# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea el siguiente sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas:

$a_{ij}$: Coeficiente de ecuación $i$ que multiplica incógnita $j$.

$h_i$: Segundo miembro de ecuación $i$

$x_j$ : Incógnita $j$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

$a_{ij},\ h_i \in K.\quad m,\ n,\ i,\ j \in \mathbb{N}.$ $K$ es un cuerpo .

# Ejemplo

Sistema de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$a_{23} = 0$ coeficiente de ecuación 2 que multiplica incógnita 3.

$h_1 = -1$ segundo miembro de la ecuación 1.

Una solución es una $n$-upla,

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n), \qquad \text{con } c_j \in K,$$

tal que si se reemplaza cada incógnita $x_j$ por el respectivo escalar $c_j$, se cumplen todas las ecuaciones.

Resolver el sistema es hallar todas las soluciones del sistema (el conjunto solución).

# Ejemplo

Una solución del sistema anterior es la n-upla: $\left(-\frac{5}{22}, \frac{9}{22}, \frac{15}{22}, 0\right)$, pues si se reemplazan las incógnitas por los respectivos elementos de la n-upla se cumplen todas las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\left(-\frac{5}{22}\right) - 3\left(\frac{9}{22}\right) + \left(\frac{15}{22}\right) - (0) = -1 \\ \left(-\frac{5}{22}\right) + 3\left(\frac{9}{22}\right) + 0\left(\frac{15}{22}\right) + 3(0) = 1 \\ -\left(-\frac{5}{22}\right) + \left(\frac{9}{22}\right) + 2\left(\frac{15}{22}\right) + (0) = 2 \end{cases}$$

Expresión matricial del sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

$$A \quad . \quad X = H$$

$\mathbb{R}^{m\times n}$: Conjunto de matrices de $m$ filas y $n$ columnas, cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{R}$.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: Matriz de coeficientes

$X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$: Matriz de incógnitas

$H \in \mathbb{R}^{m\times 1}$: Matriz segundo miembro

## Ejemplo

La expresión matricial del sistema anterior es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{H}$$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$: Matriz de coeficientes.

$X \in \mathbb{R}^{4\times 1}$: Matriz de incógnitas.

$H \in \mathbb{R}^{3\times 1}$: Matriz segundo miembro.

Matriz nula: matriz cuyos elementos son todos nulos.

Matriz cuadrada: matriz con igual cantidad de filas que de columnas.

Matriz identidad de orden n: $I_n \in R^{nxn}$.

El elemento *ij* de *I* es igual a

$$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

## Ejemplo

Matriz nula 2x3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz cuadrada 2x2: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz identidad de orden 3:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales

Matriz formada por las matrices de coeficientes y segundo miembro de un sistema de ecuaciones lineales. La matriz segundo miembro está como última columna.

**Ejemplo**

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Operaciones elementales de filas

## Operación elemental de filas de tipo I

Multiplique la fila $i$ por el escalar no nulo $k$.

Símbolos: $kF_i$ y $e_i^{(k)}$

(se usan indistintamente).

**Ejemplo**

Multiplique la fila 3 por el escalar 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2F_3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplique la fila 1 por el escalar -3:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1^{(-3)}} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Continúa

continuación

## Operación elem. de filas de tipo II

Reemplace la fila *i* por la suma de la fila *i* y la fila *j*, esta última previamente multiplicada por el escalar *k*. $i \neq j$.

Símbolos: $Fi + k\,Fj$ y $e_{ij}^{(k)}$

## Operación elem. de filas de tipo III

Intercambie las filas *i* y *j*.

Símbolos: $F_i \leftrightarrow F_j$ y $e_{ij}$

### Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + (-1)F_1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

**Teorema**

Para cada operación elemental de filas $e$, existe una operación del mismo tipo, $e^{-1}$, que restituye la matriz original.
$e^{-1}$ es la operación elemental de filas inversa de $e$.

En símbolos:

$$A=e^{-1}(e(A))=e(e^{-1}(A))$$

## Ejemplo

Operación de tipo I y su operación inversa

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1^{(-3)}} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1^{(-\frac{1}{3})}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_i^{(k)}$$
$$\boldsymbol{e}^{-1} = \boldsymbol{e}_i^{(1/k)}$$

## Ejemplo

Operación de tipo II y su operación inversa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{e_{ij}^{(k)}} \\ \boldsymbol{e^{-1}} &= \boldsymbol{e_{ij}^{(-k)}} \end{aligned}}$$

## Ejemplo

Operación de tipo III y su operación inversa

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{e_{ij}} \\ \boldsymbol{e^{-1}} &= \boldsymbol{e_{ij}} \end{aligned}}$$

# Matrices equivalentes por filas

**Definición**

Sean $A, B \in R^{mxn}$ .

