TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

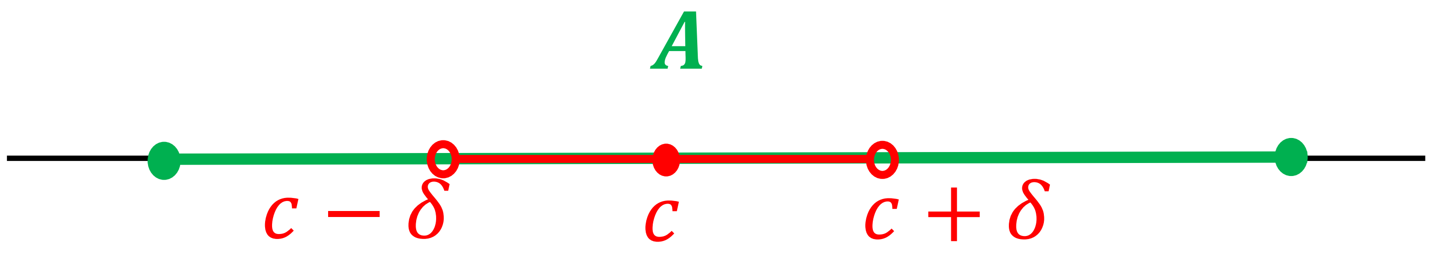
Máximos y mínimos

Definición

Punto interior de un conjunto

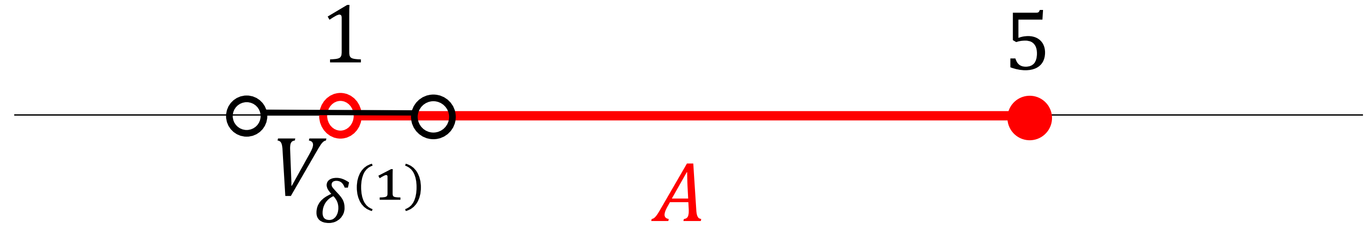
Sean $A \subseteq \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$.

c es punto interior de A si $\exists\, V_{\delta(c)} / V_{\delta(c)} \subseteq A$.

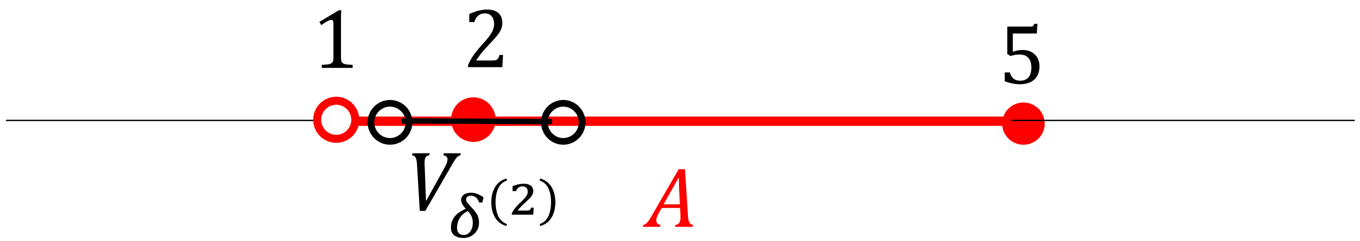


Ejemplo

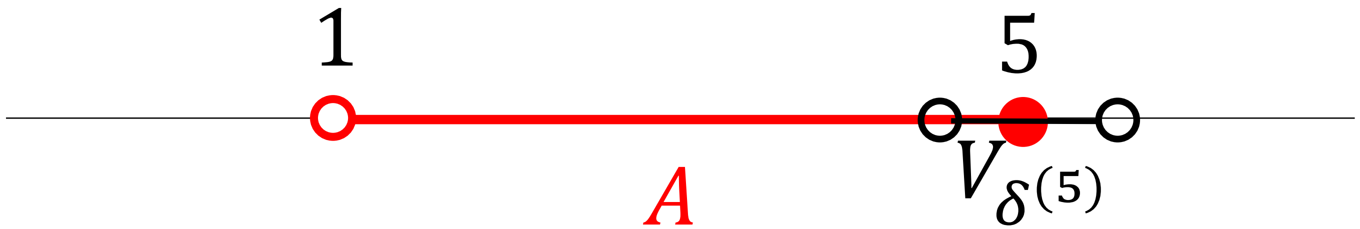
Sea $A = (1, 5]$. Indique si los números 1, 2, 5 y 8 son puntos interiores de A.



