Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная задача быстродействия.»

Студент 315 группы
М. М. Савинов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + Bu + f(t), \quad t \in [t_0, +\infty), & (1) \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0, & (2) \\ x(T) \in \mathcal{X}_1, & (3) \\ T - t_0 \longrightarrow \min\{u(\cdot) \in \mathcal{P}\}. & (4) \end{cases}$$

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x + Bu + f(t), \quad t \in [t_0, +\infty),$$

здесь $x,\ f(t),\ A(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ B \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{X}_0$ – начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ – целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : a(x_1 - p_1)^2 + b(x_2 - p_2)^2 \leq 1\}, \quad a, b > 0;$$

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0\};$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \max\{\alpha|x_1 - k|, \beta|x_2 - m|\} \leq q\}, \quad q > 0.$$

Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A(\cdot), B, f(\cdot), t_0, a, b, p_1, p_2, x_0, k, m, q, \alpha, \beta$ определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приближенно) найти значение T, построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов

2 Теоретические выкладки.

2.1 Принцип максимума Портрягина.

Пусть $(u^*(t), x^*(t))$ - решение системы (1). Будем называть пару оптимальной если для неё выполняются условия (2), (3) и (4).

Теорема 1 (Принцип максимума Портрягина.) Пусть $(u^*(t), x^*(t))$ — оптимальная пара, $t_1 = T[u^*]$. Тогда при $t \geq t$ существует сопряженная функция $\psi(t)$, являющаяся нетривиальным($\psi(t) \neq 0$) решением сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi, \tag{5}$$

при этом выполняются следующие три условия:

- Принцип максимума

$$\langle Bu^*(t), \psi(t)\rangle \overset{a.e.}{=} \rho(\psi(t)|B\mathcal{P}(t));$$

- Условие трансверсальности на множестве $\mathcal{X}_0$

$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0)|\mathcal{X}_0);$$

- Условие трансверсальности на множестве $\mathcal{X}_1$

$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1)|\mathcal{X}_1).$$

Доказательство можно найти в **[1]** .

2.2 Определение и свойства опорных функций.

Определение 1. Пусть X - евклидово пространство, а $A \subset X$ - его не пустое подмножество. Опорная функция множества $A \subset X$ в направлении $l \in X$ определена на X соотношением:

$$\rho(l, A) = \sup_{y \in A} \langle l, y \rangle$$

sup берется по всем $y \in A$.

Определение 2. Вектор $y^* \in A$ называется опорным в направлении l если:

$$\rho(l, A) = \langle y^*, l \rangle,$$

иными словами на векторе y^* достигается супремум скалярного произведения.

Свойство 1. Пусть в X заданы точка x и подмножество A. Тогда, выполнено

$$\rho(l|A + x) = \langle l, x \rangle + \rho(l|A).$$

Свойство 2. Пусть $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\rho(l|Tx) = \rho(T^T l|x).$$

2.3 Вычисление опорной функции множества $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : a(x_1 - p_1)^2 + b(x_2 - p_2)^2 \leq 1\}; \quad a, b > 0;$$

Множество $\mathcal{P}$ представляет собой эллипс с координатами центра в точке $p = (p_1, p_2)$ и полуосями $c = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $d = \frac{1}{\sqrt{b}}$. Посчитаем сначала опорную функцию от единичного шара $B_1(0) = \left\{ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \right\}$ по неравенству К-Б получаем

$$\langle l, x \rangle \leqslant \|l\| \|x\| = \|l\|$$

т.к. $\|x\| = 1$.
Пусть $x = kl$, $b \geqslant 0$. Положим

$$x = \frac{l}{\|l\|}.$$

Тогда
$$\rho(l|B_1(0)) = \langle l, x\rangle = \|l\|.$$
Теперь вычислим опорную функцию от множества
$$E = \Big\{\frac{(x_1-p_1)^2}{c^2} + \frac{(x_2-p_2)^2}{d^2} \leqslant 1\Big\},$$
где $p = (p_1, p_2)$ - координаты центра, c,d - полуоси. Запишем матрицу T
$$T = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$
Запишем опорную функцию
$$\rho(l|\mathcal{E}(p)) = \langle l, p\rangle + \rho(l|TB_1(0)) = \langle l, p\rangle + \rho(T^T l|B_1(0)).$$
Получаем
$$\rho(l|\mathcal{E}(p)) = \langle l, p\rangle + \sqrt{c^2 l_1^2 + d^2 l_2^2}.$$
Итого получаем:
$$\boxed{\rho(l|\mathcal{P}) = \langle l, p\rangle + \sqrt{\frac{l_1^2}{a} + \frac{l_2^2}{b}}}.$$
Опорный вектор $t = (t_1, t_2)$:
$$\boxed{t_1 = p_1 + \frac{l_1}{a\sqrt{\frac{l_1^2}{a} + \frac{l_2^2}{b}}}}.$$
$$\boxed{t_2 = p_2 + \frac{l_2}{b\sqrt{\frac{l_1^2}{a} + \frac{l_2^2}{b}}}}.$$

2.4 Вычисление опорной функции множества $\mathcal{X}_0$.

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0\};$$
Множество $\mathcal{X}_0$ представляет собой точку с координатами x_0. Опорная точка $y^* = x_0$ т.к. другие отсутствуют.
$$\boxed{\rho(l|\mathcal{X}_0) = \langle x_0, l\rangle}.$$

2.5 Вычисление опорной функции множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \max\{\alpha|x_1 - k|, \beta|x_2 - m|\} \leq q\}, \quad q > 0.$$
Сделаем замену переменных $\alpha' = \frac{\alpha}{q}, \beta' = \frac{\beta}{q}$ и перепишем множество $\mathcal{X}_1$:
$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \max\{\alpha'|x_1 - k|, \beta'|x_2 - m|\} \leq 1\}.$$

2.5.1 Случай $\alpha' \leq 0, \ \beta' \leq 0$

Тогда $\mathcal{X}_1 = \mathbb{R}^2$. Получаем $\rho(l|\mathcal{X}_1) = +\infty$, если $l \neq 0$.

