LA INTEGRAL DEFINIDA

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

Sea $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$; acotada y positiva

Región R:

$R = \{(x, y)/a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$

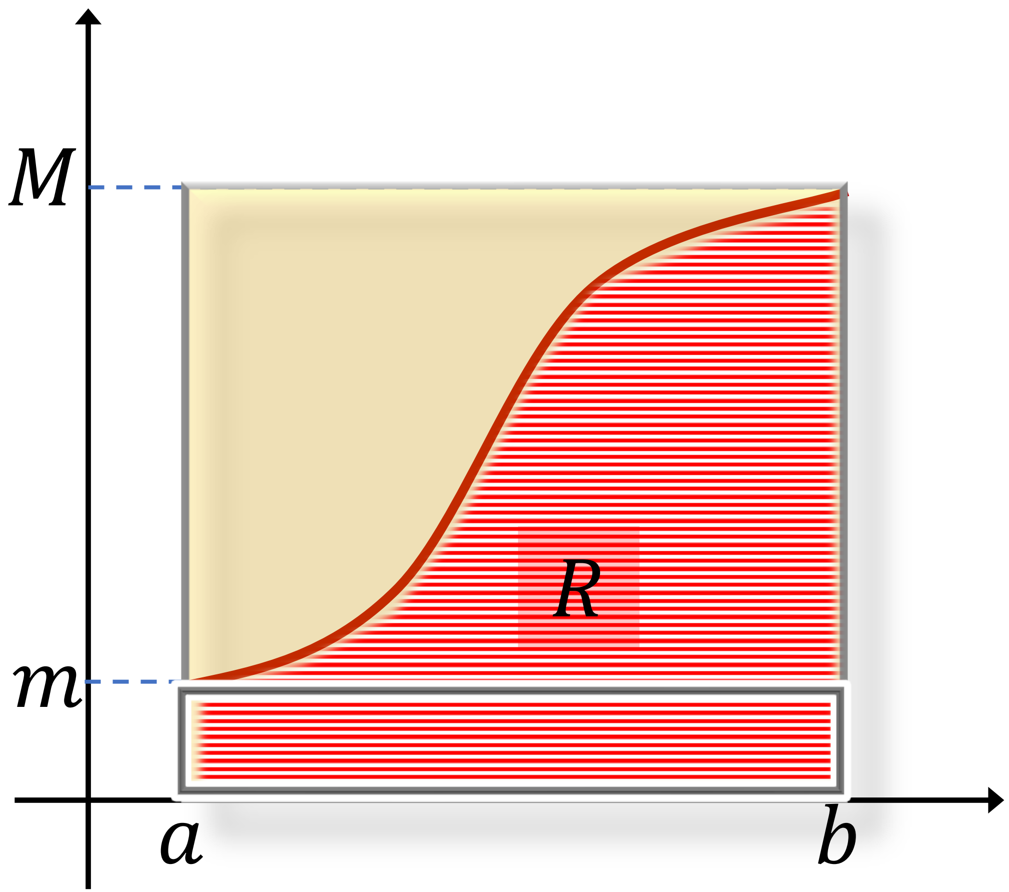
$A(R)$: Área de la región R

$M = sup\{f(x)/x \in [a, b]\}$

$m = inf\{f(x)/x \in [a, b]\}$

Una aproximación a $A(R)$:

