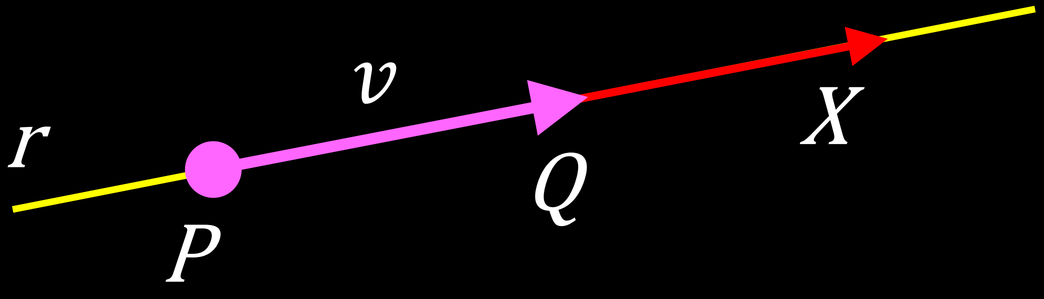
RECTA Y PLANO

Recta



Sean P y Q puntos no coincidentes.

$$X \in r \Leftrightarrow X - P \parallel Q - P \Leftrightarrow X - P = \lambda(Q - P)$$

$$\boxed{\boldsymbol{X = P + \lambda(Q - P)}}$$ Ecuación paramétrica vectorial de la recta

$v = Q - P$ vector director de la recta ; λ: parámetro

Dada la ecuación paramétrica vectorial de una recta, se puede escribir una ecuación por cada componente:

Sea $X = P + \lambda(Q - P) = P + \lambda v$ Ecuación paramétrica vectorial de la recta

En $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas escalares de la recta

En $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Cualquier vector colineal a v, puede ser vector director de r.
Rectas paralelas tienen vectores directores colineales.

Ejemplo 1) Sea r: $X = (2,-1) + t(3,-1)$ recta de $\mathbb{R}^2$.

Escriba la ecuación de una recta $r´$, paralela a r, que contenga al punto $Q = (4,2)$.

$$\boxed{r´: X = (4,2) + k(3,-1)}$$

2) Determine si son paralelas las rectas

$l: X = (-1,2,4) + \lambda\,(3,2,-1)$ y $l´: X = (-2,3,1) + \mu(-6,-4,1)$

Vectores directores de l y $l´$: $u = (3,2,-1)$ y $v = (-6,-4,1)$.

$u \parallel v \Leftrightarrow u = tv$, para algún $t \epsilon \mathbb{R}$.

$u = tv$: $(3,2,-1) = t(-6,-4,1)$

que equivale a $\begin{cases} -6t = 3 \Longrightarrow t = -{}^1/_2 \\ -4t = 2 \Longrightarrow t = -{}^1/_2 \\ t = -1 \Longrightarrow t = -1 \end{cases}$

El sistema no tiene solución, por tanto, las rectas no son paralelas.

Ejemplo Sean $P = (-2,3)$; $Q = (1,-2)$.

Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta definida por P y Q.

Indique si los puntos $R = (-4,1)$ y $S = (-8,13)$ pertenecen a r.

$\boxed{X = (-2,3) + t(3,-5)}$ Ecuación paramétrica vectorial de r.

$\boxed{\begin{cases} x_1 = -2 + 3t \\ x_2 = 3 - 5t \end{cases}}$ Ecuaciones paramétricas escalares de r.

¿$R \in r$?: $\begin{cases} -4 = -2 + 3t \\ 1 = 3 - 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2/3 \\ t = 2/5 \end{cases}$ Sist. incomp.$\Rightarrow \boxed{R \notin r}$

¿$S \in r$?: $\begin{cases} -8 = -2 + 3t \\ 13 = 3 - 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ Solución: $t = -2 \Rightarrow \boxed{S \in r}$

Ecuaciones cartesianas de la recta

En $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

Si $v_1 v_2 \neq 0$:

$$\lambda = \boxed{\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}}$$

En $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Si $v_1 v_2 v_3 \neq 0$:

$$\lambda = \boxed{\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}}$$

Ecuaciones cartesianas (forma simétrica)

En $\mathbb{R}^2$ una recta tiene una ecuación cartesiana; en $\mathbb{R}^3$ una recta tiene dos ecuaciones cartesianas.

Ecuaciones cartesianas de la recta

En $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$$

En $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} \quad \text{y} \quad \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$$

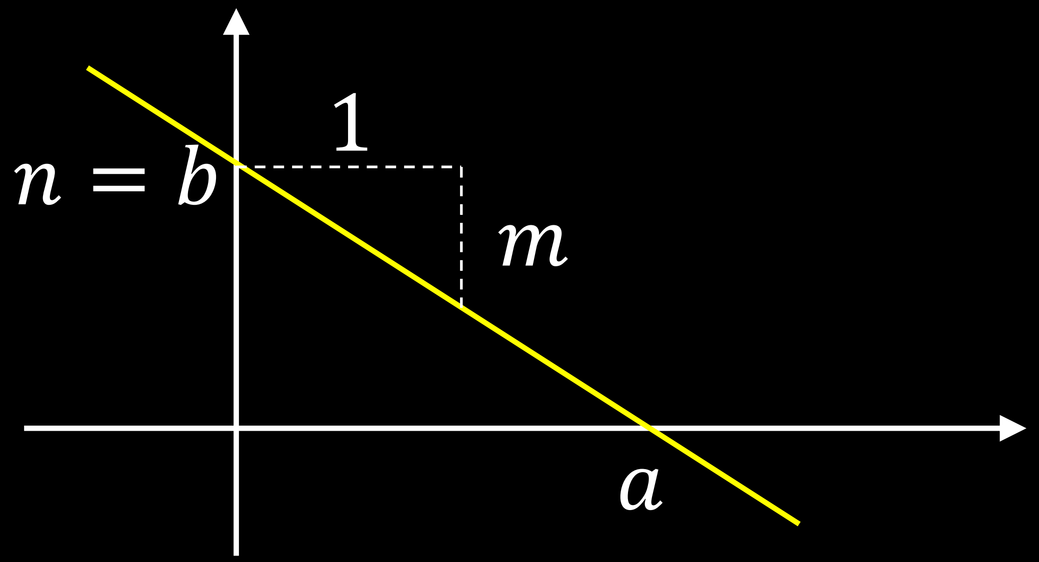
Multiplicando las ecuaciones por el producto de los denominadores y ordenando los términos:

$$\boxed{Ax + By = C}$$

$$\boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}}$$

Ecuaciones cartesianas (forma general o implícita)

Ecuaciones cartesianas de la recta



En $\mathbb{R}^2$:

$Ax + By = C$

Si $B \neq 0$:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Ecuación cartesiana

(forma explícita)

m: pendiente;

n: ordenada al origen

Si $ABC \neq 0$:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ecuación cartesiana

(forma segmentaria)

a: abscisa al origen

b: ordenada al origen

Ejemplo Sean $P=(-2{,}3);\ Q=(1,-2)$.