2.5.2 Случай $\alpha' \le 0,\ \beta' > 0$

Тогда
$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \beta'|x_2 - m| \le 1\}.$$
Получается полуполоса уходящая в бесконечность по оси x_1. Получаем выражение для опорной функции
$$\begin{cases} \rho(l|\mathcal{X}_1) = +\infty, \quad l_1 \ne 0; \\ \rho(l|\mathcal{X}_1) = l_2(m - \frac{q}{\beta}), \quad l_1 = 0,\ l_2 \le 0; \\ \rho(l|\mathcal{X}_1) = l_2(m + \frac{q}{\beta}), \quad l_1 = 0,\ l_2 > 0. \end{cases}$$

2.5.3 Случай $\alpha' > 0,\ \beta' \le 0$

Тогда
$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \alpha'|x_1 - k| \le 1\}.$$
Получается полуполоса уходящая в бесконечность по оси x_2. Получаем выражение для опорной функции
$$\begin{cases} \rho(l|\mathcal{X}_1) = +\infty, \quad l_2 \ne 0; \\ \rho(l|\mathcal{X}_1) = l_1(k - \frac{q}{\alpha}), \quad l_2 = 0,\ l_1 \le 0; \\ \rho(l|\mathcal{X}_1) = l_1(k + \frac{q}{\alpha}), \quad l_2 = 0,\ l_1 > 0. \end{cases}$$

2.5.4 Случай $\alpha' > 0,\ \beta' > 0$

$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \max\{\alpha'|x_1 - k|, \beta'|x_2 - m|\} \le 1\}.$$
Множество $\mathcal{X}_1$ представляет собой прямоугольник с центром в точке $\gamma = (k, m)$.
$$K_1(0) = \Big\{x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \le 1\ \Big\}.$$
Найдем опорную функцию от $K_1(0)$(квадрат со стороной 2 в начале координат), для этого необходимо максимизировать $l_1x_1 + l_2x_2$. Воспользуемся тем, что максимум достигается на границе множества.
$$\rho(l|K_1(0)) = \max\{l_1 + l_2, l_1 - l_2, -l_1 + l_2, -l_1 - l_2\} = |l_1| + |l_2|\,.$$
Пусть задана матрица конфигурации T и квадрат задан с центром в $\gamma = (k, m)$, тогда:
$$T = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}.$$
$$\boxed{\rho(l|\mathcal{X}_1) = \rho(l|TK_1(\gamma)) = \langle l, \gamma\rangle + \cdot\rho(T^T l|K_1(0)) = \langle l, y\rangle + \alpha'\,|l_1| + \beta'\,|l_2|}.$$
Получаем:
$$\boxed{\rho(l|\mathcal{X}_1) = \langle l, y\rangle + \frac{q}{\alpha}\,|l_1| + \frac{q}{\beta}\,|l_2|}.$$

3 Процесс вычисления траекторий.

3.1 Основной алгоритм.

Будем использовать ПМП для поиска кандидатов на оптимальное управление. Для однозначного разрешения сопряженной системы (5) необходимо задать $\psi(t_0)$. Т.к. система линейная, то очевидно, что если $\psi(t)$ решение, то и $\lambda\psi(t),\ \lambda \in \mathbb{R}$ так же решение. Поэтому будем перебирать, только $||\psi(t_0)|| = 1$. Теперь для каждого кандидата $\psi(t_0)$ можно решить систему(ode 45). Из принципа максимума найдем $u^*(t)$ как опорный вектор к множеству $\mathcal{P}$ в направлении $B^T\psi(t)$, так как $\mathcal{P}$ строго выпуклое множество, то опорный вектор в каждом направлении к нему единственный. Так как $\mathcal{X}_0$ одна точка, то выбор начальной точки однозначен, если бы $\mathcal{X}_0$ было более богатым на свои элементы, то тогда пришлось воспользоваться условием трансверсальности на множестве $\mathcal{X}_0$. Далее решаем систему (1) с начальным условием (2) и находим время когда траектория решения попадет в множество $\mathcal{X}_1$ (mathlab event). По всем $||\psi(t_0)||$ находим минимальное время, это и будет оптимальным временем T. Пара (u^*, x^*) соответствующая этому времени и будет численным решением задачи быстродействия. Проверить точность этого решения можно при помощи условия трансверсальности на множестве $\mathcal{X}_1$, взяв за метрику точности величину z:

$$z = \frac{|\langle -\psi(T), x^*(T)\rangle - \rho(-\psi(T)|\mathcal{X}_1)|}{||\psi(T)||}.$$

3.2 Уточнение решения.

Для улучшения численного результата можно воспользоваться следующими методами:

- Поменяя параметы 'RelTol', 'AbsTol', 'Refine', 'MaxStep' в ode45 более точного численного решения ОДУ
- Сделать несколько итераций программы: на первой итерации будут перебираться все $\psi(t_0)$ на единичной окружности, на каждом следующем шаге $\psi(t_0)$ будут перебираться на подсекторе содержащий $\psi(t_0)^*$ найденный на предидущем шаге.

3.3 Проблема при rg(B)=1.

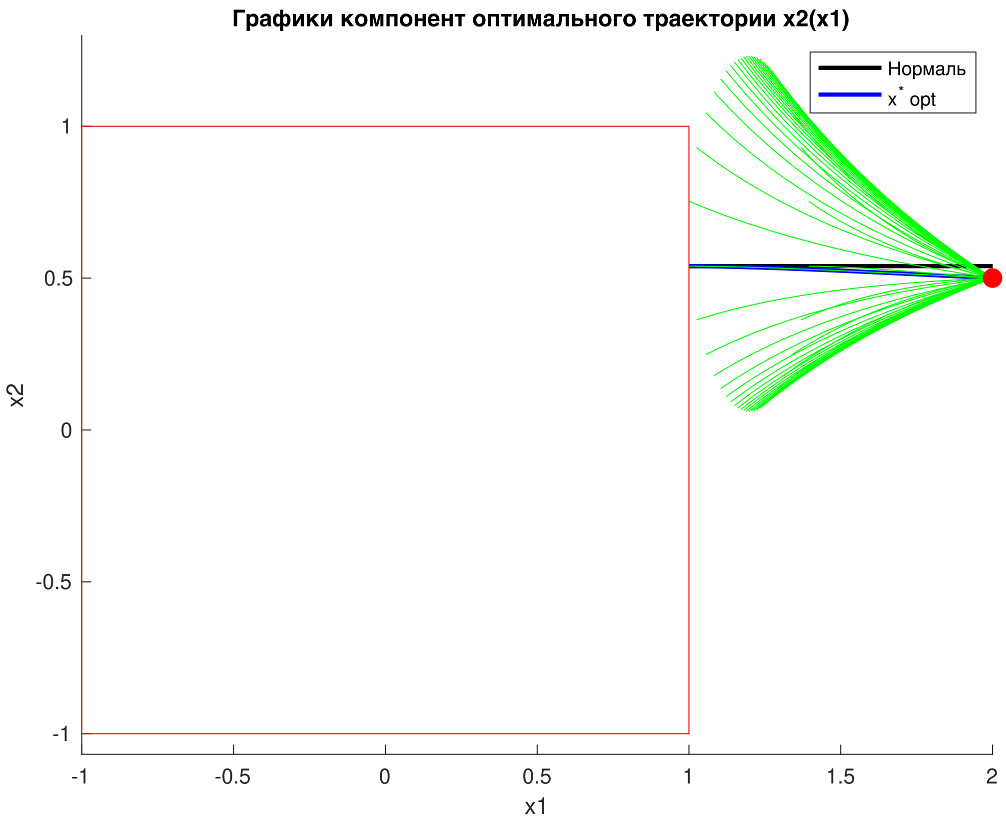
При rg(B)=1 может возникнуть проблема, может так получится, что когда ищется опорный вектор в направлении $B^T\psi(t)$ множества $\mathcal{P}$, что $B\psi(t) = 0$, т.е. мы ищем опорный вектор в нулевом направлении. Для того, чтобы избежать этого заменим B на $\tilde{B} = B + I\epsilon$, где I единичная матрица, ϵ некоторое маленькое число. Это немного ухудшит вычисления, но избавит от больших погрешностей из-за неопределенности при вычислении опорного вектора в нулевом направлении.