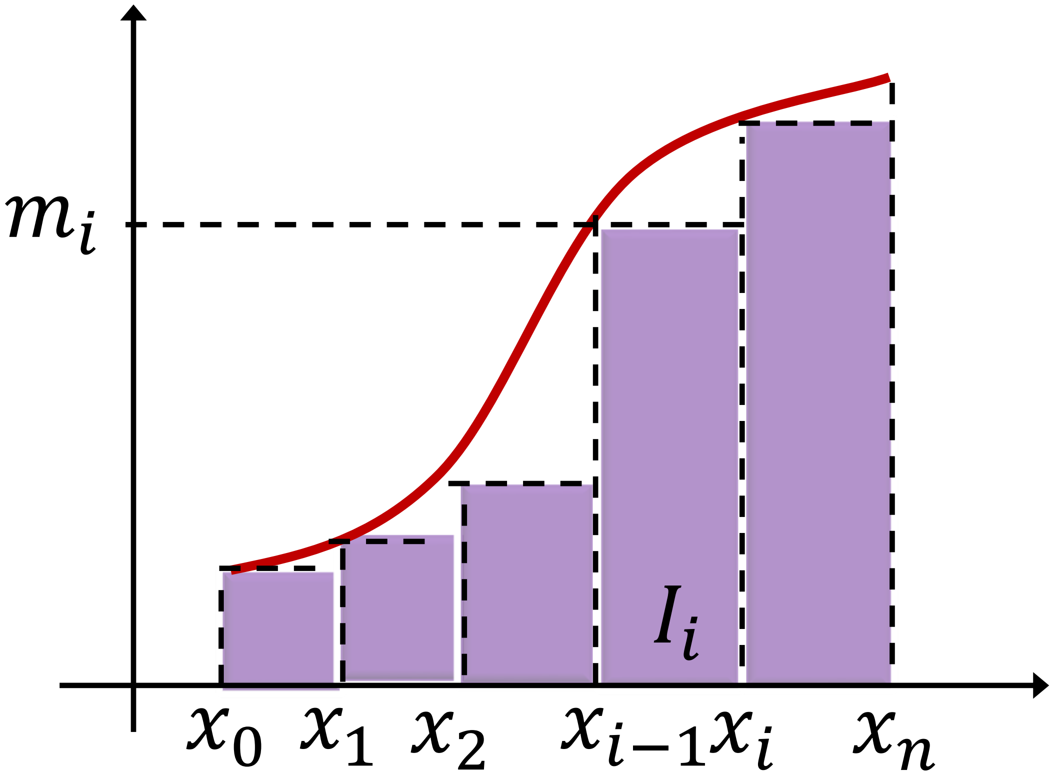
$m(b - a) \leq A(R) \leq M(b - a)$

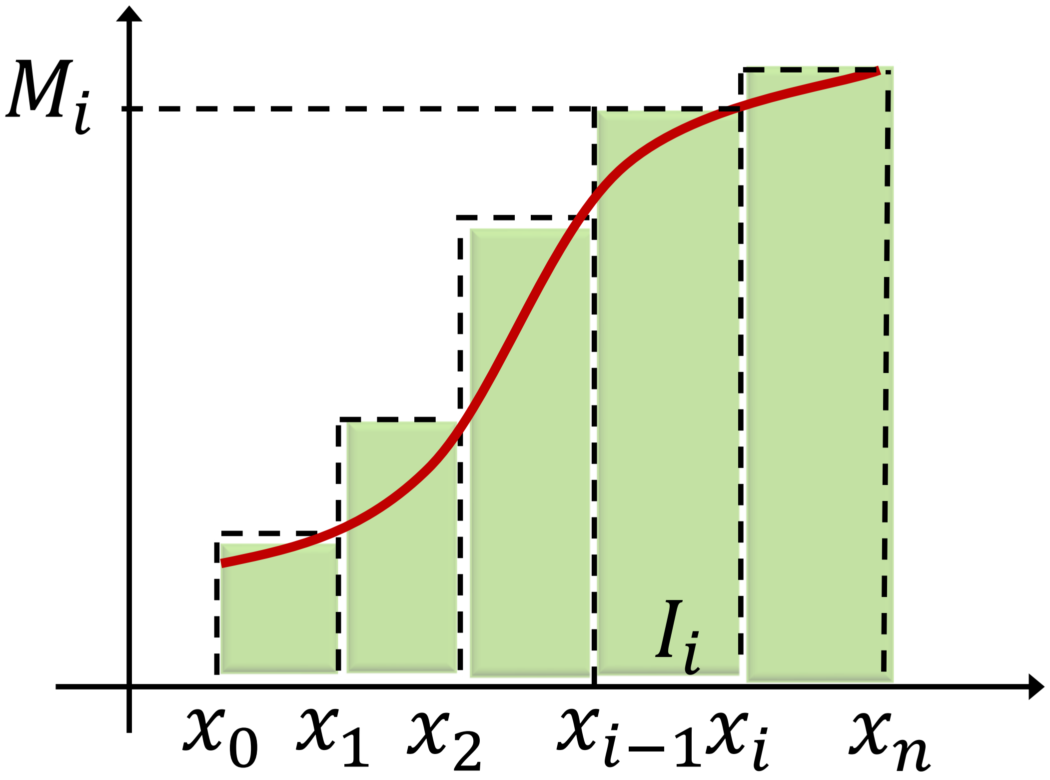


Para una mejor aproximación:

Partición de $[a, b]$:

$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b / x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$





La Integral Definida

$\mathcal{P} = \{P/P \text{ partición de } [a,b]\}$ Conjunto de particiones de $[a,b]$

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$ Subintervalo i

$M_i = sup\{f(x)/x \in I_i\}$ Supremo de f en el subintervalo i

$m_i = inf\{f(x)/x \in I_i\}$ Ínfimo de f en el subintervalo i

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ Longitud del subintervalo i

La Integral Definida

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$$

Suma Inferior: Suma de las áreas de los rectángulos bajo la curva de f correspondiente a la partición P.

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$$

Suma Superior: Suma de las áreas de los rectángulos sobre la curva de f correspondiente a la partición P.

La Integral Definida

$$m(b-a) \leq \mathrm{L}(f, P) \leq A(R) \leq \mathrm{U}(f, P) \leq M(b-a)$$

Los conjuntos

$\{\mathrm{L}(f, P) / P \in \mathcal{P} \}$ Conjunto de Sumas Inferiores

$\{\mathrm{U}(f, P) / P \in \mathcal{P} \}$ Conjunto de Sumas Superiores

son acotados, por tanto, tienen supremo e ínfimo.

$I_a^b(f) = sup\{\mathrm{L}(f, P) / P \in \mathcal{P} \}$ Integral Inferior de f en $[a, b]$

$S_a^b(f) = inf\{\mathrm{U}(f, P) / P \in \mathcal{P} \}$ Integral Superior de f en $[a, b]$

Función integrable en un intervalo $[a, b]$

Integral definida de una función f en un intervalo $[a, b]$

Definición:

f es integrable en $[a, b]$ si $I_a^b(f) = S_a^b(f)$.

El número $I_a^b(f) = S_a^b(f)$ se denota $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (integral definida de f en $[a, b]$).

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema

Condición suficiente para la existencia de $\int_a^b f(x)dx$

Si $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Observación:

Si $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, no implica que f es continua en $[a, b]$.

Ejemplo

Sea $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

$\forall P \in \mathrm{P}$: $m_i = 0,\ M_i = 1$ y

$$\mathrm{L}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = 0.1 = 0 \Longrightarrow I_a^b(f) = sup\{\mathrm{L}(f,P)/P \in \mathrm{P}\} = 0$$

$$\mathrm{U}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = 1.1 = 1 \Longrightarrow S_a^b(f) = inf\{\mathrm{U}(f,P)/P \in \mathrm{P}\} = 1$$

$I_a^b(f) \neq S_a^b(f) \Longrightarrow f$ no es integrable en $[0,1]$

Propiedades Básicas de la Integral Definida

Sean f, g integrables en $[a, b]$. $c \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^b c\, dx = c(b-a)$

2. $f+g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b [f+g]\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx$.

3. Si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f\, dx \leq \int_a^b g\, dx$.

4. $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

5. $\int_a^b f\, dx = -\int_b^a f\, dx$

6. $cf(x)$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b cf\, dx = c\int_a^b f\, dx$

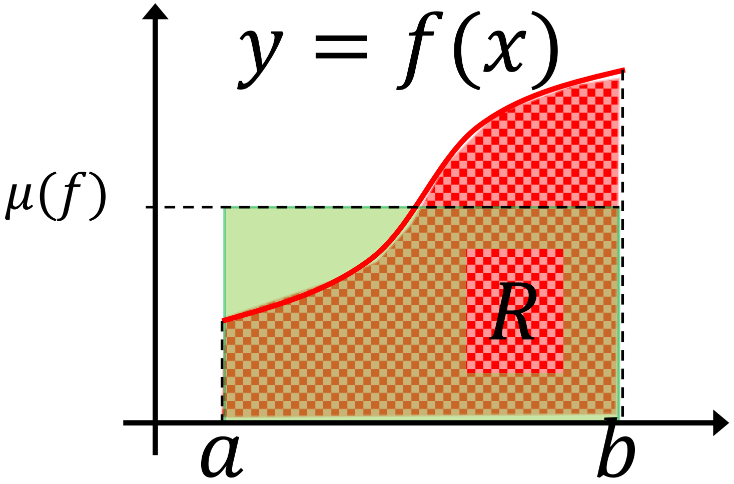
Media de una función en un intervalo

Definición: Sea f integrable en $[a,b]$.

