Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Дипломная работа

«Задача стабилизации на основании неполной и неточной информации»

Студент 415 группы
М. М. Савинов

Руководитель дипломной работы
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2022

Содержание

1 Введение

Работа посвящена разработки методов решения задачи стабилизации нелинейной системы дифференциальных уравнений в случае неполной и неточной информации, в которой на управляющие параметры наложены "жесткие"поточенные ограничения. Предполагается, что координаты системы не известны, доступны лишь некоторые наблюдения зависящие от траекторий системы, в каждый момент времени полученные наблюдения зависят от реальных координат системы линейным образом с некоторой погрешностью. Задача заключается в том, чтобы перевести траекторию в некоторое инвариантное множество($\mathcal{X}_0$), так чтобы траектория не покидала $\mathcal{X}_0$ при всевозможных погрешностях, используя при этом линейное управление, которое зависит линейно от наблюдений.

Основной целью работы является построение функции Ляпунова и связанное с ней линейное управление – стабилизатор. Предполагаемое решение состоит в кусочной линеаризации исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений [1;2], и использования аппарата непрерывных кусочно-линейных функций Ляпунова [3;4].

В данной работе доказан аналог теоремы Ляпунова о достаточных условиях стабилизации для поставленной задачи, а также разработан алгоритм поиска стабилизатора и функции Ляпунова на основании метода покоординатного спуска.

Полученные теоретические результаты продемонстрированы на двух конкретных примерах: с линейной и нелинейной динамикой.

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с управляющими параметрами

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u,\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^{n_x},\ u \in \mathbb{R}^{n_u}. \tag{1}$$

Здесь функции

$$\mathbf{f}(\cdot) \in C^2(\Omega),\ \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x},\ \mathbf{f}(0) = 0,\ \mathbf{g}(\cdot) = C^1(\Omega),\ \mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$$

определены в области Ω которая допускает конечную триангуляцию симплексами $\Omega^{(i)}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, а $\mathcal{P}$ – некоторая выпуклая компактная область в $\mathbb{R}^{n_u}$.

Более конкретно будем считать, что множество $\mathcal{P}$ является выпуклым многогранником, заданный при помощи системы линейных неравенств:

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^{n_u} :\ Pu \preceq p\}. \tag{2}$$

Здесь $P \in \mathbb{R}^{m \times n_u}$, $p \in \mathbb{R}^m$, m – натуральное число ограничений множества $\mathcal{P}$.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_{n_y}) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор наблюдений ($n_y \leq n_x$), который связан с координатами системы соотношением

$$y = Cx + \xi,\ C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x},\ \xi \in \mathbb{R}^{n_y}, \tag{3}$$

где ξ вектор, характеризующий погрешность при измерении y_i, то есть i-ой компоненты вектора наблюдений, матрица C задана и фиксирована.

Дополнительно будем предполагать, что помеха в любой момент времени ограничена, то есть выполнено:

$$\xi \in \mathcal{R}, \tag{4}$$

где $\mathcal{R}$– выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}^{n_y}, 0 \in \mathcal{R}$, диаметр $\mathcal{R}$ достаточно мал.

3 Задача стабилизации

Обозначим через $x(t, t_0, x_0)$ решение системы (1) в момент времени t, выпущенное из точки x_0, в момент времени t_0. Будем считать, что точка $0 \in \Omega$ входит с некоторой окрестностью.

Сформулируем классическую задачу о стабилизации: необходимо найти такое управление $u(y)$, то есть в каждый момент времени зависит только от текущих результатов наблюдений, что после подстановки его в исходное уравнений в (1) нулевое положение равновесия будет локально асимтотически устойчивым, формально это означает: найдется такое множество $\mathcal{X}$, что $0 \in \mathrm{int}\mathcal{X} \subset \Omega$,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \delta < \epsilon,\ B_\delta(0) \subset \mathcal{X},\ \forall x_0 \in B_\delta(0), \forall \xi(t),\ t \geq 0, \exists x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} : \\ ||x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}|| \leq \epsilon,\ \forall t \geq 0,\ \exists \lim_{t \to +\infty} ||x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}|| = 0.$$

Поскольку в рассматриваемой задаче в каждый текущий момент времени нет точной информации о текущем состоянии системы, то при больших значениях погрешности измерений ξ может получиться, что перевести траекторию замкнутой системы в сколь угодно малую окрестность нулевого положения равновесия в принципе невозможно.

Поэтому будем рассматривать более общую задачу о переводе траектории в заданную (не обязательно малую) окрестность нулевого положения равновесия за какое-то (заранее неизвестное) конечное время. Пусть $\mathcal{X}_0 \subset \Omega$ – некоторое фиксированное множество, содержащее нулевое положение равновесия. Тогда необходимо найти такое управление $u = u(y)$, что найдётся такое множество $\mathcal{X}$, что $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X} \subset \Omega$ и для любого $x_0 \in \mathcal{X}$, для любой погрешности измерений $\xi(\cdot)$, для соответствующей траектории $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$ будут выполнены следующие условия:

$$\exists t^* \geq 0 :\ x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}, \forall t \geq 0, \quad \text{и } x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_0, \forall t \geq t^*. \tag{5}$$

По возможности множество $\mathcal{X}_0$ необходимо сделать наименьшим по вложению. Этому вопросу и посвящена данная работа.

4 Подход к решению

Рассмотрим набор из n_x+1 точек находящихся в общем положении $g = \{g_1, g_2, \cdots, g_{n_x+1}\}$. Будем обозначать $\Omega = \mathrm{conv}\ g_i,\ i = 1, \ldots, n_x + 1$, то есть симплекс натянутый на точки g_i. Обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_x+1})$ барицентрические координаты в этом симплексе.

Пусть Ω – рассматриваемый симплекс $g_1, \ldots, g_{n_x+1}$ его вершины. Составим из них матрицу G, в которой содержатся столбцы $g_1, \ldots, g_{n_x+1}$. Воспользуемся параметризацией через барицентрические координаты: для каждой точки $x \in \Omega$ найдется такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_x+1})$, такой, что:

$$\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geq 0\ \forall k,\ G\alpha(x) = x. \tag{6}$$

Для удобства дополним вектор x до $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, матрицу G до $\tilde{G} = \begin{pmatrix} g_1, \cdots, g_{n_x+1} \\ 1, \ \cdots, 1 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$. Тогда определение барицентрических координат записывать в удобном матричном виде: $\tilde{G}\alpha = \tilde{x}$ В силу того, что точки находятся в общем положении следует, что $det(\tilde{G}) \neq 0$. Тогда $\alpha(x) = \tilde{G}^{-1}\tilde{x}$. Пусть $\tilde{G}^{-1} = \begin{pmatrix} P, & p \end{pmatrix}$. В этом случае получим выражение $\alpha(x) = Px + p$.

