# LÍMITES

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

# LÍMITES

## Entornos abiertos simétricos

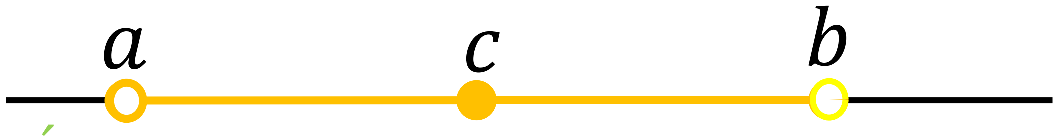
Sean $a, b \in \mathbb{R}; a < b$.

$c = \frac{a+b}{2}$ centro del intervalo $(a, b)$.

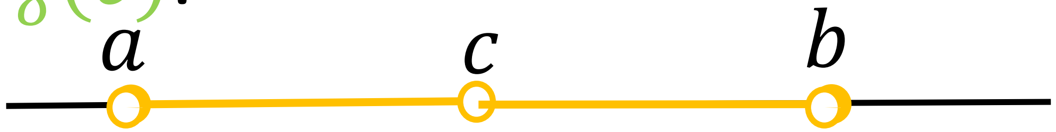
$\delta = c - a = b - c$ ;

$\delta > 0$ radio de $(a, b)$.

$V_\delta(c)$:




$V'_\delta(c)$:




$V_\delta(c), V'_\delta(c)$: Conjuntos de puntos que distan de $c$ una distancia menor que $\delta$.

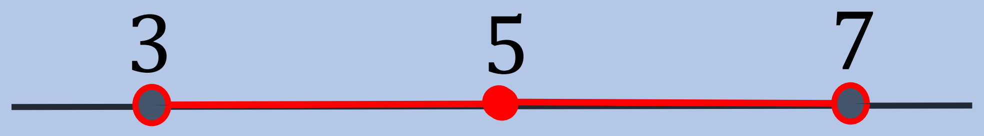
$V_\delta(c) = \{x \epsilon \mathbb{R} / |x - c| < \delta\}$ Entorno de centro $c$ y radio $\delta$.

$V'_\delta(c) = \{x \epsilon \mathbb{R} / 0 < |x - c| < \delta\}$ Entorno reducido de centro $c$ y radio $\delta$.

# Ejemplo

Exprese el intervalo $(3,7)$ como entorno abierto simétrico.

$V_2(5)$:



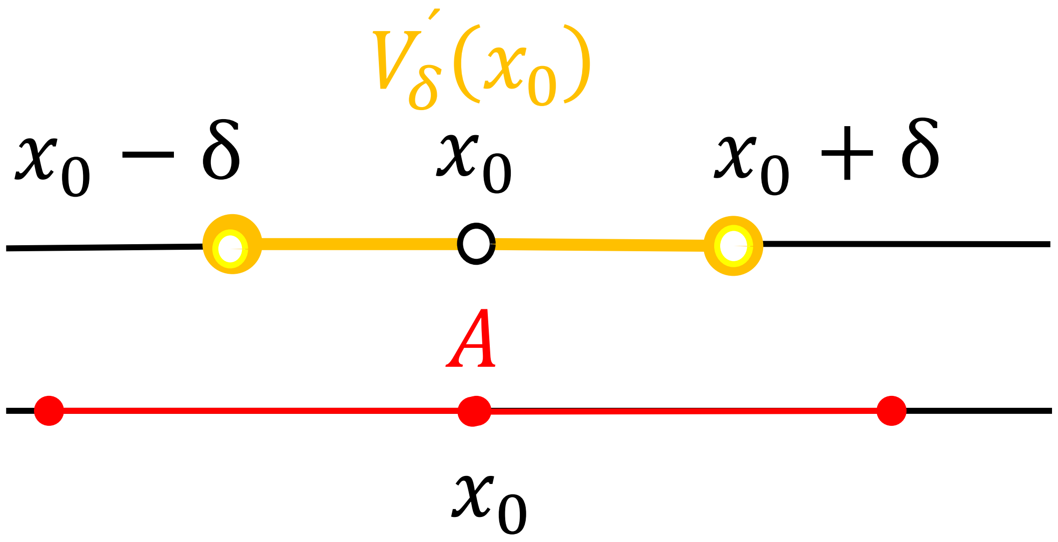

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$\delta = c - a = 5 - 3 = 2$$

$V_2(5) = \{x \epsilon \mathbb{R} / |x-5| < 2\}$ Entorno de centro 5 y radio 2.

$V_2(5)$: conjunto de puntos que está a una distancia de 5 menor que 2.

## Punto de acumulación de un conjunto




## Definición

Sean $A \subset \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathbb{R}$.

$x_0$ es un punto de acumulación de $A$ si $\forall\, V_\delta'(x_0)$: $V_\delta'(x_0) \cap A \neq \emptyset$.

**Nota**: si $x_0$ es punto de acumulación de un conjunto $A$, entonces es posible aproximarse a $x_0$, con elementos de $A$ y distintos de $x_0$, tanto como se desee.

**Ejemplo**

1. Sean $A = (a, b)$ intervalo abierto; $x_0 \in A$.

   $x_0$ es punto de acumulación de $A$.

2. $A = (a, b)$; $x_0 \notin A, x_0 \neq a, x_0 \neq b$.

   $x_0$ no es punto de acum. de $A$.

3. $A = (a, b)$; $x_0 = a$.

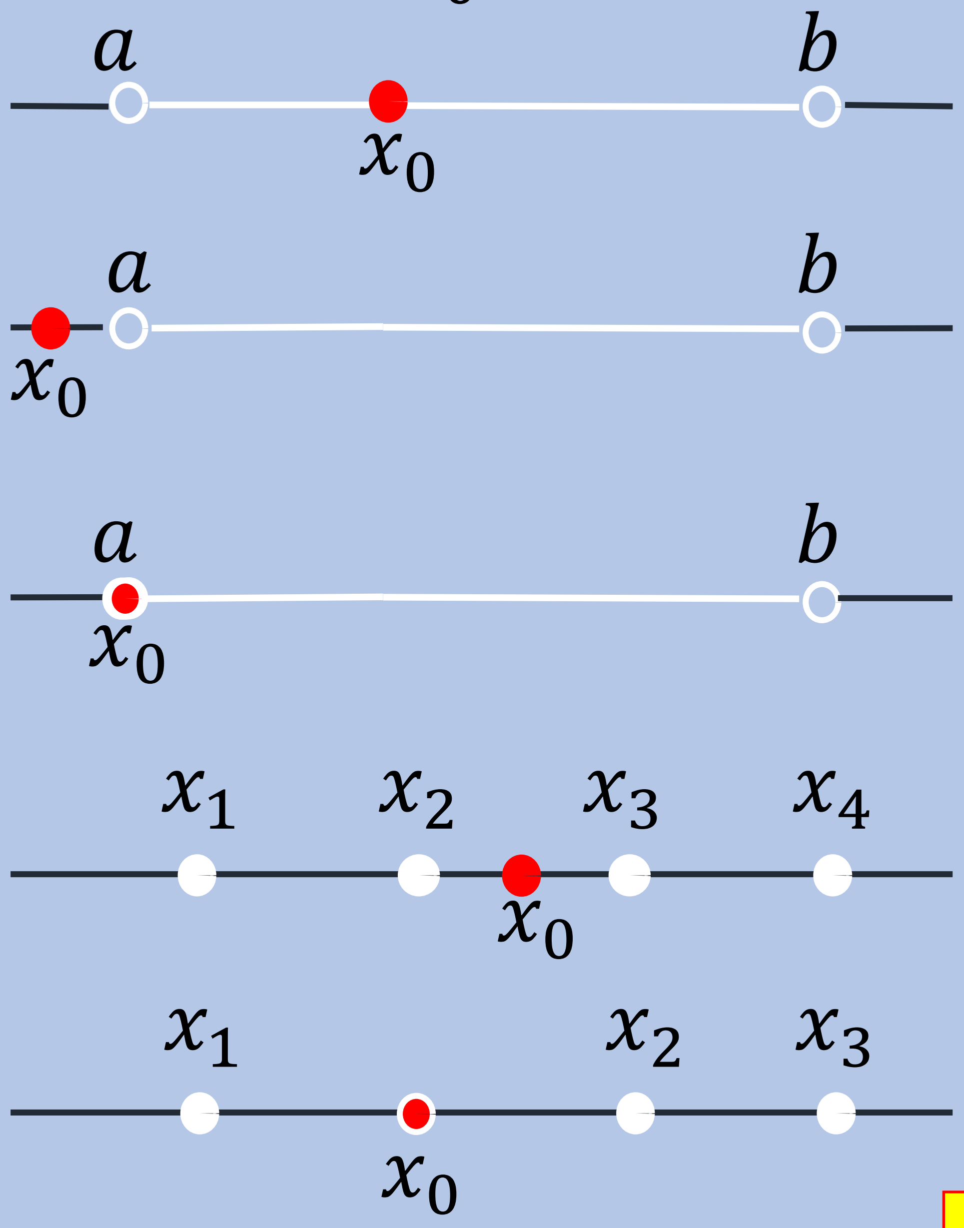
   $x_0$ es punto de acum. de $A$.

4. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $x_0 \notin A$.

   $x_0$ no es punto de acum. de $A$.

5. $A = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$.