$$\mu(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Media de f en $[a,b]$

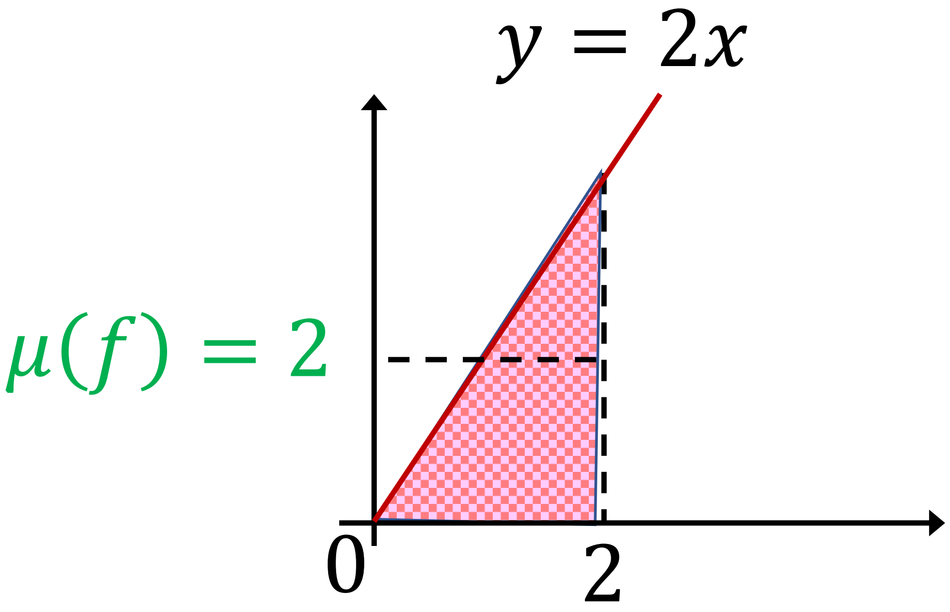
Interpretación geométrica:



$\mu(f)$ es la altura de un rectángulo de área $A(R)$ y base $(b-a)$

$$\underbrace{\mu(f)(b-a)}_{\text{Área de un rectángulo de altura } \mu(f) \text{ y base } (b-a)}=\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{A(R)}$$

Ejemplo



Sea $f: [0,2] \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = 2x$

Halle la media (o el valor medio)

de f en $[0,2]$.