Воспользуемся предположением об триангулироемости области Ω, пусть $\Omega^{(i)}$ симплексы на которые разбиваться область Ω. Будем обозначать величины с индексом (i), которые относятся к i-ому симплексу.

4.1 Запись аффинной функции через барицентрические координаты

Пусть задана линейная функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, запишем общий вид этой функции:

$$V(x) = \langle \tilde{a}, \tilde{x} \rangle + b = \tilde{a}^T \tilde{x} + b = a^T x,$$

где $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_{n_x}),\ \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n_x}),\ a = (a_1, \ldots, a_{n_x}, b),\ x = (x_1, \ldots, x_{n_x}, 1)$.

Воспользуемся записью x через барицентрические координаты,

$$V(x) = a^T \tilde{G} \alpha(x),$$

и выражением для $\alpha(x)$,

$$V(x) = a^T \tilde{G}(Hx + h)$$

переобозначая $a^T \tilde{G}$ за v^T, получим вид новый вид функции $V(x)$:

$$V(x) = v^T (Hx + h), \tag{7}$$

где v^T— вектор барицентрических координат.

4.2 Теорема Ляпунова

Опредление 1 *Функция $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной на множестве $\Omega (\theta \in \Omega)$, если выполнены следующие два условия*

1. $V(x) \geq 0,\ \forall y \in \Omega$;
2. $V(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Опредление 2 *Непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на Ω функция $V(x)$ называется **функции Ляпунова** системы, если*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t, x) \leq 0,\ \forall x \in \Omega,\ t \geq 0.$$

Теорема 1 *(Об асимптотической устойчивости) Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова для системы (1).*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t, x) \leq -W(x),\ \forall x \in \Omega,\ t \geq 0,$$

где $W(x)$ – некоторая непрерывная положительно определенная на Ω функция. Тогда нулевое решение $x(t, \theta^{n_x}) = \theta^{n_x}$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Доказательство этой классической теоремы можно найти, например, в [5].

Поскольку далее в данной работе мы рассматриваем кусочно-аффинную функцию Ляпунова, которая в общем случае не является непрерывно дифференцируемой, поэтому будем дейсвовать в духе [4], где рассматриваются вопросы о негладких функциях Ляпунова.

4.3 Кусочная линеаризация системы дифференциальных уравнений

Для функции $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u$ воспользуемся формулой (6) в симплексе $\Omega^{(i)}$, справедливо следующее представление:

$$\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u = F^{(i)}\alpha^{(i)}(x) + B^{(i)}u + r^{(i)}(x,u) = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + r^{(i)}(x,u)$$

где

$$F^{(i)} = (\mathbf{f}(g_1^{(i)}), \ldots, \mathbf{f}(g_{n_x+1}^{(i)})) \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)},\ A^{(i)} = F^{(i)}H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1} \mathbf{g}(g_k),\ f^{(i)} = F^{(i)}h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

$$|r_s^{(i)}(x,u)| < R_s^{(i)},\ \forall s = 1, \cdots, n_x+1 \tag{8}$$

Тогда в новых обозначениях система принимает вид:

$$\dot{x} = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + r^{(i)}(x,u),\ x \in \Omega^{(i)}. \tag{9}$$

4.4 Погрешность линеаризации системы

Разложим s-ю компоненту вектор функции $\mathbf{f}_s(x), s = 1, \cdots, n_x$ по формуле Тейлора до членов второго порядка с центром в точке $x \in \Omega^{(i)}$, взяв итоговое значение в вершине $g_k^{(i)}$ указанного симплекса,

$$\mathbf{f}_s(g_k^{(i)}) = \mathbf{f}_s(x) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_s(x)}{\partial x}(x)\right)^T (g_k^{(i)} - x) + (g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)} - x),\ \xi_k = \xi_k(s, x, g_k^{(i)}) \in \Omega^{(i)}.$$

Запишем тождество:

$$\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x)(\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x}(x))^T (g_k^{(i)} - x) = (\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x}(x))^T \left(\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) g_x^{(i)} - x\right) = (\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x}(x))^T (x - x) = 0. \tag{10}$$

Сложим полученные соотношения при различных $k = 1, \ldots, n_x + 1$, умножив их на $\alpha_k(x)$, воспользуемся (10):

$$(F^{(i)}\alpha^{(i)}(x))_s = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x)\mathbf{f}_s(g_k^{(i)}) = \mathbf{f}_s(x) + \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x)(g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)} - x),$$

Запишем оценку на остаточный член:

$$|\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x)(g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)} - x)| \le M_s^{(i)} = \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{max}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi)\right) d^{(i)},\ \forall x \in \Omega^{(i)},$$

где $\rho_{max}(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi))$ максимальное собственное значение абсолютной величины собственного значения симметричной матрицы $\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi)$,

$$d^{(i)} = \max\left\{\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k || \sum_{r=1}^{n_x+1} \alpha_r (g_r^{(i)} - g_k^{(i)})||^2 : \alpha \in [0,1] \forall k, \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1\right\}.$$

Теперь разложим (s,p)-ю компоненту матричной функции $\mathbf{f}_s(x)$, $s=1,\ldots,n_x, p=1\ldots n_u$, по формуле Тейлора до членов первого порядка включительно:

$$\mathbf{g}_{sp}(g_k^{(i)}) = \mathbf{g}_{sp}(x) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k)\right)^T (g_k^{(i)} - x), \zeta_k = \zeta(s,p,x,g_k^{(i)}) \in \Omega^{(i)}.$$

Тогда

$$B_{sp}^{(i)} = \mathbf{g}_{sp}(x) + \frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1} (\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k))^T (g_k^{(i)} - x),$$

$$|\frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1} (\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k))^T (g_k^{(i)} - x)| \le N_{sp}^{(i)} = \max_{x\in\Omega^{(i)}} ||\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(x)|| q^{(i)},$$

$$q^{(i)} = \frac{1}{n_x+1}\max\left\{\sum_{k=1}^{n_x+1} ||g_k^{(i)} - g_j^{(i)}|| : j=1,\ldots,n_x+1\right\},$$

Теперь оценим по допустимым управлениям, обозначим:

$$N_s^{(i)} = \max\left\{\sum_{p=1}^{n_u} |u_p| N_{sp}^{(i)}; u \in \mathcal{P}\right\}.$$

Таким образом получена итоговая оценка для s-й компоненты погрешности линеаризации:

$$|R_s^{(i)}(x)| \le \mathcal{Q}_s^{(i)} = M_s^{(i)} + N_s^{(i)} \ \forall x \in \Omega. \tag{11}$$

Получаем, что погрешность линеаризации лежит в параллелепипеде:

$$R^{(i)}(x) \in \tilde{\mathcal{Q}}^{(i)} = [-\mathcal{Q}_1^{(i)}, \mathcal{Q}_1^{(i)}] \times \cdots \times [-\mathcal{Q}_{n_x}^{(i)}, \mathcal{Q}_{n_x}^{(i)}].$$

5 Случай линейного управления

Будем искать управление в виде линейной функции от наблюдений в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$. Запишем общий вид управления:

$$u(y) = Ky = \{(3)\} = K(Cx + \xi), \tag{12}$$

где матрицу $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ предстоит определить.