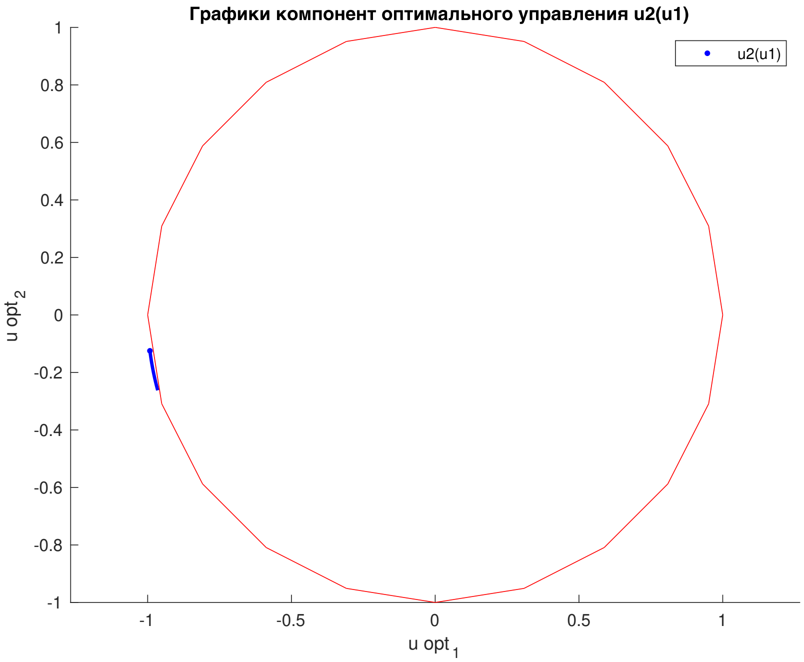
4 Различные примеры выполнения программ.

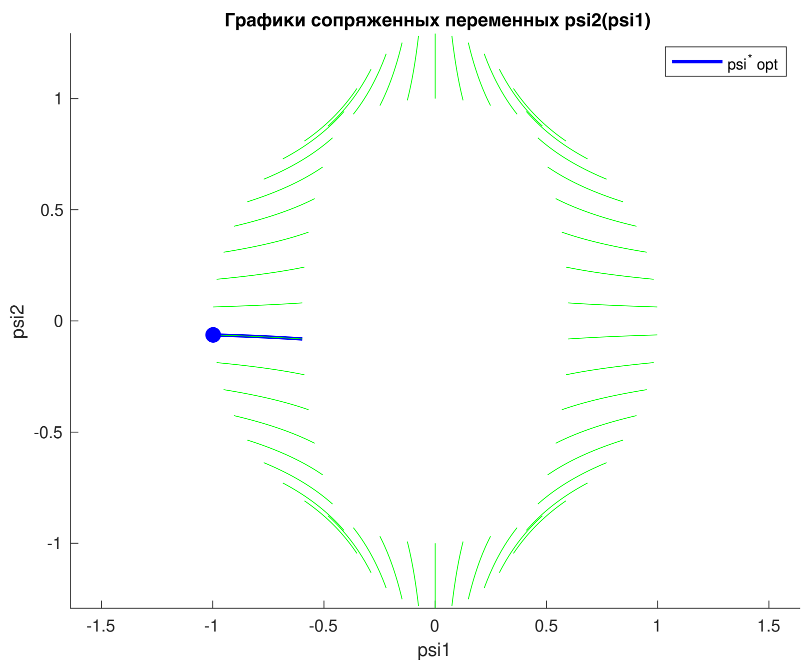
4.1 Матрица A с вещественными собственными значениями.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$t_0 = 0$, $n = 50$, n - количество точек в равномерной сетке по единичной окружности $||\psi(t_0)||$, $a = b = \alpha = \beta = q = 1$, $p_1 = p_2 = k = m = 0$.
Результат рассчета: z=0.0614, T=0.2556.




Графики компонент оптимального управления u2(u1)
u2(u1)
u opt$_2$
u opt$_1$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


Графики сопряженных переменных psi2(psi1)
psi* opt
psi2
psi1
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

