Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Задача управления ракетой»

Студент 315 группы
М. М. Савинов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Движение ракеты в вертикальной плоскости над поверхности планеты описывается дифференциальнными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm + lu \\ \dot{m} = -u \end{cases}$$

Здесь $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, m — ее переменная масса, $g > 0$ — гравитационная постоянная, $l > 0$ — коэффициент, определяющий силу, действующую на ракету со стороны сгорающего топлива, $u \in [0, u_{max}]$ — скорость подачи топлива ($u_{max} > 0$). Кроме того, известна масса корпуса ракеты без топлива $M > 0$.
Необходимо решить две задачи оптимального управления.

Задача 1. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, а также начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Необходимо за счет выбора программного управления$u(t)$ перевести ракету на максимальную возможную высоту в заданный момент времени $T > 0$. Кроме того, необходимо, чтобы $v(T) \in [\varepsilon, \varepsilon]$.

Задача 2. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, а также начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Необходимо за счет выбора программного управления $u(t)$ перевести ракету на заданную высоту $H > 0$ в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы при этом минимизировать функционал

$$J = \int_0^T (u^4(t) + \alpha u(t))dt, \ \alpha > 0.$$

Замечание 1. Ракета в начальный момент времени находится на поверхности Земли и двигаться под землю не способна.

Замечание 2. В каждый момент времени масса ракеты с топливом m не должна быть меньше массы ракеты без топлива M.

Замечание 3(не из условия). Из физических соображений будем полагать, что $l > \varepsilon$.

В случае, если топливо заканчивается, двигатель ракеты отключается.

Необходимо написать программу которая по заданным параметрам T, M, m_0, u_{max}, $l, g, H, \varepsilon, \alpha$ определяет, разрешима ли задача оптимального управления. Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.

В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решени задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения(кроме ПМП), указанные в отчете, должны быть доказаны. В отчете должны быть приведены примеры оптимальных траекторий для всех возможных качественно различных «режимов».

2 Теоретические выкладки

2.1 Принцип максимума Понтрягина

Пусть задана задача оптимального управления.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)), \\ u(t) \in \mathcal{P}, \\ f = (f^1, \dots, f^n). \end{cases}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. В качестве $\mathcal{P}$ можно рассматривать, например, $\mathcal{P} \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^m$, $u(\cdot)$ — измерима. Заданы начальные и конечные гладкие многообразия $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$.

Требуется найти допустимое управление $u(t)$, которое переводит фазовую точку из некоторого положения (ранее не заданного) $x^0 \in \mathcal{X}_0$, в некоторое положение $x^1 \in \mathcal{X}_1$, и при этом придает функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt$$

минимальное значение. Пусть $t_0 = 0$ — фиксированно, $t_1 = T$ — тоже фиксированно(программно задается).

Пусть $x^0 \in \mathcal{X}_0$, $x^1 \in \mathcal{X}_1$ некоторые точки, а T_0 и T_1 — касательные гиперплоскости многообразий $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ в данных точках.
Введем новую переменную

$$x_0(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} f^0(x(t), u(t))dt.$$

тогда переобозначим

$$\tilde{f} = (f^0, f^1, \dots, f^n)'$$
$$\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)'$$

и приведем систему к виду $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x(t), u(t))$ и добавим к краевым условиям $x_0(t_0) = 0$.

Сопряженными переменными будем называть $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)' = (\psi_0, \psi)'$.

$\mathscr{H}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = \langle \tilde{\psi}, \tilde{f}(x, u) \rangle$ — называется функцией Гамильтона–Понтрягина. Будем обозначать $\mathscr{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) = \sup\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \mathscr{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t))$.

Теорема 1 *(Принцип максимума Понтрягина.) Пусть $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ — оптимальная пара на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда существует $\tilde{\psi}^*(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что:*

(УН) $\tilde{\psi}^*(\cdot) \not\equiv 0$ $(\Leftrightarrow \tilde{\psi}^*(t) \neq 0,$ *для п.в.* $t \in [t_0, t_1]$*);*

(СС)

$$\dot{\tilde{\psi}}^* = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \tilde{x}}, \ \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1];$$

(УМ) $\mathscr{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) = \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) = \sup\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{P}} \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u(t)),$ *для п.в.* $t \in [t_0, t_1]$;

(Усл4.1) $\psi_0^* \equiv \text{const} \leqslant 0$;

(Усл4.2) $\mathscr{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) \equiv \text{const}$;

(УТ)

$$\begin{cases} \psi^*(t_0) \perp T_{x^*(t_0)}\mathcal{X}_0; \\ \psi^*(t_1) \perp T_{x^*(t_1)}\mathcal{X}_1. \end{cases}$$

Доказательство можно найти в [1].

3 Решение первой задачи

3.1 Случай когда закончилось топливо

3.1.1 Переформулировка условия

Приведем исходную систему

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm + lu \\ \dot{m} = -u \end{cases}$$

к виду $\dot{x} = f(x(t), u(t)),\ x = (v, m)$. Для этого подставим в первом уравнении системы вычтем из обеих частей $\dot{m}v$, вместо $\dot{m}$ подставим $-u$ и поделим на $m \geqslant M > 0$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\left(\frac{v+l}{m}\right); \\ \dot{m} = -u. \end{cases} \tag{1}$$

Будем трактовать **замечание 2** следующим образом: так как m не возрастает, то может наступить такой момент, когда $m = M$ и тогда двигатель отключается ($\Leftrightarrow u \equiv 0$). Введем новый параметр t_p который будет обозначать время момента окончания топлива. Запишем систему на отрезке времени $[t_p, T]$.

$$\begin{cases} \dot{v} = -g; \\ \dot{m} = 0. \end{cases}$$

Проинтегрировав систему получаем, что на $[t_p, T]$ верно $m = M,\ v(t) = v_p - g(t - t_p)$, v_p — скорость в момент отключения двигателя. Тогда с учетом того, что $v(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ получаем, что $v_p \in [-\varepsilon + g(T - t_p), \varepsilon + g(T - t_p)]$.

Пусть $v(t)$ — скорость объекта, тогда расстояние который прошел объект с момента времени t_0 до момента времени t выражается следующим образом:

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau.$$

Запишем пройденное расстояние в момент времени T:

$$H(T) = \int_{t_0}^{t_p} v(\tau)d\tau + \int_{t_p}^{T} v_p - g(\tau - t_p)d\tau = \int_{t_0}^{t_p} v(\tau)d\tau + v_p(T-t_p) - g\frac{(T-t_p)^2}{2} + gt_p(T-t_p).$$

распишем v_p:

$$v_p = \{v(t_0) = 0\} = \int_{t_0}^{t_p} \dot{v}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_p} -g + u\frac{l+v}{m}d\tau = \int_{t_0}^{t_p} u\frac{l+v}{m}d\tau - g(t_p - t_0).$$

Получаем итоговое выражение для $H(T)$:

$$H(T) = \int_{t_0}^{t_p} v(\tau) + (T-t_p)u\frac{l+v(\tau)}{m(\tau)}d\tau - g(t_p-t_0)(T-t_p) - g\frac{(T-t_p)^2}{2} + gt_p(T-t_p).$$

По условию задачи необходимо максимизировать $H(T)$, что эквивалентно минимизации $-H(T)$. Так как t_p и T фиксированны, то их в минимизации можно не учитывать. Запишем итоговый функционал J, который будем минимизировать:

$$J = \int_{t_0}^{t_p} -v(\tau) - (T-t_p)u\frac{l+v(\tau)}{m(\tau)}d\tau.$$

получим переформулированную задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\left(\frac{v+l}{m}\right); \\ \dot{m} = -u. \\ J \to \min \\ \mathcal{X}_0 = \{v(0) = 0, m(0) = m_0\} \to \mathcal{X}_1(t_p) = \{m = M, v_p \in [-\varepsilon + g(T-t_p), \varepsilon + g(T-t_p)]\} \\ u \in [0, u_{max}] = \mathcal{P} \end{cases}$$

t_p будем перебирать от t_0 до T.

