Избранные вопросы финансовой математики

Всероссийский семинар, приуроченный к 120-летию А.Н. Колмогорова

Достаточные условия Сейерстада для задач стохастического оптимального управления

Беляков Антон Олегович,
Терехов Иван Алексеевич,
Савинов Максим Максимович

Задачи стохастического оптимального управления с ограничениями вида

$$dx(t) = f(u(t), t)\,dt + \sigma(u(t), t)\,dW_t, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

изучаются уже около полувека, см. [1, 2], где $u(t)$ – процесс управления и W_t – стандартное броуновское движение. В экономической теории большую роль играют задачи с бесконечным горизонтом времени, где целевой функционал

$$J(u(\cdot), x(\cdot), T) := \mathbb{E} \int_0^T g(x(t), u(t), t)dt \tag{2}$$

максимизируется по $u(\cdot)$ при $T \to \infty$. Определение оптимальности пары траекторий переменных управления и состояния $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ расширяется на расходящиеся функционалы, где пара $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ называется *обгоняюще оптимальной* (ОО-парой), если

$$\limsup_{T\to\infty}(J(u(\cdot), x(\cdot), T) - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T)) \leqslant 0,$$

для всех допустимых пар $(u(\cdot), x(\cdot))$; и *слабо обгоняюще оптимальной* (СОО-парой), если для всех допустимых $(u(\cdot), x(\cdot))$

$$\liminf_{T\to\infty}(J(u(\cdot), x(\cdot), T) - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T)) \leqslant 0.$$

Для задачи (1-2) известны достаточные условия оптимальности Мангасаряна [2], где предполагается, что функция Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H}(x, u, p, t) = p\,f(u, t) + g(x, u, t)$ вогнута по (x, u).

В данной работе получены достаточные условия аналогичные условиям Сейерстада [3] для задачи (1-2): Пусть

$$\hat{p}(t,T) = \mathbb{E}\left(\int\limits_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(x(s),u(s),s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right), \tag{3}$$

где $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ – заданная фильтрация. Тогда справедливо следующее:

Теорема 1. *Пусть существует момент времени $T_1 > 0$ такой, что для каждого $T \geqslant T_1$ функция $\mathcal{H}(x,u,\hat{p},t)$ вогнута по $(x,u) \in X \times \overline{U}$ для п.в. $t \in [0,T]$ и $\omega \in \Omega$, где $\hat{p}(t,T)$ определяется (3). Тогда если $(\hat{u}(\cdot),\hat{x}(\cdot))$ допустимая пара, то она является ОО-парой, если для каждого допустимого управления $u(\cdot)$ выполнено неравенство:*

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\int\limits_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),t)(\hat{u}(t)-u(t))\;dt \geqslant 0; \tag{4}$$

и является СОО-парой, если для каждого допустимого $u(\cdot)$:

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}\int\limits_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),t)(\hat{u}(t)-u(t))\;dt \geqslant 0. \tag{5}$$

Приводятся примеры применения полученных условий оптимальности.

Литература

[1] *Кабанов Ю.М.* О принципе максимума Понтрягина для стохастических дифференциальных уравнений // Вероятностные модели и управление в экономических моделях, ЦЭМИ РАН, 1978, с. 85-94.

[2] Bernt Øksendal, Agnès Sulem *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Berlin: Springer, 2019.

[3] Беляков А.О. *О достаточных условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом времени*// Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, издательство МИАН, 2020. Т. 308, с. 65–75.