Задача стабилизации на основании неполной и неточной информации

Кафедра системного анализа
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

МГУ им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Москва 2022

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с управляющими параметрами

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u,\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^{n_x},\ u \in \mathbb{R}^{n_u},$$

$$\mathbf{f}(\cdot) \in C^2(\Omega),\ \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x},\ \mathbf{f}(0) = 0,\ \mathbf{g}(\cdot) = C^1(\Omega),\ \mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$$

определены в области Ω которая допускает конечную триангуляцию симплексами $\Omega^{(i)}$, $u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления. Множество $\mathcal{P}$ является выпуклым многогранником:

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^{n_u} \ :\ Pu \preceq p\}.$$

Пусть $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор наблюдений:

$$y = Cx + \xi,\ C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x},\ \xi \in \mathbb{R}^{n_y},$$

где ξ – вектор, характеризующий погрешность при измерении, матрица C фиксирована, $\xi \in \mathcal{R}$.

Постановка задачи

Пусть $\mathcal{X}_0 \subset \Omega$ – некоторое фиксированное множество, содержащее нулевое положение равновесия. Тогда необходимо найти такое управление $u = u(y)$, что найдётся такое множество $\mathcal{X}$, что $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X} \subset \Omega$ и для любого $x_0 \in \mathcal{X}$, для любой погрешности измерений $\xi(\cdot)$, для соответствующей траектории $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$ будут выполнены следующие условия:

$$\exists t^* \geqslant 0 : \; x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}, \forall t \geqslant 0, \quad \text{и } x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_0, \forall t \geqslant t^*.$$

По возможности множество $\mathcal{X}_0$ необходимо сделать наименьшим по вложению.

Барицентрические координаты

Рассмотрим набор из $n_x + 1$ точек находящихся в общем положении $g = \{g_1, g_2, \cdots, g_{n_x+1}\}$. Будем обозначать $\Omega = \text{conv } g_i$. Обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_x+1})$ барицентрические координаты в этом симплексе.

Составим матрицу G, в которой содержатся столбцы $g_1, \ldots, g_{n_x+1}$. Барицентрические координаты: для каждой точки $x \in \Omega$ найдется такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_x+1})$, такой, что:

$$\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geq 0\ \forall k,\ G\alpha(x) = x.$$

$$\alpha(x) = Px + p.$$

Кусочная линеаризация системы дифференциальных уравнений

Для функции $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u$, справедливо:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u = F^{(i)}\alpha^{(i)}(x) + B^{(i)}u + r^{(i)}(x,u) = \\ = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + r^{(i)}(x,u)\end{aligned}$$

где

$$F^{(i)} = (\mathbf{f}(g_1^{(i)}), \ldots, \mathbf{f}(g_{n_x+1}^{(i)})) \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}, \;\; A^{(i)} = F^{(i)}H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1} \mathbf{g}(g_k), \;\; f^{(i)} = F^{(i)}h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

$$|r_s^{(i)}(x,u)| < R_s^{(i)}, \;\; \forall s = 1, \cdots, n_x + 1$$

Случай линейного управления

Будем искать управление в виде линейной функции от наблюдений в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$. Запишем общий вид управления:

$$u(y) = Ky = K(Cx + \xi).$$

Найдем условия на матрицу K при $x \in \Omega^{(i)}$, при которых управление удовлетворяет условиям при любых ξ:

$$KCx + K\xi \in \mathcal{P},\ \forall x \in \Omega^{(i)},\ \forall \xi \in \mathcal{R},$$

матрица K удовлетворяет этому условию в том и только в том случае, если выполнена система линейных неравенств:

$$P_s^T K(Cg + \eta) \leqslant p_s,\ \forall s = 1, ..., m,\ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)},$$
$$\forall \eta \text{ – вершина } \mathcal{R},$$

$$\Xi^{(i)} = \{K\xi :\ K \in \mathcal{K}^{(i)},\ \xi \in \mathcal{R}\}.$$

Кусочно-аффинная функция Ляпунова

Будем искать функцию Ляпунова в виде аффинной функции на каждом симплексе:

$$V(x) = (v^i)^T (H^{(i)} x + h^{(i)}),\ x \in \Omega^{(i)}$$

Производная в силу системы:

$$\frac{dV}{dt} = (v^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)} x + B^{(i)} K C x + B^{(i)} K \xi + f^{(i)} + r^{(i)}(x, K(Cx + \xi)))$$