Escriba todas las ecuaciones de la recta definida por P y Q.

$\boxed{X=(-2{,}3)+t(3,-5)}$ Ec. param. vectorial de la recta r.

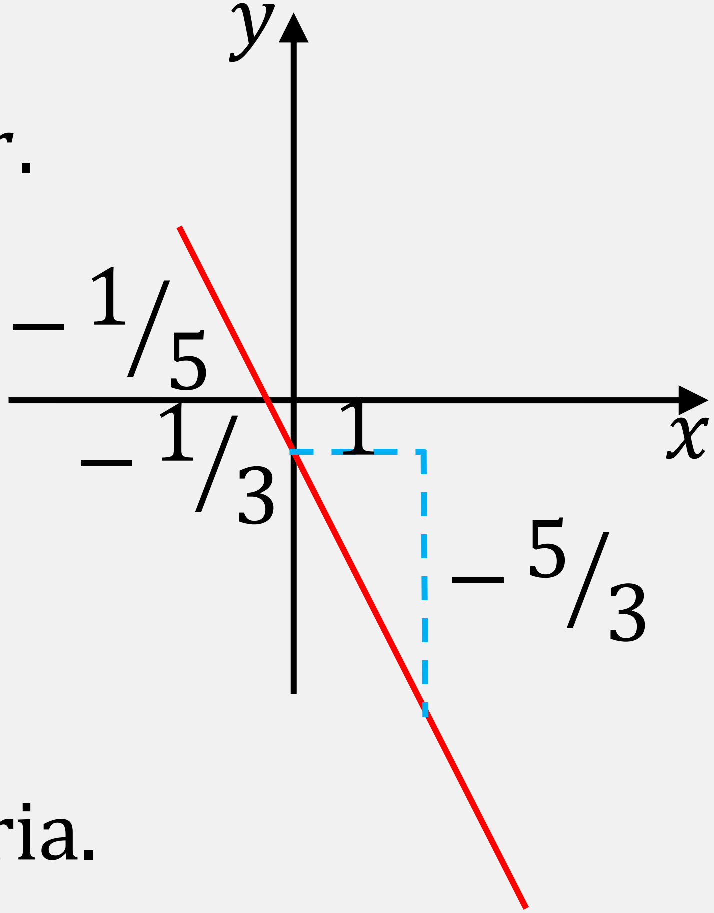
$$\boxed{\begin{cases} x_1=-2+3t \\ x_2=3-5t \end{cases}}$$ Ec. param. escalares de r.

$$\boxed{\frac{x_1+2}{3}=\frac{x_2-3}{-5}}$$ Ec. cartesiana simétrica.

$\boxed{-5x_1-3x_2=1}$ Ec. cartesiana implícita.

$$\boxed{x_2=-\frac{5}{3}x_1-\frac{1}{3}}$$ Ec. cartesiana explícita.

$$\boxed{\frac{x_1}{-\frac{1}{5}}+\frac{x_2}{-\frac{1}{3}}=1}$$ Ec. cartesiana segmentaria.



Ejemplo Sean $P = (-2,1,3)$; $Q = (1,1,-2)$.

Escriba todas las ecuaciones de la recta definida por P y Q.

$\boxed{X = (-2,1,3) + t(3,0,-5)}$ Ec. param. vectorial de la recta r.

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -2 + 3t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 - 5t \end{cases}}$$

Ec. param. escalares de r.

Despejando t de la 1° y 3° ecuaciones y escribiendo la 2° ecuación paramétrica:

$$\boxed{\begin{cases} x_2 = 1 \\ -5x_1 - 3x_3 = 1 \end{cases}}$$

Ecuaciones cartesianas

No se puede escribir la forma simétrica pues no se puede despejar t de la 2°ecuación paramétrica.

Ejemplo

Sea la recta de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones cartesianas son

$\begin{cases} x_2 = 1 \\ -5x_1 - 3x_3 = 1 \end{cases}$. Obtenga las ecuaciones paramétricas.

Resolveremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}} \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1^{(-1/5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: $\boxed{(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{5}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{3}{5}, 0, 1\right)}$

La solución es la ecuación paramétrica vectorial de la recta.

Ejemplo Escriba las ecuaciones de la recta coincidente con el eje x.

Dos puntos que pertenecen al eje x son los puntos $(0,0,0)$ y $(1,0,0)$.

Ecuación paramétrica vectorial de la recta:

$$\boxed{X = k(1,0,0)}$$

Ecuaciones paramétricas escalares: $\boxed{\begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

Ecuaciones cartesianas: $\boxed{\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

Plano

Sean P, Q y R puntos no alineados.

