CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

Ing. Civil Adolfo Vignoli – 2023 -

Funciones vectoriales

Función vectorial

Sean $f_1(t), \dots, f_n(t)$ funciones reales.

$D = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_n$; donde D_i es el dominio de $f_i(t)$

La función

$\boldsymbol{r}: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n; \boldsymbol{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ es una **función vectorial de variable real**.

$f_1(t), \dots, f_n(t)$ son las funciones componentes de $\boldsymbol{r}$

Funciones vectoriales

Límite de funciones vectoriales

Sean $\boldsymbol{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ función vectorial y

$\boldsymbol{L} = (L_1, \dots, L_n)$ vector.

$\boldsymbol{r}$ tiene límite $\boldsymbol{L}$ cuando t tiende a t_0; si

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \to t_0} f_n(t)\right) = (L_1, \dots, L_n) = \boldsymbol{L}}$$

Continuidad en un punto

Una función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ **es continua en un punto $t = t_0$** de su dominio si $\boxed{\lim_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)}$

$\boldsymbol{r}(t)$ es continua si es continua en cada punto de su dominio.

Funciones vectoriales

Derivada de una función vectorial en un punto

Sea $\boldsymbol{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ función vectorial,

$f_1(t), \dots, f_n(t)$ derivables sobre un intervalo abierto J; $t_0 \in J$.

La derivada de $\boldsymbol{r}(t)$ en el punto t_0 es

$$\boxed{\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)}{h} = \left(f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0)\right)}$$

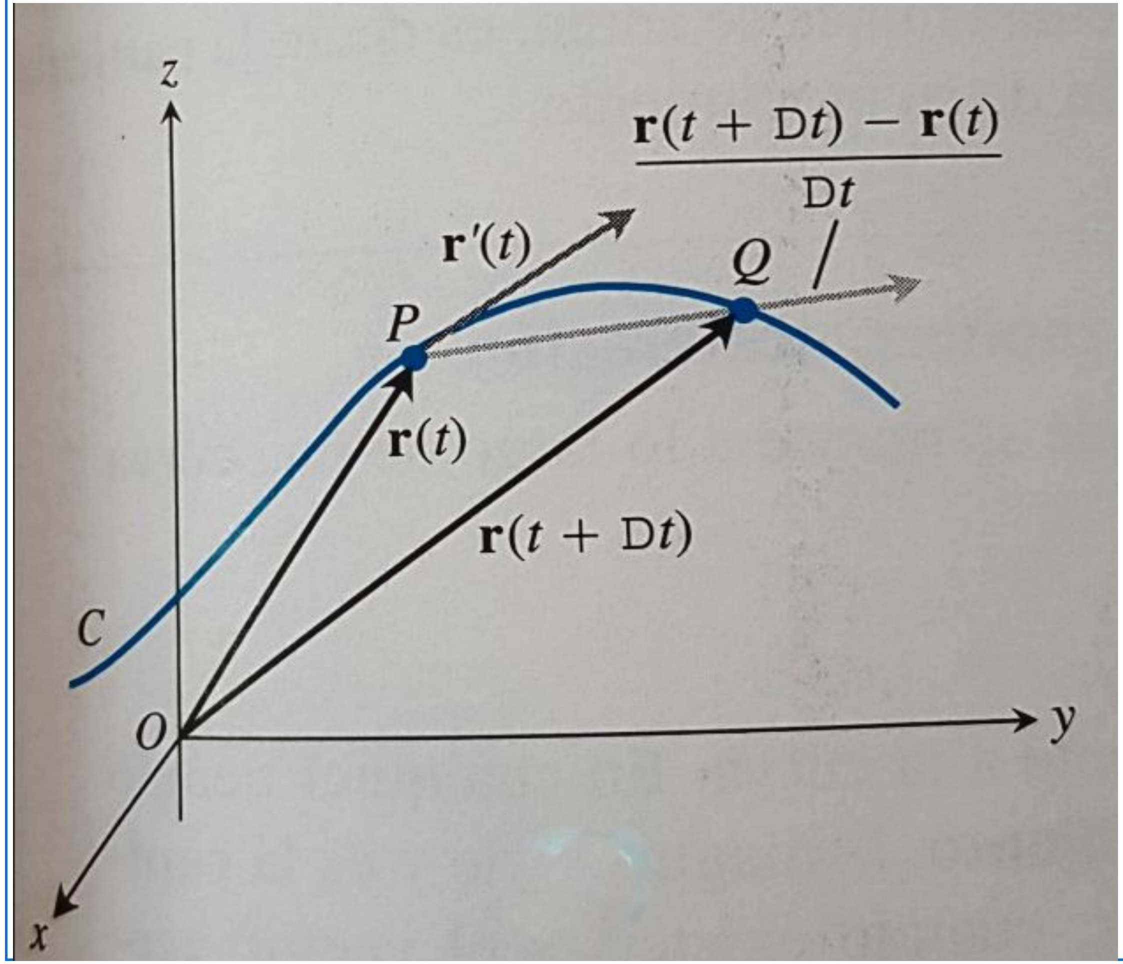
Se denota $\boldsymbol{r}'(t) = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$