3.1.2 Применение ПМП

Функиця Гамильтона–Понтрягина принимает вид:

$$\mathscr{H}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = -\psi_0\left(v + (T-t_p)u\frac{v+l}{m}\right) + \psi_1\left(-g + u\left(\frac{v+l}{m}\right)\right) - \psi_2 u, \qquad (2)$$

здесь $\tilde{x} = (x_0, v, m)$. Сопряженная система*(СС)* принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = \psi_0(1 + (T-t_p)\frac{u}{m}) - \psi_1\frac{u}{m}; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_0(T-t_p)u\frac{v+l}{m^2} + \psi_1 u\frac{v+l}{m^2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Запишем условия *(УТ)* транверсальности:

$$\begin{cases} v(t_p) = \varepsilon + g(T-t_p), & \text{при } \psi_1(t_p) > 0; \\ v(t_p) = -\varepsilon + g(T-t_p), & \text{при } \psi_1(t_p) < 0; \\ v(t_p) = [-\varepsilon, \varepsilon] + g(T-t_p), & \text{при } \psi_1(t_p) = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

это значит, что возможны два случая: $|v(t_p) - g(T - t_p)| = \varepsilon$ или $\psi_1(t_p) = 0$.

$$\begin{cases} m(t_p) = m_0, & \text{при } \psi_2(t_p) > 0; \text{ не реализуется} \\ m(t_p) = M, & \text{при } \psi_2(t_p) < 0; \\ m(t_p) = [M, m_0], & \text{при } \psi_2(t_p) = 0 \text{ Реализация в следующем пункте.} \end{cases} \tag{5}$$

$\Rightarrow$ значит, что $\psi_2(t_p) < 0$.

В случае попадания на угол $(v, m) = (+\epsilon, M)$ получаем $\psi_1(t_p) \geqslant 0, \psi_2(t_p) \leqslant 0$.

В случае попадания на угол $(v, m) = (-\epsilon, M)$ получаем $\psi_1(t_p) \leqslant 0, \psi_2(t_p) \leqslant 0$.

Воспользуемся условием максимума(УМ) и тем, что гамильтониан линеен по u, максимизатор легко выписывается:

$$\begin{cases} u = u_{max}, & \text{при } -\psi_0(T - t_p)\frac{v+l}{m} + \psi_1\frac{v+l}{m} - \psi_2 > 0; \\ u = 0, & \text{при } -\psi_0(T - t_p)\frac{v+l}{m} + \psi_1\frac{v+l}{m} - \psi_2 < 0; \\ u = [0, u_{max}], & \text{при } -\psi_0(T - t_p)\frac{v+l}{m} + \psi_1\frac{v+l}{m} - \psi_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Условие возникновения ОР:

$$-\psi_0(T - t_p)\frac{v + l}{m} + \psi_1\frac{v + l}{m} - \psi_2 = 0. \tag{7}$$

3.1.3 Особый режим

При (7) управление выбирается неоднозначно. Найдем условия при которых особый режим будет длиться существенное время. Возьмем производную по t, приравняем нулю, далее воспользуемся выражениями для $\psi_0 = \psi_0^c = \text{const}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{v}, \dot{m}$, получим:

$$-\psi_0^c(T - t_p)\frac{\dot{v}m - (v + l)\dot{m}}{m^2} + \dot{\psi}_1\frac{v + l}{m} + \psi_1\frac{\dot{v}m - (v + l)\dot{m}}{m^2} - \dot{\psi}_2 = 0.$$

Для удобства записи и чтения, сначала запишем слагаемые в которых присутствует множитель ψ_0^c:

$$-\psi_0^c(T - t_p)\frac{-gm + u(v + l) + (v + l)u}{m^2} + \psi_0^c(1 + (T - t_p)\frac{u}{m})\frac{v + l}{m} + \psi_0^c(T - t_p)u\frac{v + l}{m^2} =$$
$$= \{\psi_0^c(T - t_p)u\frac{v + l}{m^2} \text{ сокращаются}\} = \psi_0^c(T - t_p)\frac{g}{m} + \psi_0^c\frac{v + l}{m}.$$

Запишем слагаемые без множителя ψ_0^c:

$$-\psi_1\frac{u}{m}\frac{v + l}{m} + \psi_1\frac{-gm + u(v + l) + (v + l)u}{m^2} - \psi_1 u\frac{v + l}{m^2} =$$
$$= \{\psi_1 u\frac{v + l}{m^2} \text{ сокращаются}\} = -\psi_1\frac{g}{m}.$$

Итого получаем:

$$\psi_0^c(T - t_p)\frac{g}{m} + \psi_0^c\frac{v + l}{m} - \psi_1\frac{g}{m} = \{m \geqslant M > 0\} = \psi_0^c(T - t_p)g + \psi_0^c(v + l) - \psi_1 g = 0.$$

Объединяя с условием возникновения особого режима получаем систему, которая описывает кривую возникновения ОР на существенном промежутке времени:

$$\begin{cases} -\psi_0^c(T - t_p)(v + l) + \psi_1(v + l) - \psi_2 m = 0; \\ \psi_0^c(T - t_p)g + \psi_0^c(v + l) - \psi_1 g = 0. \end{cases} \tag{7a}$$

3.1.4 Случай $\psi_0 = -1$

Так как $\tilde{\psi}$ выбирается с точностью до множетиля, то положим $\psi_0^c = -1$, случай $\psi_0^c = 0$ будет рассмотрен в следующих пунктах.

Проведем дополнительный анализ особого режима.

Анализ ОР. Пусть особый режим все таки есть. Тогда выполнено (7)

$$\psi_0(T - t_p)\frac{v+l}{m} + \psi_1\frac{v+l}{m} - \psi_2 = 0.$$

Подставим это в гамильтониан и воспользуемся *(Усл4.1)* $\mathscr{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) \equiv \mathrm{const}$. Получаем, что выполнено равенство:

$$-\psi_0 v - g\psi_1 = \mathrm{const} \Rightarrow v = g\psi_1 + \mathrm{const}. \tag{8}$$

Подставим v во второе уравнение (7a), получаем, что $v \equiv \mathrm{const} = v^c, \psi_1 \equiv \mathrm{const}$. Так как $v = \mathrm{const} \Rightarrow \dot{v} = 0$. Используя (1), получим

$$\dot{v} = 0 = -g = u\frac{v^c + l}{m} \Rightarrow u(t) = \frac{gm(t)}{v^c + l}. \tag{8a}$$

Используя (7a), запишем:

$$-(T - t_p)g - (v + l) - \psi_1^c g = 0 \Rightarrow \psi_1^c g = -(T - t_p)g - (v + l) \Rightarrow \psi_1^c < 0. \tag{8b}$$

Анализ управления в окрестности t_0. Покажем, что $v(t)$ на $t \in [0, \delta]$ не убывает. Воспользуемся **замечанием 1** и $v(0) = 0, H(0) = 0$. Чтобы ракета не ушла под землю необходимо

$$H(t) \geqslant 0 \Rightarrow v(t) \geqslant 0 \Rightarrow \dot{v}(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, \delta]. \tag{9}$$

Так же заметим, что из (1) и (9) следует:

$$\dot{v} = -g + u\left(\frac{v+l}{m}\right) \geqslant 0 \Rightarrow u\left(\frac{v+l}{m}\right) \geqslant g \Rightarrow u > 0. \tag{10}$$

После этого мы знаем, что в самом начале(в окрестности t_0) $u \not\equiv 0$.

Разбор случаев. Сопряженная система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = -(1 + (T - t_p)\frac{u}{m}) - \psi_1\frac{u}{m}; \\ \dot{\psi}_2 = (T - t_p)u\frac{v+l}{m^2} + \psi_1 u\frac{v+l}{m^2}. \end{cases} \tag{11}$$

Введем непрерывную функцию:

$$G(t) = (T - t_p)\frac{v(t)+l}{m(t)} + \psi_1\frac{v(t)+l}{m(t)} - \psi_2(t) \tag{12}$$

Знак этой функции определяет текущее управление.

Еще можно заметить, используя (1), что если есть такое $\tau : v(\tau) < -l$, то для любых $t > \tau \Rightarrow v(t) < -l$, а так как $l > \epsilon$ (**Замечание 3**)$\Rightarrow$ всегда верно : $v(t) > -l$.

- **Случай** $\psi_1(t_p) \geqslant 0$.

  Тогда т.к. $\psi_2(t_p) \leqslant 0$ (5), то $G(t_p) \geq 0$ (12).

  Из (8b), следует, что ОР не реализуется в окрестности $t_p \Rightarrow G(t_p) > 0$.

  Из выражения для $\dot{\psi}_1$(1) понятно, что если в какой-то точке $\psi_1(\tau) < 0$, то для любых $t > \tau \Rightarrow \psi_1(t) < 0$, из этого следует, что $\psi_1(t) > 0$, кроме может, быть самой точки t_p.

  Так как для любых $t : \psi_1(t) > 0$, то $\dot{\psi}_2 \geq 0$(1) и $\psi_2(t_p) \leqslant 0$(5) $\Rightarrow$ для $t \in [t_0, t_p]$ $\psi_2(t) < 0 \Rightarrow G(t) > 0$ для $t \in [t_0, t_p] \Rightarrow u \equiv u_{max} \quad t \in [t_0, t_p]$.

- **Случай** $\psi_1(t_p) < 0$. Покажем, что только один конкретный вид управления может быть оптимальным в этом случае.

  Тогда $v(t_p) = -\epsilon + g(T - t_p)$(4).

