Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Построение множества достижимости»

Студент 315 группы
М. М. Савинов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + x^3 \cos(2\dot{x}) + \sin(2x) + \dot{x} = u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geqslant t_0$.

1. Необходимо написать в среде `MatLab` функцию `reachset(alpha, t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0, t \geqslant t_0$ рассчитывает приближенно множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{(}t_0))$. На выходе функции — два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, plot). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).

2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha, t1, t2, N, filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha, t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + i\frac{t_2 - t_1}{N}, i = 0, 1, \ldots, N$. Здесь $t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$, N— натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранен в виде видео–файла filename.avi. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра filename) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможности строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоритические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множеств достижимости от величины параметра α. Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.

2 Теоритическая часть

2.1 Принцип Гамильтона–Понтрягина

Пусть задана задача оптимального управления.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)), \\ u(t) \in \mathcal{P}, \\ f = (f^1, \ldots, f^n). \end{cases}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В качестве $\mathcal{P}$ можно рассматривать, например, $\mathcal{P} \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^m$, $u(\cdot)$ — измерима.

Сопряженными переменными будем называть $\tilde{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)'$.

$\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = \langle \tilde{\psi}, \tilde{f}(x, u) \rangle$ — называется функционалом Гамильтона–Понтрягина. Будем обозначать $\mathscr{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) = \sup\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t))$.

Теорема 1 *(Принцип максимума Понтрягина.) Пусть $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ — оптимальная пара в смысле быстродействия. Тогда существует $\tilde{\psi}^*(\cdot) : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ такая, что:*

(УН) $\tilde{\psi}^*(\cdot) \not\equiv 0$ ($\Leftrightarrow \tilde{\psi}^*(t) \neq 0,$ *для п.в.* $t \in [t_0, T]$)*;*

(СС)

$$\dot{\tilde{\psi}}^* = -\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{x}}, \ \textit{для п.в. } t \in [t_0, T];$$

(УМ) $\mathscr{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) = \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) = \sup\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u(t)),$ *для п.в.* $t \in [t_0, T]$;

(Усл4) $\mathscr{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) \equiv \mathrm{const} \geqslant 0$;

Доказательство можно найти в [1].

2.2 Вспомогательные утверждения

Представим (1) в виде системы дифференциальных уравнений сделав замену $x_1 = x, \ \dot{x}_1 = x_2$, и учитывая начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u - x_2 - \sin(2x_1) - x_1^3 \cos(2x_2); \\ x_1(t_0) = 0; \\ x_2(t_0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Запишем функционал Г–П:

$$\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2(u - x_2 - \sin(2x_1) - x_1^3 \cos(2x_2)). \tag{3}$$

Теперь запишем *(СС)* для заданной задачи:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2\psi_2\cos(2x_1) + 3\psi_2 x_1^2\cos(2x_2); \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_2 x_1^3\sin(2x_2). \end{cases} \tag{4}$$

Из *(УМ)* следует, что управление принимает вид:

$$\begin{cases} u = \alpha, & \text{при } \psi_2 > 0; \\ u = -\alpha, & \text{при } \psi_2 < 0; \\ u = [-\alpha, \alpha], & \text{при } \psi_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения:

Теорема 2 *Множество достижимости $\mathcal{X}(t_1) \subseteq \mathcal{X}(t_2),\ t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$.*
Доказательство. *Система имеет точку покоя $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$. Если $u_0(t)$ — управление для некоторой точки из $\mathcal{X}(t_1)$, то достаточно взять управление $u = 0$ на отрезке $[t_0, t_0 + t_2 - t_1]$ и $u = u_1(t - t_2 + t_1)$ на отрезке $[t_0 + t_2 - t_1, t_2]$, поэтому эта точка находится в $\mathcal{X}(t_2)$.*

Теорема 3 *(О конечном числе нулей.) Пусть $u^*(t)$ — оптимальное управление для системы (2), тогда ψ_2 имеет конченое число нулей на отрезке $[t_0, T]$.*
Доказательство. *Пусть на конечном интервале времени ψ_2 имеет счетное число нулей на ограниченном сегменте $[t_0, T]$. Тогда у множества нулей есть точка накопления t^*. В этой точке накопления $\psi_2(t^*) = 0,\ \dot{\psi}_2(t^*) = 0$, из (4) следует, что $\psi_1 = 0$, что противоречит (УН). Получаем противоречие, поэтому число нулей конечно. Теорема доказана.*

Из **теоремы 2** следует, что особый режим не возникает на существенном промежутке времени, поэтому будем рассматривать только управление $u = \alpha \cdot \mathrm{sign}(\psi_2)$.