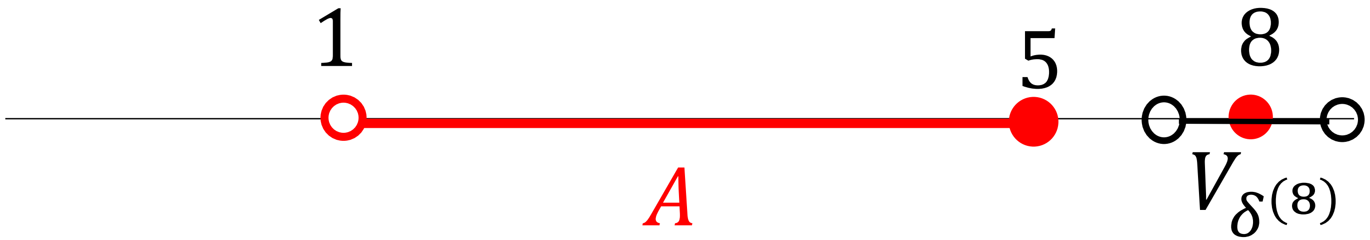
1 no es punto interior de A



2 es punto interior de A



5 no es punto interior de A

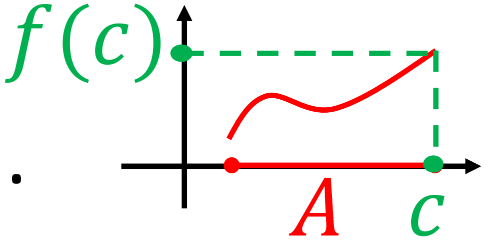


8 no es punto interior de A

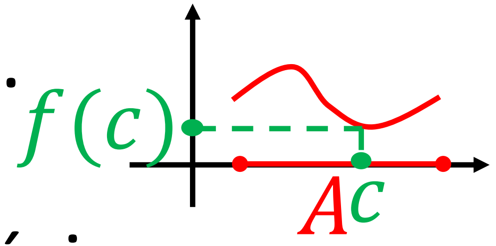
Máximos y mínimos

Definiciones: Extremos absolutos de una función en un conjunto

Sean $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq D_f$, $c \in A$.



$f_{(c)}$ es máximo absoluto de f en A si $f_{(x)} \leq f_{(c)} \quad \forall x \in A$.

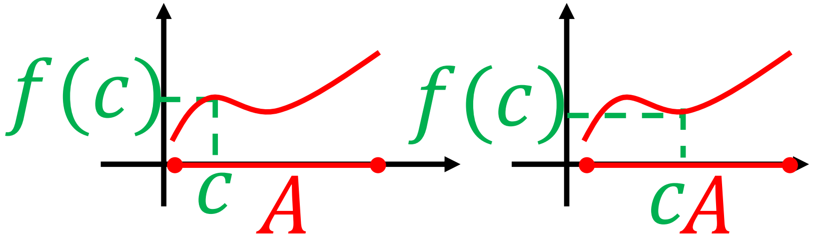


$f_{(c)}$ es mínimo absoluto de f en A si $f_{(x)} \geq f_{(c)} \quad \forall x \in A$.

$f_{(c)}$ es extremo absoluto de f en A si $f_{(c)}$ es máximo o mínimo absoluto de f en A.

Definiciones: Extremos relativos de una función en un conjunto

Sea $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq D_f$, c punto interior de A.

