Достаточные условия оптимальности для задач стохастического оптимального управления

Исследовательская группа «Оптимальное управление в моделировании экономического роста»
Студенты: И. А. Терехов, М. М. Савинов

МГУ им. М.В. Ломоносова
Фонд "Институт Вега"

Москва 2022

Постановка задачи

Пусть X — непустое открытое множество в $\mathbb{R}$, U — произвольное непустое множество в $\mathbb{R}$. Рассмотрим задачу стохастического оптимального управления

$$\mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} g(x(t),u(t),t)dt \to \max_{u(\cdot)},$$

$$dx(t) = f(u(t),t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad x(0) = x_0,$$

Процессы $g(\cdot), f(\cdot)$ предсказуемые для любого $x \in X$ и любого $u \in U$, дифференцируемы по (x,u) и вместе со своими частными производными по (x,u) для п.в. $t \in [0,+\infty)$.

Постановка задачи

Определение 1

Допустимая пара $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ называется обгоняюще оптимальной (ОО-парой), если для любого допустимого управления $u(\cdot)$ и любого скаляра $\varepsilon > 0$ существует момент времени $T = T(\varepsilon, u(\cdot)) > t_0$, такой, что для всех $T' \geq T$ выполнено неравенство

$$J(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T') - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), t_0, T') \leq \varepsilon.$$

Это значит, что:

$$\limsup_{T\to\infty}(J(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T) - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), t_0, T)) \leq 0.$$

Постановка задачи

Определение 2

Допустимая пара $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ называется слабо обгоняюще оптимальной (СОО-парой), если для любого допустимого управления $u(\cdot)$, любого скаляра $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $T > t_0$ можно найти такое $T' = T'(\varepsilon, T, u(\cdot)) \geq T$, что

$$J(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T') - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), t_0, T') \leq \varepsilon.$$

Это значит, что:

$$\liminf_{T\to\infty} (J(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T) - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), t_0, T)) \leq 0.$$

Гамильтониан

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$\mathcal{H}(x, u, p, t) = pf(u, t) + g(x, u, t).$$

Сопряженное уравнение имеет вид:

$$dp(t) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t)dt.$$

Тогда решение сопряженного уравнения записывается в виде:

$$\hat{p}(t, T) = \mathbb{E}\left(\int_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t)dt \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Вспомогательное утверждение

Теорема

Рассмотрим d-мерное броуновское движение $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ с корреляционной матрицей ρ, т.е $E(B_t^i B_t^j) = \rho t$.
Пусть $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ – d-мерный процесс Ито вида:

$$dX_t^i = G_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} H_t^{ij} dB_t^j,$$

где сумма дифференциалов понимается как сумма соответствующих интегралов. Пусть $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Тогда

$$df(t, X_t) = f_t^{'}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^{d} f_{x_i}^{'}(t, X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} f_{x_i,x_j}^{''}(t, X_t)dX_t^i dX_t^j,$$

$$dt \cdot dt = 0, \qquad dt \cdot dB_t^i = 0 \qquad dB_t^i \cdot dB_t^j = \rho_{i,j} dt.$$

Основная теорема

Предположение

Пусть существует момент времени $T_1 > t_0$ такой, что для каждого $T \geq T_1$ функция $\mathcal{H}(x, u, \hat{p}, t)$ вогнута по $(x, u) \in X \times \overline{U}$ для п.в. $t \in [t_0, T]$, где $\hat{p}(t, T)$ определяется:

$$\hat{p}(t, T) = \mathbb{E}\left(\int\limits_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t) dt \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

является решением сопряженного уравнения, при условии $\hat{p}(T, T) = 0$.