Используя это следствие и (2), (4) получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \alpha \cdot \mathrm{sign}(\psi_2) - x_2 - \sin(2x_1) - x_1^3\cos(2x_2); \\ \dot{\psi}_1 = 2\psi_2\cos(2x_1) + 3\psi_2 x_1^2\cos(2x_2); \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_2 x_1^3\sin(2x_2). \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 4 *Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ — оптимальная пара для времени быстродействия T, $\psi_1(t),\ \psi_2(t)$— решение сопряженной системы. Тогда для любых $\tau_1,\ \tau_2$ таких, что $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\psi_2(\tau_1) = 0,\ \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) = 0$, то $x_2(\tau_2) = 0$.*

2. *Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) \neq 0$, то $x_2(\tau_2) \neq 0$ и существует $\tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2]$, такой, что $x_2(\tilde{\tau}) = 0$.*

3. *Если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0,\ x_2(\tau) \neq 0,\ \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) = 0$, тогда $\psi_2(\tau_2) = 0$.*

4. *Если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0,\ x_2(\tau) \neq 0,\ \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, тогда $\psi_2(\tau_2) \neq 0$ и существует $\tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2]$, такой, что $\psi_2(\tilde{\tau}) = 0$.*

Доказательство.

1. *Применим (Усл4), для моментов* $\tau_1, \ \tau_2$, *получим* $\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2)$. $x_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) = 0$, *по условию* $\psi_2(\tau_2) = 0$, *а так как вектор* $\psi(\cdot)$ *ненулевой, то* $\psi_1(\tau_2) \neq 0, \Rightarrow x_2(\tau_2) = 0$.

2. *Применим (Усл4), для моментов* $\tau_1, \ \tau_2$, *получим* $\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) \geqslant 0$. *Так как* $x_2(\tau_1) \neq 0$, *то* $x(\tau_1)x(\tau_2) < 0$, *то есть* $x_2(t)$ *имеет единственный корень на* $[\tau_1, \tau_2]$.

3. *Пусть* $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0 \ x_2(\tau) \neq 0, \ \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2), \ \psi_2(\tau_1) = 0$. *Тогда из пункта 1 этого доказательства получаем, что* $\psi_2(\tau) \neq 0 \ \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$. *Тогда*

$$\frac{d}{dt}\mathscr{M} = \frac{d}{dt}(x_2\psi_1 + \dot{x}_2\psi_2) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\dot{x}_2(\tau_1)\psi_2(\tau_1) = \dot{x}_2(\tau_2)\psi_2(\tau_2).$$

Так как $\psi_2(\tau_1) = 0$, *и* x_2 *— нетривиальное решение, то* $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. *Из 3 пункта этого доказательства следует, что* $\psi_2(\tau_2) \neq 0$. *Пусть* $\psi_2(\tau)$ *не имеет нуля на* $[\tau_1, \tau_2]$. *Тогда* $\dot{x}_1(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_2) > 0$, *тогда получаем противоречие с тем, что* τ_1, τ_2 *последовательные нули функции* $x_2(t)$.

Для удобства описания численного алгоритма введем следующие системы S^+ и S^- соответственно:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \alpha - x_2 - \sin(2x_1) - x_1^3\cos(2x_2); \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\alpha - x_2 - \sin(2x_1) - x_1^3\cos(2x_2). \end{cases} \tag{8}$$

Система (7) отвечает управлению $u = \alpha$, а система (8) соответсвует управлению $u = -\alpha$.

3 Алгоритм численного решения

Используя вспомогательные утверждения сформулируем численный алгоритм решения задачи. Стартовать траектория может при $u = \alpha$ или $u = -\alpha$, переключения возможны лишь при $\psi_2 = 0$. Для построения множества достижимости найдем концы всех траекторий, удовлетворяющих ПМП, а затем удалим точки которые не принадлежат границе, то есть тут мы используем **Теорему 2**. Сформулируем алгоритм построения множества достижимости:

1. Решим систему (7) с нулевыми начальными условиями до времени $\tilde{t} : \ x_2(\tilde{t}) = 0$, если такого $\tilde{t}$ нет на отрезке $[t_0, T]$, то положим $\tilde{t} = T$.

2. Организуем перебор по времени переключения управления $t^* \in [t_0, t^*]$.

3. Решим систему (6) с начальными условиями $(x_1(t^*), x_2(t^*), 1, 0)$, до времени переключения $t^{**} : \ \psi_2(t^{**}) = 0$.

4. Решим систему (6) с начальными условиями $(x_1(t^{**}), x_2(t^{**}), -1, 0)$, до следующего времени переключения, и будем повторять пункты (3)–(4) до тех пор, пока $t < T$.

5. Проделаем аналогичную операцию для системы (8), только после первого переключения начальные условия будут $(x_1(t^*), x_2(t^*), -1, 0)$.

