Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Фонд "Институт Вега"
Исследовательская группа «Оптимальное управление в моделировании экономического роста»

Отчет о работе в научных группах

«Достаточные условия оптимальности для задач стохастического оптимального управления»

Студенты
И. А. Терехов, М. М. Савинов

Руководители
к.ф.-м.н., Ph.D, доцент А. О. Беляков, к.ф.-м.н., доцент А. Н. Курбацкий

Москва, 2022

Содержание

1 Введение **3**

2 Постановка задачи **3**

3 Достаточные условия оптимальности **4**

4 Примеры **6**

5 Заключение **8**

1 Введение

Задачи стохастического оптимального управления с бесконечным горизонтом играют важную роль в экономической теории.

Хорошо известна теорема, дающая достаточные условия оптимальности: аналог теоремы Мангасаряна [1, Ch. 5, Theorems 9], в которой предполагается, что гамильтониан вогнут по переменным состояния и управления. Теорема утверждает, что при заданных условиях управление оптимально (обычная оптимальность).

По аналогии с детерминированным случаем, можно получить аналог теоремы Сейерстада [2], которая не использует условие максимума гамильтониана по управлению. В настоящей работе достаточные условия получены с использованием той же формулы типа Коши с переменным верхним пределом интегрирования.

2 Постановка задачи

В данной работе будем рассматривать вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$, удовлетворяющей обычным условиям:

1. $\mathcal{F}$ полна по мере P и $\mathcal{F}_0$ содержит все множества нулевой вероятности;
2. $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$ для всех $t \geqslant 0$.

Пусть X — непустое открытое множество в $\mathbb{R}$, U — произвольное непустое множество в $\mathbb{R}$. Рассмотрим задачу стохастического оптимального управления

$$\mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} g(x(t), u(t), t)dt \to \max_{u(\cdot)}, \tag{1}$$

$$dx(t) = f(u(t), t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $u(t)$ процесс управления и W_t - стандартное броуновское движение, согласованное с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$. Такое управление $u(\cdot)$ и соответствующая переменная состояния $x(\cdot)$, т.е. решение (2) называются допустимыми, если $x(t) \in X$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

При п.в. $t \geq 0$, процессы $g(x(t), u(t), t), f(u(t), t)$, $\sigma(t)$ предсказуемые для любого $x \in X$ и любого $u \in U$, также $g(x(t), u(t), t), f(u(t), t)$ дифференцируемы по (x, u) и вместе со своими частными производными по $(x, u) \in X \times \overline{U}$ и непрерывны по (x, u) для п.в. $t \in [0, +\infty)$, где $\overline{U}$ – выпуклое множество такое, что $U \subseteq \overline{U}$.

Несобственный интеграл (1) может расходится для управления претендующего на оптимальность, т.е. предел

$$\lim_{T\to\infty} J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T) \tag{3}$$

может не существовать или быть бесконечным, где

$$J(u(\cdot), x(\cdot), T) = \mathbb{E}\int_0^T g(x(t), u(t), t)dt \tag{4}$$

функционал на конечном временном интервале, с тем же условием состояния (2).

Расширим понятие оптимальности в стохастическом случае по аналогии с детерминированным случаем.

Опредление 1. *Допустимая пара* $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ *называется обгоняюще оптимальной (ОО-парой), если для любого допустимого управления* $u(\cdot)$ *и любого скаляра* $\epsilon > 0$ *существует момент времени* $T = T(\epsilon, u(\cdot)) > 0$*, такой, что для всех* $T' \geq T$ *выполнено неравентсво*

$$J(u(\cdot), x(\cdot), T') - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T') \leq \epsilon.$$

Опредление 2. *Допустимая пара* $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ *называется слабо обгоняюще оптимальной (СОО-парой), если для любого допустимого управления* $u(\cdot)$*, любого скаляра* $\epsilon > 0$ *и любого момента времени* $T > 0$ *можно найти такое* $T' = T'(\epsilon, T, u(\cdot)) \geq T$*, что*

$$J(u(\cdot), x(\cdot), T') - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T') \leq \epsilon.$$

Это определения означают, что для всех допустимых пар $(u(\cdot), x(\cdot))$

$$\limsup_{T\to\infty}(J(u(\cdot), x(\cdot), T) - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T)) \leq 0,$$

если $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ — ОО-пара, и

$$\liminf_{T\to\infty}(J(u(\cdot), x(\cdot), T) - J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T)) \leq 0,$$

если $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ — СОО-пара.

