INTEGRAL INDEFINIDA

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

Función Primitiva

Definición

Sea f función continua en un intervalo J.

F es una primitiva de f en J si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in J$.

Operación: Derivación

Función primitiva de f $\quad F \quad \rightleftarrows \quad f \quad$ Función derivada de F

Operación inversa: Integración o Integral Indefinida

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$.

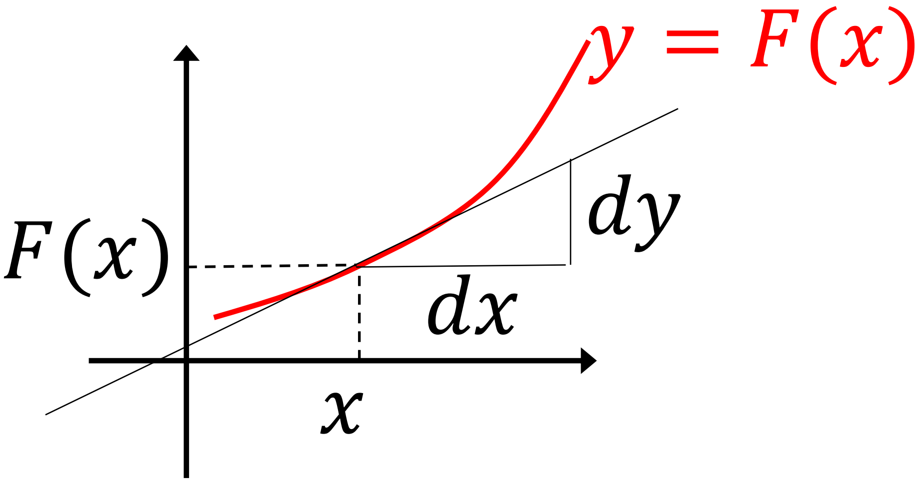
$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ es una primitiva de f porque

$$F'(x) = \left[\frac{x^3}{3} - 2\right]' = x^2 = f(x)$$

$G(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ es una primitiva de f porque

$$G'(x) = \left[\frac{x^3}{3} + 5\right]' = x^2 = f(x)$$

Notación



Sea F primitiva de f

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$$

$$d\,F(x) = f(x)\,dx$$

Elemento de Integración

Constante de Integración

Símbolo de la Integral

$$\int d\,F(x) = \boxed{\int \underbrace{\overbrace{f(x)\,dx}}_{} = \underbrace{F(x) + \boxed{C}}_{}}$$

Integral indefinida de f

Integrando

Familia de Primitivas

Propiedades de la Integral Indefinida

Sean f, g funciones continuas; $k \in \mathbb{R}$.

1. $$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\; dx$$

2. $$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\; dx + \int g(x)\; dx$$

Ejemplo

1. $\int 2 \operatorname{sen} x \, dx = 2 \int \operatorname{sen} x \; dx = 2\,(-\cos x) = -2\cos x + C$

2. $\int (\operatorname{sen} x \; + x) dx = \int \operatorname{sen} x \; dx + \int x \; dx = -\cos x + \frac{x^2}{2} + C$

Métodos de Integración: Integración Inmediata

1.	$\int dx = x + C$	7.	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
2.	$\int k \, dx = kx + C$	8.	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
3.	$\int x^m \, dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C; m \neq -1$	9.	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$
4.	$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	10.	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$
5.	$\int e^x \, dx = e^x + C$	11.	$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$
6.	$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$		

Ejemplo

1. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} x^{-\frac{2}{3}+1} = \boxed{3x^{\frac{1}{3}} + C}$

2. $\int 2^x dx = \boxed{\frac{2^x}{\ln 2} + C}$

3. $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx = 2\int x^{\frac{1}{2}} dx - \int \frac{1}{x} dx = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \ln|x| + C}$

Métodos de Integración: Integración por Sustitución

Sea $F\big(g(x)\big)$ una función compuesta; $F(x), g(x)$ derivables $\forall x \in J$

$$\big[F\big(g(x)\big)\big]' = F'\big(g(x)\big)g'(x)$$ Derivada de la función compuesta

$$\int F'\big(g(x)\big)g'(x)\ dx = F\big(g(x)\big) + C$$ Integral indefinida

Función interior

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\ dx = F\big(g(x)\big) + C$$

Función exterior

Métodos de Integración: Integración por Sustitución

$$u = g(x) \implies u' = \frac{du}{dx} = g'(x) \quad ; \quad du = g'(x)dx = u'dx$$

Sea $F(u)$ Función compuesta

$[F(u)]' = f(u)$ Derivada de $F(u)$

$\int F'(u)\,du = F(u) + C$ Operación inversa

$\int F'(g(x))\,g'(x)dx = F(g(x)) + C$ Integral indefinida

$$\boxed{\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)}_{u'}dx = F(g(x)) + C}$$