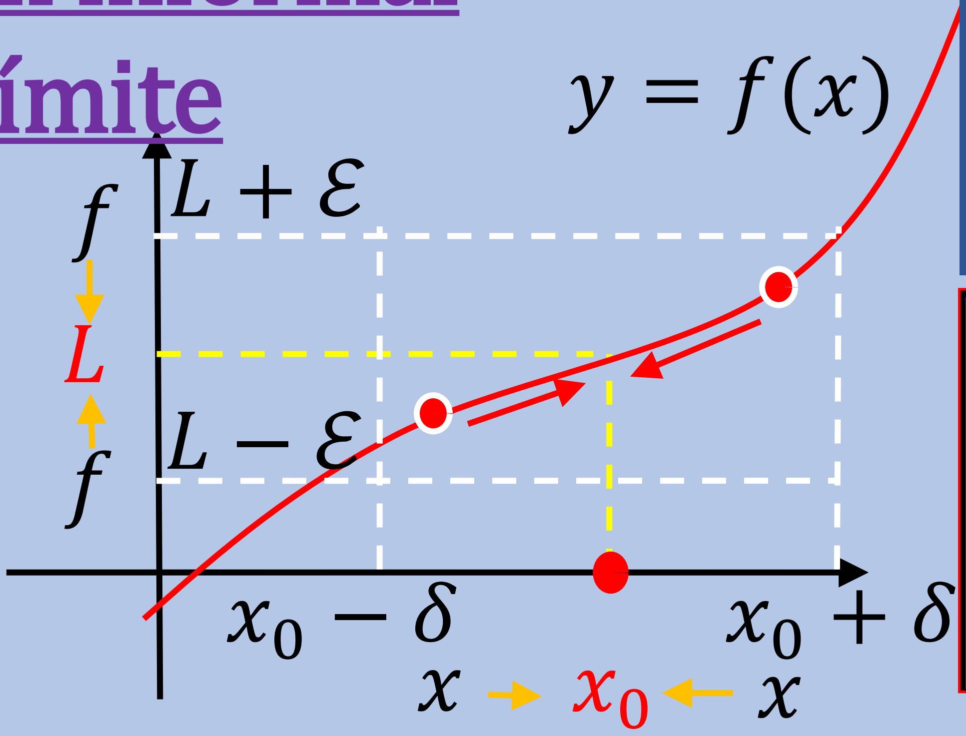
   $x_0$ no es punto de acum. de $A$.



# Límite de una función

## Definición informal de límite

$x_0$: punto de acum. de $D_f$.




"$f$ se aproxima a $L$ tanto como se desee":

$$\forall \varepsilon > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$$

"con tal de que $x$ se aproxime a $x_0$ lo suficiente":

$$\exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se dice que "**el límite de $f$, cuando $x$ tiende a $x_0$, es $L$**" si $f$ se aproxima a $L$ tanto como se desee, con tal de que $x$ se aproxime a $x_0$ lo suficiente.

# Límite de una función

## Definición

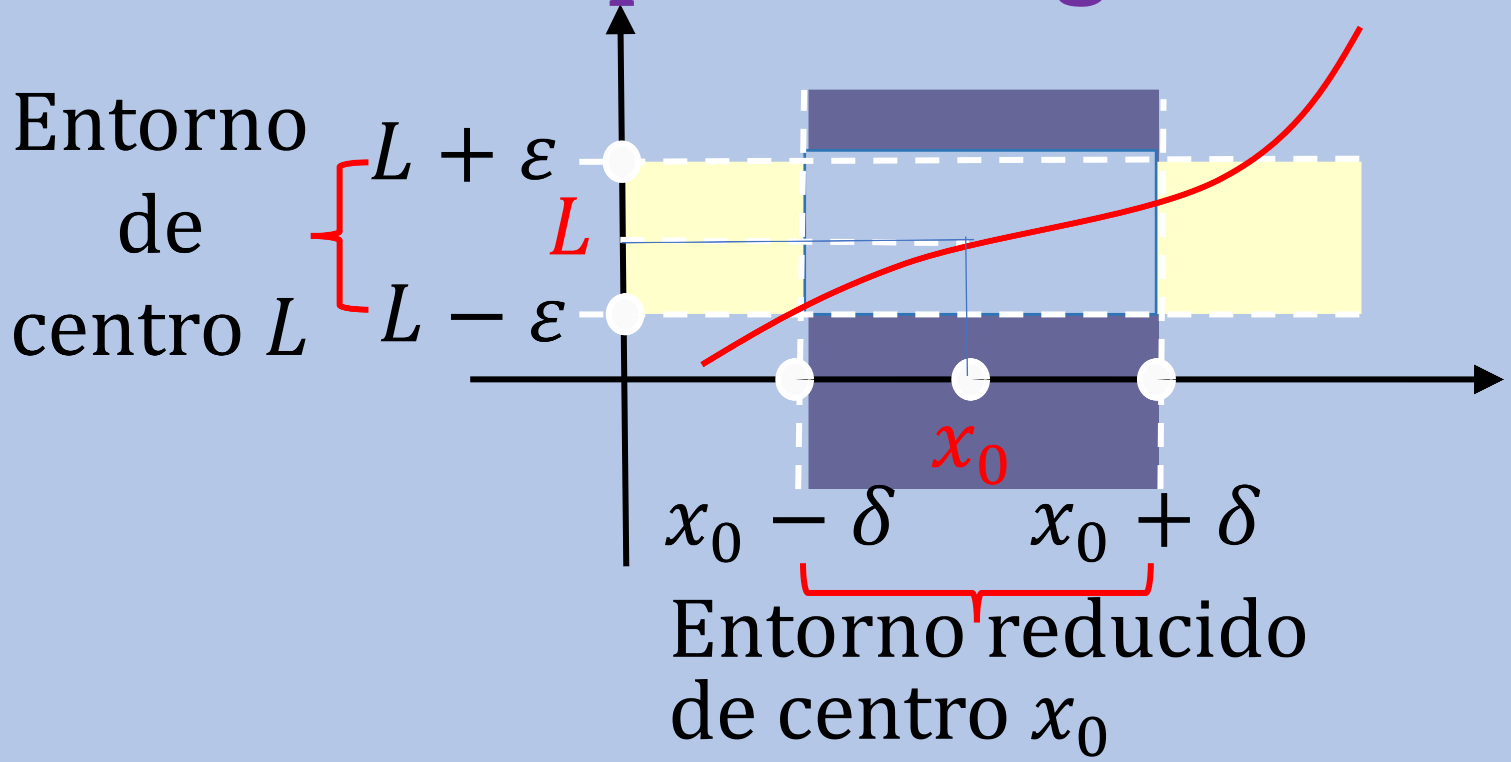
El límite de una función $f$, en un punto de acumulación de su dominio $x_0$, es el número $L$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; x \in D_f \;\text{ y }\; 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ o bien $\lim_{x_0} f(x) = L$

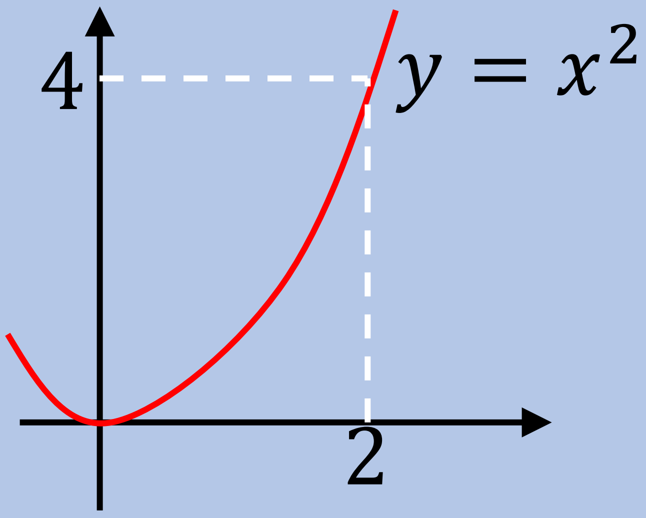
y se lee "El límite de $f$, cuando $x$ tiende a $x_0$, es $L$".

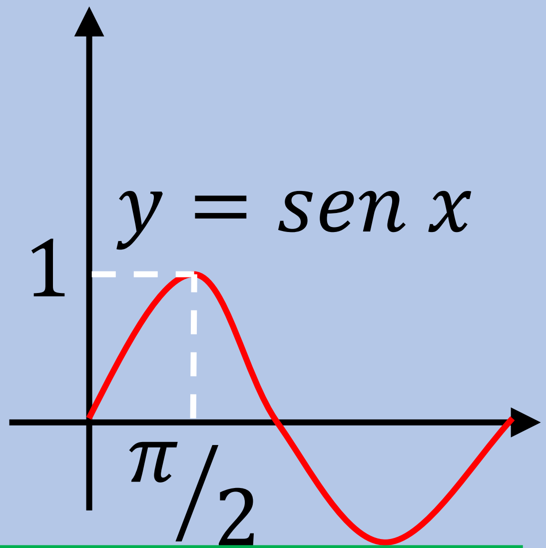
# Interpretación gráfica

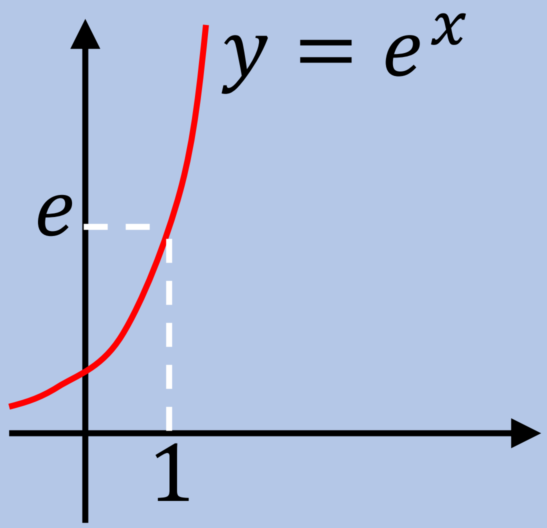


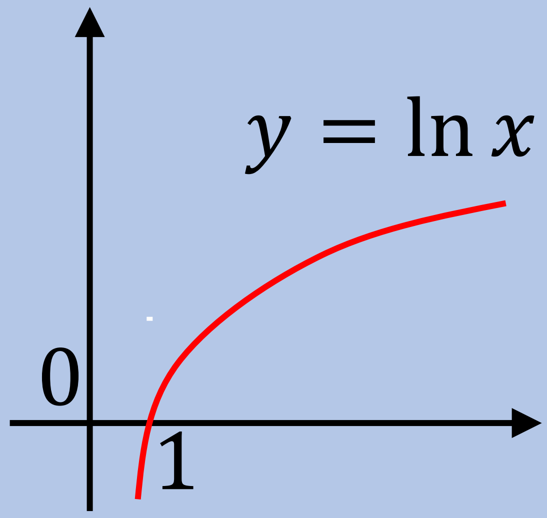

El límite de $f$, en el punto de acumulación de su dominio $x_0$ es $L$, si para todo entorno de centro $L$, tan pequeño como se desee, es posible hallar un entorno reducido de centro $x_0$ tal que, si $x$ pertenece al entorno reducido de centro $x_0$, $f(x)$ pertenece al entorno de centro L.