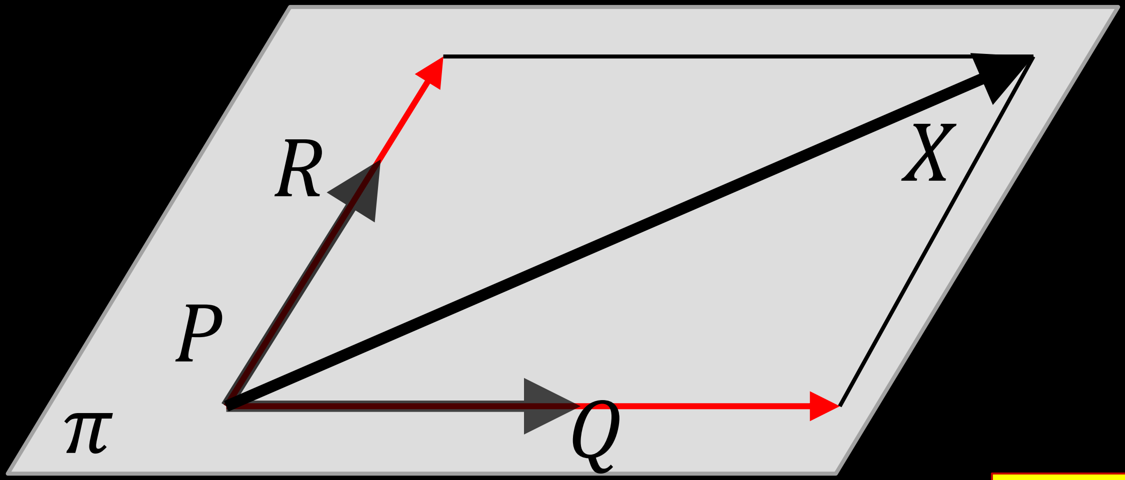
$$X \in \pi \Leftrightarrow X - P = \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)}}$$

Ecuación paramétrica vectorial del plano

$$\left.\begin{array}{l} u = Q - P \\ v = R - P \end{array}\right\} \text{vectores directores de } \pi$$



λ y μ: parámetros

Dada la ecuación paramétrica vectorial de un plano, se puede escribir una ecuación por cada componente:

$$X = P + \lambda u + \mu v$$

Ecuación paramétrica vectorial del plano

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas escalares del plano

Dos planos son paralelos si los vectores directores de cada uno son combinación lineal de los vectores directores del otro.

Ejemplo

Sean los planos $\begin{cases} \pi_1: X = (-2,3,1) + \alpha \underbrace{(2,3,1)}_{u} + \beta \underbrace{(3,-1,0)}_{v} \\ \pi_2: X = (2,0,-1) + \gamma \underbrace{(5,2,1)}_{u'} + \delta \underbrace{(0,-1,0)}_{v'} \end{cases}$

Determine si los planos son paralelos.

Veremos si u y v son combinaciones lineales de u' y v'.

¿$u = \gamma\, u' + \delta\, v'$?: ¿$v = \gamma\, u' + \delta\, v'$?:

$$\text{I:} \begin{cases} 5\gamma = 2 \\ 2\gamma - \delta = 3 \\ \gamma = 1 \end{cases} \qquad \text{II:} \begin{cases} 5\gamma = 3 \\ 2\gamma - \delta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Los sistemas I y II son incompatibles, por tanto, los vectores u y v no son combinaciones lineales de u' y v'.

$\boxed{\text{Los planos no son paralelos.}}$

Ecuación cartesiana del plano

Sean las ecuaciones paramétricas escalares de un plano:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Considerando los parámetros como incógnitas se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} u_1\lambda + v_1\mu = x - p_1 \\ u_2\lambda + v_2\mu = y - p_2 \\ u_3\lambda + v_3\mu = z - p_3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, la condición de compatibilidad es

$$\boxed{\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}}$$

Ecuación cartesiana del plano

Ejemplo Sean $A=(-1,2,3)$; $B=(0,-2,1)$; $C=(1,0,1)$

Escriba todas las ecuaciones del plano definido por A, B y C.

Ec. param. vectorial: $\boxed{X=(-1,2,3)+t(1,-4,-2)+k(2,-2,-2)}$

Ecuaciones paramétricas escalares:

$$\boxed{\begin{cases} x=-1+t+2k \\ y=2-4t-2k \\ z=3-2t-2k \end{cases}} \Longrightarrow \begin{cases} t+2k=x+1 \\ -4t-2k=y-2 \\ -2t-2k=z-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ -4 & -2 & y-2 \\ -2 & -2 & z-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{31}^{(2)}]{e_{21}^{(4)}}$$

$$\xrightarrow[e_{31}^{(2)}]{e_{21}^{(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 6 & 4x+y+2 \\ 0 & 2 & 2x+z-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{32}^{(-1/3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 6 & 4x+y+2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+z-\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible debe cumplirse:

$\boxed{{}^{2}/_{3}\,x-{}^{1}/_{3}\,y+z-{}^{5}/_{3}=0}$ Ecuación cartesiana del plano

Ejemplo Sea la ecuación cartesiana de un plano $2x - y = 3$.

Encuentre las ecuaciones paramétricas.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales: $2x - y = 3$.

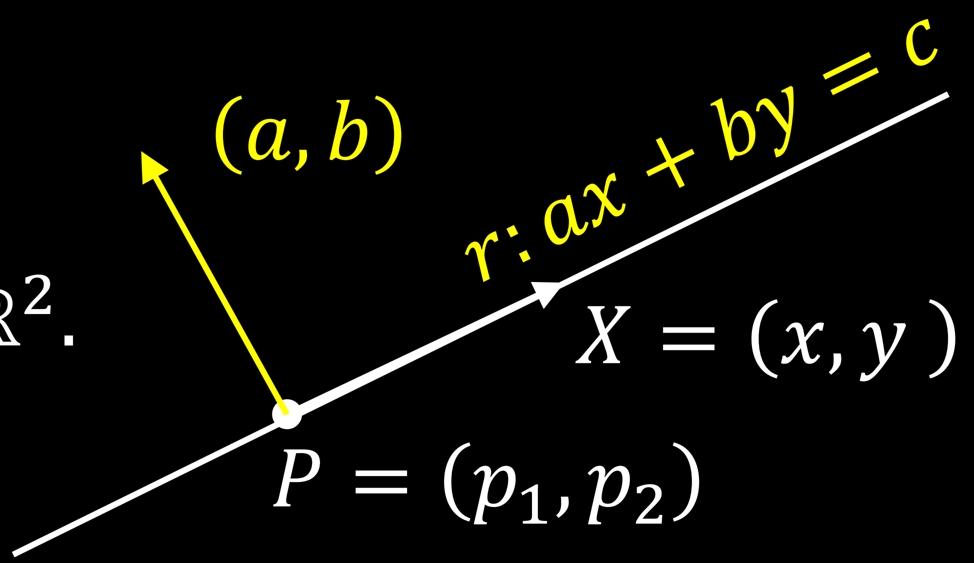
Matriz aumentada: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1^{(1/2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 0,0\right) + t\left(\frac{1}{2}, 1,0\right) + k(0,0,1)}$$

Ecuación paramétrica vectorial del plano

Interpretación geométrica de los coeficientes de las ecuaciones cartesianas



Sea $ax + by = c \qquad (1)$

la ecuación cartesiana de una recta r de $\mathbb{R}^2$.

