Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Исследование динамических систем с непрерывным временем временем»

Студент 315 группы
М. М. Савинов

Руководитель практикума
Д. А. Алимов

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Задана динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(b - \ln x) - bxy; \\ \dot{y} = \frac{dxy}{N+y} - cy; \end{cases} \tag{1}$$

где $r > 0,\ b > 0,\ d > 0,\ N > 0,\ c > 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$. Для данной системы требуется:

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы.
2. Ввести новые безразмерные параметры, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.
3. Найти неподвижные точки и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответсвующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла (устойчвый, неустойчивый, полуустойчивый).
6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

2 Биологическая интерпритация

Исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) - B(x,y), \\ \dot{y} = -C(y) + D(x,y), \end{cases}$$

где $A(x) = rx(b - \ln x),\ B(x,y) = bxy,\ C(y) = cy, D(x,y) = \frac{dxy}{N+y}$. Такая записать представляет собой общий вид модели «хищник–жертва». В этой модели $x(t)$ представляет популяцию жертв, y(t) — популяцию хищников на тот же момент времени.

Функция $A(x)$ имеет смысл скорости размножения жертв в отсутствии хищников. В данной модели введен член, ограничивающий рост популяции жертв(то есть модель учитывает внутривидовую конкуренцию жертв), максимальное возможное количество которых задается параметром b и составляет e^b.

Член $B(x,y)$ описывает скорость выедания жертв, в зависимости от популяций жертв и хищников. К тому же рассматривают трофическую функцию $B(x,\cdot)$ — зависимость скорости выедания жертвы от популяции жертвы при фиксированной (например, единичной) популяции хищника. В этой модели насыщения хищников, а так же конкуренция за добычу не происходит, так как трофическая функция линейна.

Функция $C(y)$ имеет смысл смертности хищников, в зависимости от числа хищников без учета конкуренции за жертв. В рассматриваемой модели эта зависимость линейна. Таким образом, хищники не конкурируют за ресурсы, отличные от жертв(например территория или другие ресурсы). Такая функция укладывается в рамки модели взаимодействия популяций при небольшой численности хищников. Параметр **c** отвечает за продолжительность жизни хищников. Чем он больше, тем быстрее хищники умирают.

Член $D(x,y)$ — функция, описывающая потребления жертв хищниками. Хищники размножаются по линейному закону, когда их численность достаточна мала.

3 Исследование системы

3.1 Введение безразмерных параметров

Приведем в системе (1) к новым переменным:

$$x(t) = qu(t),\ y(t) = pv(t),\ t = \tau T,$$

тогда система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = T\Big(ru(\tau)(b - \ln[qu(\tau)]) - bpu(\tau)v(\tau)\Big), \\ \frac{dv}{d\tau} = T\Big(- cv(\tau) + \frac{dqu(\tau)v(\tau)}{N + pv(\tau)}\Big). \end{cases}$$

Теперь положим

$$p = \frac{de^b}{c},\ q = e^b,\ T = \frac{1}{c}$$

и подставим в систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{c}\Big(ru(\tau)(b - \ln[e^b u(\tau)]) - b\frac{de^b}{c}u(\tau)v(\tau)\Big), \\ \frac{dv}{d\tau} = v(\tau)\Big(- 1 + \frac{1}{c}\frac{de^b u(\tau)}{N + \frac{de^b}{c}v(\tau)}\Big). \end{cases}$$

и после тривиальных преобразований получаем систему

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(\tau)\Big(- \frac{r}{c}\ln u(\tau) - \frac{bde^b}{c^2}v(\tau)\Big), \\ \frac{dv}{d\tau} = v(\tau)\left(-1 + \frac{u(\tau)}{\frac{Nc}{de^b} + v(\tau)}\right), \end{cases}$$

Обозначим теперь $\frac{r}{c}$ за μ, $\frac{bde^b}{c^2}$ за γ, $\frac{Nc}{de^b}$ за η. Тогда изучаемся система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(\tau)\Big(- \mu\ln u(\tau) - \gamma v(\tau)\Big), \\ \frac{dv}{d\tau} = v(\tau)\left(-1 + \frac{u(\tau)}{\eta + v(\tau)}\right), \end{cases} \tag{2}$$

где $\eta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$.