  Для начала покажем, что на каком-либо отрезке реализуется управления $u = u_{max}$. Пусть ни на каком отрезке нет управление $u = u_{max}$, тогда v может или убывать($u = 0$), или быть константой в ОР. Ясно, что реализуется только один случай $v \equiv 0$, если на $[t_0, T]$ двигаться в ОР, иначе ракета упадет под землю (**замечание 2**). Но в этом случае $v(t_p) = 0$, а в этом случае получили, что $v(t_p) = -\epsilon \neq 0 \Rightarrow$ на каком либо участке есть $u = u_{max}$.

  Рассмотрим различные подслучаи на вид управление:

  1. Пусть существует момент времени τ, что на $[\tau - \delta, \tau]$ управление $u = u^* \not\equiv u_{max}$, а на $[\tau, \tau + \delta]$ $u \equiv u_{max}$. Тогда на этих участках поменяем управление местами. Понятно, что $m(\tau + \delta)$ не изменилось. Скорость очевидно выростет в $t = \tau + \delta$, это следует из (1) и (8a). Обозначим v^* — новую скорость, $\tilde{v}$ — старую скорость в момент времени $\tau + \delta$, $v^* > \tilde{v}$. Далее попробуем понять как система будет себя вести на $[\tau + \delta, t_p]$, при неизменном управлении, рассмотрим различные режимы и покажем, что при всех скорость только возрастает после такой перестановки и высота тоже возрастает. Если $u = 0$ на $\mathcal{R}_1 \in [\tau + \delta, t_p]$, то H выраститт. Если ОР $\mathcal{R}_2 \in [\tau + \delta, t_p]$, то можно сделать вывод из (8a), что при том же управлении скорость может только расти $\Rightarrow H$ тоже вырастет. Если $u = u_{max}$, то из (1) $\Rightarrow$ скорость вырастет $\Rightarrow H$ вырастет. Можно подобрать такое δ, что $v(t_p) < \epsilon$, а $H(T)$ выраститт. Этот случай заведомо не оптимальный.
  2. Из п.1 следует, что u_{max} может быть только «слева». Пусть на $[t_0, \tau]$ выбрано управление $u = u_{max}$. На $[\tau, t_p]$ управление состоит из особых режимов и выключенного двигателя, причем в окрестности t_p находится ОР (иначе топливо не закончилось бы). Пусть есть хотя бы один момент выключенного двигателя, тогда можно сдвинуть последний ОР налево, так же как в п.1, скорость и высота увеличивается, понятно, также можно подобрать δ чтобы $v(t_p)$ попадала в нужные границы.
  3. Остается последний возможный случай, когда сначала идет $u = u_{max}$, потом ОР, потом топливо заканчивается.

3.1.5 Случай $\psi_0 = 0$

Проверка на особый режим. Запишем условия на ОР из 3.1.3 (7a):

$$\begin{cases} \psi_1(v+l) - \psi_2 m = 0; \\ \psi_1 g = 0. \end{cases}$$

решением системы является $\tilde{\psi} \equiv 0$, что противоречит ПМП(УН) $\Rightarrow$ особого режима не будет.

Запишем сопряженную систему (3):

$$\begin{cases} \psi_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_1 \frac{u}{m}; \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 u \frac{v+l}{m^2}. \end{cases} \tag{12a}$$

Введем непрерывную функцию:

$$G(t) = \psi_1 \frac{v(t)+l}{m(t)} - \psi_2(t) \tag{12b}$$

Знак этой функции определяет текущее управление. Произведем разбор случаев:

- Случай $\psi_1(t_p) = 0$, тогда $\psi_1(t) \equiv 0$(12a) $\Rightarrow \psi_2 = \text{const} \neq 0$. Получаем, что $G(t) = const > 0$, поэтому реализуется только один сценарий, $u = u_{max}$, пока топливо не закончится.

- Случай $\psi_1(t_p) > 0$. Из (12a), понятно, что $\psi_1(t) > 0$ $t \in [t_0, t_p]$. Воспользуемся (5), получим $\psi_2(t_p) \leq 0$. Из (12a) и $\psi_1(t) > 0$, понятно, что $\psi_2(t)$ всегда возрастает, поэтому $\psi_2(t) < 0$ $t \in [t_0, t_p]$. Поэтому $G(t) > 0$ $t \in [t_0, t_p]$. Значит $u = u_{max}$, пока топливо не закончилось.

- Случай $\psi_1(t_p) < 0$. Тогда из (5) вытекает $v(t_p) = -\epsilon + g(T - t_p)$. Из условия взлета понятно, что $G(t_0) > 0$. Так же как в п. 3.1.4 можно показать, что весь u_{max} находится «слева». Поэтому в этом случае рассматриваем управления $u = u_{max}$, пока не кончится топливо.

3.2 Случай когда топливо не успевает закончится

3.2.1 Формулировка условия

Запишем систему (1):

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\left(\frac{v+l}{m}\right); \\ \dot{m} = -u. \end{cases}$$

Пусть $v(t)$ — скорость объекта, тогда расстояние который прошел объект с момента времени t_0 до момента времени T выражется следующим образом:

$$H(T) = \int_{t_0}^{T} v(\tau)d\tau,$$

необходимо максимизировать $H(T)$, что эквивалентно минимизации $-J$:

$$J = -H(T) = \int_{t_0}^{T} -v(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим случай, когда топливо не успевает закончится к моменту T.

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\left(\frac{v+l}{m}\right); \\ \dot{m} = -u. \\ J \to \min \\ \mathcal{X}_0 = \{v(0) = 0, m(0) = m_0\} \to \mathcal{X}_1(T) = \{m(T) \in [M, m_0], v(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} \\ u \in [0, u_{max}] = \mathcal{P} \end{cases}$$

Функция Гамильтона–Понтрягина принимает вид:

$$\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = -\psi_0 v + \psi_1\left(-g + u\left(\frac{v+l}{m}\right)\right) - \psi_2 u, \tag{13}$$

здесь $\tilde{x} = (x_0, v, m)$.
Сопряженная система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = \psi_0 - \psi_1 \frac{u}{m}; \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 u \frac{v+l}{m^2}. \end{cases} \tag{14}$$

Запишем условия транверсальности:

$$\begin{cases} v(T) = \varepsilon, & \text{при } \psi_1(T) > 0; \\ v(T) = -\varepsilon, & \text{при } \psi_1(T) < 0; \\ v(T) = [-\varepsilon, \varepsilon], & \text{при } \psi_1(T) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} m(T) = m_0, & \text{при } \psi_2(T) > 0; \text{не реализуется} \\ m(T) = M, & \text{при } \psi_2(T) < 0; \text{не реализуется} \\ m(T) = [M, m_0], & \text{при } \psi_2(T) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Пусть $m(T) = m_0$, тогда $u \equiv 0 \Rightarrow \dot{v} = -g \Rightarrow H(T) < 0$, что противоречит с **Замечанием 1**.

Пусть $m(T) = M$, но этот случай рассматривался в случае когда топливо успевает закончится при $t_p = T$.

Воспользуемся условием максимума(УМ) и тем, что гамильтониан линеен по u, максимизатор легко выписывается:

$$\begin{cases} u = u_{max}, & \text{при } \psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 > 0; \\ u = 0, & \text{при } \psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 < 0; \\ u = [0, u_{max}], & \text{при } \psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

3.2.2 Особый режим

При $\psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 = 0$(17) управление выбирается неоднозначно. Найдем условия при которых особый режим будет длиться существенное время. Возьмем производную по t, приравняем нулю, далее воспользуемся выражениями для $\psi_0 = \psi_0^c = \text{const}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{v}, \dot{m}$, получим:

$$\dot{\psi}_1 \frac{v+l}{m} + \psi_1 \frac{\dot{v}m - (v+l)\dot{m}}{m^2} - \dot{\psi}_2 = 0$$

подставляем и получаем:

$$(\psi_0^c - \frac{\psi_1 u}{m})\frac{v+l}{m} + \psi_1 \frac{-gm + u(v+l) + (v+l)u}{m^2} - \frac{\psi_1 u(v+l)}{m^2} = 0$$

итого получаем:

$$\psi_0^c \frac{v+l}{m} - \psi_1 \frac{g}{m} = \{m \geqslant M > 0\} = \psi_0^c(v+l) - \psi_1 g = 0,$$

объединяя с условием возникновения особого режима получаем систему, которая описывает кривую возникновения ОР на существенном промежутке времени:

$$\begin{cases} \psi_1(v+l) - \psi_2 m = 0; \\ \psi_0^c(v+l) - \psi_1 g = 0. \end{cases} \tag{17a}$$

Для определенности рассмотрим сначала случай $\psi_0^c = -1$. Далее если ОР есть, то можно получить условие $-\psi_0 v - \psi_1 g = \text{const}$, *(Усл4.1)* из ПМП, из этого условия и (17a) $v = \text{const}, \psi_1 = const$. Далее можно получить из (17a) и $v(t) + l > 0 \Rightarrow \psi_1 < 0, \psi_2 < 0$. Далее из этих условий следует, что если и есть особый режим на некотором промежутке, то:

$$v \equiv \text{const},\ \psi_1 \equiv \text{const} < 0,\ \psi_2(t) < 0 \ \text{ на данном промежутке.} \tag{18}$$

При $\psi_0 = 0$, система имеет решение только $\tilde{\psi} = 0$, что противоречит с (УН) $\Rightarrow$ особого режима не будет.

