Задача стабилизации на основании неполной и неточной информации

Кафедра системного анализа
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

МГУ им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Москва 2022

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифферинцальных уравнений с управляющими параметрами

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u,\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^{n_x},\ u \in \mathbb{R}^{n_u}$$

$$\mathbf{f}(\cdot) \in C^2(\Omega),\ \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x},\ \mathbf{f}(0) = 0,\ \mathbf{g}(\cdot) = C^1(\Omega),\ \mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$$

определены в области Ω которая допускает конечную триангуляцию симплексами $\Omega^{(i)}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, а $\mathcal{P}$ – некоторая выпуклая компактная область в $\mathbb{R}^{n_u}$.
Более конкретно будем считать, что множество $\mathcal{P}$ является выпуклым многогранником:

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^{n_u} \,:\ Pu \preceq p\}.$$

Здесь $P \in \mathbb{R}^{m \times n_u}$, $p \in \mathbb{R}^m$.

Постановка задачи

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_{n_y}) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор наблюдений ($n_y < n_x$), который связан с координатами системы соотношением

$$y = Cx + \xi,\ C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x},\ \xi \in \mathbb{R}^{n_y},$$

где ξ вектор, характеризующий погрешность при измерении y_i, то есть i-ой компоненты вектора наблюдений, матрица C фиксирована.

$$\xi \in \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$– выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}^{n_y}, 0 \in \mathcal{R}$, диаметр $\mathcal{R}$ достаточно мал.

Постановка задачи

Пусть $x(t, t_0, x_0)$ исходной решение системы
Необходимо найти $u(y)$, что после подстановки его нулевое положение равновесия будет локально асимптотически устойчивым, $\exists\ \mathcal{X}$, что $0 \in$ int$\mathcal{X} \subset \Omega$,

Локальная асимптотически устойчивость

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \delta < \varepsilon,\ B_\delta(0) \subset \mathcal{X},\ \forall x_0 \in B_\delta(0), \forall \xi(t),\ t \geq 0,$$
$$\exists x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} :$$
$$||x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}|| \leq \varepsilon,\ \forall t \geq 0,\ \exists \lim_{t \to +\infty} ||x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}|| = 0.$$

Более общая задача о поиске инвариантного $\mathcal{X}_0$.

Постановка задачи

Пусть $\mathcal{X}_0 \subset \Omega$ – некоторое фиксированное множество, содержащее нулевое положение равновесия. Тогда необходимо найти такое управление $u = u(y)$, что найдётся такое множество $\mathcal{X}$, что $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X} \subset \Omega$ и для любого $x_0 \in \mathcal{X}$, для любой погрешности измерений $\xi(\cdot)$, для соответствующей траектории $x(t,0,x_0)|_{u(\cdot)}$ будут выполнены следующие условия:

$$\exists t^* \geqslant 0: \; x(t,0,x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}, \forall t \geqslant 0, \quad \text{и } x(t,0,x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_0, \forall t \geqslant t^*.$$

По возможности множество $\mathcal{X}_0$ необходимо сделать наименьшим по вложению. Этому вопросу и посвящена данная работа.

Барицентрические координаты

Рассмотрим набор из $n_x + 1$ точек находящихся в общем положении $g = \{g_1, g_2, \cdots, g_{n_x+1}\}$. Будем обозначать $\Omega = \text{conv } g_i$. Обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_x+1})$ барицентрические координаты в этом симплексе.

Составим матрицу G, в которой содержатся столбцы $g_1, \ldots, g_{n_x+1}$. Воспользуемся параметризацией через барицентрические координаты: для каждой точки $x \in \Omega$ найдется такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_x+1})$, такой, что:

$$\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geq 0\ \forall k,\ G\alpha(x) = x.$$

$$\alpha(x) = Px + p.$$

Теорема Ляпунова

Положительная определенность

$V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной на множестве $\Omega(\theta \in \Omega)$, если выполнены следующие два условия

1. $V(x) \geq 0, \ \forall y \in \Omega;$
2. $V(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

Функция Ляпунова

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t,x) \leq 0, \ \forall x \in \Omega, \ t \geq 0.$$

Теорема Ляпунова

Теорема(Об асимптотической устойчивости)

Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова для системы (1).

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t,x) \le -W(x), \ \forall x \in \Omega, \ t \ge 0,$$

где $W(x)$ – некоторая непрерывная положительно определенная на Ω функция. Тогда нулевое решение $x(t, \theta^{n_x}) = \theta^{n_x}$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Доказательство можно найти, например, в [1].