Главная формула

Линейность по x и равномерная оценка производной по всем возможным значениям неопределённых параметров:

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{u(\cdot)} \leqslant (v^{(i)})^T H^{(i)}(A^{(i)}g + B^{(i)}KCg + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)} =$$

$$= \Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}),\ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)}.$$

$$S^{(i)} = \max\left(\left| (H^{(i)}(B^{(i)}K\eta + r))_s \right| :\ s = 1, ..., n_x + 1,\ \eta \in \Xi^{(i)}, \right.$$

$$\left. r \in \mathcal{R}^{(i)}\ K \right).$$

Главная теорема

Пусть найдены некоторая матрица K, $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_0$, а также $v^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$, $i \in \mathcal{J}$, $\varepsilon > 0$ такие, что выполнены следующие условия:

- $0 \in \mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0 = \bigcup\{\Omega^{(i)} : \ i \in \mathcal{J}_0\}$, $\mathcal{X} = \bigcup\{\Omega^{(i)} : \ i \in \mathcal{J}\}$;
- выполнены неравенства принадлежности управлению допустимому множеству;
- $\Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}) \leqslant -\varepsilon \min\{\|g\|, 1\}$ для любой вершины g многогранника $\Omega^{(i)}$, любого $i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$;
- Для любого симплекса $i \in \mathcal{J}_0$, найдётся хотя бы одна вершина которая является внутренней множества $\mathcal{X}_0$.
- Для любого симплекса, который имеет как внутренние, так и граничные (относительно $\mathcal{X}$) вершины, значение функции на границе больше, чем во внутренней точке.
- Во всех вершинах внешней границы $\mathcal{X}$ значения функции Ляпунова совпадают.

Главная теорема (продолжение)

- Для любого симплекса, который имеет как внутренние, так и граничные (относительно $\mathcal{X}$) вершины, значение функции на границе больше, чем во внутренней точке.
- Во всех вершинах внутренней границы($\mathcal{X}_0$) значения функции Ляпунова совпадают.

Тогда любая траектория исходной системы, замкнутой управлением $u = Ky$ с найденной матрицей K, удовлетворяет условиям инвариантности множества $\mathcal{X}_0$ при любом $x_0 \in \mathcal{X}$.

Алгоритм

Основная схема алгоритма построения кусочно-аффинной функции Ляпунова $V(x)$, матрицы K, а также множеств $\mathcal{X}$ (и $\mathcal{X}_0$) предполагает перебор симплексов из некоторой окрестности нулевого положения равновесия и далее проверку выполнения условий теоремы для каждой выбранной совокупности симплексов. Основная вычислительная сложность при этом состоит в поиске значений $v^{(i)}$ и матрицы K, удовлетворяющих большой системе неравенств.

Пример работы алгоритма

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{10}(x_1 - x_2) + u_1; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{10}(x_1 + x_2) + u_2, \end{cases}$$

где $u = K(Cx + \xi),\ \max\limits_{i=1,2}|u_i| \leq 1,\ \max\limits_{i=1,2}|\xi_i| \leq \frac{1}{100},\ C = I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$\varepsilon = \frac{1}{1000}, x_0 = (-0.3, 0.1)$.

$$K = \begin{pmatrix} -2.194 & -0.023 \\ -0.117 & -2.104 \end{pmatrix}.$$

Пример работы алгоритма

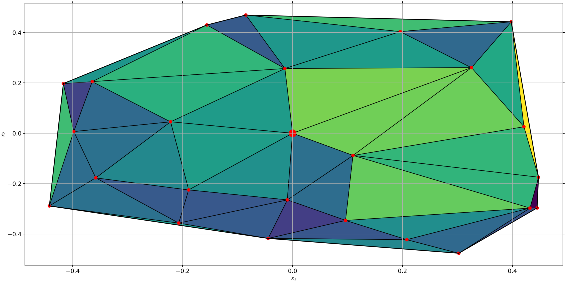

Рис. 1. Пример триангуляции.