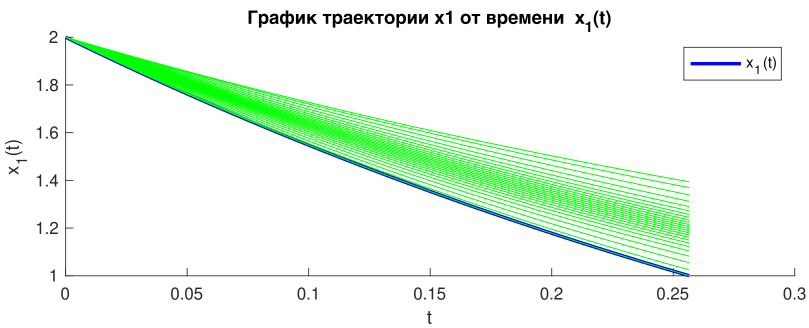


График траектории x1 от времени $x_1(t)$
$x_1(t)$
$x_1(t)$
t

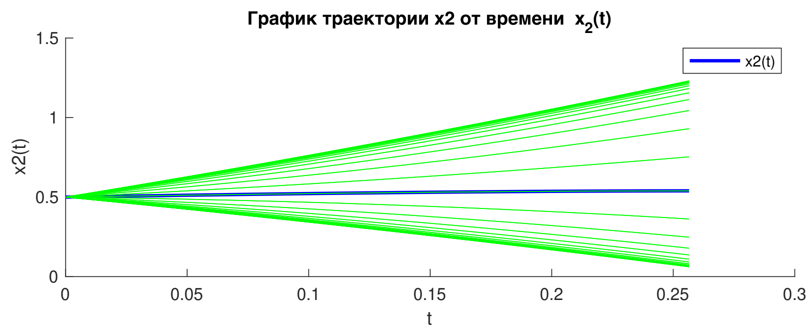


График траектории x2 от времени $x_2(t)$
x2(t)
x2(t)
t

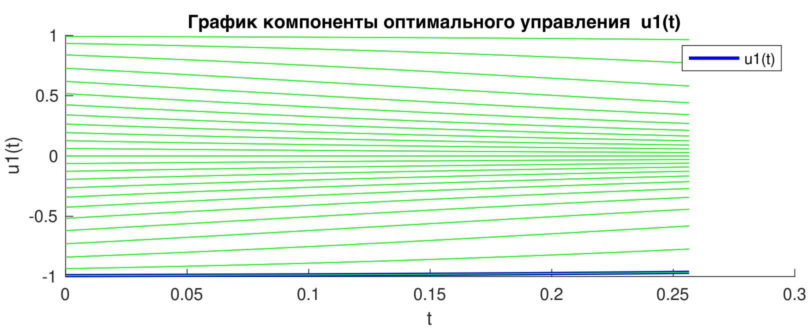


График компоненты оптимального управления u1(t)
u1(t)
u1(t)
t

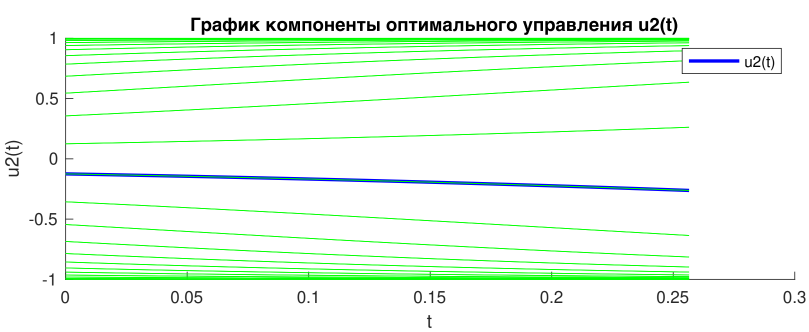
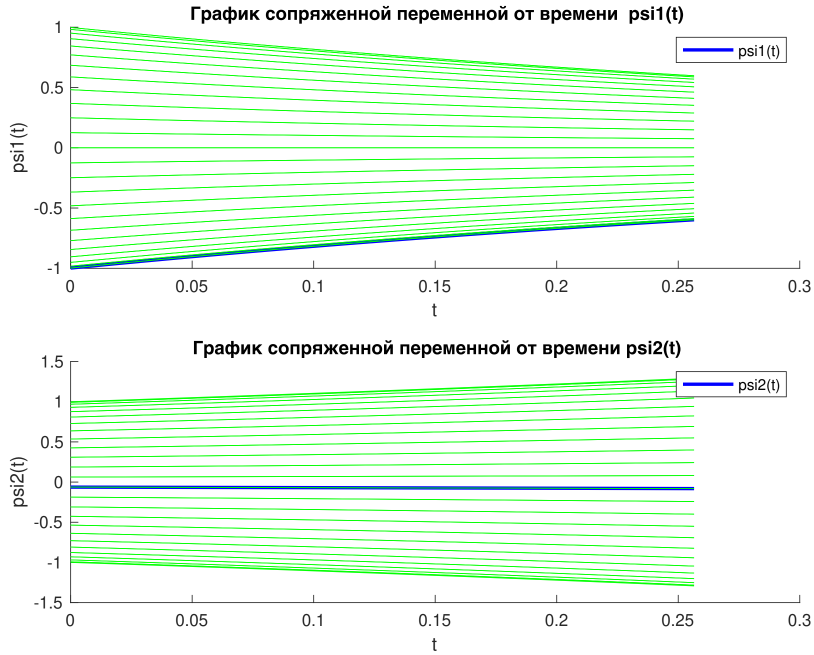
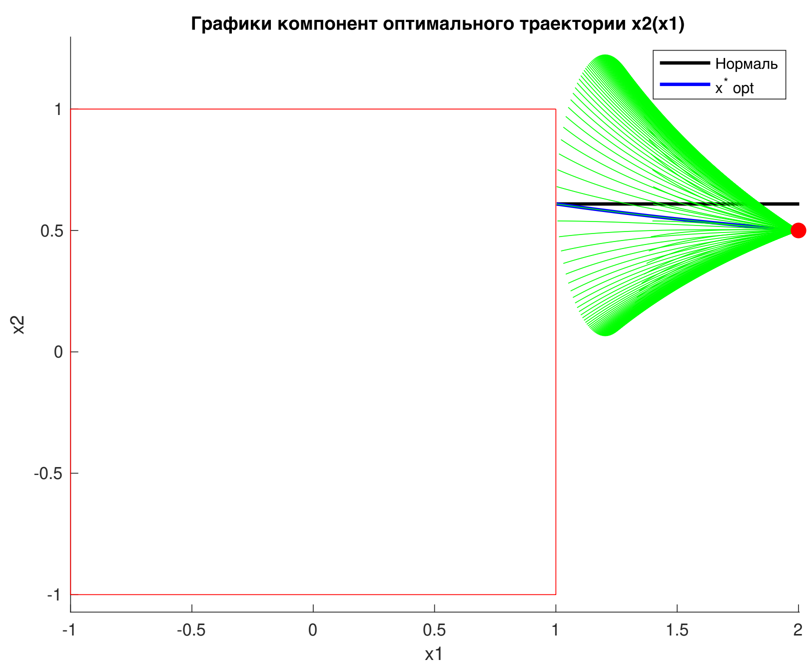