f es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, es

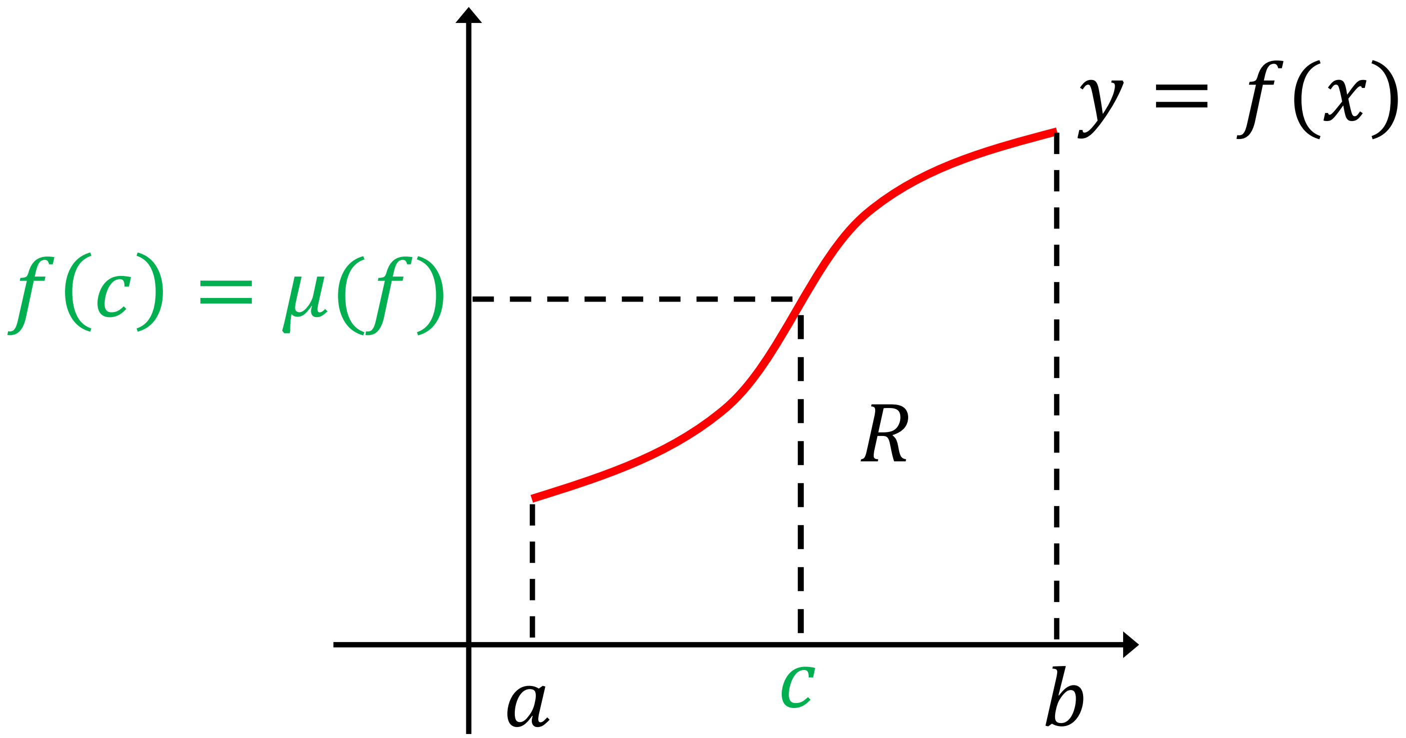
integrable en $\mathbb{R}$.

Más adelante veremos que $\displaystyle\int_0^2 2x\,dx = 4$

$$\mu(f) = \frac{1}{2-0}\int_0^2 2x\,dx = \frac{1}{2}.4 = \boxed{2}$$

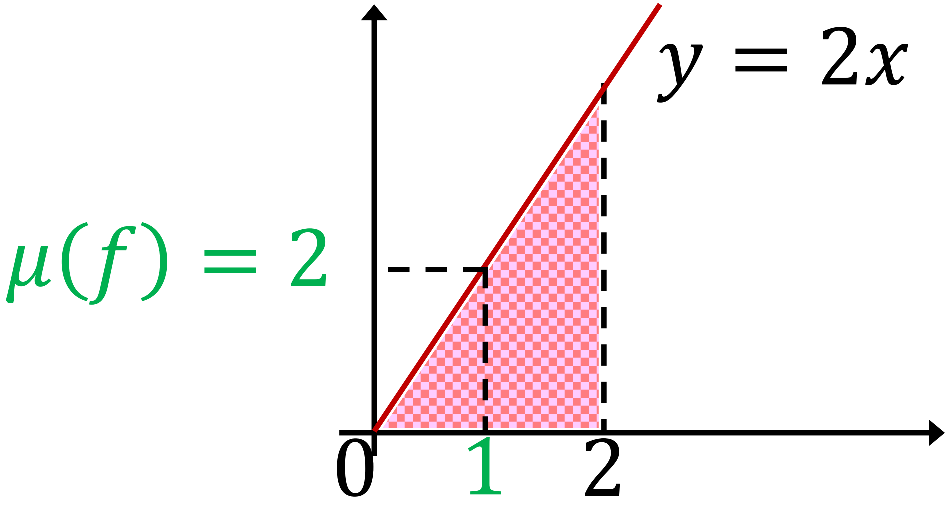
Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

Sea $f\colon\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; continua. Entonces $\exists\ c \in (a,b) / f(c) = \mu(f)$



Ejemplo

Aplique el teorema del valor medio a la función



$f(x) = 2x$ en el intervalo $[0,2]$.

f es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, es integrable en $\mathbb{R}$.