Sea $P = (p_1, p_2) \in r$, por lo que

$ap_1 + bp_2 = c \qquad (2)$

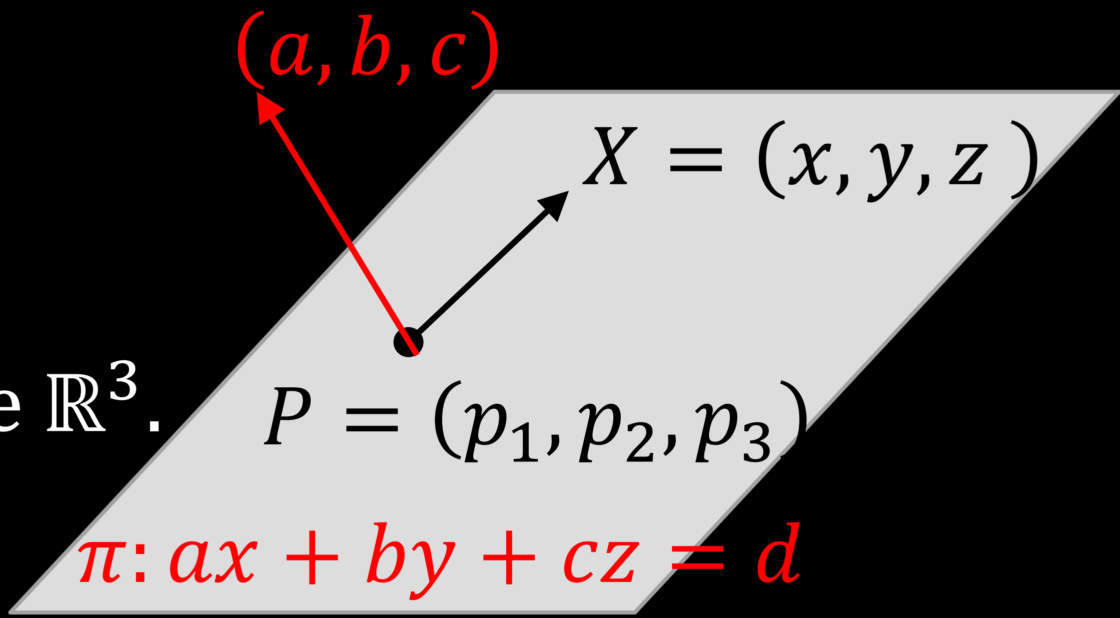
Restando miembro a miembro las igualdades (1) y (2):

$a(x - p_1) + b(y - p_2) = 0$ que puede escribirse como

$(a, b).(x - p_1, y - p_2) = 0$, por lo que $(a, b) \perp (x - p_1, y - p_2)$

Como $X - P$ es un vector que tiene la dirección de la recta r, resulta que el vector (a, b) es perpendicular a r.

Interpretación geométrica de los coeficientes de las ecuaciones cartesianas



Sea $ax + by + cz = d$

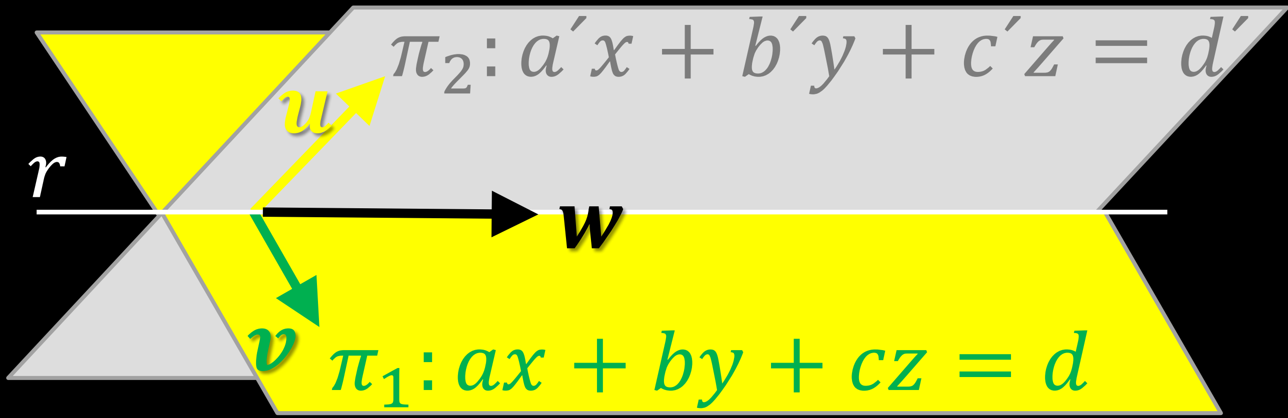
la ecuación cartesiana de un plano π de $\mathbb{R}^3$.

Sea $P = (p_1, p_2, p_3) \in \pi$.

Con el mismo procedimiento que el empleado para el caso de una recta de $\mathbb{R}^2$, se concluye que $(a, b, c) \perp (x - p_1, y - p_2, z - p_3)$

Como $X - P$ es un vector del plano π, resulta que el vector (a, b, c) es perpendicular a π.

Interpretación geométrica de los coeficientes de las ecuaciones cartesianas

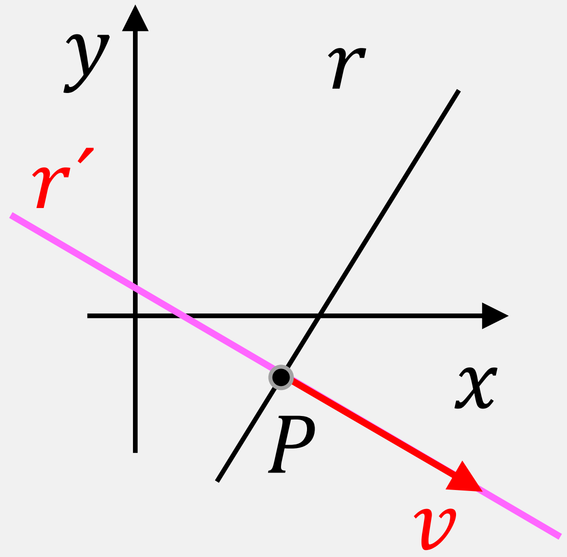


Sean $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

las ecuaciones cartesianas de una recta r de $\mathbb{R}^3$. Cada una de las ecuaciones es la ecuación de un plano. La recta es la intersección de ambos planos. Los vectores $u = (a, b, c)$ y $v = (a', b', c')$ son perpendiculares a cada plano. El vector $w = u \times v$ es perpendicular a u y a v, por tanto, tiene la dirección de la recta r.