График компоненты оптимального управления u2(t)
u2(t)
u2(t)
t



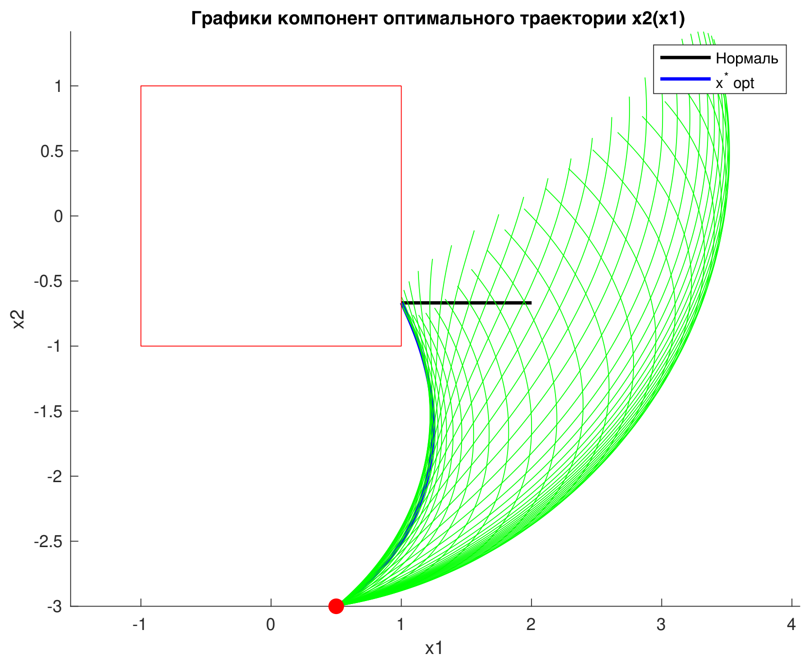
Уточнение решения:
n = 150, z = 0.0144, T=0.24381.

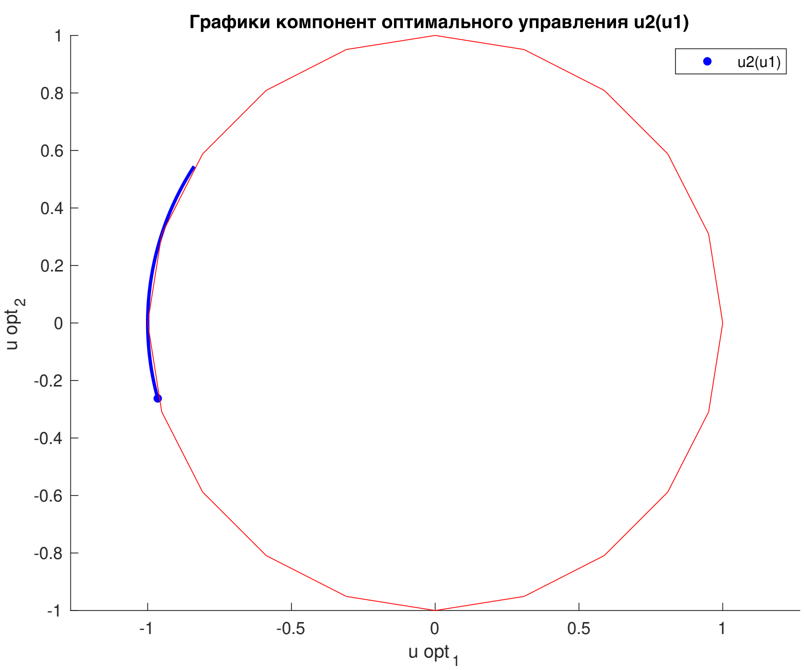


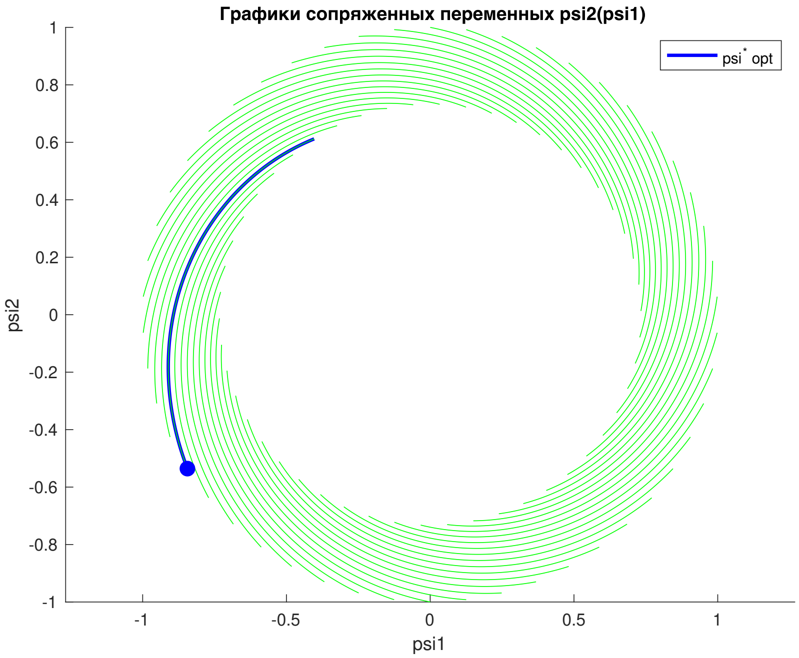
4.2 Матрица A с комплексными собственными значениями.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$t_0 = 0$, $n = 50$, n - количество точек в равномерной сетке по единичной окружности $||\psi(t_0)||$, $a = b = \alpha = \beta = q = 1$, $p_1 = p_2 = k = m = 0$.
Результат расчета: z=0.2714, T=0.3216.