Кусочная линеаризация системы дифференциальных уравнений

Для функции $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u$, справедливо:

$$\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u = F^{(i)}\alpha^{(i)}(x) + B^{(i)}u + r^{(i)}(x,u) = \\ = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + r^{(i)}(x,u)$$

где

$$F^{(i)} = (\mathbf{f}(g_1^{(i)}), \ldots, \mathbf{f}(g_{n_x+1}^{(i)})) \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)},\ A^{(i)} = F^{(i)}H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1}\mathbf{g}(g_k),\ f^{(i)} = F^{(i)}h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

$$|r_s^{(i)}(x,u)| < R_s^{(i)},\ \forall s = 1, \cdots, n_x + 1$$

Погрешность линеаризации

Тогда в новых обозначениях система принимает вид:

$$\dot{x} = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + r^{(i)}(x,u), \; x \in \Omega^{(i)}.$$

Получена итоговая оценка для s-й компоненты погрешности линеаризации:

$$|R_s^{(i)}(x)| \leq \mathcal{R}_s^{(i)} = M_s^{(i)} + N_s^{(i)} \; \forall x \in \Omega$$

$$M_s^{(i)} = \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{max} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi) \right) d^{(i)}$$

Получаем, что погрешность лианеризации лежит в параллелепипеде:

$$R^{(i)}(x) \in \mathcal{Q} = [-\mathcal{R}_1^{(i)}, \mathcal{R}_1^{(i)}] \times \dots \times [-\mathcal{R}_{n_x}^{(i)}, \mathcal{R}_{n_x}^{(i)}]$$

Случай линейного управления

Будем искать управление в виде линейной функции от наблюдений в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$. Запишем общий вид управления:

$$u(y) = Ky = K(Cx + \xi).$$

Найдем условия на матрицу K при $x \in \Omega^{(i)}$, при которых управление удовлетворяет условиям при любых ξ:

$$KCx + K\xi \in \mathcal{P},\ \forall x \in \Omega^{(i)},\ \forall \xi \in \mathcal{R}$$

То матрица K удовлетворяет этому условию в том и только в том случае, если выполнена система линейных неравенств:

$$P_s^T K(Cg + \eta) \leqslant p_s,\ \forall s = 1, ..., m,\ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)},$$
$$\forall \eta \text{ – вершина } \mathcal{R}$$

$$\Xi^{(i)} = \{K\xi :\ K \in \mathcal{K}^{(i)},\ \xi \in \mathcal{R}\}.$$

Аффинная функция Ляпунова

Будем искать функцию Ляпунова в виде аффинной функции на каждом симплексе:

$$V(x) = (v^i)^T (H^{(i)} x + h^{(i)}),\ x \in \Omega^{(i)}$$

Производная в силу системы:

$$\frac{dV}{dt} = (v^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)} x + B^{(i)} K C x + B^{(i)} K \xi + f^{(i)} + r^{(i)}(x, K(Cx + \xi)))$$

Главная формула

Линейность по x и равномерная оценка по всем возможным значениям неопределённых параметров::

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{u(\cdot)} \leqslant (v^{(i)})^T H^{(i)}(A^{(i)}g + B^{(i)}KCg + f^{(i)}) + \sum_{s=1}^{n_x+1} v_s^{(i)} \cdot S^{(i)} =$$

$$= \Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}),\ \forall g \text{ – вершина } \Omega^{(i)}.$$

$$S^{(i)} = \max\left(\left| (H^{(i)}(B^{(i)}K\eta + r))_s \right| :\ s = 1, ..., n_x + 1,\ \eta \in \Xi^{(i)}, \right.$$

$$\left. r \in \mathcal{R}^{(i)}\ K \right).$$

Главная теорема

Теорема

Пусть найдены некоторая матрица K, множества индексов $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_0$, а также векторы $v^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$, $i \in \mathcal{J}$, для которых при некотором $\varepsilon > 0$ выполнены следующие условия:

- $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$;
- $0 \in \mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0 = \bigcup\{\Omega^{(i)} :\ i \in \mathcal{J}_0\}$, $\mathcal{X} = \bigcup\{\Omega^{(i)} :\ i \in \mathcal{J}\}$;
- выполнены неравенства принадлежности управлению допустимому множеству, для любого $i \in \mathcal{J}$;
- $\Psi^{(i)}(g, K, v^{(i)}) \leqslant -\varepsilon \min\{\|g\|, 1\}$ для любой вершины g многогранника $\Omega^{(i)}$, любого $i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$;
- Для любого симплекса $\Omega^{(i)}$, $i \in \mathcal{J}_0$, найдётся хотя бы одна вершина g, которая является внутренней для множества $\mathcal{X}_0$ ($g \in \mathcal{X}_0$).