Основная теорема

Теорема

Пусть $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ допустимая пара, удовлетворяющая предположению, тогда $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ является ОО-парой, если для каждого допустимого управления $u(\cdot)$ выполнено неравенство:

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E} \int_{t_0}^{T} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x, u, \hat{p}, t)(\hat{u}(t) - u(t))\, dt \geq 0;$$

Основная теорема (продолжение)

Теорема

Пусть $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ допустимая пара, удовлетворяющая предположению, тогда $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ является СОО-парой, если для каждого допустимого управления $u(\cdot)$ выполнено неравенство:

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{E} \int_{t_0}^{T} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x, u, \hat{p}, t)(\hat{u}(t) - u(t))\, dt \geq 0.$$

Примеры

Рассмотрим задачу максимизации интеграла при динамических ограничениях

$$dx(t) = u(t)dt, \qquad x(0) = 0,$$

$$\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} f(t)x(t)dt \to \max_{u(\cdot)},$$

где на принимаемые значения процесса управления наложены «поточечные» ограничения $u(t) \le 1$, для всех $t \ge 0$. Процесс $f(t) \ge 0$, для п.в. $t \ge 0$.

Примеры

Гамильтониан:

$$\mathcal{H}(x,u,p,t) = pu + f(t)x.$$

Процесс $\hat{p}(\cdot)$, задан соотношением:

$$\hat{p}(t,T) = \mathbb{E}\left(\int_t^T f(s)ds|\mathcal{F}_s\right),$$

так как процесс принимает положительные значения, то $\hat{p}(t,T) \geq 0$. Тогда $\hat{u} \equiv 1$ обгоняюще оптимально, так как:

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \hat{p}(t,T)(x,u,\hat{p},t)(1-u(t))\ dt \geq 0,$$

выполнено для любого допустимого $u(\cdot)$.

Примеры

Рассматривается задача из q-теории инвестиций [4],

$$dx(t) = u(t)dt, \qquad x(0) = x_0,$$

$$\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \mathbb{E}\int_0^{+\infty} e^{-rt}\left(f(t)x - u - \frac{1}{2}u^2\right)dt \to \max_{u(\cdot)}$$

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & t < \tau, \ P\text{-п.в.} \\ f_+ & t \geq \tau, \ \text{с вер. } \frac{1}{2} \\ f_- & t \geq \tau, \ \text{с вер. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

моделирует повышение/понижение ставки банка в определенный момент времени τ.

Примеры

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H} = pu + e^{-rt}\left(f(t)x - u - \frac{1}{2}u^2\right)$$

Запишем формулу типа Коши:

$$\hat{p}(t,T) := \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-rs} f(s) ds | \mathcal{F}_t\right).$$

Производная гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \hat{p} - e^{-rt} - e^{-rt}u.$$

Проверим, что $\hat{u} = \hat{p}e^{rt} - 1$ обгоняюще оптимально (ОО):

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T (\hat{p} - e^{-rt} - e^{-rt}u)(\hat{p}e^{rt} - 1 - u)\ dt \geq 0,$$

выполнено для любого допустимого $u(\cdot)$.

Краткие результаты

- Сформулирован и доказан аналог условия Сейерстада для задачи стохастического оптимального управления.
- Разобраны две задачи стохастического оптимального управления, в которых продемонстрирована применимость теоремы.

Библиография

Bernt Øksendal, Agnès Sulem. Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Berlin: Springer, 2019.

Беляков А.О. О достаточных условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом времени // Труды Математического института им.В.А.Стеклова РАН, издательство МИАН, 2020. Т. 308, с. 65–75.

Кабанов Ю. М. О принципе максимума Понтрягина для стохастических дифференциальных уравнений // Вероятностные модели и управление в экономических моделях, ЦЭМИ РАН, 1978, с. 85-94.

Romer D. Advanced Macroeconomics. California, McGraw-Hill, 2012.

Библиография

А. Н. Ширяев, А. С. Черный Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража, Стохастическая финансовая математика, Сборник статей, Труды МИАН, 237, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2002, 12–56; Proc. Steklov Inst. Math., 237 (2002), 6–49.

Seierstad A., Sydsæter K. Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: North-Holland, 1987. (Adv. Textb. Econ,; V.24).