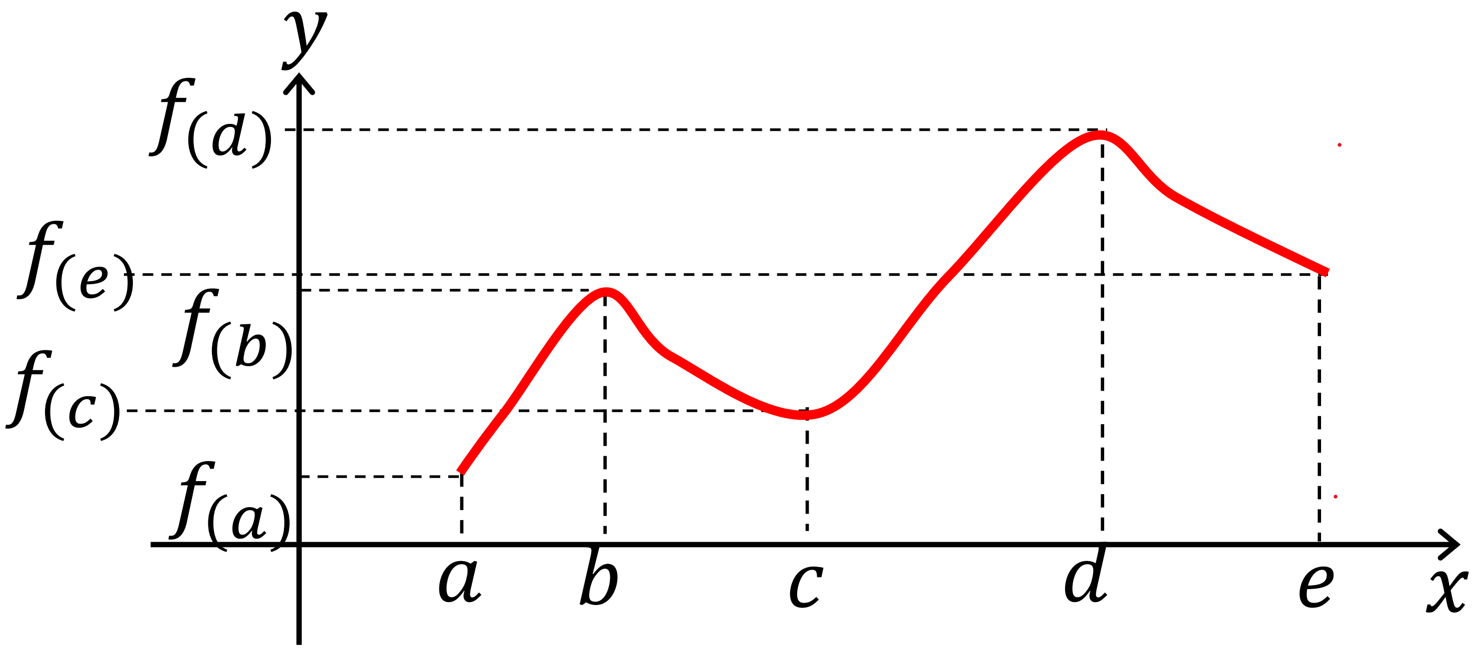


$f_{(c)}$ es máx. relativo de f en A si $\exists\, V_{\delta(c)} / f_{(x)} \leq f_{(c)} \ \ \forall x \in \left(V_{\delta(c)} \cap A\right)$.

$f_{(c)}$ es mín. relativo de f en A si $\exists\, V_{\delta(c)} / f_{(x)} \geq f_{(c)} \ \ \forall x \in \left(V_{\delta(c)} \cap A\right)$.

$f_{(c)}$ es extremo relativo de f en A si $f_{(c)}$ es máximo o mínimo relativo de f en A.

Ejemplo



Extremos relativos o locales

- $f(b)$
- $f(c)$
- $f(d)$

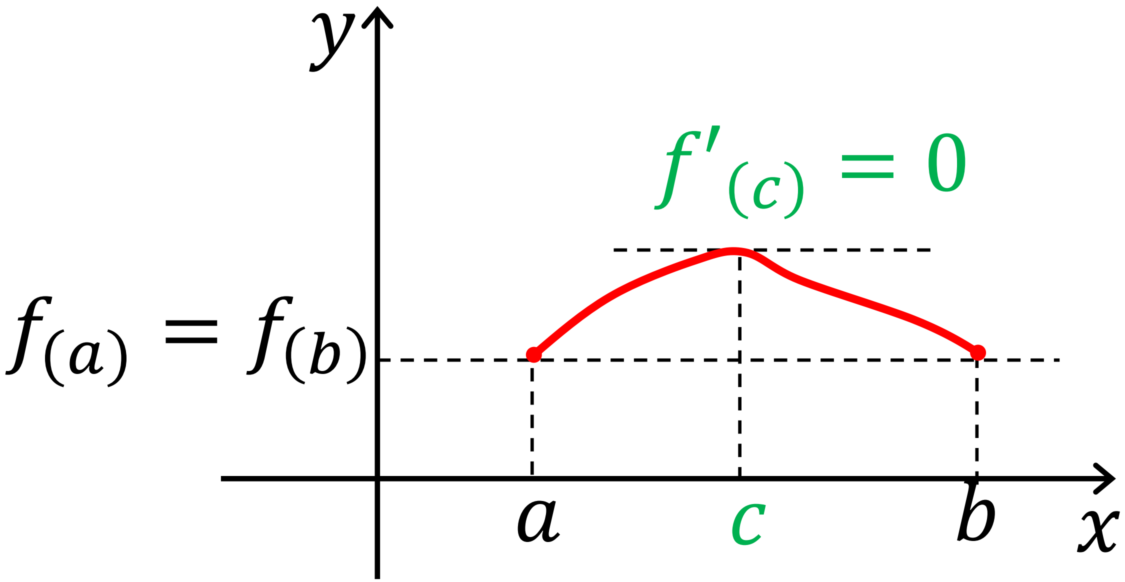
Extremos absolutos

- $f(a)$
- $f(d)$

Teorema de Rolle

Sea f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f_{(a)} = f_{(b)}$.

Entonces $\exists c \in (a,b) / f'_{(c)} = 0$.



Ejemplo Aplique el teorema de Rolle a la función

$f(x) = sen(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Grafique.

