Matriz elemental . Matriz inversible

Matriz elemental

Definición

Sea $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

E es una matriz elemental si se obtiene de la matriz I_n (matriz identidad de orden n) mediante una sola operación elemental de filas.

Ejemplo

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz identidad

$$\Big\downarrow \; e_{12}^{(-2)}$$

$E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz elemental

Teorema

Sea e una operación elemental de filas tal que $E = e(I_m)$.

Entonces, $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $\quad e(A) = EA$.

Este teorema dice que es lo mismo aplicar una operación elemental de filas, e, a una matriz $A_{m\times n}$, que pre multiplicarla por la matriz elemental $E = e(I_m)$, correspondiente a dicha operación elemental.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ matriz 2x3 ; $e = e_{12}^{(-2)}$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Dado que A es 2x3, para hacer el producto EA, la matriz identidad debe ser I_2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}^{(-2)}} \boxed{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = e(A)}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{E}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \boxed{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = EA} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{e}(A) = EA}$$

Demostración

Primera parte:

Sea e operación elemental de filas de tipo I: $e = e_i^{(k)}$

Sea $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$ Matriz de m filas y n columnas

A_i: fila i de la matriz A, con $i=1,2,\ldots,m$.

Matriz elemental E:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{Fila } i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_m$$

$$\Big\downarrow e_i^{(k)}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{Fila } i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = E$$

Producto EA:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = A$$

Columna i

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = EA$$

Operación e(A):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \xrightarrow{e_i^{(k)}} \boxed{\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = e(A)}$$

En consecuencia:

$$e(A) = EA$$

Las partes II y III corresponden a las operaciones elementales de tipo II y III y quedan a cargo del alumno.

Teorema Sean A,B $\in \mathbb{R}^{m\times n}$.
A $\underset{\sim}{f}$ B $\Leftrightarrow$ B=PA; con P un producto de matrices elementales.

En este teorema se aplica reiteradamente el teorema anterior: cada operación sobre una matriz equivale a una premultiplicación por la matriz elemental correspondiente.

Supongamos

$$A = A_0 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} A_k = B$$

Por aplicación del teorema anterior:

$$A_1 = e_1(A) = E_1 A$$

$$A_2 = e_2(A_1) = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$

$$\vdots$$

$$B = A_k = e_k(A_{k-1}) = E_k A_{k-1} =$$

$$= \underbrace{E_k \dots E_2\, E_1}_{P}\, A$$

Entonces $B = PA$;

siendo $P = E_k \dots E_2\, E_1$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; si a A se le efectúa una sucesión de operaciones elementales de filas se obtiene R, escalón reducida por filas de A.

Nos proponemos hallar la matriz P tal que $R = PA$.

El procedimiento que nos permita hallar la matriz P, nos resultará útil más adelante para hallar la inversa de una matriz.

En efecto, si A tuviera inversa (A inversible) y R fuera la identidad; se tendría $I = PA$. Si además se cumpliera que $I = AP$, entonces P sería inversa de A, es decir, $P = A^{-1}$.

Continúa

Escribimos I_2 en una columna y a su derecha A. A ambas les efectuamos las mismas operaciones hasta obtener R.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = A$$

$$\Big\downarrow e_{21}^{(-2)} \qquad\qquad \Big\downarrow e_{21}^{(-2)}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = E_1 A$$

$$\Big\downarrow e_{2}^{(-\frac{1}{3})} \qquad\qquad \Big\downarrow e_{2}^{(-\frac{1}{3})}$$

$$E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = E_2 E_1 A$$

$$\Big\downarrow e_{12}^{(-2)} \qquad\qquad \Big\downarrow e_{12}^{(-2)}$$

$$P = E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{E_3 E_2 E_1}_{P} A = R$$

Cada operación elemental de filas que hacemos a una matriz equivale a una premultiplicación por una matriz elemental.
Por ejemplo, $e_1(A) = E_1 A$.

$$\begin{array}{rr|lr}
 & I_2 & A & \\ \hline
e_1 \downarrow & E_1 & E_1 A & \downarrow e_1 \\ \hline
e_2 \downarrow & E_2 E_1 & E_2 E_1 A & \downarrow e_2 \\ \hline
e_3 \downarrow & P = E_3 E_2 E_1 & \underbrace{E_3 E_2 E_1}_{P} A = R & \downarrow e_3
\end{array}$$

Dada una matriz A $m \times n$, la matriz identidad debe ser de orden m, para que sea posible el producto PA.