Главная теорема (продолжение)

- Для любого симплекса $\Omega^{(i)}$, который имеет как внутренние, так и граничные (относительно $\mathcal{X}$) вершины, для любых двух таких вершин $g_1, g_2 \in \Omega^{(i)}$, $g_1 \in \mathcal{X}$, $g_2 \in \partial\mathcal{X}$ выполнено неравенство
$$(v^{(i)})^T H^{(i)} g_1 \leqslant (v^{(i)})^T H^{(i)} g_2 - \varepsilon.$$
- Во всех вершинах внешней границы($\mathcal{X}$) значения функции Ляпунова совпадают.
- Для любого симплекса $\Omega^{(i)}$, $i \in \mathcal{J}$, который имеет как внешние, так и граничные (относительно $\mathcal{X}_0$) вершины, для любых двух таких вершин $g_1, g_2 \in \Omega^{(i)}$, $g_1 \in \partial\mathcal{X}_0$, $g_2 \notin \mathcal{X}_0$ выполнено неравенство
$$(v^{(i)})^T H^{(i)} g_1 \leqslant (v^{(i)})^T H^{(i)} g_2 - \varepsilon.$$
- Во всех вершинах внутренней границы($\mathcal{X}_0$) значения функции Ляпунова совпадают.

Главная теорема

Теорема (продолжение)

Тогда любая траектория исходной системы, замкнутой управлением $u = Ky$ с найденной матрицей K, удовлетворяет условиям инвариантности множества $\mathcal{X}_0$ при любом $x_0 \in \mathcal{X}$.

Алгоритм

Основная схема алгоритма построения кусочно-аффинной функции Ляпунова $V(x)$, матрицы K, а также множеств $\mathcal{X}$ (и $\mathcal{X}_0$) предполагает перебор симплексов из некоторой окрестности нулевого положения равновесия и далее проверку выполнения условий теоремы для каждой выбранной совокупности симплексов. Основная вычислительная сложность при этом состоит в поиске значений $v^{(i)}$ и матрицы K, удовлетворяющих большой системе неравенств.

Пример работы алгоритма

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{10}(x_1 - x_2) + u_1; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{10}(x_1 + x_2) + u_2, \end{cases}$$

где $u = K(Cx + \xi)$, $\max\limits_{i=1,2}|u_i| \le 1$, $\max\limits_{i=1,2}|\xi_i| \le \frac{1}{100}$, $C = I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$\varepsilon = \frac{1}{1000}, x_0 = (-0.3, 0.1)$.

$$K = \begin{pmatrix} -2.194 & -0.023 \\ -0.117 & -2.104 \end{pmatrix}.$$

Пример работы алгоритма

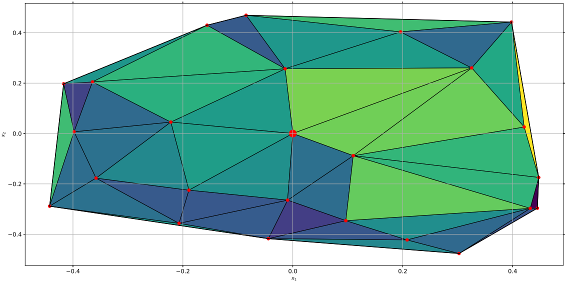

Рис. 1. Пример триангуляции.

Пример работы алгоритма

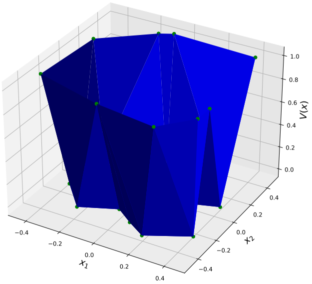

Рис. 2. Полученная функция ляпунова.