Найдем условия на матрицу K при $x \in \Omega^{(i)}$, при которых управление удовлетворяет условиям (2) при любых ξ:

$$KCx + K\xi \in \mathcal{P}, \ \forall x \in \Omega^{(i)}, \ \forall \xi \in \mathcal{R} \qquad (13).$$

Так как экстремальное значение выпуклой функции на выпуклом множество достигается на одной из крайних точек (вершин), то матрица K удовлетворяет этому условию в том и только в том случае, если выполнена система линейных неравенств:

$$P_s^T K(Cg + \eta) \le p_s, \ \forall s = 1,...,m, \ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)}, \ \forall \eta \text{ – вершина } \mathcal{R}. \tag{14}$$

Здесь P_s^T– s-ая строка матрицы P из условия (2), а p_s – s-ый элемент вектора p. Совокупность неравенств (14) задаёт некоторое выпуклое многогранное множество $\mathcal{K}^{(i)}$ в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n_x \times n_y}$. Определив это множество, построим также выпуклый многогранник

$$\Xi^{(i)} = \{K\xi : \ K \in \mathcal{K}^{(i)}, \ \xi \in \mathcal{R}\}.$$

5.1 Функция Ляпунова

Будем искать функцию Ляпунова в виде аффинной функции (7) на каждом симплексе.

$$V(x) = (v^i)^T(H^{(i)}x + h^{(i)}),\ x \in \Omega^{(i)}. \tag{15}$$

Запишем производную функции Ляпунова вдоль системы:

$$\frac{dV}{dt} = (v^{(i)})^T H^{(i)}(A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + r^{(i)}(x,u)). \tag{16}$$

Теперь подставим управление вида (12):

$$\frac{dV}{dt} = (v^{(i)})^T H^{(i)}(A^{(i)}x + B^{(i)}KCx + B^{(i)}K\xi + f^{(i)} + r^{(i)}(x, K(Cx+\xi))). \tag{17}$$

Поскольку значения погрешностей $r^{(i)}$ и ξ нам неизвестны, то для того, чтобы гарантировать устойчивость для замкнутой системы, необходимо оценить полную производную функции Ляпунова сверху, равномерно по всем возможным значениям неопределённых параметров:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \le (v^{(i)})^T H^{(i)}(A^{(i)}x + B^{(i)}KCx + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)}, \tag{18}$$

где

$$S^{(i)} = \max\left\{\left|(H^{(i)}(B^{(i)}\eta + r))_s\right| :\ s = 1, ..., n_x+1,\ \eta \in \Xi^{(i)},\ r \in \tilde{\mathcal{Q}}^{(i)}\right\}.$$

При $x \in \Omega^{(i)}$ получившееся выражение является линейным по x, а значит достигает своих экстремальных значениях в вершинах. Таким образом, для оценки этого выражения сверху достаточно лишь учитывать его значения в вершинах g_k симплекса $\Omega^{(i)}$:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \le (v^{(i)})^T H^{(i)}(A^{(i)}g + B^{(i)}KCg + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)} = \Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}),\ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)}.$$

Заметим, что при фиксированном K функция $\Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)})$ линейна по $v^{(i)}$, и, наоборот, при фиксированном $v^{(i)}$ она линейна по K.

Сформулируем теорему о задачи стабилизации, когда траекторию замкнутой системы нужно перевести в окрестность положения равновесия, но эта окрестность не обязана быть сколь угодно малой:

Теорема 2 *Пусть найдены некоторая матрица K, множества индексов $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_0$, а также векторы $v^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$, $i \in \mathcal{J}$, для которых при некотором $\epsilon > 0$ выполнены следующие условия:*

1. $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$;
2. $0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_0 \subset \operatorname{int} \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0 = \bigcup\{\Omega^{(i)} :\ i \in \mathcal{J}_0\}$, $\mathcal{X} = \bigcup\{\Omega^{(i)} :\ i \in \mathcal{J}\}$;
3. *выполнены неравенства (14), для любого* $i \in \mathcal{J}$;
4. $\Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}) \le -\epsilon \min\{\|g\|, 1\}$ *для любой вершины g многогранника $\Omega^{(i)}$, любого* $i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$;

5. *Для любого симплекса $\Omega^{(i)}$, $i \in \mathcal{J}_0$, найдётся хотя бы одна вершина g, которая является внутренней для множества $\mathcal{X}_0$ ($g \in \operatorname{int} \mathcal{X}_0$).*

6. *Для любого симплекса $\Omega^{(i)}$, который имеет как внутренние, так и граничные (относительно $\mathcal{X}$) вершины, для любых двух таких вершин $g_1, g_2 \in \Omega^{(i)}$, $g_1 \in \operatorname{int} \mathcal{X}$, $g_2 \in \partial \mathcal{X}$ выполнено неравенство*
$$(v^{(i)})^T H^{(i)} g_1 \leq (v^{(i)})^T H^{(i)} g_2 - \epsilon.$$

7. *Во всех вершинах внешней границы значения функции Ляпунова совпадают:*
$$(v^{(i)})^T (H^{(i)} g_1 + h^{(i)}) = (v^{(j)})^T (H^{(j)} g_2 + h^{(j)}),\ \forall g_1 \in \Omega^{(i)} \cap \partial \mathcal{X},\ g_2 \in \Omega^{(j)} \cap \partial \mathcal{X},\ i, j \in \mathcal{J}.$$

8. *Для любого симплекса $\Omega^{(i)}$, $i \in \mathcal{J}$, который имеет как внешние, так и граничные (относительно $\mathcal{X}_0$) вершины, для любых двух таких вершин $g_1, g_2 \in \Omega^{(i)}$, $g_1 \in \partial \mathcal{X}_0$, $g_2 \notin \mathcal{X}_0$ выполнено неравенство*
$$(v^{(i)})^T H^{(i)} g_1 \leq (v^{(i)})^T H^{(i)} g_2 - \epsilon.$$

9. *Во всех вершинах внутренней границы значения функции Ляпунова совпадают:*
$$(v^{(i)})^T (H^{(i)} g_1 + h^{(i)}) = (v^{(j)})^T (H^{(j)} g_2 + h^{(j)}),\ \forall g_1 \in \Omega^{(i)} \cap \partial \mathcal{X}_0,\ g_2 \in \Omega^{(j)} \cap \partial \mathcal{X}_0,\ i, j \in \mathcal{J}.$$

Тогда любая траектория системы (1), замкнутой управлением $u = Ky$ с найденной матрицей K, удовлетворяет условиям (5) при любом $x_0 \in \mathcal{X}$.