**Ejemplo** En las funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, si no se anula el denominador, si no cambia la definición de la función y si la función está definida en un punto $x_0$, entonces el límite de la función en el punto $x_0$ se obtiene reemplazando $x$ por $x_0$.



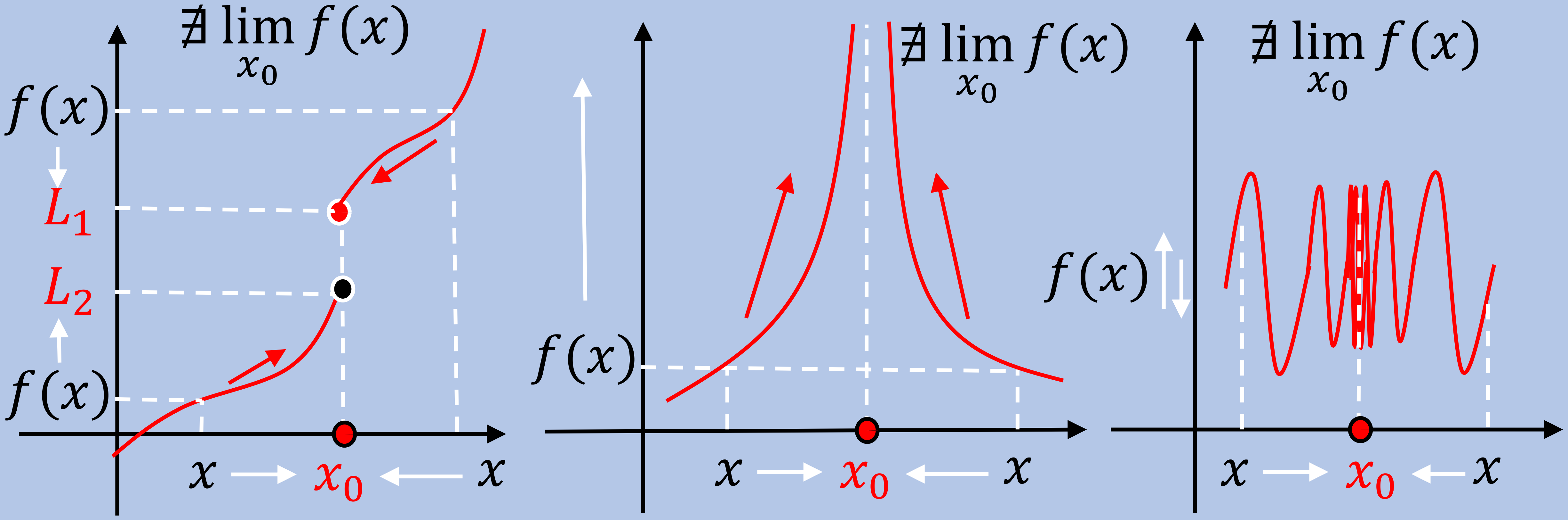

$$\lim_{2} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{\pi/2} sen\ x = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{1} e^x = e^1 = e$$

$$\lim_{1} \ln x = \ln 1 = 0$$

# No existencia de límite



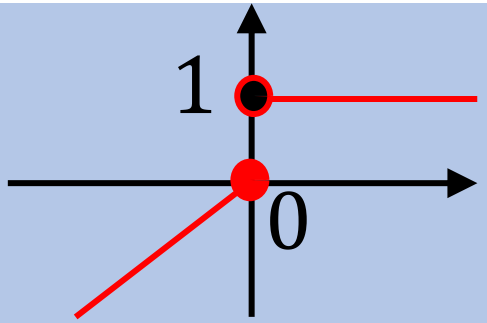

$f$ tiende a valores distintos por izquierda y por derecha.

$f$ crece ilimitadamente

$f$ oscila

## Ejemplo

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$




Límite izquierdo:

$$\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^-} x = 0$$

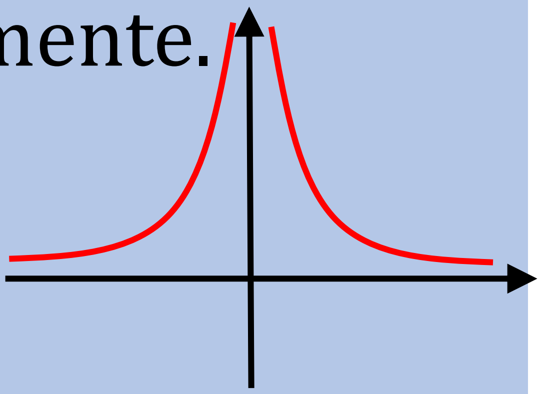
Límite derecho:

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} 1 = 1$$

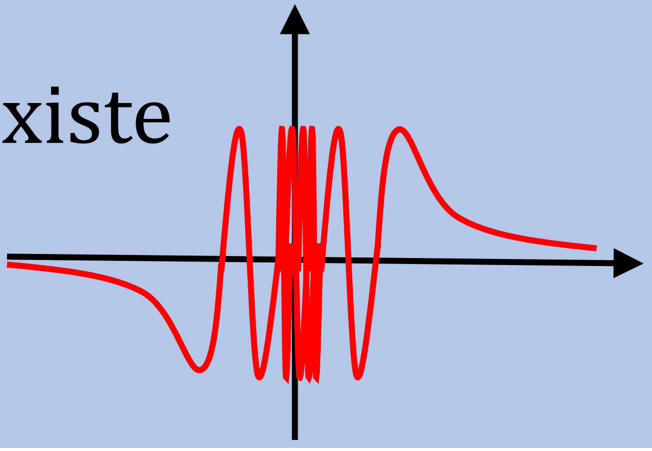
El límite no existe porque $\lim\limits_{0^-} f(x) \neq \lim\limits_{0^+} f(x)$

Más adelante definiremos "Límite izquierdo" y "Límite derecho".

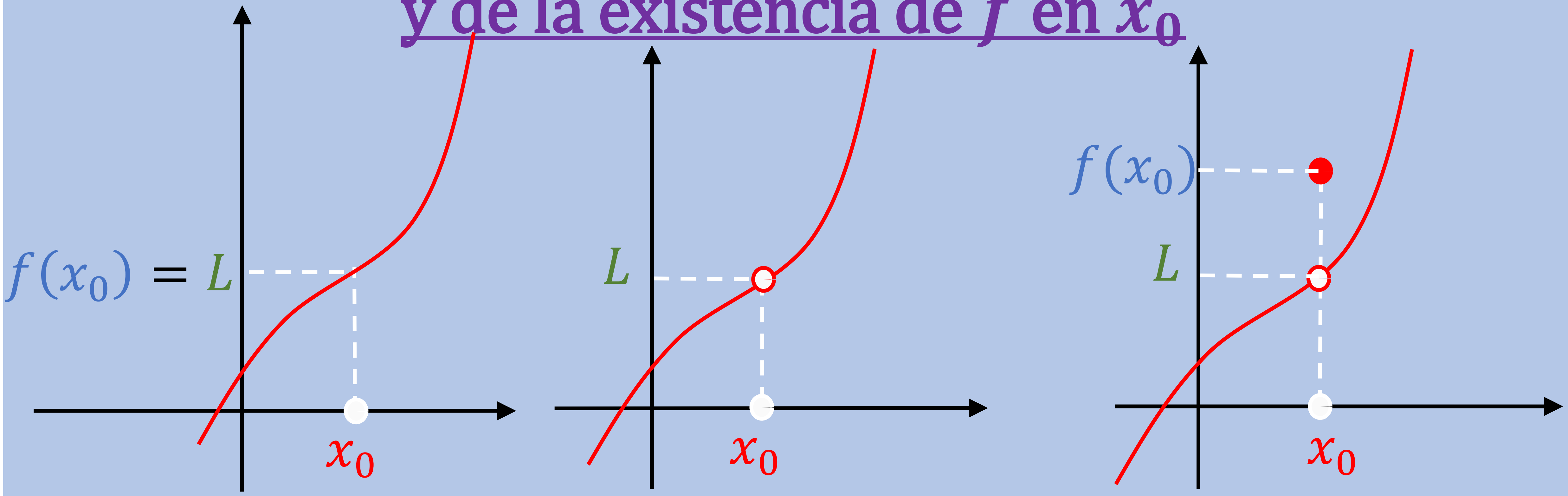
2. $\lim\limits_{0} \frac{1}{x^2}$; el límite no existe porque $f$ crece ilimitadamente.



3. $\lim\limits_{0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$; el límite no existe porque $f$ oscila.