Ejemplo Sea la recta r: $2\mathrm{x} - \mathrm{y} = 4$ de $\mathbb{R}^2$.

Halle la ecuación de una recta r', que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P = (3, -1)$.



Ecuación paramétrica vectorial de r':

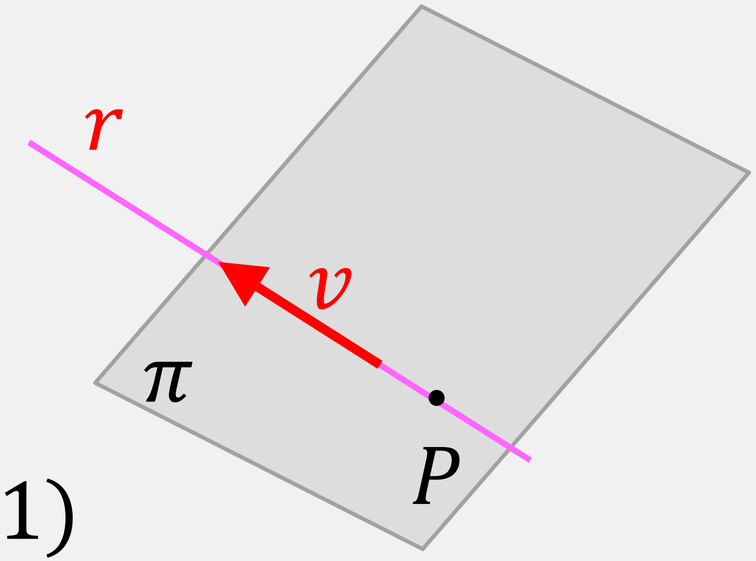
$$X = P + tv$$

$$P = (3, -1) \qquad v = (2, -1)$$

$$\boxed{r'\colon X = (3, -1) + t(2, -1)}$$

Ejemplo Sea el plano π: 3x − y + z =2.

Halle la ecuación de una recta r, que sea perpendicular a π y que pase por el punto $P = (0,-3,1)$.



Ecuación paramétrica vectorial de r:

$$X = P + tv$$

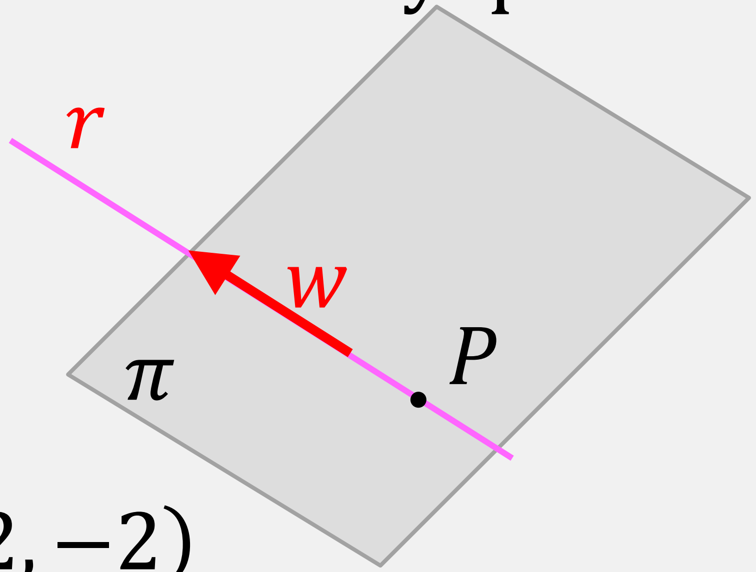
$$P = (0,-3,1) \qquad v = (3,-1,1)$$

$$\boxed{r: X = (0,-3,1) + t(3,-1,1)}$$

Ejemplo

Sea la recta de $\mathbb{R}^3$ $\quad r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

Halle la ecuación de un plano π, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P = (0, -3, 1)$.



Vector w perpendicular a π:

$w = u \times v$; $\quad u = (1, 1, -1)$; $\quad v = (3, -1, 1)$

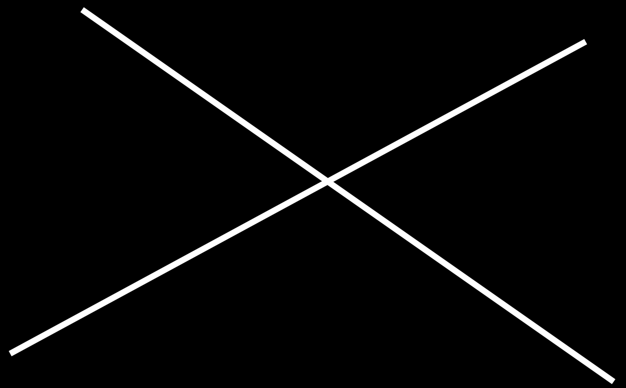
$w = (0, -4, -4)$. Se puede adoptar: $w = (0, -2, -2)$

$\pi: -2y - 2z = d$; dado que $P \in \pi: -2(-3) - 2(1) = 4 = d$

En definitiva la ecuación del plano π es : $\boxed{-2y - 2z = 4}$

Intersección y paralelismo de rectas de $\mathbb{R}^2$

1

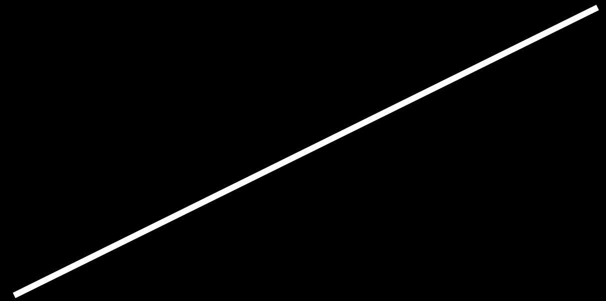


Rectas concurrentes:
Las rectas tienen un único punto en común

2

Rectas paralelas no coincidentes:
Las rectas no tienen puntos en común

3



Rectas paralelas coincidentes:
Las rectas tienen infinitos puntos en común

Ejemplo Sean las rectas $r: 2x - y = 1$ y $r': x = 4$.