Cuando en la columna de la derecha obtenemos R, en la columna de la izquierda obtenemos P tal que $R = PA$.

Matriz inversible

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$, entonces se dice que A es inversible y que B es su inversa.

Se escribe $B = A^{-1}$.

Ejemplo Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A es inversible pues existe

$$B = \begin{bmatrix} -{}^{1}/_{4} & {}^{1}/_{2} \\ {}^{1}/_{8} & {}^{1}/_{4} \end{bmatrix} \;/\; AB = BA = I.$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} B \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ A \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ I \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A \\ \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ B \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ I \end{matrix} \end{array}$$

Teorema Sea A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es inversible $\Rightarrow$ A^{-1} es única.

Demostración

Sean B y C inversas de A. I: matriz identidad de orden n.

Por definición de matriz inversible: $AB=BA=I$ y $AC=CA=I$

Por las propiedades del producto de matrices:

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$$

Por lo que $B=C$; lo que implica que si A tuviera más de una inversa serían iguales; por tanto, la inversa es única.

Teorema

Si A es inversible $\Rightarrow (A^{-1})^{-1}=A$.

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Si A y B son inversibles,

entonces:

I. A es simplificable.

II. AB es inversible y $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Demostración

I. Sea A inversible y A^{-1} su inversa. Supongamos $AM=AN$.

Entonces $A^{-1}(AM) = A^{-1}(AN)$

Por propiedad asociativa:

$$(A^{-1}A)M = (A^{-1}A)N$$

$$M=N$$

lo que implica que A es simplificable.

II. Sean A y B inversibles y A^{-1} y B^{-1}, sus inversas.

Postulamos que el producto AB es inversible y que su inversa es el producto $B^{-1}A^{-1}$. Aplicamos la definición de matriz inversible:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

Ambas igualdades se verifican por aplicación de la propiedad asociativa del producto de matrices, por tanto, se cumple la definición de matriz inversible para la matriz AB y se tiene que

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; M $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; N $= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$;

compruebe que $AM = AN$; pese a que $M \neq N$.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = M \\ \hline A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = N \\ \hline A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A es simplificable si es inversible y está en ambos miembros a la izquierda o en ambos a la derecha. En caso contrario, no es simplificable. En este ejemplo A no es inversible, por tanto, no es simplificable.

Corolario

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$, inversibles, entonces el producto $(A_1 A_2 \ldots A_r)$ es inversible y $(A_1 A_2 \ldots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Este corolario señala que el producto de matrices inversibles es una matriz inversible.

Ejemplo

Sean

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Compruebe que la matriz inversa de AB es la matriz $B^{-1}A^{-1}$ y que, en cambio, $A^{-1}B^{-1}$ no lo es.

Continúa

Más adelante se explicará cómo obtener las inversas de A y de B. Por el momento aceptamos como un dato que

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -{}^{3}/_{5} & {}^{1}/_{5} \\ {}^{2}/_{5} & {}^{1}/_{5} \end{bmatrix}$ y que $B^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{2} & -1 \\ {}^{1}/_{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Efectúe los siguientes productos y verifique su exactitud.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -{}^{4}/_{5} & {}^{3}/_{5} \\ {}^{7}/_{10} & -{}^{2}/_{5} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -{}^{13}/_{10} & {}^{1}/_{10} \\ -{}^{3}/_{10} & {}^{1}/_{10} \end{bmatrix} \quad ; \quad (AB)(A^{-1}B^{-1}) = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{2} & -1 \\ {}^{23}/_{2} & -7 \end{bmatrix}$$

Dado que $(AB)(A^{-1}B^{-1}) \neq I$, resulta que $(A^{-1}B^{-1})$ no es la matriz inversa de AB. Es decir, $A^{-1}B^{-1} \neq (AB)^{-1}$.

Continúa

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;;\quad (AB)(B^{-1}A^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

se tiene que $B^{-1}A^{-1}$ es la matriz inversa de AB:

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

Observaciones

1. Si una matriz tiene una fila nula, entonces no es inversible.
2. Una matriz cuadrada, escalón reducida por filas es inversible, si y solo si, es la matriz identidad.