Пример работы алгоритма

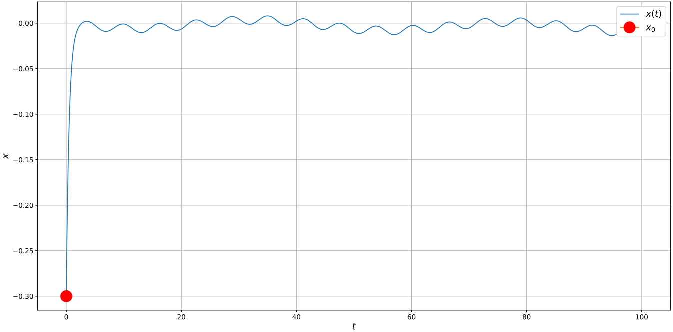

Рис. 3. Трактория системы $x(y)$.

Пример работы алгоритма

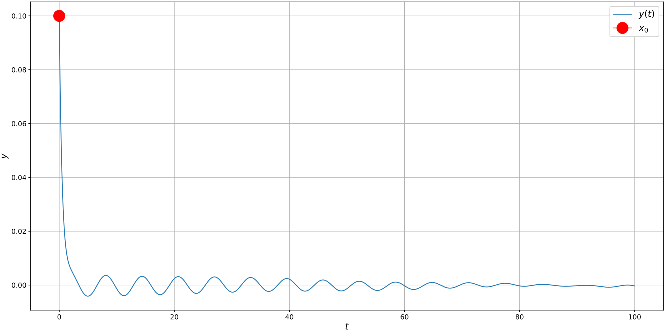

Рис. 4. Траектория системы $y(t)$.

Пример работы алгоритма

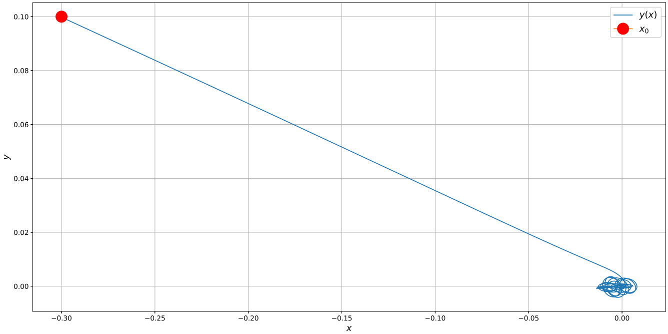

Рис. 5. Траектория системы $y(x)$.

Пример работы алгоритма

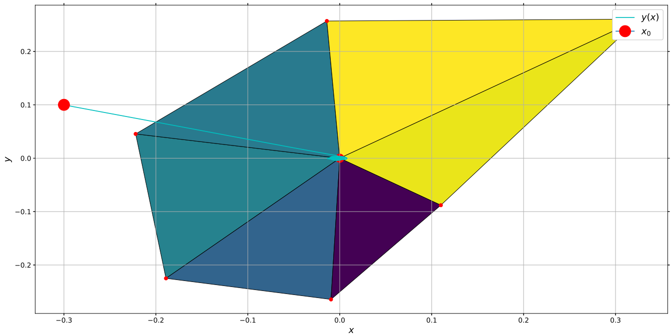

Рис. 6. Траектория системы $y(x)$ и найденная инвариантная область

Пример с нелинейной динамикой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_1 x_2^2) + u_1; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - x_2^3) + u_2, \end{cases}$$

где $u = K(Cx + \xi)$, $\max\limits_{i=1,2}|u_i| \leq 1$, $\max\limits_{i=1,2}|\xi_i| \leq \frac{1}{100}$, $C = I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$\varepsilon = \frac{1}{1000}, x_0 = (0.3, -0.8)$.
Найденная матрица K:

$$K = \begin{pmatrix} -2.015 & 0.153 \\ 0.394 & -2.130 \end{pmatrix}.$$

Пример с нелинейной динамикой

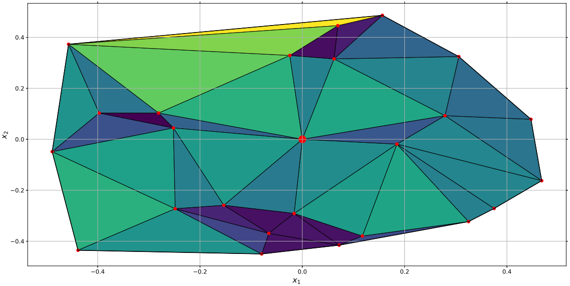

Рис. 7. Пример триангуляции.

Пример с нелинейной динамикой

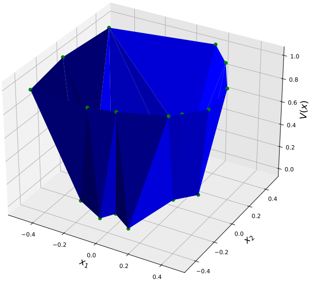

Рис. 8. Полученная функция ляпунова.