Замечание 1 *В силу ограниченности максимальной возможной численности популяции жертв, характеризуемой переменной $x(t)$, (как было ранее сказано, всего в популяции может быть не более e^b особей), можно получить неравентсво $x(t) \leqslant e^b$. Переходя к новой переменной $u(\tau)$, получаем следующее: $x(t) = e^b u(\tau) \leqslant e^b \Rightarrow u(\tau) \leqslant 1$.*

3.2 Нахождение неподвижных точек

Для начала дадим определение неподвижной точки динамической системы:

Опредление 1 *Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется неподвижной точки динамической системы $\dot{x}_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$, где $(x_1, \cdots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n,\ i = 1, \cdots, n,\ f = (f_1, \cdots, f_n)$, если $f(x_0) = 0$.*

Найдем неподвижные точки итоговой системы (2). Для этого потребуется решить следующую систему:

$$\begin{cases} 0 = -u(\tau)(\mu \ln u(\tau) + \gamma v(\tau)), \\ 0 = v(\tau)\Bigg(-1 + \frac{u(\tau)}{\eta + v(\tau)}\Bigg) \end{cases} \tag{3}$$

Исходя из вида полученной системы, обнаруживаются две неподвижные точки системы — $A(1,0)$, и учитывая, что $\lim_{\tau \to 0}\Bigg(u(\tau) \cdot \ln u(\tau)\Bigg) = 0$, получаем вторую точку $B(0,0)$. Попытаемся найти в общем виде остальные неподвижные точки системы, исходя из предположения $u(t) \neq 0,\ v(t) \neq 0:$

$$\begin{cases} 0 = \mu \ln u(\tau) + \gamma v(\tau), \\ 0 = -1 + \frac{u(\tau)}{\eta + v(\tau)}, \end{cases} \tag{4}$$

выражая $u(\tau)$ получаем:

$$\begin{cases} u(\tau) = e^{-\frac{\gamma}{\mu} v(\tau)}, \\ u(\tau) = v(\tau) + \eta. \end{cases} \tag{5}$$

Понятно, что данную систему не решить аналитически для произвольных $\mu,\ \gamma,\ \eta$. Поэтому воспользуемся разрешенными допущениями и зафиксируем значение параметра $\eta \geqslant 1$. Заметим, что в таком случае у нас не может быть других решений системы (5), кроме найденных значений A и B. Теперь рассмотрим $\eta < 1$, тогда у системы (5) будет одно решение(в силу убывания экспоненты и возрастания линеной функции), будем обозначать эту точку C.

Параметрический портрет предсталяет собой положительную ось, разделенную параметром $\eta = 1$. В области где $\eta < 1$, система имеет 3 неподвижные точки (A,B,C), в области $\eta \geqslant 1$ система имеет две неподвижные точки(A,B).

3.3 Устойчивость неподвижных точек

Для исследования неподвижных точек системы (2) введем несколько определений. Пусть задана динамическая система

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \to \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Определение 2 *Положение равновесия динамической системы (6) называется гиперболическим, если не существует собственных чисел, расположенных на мнимой оси.*

Определение 3 *Гиперболическое положения равновесия называется гиперболическим седлом, если $n_+ n_- \neq 0$, где n_+ и n_- — количество собственных значений якобиана (с учетом их кратности) с положительной и отрицательной вещественной частью соответственно.*

Теорема 1 *(А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре). Пусть u^* — гиперболическое положение равновесия системы (6). Тогда если $n_+ = 0$, то положение равновесия u^* ассимтотически устойчиво, если $n_+ > 0$, то неустойчиво.*

Воспользуемся теоремой Ляпунова–Пуанкаре. Для этого выпишем якобиан изучаемой системы (2):

$$J = \begin{pmatrix} -\mu \ln u - \mu - \gamma v & -\gamma u \\ \frac{v}{\eta+v} & -1 + \frac{u}{(\eta+v)^2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Рассмотрим значения матрицы якобиана (7) в точке A, B и C:

1. $$J(A) = \begin{pmatrix} -\mu & -\gamma \\ 0 & -1 + \frac{1}{\eta^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

   Если $\eta = 1$,то собственными значениями матрицы являются числа $\lambda_1 = -\mu < 0,\ \lambda_2 = 0$. Значит, для данной точки характерная бифуркация «седло–узел».