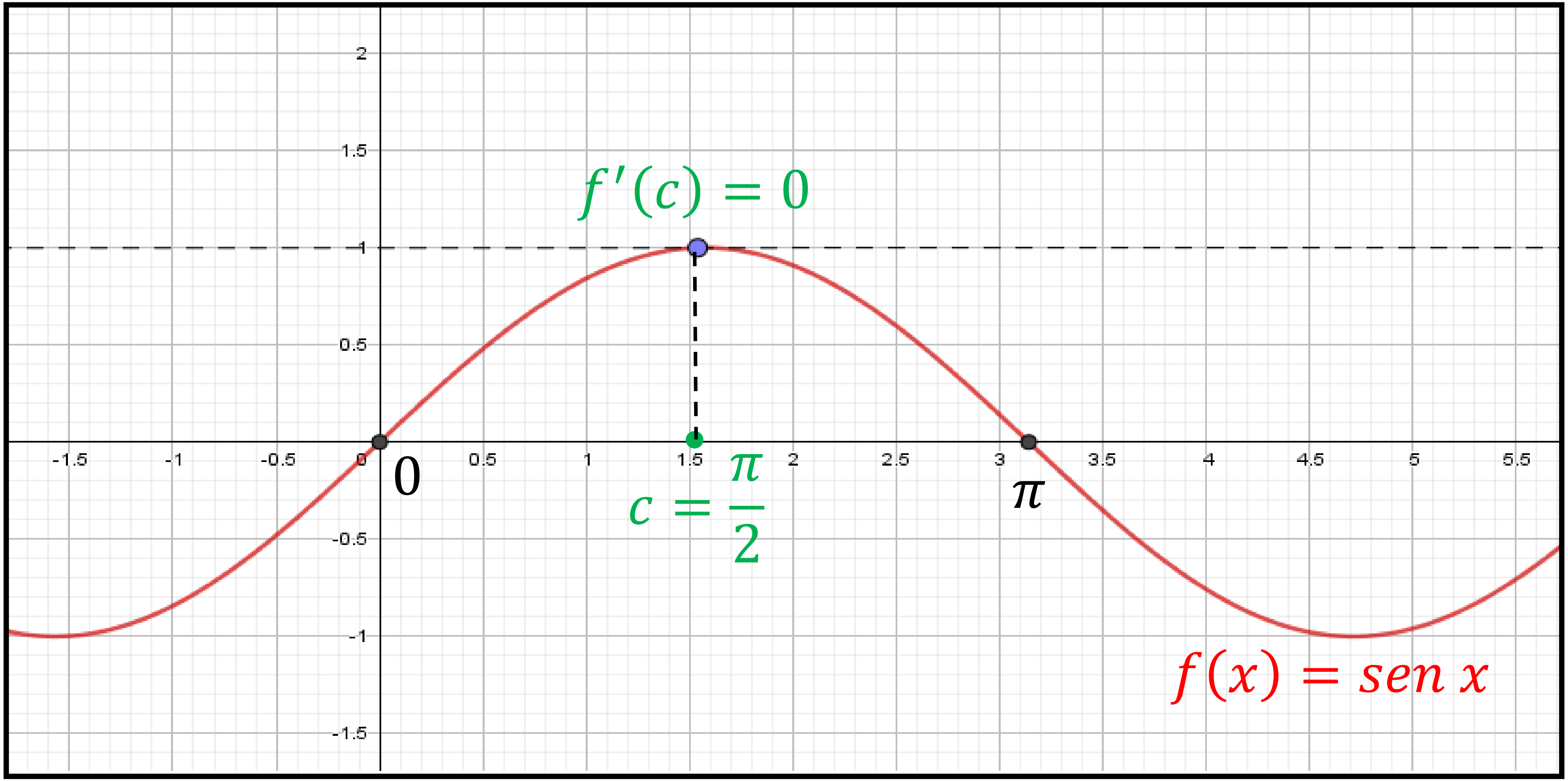
1. f es derivable en $\mathbb{R}$, por lo que es continua en $[0, \pi\ ]$ y derivable en $(0, \pi)$.

   $f(0) = f(\pi) = 0$. Se cumplen las hipótesis.

2. $f'_{(x)} = cos\ (x)$;

   $f'_{(c)} = cos(c) = 0 \implies c = arc\ cos\ (0) = \frac{\pi}{2}$

$c = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.



2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
$f'(c) = 0$
0
$c = \frac{\pi}{2}$
π
$f(x) = sen\ x$

Demostración

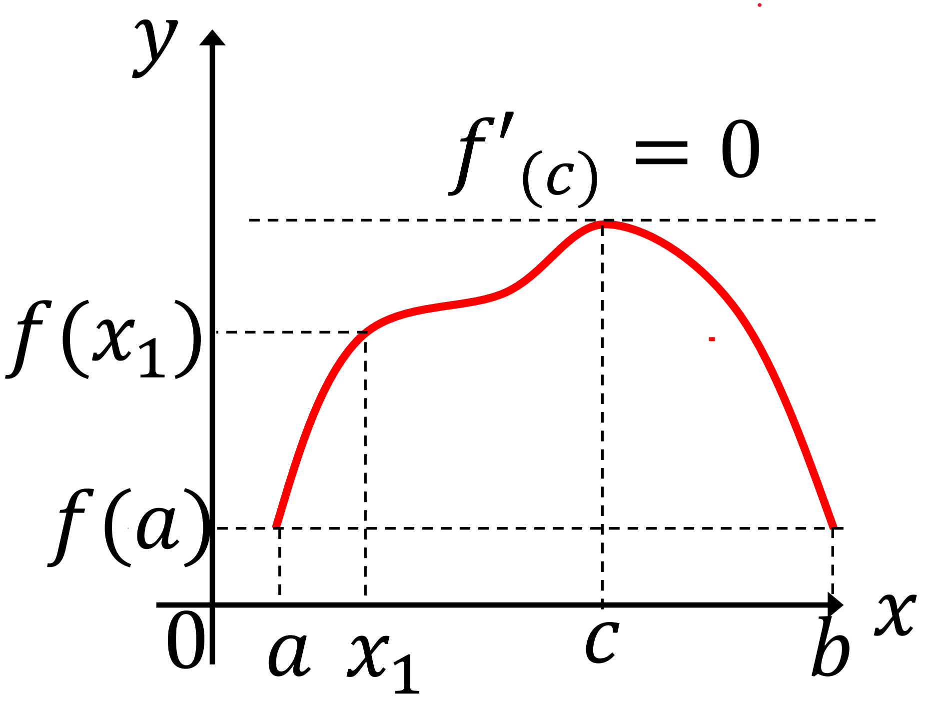
1. Si $f(x) = k \ \forall x \in [a,b]$; entonces $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$.
2. Si $\exists x_1 \in (a,b) / f(x_1) > f(a)$, entonces por el teorema de Bolzano – Weierstrass $\exists c \in (a,b) / f(c) \geq f(x) \ \ \forall x \in [a,b]$.