Пример работы алгоритма

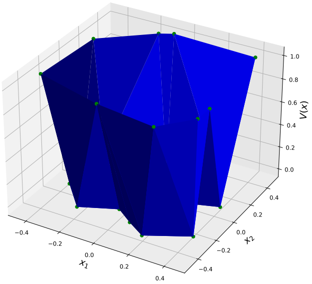

Рис. 2. Полученная функция Ляпунова.

Пример работы алгоритма

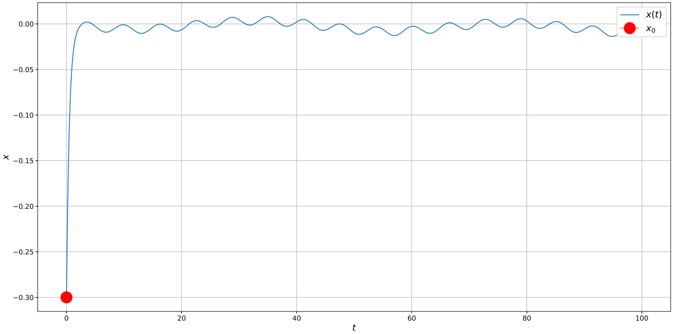

Рис. 3. Трактория системы $x_1(t)$.

Пример работы алгоритма

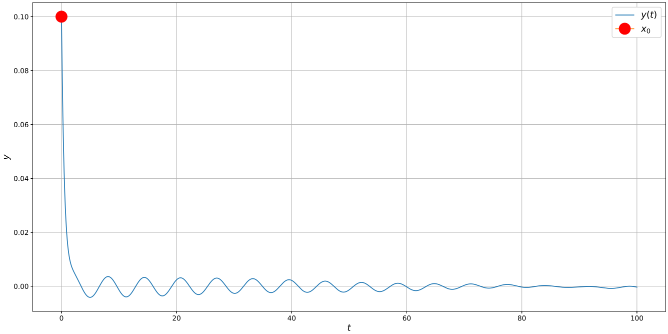

Рис. 4. Траектория системы $x_2(t)$.

Пример работы алгоритма

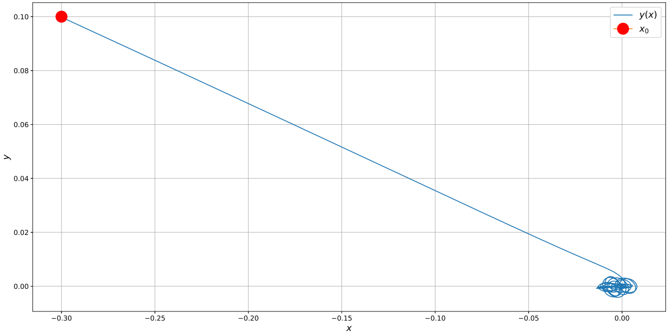

Рис. 5. Траектория системы в плоскости $x_1(t),\ x_2(t)$.

Пример работы алгоритма

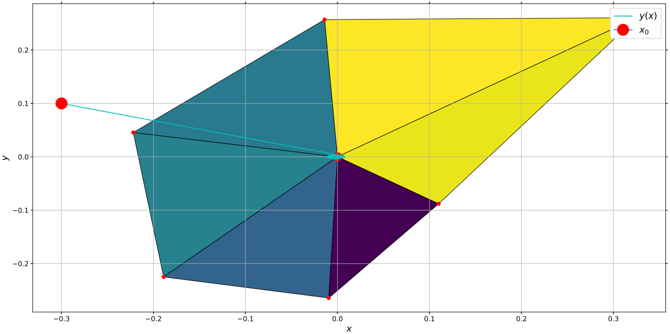

Рис. 6. Найденная инвариантная область.