$A$ es equivalente por filas a $B$ si $B$ se obtiene, a partir de $A$, mediante una sucesión finita de operaciones elementales de filas.

$$A \underset{\sim}{f} B$$

**Ejemplo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Las cuatro matrices son equivalentes por filas entre sí.

## Propiedades de la relación de equivalencia

1. $A \underset{\sim}{f} A$ Reflexividad

2. $A \underset{\sim}{f} B \Rightarrow B \underset{\sim}{f} A$ Simetría

3. $A \underset{\sim}{f} B$ y $B \underset{\sim}{f} C \Rightarrow A \underset{\sim}{f} C$ Transitividad

**Ejemplo**

$$A_0 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} A_k$$

Las matrices $A_0, A_1, \dots, A_k$ son matrices equivalentes por filas entre sí.

**Teorema**

Sean AX=H y A´X=H´ sistemas de ecuaciones lineales.

[AH] y [A´H´] sus respectivas matrices aumentadas.

Si [AH] $\underset{\sim}{f}$ [A´H´], entonces los sistemas AX=H y A´X=H´ tienen las mismas soluciones.

El teorema nos dice que las operaciones elementales de filas no alteran las soluciones de un sistema.

## Ejemplo

Sea $\begin{cases} x+y=1 \\ -x+2y=-2 \end{cases}$ Matriz aumentada: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Sucesión finita de operaciones elementales de filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{2}^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Sistema que representa la última matriz $\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$

El par ordenado $\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ es la única solución de todos los sistemas.

# Matriz escalón reducida por filas

**Definición:** Sea A $\in \mathbb{R}^{mxn}$ . A es una matriz escalón reducida por filas si es nula o si cumple las siguientes condiciones:

1. El primer elemento no nulo de cada fila no nula es 1. Se llama elemento conductor.
2. En las columnas de los elementos conductores (se llaman columnas principales), los restantes elementos son nulos.
3. Si a la izquierda de un elemento conductor hay otros elementos conductores, éstos están en filas superiores. Es decir, “las filas están en escalera”.
4. Las filas nulas, si hubiere, están debajo de las no nulas.

## Ejemplo

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ No es esc. red. por filas. No cumple 1.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ No es esc. red. por filas. No cumple 2.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ No es esc. red. por filas. No cumple 3.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ No es esc. red. por filas. No cumple 4.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Es esc. red. por filas.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Es esc. red. por filas.

## Teorema

Toda matriz a elementos en un cuerpo es equivalente por filas a una única matriz escalón reducida por filas.

Observación: no siempre la matriz identidad es la matriz escalón reducida por filas de una matriz A.

## Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Podemos asegurar que siempre es posible obtener una única matriz escalón reducida por filas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} \\ 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2^{\left(\frac{2}{9}\right)}}$$

$$\xrightarrow{e_2^{\left(\frac{2}{9}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Rango de fila

### Definición

Sea $A$ una matriz y $R$ su matriz escalón reducida por filas. El rango de fila de $A$, $r(A)$, es la cantidad de filas no nulas de $R$.

### Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ Halle el rango de fila de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{31}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{32}^{(1)}}$$

$$\xrightarrow{e_{32}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{2}^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\xrightarrow{e_{2}^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{R}$$

El rango de fila de A es 2, r(A)=2

# Método de Gauss-Jordan

**Procedimiento para hallar la matriz escalón reducida por filas de una matriz.**

Supongamos una matriz cualquiera A.

1. Destaque en la 1º columna no nula, de izquierda a derecha, un elemento no nulo. Lo llamaremos elemento conductor. Si el elemento conductor escogido no estuviera en la primera fila, mediante una operación de tipo III, colóquelo en esa posición. Si fuere necesario, con una operación de tipo I, transfórmelo en *1*.

## Ejemplo

Primera columna no nula de izquierda a derecha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_{13}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_1^{(-1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento conductor

2. Mediante operaciones elementales de tipo II anule los elementos que están abajo y en la misma columna del elemento conductor seleccionado.

# Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_{21}^{(-3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_{31}^{(-2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Considere la matriz que queda al suprimir la fila y la columna del elemento conductor seleccionado anteriormente. Aplique los pasos 1 y 2 a dicha matriz. Repita el procedimiento hasta que se obtenga una matriz nula, o bien, no se obtenga ninguna matriz.