$\boldsymbol{r}(t)$ es derivable si es derivable en cada punto de su dominio.

La curva descripta por $\boldsymbol{r}(t)$ es regular o suave si $\boldsymbol{r}'(t)$ es continua y nunca se anula.

Funciones vectoriales

Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial en un punto t_0 del dominio.



Supongamos $r(t)$ una función de tres componentes:

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \left(f'_1(t_0), f'_2(t_0), f'_3(t_0)\right)$$

es un vector tangente a la curva de la función $\boldsymbol{r}(t)$.

Funciones vectoriales

Integral indefinida

Sea $\boldsymbol{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ función vectorial, con $f_1(t), \dots, f_n(t)$ funciones escalares integrables.

$$\int \boldsymbol{r}(t)dt = \left(\int f_1(t)\, dt \,, \dots, \int f_n(t)\, dt \right) = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C}$$

Integral indefinida de $\boldsymbol{r}(t)$

$\boldsymbol{R}(t)$ es una función vectorial primitiva de $\boldsymbol{r}(t)$, es decir: $\dfrac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{C} = (c_1, \dots, c_n)$ vector constante.

Funciones vectoriales

Integral definida

Sea $\boldsymbol{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$,

$f_1(t), \dots, f_n(t)$ funciones integrables en $[a, b]$

$$\boxed{\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt\,, \dots, \int_a^b f_n(t)\, dt\right)}$$

Integral definida de $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$ en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

Si $\boldsymbol{R}(t)$ es una función primitiva de $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = [\boldsymbol{R}(t)]_a^b = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

Funciones de varias variables

Función de n variables independientes

Sea $D = \{(x_1, \dots, x_n)/x_1, \dots, x_n \in A \subset \mathbb{R}\}$ conjunto de n-uplas.

Entonces, la función

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; w = f(x_1, \dots, x_n)$ es una función real f en D

Límite de una función de varias variables

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; w = f(x_1, \dots, x_n)$ función real f en D

El límite de una función $f(x_1, \dots, x_n)$, cuando $(x_1, \dots, x_n)$ tiende a $(a_1, \dots, a_n)$ es el número real L; y escribimos

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L$$

si $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad /$

$$(x_1, \dots, x_n) \in D \quad y \quad 0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta \implies$$

$$\Rightarrow |f(x_1, \dots, x_n) - \mathrm{L}| < \varepsilon$$

Funciones de varias variables

Continuidad de una función real de varias variables

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; w = f(x_1, \dots, x_n)$ función real f en D

f es continua en $(a_1, \dots, a_n)$, si

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n)$$

Una función es continua si es continua en todo su dominio.
Para que el límite exista, el límite debe ser el mismo cualquiera sea la trayectoria de acercamiento al punto $(a_1, \dots, a_n)$.