$$f'_+(c) = \lim_{0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

pues $f(c+h) - f(c) \leq 0$ y $h > 0$.

$$f'_-(c) = \lim_{0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

pues $f(c+h) - f(c) \leq 0$ y $h < 0$.



Por hipótesis: $\exists f'(c)$, por lo que $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c) = 0$

3. Si $\exists x_2 \in (a,b) / f(x_2) < f(a)$ entonces, por el teorema de Bolzano – Weierstrass, $\exists c \in (a,b) / f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

$$f'_+(c) = \lim_{0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0,$$

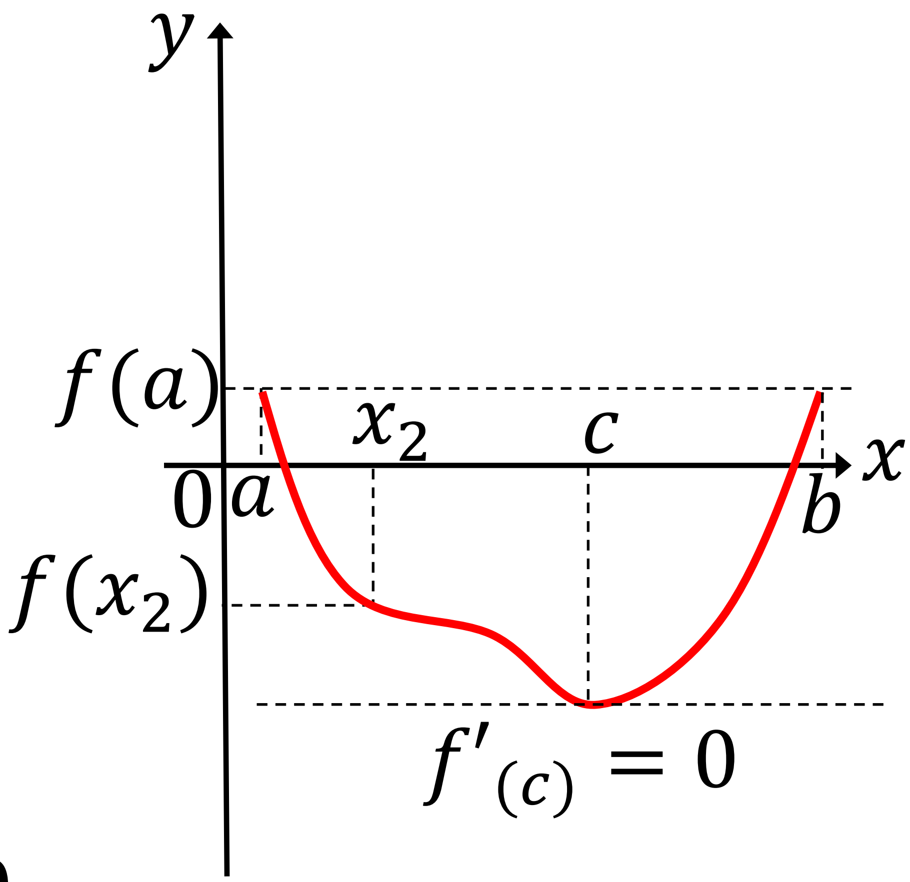
pues $f(c+h) - f(c) \geq 0$ y $h > 0$.

$$f'_-(c) = \lim_{0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0,$$

pues $f(c+h) - f(c) \geq 0$ y $h < 0$.

Por hipótesis: $\exists f'(c)$

por lo que $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c) = 0$.