3.2.3 Случай $\psi_0 = -1$.

Сопряженная система принимает вид: (14)

$$\begin{cases} \psi_0 = -1; \\ \dot{\psi}_1 = -1 - \psi_1 \frac{u}{m}; \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 u \frac{v+l}{m^2}, \end{cases} \tag{19}$$

Введем функцию

$$G(t) = \psi_1(t)\frac{v(t)+l}{m(t)} - \psi_2(t), \tag{20}$$

знак этой функции характеризует выбор управления.

Еще можно заметить, используя (1), что если есть такое $\tau : v(\tau) < -l$, то для любых $t > \tau \Rightarrow v(t) < -l$, а так как $l > \epsilon$ (**Замечание 3**)$\Rightarrow$ всегда верно : $v(t) > -l \Rightarrow v(t)+l > 0$.

Аналогично 3.1.4 доказывается, что в окрестности t_0 выбирается управление $u = u_{max}$. Это значит, что $G(t_0) > 0$. Ввиду (16) запишем $\psi_2(T) = 0$. Получаем что:

$$G(T) = \psi_1(T)\frac{v(T)+l}{m(T)}, \tag{21}$$

Далее произведем разбор случаев.

Случай $G(T) > 0$. Тогда т.к $v(T) + l > 0 \Rightarrow \psi_1(T) \geqslant 0$(20). Из выражения для $\dot{\psi}_1$ понятно(19), что если в какой-то точке $\psi_1(\tau) < 0$, то для любых $t > \tau \Rightarrow \psi_1(t) < 0$. Значит, для любых $t \in [t_0, T] : \ \psi_1(t) \geqslant 0$.

Т.к для любых $t : \psi_1(t) \geqslant 0$ и $\psi_2(T) = 0$(16), то из выражения для $\dot{\psi}_2$(19), получаем что $\dot{\psi}_2 > 0 \Rightarrow$ для любых $t \in [t_0, T]$ выполнено $\psi_2(t) \leq 0$. Теперь посмотрим на выражение $G(t)$ (20), из полученных неравенств понятно, что для любых $t : G(t) > 0$ (может быть кроме $t = T$). Значит переключений не будет и $u = u_{max}$.

Случай $G(T) \equiv 0$ **в окрестности T**. Не возможен т.к. если он и есть, то в особом режиме $\psi_2 < 0$ (18), а в нашем случае $\psi_2(T) = 0$ (16).

Случай $G(T) < 0$. Т.к $G(t)$ непрерывная функция, то по теореме о промежуточном значении непрерывной функции в какой-то точке τ верно: $G(\tau) = 0$. Возьмем последнюю такую точку τ. Получаем, что на $[\tau, T]$ выполнено: $G(t) < 0$ значит $u = 0 \ \Rightarrow \psi_2 = \text{const} = 0$. Запишем $G(\tau)$ (20):

$$G(\tau) = \psi_1(\tau)\frac{v(\tau)+l}{m(\tau)} = 0 \Rightarrow \psi_1(\tau) = 0,$$

значит, $G(\tau) \geqslant 0, \psi_2(\tau) = 0 \Rightarrow$ можно произвести рассуждения как в случае $G(T) > 0$ и получить, что $u = u_{max}$, на $[t_0, \tau]$ и $u = 0$ на $[\tau, T]$.

Вывод. Все управления или $u \equiv u_{max}$, или задаются максимум одним параметром τ — момент прекращения подачи топлива.

3.2.4 Случай $\psi_0 = 0$.

Сопряженная система принимает вид (14):

$$\begin{cases} \psi_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_1 \frac{u}{m}; \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 u \frac{v+l}{m^2}. \end{cases}$$

Сделаем разбор случаев.

Случай $G(T) > 0$. Полностью повторяет аналогичный случай из предыдущего пункта.

Случай $G(T) = 0$. Невозможен в силу отсутствия ОР, доказывалось в 3.2.2.

Случай $G(T) < 0$. Получаем, $\psi_1(T) < 0$, т.к. $v + l > 0$, и (20). Но $\psi_1(t)$ сохраняет знак, значит $G(t) < 0$ для всех $t \in [t_0, T]$. Что противоречит с условием $G(t_0) \geq 0$.

Вывод. Все управления в этом случае это одно управление $u = u_{max}$.

3.3 Анализ алгоритма решения.

Так как во всех случаях получилось, что управление принимает вид:

$$\begin{cases} u = u_{max}; \quad t \in [t_0, \tau_1], \\ u = \frac{gm(t)}{v^c + l}; \quad t \in [\tau_1, \tau_2], \\ u = 0; \quad t \in [\tau_2, T]. \end{cases}$$

где τ_2 означает или момент вынужденной остановки, или момент окончания топлива. То есть $\tau >_2 t_0, \tau_2 < T, \tau_2 < \frac{m_0 - M}{u_{max}}$. А τ_1 момент начала особого режима, управление в нем находится по формулам (8a).

Будем решать задачу численно перебором по τ_1,τ_2 и смотреть какой кандидат на ОУ достиг наибольшей высоты. Для каждого τ_1,τ_2 необходимо численно решить одну задачу Коши(ode45 matlab) для $\dot{v}, \dot{m}$. Уточнение решения возможно при итеративном уменьшении отрезка для τ_1, τ_2.

4 Решение второй задачи

4.1 Формулировка условия

Запишем систему:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\left(\frac{v+l}{m}\right); \\ \dot{m} = -u. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $v(t)$ — скорость объекта, тогда расстояние который прошел объект с момента времени t_0 до момента времени T выражается следующим образом:

$$h(T) = \int_{t_0}^{T} v(\tau) d\tau.$$

Необходимо минимизировать J:

$$J = \int_0^T (u^4(t) + \alpha u(t))dt, \ \alpha > 0.$$

Введем новую переменную высота - $h(t)$, из физических соображений получаем, что $\dot{h} = v$. Необходимо, чтобы $h(t) = H$, H — задана по условию. Запишем задачу ОУ:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + u\left(\frac{v+l}{m}\right); \\ \dot{m} = -u. \\ \dot{h} = v. \\ J \to \min \\ \mathcal{X}_0 = \{v(0) = 0, m(0) = m_0, h(0) = 0\} \to \mathcal{X}_1(T) = \{v(T) \in \mathbb{R}, \ m(T) \in [M, m_0], \ h(T) = H\} \\ u \in [0, u_{max}] = \mathcal{P} \end{cases}$$

Функция Гамильтона–Понтрягина принимает вид:

$$\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = \psi_0(u^4 + \alpha u) + \psi_1\left(-g + u\left(\frac{v+l}{m}\right)\right) - \psi_2 u + \psi_3 v, \tag{2}$$

здесь $\tilde{x} = (x_0, v, m, h)$.

Сопряженная система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_1 \frac{u}{m} - \psi_3; \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 u \frac{v+l}{m^2}; \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Запишем условия транверсальности:

$$\begin{cases} m(T) = m_0, & \text{при } \psi_2(T) > 0; \text{не реализуется} \\ m(T) = M, & \text{при } \psi_2(T) < 0; \\ m(T) = [M, m_0], & \text{при } \psi_2(T) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $m(T) = m_0$, тогда $u \equiv 0 \Rightarrow \dot{v} = -g \Rightarrow H(T) < 0$, что противоречит с **Замечанием 1**.

Так как $v(t)$ не может «улететь» в бесконечность, то выполняется условие:

$$\psi_1(T) = 0. \tag{5}$$

4.2 Случай $\psi_0 = -1$.

Воспользуемся условием максимума(УМ). Необходимо, чтобы управление максимизировало функцию Г–П:

$$\psi_0(u^4 + \alpha u) + \psi_1 u \frac{v+l}{m} - \psi_2 u \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{P}}. \tag{6}$$

возьмем производную по u и приравняем нулю:

$$\psi_0(4u^3 + \alpha) + \psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 = 0,$$

откуда получаем:

$$u^3 = \frac{-\alpha\psi_0^c - \psi_1(t)\frac{v+l}{m} + \psi_2(t)}{4\psi_0^c} = G(t), \tag{7}$$

откуда u однозначно выражается и максимизирует функцию Г–П. Имея по условию ограничения на u получаем итоговое выражение на управление:

$$\begin{cases} u = u_{max}, & \text{при } G(t) > u_{max}^3,\ m > M; \\ u = 0, & \text{при } G(t) < 0,\ m = M; \\ u = \sqrt[3]{G(t)}, & \text{при } u_{max}^3 > G(t) > 0,\ m > M. \end{cases} \tag{8}$$

Так же как и в пункте 3, можно показать, что в окрестности t_0 : $u(t) > 0 \Rightarrow G(t) > 0$.

