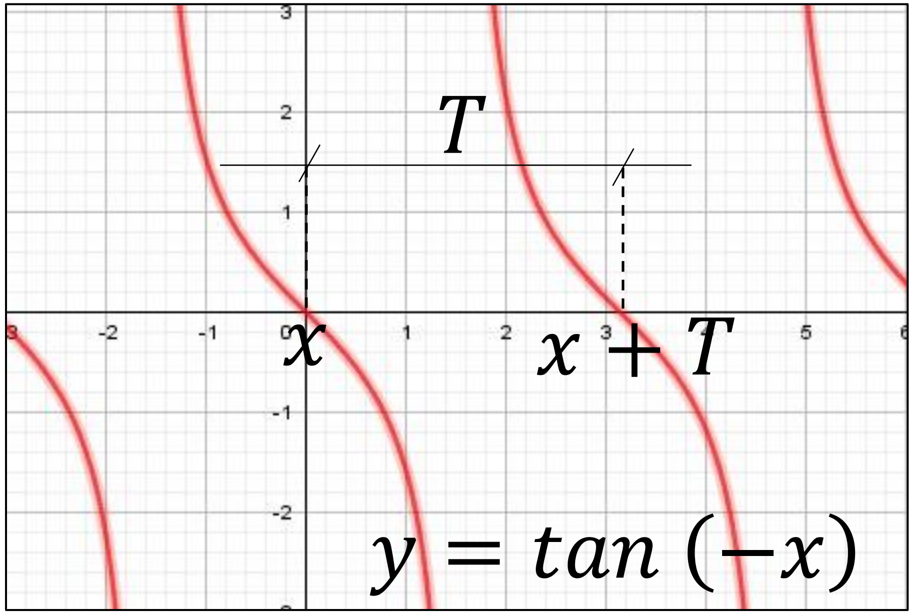
$$y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ejemplo

3. Periodicidad

$$f(x) = tan\,(x) = tan\,(x + k\pi);\quad T = \pi$$





c. Halle el período de $f(x) = tan\,(-x)$

$\pi = -x;\qquad x = T = |-\pi| = \pi$

Ejemplo 3. Caso general:

Sea $f(x) = sen\ (Ax + B)$;

Período: $T = \frac{2\pi}{A}$

Corrimiento de fase (desplazamiento del punto $(0,0)$ con respecto a la función $f(x) = sen\ (Ax)$) :

$$(Ax + B) = A\left(x + \frac{B}{A}\right)$$

$$x = -\frac{B}{A}$$