Пример с нелинейной динамикой

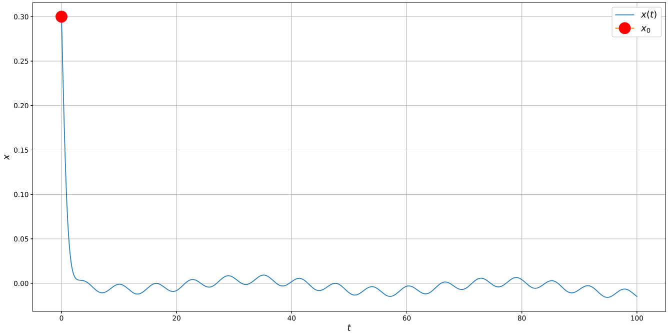

Рис. 9. Трактория системы $x(t)$.

Пример с нелинейной динамикой

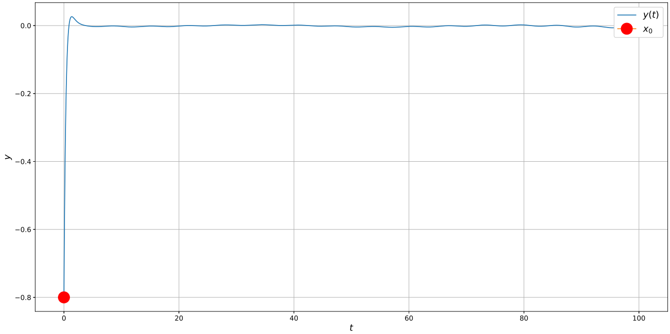

Рис. 10. Траектория системы $y(t)$.

Пример с нелинейной динамикой

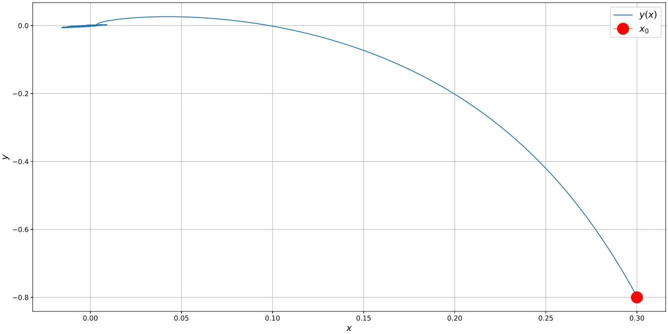

Рис. 11. Траектория системы $y(x)$.

Пример с нелинейной динамикой

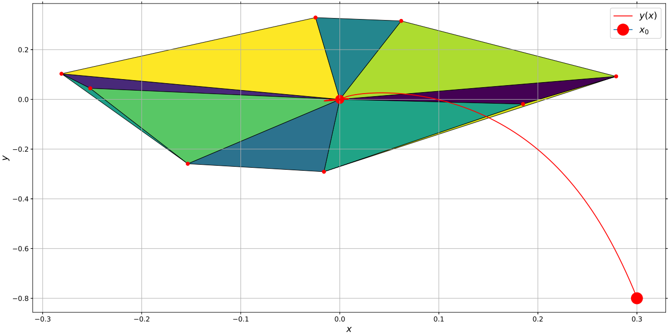

Рис. 12. Траектория системы $y(x)$ и найденная инвариантная область.

Краткие результаты

- Доказан аналог теоремы Ляпунова для поставленной задачи
- Предложен алгоритм поиска стабилизатора на основании метода покоординатного спуска
- На языке Python реализован алгоритм
- Приведены два примера, демонстрирующие работу алгоритма

Библиография

- *Точилин П.А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН, издательство Ин-т математики и механики (Екатеринбург), 2020. Т. 26. № 1, с. 223–238.
- *Атанесян А.А., Точилин П.А.* Задача стабилизации системы с переключениями при помощи кусочно-линейного управления // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, издательство Изд-во Моск. ун-та (М.), 2019. Т. 43, № 4, с. 22-32.
- *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
- *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski R. R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer New York, NY, 1998.

Библиография

- *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука 1967.
- *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г Теория устойчивости движения. Доп 4. М.: Наука, 1966.
- *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.
- *Денисов А.М., Разгулин А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: изд-во ВМК МГУ, 2009.