   Если $\eta < 1$,то собственными значениями матрицы являются числа $\lambda_1 = -\mu < 0,\ \lambda_2 = -1 + \frac{1}{\eta^2} > 0$. Значит, точка является седлом.

   Если $\eta > 1$,то собственными значениями матрицы являются числа $\lambda_1 = -\mu < 0,\ \lambda_2 = -1 + \frac{1}{\eta^2} < 0$. Значит, точка является устойчивым узлом.

2. Ввиду наличия логарифмического слагаемого, значения якобиана в точке B не определено. Рассмотрим значение якобиана в некоторой близкой точке $B_1(\epsilon, 0)$:

   $$J(B_1) = \begin{pmatrix} -\mu - \ln \epsilon & -\gamma \epsilon \\ 0 & -1 + \frac{\epsilon}{\eta^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

   Получаем собственные значения $\lambda_1 = -\mu - \ln \epsilon$ и $\lambda_2 = -1 + \frac{\epsilon}{\eta^2}$. При стремлении ϵ к нулю, получаем, что $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$, значит, что точка B является седлом.

3. Для точки C, численный эксперимент показал, что если точка имеется, тогда $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$, значит точка является седлом.

Продемонстрируем это несколькими примерами:

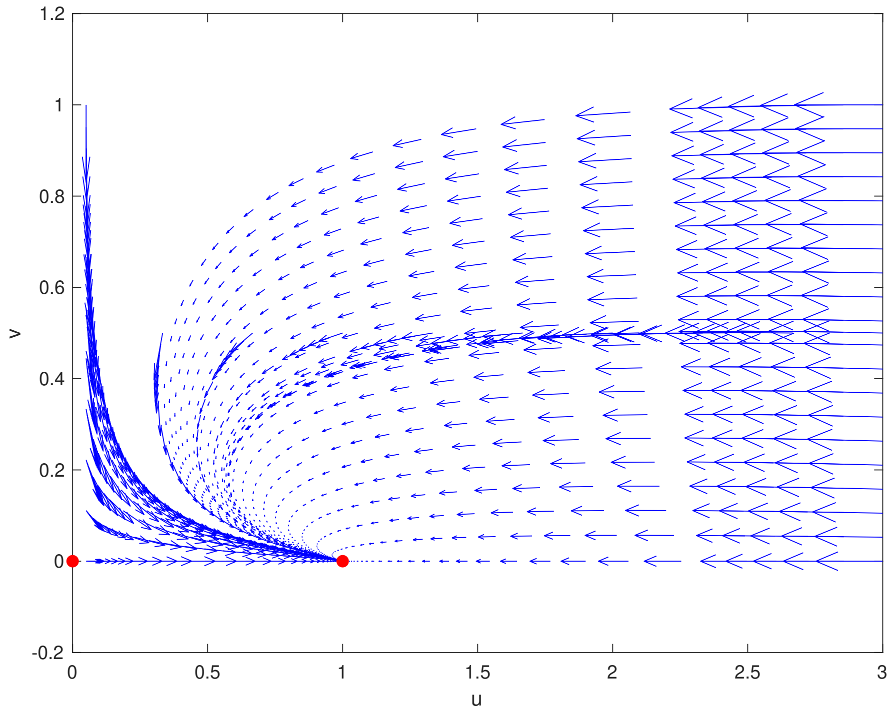

Рис. 1: Фазовый портрет системы при $\mu = 1,\ \gamma = 3,\ \eta = 2 > 1$.