Пусть топливо не успело закончится(а). Тогда $m > M \Rightarrow \psi_2(T) = 0$,(4) $\psi_1(T) = 0$(5). Получаем из (7): $G(T) = \frac{-\alpha}{4} < 0 \Rightarrow u(T) = 0$. Тогда, рассмотрим случаи по ψ_3:

1. $\psi_3 = \psi_3^c < 0$. Понятно, что если есть такое τ :$\psi_1(\tau) > 0$, то для всех $t > \tau$: $\psi_1(\tau) > 0$, использовали (3). Поэтому $\psi_1(t) \leq 0$ для $t \in [t_0, T]$. Значит, ψ_2(3) всегда убывает $\Rightarrow$ $\psi_2(t) \geq 0$ для всех t. Но тогда получаем, что $G(t_0) < 0$(7) — этот случай не реализуется.

2. $\psi_3 = \psi_3^c = 0$. Получаем из (3), что $\psi_1 \equiv 0, \psi_2 \equiv 0 \Rightarrow G(t_0) < 0$ — этот случай не реализуется.

3. $\psi_3 = \psi_3^c > 0$. Такими же рассуждениями как в пункте а.1 получаем, что $\psi_1(t) > 0, \psi_2(t) < 0,\ t \in [t_0, T]$. Понятно, что $G(t)$ убывает, сценарий движения будет $u = u_{max} \to u = \sqrt[3]{G(\psi)} \to u = 0$ или $u = \sqrt[3]{G(\psi)} \to u = 0$.

Пусть топливо успело закончится(б). Обозначим время окончания топлива $t_0 < t_p < T$. Понятно, что $m(t) = M,\ t \in [t_p, T]$. Выполнено условие взлета $G(t_0) > 0$. И (УТ): $\psi_1(T) = 0$(5) , $\psi_2(T) < 0$(4). Тогда, рассмотрим случаи по ψ_3:

1. $\psi_3 = \psi_3^c < 0$. Понятно, что если есть такое τ :$\psi_1(\tau) > 0$, то для всех $t > \tau$: $\psi_1(\tau) > 0$, использовали (3). Поэтому $\psi_1(t) \leq 0$ для $t \in [t_0, T]$. Из того, что $G(t_0) > 0 \Rightarrow \psi_2^c < 0$.

2. $\psi_3 = \psi_3^c = 0$. Получаем из (3) и (5), что $\psi_1 \equiv 0 \Rightarrow \psi_2 = \text{const} \Rightarrow u = \text{const} \in [0, u_{max}]$(до тех пор пока не кончиться топливо). Надо перебрать все константные допустимые управления.

3. $\psi_3 = \psi_3^c > 0$. Такими же рассуждениями как в пункте (а.3) получаем, что $\psi_1(t) > 0, \psi_2(t) < 0,\ t \in [t_0, t_p]$. Реализуются те же сценарии.

4.3 Случай $\psi_0 = 0$.

Функция Гамильтона–Понтрягина принимает вид:

$$\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = \psi_1 \left(-g + u \left(\frac{v+l}{m} \right) \right) - \psi_2 u + \psi_3 v,$$

здесь $\tilde{x} = (x_0, v, m, h)$.

Сопряженная система принимает вид:

$$\begin{cases} \psi_0 = 0; \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_1 \frac{u}{m} - \psi_3; \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 u \frac{v+l}{m^2}; \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases}$$

Управление принимает вид:

$$\begin{cases} u = u_{max}, & \text{при } \psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 > 0; \\ u = 0, & \text{при } \psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 < 0; \\ u = [0, u_{max}], & \text{при } \psi_1 \frac{v+l}{m} - \psi_2 = 0. \end{cases}$$

Если переобозначить ψ_3 на ψ_0, то в точности получаем случаи из **Задачи 1.**(если $\psi_3 > 0$). Если же $\psi_3 < 0$, то т.к $\tilde{\psi}$ выбирается с точностью до константы, то умножаем на -1, и получаем задачу 1. Поэтому управление принимает вид:

$$\begin{cases} u = u_{max}; \quad t \in [t_0, \tau_1], \\ u = \frac{gm(t)}{v^c + l}; \quad t \in [\tau_1, \tau_2], \\ u = 0; \quad t \in [\tau_2, T]. \end{cases}$$

, где τ_1, τ_2 переборные параметры.

4.4 Анализ решения.

Пусть $\tilde{H}$ — решение задачи 1, если $\tilde{H} \geqslant H$. Тогда задача 2 очевидно разрешима, а если $\tilde{H} \leqslant H$, то задача не разрешима.

Пусть ψ_0^c, ψ_1^c, ψ_2^c, ψ_3^c начальные значения сопряженных параметров лежащих на единичной сфере. Из анализа получены следующие ограничения на начальные параметры:

1. Из ПМП (Усл4.1) $\Rightarrow \psi_0^c < 0$.

2. Из анализа в п. 4.2 $\Rightarrow \psi_2^c < 0$.

3. Из анализа в п. 4.2 $\Rightarrow \psi_3^c \psi_1^c > 0$.

4. Условие взлета: $u(t_0) \frac{l}{m_0} \geq g$

Для каждого набора начальных параметров решается численно система (ode45 matlab).

Отдельно рассматривается случаи константных управлений и управления из п 4.3. Из всех таких кандидатов выбирается выбирается сначала такие $|H'(T) - H(T)| < H_{eps}$, где $H'(T)$ — численно полученная высота. Далее среди таких кандидатов, выбираем такие которые минимизируют функционал J.

5 Различные примеры выполнения программ

5.1 Примеры выполнения первой программы

Случай когда топливо не успевает закончится.

Начальные параметры: $T = 1,\ g = 1,\ u_{max} = 3,\ m_0 = 2,\ M = 1,\ \epsilon = 0.1,\ l = 2.$ Момент выключения двигателя $\tau = 0.2462$, максимальная высота $H_{max} = 0.4455$.

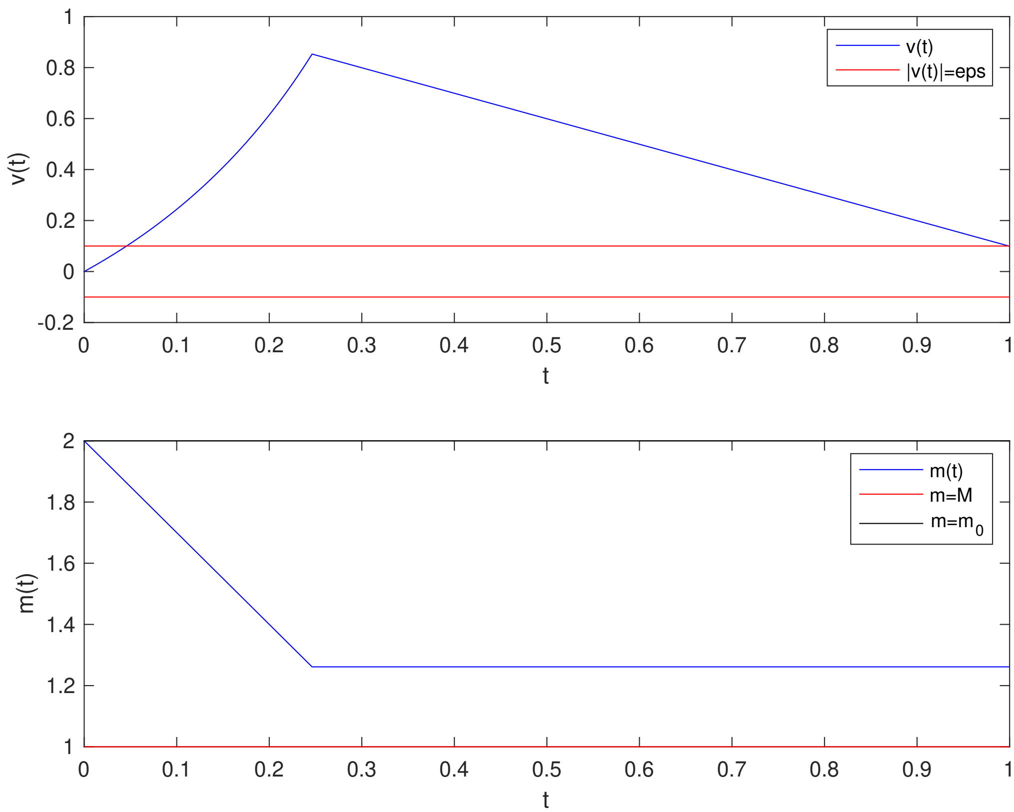

Рис. 1: Зависимость скорости и массы от времени при оптимальном управлении.