Hemos visto que $\mu(f) = 2$

$$2c = 2 \Longrightarrow \boxed{c = 1; \quad 1 \in (0,2)}$$

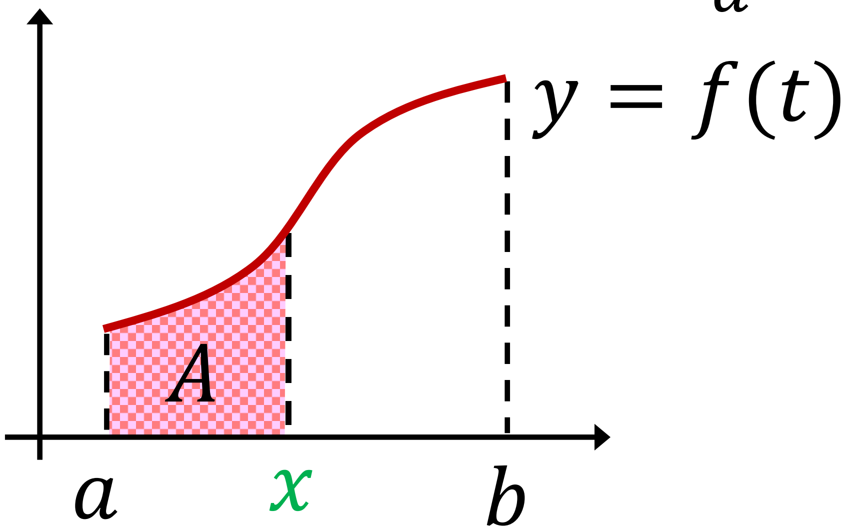
Función Integral (o Función Área)

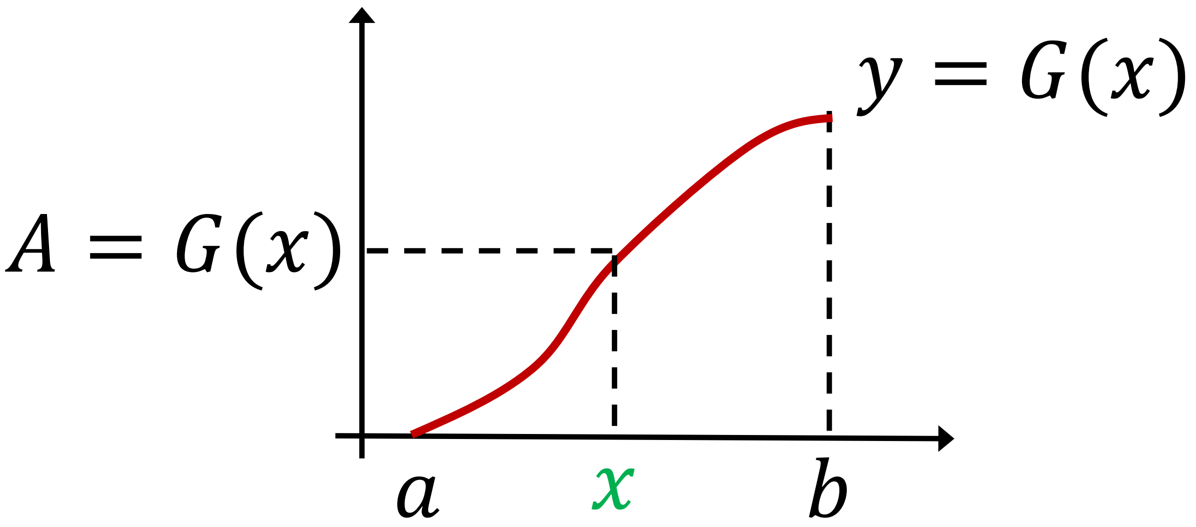
Definición:

Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; integrable

$$G\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

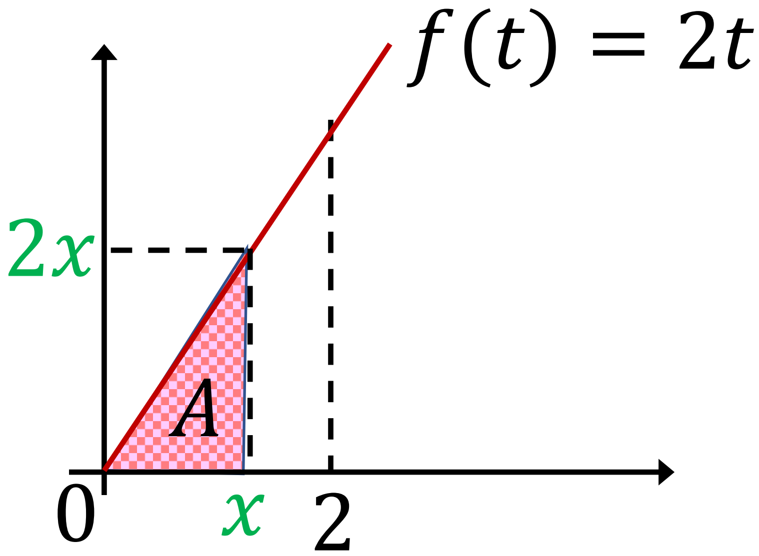
Se llama función integral de f en $[a,b]$