# El límite es independiente del valor de $f$ en $x_0$ y de la existencia de $f$ en $x_0$




$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

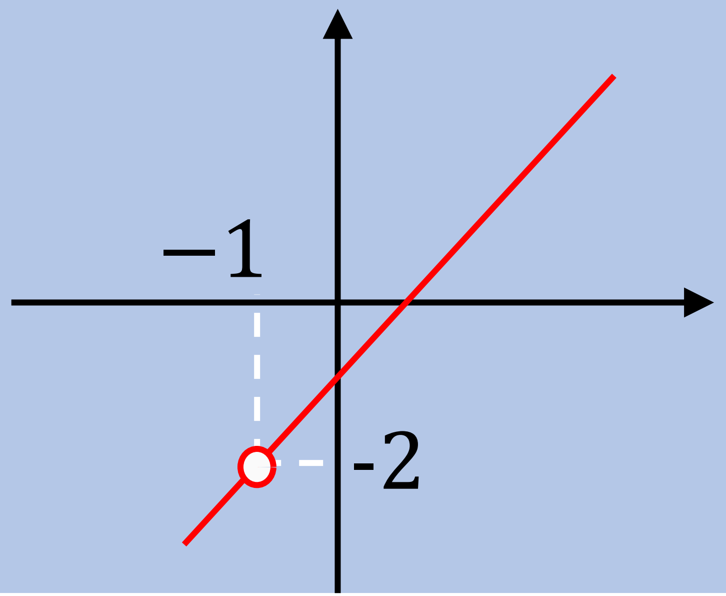
$$f(x_0) = L \qquad \nexists f(x_0) \qquad f(x_0) \neq L$$

## Ejemplo

Calcule $\lim\limits_{-1} \frac{x^2-1}{x+1}$

Al reemplazar $x$ por $-1$ se anula el numerador y el denominador. Se trata de una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Si el numerador y el denominador son polinomios se debe factorizar y simplificar.

$$\lim_{-1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{-1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = \lim_{-1} x-1 = (-1)-1 = -2$$



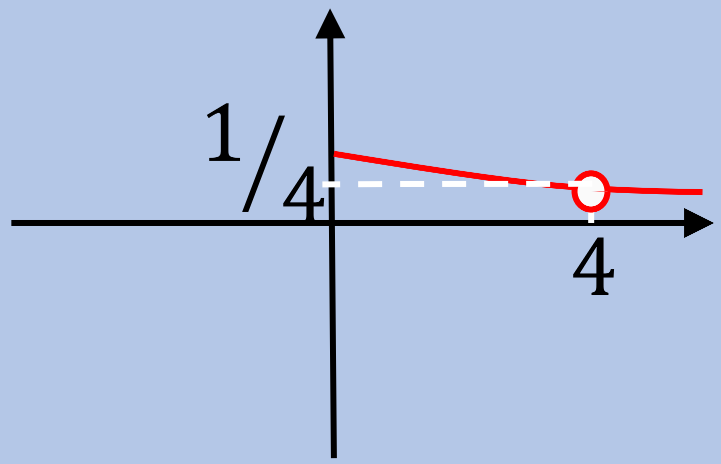

La función no está definida en $x=-1$; sin embargo el límite existe en $x=-1$.

## Ejemplo

Calcule $\lim\limits_{4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Al reemplazar $x$ por 4 se anula el numerador y el denominador. Se trata de una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión irracional.

$$\lim_{4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$




$$= \lim_{4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

La función no está definida en $x = 4$; sin embargo el límite existe en $x = 4$.

**Lema:** Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $\forall \mathcal{E} > 0$: $|a| < \mathcal{E} \implies a = 0$.

Demostración:

Supongamos $a \neq 0$.

Entonces $\frac{1}{2}|a| > 0$

Si $\mathcal{E} = \frac{1}{2}|a|$ , por hipótesis: $|a| < \frac{1}{2}|a|$; lo que es falso.

Entonces $a = 0$ es verdadero.

# Observación

Supongamos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Entonces dado un cierto $\varepsilon > 0$,

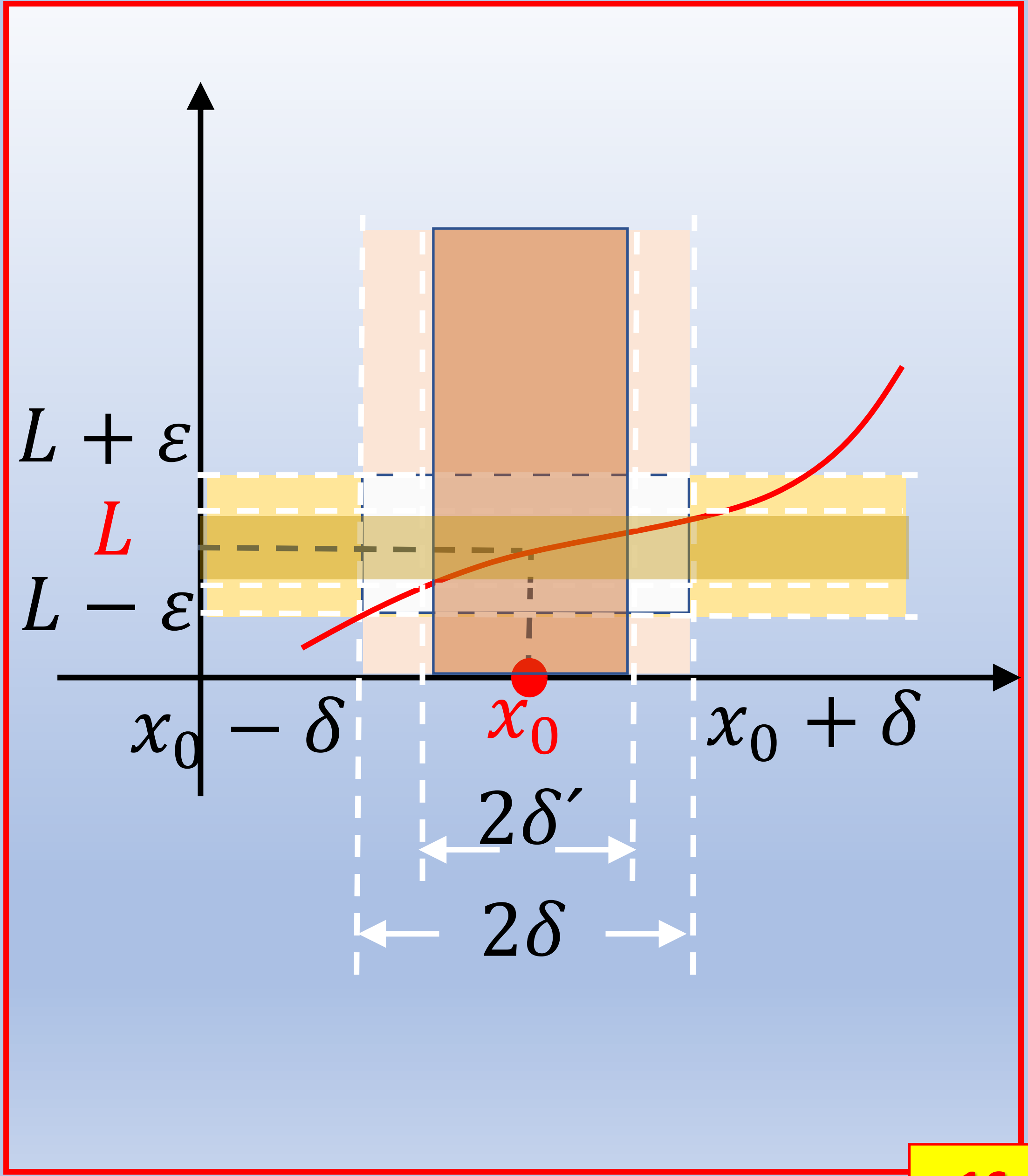
es posible hallar un $\delta > 0$ tal que, si

$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

En el gráfico se puede observar que

si $\delta' < \delta$ y $0 < |x - x_0| < \delta'$

se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.



## Teorema de la unicidad del límite

Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x_0} f(x) = L_2$ ; entonces $L_1 = L_2$.

Demostración:

Sean $\lim\limits_{x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x_0} f(x) = L_2$.

Entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1) \text{ y}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2).$$

Continúa

Si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}, x \in D_f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$; por la observación de la filmina 15 se cumplen (1) y (2):

$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; de modo que

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$

$$|L_1 - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En definitiva: $|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$;

por lo que en virtud del lema de la filmina 14: $|L_1 - L_2| = 0$

Por consiguiente $L_1 = L_2$; es decir, el límite es único.

