

Задание 2. Вариант 10.

“Задача управления ракетой”.

Движение ракеты в вертикальной плоскости над поверхностью планеты описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm + lu \\ \dot{m} = -u \end{cases}$$

Здесь $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, m — ее переменная масса, $g > 0$ — гравитационная постоянная, $l > 0$ — коэффициент, определяющий силу, действующую на ракету со стороны сгорающего топлива, $u \in [0, u_{max}]$ — скорость подачи топлива ($u_{max} > 0$). Кроме того, известна масса корпуса ракеты без топлива $M > 0$.

Задача 1. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, а также начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Необходимо за счет выбора программного управления $u(t)$ перевести ракету на максимально возможную высоту в заданный момент времени $T > 0$. Кроме того, необходимо, чтобы $v(T) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Задача 2. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, а также начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Необходимо за счет выбора программного управления $u(t)$ перевести ракету на заданную высоту $H > 0$ в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы при этом минимизировать функционал

$$J = \int_0^T (u^4(t) + \alpha u_1(t)) dt, \quad \alpha > 0.$$

Замечание. В начальный момент времени ракета находится на поверхности Земли и двигаться “вниз” не может (данный вариант движения можно не рассматривать).

Замечание. В каждый момент времени масса ракеты с топливом m не должна быть меньше массы ракеты без топлива M . В случае, если топливо заканчивается, двигатель ракеты отключается.

- 1) Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $T, M, m_0, u_{max}, l, g, H, \varepsilon, \alpha$ определяет, разрешима ли задача оптимального управления. Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.
- 2) В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны. В отчете должны быть приведены примеры оптимальных траекторий для всех возможных качественно различных “режимов”.