# Задача стабилизации на основании неполной и неточной информации

Кафедра системного анализа
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

МГУ им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Москва 2022

# Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с управляющими параметрами:

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u, \ t \geqslant 0, \ x \in \mathbb{R}^{n_x}, \ u \in \mathbb{R}^{n_u}$$

$$\mathbf{f}(\cdot) \in C^2(\Omega), \ \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x}, \ \mathbf{f}(0) = 0, \ \mathbf{g}(\cdot) = C^1(\Omega), \ \mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$$

определены в области $\Omega$, которая допускает конечную триангуляцию симплексами $\Omega^{(i)}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, а $\mathcal{P}$ – некоторая выпуклая компактная область в $\mathbb{R}^{n_u}$.
Более конкретно будем считать, что множество $\mathcal{P}$ является выпуклым многогранником:

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^{n_u} : \ Pu \preceq p\},$$

$P \in \mathbb{R}^{m \times n_u}$, $p \in \mathbb{R}^m$.

# Постановка задачи

Пусть $y =\in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор наблюдений $(n_y < n_x)$, который связан с координатами системы соотношением:

$$y = Cx + \xi,\ C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x},\ \xi \in \mathbb{R}^{n_y},$$

$\xi$ вектор характеризующий погрешность при измерении $y$, матрица $C$ фиксирована.

$$\xi \in \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ – выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}^{n_y}, 0 \in \mathcal{R}$, диаметр $\mathcal{R}$ достаточно мал.

# Постановка задачи

Пусть $x(t, t_0, x_0)$ решение исходной системы.
Необходимо найти $u(y)$, что после подстановки его нулевое положение равновесия будет локально асимптотически устойчивым, $\exists\ \mathcal{X}$, что $0 \in$ int$\mathcal{X} \subset \Omega$,

## Локальная асимптотическая устойчивость

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \delta < \varepsilon,\ \ B_\delta(0) \subset \mathcal{X},\ \ \forall x_0 \in B_\delta(0), \forall \xi(t),\ \ t \geq 0,$$
$$\exists x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} :$$
$$||x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}|| \leq \varepsilon,\ \ \forall t \geq 0,\ \ \exists \lim_{t \to +\infty} ||x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}|| = 0.$$

Более общая задача о поиске инвариантного $\mathcal{X}_0$.

# Теорема Ляпунова

## Положительная определенность

$V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной на множестве $\Omega(\theta \in \Omega)$, если выполнены следующие два условия

1. $V(x) \geq 0, \ \forall y \in \Omega;$
2. $V(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

## Функция Ляпунова

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t,x) \leq 0, \ \forall x \in \Omega, \ t \geq 0.$$

# Теорема Ляпунова

## Теорема(Об асимптотической устойчивости)

Пусть на множестве $\Omega$ существует функция Ляпунова для системы (1).

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t,x) \le -W(x),\ \forall x \in \Omega,\ t \ge 0,$$

где $W(x)$ – некоторая непрерывная положительно определенная на $\Omega$ функция. Тогда нулевое решение $x(t,\theta^{n_x}) = \theta^{n_x}$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

# Кусочная линеаризация

После линеаризации система принимает вид:

$$\dot{x} = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + r^{(i)}(x,u), \;\; x \in \Omega^{(i)}.$$

Получена итоговая оценка для $s$-й компоненты погрешности линеаризации:

$$|r^{(i)}(x,u)| \leq |R_s^{(i)}(x)| \leq \mathcal{Q}_s^{(i)} = M_s^{(i)} + N_s^{(i)} \;\forall x \in \Omega$$

$$M_s^{(i)} = \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{max}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi)\right) d^{(i)}$$

Получаем, что погрешность линеаризации лежит в параллелепипеде:

$$R^{(i)}(x) \in \mathcal{Q} = [-\mathcal{Q}_1^{(i)}, \mathcal{Q}_1^{(i)}] \times \cdots \times [-\mathcal{Q}_{n_x}^{(i)}, \mathcal{Q}_{n_x}^{(i)}]$$

# Случай линейного управления

Будем искать управление в виде линейной функции от наблюдений в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$. Запишем общий вид управления:

$$u(y) = Ky = K(Cx + \xi).$$

Найдем условия на матрицу $K$ при $x \in \Omega^{(i)}$, при которых управление удовлетворяет условиям при любых $\xi$:

$$KCx + K\xi \in \mathcal{P},\ \forall x \in \Omega^{(i)},\ \forall \xi \in \mathcal{R}$$

То матрица $K$ удовлетворяет этому условию в том и только в том случае, если выполнена система линейных неравенств:

$$P_s^T K(Cg + \eta) \leqslant p_s,\ \forall s = 1, ..., m,\ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)},$$
$$\forall \eta \text{ – вершина } \mathcal{R}$$