## Teorema de intercalación

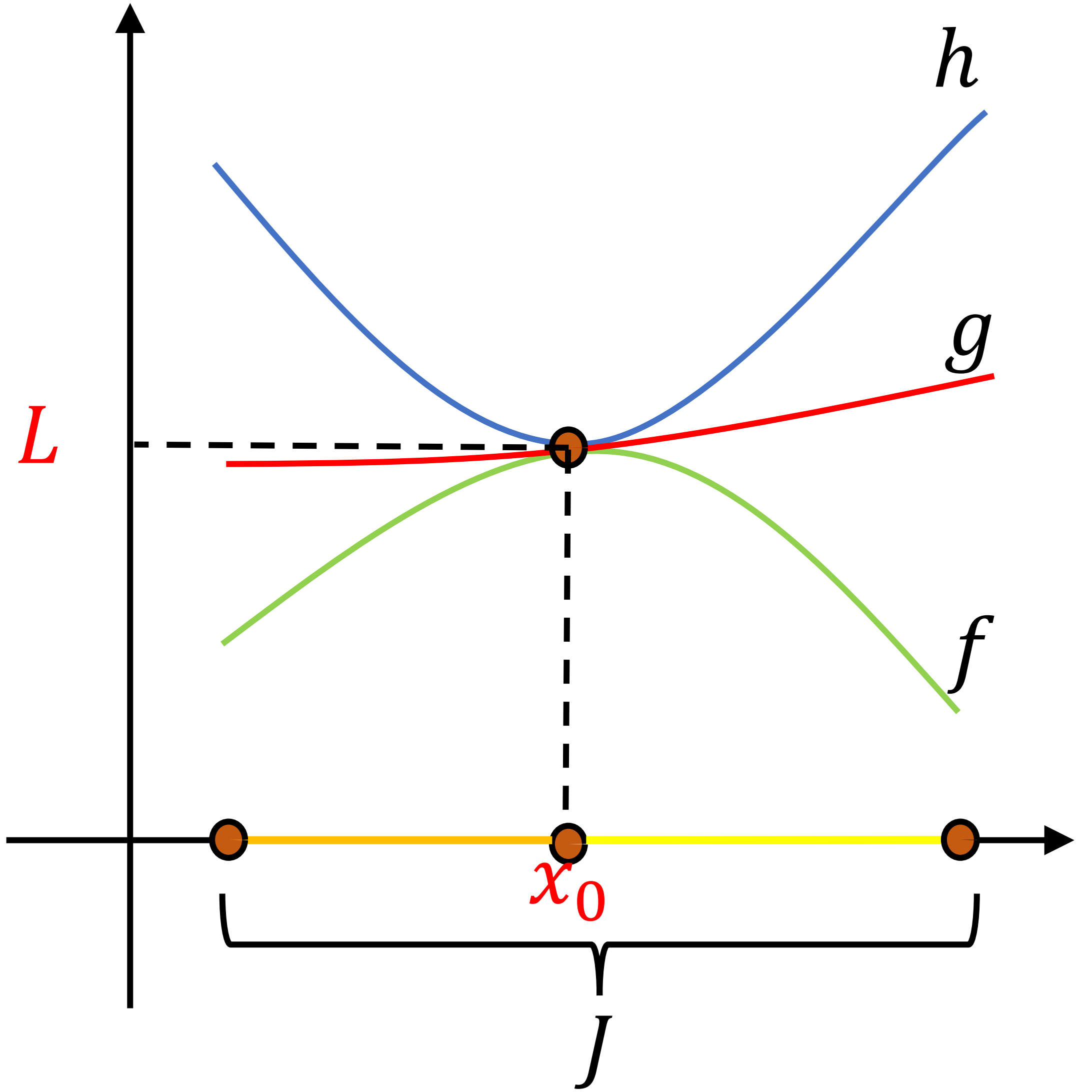
Sean $J$ un intervalo abierto y $x_0 \in J$.

Si $\forall x \in J$ y $x \neq x_0$:

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y

$$\lim_{x_0} f(x) = \lim_{x_0} h(x) = L$$

entonces $\lim_{x_0} g(x) = L$.




**$\lim_{x_0} g(x) = L$**

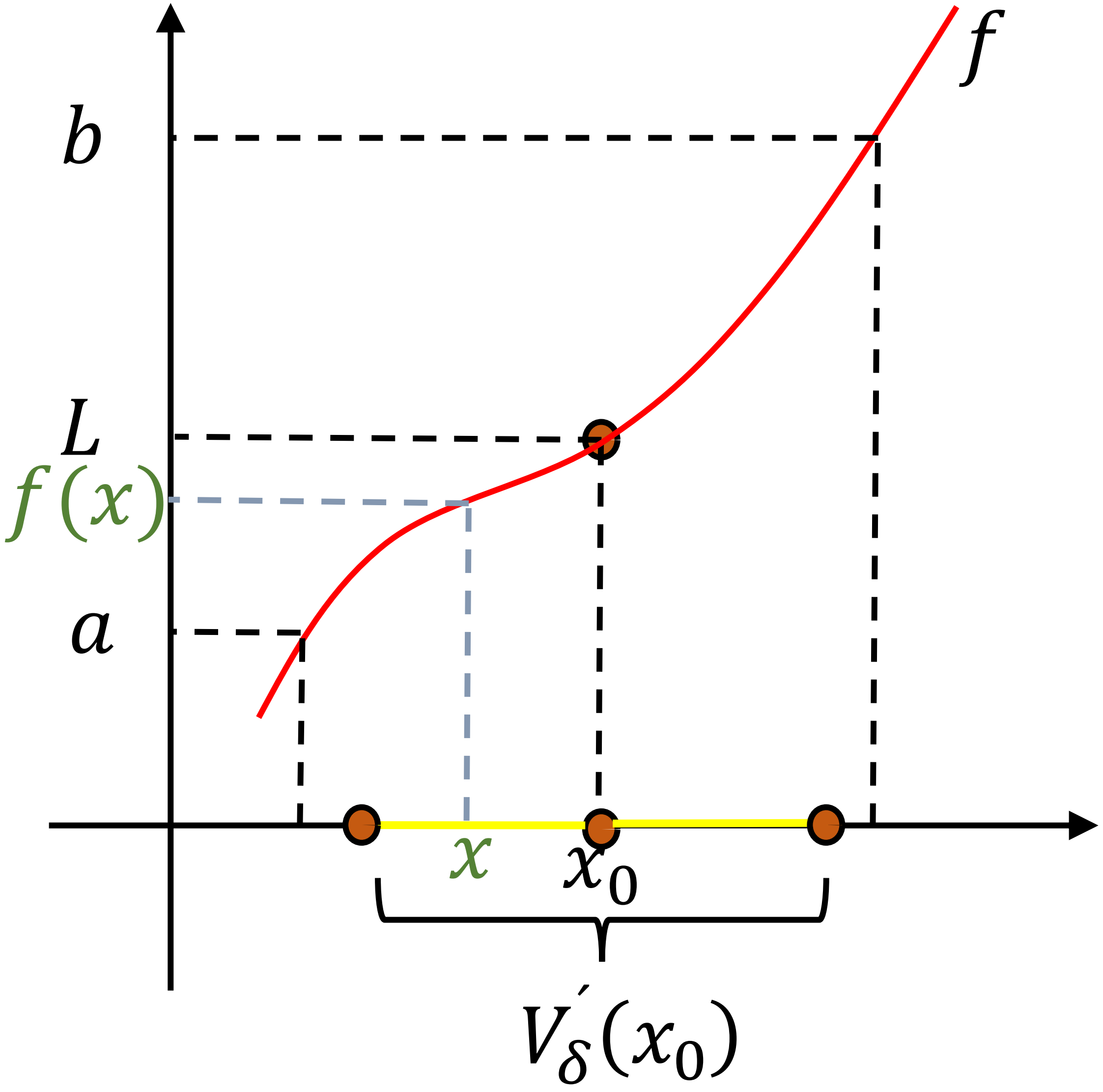
Teorema

Sea $\lim\limits_{x_0} f(x) = L$ y

$a < L < b$.

Entonces $\exists V'_\delta(x_0)/$

$a < f(x) < b \quad \forall x \in V'_\delta(x_0)$.




$x \in V'_\delta(x_0) \Longrightarrow a < f(x) < b$

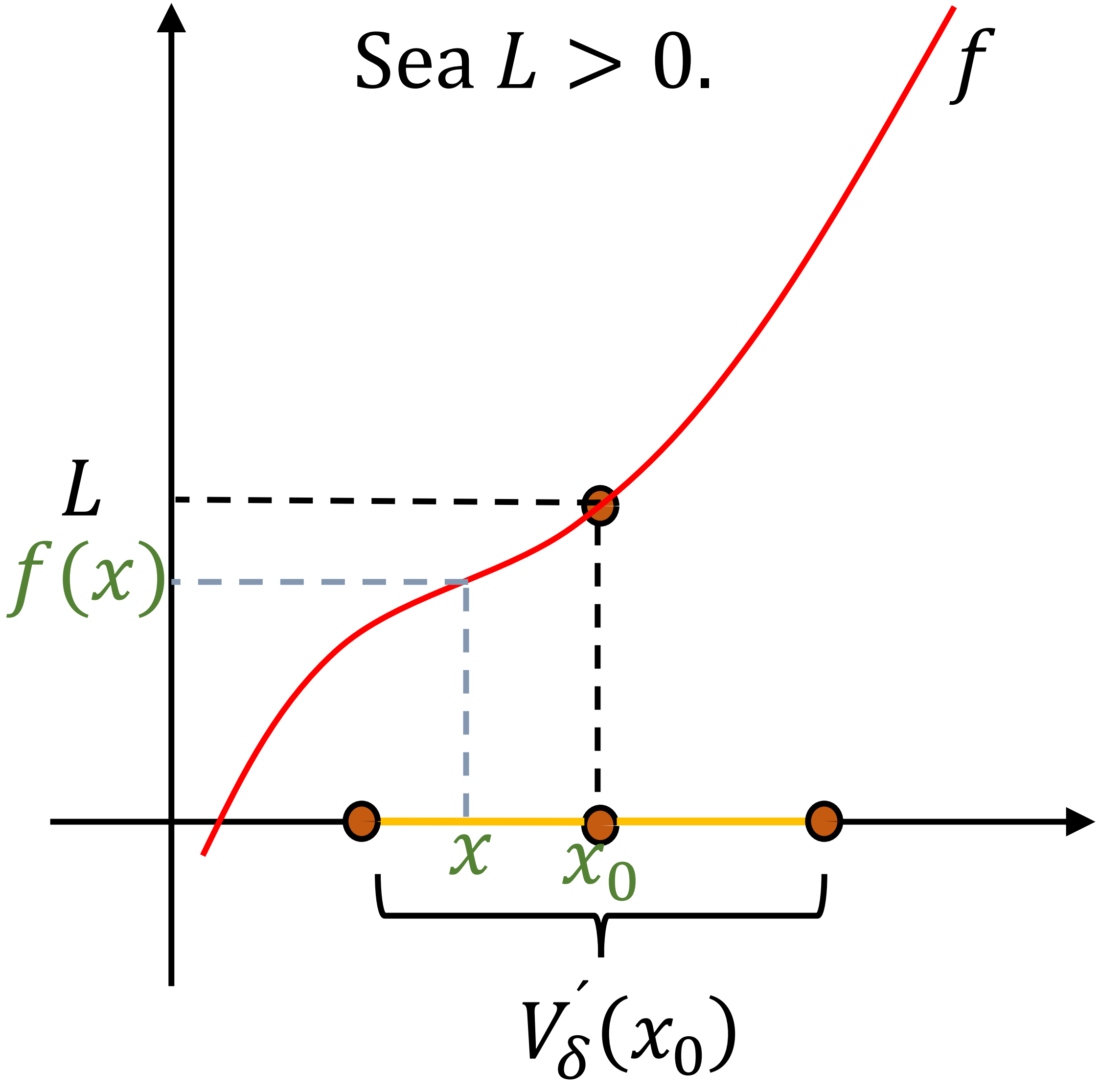
## Corolario

Sea $\lim_{x_0} f(x) = L \neq 0$ .