**Ejemplo**

Submatriz

1° Columna

Elemento conductor

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_{23}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_{2}^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 9 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_{32}^{(-9)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo

Submatriz

1° Columna

Elemento conductor

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_3^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Con operaciones de tipo II, anule los elementos que están arriba y en la misma columna del elemento conductor situado más a la derecha. Luego proceda de igual forma con los elementos que le siguen, de derecha a izquierda.

**Ejemplo**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento conductor situado más a la derecha.

$$\downarrow e_{23}^{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \downarrow e_{13}^{(-2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow e_{12}^{(2)}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R es la matriz escalón reducida por filas de A.

# Conjunto de soluciones

Sea AX=H sistema de ecuaciones lineales.

[AH] matriz aumentada.

$[AH] \underset{\sim}{f} [RH']$.

$R$ matriz escalón reducida por filas de $A$.

**Ejemplo**

Resuelva: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ AX=H

Matriz aumentada $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [AH]

Reducimos por filas la matriz $A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2^{(-1)}}$$

$$\xrightarrow{e_2^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} [RH']$$

Continúa

RX=H´ sistema resolvente de AX=H (pone en evidencia el conjunto solución).

El conjunto solución se escribe como combinación lineal de n-uplas (posteriormente se definirá "combinación lineal").

## Ejemplo

Sistema resolvente:

$$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

RX=H´

Conjunto solución (expresado como combinación de n-uplas):

$$\boxed{S = (x_1, x_2) = (-5, -4)}$$ Única solución

**Incógnitas Principales:** corresponden a los elementos conductores.

**Incógnitas no Principales:** restantes incógnitas.

**Ejemplo 1**

Resuelva: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ AX=H

Matriz aumentada: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [AH]

Reducimos por filas la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$ [RH´]

Incógnitas princ.: $x_1, x_2$. Incóg. no princ.: ---

Sistema resolvente: $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -4 \end{cases}$ RX=H´

Conjunto solución:

$\boxed{S = (x_1, x_2) = (-5, -4)}$ Única solución

Observe que $r(A) = r(AH) = 2$

## Ejemplo 2

Resuelva : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ AX=H $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [AH]

Reducimos por filas la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Una ecuación es incompatible.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - x_2 = -4 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Conjunto solución:

$\boxed{S = \emptyset}$ Conjunto vacío

El sistema es incompatible. Observe que $r(A) = 2 \neq r(AH) = 3$.

## Ejemplo 3

Resuelva: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ AX=H $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [AH]

No es necesario reducir por filas pues ya es escalón reducida por filas. Incógnitas principales: $x_1, x_3$. Inc. no principales: $x_2, x_4$.

Reemplazamos las incóg. no princ. por parámetros: $x_2 = t, x_4 = k$

Escribimos los parámetros en el 2° miembro del sistema resolvente:

Sistema resolvente: $\begin{cases} x_1 = 3 + 2t - 3k \\ x_3 = 1 - k \end{cases}$ RX=H´

Solución general: $\boxed{S = (3{,}0{,}1{,}0) + t(2{,}1{,}0{,}0) + k(-3{,}0,-1{,}1)}$

Solución particular para $t = 1$ y $k = -2$: $\boxed{S = (11{,}1{,}3,-2)}$

Observe que $r(A) = r(AH) = 2$.

Sea $AX=H$ sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas .

Si $r(A)=r(AH)=n$, la solución es única. Sistema compatible determinado.

Si $r(A)=r(AH)<n$, existen infinitas soluciones. Sistema compatible indeterminado.

Si $r(A)\neq r(AH)$, sistema incompatible.

## Ejemplo

Observe los ejemplos 1,2 y 3.

- Ej. 1: r(A)=r(AH)=n=2 ; el sistema tiene una única solución (es compatible determinado).
- Ej. 2: r(A)=2; r(AH)=3 $\Longrightarrow$ r(A)≠r(AH) ; es incompatible.
- Ej. 3: r(A)=r(AH)=2 , n=4 ; r(A)=r(AH)<n ; tiene infinitas soluciones (es compatible indeterminado).

## Sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

Es aquel cuyos segundos miembros son todos nulos.

- La *n*-upla nula (solución trivial) es siempre solución.
- Siempre se cumple r(A)=r(AH).
- Puede tener, además de la solución trivial, otras soluciones (infinitas soluciones).

**Ejemplo 4**

Resuelva: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

Reducimos por filas la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Incóg. princ.: $x_1, x_2$. Inc. no princ.:-

No es necesario escribir la matriz aumentada pues la última columna permanece nula.