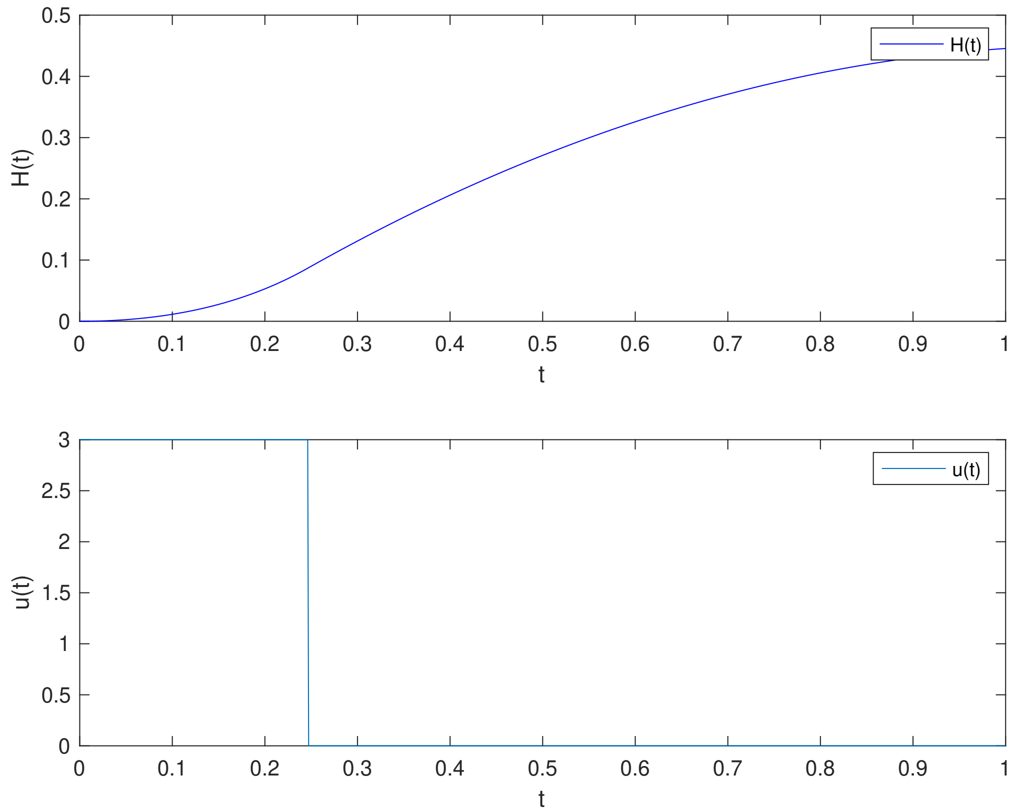

Рис. 2: Зависимоть управления и высоты от времени.

Случай когда топливо заканчивается.

Начальные параметры: $T = 2,\ g = 1,\ u_{max} = 5,\ m_0 = 2,\ M = 1,\ \epsilon = 0.1,\ l = 2$. Момент окончания топлива $\tau = 0.2$, максимальная высота $H_{max} = 0.4455$.

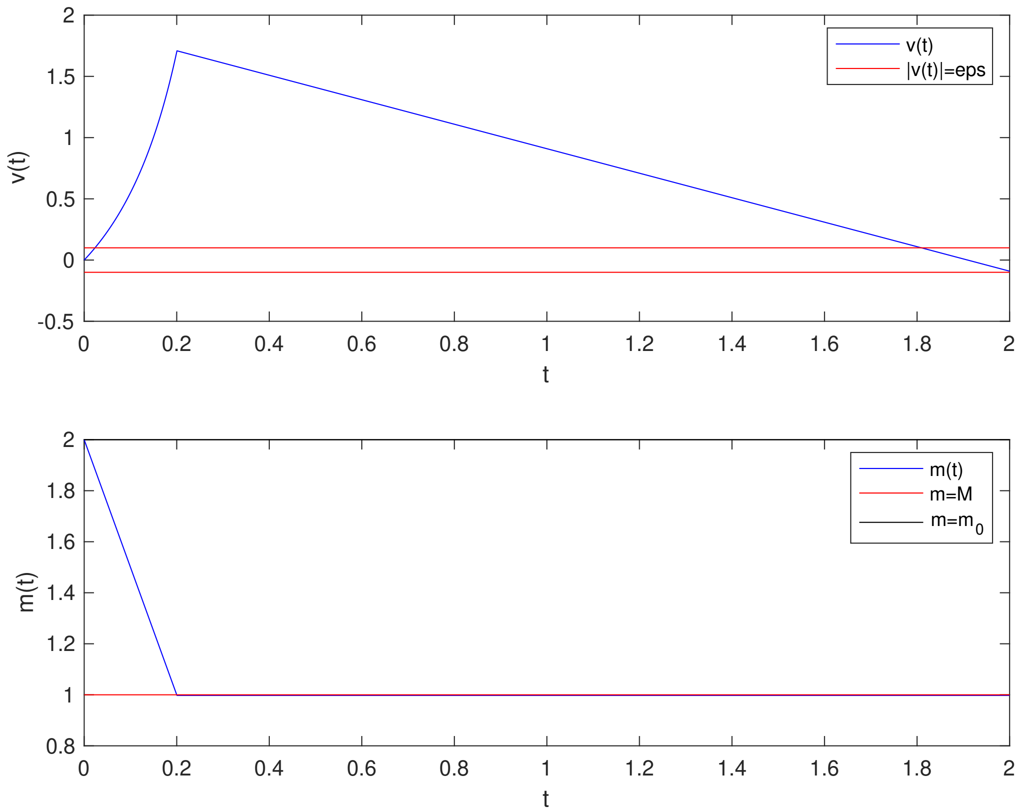

Рис. 3: Зависимость скорости и массы от времени при оптимальном управлении.

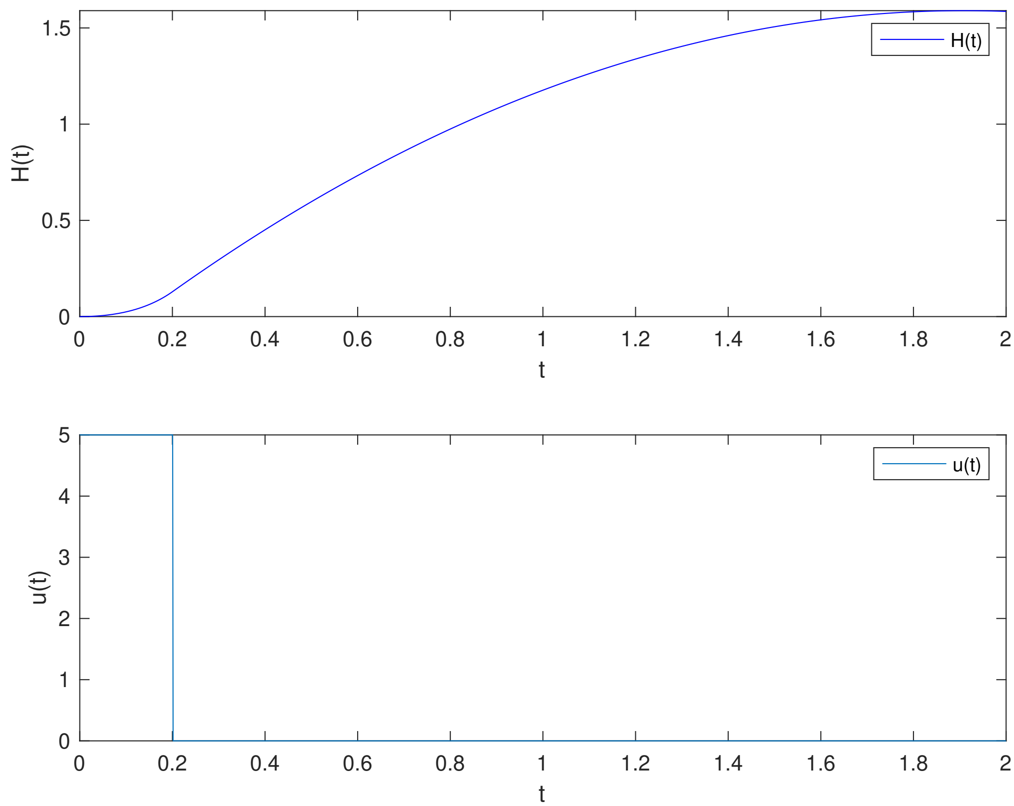

Рис. 4: Зависимоть управления и высоты от времени.