Entonces $\exists V_\delta'(x_0)/$

$f(x)$ y $L$

tienen el mismo signo $\forall x \in V_\delta'(x_0)$.




$x \in V_\delta'(x_0) \Longrightarrow f(x) > 0$

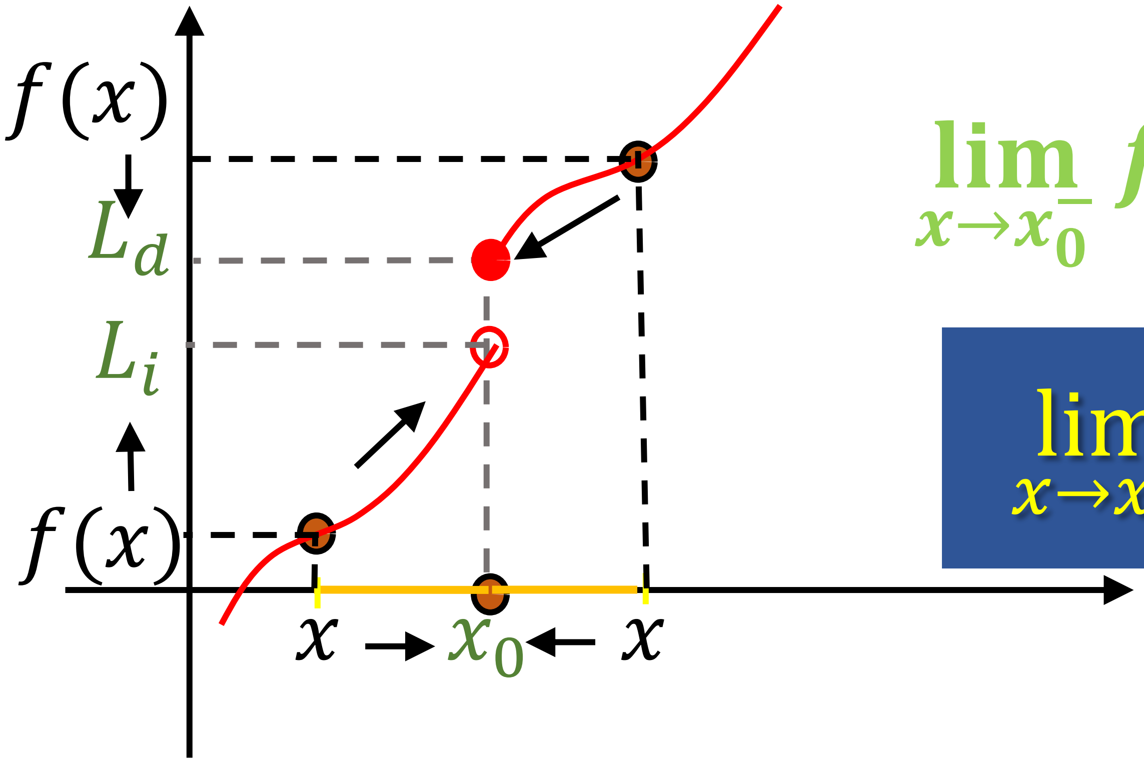
# Límites laterales

El límite izquierdo de $f$ en $x_0$ es $L_i$, si

$$\forall \mathcal{E} > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - L_i| < \mathcal{E}$$

El límite derecho de $f$ en $x_0$ es $L_d$, si

$$\forall \mathcal{E} > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L_d| < \mathcal{E}$$

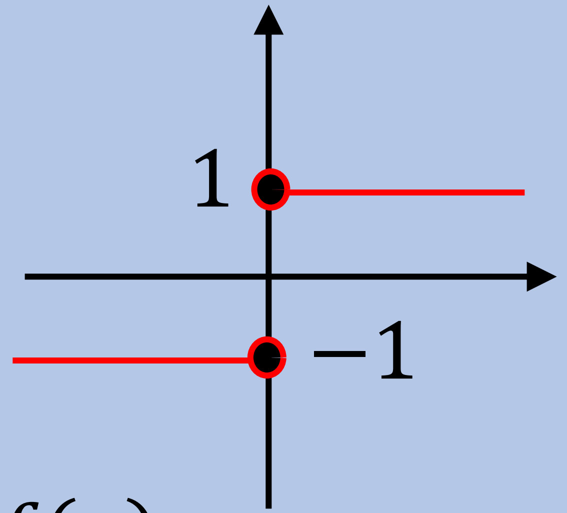



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_i \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_d$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff L = L_i = L_d$$

## Ejemplo

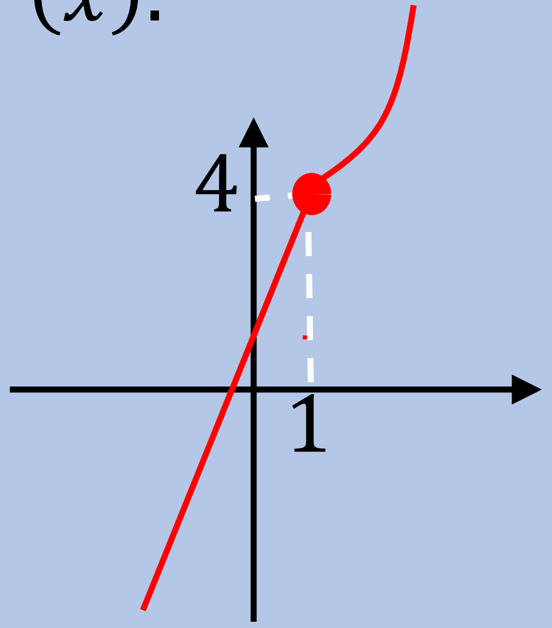
1. Sea $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$




$\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} -1 = -1\,; \quad \lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} 1 = 1$

Puesto que $\lim\limits_{0^+} f(x) \neq \lim\limits_{0^-} f(x)$, se tiene que $\nexists \lim\limits_{0} f(x)$.

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 4x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$




$\lim\limits_{1^-} f(x) = \lim\limits_{1^-} 3x + 1 = 3(1) + 1 = 4$

$\lim\limits_{1^+} f(x) = \lim\limits_{1^+} 4x^2 = 4(1)^2 = 4$

Entonces $\quad \lim\limits_{1} f(x) = 4$

## Teorema: Álgebra de límites

Sean $\lim_{x_0} f(x) = L_1$ , $\lim_{x_0} g(x) = L_2$ , $k \in \mathbb{R}$ .

Entonces

$\lim_{x_0}[f+g](x) = L_1 + L_2$. $x_0$ punto de acumulación de $D_{f+g}$.

$\lim_{x_0}[fg](x) = L_1 L_2$. $x_0$ punto de acumulación de $D_{fg}$.

$\lim_{x_0}[kf](x) = kL_1$. $x_0$ punto de acumulación de $D_{kf}$.

$\lim_{x_0}\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$. $x_0$ punto de acumulación de $D_{\frac{f}{g}}$.

Demostración del límite de la suma de dos funciones:

Sean $\lim_{x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x_0} g(x) = L_2$.

Entonces

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1) y

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2).

Si $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $0 < |x - x_0| < \delta$; por la observación de la filmina 15 se cumplen (1) y (2):

Continúa

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ;$$

de modo que

$$|[f+g](x) - (L_1 + L_2)| =$$

$$= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En definitiva: $|[f+g](x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0;$

Por tanto, $\lim\limits_{x_0}[f+g](x) = L_1 + L_2$.

## Ejemplo

1. $\lim\limits_{\pi} x^3 \cos x = (\pi)^3 \cos(\pi) = -\pi^3$

2. $\lim\limits_{\pi} \dfrac{x^3}{\cos x} = \dfrac{(\pi)^3}{\cos(\pi)} = -\pi^3$

3. $\lim\limits_{\pi} 2 \cos x = 2 \lim\limits_{\pi} \cos x = 2 \cos(\pi) = 2(-1) = -2$

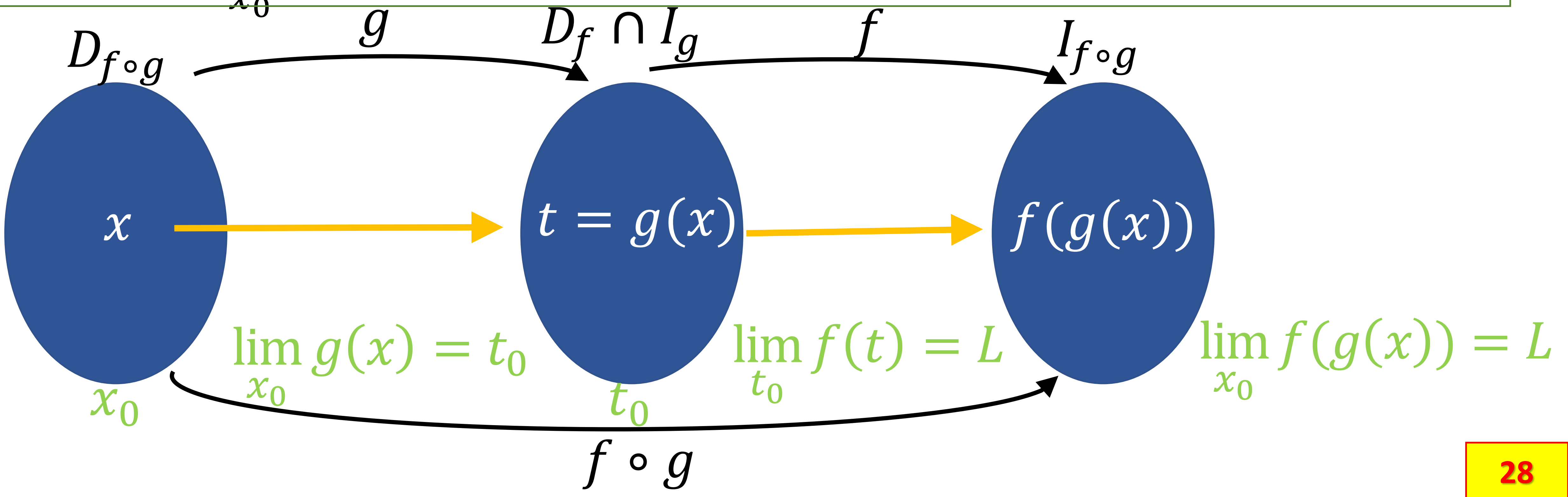
4. $\lim\limits_{\pi} x^3 + \cos x = (\pi)^3 + \cos(\pi) = \pi^3 - 1$

## Teorema: Límite de la función compuesta

Sean $\lim\limits_{x_0} g(x) = t_0$ , $\lim\limits_{t_0} f(t) = L$ y

$x_0$ punto de acumulación del dominio de $f \circ g$.