# Кусочно-аффинная функция Ляпунова

Будем искать функцию Ляпунова в виде аффинной функции на каждом симплексе:

$$V(x) = (v^{(i)})^T (H^{(i)} x + h^{(i)}),\ \ x \in \Omega^{(i)}$$

Производная в силу системы:

$$\frac{dV}{dt} = (v^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)} x + B^{(i)} K C x + B^{(i)} K \xi + f^{(i)} + r^{(i)}(x, K(Cx + \xi)))$$

# Оценка полной производной функции Ляпунова

Воспользуемся линейностью по $x$ и равномерной оценкой по всем возможным значениям неопределённых параметров:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{u(\cdot)} \leqslant (v^{(i)})^T H^{(i)}(A^{(i)}g + B^{(i)}KCg + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)} =$$
$$= \Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}),\ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)}.$$

$S^{(i)}$– погрешность из-за линеаризации и влияния неопределенности

# Основной результат

## Теорема

Пусть найдены некоторая матрица $K$, множество индексов $\mathcal{J}$, а также векторы $v^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$, $i \in \mathcal{J}$, для которых при некотором $\varepsilon > 0$ выполнены следующие условия:

- $0 \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = \bigcup\{\Omega^{(i)} : i \in \mathcal{J}\}$;
- $v_s^{(i)} = 0$, если это значение функции Ляпунова соответствует нулевой вершине некоторого $\Omega^{(i)} : i \in \mathcal{J}$;
- $v_s^{(i)} \geqslant \varepsilon \min\{\|g\|, 1\}$, если это значение функции Ляпунова соответствует ненулевой вершине $g$ некоторого $\Omega^{(i)} : i \in \mathcal{J}$;
- выполнены неравенства принадлежности управления допустимого множества, для любого $i \in \mathcal{J}$;

# Основной результат

## Теорема

- $\Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}) \leqslant -\varepsilon \min\{\|g\|, 1\}$ для любой вершины $g$ многогранника $\Omega^{(i)}$, любого $i \in \mathcal{J}$;
- Для любого симплекса $\Omega^{(i)}$, который имеет как внутренние, так и граничные (относительно $\mathcal{X}$) вершины, для любых двух таких вершин $g_1, g_2 \in \Omega^{(i)}$, $g_1 \in \mathrm{int}\mathcal{X}$, $g_2 \in \partial\mathcal{X}$ выполнено неравенство
$$(v^{(i)})^T H^{(i)} g_1 \leqslant (v^{(i)})^T H^{(i)} g_2 - \varepsilon.$$
- Во всех граничных вершинах значения функции Ляпунова совпадают.

Тогда нулевое положение равновесия является асимптотически устойчивым для системы, замкнутой управлением $u = Ky$ с найденной матрицей $K$. Более того, множество $\mathcal{X}$ является областью притяжения нулевого положения равновесия.

# Алгоритм

Основная схема алгоритма построения кусочно-аффинной функции Ляпунова $V(x)$, матрицы $K$, а также множеств $\mathcal{X}$ предполагает перебор симплексов из некоторой окрестности нулевого положения равновесия и далее проверку выполнения условий теоремы для каждой выбранной совокупности симплексов. Основная вычислительная сложность при этом состоит в поиске значений $v^{(i)}$ и матрицы $K$, удовлетворяющих большой системе неравенств.

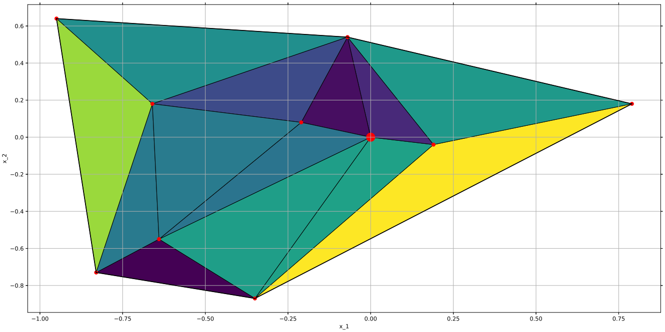


Рис. 1. Пример триангуляции

# Краткие результаты

- Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях асимптотической устойчивости для систем с неполной и неточной информации.
- Сформулирован алгоритм поиска матрицы управления $K$ и вектора $v^{(i)}$, похожий на метод покоординатного спуска для функции: $\Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)})$ минимизируем пошагово сначала по $K$, затем по $v^{(i)}$.
- Планируется реализовать алгоритм, сформулировать и доказать теорему о поиске инвариантного множества $\mathcal{X}_0$.

# Библиография


- П.А. Точилин, О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени. Труды института математики и механики УрО РАН, Том 26, 2020.
- А.В. Арутюнов, Лекции по выпуклому и многозначному анализу. Изд-во ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2014.
- А.М. Денисов, А.В. Разгулин Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд-во ВМК МГУ, Москва, 2009.