5.2 Примеры выполнения второй программы

Пример1. Начальные параметры: $T = 2,\ g = 1,\ u_{max} = 1.4,\ m_0 = 3,\ M = 1,\ \epsilon = 0.1,\ l = 2,\ H = 0.7,\ H_{eps} = 0.01$. Переборные параметры: $\psi_0^c = -0.1,\ \psi_1^c = 0.45,\ \psi_2^c = -0.86,\ \psi_0^c = 0.07$. Момент окончания топлива $\tau = 1.58$, минимальное значение функционала $J_{min} = 6.6279$. В этом случае входной параметр H не сильно отличается от максимально возможной достижимой высоты, поэтому управление напоминает примеры из пункта 5.1.

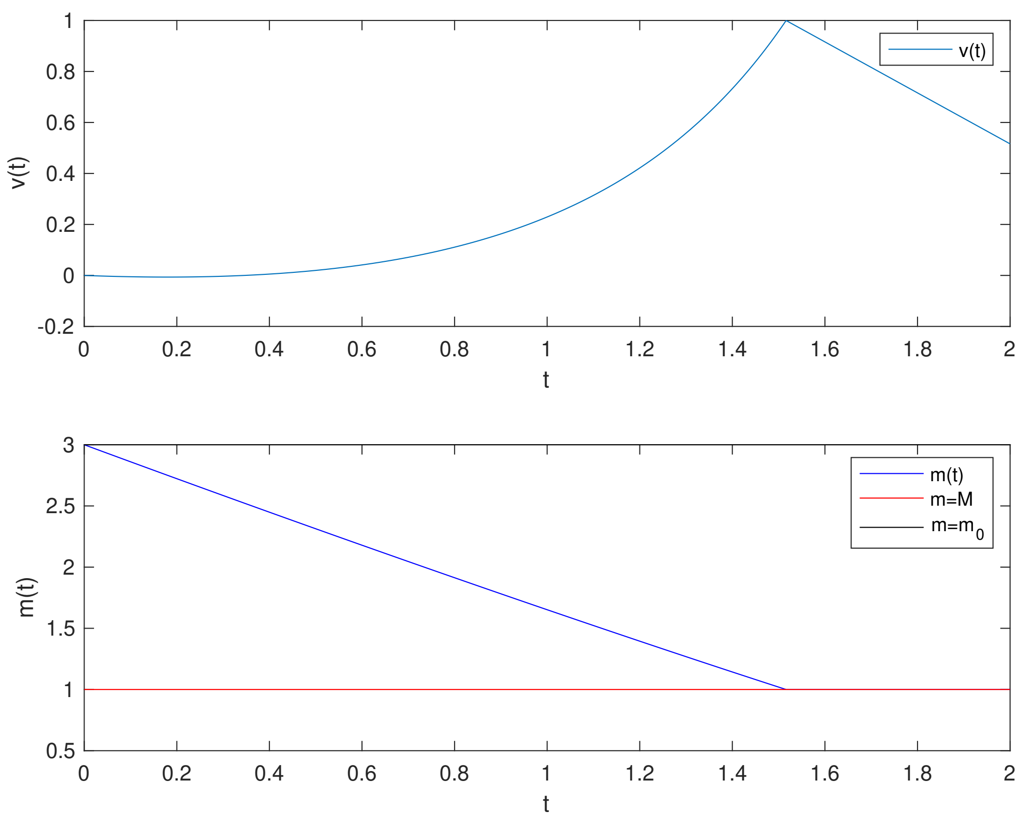

Рис. 5: Зависимость скорости и массы от времени при оптимальном управлении.

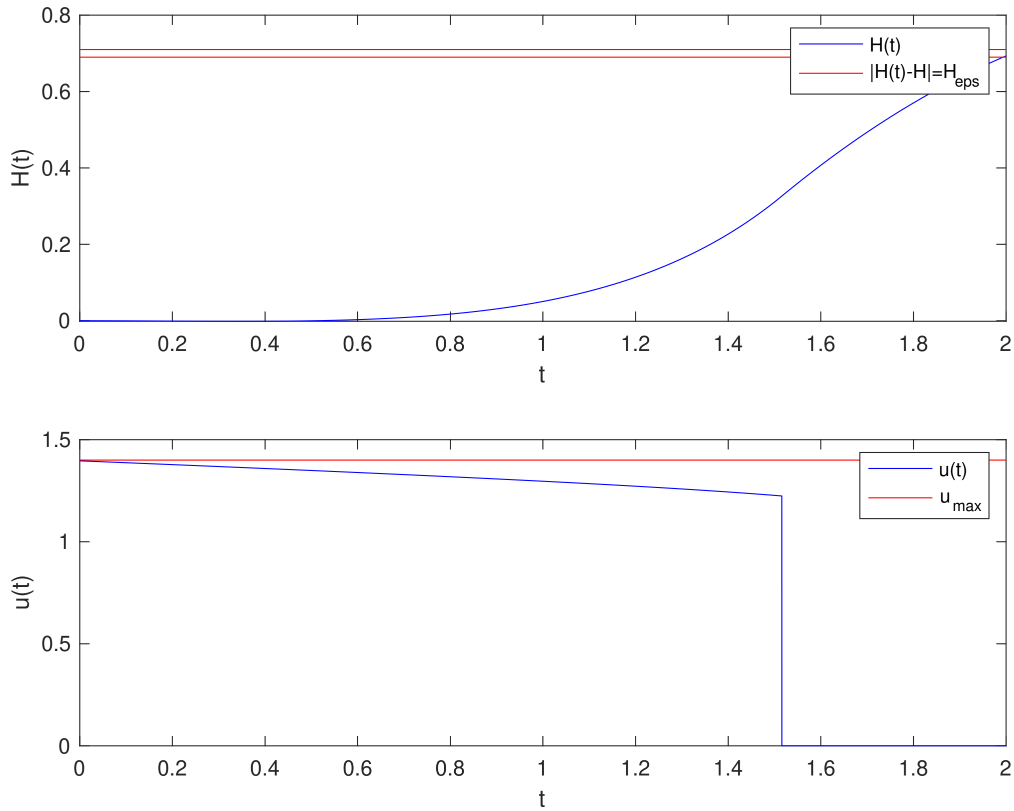

Рис. 6: Зависимость управления и высоты от времени.

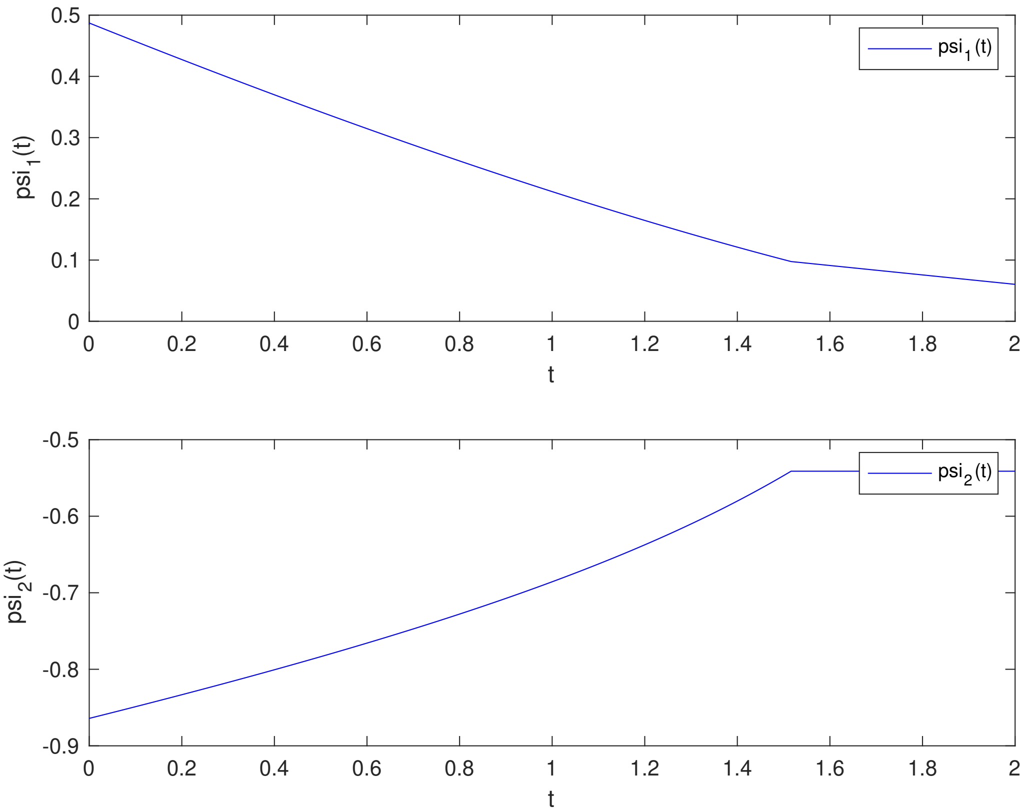

Рис. 7: Зависимость сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2(остальные константы).