Графики сопряженных переменных psi2(psi1)
psi* opt
psi2
psi1

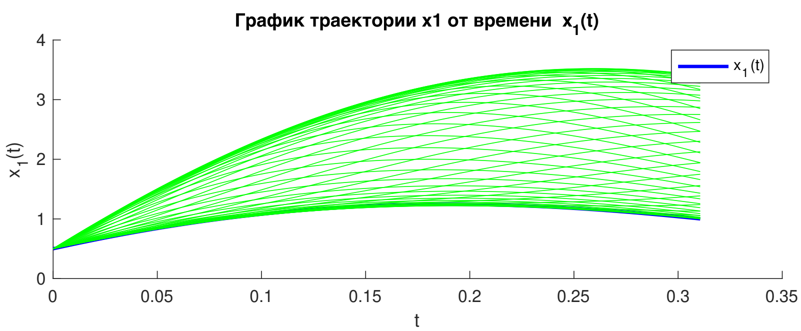


График траектории x1 от времени $x_1(t)$
$x_1(t)$
t

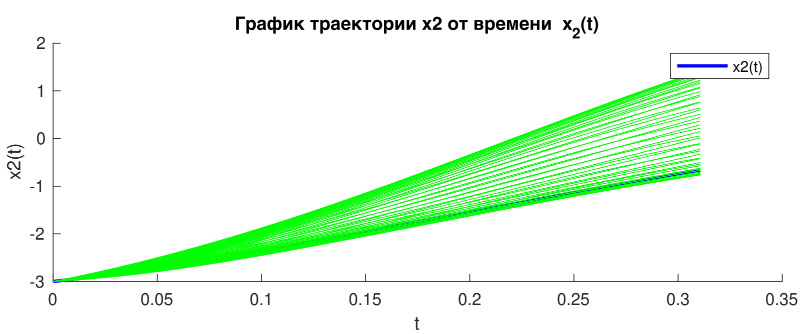
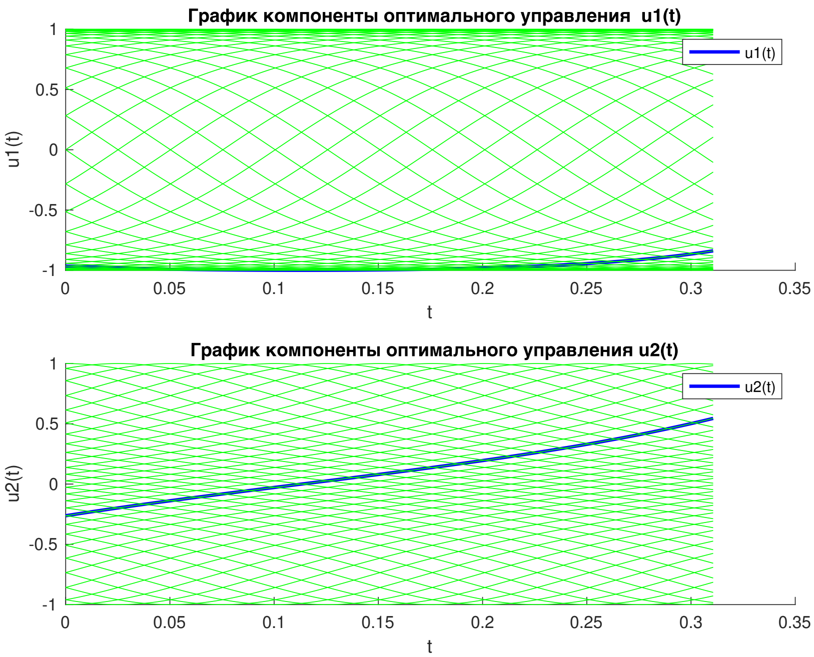
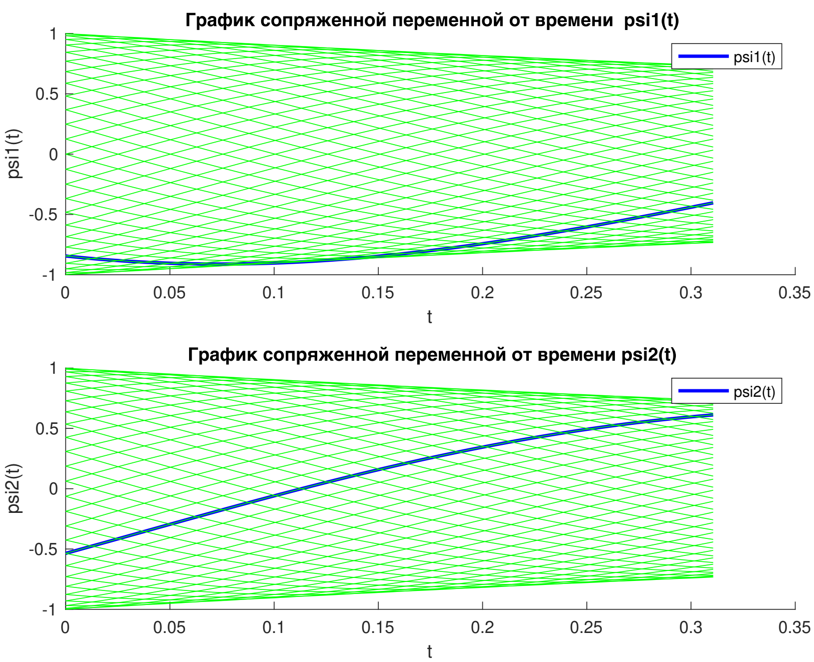