Доказательство: Для начала, заметим, что условие 3 говорит о том, что управление будет лежать в допустимом множестве управлений. Так же условия 6 и 8 определено корректно, так как по условию 5 есть хотя бы одна вершина $g \in int \mathcal{X}_0$.

1. Покажем, что функция Ляпунова строго убывает вдоль любой траектории, пока она находиться в множестве $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$.

   Пусть $x \in \Omega^{(i)}$, то есть находиться в $(i)-$ом симплексе, $i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$, для x справедлива формула: $x = \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j g_j^{(i)}$. Подставим в оценку производной по траектории (18), это представление x:
$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \leq (v^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)} \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j g_j^{(i)} + B^{(i)} K C \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j g_j^{(i)} + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)}$$
   Так как $\sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j = 1$, то $f^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j f^{(i)}$, $\sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)}$, в силу линейности вынесем сумму и α_j за скобки, получим:
$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \leq \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j \left((v^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)} g_j^{(i)} + B^{(i)} K C g_j^{(i)} + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)} \right)$$
   Под суммой получили выражения для $\Psi^{(i)}(g_j, K, v^{(i)})$, запишем оценку из условия 4:
$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \leq \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j \Psi^{(i)}(g_j, K, v^{(i)}) \leq - \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j \epsilon \min\{\|g_j\|, 1\} < 0.$$
   Значит функция Ляпунова убывает вдоль любой траектории пока она не вышла из множества $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$.

2. Покажем, что максимум функции Ляпунова в граничных симплексах множества $\mathcal{X}$, достигается на границе множества $\mathcal{X}$.

   Пусть $\Omega^{(i)}$ – некоторый граничный симплекс множества $\mathcal{X}$, $\omega^{(i)} \in \Omega^{(i)} \cap \partial\mathcal{X}$ – его граничная вершина. Пусть $x \in \mathrm{int}\Omega^{(i)}, x = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k g_k^{(i)}$, покажем, что $V(x) < V(\omega^{(i)})$.

   Воспользуемся условием 6, в качестве g_1 возьмем поочередно $g_1^{(i)}, \dots g_m^{(i)}, \in \mathrm{int}\mathcal{X}$ все внутренние вершины симплекса $\Omega^{(i)}$, в качестве g_2всегда полагаем $\omega^{(i)}$. Получим неравенства:

   $$(v^{(i)})^T(H^{(i)}g_k^{(i)} + h^{(i)}) \leq (v^{(i)})^T(H^{(i)}\omega^{(i)} + h^{(i)}) - \epsilon, \forall k = 1, \dots, m.$$

   Воспользуемся условием 7, получим для $g_k^{(i)} \in \Omega^{(i)} \cap \partial\mathcal{X}, k = m+1, \dots, n_x+1$, равенства:

   $$(v^{(i)})^T(H^{(i)}g_k + h^{(i)}) = (v^{(i)})^T(H^{(i)}\omega^{(i)} + h^{(i)})$$

   Умножим каждое из неравенств на $\alpha_k, k \in 1 \dots m$, и каждое из равенств на $\alpha_k, k \in m+1 \dots n_x+1$, и сложим $\forall k = 1, \dots, n_x+1$, справа выражение не измениться так как не зависит от k, и $\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1$,

   $$\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k (v^{(i)})^T(H^{(i)}g_k^{(i)} + h^{(i)}) \leq (v^{(i)})^T(H^{(i)}\omega^{(i)} + h^{(i)}) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \epsilon, \forall k = 1, \dots, n_x+1.$$

   Заметим, что $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \not= 0$. В левой части в силу линейности внесем сумму и α_k под матрицу H :

   $$(v^{(i)})^T(H^{(i)} \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k g_k^i + h^{(i)}) = (v^{(i)})^T(H^{(i)}x + h^{(i)}) = V(x) \leq$$

   $$\leq (v^{(i)})^T(H^{(i)}\omega + h^{(i)}) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \epsilon \leq V(\omega).$$

   Отсюда следует, что $V(x) < V(\omega), \forall x \in \mathrm{int}\Omega^{(i)}$, для граничных симплексов $\mathcal{X}$.

3. Покажем, что в симплексе $\Omega^{(i)}$ значение функции Ляпунова на границе множества $\mathcal{X}$ равно $V(\omega^{(i)})$, $\omega^{(i)} \in \partial\mathcal{X}$,граничная вершина. Пусть $x \in \Omega^{(i)} \cap \partial\mathcal{X}$, принадлежит граничной грани, так как грань симплекса тоже симплекс, то $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(i)} g_k^{(i)}$, $g_k^{(i)} \in \Omega^{(i)} \cap \partial\mathcal{X}$, Запишем выражение для функции Ляпунова:

   $$V(x) = V(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(i)} g_k^{(i)}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(i)} V(\omega^{(i)}) = V(\omega^{(i)}) \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(i)} = V(\omega^{(i)}).$$

4. Пусть $x(t, t_0, x_0)$ решение системы (1) в момент времени t, выпущенное из точки x_0 в момент времени t_0. Покажем, что $x(t, t_0, x_0)$ не покинет область $\mathcal{X}$, $\forall x_0 \in \mathrm{int}\mathcal{X}$.

   По условию 2 граничные симплексы множества $\mathcal{X}$ не содержат точек из $\mathcal{X}_0$. Пусть траектория в момент $\tilde{t}$, в точке $\tilde{x}$ покинет область (будет на границе области $\mathcal{X}$, в симплексе $\Omega^{(i)} \subset \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$), тогда $V(\tilde{x}) = V(\omega^{(i)})$, $\omega^{(i)} \in \Omega^{(i)} \cap \partial\mathcal{X}$, по пункту

3. Так как траектория непрерывна, то в некоторый момент времени $\bar{t}$ траектория была в $\bar{x} \in \mathrm{int}\Omega^{(i)}$. Но по пункту 2 доказательства $V(\bar{x}) < V(\omega^{(i)})$, и по пункту 1 доказательства $V(x)$ убывает вдоль траектории в области $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$, значит

$$V(\omega) = V(\tilde{x}) < V(\bar{x}).$$

Получили противоречие с предположением о покидании границы.

5. Покажем, что найдется момент времени, в который траектория попадет в множество $\mathcal{X}_0$.