6. Построить общую кривую и удалить из нее самопересечения. Для этого нужно перебрать все возможные пересечения ломаных, образующих полученную кривую, и удалить куски, заключенные между ними. Полученная линия и будет границей множества достижимости.

4 Различные примеры выполнения программ

Начальные параметры: $\alpha = 2, t = 1$.

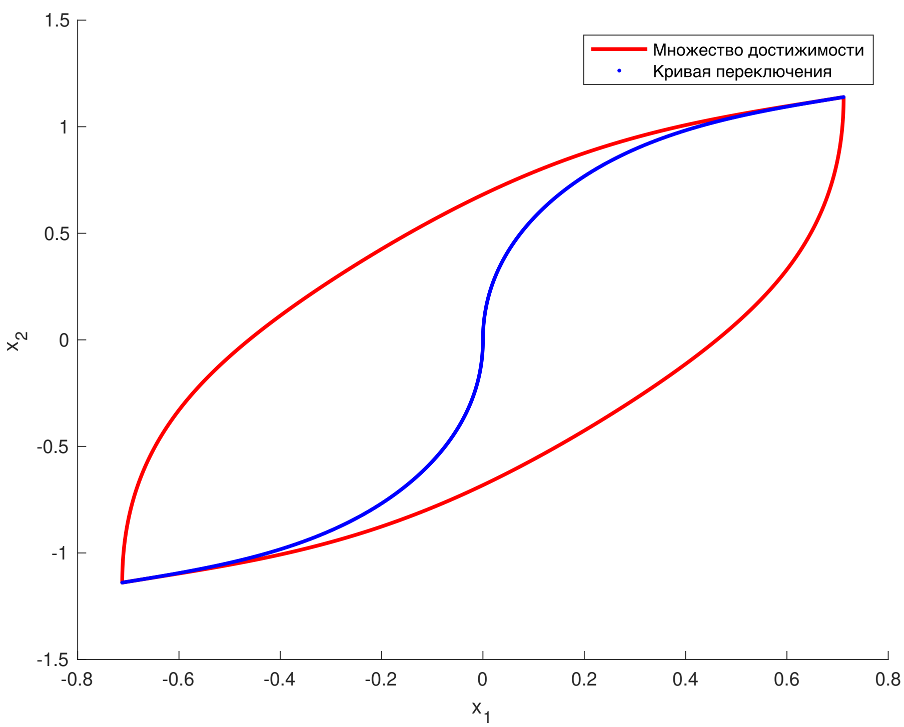

Рис. 1: Множество достижимости при $\alpha = 2, t = 1$.

Начальные параметры: $\alpha = 10, t = 1$.

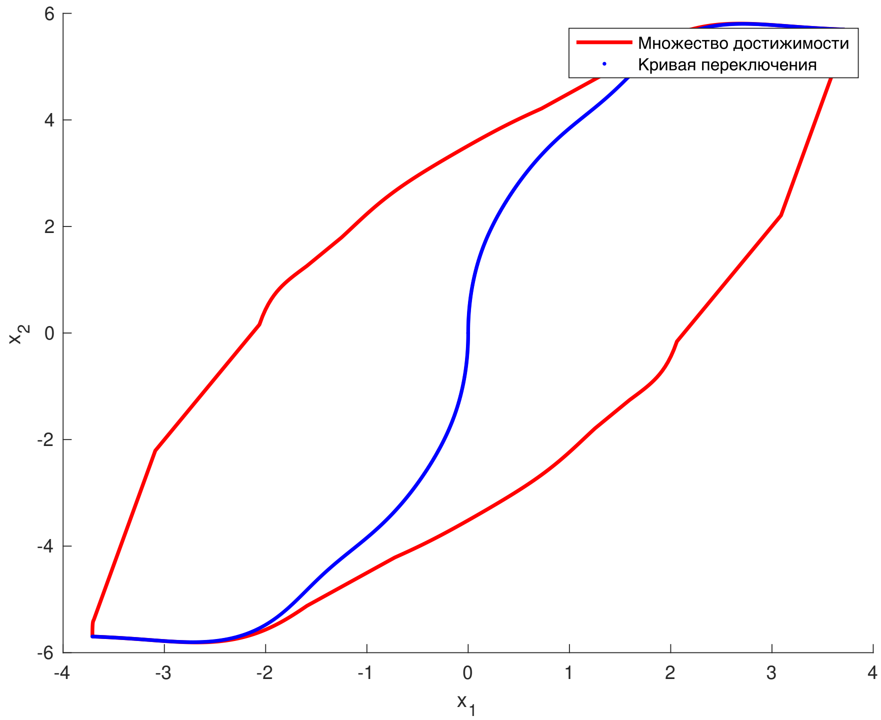

Рис. 2: Множество достижимости при $\alpha = 10, t = 1$.