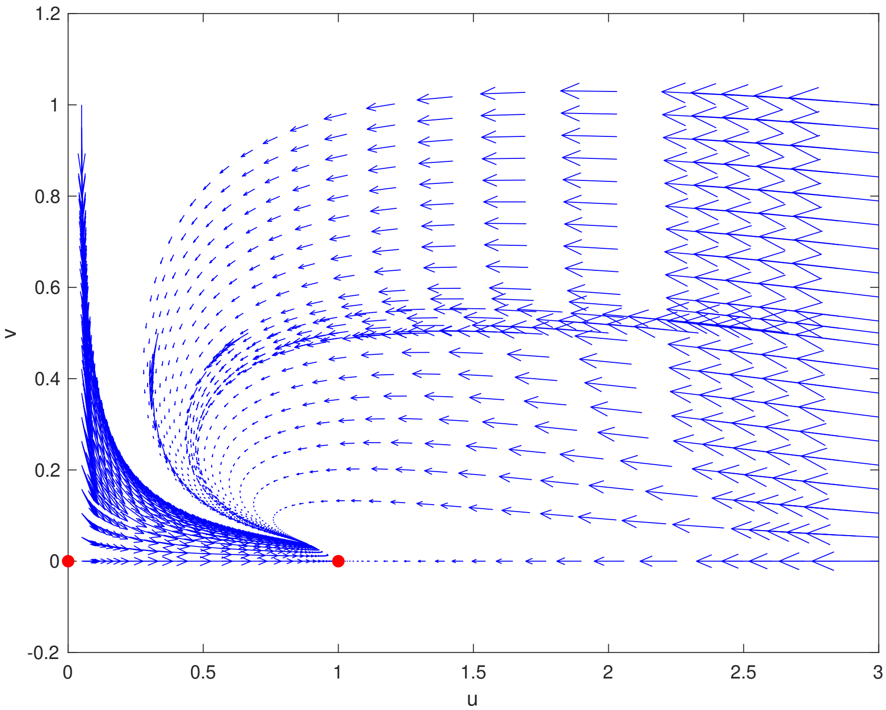

Рис. 2: Фазовый портрет системы при $\mu = 1,\ \gamma = 3,\ \eta = 0.9 < 1$.

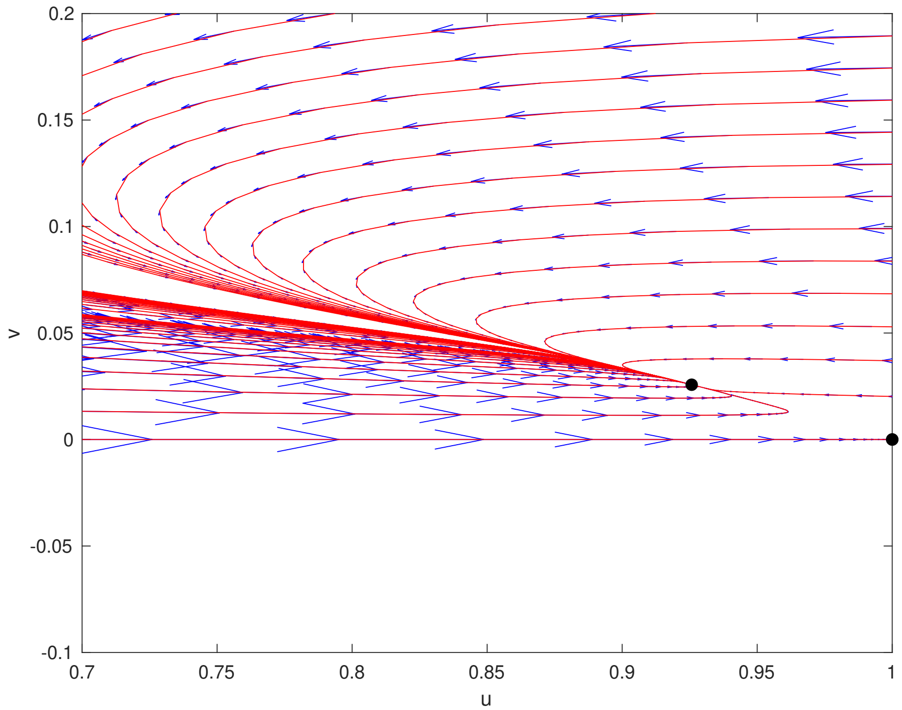

Рис. 3: Фазовый портрет системы при $\mu = 1,\ \gamma = 3,\ \eta = 0.9 < 1$, в окрестности точки A

Представленные графики демонстрируют нам появление бифуркации «седло–узел» при прохождении параметра η через значение 1. Параметрический портрет представляет положительную числовую полуось, разделеную на две части значением $\eta = 1$.