Teorema del valor medio

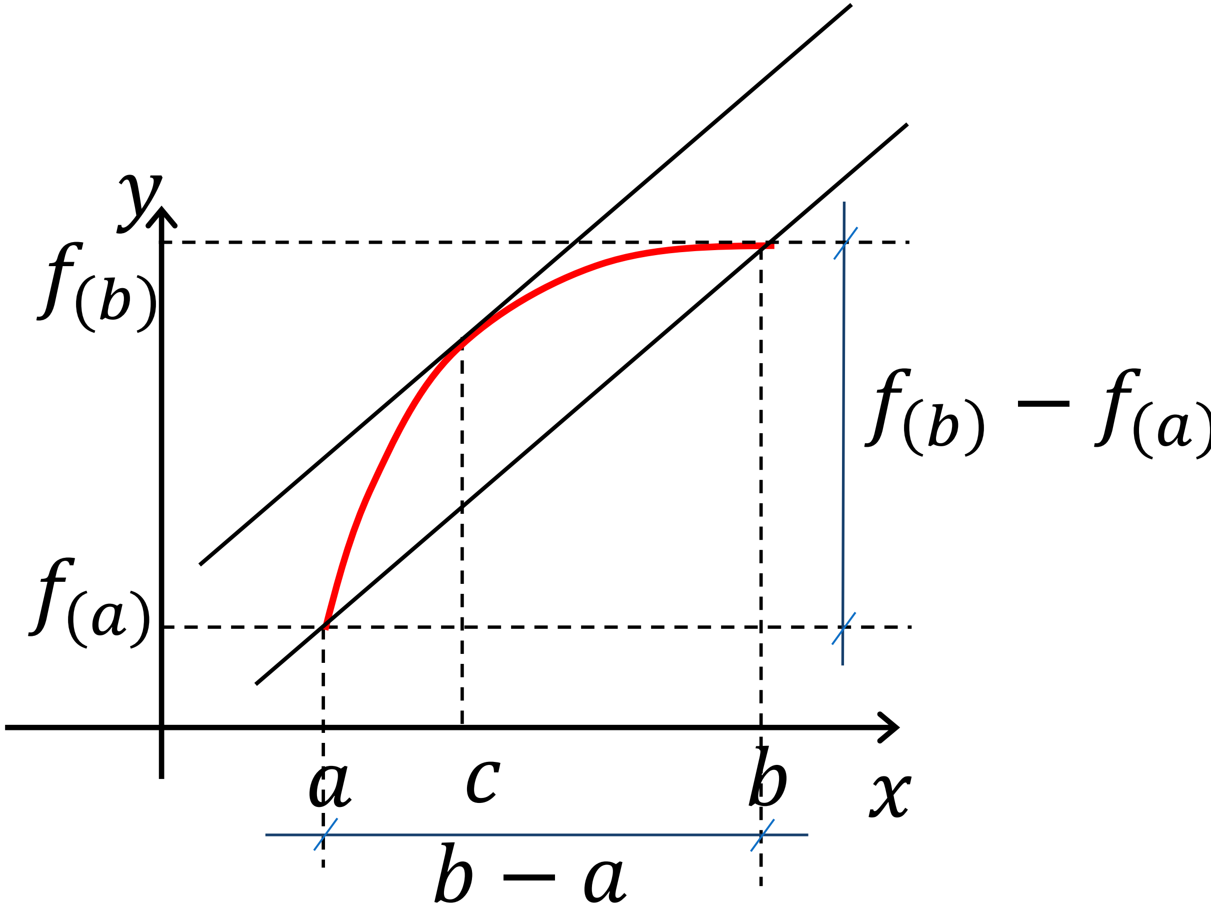
o de Lagrange

Sea f continua en $[a, b]$

y derivable en (a, b).

Entonces $\exists c \in (a, b)$ /

$$f'_{(c)} = \frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b - a}$$



Ejemplo Aplique el teorema del valor medio a la función

$f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Grafique.