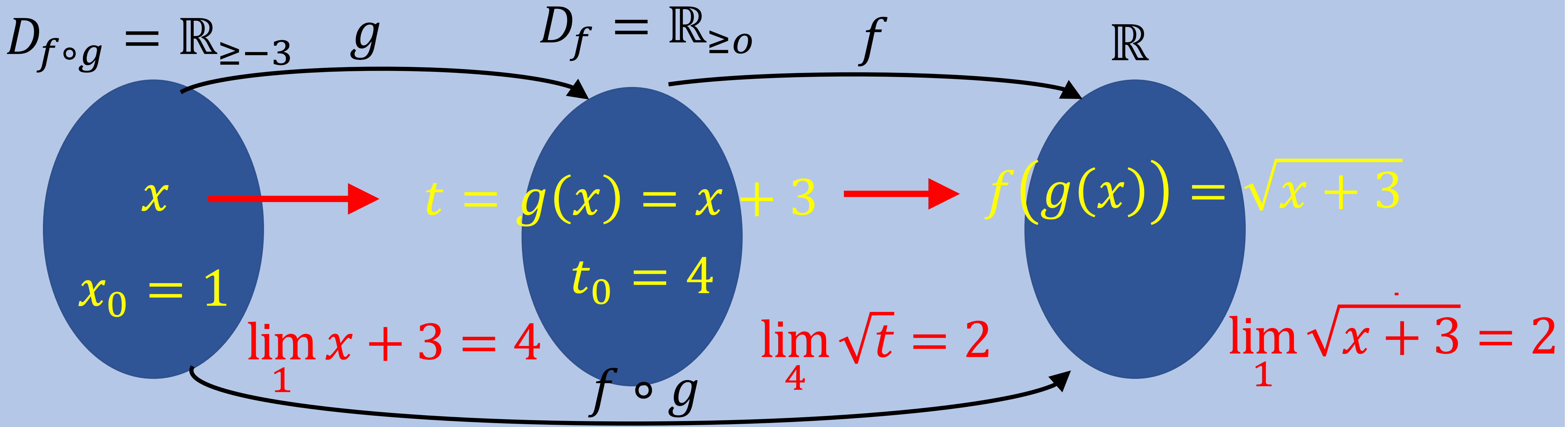
Entonces $\lim\limits_{x_0} [f \circ g](x) = L$.



**Ejemplo** Calcule $\lim\limits_{1} \sqrt{x+3}$

Se tiene una función compuesta $y = [f \circ g](x) = f(g(x))$.

En donde $\boxed{g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\, g(x) = x + 3}$ ; $\boxed{f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R};\, f(t) = \sqrt{t}}$




Entonces $\lim\limits_{1} \sqrt{x+3} = \sqrt{(1) + 3} = \sqrt{4} = 2$

## Ejemplo

1. Calcule $\lim\limits_{1}(x^2+1)^3$

Se trata del límite de una función compuesta en la que existen los límites de ambas funciones.

$$\lim_{1}(x^2+1)^3 = [(1)^2+1]^3 = 8$$

2. $\lim\limits_{1} e^{x^2+1} = e^{(1)^2+1} = e^2$

3. $\lim\limits_{0} sen\,(x+\pi) = sen\,(\pi) = 0$

4. $\lim\limits_{0} \ln(x+1) = \ln(1) = 0$

# Algunos límites trigonométricos

$$\lim_{0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{tg\ x}{x} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{sen\ x}{tg\ x} = 1$$

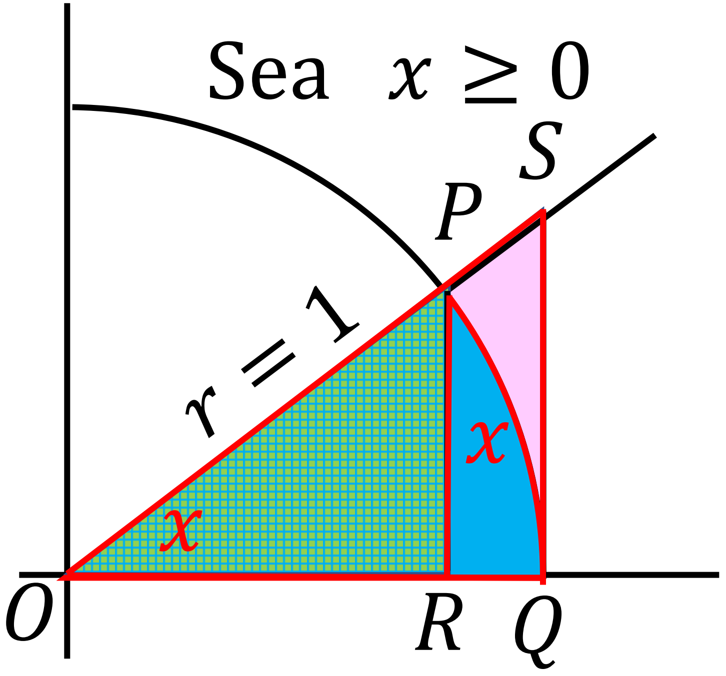
$$\lim_{0} \frac{x}{sen\ x} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{x}{tg\ x} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{tg\ x}{sen\ x} = 1$$

En todos los casos se trata de formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$.

Demostración de $\lim\limits_{0} \dfrac{sen\, x}{x} = 1$

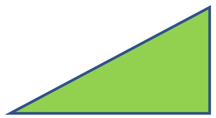


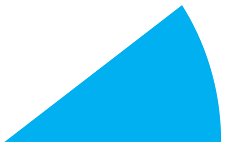

$x$: ángulo entre $\overline{OQ}$ y$\overline{OP}$. $x = \dfrac{\text{arco}}{\text{radio}} = \text{arco}$.

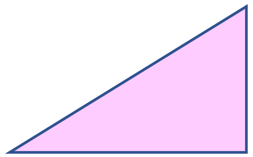
$x$: arco de extremos $P$, $Q$.

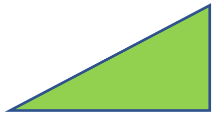
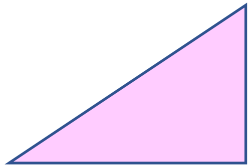
$x = \text{áng}\,(\overline{OQ}, \overline{OP}) =$ arco de extremos $P$, $Q$

Área $OPR = \dfrac{sen\, x\ \cos x}{2}$; Área $OPQ = \dfrac{x}{2}$ ; Área $OSQ = \dfrac{tg\, x}{2}$







 $\leq$  $\leq$ 

Continúa

$$\frac{\cos x \; sen\, x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{tg\, x}{2}$$

Multiplicamos por $\dfrac{2}{sen\, x}$

$$\cos x \leq \frac{x}{sen\, x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Invertimos

$$\cos x \leq \frac{sen\, x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Calculamos los límites de las funciones extremas

$$\lim_{0} \cos x = \cos 0 = 1 \qquad ; \qquad \lim_{0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

Entonces, por el teorema de intercalación (filmina 18): $\lim_{0} \dfrac{sen\, x}{x} = 1$

## Ejemplo

1. Calcule $\lim\limits_{0} \dfrac{sen\ 3x}{2x}$

Para aplicar $\lim\limits_{0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1,$ debe ser el ángulo igual al denominador.
Solamente podemos modificar el denominador.