Ejemplo

1. $$\int \sqrt{\underbrace{(x^2+1)}_{u}}\,\underbrace{2x}_{u'}\,dx =$$

Identificamos u

$$= \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

Reescribimos

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C}$$

Integración inmediata

Ejemplo

2. $\int \sqrt{\underset{\uparrow \atop u}{(x^2+1)}}\, x\, dx =$ Identificamos u

$= \frac{1}{2} \int \sqrt{\underset{\uparrow \atop u}{(x^2+1)}}\, \underset{\uparrow \atop u'}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}}\, du =$ Reescribimos

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} u^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C}$ Integración inmediata

Ejemplo

3. $\int x \operatorname{sen}(x^2+3)\,dx =$ Identificamos u

$$\underbrace{x^2+3}_{u}$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{u'} \operatorname{sen}(\underbrace{x^2+3}_{u})\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(u)\,du =$$

Reescribimos

$$= -\frac{1}{2}\cos(u) = \boxed{-\frac{1}{2}\cos(x^2+3) + C}$$

Integración inmediata

Ejemplo

4. $$\int \underbrace{\operatorname{sen}^2(3x)}_{u} \cos(3x)\, dx =$$

Identificamos u

$$= \frac{1}{3} \int \underbrace{3\cos(3x)}_{u'} \left(\underbrace{\operatorname{sen}(3x)}_{u}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \int u^2\, du =$$

Reescribimos

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{3}u^3 = \boxed{\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3(3x) + C}$$

Integración inmediata

Ejemplo

5. $$\int \frac{x}{\underbrace{3x^2}_{u} - 1}\,dx =$$

Identificamos u

$$u'$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6x}{\underbrace{3x^2 - 1}_{u}}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\,du =$$

Reescribimos

$$= \frac{1}{6}\ln|u| = \boxed{\frac{1}{6}\ln|3x^2 - 1| + C}$$

Integración inmediata

Métodos de Integración: Integración por Partes

Sean u, v derivables $$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad ;$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

Si u' y v' son continuas:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Fórmula de la Integración por partes

Métodos de Integración: Integración por Partes

Es útil en los siguientes casos: Sea $P_n(x)$ un polinomio.

1. $\int P_n(x) \operatorname{sen} x \, dx$ o $\int P_n(x) \cos x \, dx$
2. $\int P_n(x) \, e^x \, dx$
3. $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ o $\int e^x \cos x \, dx$
4. $\int P_n(x) \operatorname{arcsen} x \, dx$ o $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x \, dx$
5. $\int P_n(x) \ln x \, dx$
6. Algunas integrales irracionales. Por ejemplo: $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$

Identificación de u y dv:

Si $h(x) = \begin{cases} e^x \\ \operatorname{sen} x \\ \cos x \end{cases}$

entonces

$$\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \underbrace{h(x)\,dx}_{dv}$$

Si $h(x) = \begin{cases} \ln x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcsen} x \end{cases}$

entonces

$$\int \underbrace{h(x)}_{u} \underbrace{P_n(x)\,dx}_{dv}$$

Ejemplo

1. $\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x\, dx}_{dv}$

Identificamos u y dv

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x dx \qquad v = \int e^x\, dx = e^x$

Derivamos u
e integramos dv

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du = xe^x - \int e^x\, dx$$

Reemplazamos
en la Fórmula

$$xe^x - \int e^x\, dx = \boxed{xe^x - e^x + C}$$

Resolvemos

Ejemplo

2. $$\int \underbrace{\ln(x)}_{u}\ \underbrace{x\,dx}_{dv}$$

Identificamos u y dv

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x\,dx \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Derivamos u
e integramos dv

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx$$

Reemplazamos
en la Fórmula

$$\ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx = \boxed{\ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C}$$

Resolvemos

Ejemplo

3. $$\int \underbrace{\ln(x)}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$$

Identificamos u y dv

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \qquad v = \int dx = x$$

Derivamos u
e integramos dv

$$\ln(x)x - \int dx =$$

Reemplazamos
en la Fórmula

$$= \boxed{\ln(x)x - x + C}$$

Resolvemos

Ejemplo

4. $$\int \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv} =$$ (1)

Elegimos u y dv

$$u = \operatorname{sen}(x) \qquad du = \cos(x)dx$$

$$dv = e^x dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

Derivamos u
e integramos dv

$$= \operatorname{sen}(x)e^x - \underbrace{\int \cos(x)e^x\, dx}_{I} =$$ (2)

Reemplazamos
en la Fórmula

$$I = \int \cos(x)e^x\, dx$$

Resolvemos I
por Partes

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

$$I = \int \underbrace{\cos(x)}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv}$$