Determine la posición relativa de ambas.

Formamos un sistema con las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x \qquad\quad = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{2}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

La solución es única por tanto $\boxed{\text{las rectas son concurrentes.}}$ El punto de intersección es la solución: $\boxed{I = (4,7).}$

Ejemplo Sean las rectas $r: 2x - y = 1$ y $r´: X = (4,7) + k(1,2)$.

Determine la posición relativa de ambas.

Introduciremos los valores de x y de y, de la ecuación paramétrica, en la ecuación cartesiana.

$2(4 + k) - (7 + 2k) = 1$ nos queda un sistema de una ecuación con una incógnita.

$0k = 0$ El sistema tiene infinitas soluciones: $k \in \mathbb{R}$. Por tanto, las rectas son paralelas coincidentes.

Ejemplo Sean $r: X = k(1,-2)$ y $r': X = (4,7) + t(-1,2)$.

Determine la posición relativa de ambas.

De r obtendremos la ecuación cartesiana.

$\begin{cases} x = k \\ y = -2k \end{cases} \Longrightarrow k = x = -\frac{1}{2}y$ Ecuación cartesiana: $x + \frac{1}{2}y = 0$

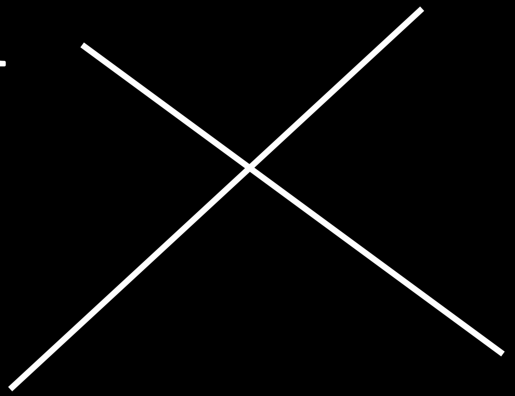
Introducimos x e y, de la ecuación paramétrica en la cartesiana:

$(4-t) + \frac{1}{2}(7+2t) = 0 \Longrightarrow 0t = -\frac{15}{2}$ Sistema incompatible.

Las rectas son paralelas no coincidentes.

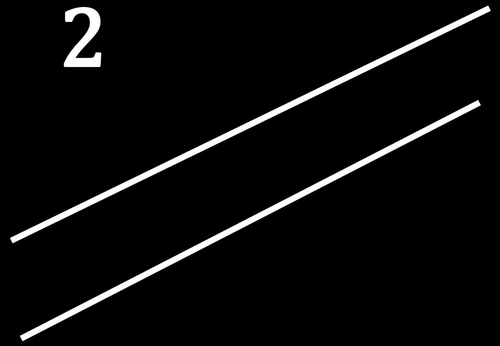
Intersección y paralelismo de rectas de $\mathbb{R}^3$

1



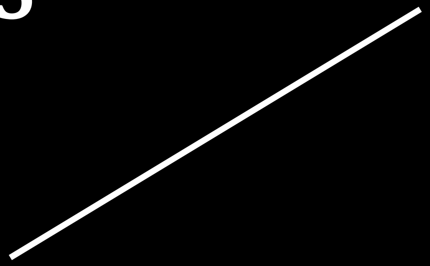
Rectas concurrentes: Las rectas tienen un único punto en común

2



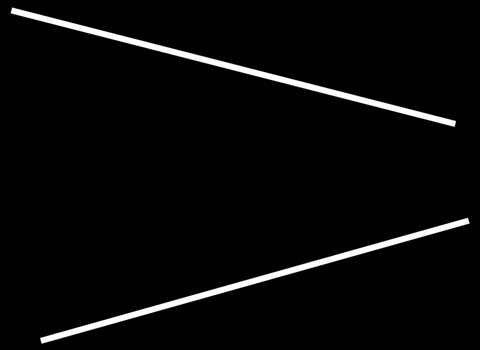
Rectas paralelas no coincidentes: Las rectas no tienen puntos en común

3



Rectas paralelas coincidentes: Las rectas tienen infinitos puntos en común

4



Rectas alabeadas: Las rectas no tienen puntos en común y no son paralelas

Ejemplo

Sean $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y $r': \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$, rectas de $\mathbb{R}^3$.

Determine la posición relativa de ambas.

Formamos un sistema con todas las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1} \dots \xrightarrow{e_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

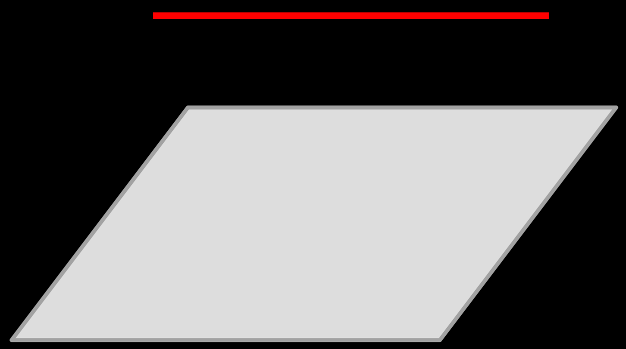
El sistema es incompatible, no tienen puntos en común.

Son paralelas no coincidentes o alabeadas, según si los vectores directores son paralelos o no.

Los vectores directores son $u = (-1, -1, 1)$; $v = (1, -1, 1)$; se obtienen con el producto vectorial de los vectores cuyas componentes son los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de las rectas. Los vectores no son paralelos, por lo que las rectas son alabeadas.