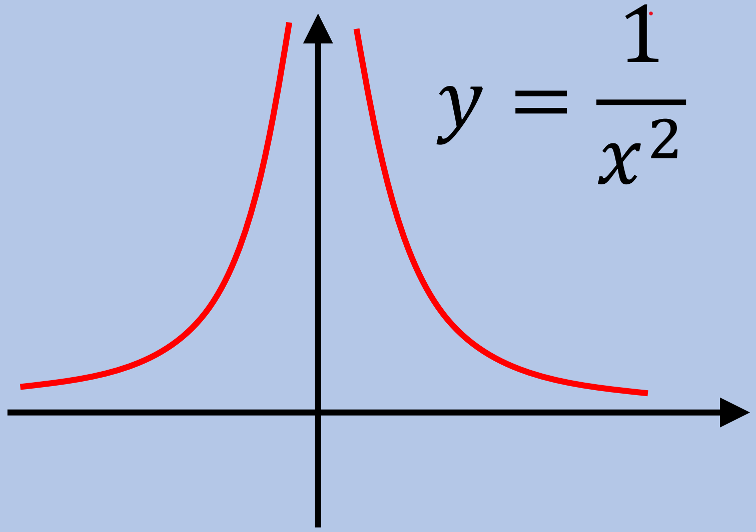
$$\lim_{0} \frac{sen\ 3x}{2x} = \lim_{0} \frac{3}{2}\frac{sen\ 3x}{3x} = \frac{3}{2}\lim_{0} \frac{sen\ 3x}{3x} = \frac{3}{2}$$

2. Calcule $\lim\limits_{0} \dfrac{tg\ 2x}{sen\ 5x}$

$$\lim_{0} \frac{tg\ 2x}{sen\ 5x} = \lim_{0} \frac{2}{5}\frac{tg\ 2x}{2x}\frac{5x}{sen\ 5x} = \frac{2}{5}\lim_{0} \frac{tg\ 2x}{2x}\frac{5x}{sen\ 5x} = \frac{2}{5}$$

# Límites infinitos y límites en el infinito

Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}; y = \frac{1}{x^2}$




¿Existe el límite? $\lim\limits_{0} \frac{1}{x^2}$

El límite de esta función, cuando $x$ tiende a 0, no existe pues la función crece ilimitadamente. No tiende a ningún número $L$.
No obstante, haciendo una extensión del concepto de límite, se dice que el límite es infinito.
Se escribe:

$$\lim_{0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

# Definición informal

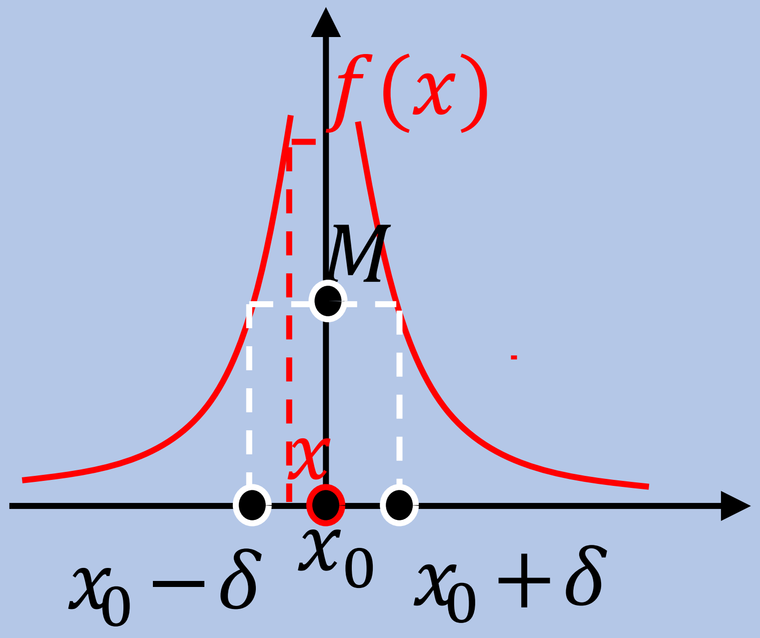
Se dice que el límite de $f$, en el punto de acumulación de su dominio

$x_0$, es infinito; si $f$ es tan grande como se desee:

$$\forall M \epsilon \mathbb{R}: f(x) > M\ ,$$

siempre que $x$ se aproxime a $x_0$ lo suficiente:

$$\exists \delta > 0/0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M\ .$$



## Límites infinitos y límites en el infinito

## Definiciones

Si $x$ tiende a infinito se tiene un límite en el infinito y si el resultado de un límite es infinito se tiene un límite infinito.

- Se dice que el límite de $f$, en el punto de acumulación de su dominio $x_0$, es infinito si

  $\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$

- Se dice que el límite de $f$, en el punto de acumulación de su dominio $x_0$, es menos infinito si

  $\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < M.$

- Se dice que el límite de $f$, cuando $x$ tiende a infinito, es infinito si $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{R} / x > N \Longrightarrow f(x) > M$.
- Se dice que el límite de $f$, cuando $x$ tiende a infinito, es menos infinito si $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{R} / x > N \Longrightarrow f(x) < M$.
- Se dice que el límite de $f$, cuando $x$ tiende a infinito, es el número $L$ si $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} / x > N \Longrightarrow |f(x) - L| < \mathcal{E}$.
- Se dice que el límite de $f$, cuando $x$ tiende a menos infinito, es el número $L$ si $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} / x < N \Longrightarrow |f(x) - L| < \mathcal{E}$.

## Ejemplo

1. Calcule $\lim_{1} \dfrac{-3x}{(x-1)^2}$

Reemplazamos $x$ por 1. Dado que se anula únicamente el denominador, el resultado es ∞ o -∞. Para determinar el signo construimos una tabla y aplicamos la regla de los signos.

| | | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x-1)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\dfrac{-3x}{(x-1)^2}$ | $+$ | $-$ | $-$ |

$$\lim_{1} \frac{-3x}{(x-1)^2} = -\infty$$

Ejemplo

2. Calcule $\lim\limits_{3} \dfrac{2x+1}{x-3}$

$$\lim_{3^-} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x-3} = -\infty; \lim_{3^+} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x-3} = \infty$$

| | $-1/2$ | $3$ | |
|---|---|---|---|
| $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x-3}$ | $+$ | $-$ | $+$ |

3. Calcule $\lim\limits_{-2} \dfrac{2x^2+1}{x+2}$

$$\lim_{-2^-} \frac{2x^2+1}{x+2} = -\infty \qquad \lim_{-2^+} \frac{2x^2+1}{x+2} = \infty$$

| | $-2$ | |
|---|---|---|
| $2x^2+1$ | $+$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $+$ |
| $\dfrac{2x^2+1}{x+2}$ | $-$ | $+$ |

Ejemplo

4. Calcule $\lim\limits_{0} \dfrac{1-x^2}{sen\ x}$

|  | $-1$ |  | $0$ |  | $1$ |  |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)$ | $-$ |  | $-$ |  | $-$ | $+$ |
| $(x+1)$ | $-$ |  | $+$ |  | $+$ | $+$ |
| $sen\ x$ | $-$ |  | $-$ |  | $+$ | $+$ |
| $\dfrac{-(x-1)(x+1)}{sen\ x}$ | $+$ |  | $-$ |  | $+$ | $-$ |

$$\lim_{0^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{sen\ x} = -\infty$$

$$\lim_{0^+} \frac{-(x-1)(x+1)}{sen\ x} = \infty$$

5. Calcule $\lim\limits_{\infty} \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{\infty} \frac{1}{x} = 0$$

## Ejemplo

6. Calcule $\lim_{-\infty} e^{x}$

$$\lim_{-\infty} e^{x} = \lim_{\infty} e^{-x} = \lim_{\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$$

7. Calcule $\lim_{0^+} \frac{\ln x}{x+3}$

$$\lim_{0^+} \frac{\ln x}{x+3} = -\infty$$

8. Calcule $\lim_{1} \frac{\ln(x) + \frac{1}{2}}{x-1}$

Raíz del numerador: $\ln(x) + \frac{1}{2} = 0$

$$\ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

| | $\sqrt{e}/e$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\ln(x) + {}^{1}/_{2}$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

$$\lim_{1^-} \frac{\ln(x) + \frac{1}{2}}{x-1} = -\infty \,;\, \lim_{1^+} \frac{\ln(x) + \frac{1}{2}}{x-1} = \infty$$

## Algunas formas indeterminadas

Una forma indeterminada es un límite que no se puede calcular reemplazando $x$ por $x_0$, sino que requiere de algún procedimiento matemático especial.

Las formas indeterminadas son de tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$.

Este tema se verá en forma completa,  utilizando la Regla de L´Hopital, en Análisis Matemático I.

## Ejemplo

1. $\lim_{1} \dfrac{-3x(x-1)}{(x-1)^2}$

Reemplazando $x$ por 1 nos queda el cociente $\frac{0}{0}$, por tanto, se trata de una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Siendo el cociente de dos polinomios se resuelve factorizando y simplificando.

$$\lim_{1} \frac{-3x(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{1} \frac{-3x}{x-1}$$

$$\lim_{1^-} \frac{-3x}{x-1} = \infty \quad ; \quad \lim_{1^+} \frac{-3x}{x-1} = -\infty$$

## Ejemplo

2. $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

Es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Como incluye una expresión irracional, multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{0} \frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{0} \frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} =$$

$$= \lim_{0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{(0)+9}+3\right)} = \frac{1}{6}$$

Ejemplo

3. $\lim\limits_{\infty} x - \sqrt{x^2 + 2x}$

Se trata de una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$ . Como es una expresión irracional multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 + 2x}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)} = \lim_{\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} =$$

$$= \lim_{\infty} \frac{-2x}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{\infty} \frac{-2\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}}} = \lim_{\infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = -1$$

## Ejemplo

4. $$\lim_{\infty} \frac{-x}{x^2 + x - 1}$$

Forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Es el límite del cociente de dos polinomios para $x$ que tiende a $\infty$.

$$\lim_{\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Ejemplo

5. $$\lim_{\infty} \frac{-2x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1}$$

Forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Es el límite del cociente de dos polinomios para $x$ que tiende a $\infty$.

$$\lim_{\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

## Ejemplo

$$\lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{\boxed{x}}\right)^{\boxed{x}} = e$$

Forma indeterminada del tipo $1^{\infty}$. Se demuestra que su resultado es el número de Euler, e=2,7181…….

Debe cumplirse que las expresiones resaltadas en amarillo sean iguales.

6. $$\lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{6}} = e^{\frac{1}{6}}$$

## Ejemplo

$$\lim_{0}(1+\boxed{x})^{\boxed{\frac{1}{x}}} = e$$

Forma indeterminada del tipo $1^{\infty}$. Se demuestra que su resultado es el número de Euler, e=2,7181…….
Debe cumplirse que las expresiones resaltadas en amarillo sean iguales.

7. $$\lim_{0}(1-2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{0}\left\{[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}}\right\}^{-6} = e^{-6}$$