   Пусть $x(t, t_0, x_0)$ решение системы (1) в момент времени t, выпущенное из произвольной точки $x_0 \in \mathcal{X}$ в момент времени t_0. Пусть траектория $\forall t > t_0\ x(t, t_0, x_0) \notin \mathcal{X}_0$. Тогда по пункту 4 траектория не покинет множество $\mathcal{X}$, тогда $\forall t > t_0\ x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$.

   По пункту 1 доказательства $\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} < k < 0$. Значит $V(t)\Big|_{u(\cdot)} < C - kt$, в силу произвольности t получаем, что непрерывная функция Ляпунова неограничена на компакте $\mathcal{X}_0$, получили противоречие. Значит траектория попадает в множество $\mathcal{X}_0$.

6. Покажем, функция Ляпунова убывает в некоторой δ окрестности границы множества $\mathcal{X}_0$.

   Пусть $x \in \Omega^{(i)}$, то есть находиться в $(i)-$ом симплексе, $i \in \mathcal{J}_0$, для x справедлива формула: $x = \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j g_j^{(i)}$. Есть номер k такой, что $g_k^{(i)} \in \mathrm{int}\mathcal{X}_0$. По аналогии с первым пунктом доказательства получим:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \leq \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j \left((v^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)} g_j^{(i)} + B^{(i)} K C g_j^{(i)} + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)} \right)$$

   Под суммой получили выражения для $\Psi^{(i)}(g_j, K, v^{(i)})$, запишем оценку из условия 4 для всех вершин кроме $g_k^{(i)}$:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \leq \sum_{j=1}^{n_x+1} \alpha_j \Psi^{(i)}(g_j, K, v^{(i)}) \leq - \sum_{j=1, j\neq k}^{n_x+1} \alpha_j \epsilon \min\{\|g_j\|, 1\} + \alpha_k \Psi^{(i)}(g_k, K, v^{(i)}).$$

   Заметим, что при

$$\alpha_k < \frac{-\sum_{j=1, j\neq k}^{n_x+1} \alpha_j \epsilon \min\{\|g_j\|, 1\}}{\Psi^{(i)}(g_k, K, v^{(i)})}$$

   верно, что

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} < m < 0.$$

   Значит можно найти такое δ, чтобы функция Ляпунова убывала в некоторой δ окрестности границы множества $\mathcal{X}_0$.

7. Заметим, что тогда для множества $\mathcal{X}_0$ верны рассуждения проводимые в пунктах 2,3,4. Тем самым показано, что $\mathcal{X}_0$ инвариантное множество.

5.2 Алгоритм построения множества $\mathcal{X}_0$

Основная схема алгоритма построения кусочно-аффинной функции Ляпунова $V(x)$, матрицы K, а также множества $\mathcal{X}_0$ предполагает перебор симплексов из некоторой окрестности нулевого положения равновесия и далее проверку выполнения условий одной из двух указанных выше теорем для каждой выбранной совокупности симплексов. Основная вычислительная сложность при этом состоит в поиске значений $v^{(i)}$ и матрицы K, удовлетворяющих большой системе неравенств. Большинство неравенств являются линейными, за исключением билинейных неравенств с использованием функции $\Psi(\cdot)$. Таким образом, имеет смысл построить приближённый алгоритм нахождения решений такой системы неравенств. Эффективным подходом здесь может быть сведение задачи поиска решений упомянутой системы неравенств к совокупности вспомогательных задач линейного программирования, которые могут быть эффективно решены в том числе и при очень большом количестве переменных и неизвестных величин (то есть при большом количестве симплексов $\Omega^{(i)}$). Опишем далее основную идею такого приближённого алгоритма на примере поиска значений $v^{(i)}$ и матрицы K, удовлетворяющих условиям теоремы 2, при некотором фиксированном множестве $\mathcal{J}$. Этот алгоритм является аналогом метода покоординатного спуска, применяемого для решения задач оптимизации нелинейных функций.

1. Случайным образом зададим $n-1$ точку и добавим 0, назовем набор из n точек **points**.

2. Воспользуемся алгоритмом триангуляции Делоне для разбиения на симплексы с вершинами в точках **points**.

3. Выделим подмножество индексов $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$.

4. Найдём какую-нибудь матрицу K, удовлетворяющую линейным неравенствам (14) при всех $i \in \mathcal{J}$. Для этого, например, можно решить задачу линейного программирования
$$\sum_{j,k} K_{ij} \to \min .$$
Если подходящей матрицы не существует, то алгоритм завершает работу с отрицательным результатом. В противном случае переходит к следующему пункту.

5. Для фиксированной матрицы K решим задачу линейного программирования для поиска величин $v^{(i)}$:
$$\sum_{i,g} \Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}) \to \min \tag{19}$$
при линейных ограничениях, заданных в пунктах 6, 7, 8 и 9 теоремы 2.

6. Для найденного решения проверяем выполнение условия 6 теоремы 2. Если это условие выполнено, то алгоритм завершает работу с положительным результатом. В противном случае алгоритм переходит к следующему пункту.

7. При фиксированных ранее найденных величинах $v^{(i)}$ решим задачу линейного программирования (19) при условиях (14).

8. Для найденного решения проверяем выполнение условия 4 теоремы 2. Если это условие выполнено, то алгоритм завершает работу с положительным результатом. В противном случае алгоритм переходит к пункту 5.

Данный алгоритм не гарантируем нахождение решения (даже в том случае, если оно точно существует). Поэтому во избежании зацикливания следует ввести ограничение на максимальное количество итераций (переходов к пункту 5). В случае отрицательного ответа можно перепускать алгоритм, пока не произойдет нужная генерация точек **points** и выбор множества $\mathcal{J}_0$.

6 Примеры работы алгоритма

6.1 Пример с линейной динамикой

Рассмотрим пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{10}(x_1 - x_2) + u_1; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{10}(x_1 + x_2) + u_2, \end{cases}$$

где $u = K(Cx + \xi)$, $\max\limits_{i=1,2}|u_i| \leq 1$, $\max\limits_{i=1,2}|\xi_i| \leq \frac{1}{100}$, $C = I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\epsilon = \frac{1}{1000}, x_0 = (-0.3, 0.1)$.