Funciones de varias variables

Gráfica, curva de nivel y curva de contorno de funciones de dos variables

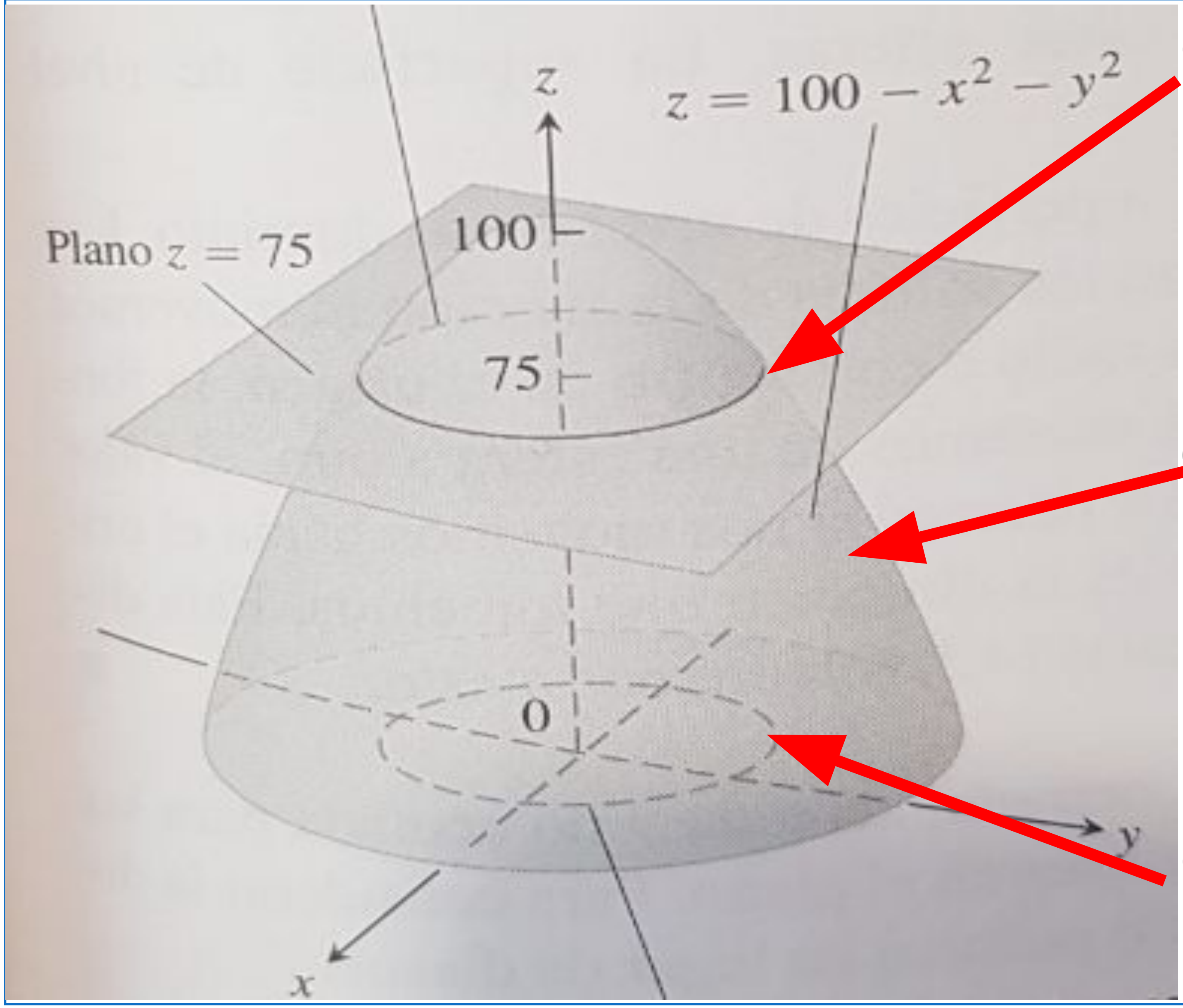
Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; z = f(x, y)$ función real f de dos variables en D

Curva de nivel: Conjunto de puntos en el plano donde la función $f(x, y)$ tiene un valor constante: $f(x, y) = c$.

