VEGA INSTITUTE
Science Promotion Foundation

Задача отимального расположения средств по пулам ликвидности

Максим Савинов

Student Research Group «Optimal control in decentralized finance»

Supervisors: Ростислав Березовский, Артур Сидоренко

Introduction

Рассматривается задача оптимального расположения средств по пулам ликвидности, необходимо динамически распределять капитал по нескольким пулам ликвидности в AMMы с constant-product функциями цены, которые удовлетворяет условиям описанных в [Dan21]. При этом распределении необходимо добится максимальной доходности при фиксированном риске или минимального риска при фиксированной доходности, а так же иследовать стратегии для других функционалов полезности.

Objectives

- Аксиоматически определить композицию AMM пулов для поставщика ликвидности
- Сформулировать задачу оптимального распределения активов
- Поиск стратегий динамического перекладывания активов

Problem statement

Пусть есть пулы со всеми попарными комбинациями и матрица ковариаций их цен $\Sigma(t)$, пусть $A(t)$ матрица коффициентов вложений в каждую пару пулов, $\eta_{i,j}(\Sigma(t),t)$, скорость начисления коммисий за предоставление ликвидности, цены моделируются геометрическим броуновским движением. Необходимо найти такую стратегию $A(t)$, чтобы максимизировать доходность состоящую из потери связанной с изменением цен и начислений коммисий.

Example

В пуле X лежит пара ETH/BTC $xy = L^2$, в пуле Y лежит пара BTC/stable coin $yz = K^2$. Обозначим за $p = \frac{y}{x}$ цену ETH в BTC, а $q = \frac{z}{y}$ цену BTC в stable coin. Вычислим impermanent loss при переходе с момента времени $t_0 = 0$, в $t_1 = 1$. Выразим x, y, z через p, q, используя constant-product соотношения, определения p, q:

$$y = L\sqrt{p},\ x = \frac{L}{\sqrt{p}},\ y = \frac{K}{\sqrt{q}},\ z = K\sqrt{q}.$$

$$\text{ILOSS}(a,b,\alpha) = \frac{v_1 - v_{hold}}{v_{hold}} = \frac{v_1}{v_{hold}} - 1,$$

$$\text{ILOSS}(a,b,\alpha) = \frac{\alpha\sqrt{ab} + (2-\alpha)\sqrt{b}}{\alpha ab + b + 1 - \alpha} - 1$$

Mathematical Section

Будем решать задачу в непрерывном времени. Пусть цена перекладывания любого количества актива из одного пула в другой пул равна c. Оплата за пользование ликвидностью описываются процессом $\eta(\Sigma, t)$, явную формулу можно найти в [Gui21].

$$dS_i(t) = \mu(S_i,t)dt + \Sigma S_i dW_{t,i}.$$

необходимо найти такой процесс $u(t) \in [t_0, T] \times \mathcal{A}$, который минимизирует величину

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[a_{i,j}(T)\text{LVS}_{i,j}\left(\frac{S_i(T)}{S_j(T)}\right) - \int_{t_0}^{T}\eta_{ij}(a_{i,j}(s),\Sigma_{ij}(s))ds\right],$$

где минимиум берется по процессам $u(t)$ таких, что в любой момент времени t, $u(t)$ стохастическая матрица.

Optimal strategy

В простейшей постановке наши перекладывания не влияют на цены активов, поэтому оптимальная стратегия состоит в том, чтобы в каждый момент времени максимизировать доход от коммисии, а потом выйти с позиции, когда цены станут близки к начальным.

Example

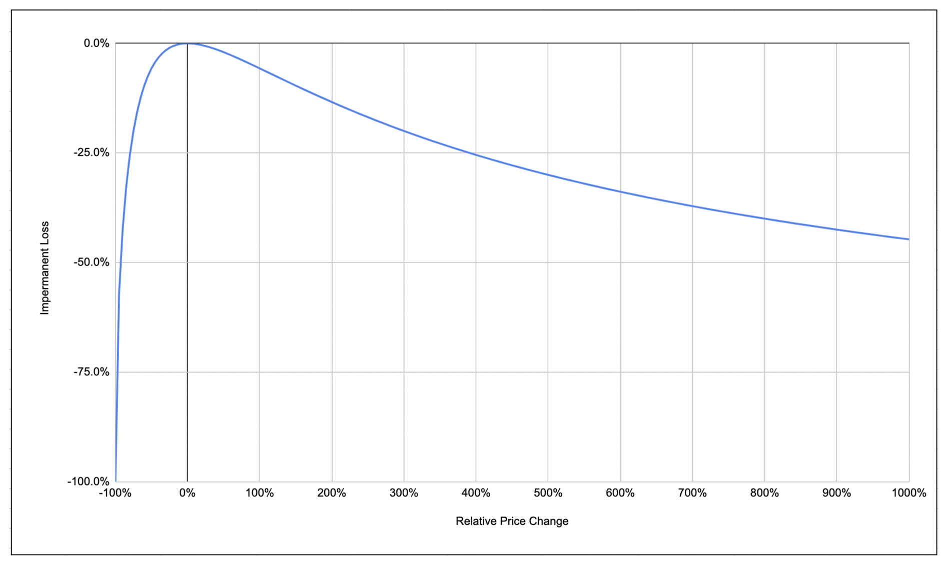

Figure 1: Impermanent loss

График потери капитала из-за изменения цен активов.

Methods

Будем использовать стохастический принцип максимума для поиска оптимального контроля. Гамильтониан записывается как:

$$\mathcal{H}(\cdot) = -\eta(\Sigma, s) + \mu(S_i,t)p(\cdot) + \Sigma S_i q(\cdot) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}(a_{i,j}(s),\Sigma_{ij}(s)) + \mu(S_i,t)p(\cdot) + \Sigma S_i q(\cdot),$$

Сопряженная система:

$$\begin{cases} dp = -\frac{d\mathcal{H}}{dS}(t)dt + qdW_t; \\ p(T) = \lambda(T)h'(S(T)); \end{cases}$$

Conclusion

В работе были предложены способы моделирования пуллов ликвидности и поиск оптимальных стратегий поведения. Рассмотрены модели

- Дискретная задача распределения активов
- Неприрываная задача с фиксированным правым концом времени
- Неприрываная задача со свободным правым концом времени
- Случай моделирования различных активов разными стохастическими процессами

В дальнейшем планируется рассматривать более общую задачу с влиянием на цены (поставщик ликвидности владелец большого капитала).

References

[Dan21] Maurice Herlihy Daniel Engel. "Composing Networks of Automated Market Makers". In: (2021).

[Gui21] Alex Evans Guillermo Angeris Tarun Chitra. "Optimal Routing for Constant Function Market Makers". In: (2021).

[Has22] Pourponeh Hashemseresht. "Pourponeh Concentrated Liquidity Analysis in Uniswap V3". In: (2022).