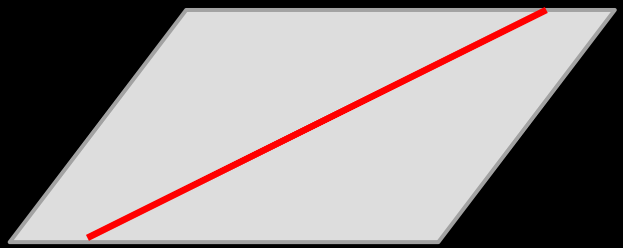
Intersección y paralelismo de rectas y planos

1



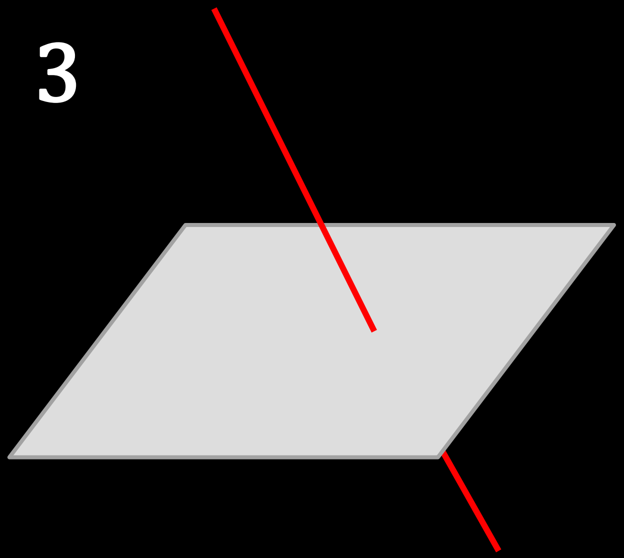
La recta es paralela al plano y no está contenida en él. No tienen puntos en común.

2



La recta está contenida en el plano. Tienen infinitos puntos en común.

3



El plano corta a la recta en un punto. Tienen un único punto en común.

Ejemplo Sean $r\colon \mathrm{X} = (1,0,2) + \mathrm{t}(-1,0,1)$ y $\pi\colon 2x - z = 1$.

Determine la posición relativa de ambos.

Introducimos la ecuación paramétrica en la cartesiana:

$$2(1-t) - (2+t) = 1$$

Obtenemos el sistema: $-3t = 1$, cuya única solución es $t = -\frac{1}{3}$.

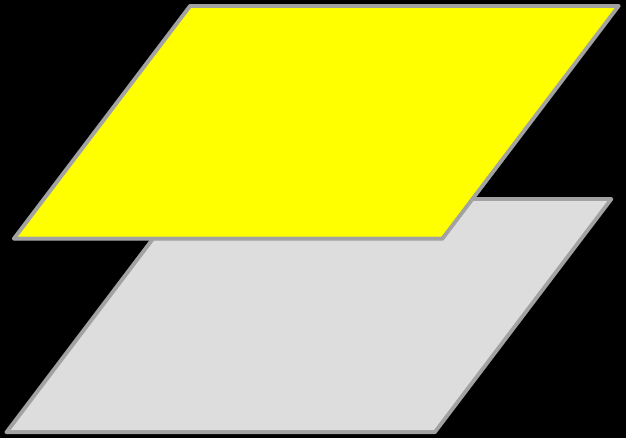
Reemplazamos en la ecuación paramétrica el valor hallado de t:

$$I = (1,0,2) - \frac{1}{3}(-1,0,1) = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$$

$\boxed{\text{El plano corta a la recta en el punto } I = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)}$

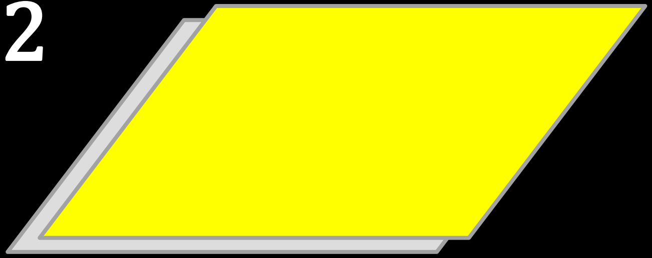
Intersección y paralelismo de planos

1



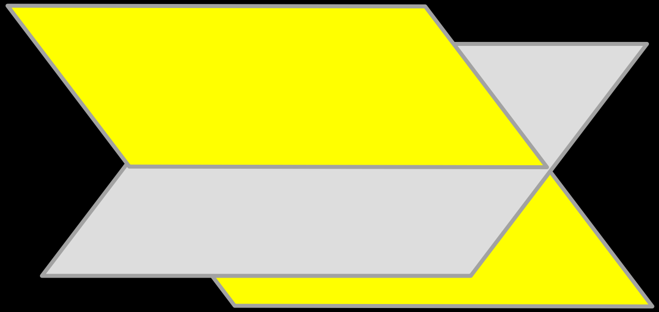
Los planos son paralelos no coincidentes. No tienen puntos en común.

2



Los planos son paralelos coincidentes. Tienen infinitos puntos en común. La intersección es un plano.

3



Los planos se cortan. Tienen infinitos puntos en común. La intersección es una recta.

Ejemplo Sean π: $x - z = 1$ y el plano ρ definido por los ejes x e y. Determine la posición relativa de ambos.

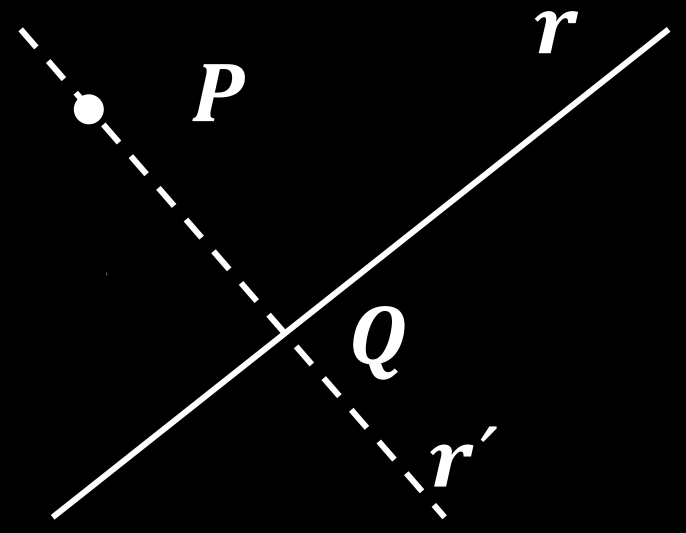
Ecuación cartesiana del plano ρ: Puesto que el eje z es perpendicular a ρ, el vector $(0,0,1)$ es perpendicular al plano, por lo que la ecuación cartesiana es $z = d$. Como $(0,0,0) \in \rho$, $0 = d$; y la ecuación de ρ es: $z = 0$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x - z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

La solución es $X = (1,0,0) + t(0,1,0)$ que es la ecuación de una recta, por lo que los planos se cortan.

Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$

Se desea hallar la distancia de un punto P a una recta r.



Procedimiento

1. Trazamos una recta r', perpendicular a r, que contenga al punto P.
2. Hallamos la intersección entre r y r'.
   $Q = r \cap r'$ es el punto de r más cercano a P.
3. Determinamos la distancia de P a Q: $d(P, Q)$.

Ejemplo Sean r: $x - y = 1$ y $P = (3,1)$.

Calcule la distancia entre ambos.

1. $r':X = (3,1) + t(1,-1)$
2. $r \cap r'$: $(3+t) - (1-t) = 1$

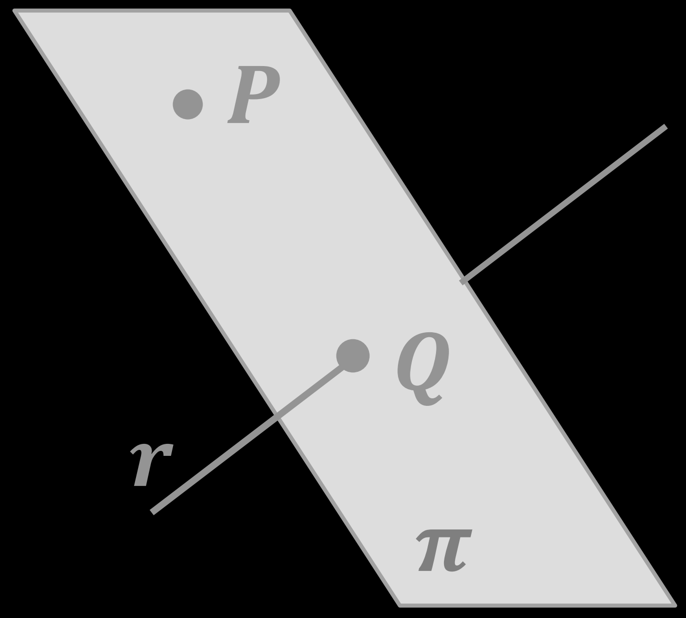
$$2t = -1 \Longrightarrow t = -\frac{1}{2} \qquad Q = (3,1) - \frac{1}{2}(1,-1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$Q = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ punto de r más cercano a P.

3. $d(P,Q) = \|Q - P\| = \left\|\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$

Se desea hallar la distancia de un punto P a una recta r.



Procedimiento

1. Trazamos un plano π, perpendicular a r, que contenga al punto P.
2. Hallamos la intersección entre r y π. $Q = r \cap \pi$ es el punto de r más cercano a P.
3. Determinamos la distancia de P a Q: $d(P, Q)$.

Ejemplo Sean r: $X = (-1,3,2) + k(1,0,1)$ y $P = (3,1,0)$.

Calcule la distancia entre ambos.

1. π: $x + z = d$; $P \in \pi$: $(3) + (0) = 3 = d$; π: $x + z = 3$
2. $r \cap \pi$: $(-1 + k) + (2 + k) = 3$

   $2k = 2 \Longrightarrow k = 1$ $\qquad Q = (-1,3,2) + (1,0,1) = \boxed{(0,3,3)}$

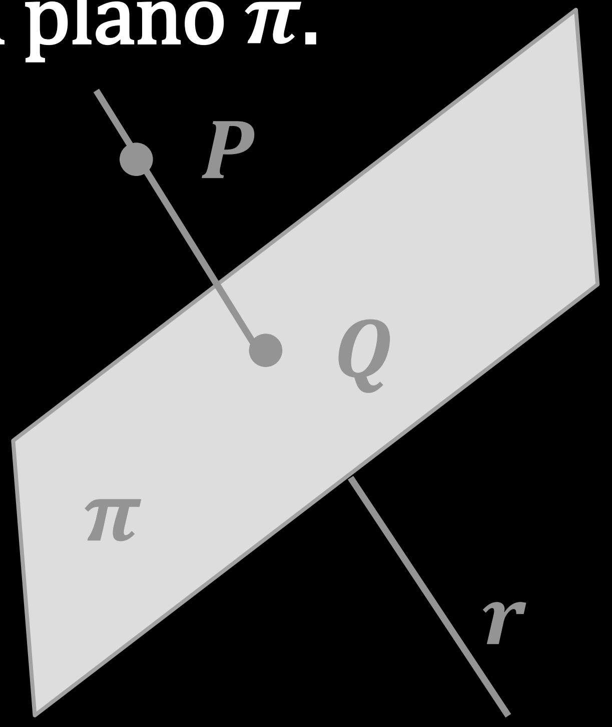
   punto de r más cercano a P.
3. $d(P,Q) = \|Q - P\| = \|(-3,2,3)\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 3^2} =$

$$= \boxed{\sqrt{22}}$$

Distancia de un punto a un plano

Se desea hallar la distancia de un punto P a un plano π.

Procedimiento



1. Trazamos una recta r, perpendicular a π,

   que contenga a l punto P.

2. Hallamos la intersección entre r y π.

   $Q = r \cap \pi$ es el punto de π más cercano a P.

3. Determinamos la distancia de P a Q: $d(P, Q)$.

Ejemplo Sean $\pi: 2x - y + z = 2$ y $P = (3,1,0)$.

Calcule la distancia entre ambos.

1. $r: \quad X = (3,1,0) + k(2,-1,1)$
2. $r \cap \pi: \; 2(3+2k) - (1-k) + (k) = 2$

$$6k = -3 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \; ; \qquad Q = (3,1,0) - \frac{1}{2}(2,-1,1) = \boxed{\left(2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

punto de π más cercano a P.

3. $d(P,Q) = \|Q - P\| = \left\|\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\| =$

$$= \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$