Пример с нелинейной динамикой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_1 x_2^2) + u_1; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - x_2^3) + u_2, \end{cases}$$

где $u = K(Cx + \xi),\ \max\limits_{i=1,2}|u_i| \leq 1,\ \max\limits_{i=1,2}|\xi_i| \leq \frac{1}{100},\ C = I \in \mathbb{R}^{2\times 2},$

$\varepsilon = \frac{1}{1000}, x_0 = (0.3, -0.8).$
Найденная матрица K:

$$K = \begin{pmatrix} -2.015 & 0.153 \\ 0.394 & -2.130 \end{pmatrix}.$$

Пример с нелинейной динамикой

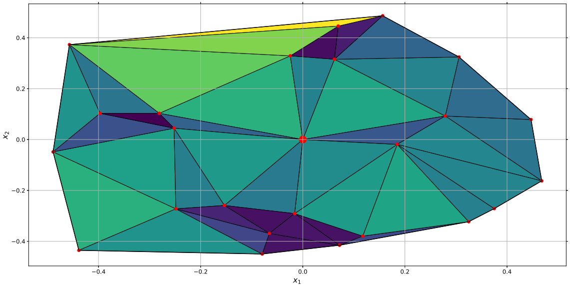

Рис. 7. Пример триангуляции.

Пример с нелинейной динамикой

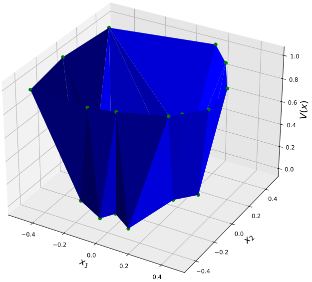

Рис. 8. Полученная функция Ляпунова.

Пример с нелинейной динамикой

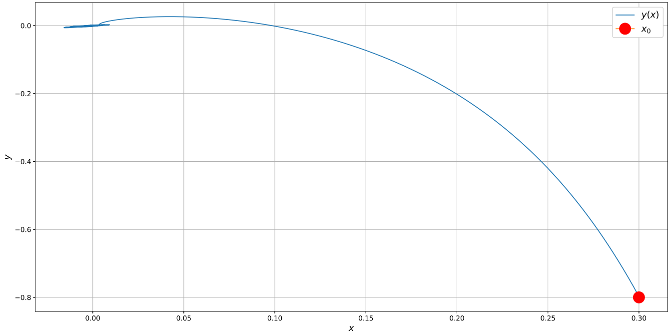

Рис. 9. Траектория системы в плоскости $x_1(t),\ x_2(t)$.

Пример с нелинейной динамикой

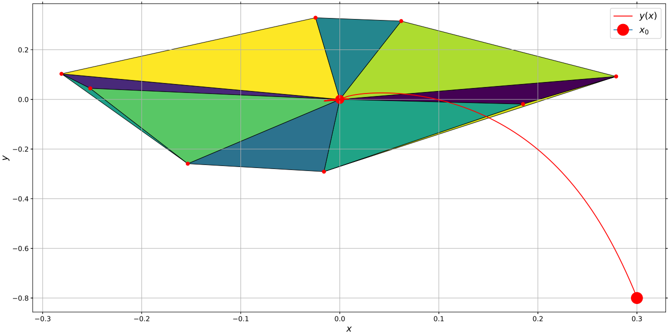

Рис. 10. Найденная инвариантная область.

Краткие результаты

- Доказан аналог теоремы Ляпунова для поставленной задачи
- Предложен алгоритм поиска стабилизатора на основании метода покоординатного спуска
- На языке Python реализован алгоритм
- Приведены два примера, демонстрирующие работу алгоритма

Библиография

- *Точилин П.А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2020. Т. 26. № 1, с. 223–238.
- *Атанесян А.А., Точилин П.А.* Задача стабилизации системы с переключениями при помощи кусочно-линейного управления // Вестник Московского университета, 2019. Т. 43, № 4, с. 22-32.
- *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
- *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski R. R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer New York, NY, 1998.
- *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука 1967.