Identificamos u y dv

$u = cos(x)$ $\qquad du = -\operatorname{sen}(x)dx$

Derivamos u
e integramos dv

$dv = e^x dx$ $\qquad v = \int e^x dx = e^x$

$$I = \cos(x)e^x - \int -\operatorname{sen}(x)e^x\,dx$$

Reemplazamos
en la Fórmula

$$= \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx$$

Reemplazamos I
en (2)

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo Reescribimos la integral (1):

$$\int \operatorname{sen}(x)\, e^{x} dx = \operatorname{sen}(x)e^{x} - \cos(x)e^{x} - \underbrace{\int \operatorname{sen}(x)e^{x}\, dx}_{II}$$

$$2\int \operatorname{sen}(x)\, e^{x} dx = \operatorname{sen}(x)e^{x} - \cos(x)e^{x}$$

Escribimos II en el primer miembro de (1)

$$\boxed{\int \operatorname{sen}(x)\, e^{x} dx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x)e^{x} - \cos(x)e^{x}] + C}$$

Despejamos la Integral del ejercicio de (1)

Ejemplo

5. $$\int \underbrace{\operatorname{arcsen}(x)}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} =$$

Identificamos u y dv

$$u = \operatorname{arcsen} x \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv = dx \qquad v = \int dx = x$$

Derivamos u
e integramos dv

$$= \operatorname{arcsen}(x)x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

Reemplazamos
en la Fórmula

$$= \boxed{\operatorname{arcsen}(x)x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

Resolvemos

Ejemplo

$$6. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{dv} \quad (1)$$

Identificamos u y dv

$u = x \qquad du = dx$

Derivamos u e integramos dv

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \underbrace{\int \sqrt{1-x^2}dx}_{I} \quad (2)$$

Reemplazamos en la Fórmula

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

$$I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

Resolvemos I

$$= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen } x - \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{II}$$

Reemplazamos *I* en (2)

$$2\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen } x$$

Escribimos *II* en el primer miembro de (1)

$$\boxed{\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen } x\right) + C}$$

Despejamos la integral del ejercicio

Métodos de Integración: Integración de Funciones Racionales

Sea $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde $P(x), Q(x)$ son polinomios a coeficientes reales y $g(P) < gr(Q)$.

a. Factorice Q. Por ejemplo:

$$Q(x) = (x - r)(x - s)^3(x^2 + bx + c)$$

r: raíz real simple

s: raíz real con orden de multiplicidad 3

Polinomio con raíces complejas conjugadas simples.

Nota: no vemos el caso de raíces complejas conjugadas múltiples.

b. Descomponga $\frac{P}{Q}$ en fracciones simples. Siguiendo el ejemplo:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{(x-r)} + \frac{B}{(x-s)^3} + \frac{C}{(x-s)^2} + \frac{D}{(x-s)} + \frac{Ex+F}{(x^2+bx+c)}$$

c. Determine los coeficientes A, B, C ..., etc.

d. Integre las fracciones simples.

Nota: Si el coeficiente principal de Q no es 1 se puede escribir en el numerador.

Ejemplo

1. $\displaystyle\int \frac{4x^3 + 10x^2 - x - 13}{2x^2 + 2x - 4}\,dx$

Dado que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador hacemos la división:

$$\int \frac{P}{Q}\,dx = \underbrace{\int C\,dx}_{I} + \underbrace{\int \frac{R}{Q}\,dx}_{II}$$

C: Cociente

R: Resto

Integración inmediata

Descomposición en fracciones simples

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

$$\int \frac{4x^3 + 10x^2 - x - 13}{2x^2 + 2x - 4}\,dx = \underbrace{\int (2x+3)\,dx}_{I} + \underbrace{\int \frac{x-1}{2x^2+2x-4}\,dx}_{II}$$

$I = x^2 + 3x$ Por Integración Inmediata

$II = \dfrac{x-1}{2x^2+2x-4}$ Descomponemos en fracciones simples

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo Descomposición en fracciones simples:

a. II: $\dfrac{x-1}{2x^2+2x-4} = \dfrac{x-1}{2(x-1)(x+2)} =$ Factorizamos Q

$$= \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{(x-1)(x+2)}$$

Escribimos el coeficiente principal de Q en el numerador

b. II: $\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$ Descomponemos en fracciones simples

Continúa

Ejemplo

c. Obtención de los coeficientes

$$II: \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = A(x+2) + B(x-1)$$

Multiplicamos ambos miembros por el denominador

$$\begin{cases} -3B = -\dfrac{3}{2} \\ 2A = 0 \end{cases} \qquad S = (A, B) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Hacemos $x = -2$ y $x = 1$ para formar un sistema de ecuaciones lineales

$$II: \quad \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+2}$$

Reemplazamos los coeficientes A y B por los valores hallados

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

d. $$II = \int \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+2} dx$$

$$II = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x+2|$$

Integramos por Sustitución de Variable

$$\boxed{I + II = x^2 + 3x + \frac{1}{2} \ln|x+2| + C}$$

Ejemplo 2. $$\int \frac{x+3}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$$

