# INTEGRALES IMPROPIAS

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

# Integrales impropias de primera especie

1) Sea f continua en $[a, \infty)$. Entonces $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\, dx$
2) Sea f continua en $(-\infty, b]$. Entonces
   $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx$
3) Sea f continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx\, ; c \in \mathbb{R}$$

Si los límites existen se dice que la integral impropia es convergente, si no existen se dice que es divergente.

Nota: Para que la integral 3) sea convergente deben ser las dos integrales del 2º miembro convergentes.

# Integrales impropias de segunda especie

1) Sea $f$ continua en $[a, b)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$.

Entonces $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$

2) Sea $f$ continua en $(a, b]$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Entonces $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$

3) Sea $f$ continua en $[a, c) \cup (c, b]$ y $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

Entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Si los límites existen se dice que la integral impropia es convergente, si no existen se dice que es divergente.

Nota: Para que la integral 3) sea convergente deben ser las dos integrales del 2º miembro convergentes.

# Integral impropia de 2º especie

**Ejemplo 1** $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Integral impropia porque $\lim_{t\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$

entonces $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

1) Integral indefinida: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$

2) Regla de Barrow: $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to -1^+} [\operatorname{arcsen} x]_{t}^{0}$

3) Cálculo del límite: $\lim_{t\to -1^+} \operatorname{arcsen} 0 - \operatorname{arcsen} t = 0 - \frac{3\pi}{2} = \boxed{-\frac{3\pi}{2}}$

convergente

# Integral impropia de 1º especie

**Ejemplo 2** $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Es integral impropia porque el intervalo de integración es infinito

entonces $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

1) Integral indefinida: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

2) Regla de Barrow: $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_1^t$

3) Cálculo del límite: $\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ Conv.

# Integral impropia de 2º especie

**Ejemplo 3** $\int_e^{e^4} \frac{1}{2x-x\ln|x|}dx$ Int. imp. porque $\lim_{t\to e^2} \frac{1}{2x-x\ln|x|} = \infty$

entonces

$$\int_e^{e^4} \frac{1}{2x-x\ln|x|}dx = \lim_{t\to e^{2^-}} \int_e^{t} \frac{1}{2x-x\ln|x|}dx + \lim_{t\to e^{2^+}} \int_t^{e^4} \frac{1}{2x-x\ln|x|}dx$$

1) Integral indefinida:

$$\int \frac{1}{2x-x\ln|x|}dx = \int \frac{1}{x(2-\ln|x|)}dx = -\ln|2-\ln|x|| + C$$

2) Regla de Barrow: $\int_e^{e^4} \frac{1}{2x-x\ln|x|}dx =$

$$= \lim_{t\to e^{2^-}} [-\ln|2-\ln|x|||]_e^t + \lim_{t\to e^{2^+}} [-\ln|2-\ln|x|||]_t^{e^4}$$

# Integral impropia de 2º especie

Ejemplo 3

3) Cálculo del límite:

$$\lim_{t \to {e^2}^-} -Ln\left|2 - Ln\,|t|\right| + Ln|2 - Ln\,e| +$$

$$+ \lim_{t \to {e^2}^+} -Ln|2 - Lne^4| + Ln|2 - Ln\,t| = \infty + 0 - Ln\,2 - \infty$$

Dado que cada una de las integrales impropias es divergente, la suma es divergente.

# Integral impropia de 1º especie

## Ejemplo 4

$$\int_2^{\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,dx$$

Es integral impropia porque el intervalo de integración es infinito

entonces $\int_2^{\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,dx$

1) Integral indefinida: $\int \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + Ln|x-1| - Ln|x+1| + C$

2) Regla de Barrow: $\int_2^{\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x} + Ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^t$

3) Cálculo del límite: $\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2} - Ln\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{2} - Ln\frac{1}{3}}$ $\boxed{\text{Conv.}}$

# Integral impropia de 1º especie

**Ejemplo 5** $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Es integral impropia porque el intervalo de integración es infinito

entonces $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

1) Integral indefinida: $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = Ln(1+e^x) + C$

2) Regla de Barrow: $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \lim_{t \to -\infty} [Ln(1+e^x)]_t^0$

3) Cálculo del límite: $\lim_{t \to \infty} Ln(2) - Ln\left(1 + \frac{1}{e^t}\right) = \boxed{Ln(2)}$ convergente