Ejemplo 1. Si A tiene alguna fila nula, para toda matriz B, el producto $AB \neq I$, por tanto A no es inversible.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AB = C \neq I$$

2. Sea A, 3x3, cuadrada, escalón reducida por filas e inversible.

Entonces $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

Teorema Toda matriz elemental es inversible.

Demostración

Sean $E = e(I)$ (1) y $E_1 = e^{-1}(I)$ (2)

matrices elementales.

Por el teorema de la diapositiva 2:

$EE_1 = e(E_1)$ (3) y $E_1E = e^{-1}(E)$ (4)

Reemplazando E_1y E en (3) y (4) de acuerdo con (1) y (2):

$EE_1 = e\left(e^{-1}(I)\right)$ (5) y $E_1E = e^{-1}\left(e(I)\right)$ (6)

Continúa

Continuación

En la igualdades (5) y (6) se observa que a la matriz I se le aplica una operación y luego la operación inversa; por consiguiente, en ambos casos, se obtiene nuevamente I, es decir:

$$EE_1 = e\left(e^{-1}(I)\right) = I \qquad \text{y} \qquad E_1E = e^{-1}\left(e(I)\right) = I.$$

Por lo que E es inversible y su inversa es la matriz elemental E_1:

$$E^{-1} = E_1 = e^{-1}(I)$$

Ejemplo Sea E matriz elemental

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{e_1^{(2)}}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=E$$

De acuerdo con el teorema anterior, su matriz inversa es

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{e_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=E^{-1}$$

Verifique que $EE^{-1}=E^{-1}E=I$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=E^{-1}\\ \hline \text{E}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I\end{array}\qquad\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=E\\ \hline E^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I\end{array}$$

Teorema Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Los siguientes enunciados son equivalentes.

I. A es inversible.

II. $A \underset{\sim}{\overset{f}{}} I$.

III. A es un producto de matrices elementales.

Demostración I$\Longrightarrow$II:

Sea A inversible y R matriz escalón reducida por filas de A.

Entonces $A \underset{\sim}{\overset{f}{}} R$; por lo que $R = E_k \ldots E_2 E_1 A$.

Por ser R producto de matrices inversibles, R es inversible.

Como R es cuadrada, escalón reducida por filas e inversible, por la observación II, R es la matriz identidad.

En definitiva, $A \underset{\sim}{\overset{f}{}} I$.

Ejemplo

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Muestre que: 1) A es inversible.

2) $A \underset{\sim}{f} I_2$.

3) A es un producto de matrices elementales.

Siendo A, matriz 2x2, escribimos I_2 y a la derecha A.

Reducimos por filas A y obtenemos su reducida, R.

A I_2 le efectuamos las mismas operaciones que a A, y obtenemos P.

Si la reducida por filas de A es I_2, entonces, por el teorema de la diapositiva 6 se tiene que $PA = I_2$.

Continúa

Continuación

$$\begin{array}{c r|l c}
 & I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \mathrm{A} & \\
e_2^{(-1)} \downarrow & & & \downarrow e_2^{(-1)} \\ \hline
 & E_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = E_1 A & \\
e_{12}^{(-2)} \downarrow & & & \downarrow e_{12}^{(-2)} \\ \hline
 & P = E_2 E_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = E_2 E_1 A = R = I_2 &
\end{array}$$

$$PA = I_2$$

A es equivalente por filas a la matriz identidad, I_2, pues I_2 se obtiene, a partir de A, mediante una sucesión finita de operaciones elementales de filas. $\boxed{A \underset{\sim}{\overset{f}{}} I_2}$.

Continúa

Haciendo las operaciones inversas, a partir de P y de I se obtienen I y A respectivamente, por lo que $AP=I$.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{P}$$

$$e_{12}^{(2)} \downarrow \qquad\qquad \downarrow e_{12}^{(2)}$$

$$E'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E'_1 P$$

$$e_{2}^{(-1)} \downarrow \qquad\qquad \downarrow e_{2}^{(-1)}$$

$$A = E'_2\, E'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E'_2 E'_1 P = I_2$$

$$AP=I_2$$

Se puede demostrar que siempre que $PA = I$, se cumple $AP = I$

Continúa

Continuación

En definitiva: $PA=AP=I$;

por tanto, $P=A^{-1}$ y

$$\boxed{A \text{ es inversible}}$$

Finalmente, en la filmina 25 se puede observar que

$$\boxed{A = E'_2 E'_1}$$

es decir, A es un producto de matrices elementales.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Los siguientes enunciados son equivalentes.