Найденная матрица K:

$$K = \begin{pmatrix} -2.194 & -0.023 \\ -0.117 & -2.104 \end{pmatrix}.$$

Число вершин: 25, количество симплексов 39:

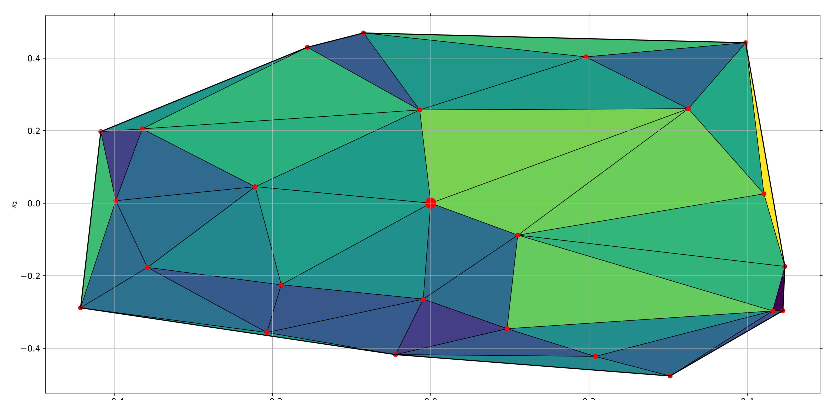

Рис. 1. Пример триангуляции.

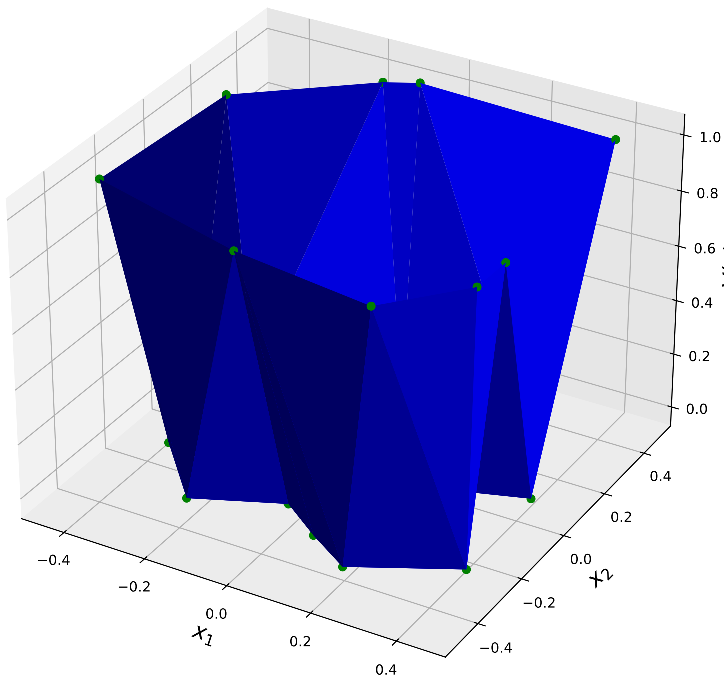

Рис. 2. Полученная функция ляпунова.

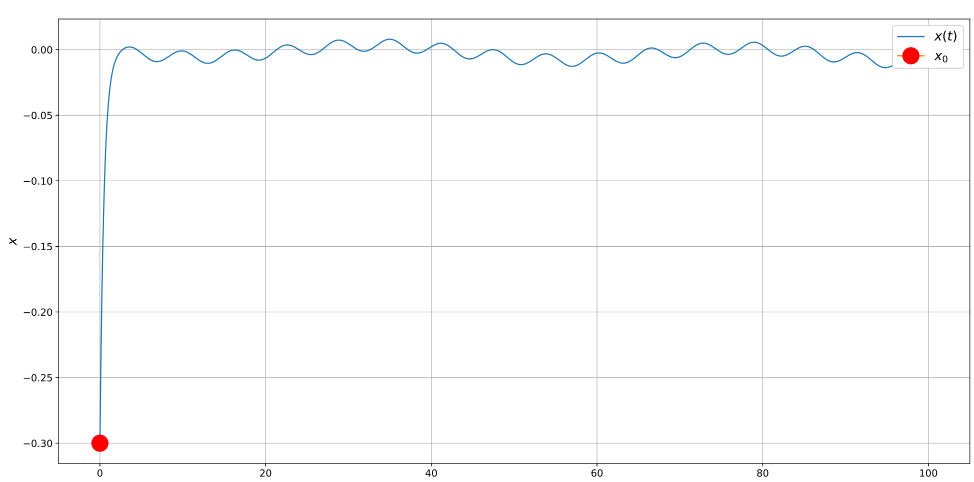

Рис. 3. Трактория системы $x(y)$.

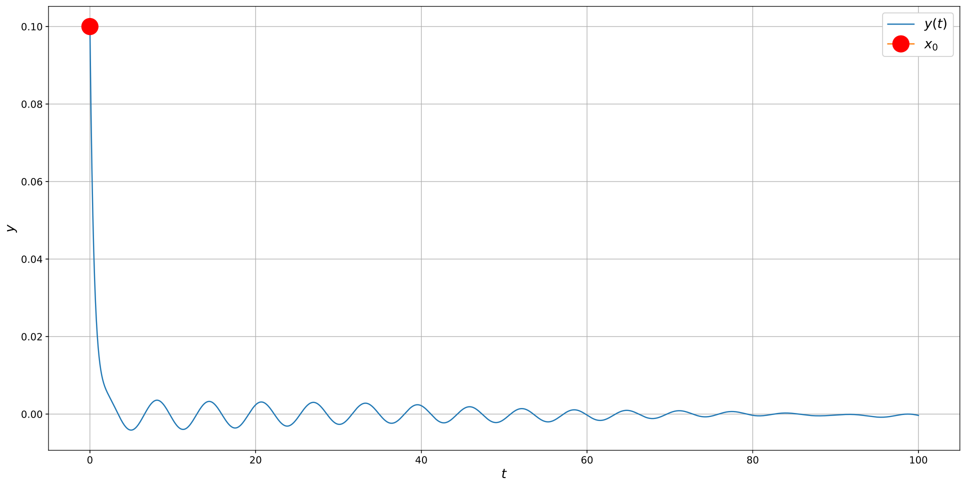

Рис. 4. Траектория системы $y(t)$.

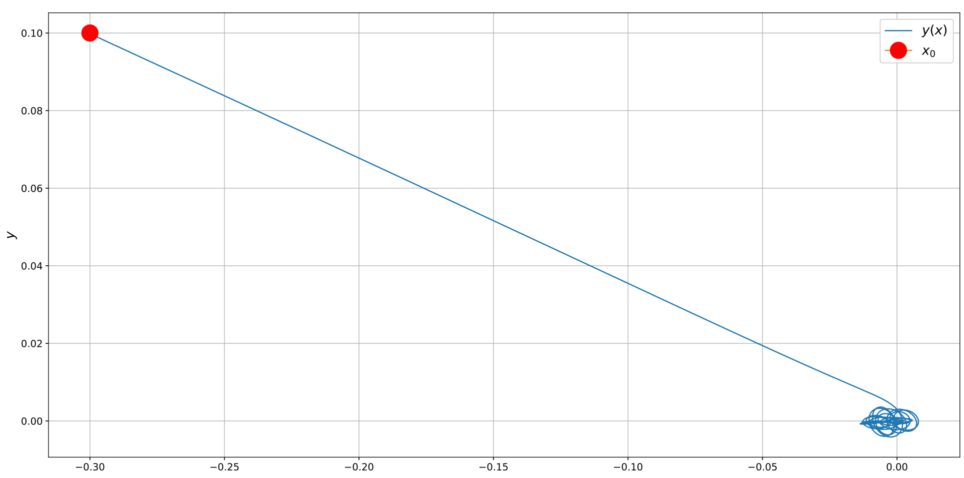

Рис. 5. Траектория системы $y(x)$.