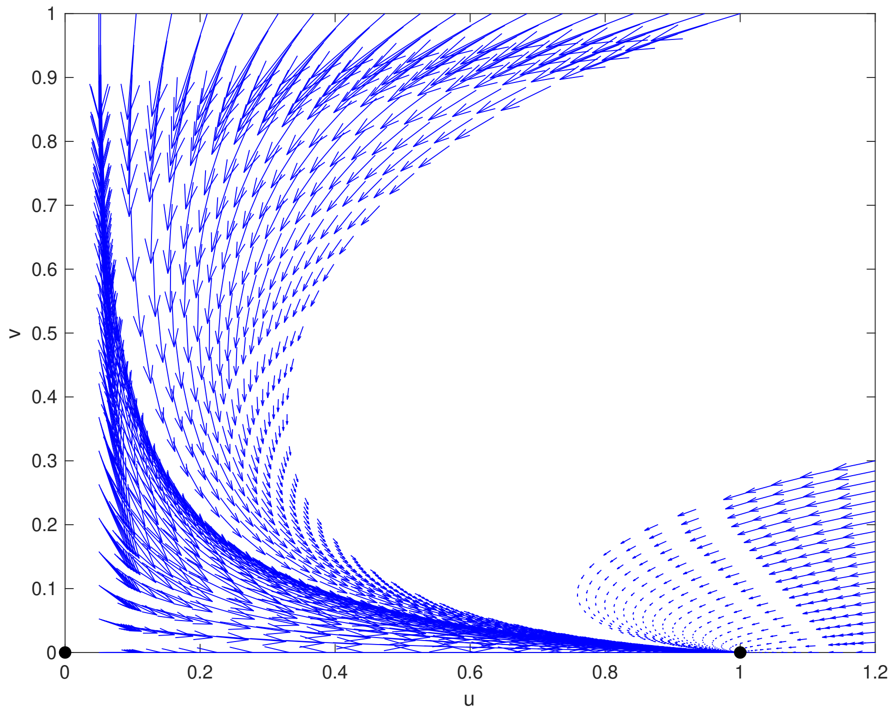

Рис. 4: Фазовый портрет системы при $\mu = 1,\ \gamma = 3,\ \eta = 30 > 1$.

3.4 Бифуркация Андронова–Хопфа

Для исследования системы (2) на возможность появления бифуркации Андронова–Хопфа введем несколько определений. Пусть задана динамическая система

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \to \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Определние 4 *Замкнутую траекторию $\phi(t)$ системы (8) будем называть предельным циклом, если в окрестности этой траектории нет других замкнутых орбит.*

Определние 5 *Бифуркацию положения равновесия, соответствующая появления сопряженных чисто мнимых собственных чисел, называется бифуркацией Пуанкаре–Андронова или бифуркацией рождения цикла.*

Как было продемонстрировано, в изучаемой системе все собственные значения матрицы Якоби действительны и в ней не могут появиться чисто мнимые собственные значения ни при каких значениях параметров, а это означает невозможность возникновения бифуркации Андронова–Хопфа.

3.5 Биологическая интерпретация результатов исследования

Если рассмотреть полученные графики, можно провести биологическую интрепретацию полученных результатов. В частности, мы видим, что при $\eta \geqslant 1$ в с течением времени популяция хищников начинает вымирать, и в конце концов погибнет, а популяция жертв достирает максимально возможного значения; при значениях параметра $\eta < 1$ возможно возникновение устойчивой ситуации, в которой численности жертв и хищников на протяжении времени остаются почти неизменными.

Список литературы

[1] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии, 2010.