Gráfica: Conjunto de todos los puntos $(x, y, f(x, y))$ en el espacio, en donde $(x, y) \in D$.

Curva de contorno: Intersección del plano $z = c$ con la superficie $z = f(x, y)$.

Derivada parcial de una función de dos variables



Curva de contorno.

Gráfica de f.

Curva de nivel

Derivadas parciales de una función de varias variables

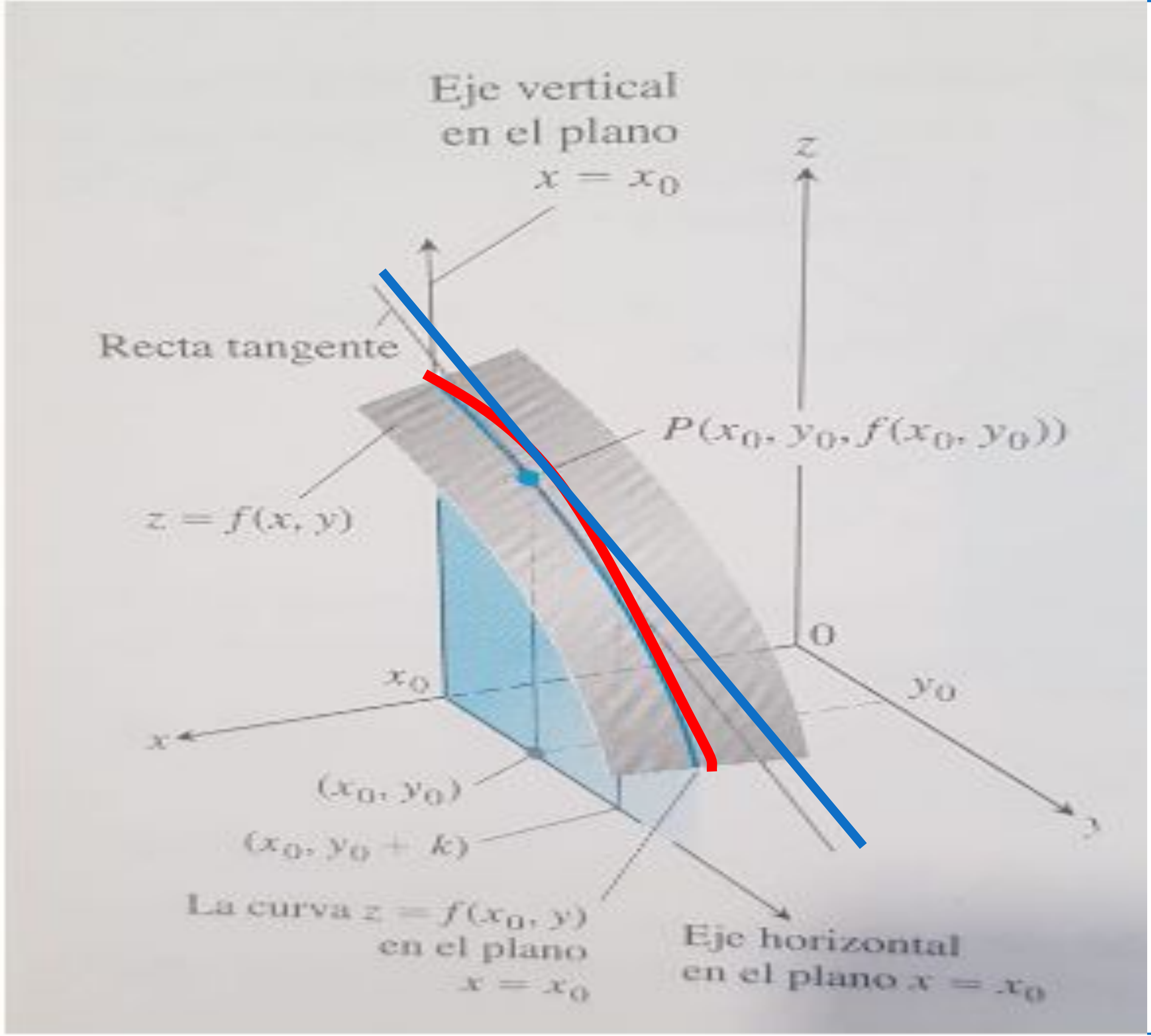
Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; w = f(x_1, \dots, x_n)$ una función real de varias variables.