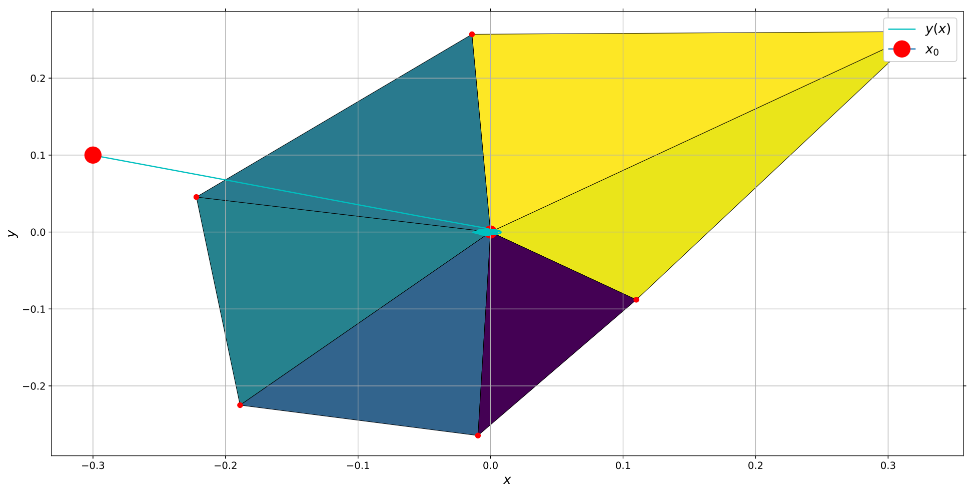

Рис. 6. Траектория системы $y(x)$ и найденная инвариантная область.

6.2 Пример с нелинейной динамикой

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_1 x_2^2) + u_1; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - x_2^3) + u_2, \end{cases}$$

где $u = K(Cx + \xi)$, $\max\limits_{i=1,2}|u_i| \leq 1$, $\max\limits_{i=1,2}|\xi_i| \leq \frac{1}{100}$, $C = I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\epsilon = \frac{1}{1000}, x_0 = (0.3, -0.8)$.
Найденная матрица K:

$$K = \begin{pmatrix} -2.015 & 0.153 \\ 0.394 & -2.130 \end{pmatrix}.$$

Число вершин: 25, количество симплексов 37:

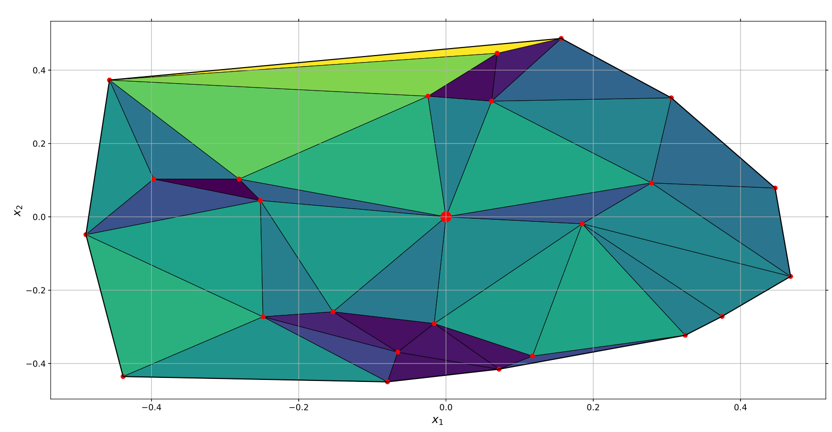

Рис. 7. Пример триангуляции.

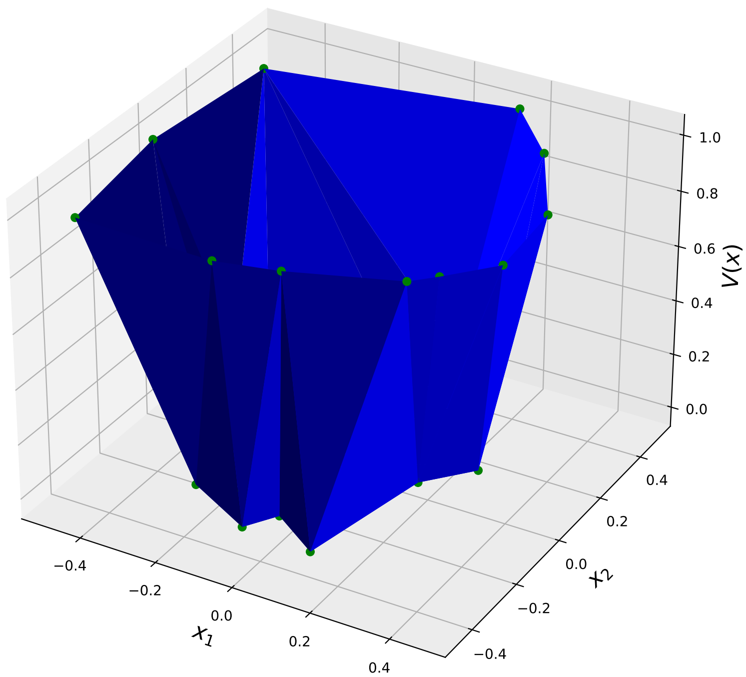

Рис. 8. Полученная функция ляпунова.

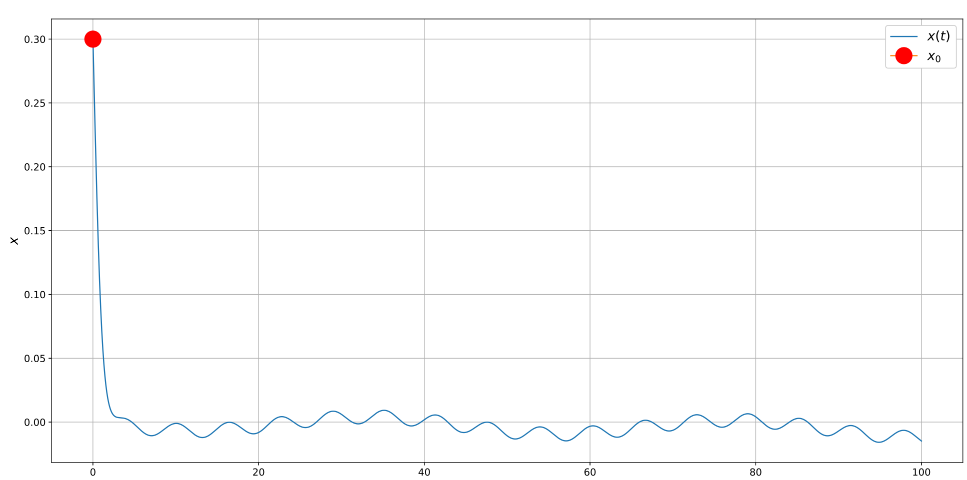

Рис. 9. Трактория системы $x(t)$.