Dado que el grado del numerador es menor que el grado del denominador descomponemos en fracciones simples.

a. $$\frac{x+3}{(x-1)^3} =$$

Factorizamos Q

b. $$= \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} =$$

Descomponemos en fracciones simples

c. $$= \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Determinamos los coeficientes A, B y C

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

d. $$= \int \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

$$= \boxed{-2\,\frac{4}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} + C}$$

Integramos por Sustitución de Variable

Ejemplo

3. Sea $$\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}dx =$$

El denominador tiene raíces complejas conjugadas simples y ya es una fracción simple

$$= \frac{3}{2}\int \underbrace{\frac{2x+\frac{2}{3}}{x^2+x+1}}_{u} dx = \frac{3}{2}\int \frac{\overbrace{2x+1}^{u'}-\frac{1}{3}}{\underbrace{x^2+x+1}_{u}} dx =$$

Transformamos la fracción para que se aproxime a la forma $\frac{u'}{u}$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}_{I} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}dx}_{II} =$$

Descomponemos la integral en una suma de integrales

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

$$\color{red}{I} = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|x^2+x+1|$$

$$\color{green}{II} = \int \frac{1}{\underbrace{x^2+x+1}_{\text{Completamos cuadrados}}}\,dx =$$

Continúa

Ejemplo

Completar cuadrados:

$$\text{Sea} \quad x^2 + bx + \mathrm{c} = \underbrace{\left[x^2 + 2\frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}_{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2} + \underbrace{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{p} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + p$$

$$x^2 + x + 1 = \left[x^2 + 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Continúa

Ejemplo

$$II=\int \frac{1}{x^2+x+1}dx=\int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{1+\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}}dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{1+\Bigg(\underbrace{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}_{u}\Bigg)^2}\underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}_{du}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Continúa

Continúa de filmina anterior

Ejemplo

$$= \underbrace{\frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx}_{I} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx}_{II} =$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C}$$

Métodos de Integración: Integración de Funciones Irracionales

Sea $\int f\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$

donde $p_i, q_i \in \mathbb{Z}; q_i \neq 0 \forall i \in \mathbb{N};$
$k \in \mathbb{N};\ i = 1,2,\dots,k;$
f es una función racional

Ejemplo: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$

Sustitución: $\boxed{x = t^m}$ $\qquad dx = mt^{m-1}dt$

$$m = \mathrm{m.c.m.}\{q_i\}$$

Ejemplo

1. Sea $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$

Sustitución $x = t^6$; $t = x^{\frac{1}{6}}$; $dx = 6t^5dt$; $6 = \mathrm{m.c.m.}\{2,3\}$

$$\int \frac{1}{(t^6)^{\frac{1}{3}}+(t^6)^{\frac{1}{2}}}6t^5dt = 6\int \frac{t^5}{t^2+t^3}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt =$$

$$= 6\int (t^2-t+1)dt + 6\int \frac{-1}{t+1}dt = 2t^3-3t^2+6t-6\ln|1+t| =$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - 6\ln\left|1+\left(x^{\frac{1}{6}}\right)\right| =$$

$$= \boxed{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C}$$

Métodos de Integración: Integración de Funciones Racionales de seno y de coseno

Sea $\displaystyle\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ donde f es una función racional

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + 3}\,dx$

Sustitución: $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ (sustitución universal)

$$\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

Ejemplo

1. Sea $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + 3}\,dx$

$$\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{4+2t^2}\,dt = \int \frac{1}{2+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C}$$

Métodos de Integración:
Integración de Potencias de seno y de coseno

Sea $\int \operatorname{sen}^m(x)dx$ o $\int \cos^m(x)\, dx$

I. m es par

Sustitución $\boxed{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$ $\boxed{\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$

II. m es impar

Reemplace

$$\boxed{\begin{aligned}\cos^m(x) &= \cos^{m-1}(x)\cos(x) = \cos^{2p}(x)\cos(x) = \\ &= (1-\operatorname{sen}^2(x))^p \cos(x)\end{aligned}}$$

Ejemplo

1. Sea $\int \cos^4 x \, dx =$

$$= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int [1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)]dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos(2x) + \left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(4x)}{2}\right] dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C}$$

Ejemplo

2. Sea $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx =$

$$= \int \operatorname{sen}^4(x)\operatorname{sen}(x)dx = \int [1-\cos^2(x)]^2 \operatorname{sen}(x)dx =$$

$$= \int [\operatorname{sen}(x) - 2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) + \cos^4(x)\operatorname{sen}(x)]dx =$$

$$= \boxed{-\cos(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x) + C}$$