La derivada parcial de $f(x_1, \dots, x_n)$ con respecto a x_i en el punto $(a_1, \dots, a_n)$ es

$$\boxed{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(a_1,\dots,a_n)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots x_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}};$$

si el límite existe.

Derivada parcial de una función de dos variables



La derivada parcial con respecto a y en (x, y) cuando x se mantiene fija en x_0 es la razón de cambio de f en la dirección del eje y.

Es la pendiente de la recta tangente a la curva que es intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$, en el punto P.

Derivadas direccionales en el plano

Sea $f(x, y)$ definida en una región R del plano xy. $P_0 = (x_0, y_0) \in R$.

$u = (u_1, u_2)$ vector unitario. $x = x_0 + su_1;\ y = y_0 + su_2$ recta por P_0 paralela a u.

s: parámetro. Mide la longitud de arco desde P_0 en la dirección de u.

Si el límite existe, el número

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

es la derivada de f en P_0 en la dirección del vector unitario u.

Interpretación geométrica de la Derivada direccional en el plano

$z = f(x, y)$ representa una superficie S en el espacio.

$P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto de S.

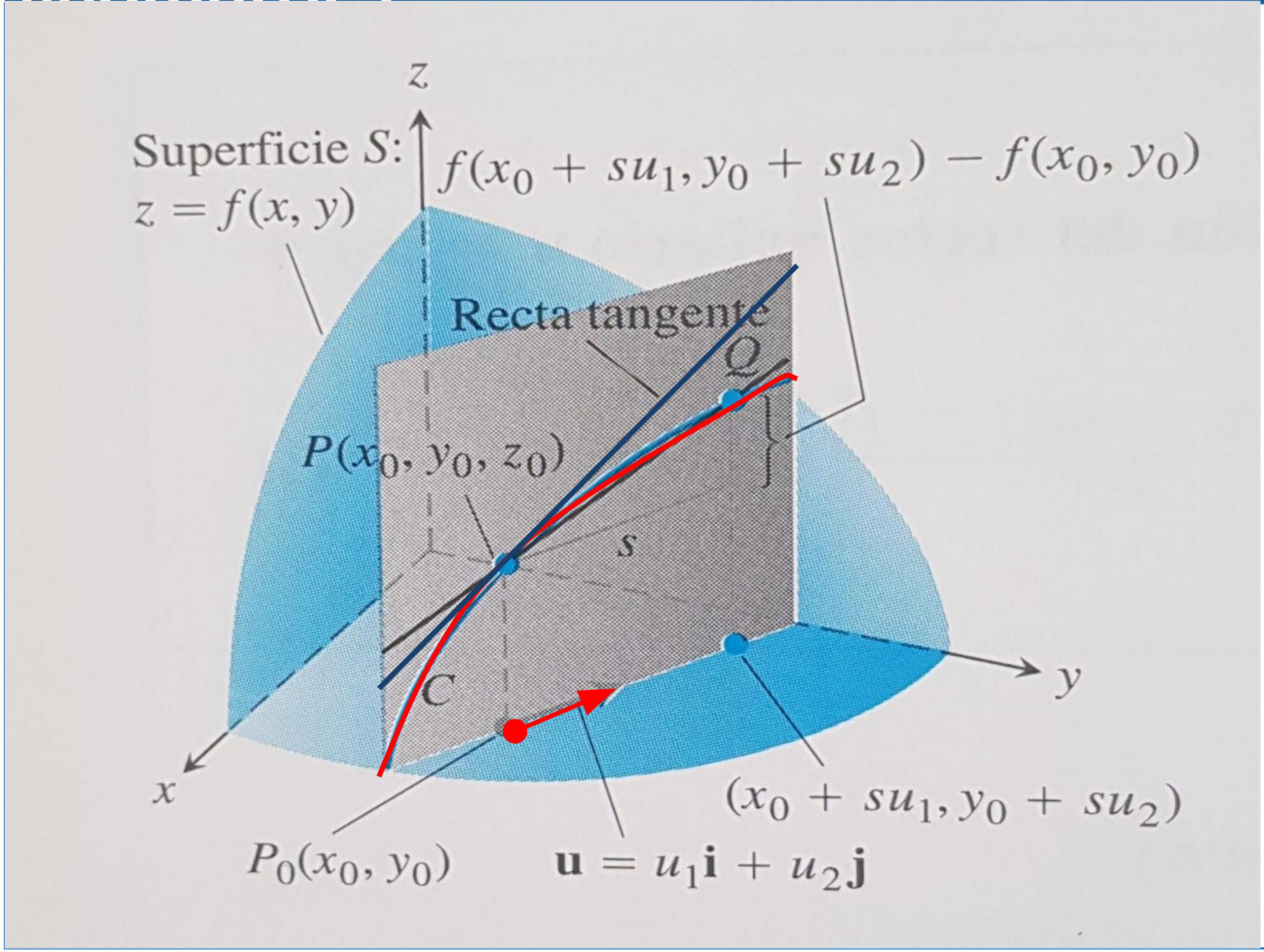
$u = (u_1, u_2)$ vector en el plano xy.

π es un plano vertical que pasa por P y es paralelo al vector $\boldsymbol{u}$.

$\pi \cap S$ es una curva C.