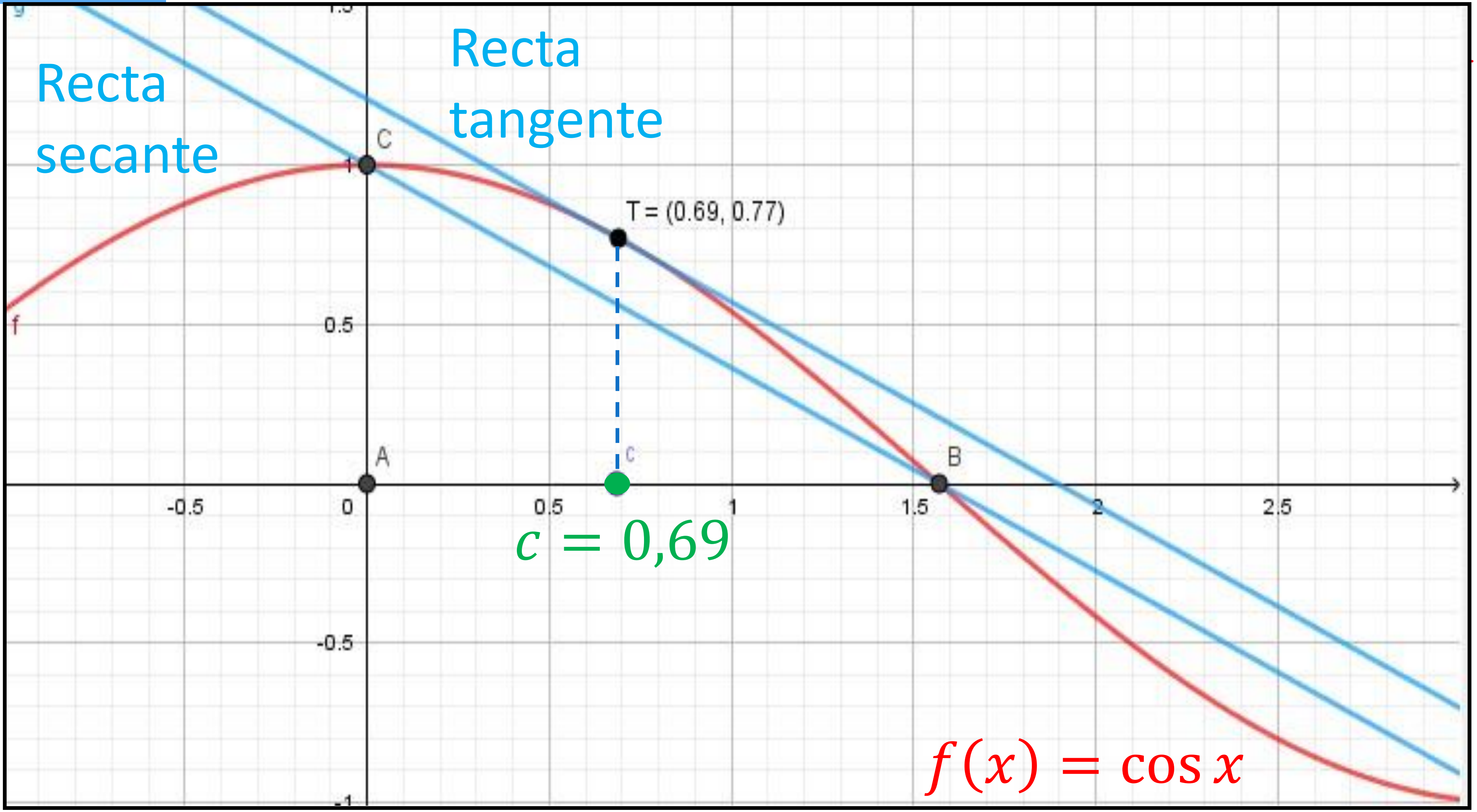
1) f es derivable en $\mathbb{R}$, por lo que es continua en $[0, \pi/2\,]$ y derivable en $(0, \pi/2)$. Se cumplen las hipótesis.

2) $f'_{(x)} = -\,sen\,(x)$; $\frac{f_{(b)} - f_{(a)}}{b-a} = \frac{f_{(\pi/2)} - f_{(0)}}{\pi/2 - 0} = \frac{0-1}{\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$

$f'_{(c)} = -sen(c) = -\frac{2}{\pi}$; $sen(c) = \frac{2}{\pi} \Longrightarrow c = arc\ sen\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0{,}69$

$c = 0{,}69 \in (0, \pi/2)$.

Ejemplo


Recta secante
Recta tangente
C
T = (0.69, 0.77)
A
c
B
0.5
-0.5
0
1
1.5
2
2.5
f
$c = 0{,}69$
$f(x) = \cos x$

Demostración

Sea $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ una función auxiliar.

h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) porque es una suma de funciones continuas y $h(a) = h(b)$. Por tanto, se cumplen para la función h las hipótesis del teorema de Rolle.

Entonces $\exists c \in (a, b) / h'(c) = 0$

$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; si $x = c$: $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$;

por lo que $\quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Propiedades de las funciones derivables

Teorema

Sea f derivable en un intervalo abierto J.

Si $f'_{(x)} = 0 \quad \forall x \in J$, entonces $f_{(x)} = k \; \forall x \in J; k \in \mathbb{R}$.

Demostración

Sean $x_1, x_2 \in J$.

Por hipótesis f es derivable en J, en consecuencia f es continua en $[x_1, x_2]$ y es derivable en (x_1, x_2). Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Entonces $\exists\ c \in (x_1, x_2) / f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Por hipótesis $f'(c) = 0$, lo que implica que $f(x_2) - f(x_1) = 0$.

Es decir, $f(x_1) = f(x_2)\ \forall\, x_1, x_2 \in J$; por lo que $f(x) = k\ \forall\, x \in J$.

Propiedades de las funciones derivables

Teorema

Sean f, g derivables en un intervalo abierto J.

Si $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in J$, entonces $f(x) = g(x) + k \quad \forall x \in J;\ k \in \mathbb{R}$.

Demostración

Sea $h = f - g$ una función auxiliar.

$h' = f' - g' = 0\ \forall x \in J$ pues por hipótesis $f' = g' \quad \forall x \in J$.

Por el teorema anterior,

si $h' = 0 \quad \forall x \in J$ entonces $h = k \quad \forall x \in J$, siendo $k \in \mathbb{R}$.

Por lo que

$k = f - g$ y

$f = g + k \qquad \forall x \in J$.

Propiedades de las funciones derivables

Teorema del valor medio generalizado o de Cauchy

Sean f, g continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y

$g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$.

Entonces $\exists c \in (a, b) / \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Observación

Sean f, g continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$. Entonces, por el teorema de Cauchy,

$\exists c \in (a, b) / \boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$ (1)

Si $g(x) = x$, se tiene que $g'(x) = 1$, $g(a) = a$, $g(b) = b$.

Reemplazando estas expresiones en (1): $\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ (2)

Si se cumple la hipótesis del teorema de Rolle: $f(a) = f(b)$, la expresión (2) resulta: $\boxed{f'(c) = 0}$ (3).