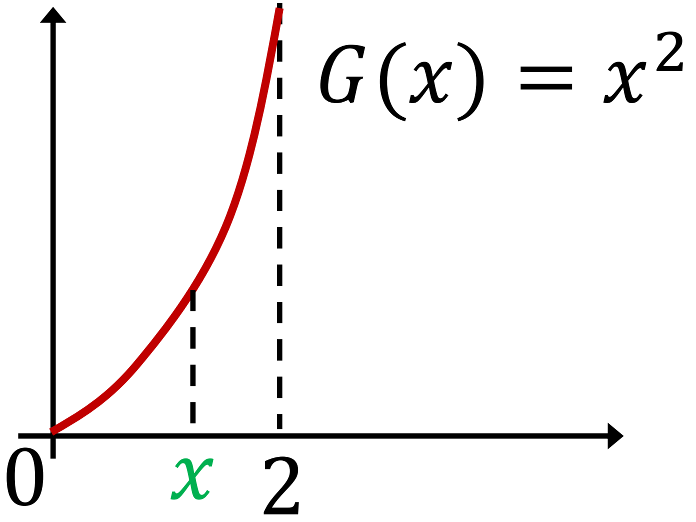




Ejemplo

Halle la función integral de f.





Sea $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R};\ f(t) = 2t$

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{x\,2x}{2}$$

$$G(x) = \frac{x\ 2x}{2} = x^2$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) = 1$$

$$G(2) = 4$$

Observación: $G'(x) = 2x = f(x)$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sean $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; continua.

$$G\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ G(x) = \int_a^x f(t)dt$$ Función integral de f en $[a,b]$

Entonces $G(x)$ es derivable en (a,b) y $G'(x) = f(x)\ \ \forall x \in (a,b)$

Teorema: Regla de Barrow

Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; continua.

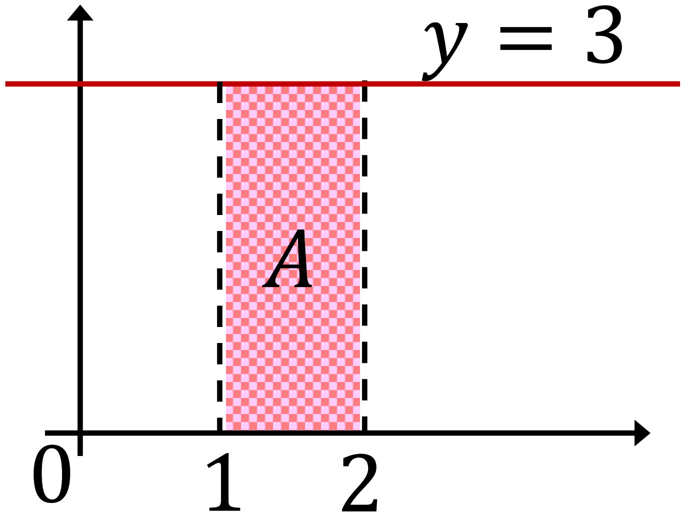
Si F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notación: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Ejemplo

Calcule el área entre la curva de f y el eje de las x en el intervalo $[1,2]$.



Sea $f:[1,2] \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = 3$

$$F(x) = \int 3\,dx = 3x + C$$

$$A = \int_1^2 3\,dx = [3x]_1^2 = 3(2) - 3(1) = \boxed{3}$$

Ejemplo

Calcule
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\ (2x)\ dx$$

$$\int \mathrm{sen}\ (2x)\ dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\ (2x)\ dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}[\cos(\pi) - \cos(0)] = \boxed{1}$$