График траектории x2 от времени $x_2(t)$
x2(t)
t

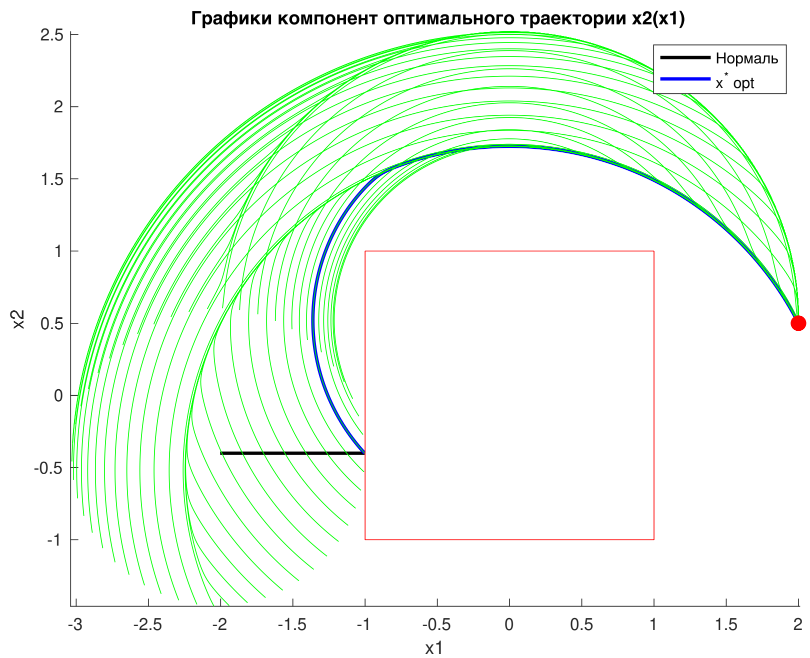


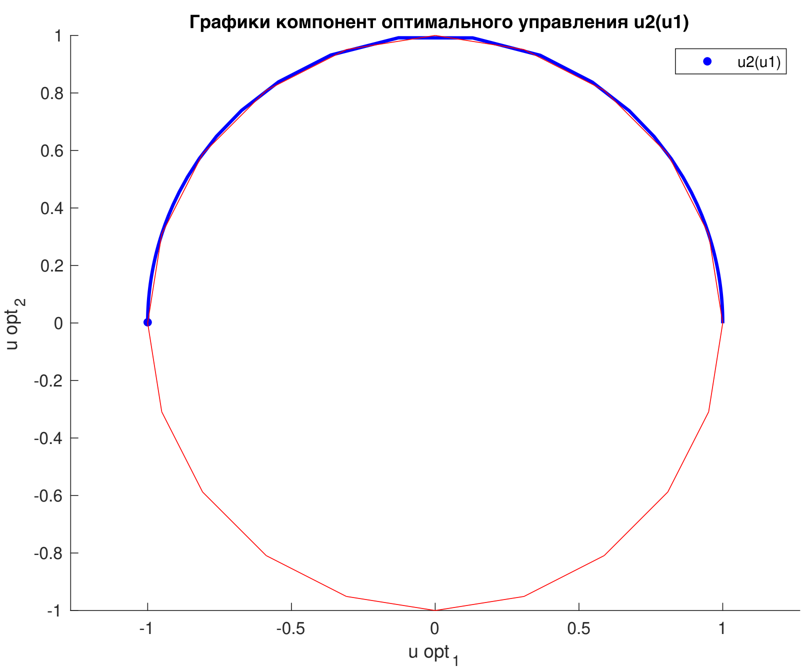


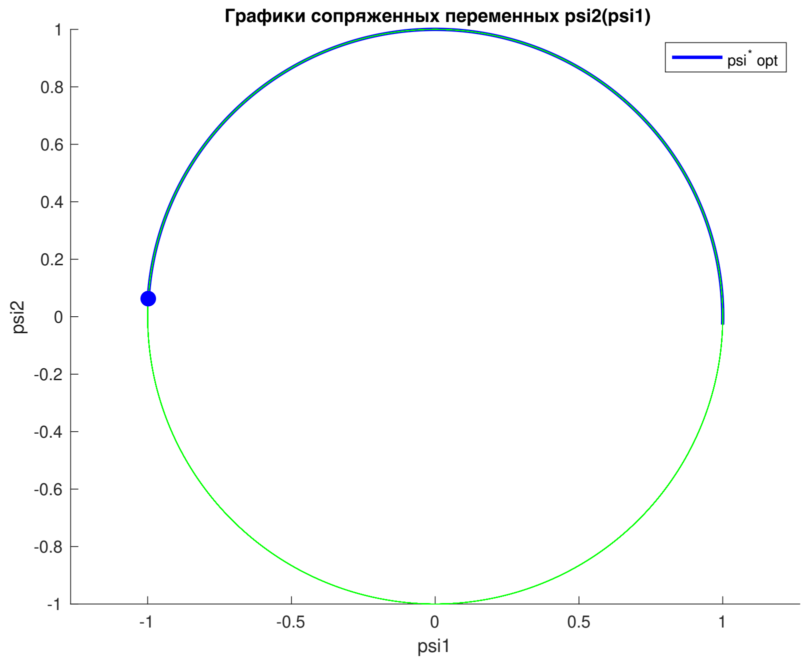
4.3 Случай вырожденного управления rg(B)=1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$t_0 = 0$, $n = 50$, n - количество точек в равномерной сетке по единичной окружности $||\psi(t_0)||$, $a = b = \alpha = \beta = q = 1$, $p_1 = p_2 = k = m = 0$.
Результат расчета: z=0.2714, T=0.3216.






Графики сопряженных переменных psi2(psi1)
psi* opt
psi2
psi1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

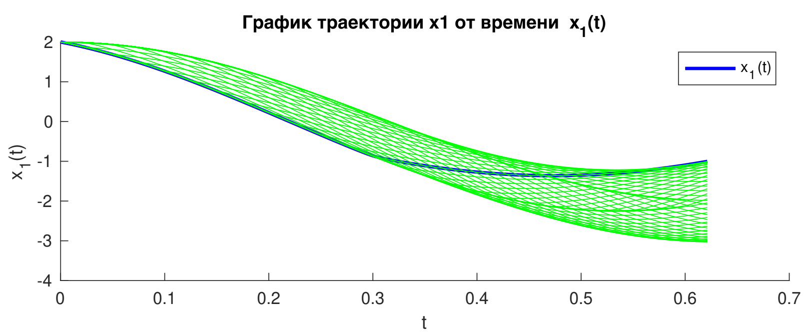


График траектории x1 от времени $x_1(t)$
$x_1(t)$
$x_1(t)$
t
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