Sistema resolvente: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Conj. sol.: $S = (x_1, x_2) = (0{,}0)$

Única solución (la solución trivial).

**Ejemplo 5**

Resuelva: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ AX=O $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ A

Reducimos por filas: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ R

Inc. princ.: $x_1, x_2$. Incóg. no princ.: $x_3$. Reemplazamos las inc. no princ. por parámetros: $x_3 = t$. Escribimos los parámetros en el segundo miembro:

Sistema resolvente: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}$

$\boxed{S = (x_1, x_2, x_3) = t(1,1,1)}$ Solución General. Sist. comp. indet.

Solución particular para $t = -1$: $\boxed{S = (x_1, x_2, x_3) = (-1, -1, -1)}$

## Teorema de Rouché - Frobenius

Sea $AX = H$ un sistema ecuaciones lineales.

El sistema $AX = H$ tiene solución si y sólo si $r(A) \ = \ r(A|H)$.

Breve explicación: $AX = H$ tiene solución si y solo si en $RX = H´$ no hay ninguna ecuación del tipo $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = h$; con $h \neq 0$.

En $RX = H´$ no existe ninguna ecuación como la anterior si y solo si $r(A) = r(AH)$.

En definitiva, el sistema tiene solución si y solo si $r(A) = r(AH)$.

Aplicación al caso de los sistemas homogéneos:

En los sistemas homogéneos siempre se cumple que $r(A) = r(AO)$, por tanto, estos sistemas siempre tienen solución.

**Ejemplo** Resuelva el ejemplo 2, cambiando la matriz segundo miembro por una matriz nula 3x1:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \mathrm{AX=O} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{A}$$

Reducimos por filas la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}$$

$\boxed{S = t(1,1,1)}$ Sol. gral. Infinitas sol.

Sol. part. para $t = 3$: $\boxed{S = (3,3,3)}$

## Ejemplo

Observe los ejemplos 1,2,3, 4 y 5.

Ej. 1: $r(A) = r(AH) = 2$ ; el sistema es compatible.

Ej. 2: $r(A) = 2; r(AH) = 3 \implies r(A) \neq r(AH)$ ; el sistema es incompatible

Ej. 3: $r(A) = r(AH) = 2$ ; el sistema es compatible.

Ej. 4: $r(A) = r(AH) = 2$ ; el sistema es compatible.

Ej. 5: $r(A) = r(AH) = 2$ ; el sistema es compatible.

## Condición de compatibilidad

Sea $AX = H$ un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas.

$RX = H'$ su sistema resolvente.

Si en el sistema resolvente existieran r ecuaciones del tipo:

$$
\begin{array}{l}
0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_1 \\
0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_2 \\
\quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad\quad . \\
\quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad\quad . \\
0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_r
\end{array}
$$

para que el sistema sea compatible deberían cumplirse las siguientes condiciones:

$b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0$ Condiciones de compatibilidad

**Ejemplo** ¿Qué condición o condiciones deben cumplir los escalares $y_1, y_2, y_3$, para que el sistema sea compatible?

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 = y_2 \\ x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \qquad \text{AX=H} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ -1 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & -1 & y_3 \end{bmatrix} \qquad [\text{AH}]$$

Reducimos por filas la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ -1 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & -1 & y_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -1 & -y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 + y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

Antes de obtener la escalón reducida por filas notamos que para que sea compatible debe verificarse: $\boxed{y_1 + y_2 + y_3 = 0}$. Esta es la condición a cumplir por los escalares $y_1, y_2, y_3$.

**Teorema**

Sea $AX = O$ un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas. Si $r(A) < n$, entonces el sistema tiene otras soluciones además de la solución trivial.

## Ejemplo

Observe los ejemplos 5, 6 y 7.

Ejemplo 5:
$r(A) = n = 2$ ; el sistema tiene únicamente la solución trivial.

Ejemplo 6:
$r(A) = 2;\ n = 3$ ; $r(A) < n$ ; el sistema tiene otras soluciones además de la trivial (tiene infinitas soluciones).

## Corolario

Sea $AX = O$ un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas. *Si* $m < n$, entonces el sistema siempre admite otras soluciones además de la trivial.

## Ejemplo

Observe el ejemplo 7.

$m = 2$; $n = 4$ ; $m < n$ ; el sistema tiene otras soluciones además de la trivial (tiene infinitas soluciones).

Note que si $m < n$, como $r(A) \leq m$, resulta $r(A) < n$; por lo que el enunciado del corolario es una consecuencia del teorema anterior.