(2) Es la expresión del teorema del valor medio y (3) la de Rolle.

Teorema: Regla de L'Hopital

Sean f, g derivables en (a, b) excepto posiblemente en

un punto $c \in (a, b) / \lim\limits_{c} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{c} g(x) = 0$; además sea

$g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b) \wedge x \neq c$.

Entonces, si $\lim\limits_{c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$(finito o infinito), se tiene que $\lim\limits_{c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Ejemplo

Sea $\lim\limits_{0} \frac{sen\,x}{x}$; forma indeterminada del tipo $0/0$.

Las funciones $f(x) = sen\,x$ y $g(x) = x$ son derivables en $V_{\delta(0)}$ y

$g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que se cumplen las hipótesis de la Regla

de L'Hopital.

$$\lim_{0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \lim_{0} \frac{\cos x}{1} = 1; \text{ por lo que } \lim_{0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Demostración

Dado que $\lim\limits_{c} \frac{f(x)}{g(x)}$ es independiente de la existencia y del valor de $\frac{f(c)}{g(c)}$, suponemos $f(c) = 0$ y $g(c) = 0$.

Con esta suposición y la hipótesis $\lim\limits_{c} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{c} g(x) = 0$; resulta que f y g son continuas en $x = c$.

Consideremos el intervalo (a, c) y sea $x_1 \in (a, c)$.

Tenemos que f, g son continuas en $[x_1, c]$, derivables en (x_1, c) y $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (x_1, c)$; con lo que se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy.

Continúa

Entonces $\exists c_1 \in (x_1, \mathrm{c}) / \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{f(\mathrm{c}) - f(x_1)}{g(\mathrm{c}) - g(x_1)} = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$

Si x_1 tiende a c se tiene que c_1 tiende a c, por lo que en el cálculo de límites se puede cambiar el nombre de la variable independiente sin cambiar el límite, de modo que nos queda

$$\lim_{c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si consideramos el intervalo (c, b) y $x_2 \in (c, b)$, se tiene

$$\lim_{c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Continúa

De modo que

si $\lim_{c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, resulta que $\lim_{c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

y por las expresiones de la filmina 44:

$$\lim_{c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Nota La Regla de l'Hopital es válida en los siguientes casos:

- $\lim\limits_{c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando $\begin{cases} \lim\limits_{\mathrm{c}} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{\mathrm{c}} g(x) = 0 \end{cases}$ o cuando $\begin{cases} \lim\limits_{\mathrm{c}} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{\mathrm{c}} g(x) = \pm\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando $\begin{cases} \lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{\pm\infty} g(x) = 0 \end{cases}$ o cuando $\begin{cases} \lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{\pm\infty} g(x) = \pm\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{c^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando $\begin{cases} \lim\limits_{c^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{c^-} g(x) = 0 \end{cases}$ o cuando $\begin{cases} \lim\limits_{c^-} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{c^-} g(x) = \pm\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando $\begin{cases} \lim\limits_{c^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{c^+} g(x) = 0 \end{cases}$ o cuando $\begin{cases} \lim\limits_{c^+} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{c^+} g(x) = \pm\infty \end{cases}$

Formas indeterminadas

Sea $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

- Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x_0} g(x) = 0$

  se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

- Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x_0} g(x) = \infty$

  se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo

1. $\lim\limits_{1} \frac{x^2-1}{2x-2}$ forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{1} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \lim_{1} \frac{2x}{2} = 1$$

2. $\lim\limits_{\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2}$ forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{\infty} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \lim_{\infty} \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$$

Formas indeterminadas:

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Se aplica la R. de L`H

- $0.\infty$
- $\infty - \infty$
- 1^{∞}
- 0^{0}
- ∞^{0}

Se transforman en formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y luego se aplica la R. de L`H

- $0.\infty$

$$\lim_{x_0} f.g = \lim_{x_0} \frac{g}{\frac{1}{f}}$$ forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\infty - \infty$

$$\lim_{x_0} f - g = \lim_{x_0} fg\,\frac{(f-g)}{fg} = \lim_{x_0} fg\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right) =$$

$$= \lim_{x_0} \frac{\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right)}{\frac{1}{fg}}$$ forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

- $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$

$$\lim_{x_0} f^{g} = \lim_{x_0} e^{\ln f^{g}} = e^{\lim\limits_{x_0} \ln f^{g}}$$

$$\lim_{x_0} \ln f^{g} = \lim_{x_0} g \ln f =$$

$$= \lim_{x_0} \frac{\ln f}{\frac{1}{g}}$$ forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

Ejemplo

3. $\lim_{0^+} x \ln x$ forma indeterminada del tipo $0.\infty$.

$\lim_{0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ forma indeterminada del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{0^+} -x = 0$$

Ejemplo

4. $\lim_{1^+} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$.

$\lim_{1^+} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}$ forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}} = \lim_{1^+} \frac{x-1}{x\ln x+(x-1)} = \lim_{1^+} \frac{1}{\ln x+\frac{x}{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

5. $\lim_{0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ forma indeterminada del tipo 1^{∞}.

$\lim_{0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$ forma indeterminada del tipo $\infty.0$.

$$\lim_{0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

$$\lim_{0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{1}=e$$