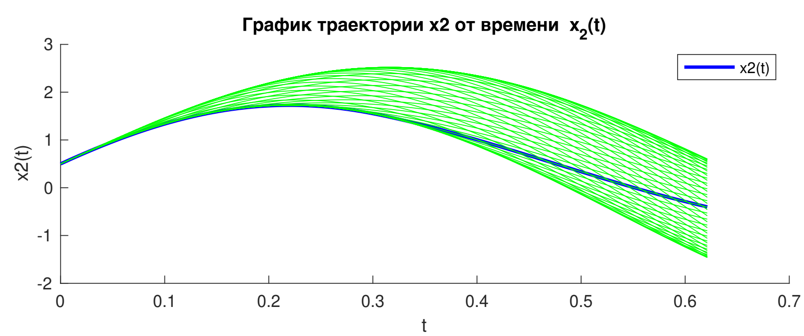
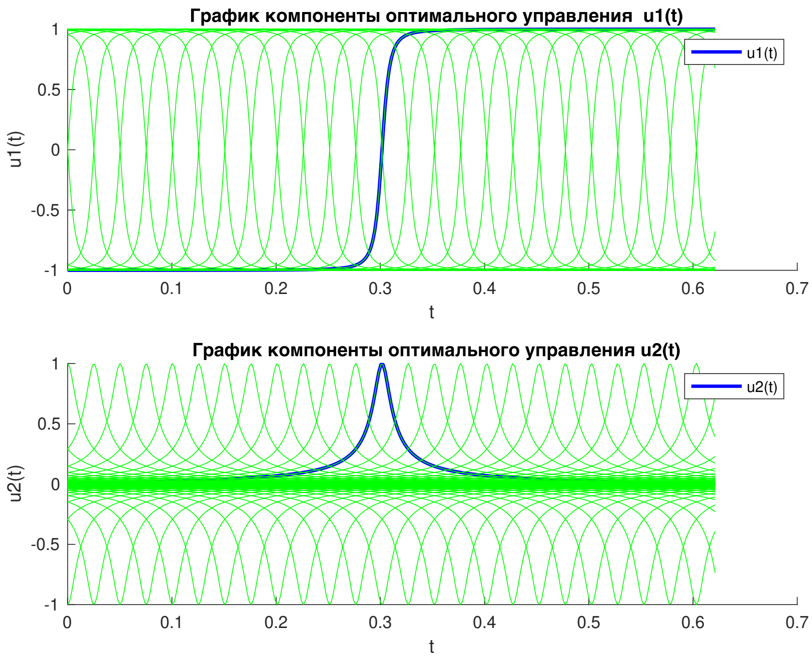
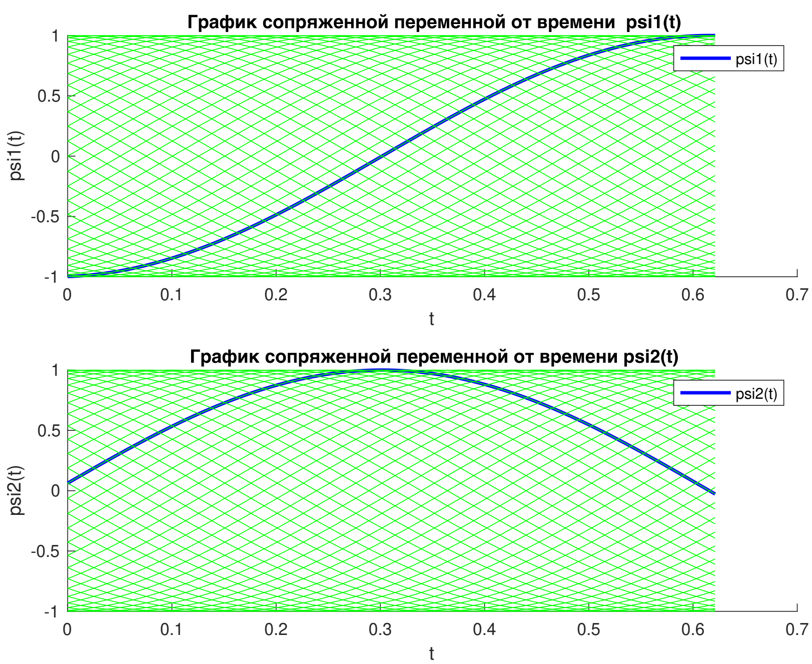


График траектории x2 от времени $x_2(t)$
x2(t)
x2(t)
t
3
2
1
0
-1
-2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

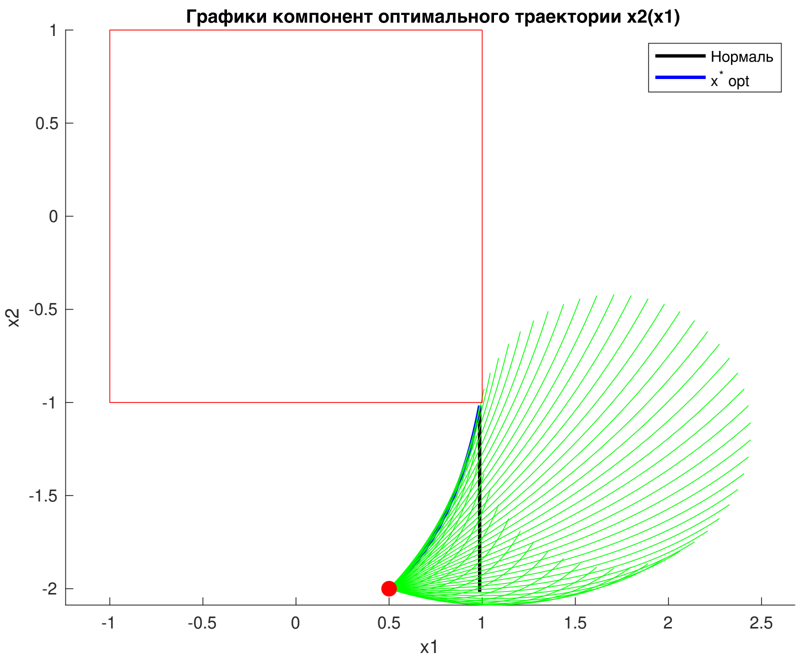




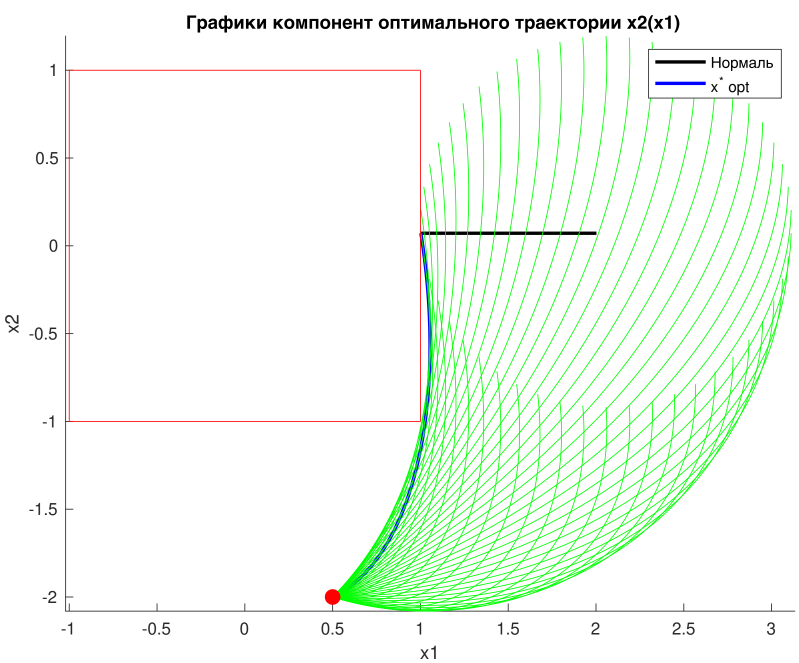
4.4 Разрывность T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.5 & 0 \\ 0 & 5.5 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$t_0 = 0$, $n = 50$, n - количество точек в равномерной сетке по единичной окружности $||\psi(t_0)||$, $a = b = \alpha = \beta = q = 1$, $p_1 = p_2 = k = m = 0$.
T = 0.1481



Немного изменим параметы: α=1.01, β=1.01, тогда T=0.2918.



Получили, что если изменить сторону квадрата на 0.01, то время увеличивается разрывно.

5 Библиография.

Список литературы

[1] Комаров Юрий, лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, Москва, 2nd edition, 2020.