Пример2. Начальные параметры: $T = 2$, $g = 1$, $u_{max} = 1$, $m_0 = 1.5$, $M = 1$, $l = 5$, $H = 1$, $H_{eps} = 0.05$. Переборные параметры: $\psi_0^c = -0.3$, $\psi_1^c = -0.07$, $\psi_2^c = -0.94$, $\psi_0^c = 0.12$. Момент отключения двигателя $\tau = 0.81$, минимальное значение функционала $J_{min} = 0.5046$.

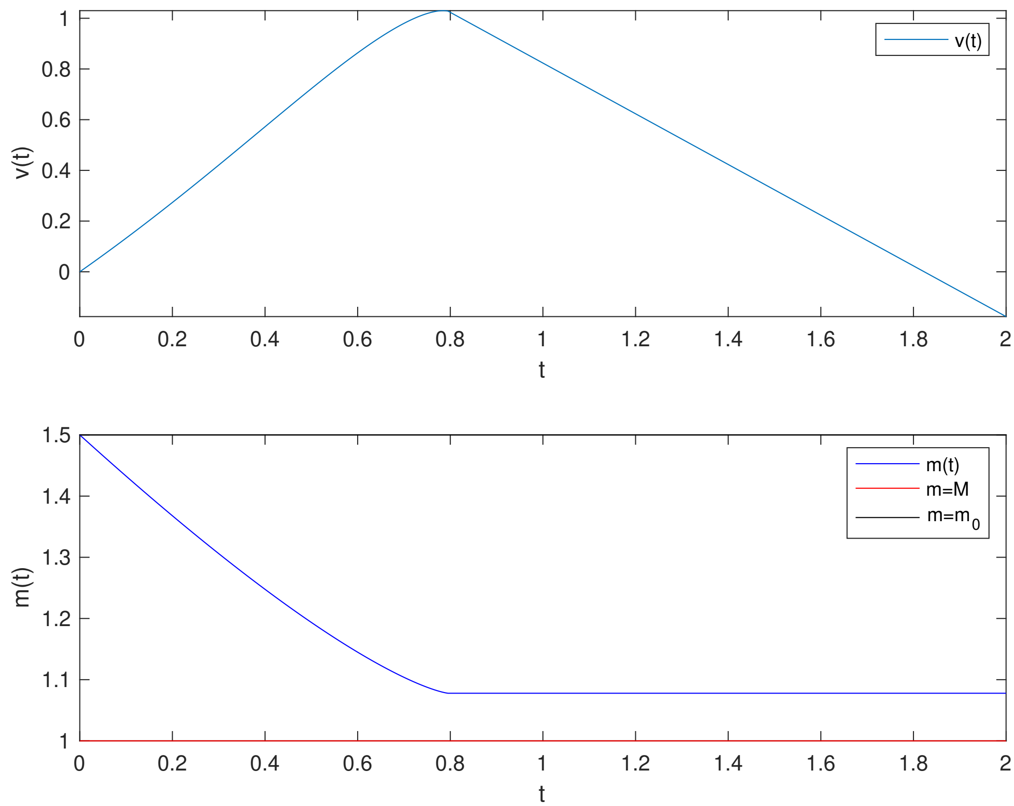

Рис. 8: Зависимость скорости и массы от времени при оптимальном управлении.

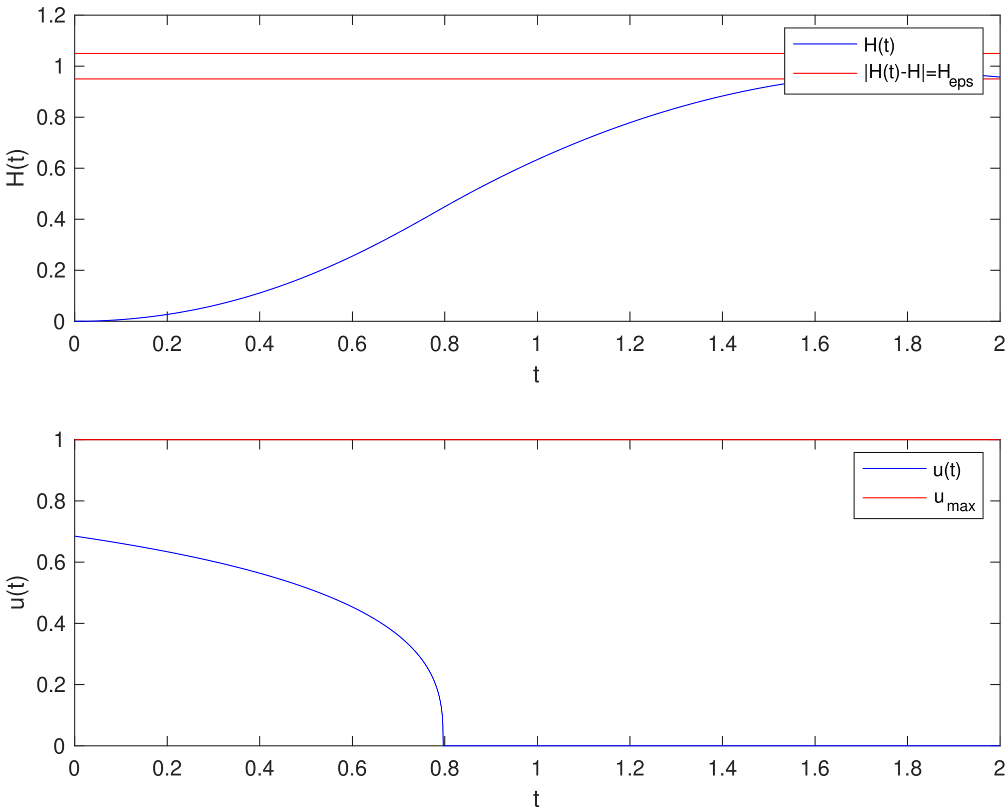

Рис. 9: Зависимость управления и высоты от времени.

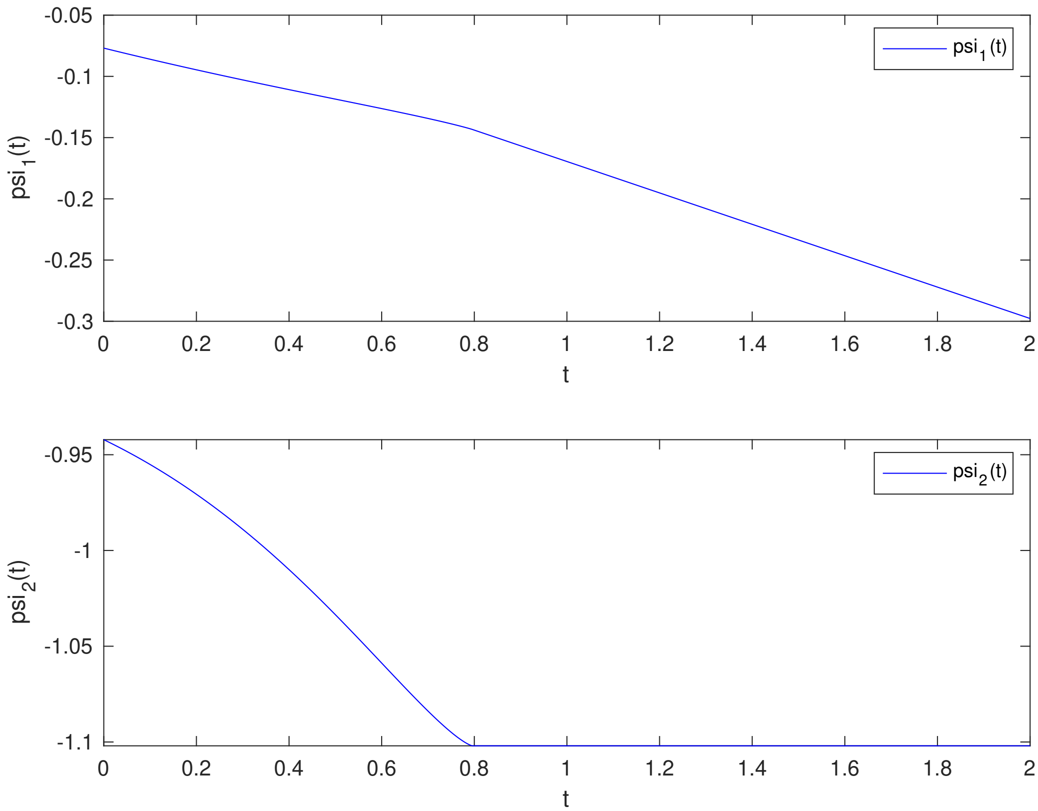

Рис. 10: Зависимость сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2(остальные константы).

6 Библиография

Список литературы

[1] Комаров Юрий, лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, Москва, 2nd edition, 2021.