I. A es inversible.

II. AX=O tiene única solución.

III. AX=H tiene única solución para cada matriz $H \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Demostraremos I $\Longrightarrow$ II

Demostración:

Sea A matriz inversible; por tanto, $A \underset{\sim}{f} I$. Entonces los sistemas $AX=0$ e $IX=0$ son sistemas equivalentes compatibles con única solución pues son homogéneos y $r(A)=n$, es decir, no hay incógnitas no principales.

Ejemplo Sean $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$.

Resuelva los sistemas AX=H y AX=O.

Sistema AX=H:

Reducción por filas

$$\left\{\begin{array}{l} [AH]=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \downarrow e_2^{(-1)} \\ \begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \downarrow e_{12}^{(-2)} \\ [RH'] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

Matriz aumentada

Incógnitas principales: x_1, x_2 Incógnitas no principales: ---

Sistema Resolvente $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1\end{cases}$

Conjunto solución expresado como combinación lineal de n-uplas:

$\boxed{S=(x_1,x_2)=(0,-1)}$ Única solución

Continúa

Ejemplo Sistema AX=O:

Tratándose de un sistema homogéneo se puede trabajar con la matriz de coeficientes, sin tener en cuenta la matriz segundo miembro, pues sabemos que se mantiene nula cualquiera sea la operación elemental de filas que se efectúe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la reducida por filas ya se determinó: $\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Incógnitas principales: x_1, x_2 Incógnitas no principales: ---

Sistema resolvente $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\boxed{S = (x_1, x_2) = (0,0)}$ única solución (solución trivial).

Obtención de la inversa de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dispondremos los cálculos en una tabla de dos columnas.

1) En la columna derecha escribimos $A_{n\times n}$ y en la izquierda I_n.

2) Sobre A aplicamos una sucesión de operaciones elementales e_1, e_2, ...,e_r y obtenemos su matriz escalón reducida por filas, R. La misma sucesión e_1, e_2, ...,e_r, aplicamos a la matriz I_n.

3) Si $R=I$, entonces A es inversible y su inversa es P que se obtiene en la columna izquierda.

4) Para verificar multiplicamos PA, el resultado debe ser I_n.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine si A es inversible y en tal caso, la inversa de A.

$$I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] = A$$

$$\xrightarrow{e_{13}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{e_{31}^{(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{e_{2}^{(1/2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{e_{32}^{(-3)}}$$

Continúa

$$
e_{32}^{(-3)} \downarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & -2 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \quad \downarrow e_{32}^{(-3)}
$$

$$
e_{3}^{(-2)} \downarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \downarrow e_{3}^{(-2)}
$$

$$
e_{23}^{(-1/2)} \downarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \downarrow e_{23}^{(-1/2)}
$$

$$
e_{12}^{(2)} \downarrow \quad \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}} \; \Bigg| \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R = I \quad \downarrow e_{12}^{(2)}
$$

Si $R \neq I$, entonces A no es inversible.

Ejemplo

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};\, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Halle la matriz X tal que $AX = B - 3X$.

1. Despejamos X:

$$AX + 3X = B$$

$$(A + 3I)X = B$$

$$\boxed{X = (A + 3I)^{-1}B}$$

Continúa

2. Efectuamos las operaciones indicadas:

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{5} & -{}^{1}/_{5} \\ -{}^{1}/_{10} & {}^{1}/_{5} \end{bmatrix}$$

$$X = (A + 3I)^{-1}B = \boxed{\begin{bmatrix} -{}^{1}/_{5} & {}^{7}/_{5} \\ {}^{1}/_{5} & -{}^{2}/_{5} \end{bmatrix}}$$

3. Verificación:

$$AX = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{5} & -{}^{11}/_{5} \\ {}^{2}/_{5} & {}^{1}/_{5} \end{bmatrix}; \; B - 3X = \begin{bmatrix} {}^{3}/_{5} & -{}^{11}/_{5} \\ {}^{2}/_{5} & {}^{1}/_{5} \end{bmatrix}$$