La derivada de f en P en la dirección de $\boldsymbol{u}$ es la razón de cambio de f en la dirección de $\boldsymbol{u}$ y es la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto P.

Derivada direccional en el plano-interpretación geométrica



La derivada de f en P en la dirección de $\boldsymbol{u}$ es la razón de cambio de f en la dirección de $\boldsymbol{u}$ y es la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto P.

Vector gradiente

El vector gradiente de $f(x, y)$ en un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ es el vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

el cual se obtiene al evaluar las derivadas parciales de f en P_0.

Cálculo de la derivada direccional de una función f en un punto

Aplicando la regla de la cadena:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} u_2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\right].(u_1, u_2) = (\nabla f)_{P_0}.u$$

en donde $u = (u_1, u_2)$ es un vector unitario.

Propiedades de la derivada direccional

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = (\nabla f)_{P_0}.u = \left|(\nabla f)_{P_0}\right||u|\cos\theta = \left|(\nabla f)_{P_0}\right|\cos\theta$$

- Si $\cos\theta = 1$, f crece más rápidamente. **f crece más rápidamente en la dirección y sentido del vector gradiente.**
- Si $\cos\theta = -1$, f decrece más rápidamente. **f decrece más rápidamente en la dirección del vector gradiente y sentido opuesto.**
- Si $\cos\theta = 0$, f no crece. El cambio de f es nulo en cualquier dirección ortogonal al vector gradiente (∇f no nulo).