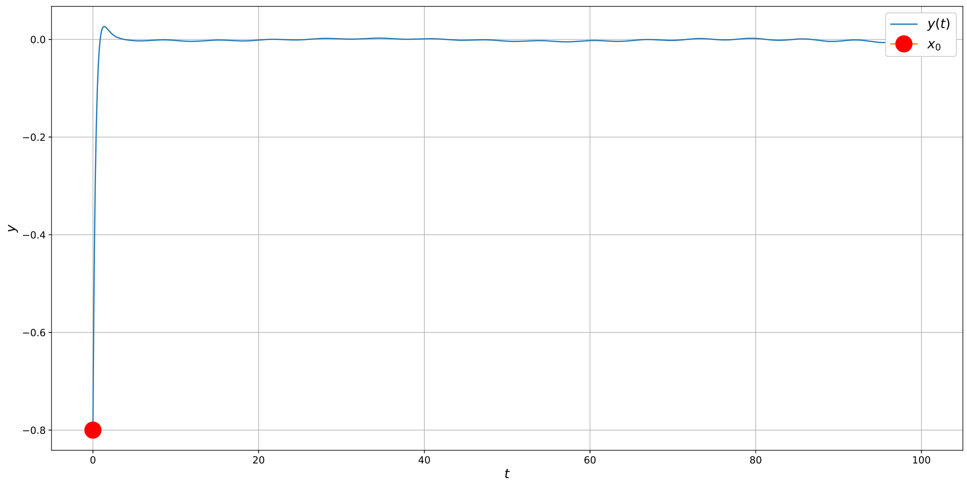

Рис. 10. Траектория системы $y(t)$.

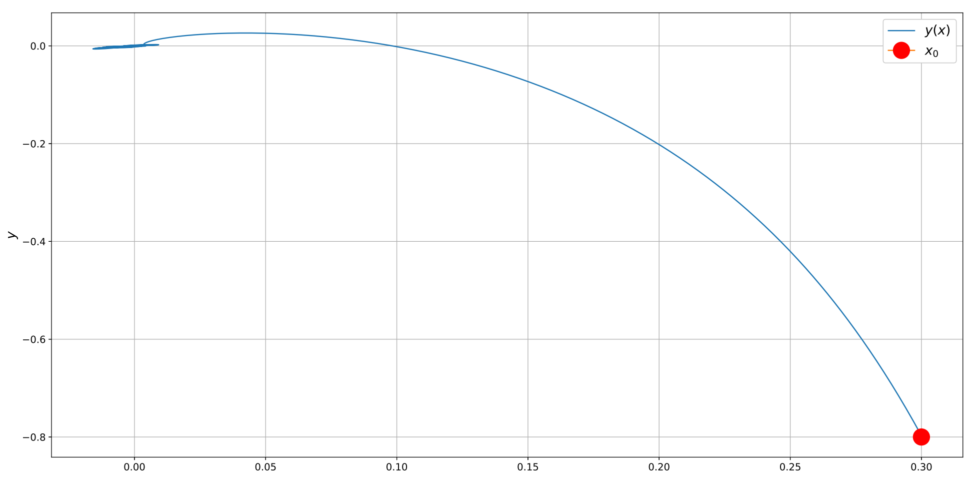

Рис. 11. Траектория системы $y(x)$.

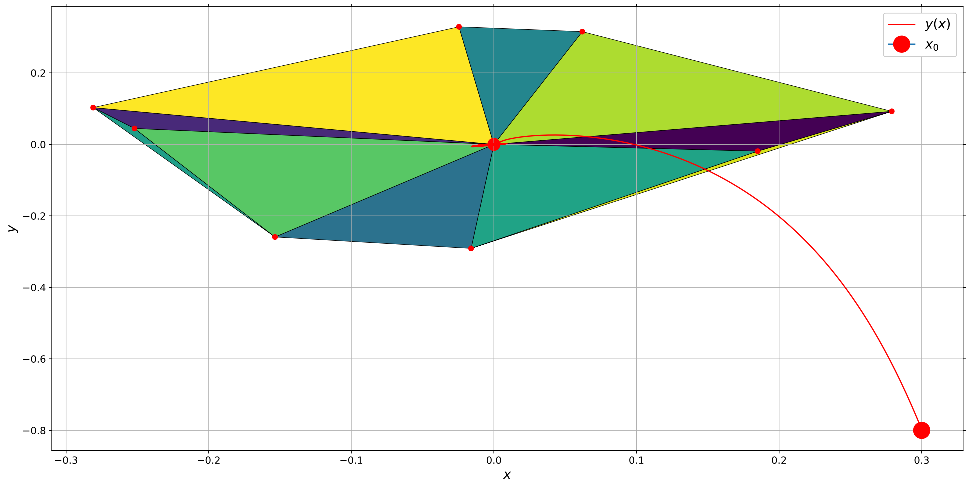

Рис. 12. Траектория системы $y(x)$ и найденная инвариантная область.

7 Заключение

Полученные достаточные условия стабилизации, а также соответствующий алгоритм позволяют получать приближенные инвариантные множества путем решения задач линейного программирования, в достаточно простой с точки зрения вычислений форме. В дальнейшем планируется рассматривать более широкие классы управлений и функций Ляпунова для их обоснования, а так же другие вопросы стабилизции.

8 Библиография

Список литературы

[1] *Точилин П.А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН, издательство Ин-т математики и механики (Екатеринбург), 2020. Т. 26. № 1, с. 223–238.

[2] *Атанесян А.А., Точилин П.А.* Задача стабилизации системы с переключениями при помощи кусочно-линейного управления // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, издательство Изд-во Моск. ун-та (М.), 2019. Т. 43, № 4, с. 22-32.

[3] *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

[4] *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski R. R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer New York, NY, 1998.

[5] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука 1967.

[6] *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г Теория устойчивости движения. Доп 4. М.: Наука, 1966.

[7] *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.

[8] *Денисов А.М., Разгулин А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: изд-во ВМК МГУ, 2009.