Начальные параметры: $\alpha = 3, t_1 = 0.2, t_2 = 1.7, N = 7$.

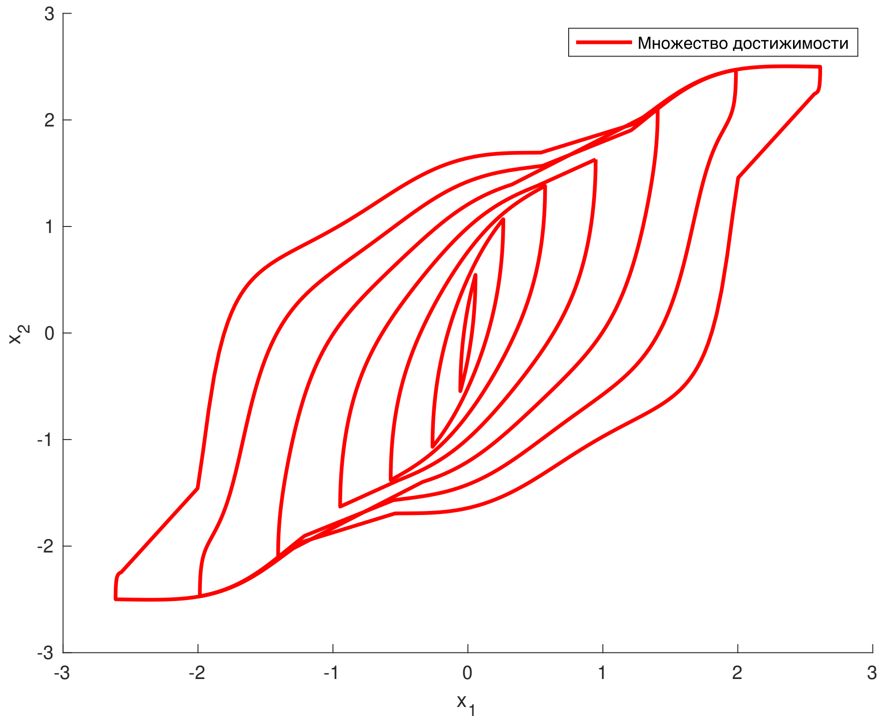

Рис. 3: Множество достижимости при $\alpha = 3, t = [0.2 \ldots 1.7]$.

Начальные параметры: $\alpha = 1, t_1 = 1, t_2 = 2, N = 3$.

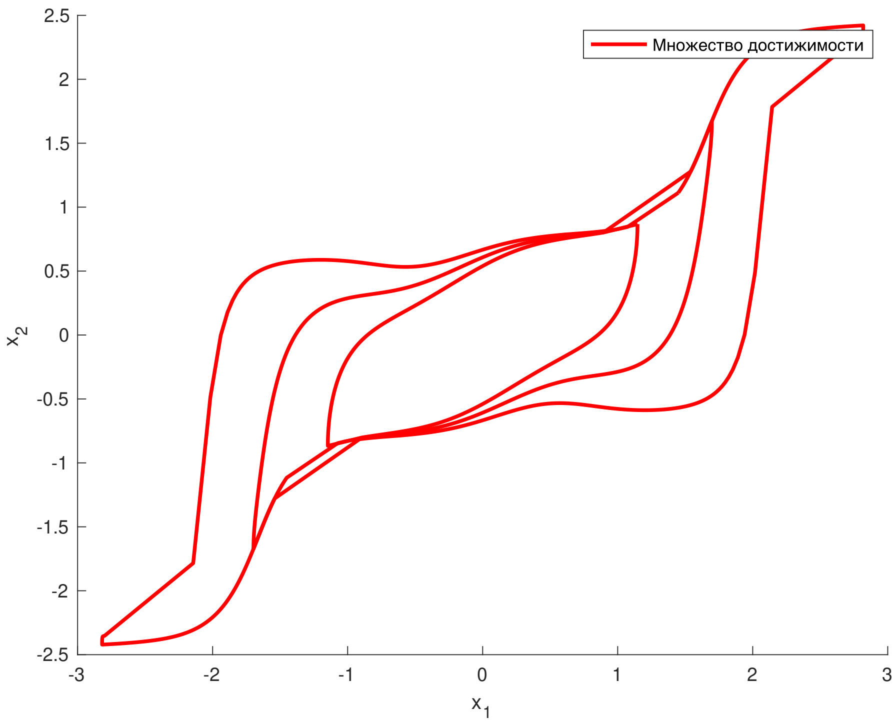

Рис. 4: Множество достижимости при $\alpha = 3,\ t = [1, 1.50, 2]$.

5 Библиография

Список литературы

[1] Комаров Юрий, лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, Москва, 2nd edition, 2021.