Понятно, что если $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ является ОО-парой, то она также является и СОО-парой. Когда имеет место обычная оптимальность, т.е. когда существует конечный предел в (3) и для всех допустимых пар $(u(\cdot), x(\cdot))$

$$\limsup_{T\to\infty}(J(u(\cdot), x(\cdot), T) \leq \lim_{T\to\infty} J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T).$$

3 Достаточные условия оптимальности

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина[1]

$$\mathcal{H}(x, u, p, t) = pf(u, t) + g(x, u, t). \tag{5}$$

Сопряженное уравнение имеет вид:

$$dp(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t)dt. \tag{6}$$

В данном случае получим следующее выражение:

$$dp(t) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t)dt. \tag{7}$$

Тогда процесс

$$\hat{p}(t, T) = \mathbb{E}\left(\int_t^T \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t)dt \middle| \mathcal{F}_t\right) \tag{8}$$

является решением уравнения (5), возьмем такое решение, что $\hat{p}(T, T) = 0$.

Для последующего изложения, нам потребуется следующая теорема.

[1] В общем виде функция Гамильтона-Понтрягина для стохастического случая записывается в виде: $\mathcal{H}(x, u, p, h, t) = pf(u, t) + h\sigma(u, t) + g(x, u, t)$, а сопряженная система $dp(t) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t)dt + h(t)dW_t$. Так как множитель при dt не зависит от $h(t)$, то $h(t, T) \equiv 0$.

Теорема 1. *(Многомерная формула Ито) Рассмотрим d-мерное броуновское движение $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ с корреляционной матрицей ρ, т.е $E(B_t^i B_t^j) = \rho t$.*

Пусть $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ – d-мерный процесс Ито вида:

$$dX_t^i = G_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} H_t^{ij} dB_t^j,$$

где сумма дифференциалов понимается как сумма соответствующих интегралов. Пусть $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Тогда

$$df(t,X_t) = f_t^{'}(t,X_t)dt + \sum_{i=1}^{d} f_{x_i}^{'}(t,X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} f_{x_i,x_j}^{''}(t,X_t)dX_t^i dX_t^j,$$

где $dX_t^i dX_t^j$ перемножается по правилу

$$dt \cdot dt = 0, \qquad dt \cdot dB_t^i = 0 \qquad dB_t^i \cdot dB_t^j = \rho_{i,j} dt.$$

Доказательство можно найти, например, в [5].

Предположение 1. Пусть существует момент времени $T_1 > 0$ такой, что для каждого $T \geq T_1$ функция $\mathcal{H}(x,u,\hat{p},t)$ вогнута по $(x,u) \in X \times \overline{U}$ для п.в. $t \in [t_0, T]$, где $\hat{p}(t,T)$ определяется (8).

Теорема 2. *(Достаточные условия оптимальности) Пусть $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ допустимая пара, удовлетворяющая предположению 1, тогда $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ является ОО-парой, если для каждого допустимого управления $u(\cdot)$ выполнено неравенство:*

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x,u,\hat{p},t)(\hat{u}(t) - u(t))\ dt \geq 0; \tag{9}$$

является СОО-парой, если для каждого допустимого управления $u(\cdot)$ выполнено неравенство:

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x,u,\hat{p},t)(\hat{u}(t) - u(t))\ dt \geq 0. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала:

$$\Delta J(T) := J(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot), T) - J(u(\cdot), x(\cdot), T) = \mathbb{E}\int_0^T \bigg(g(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) - g(x(t), u(t), t)\bigg)dt =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T \mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t,T), t) - \mathcal{H}(x(t), u(t), \hat{p}(t,T), t)dt +$$

$$+\mathbb{E}\int_0^T \hat{p}(t,T)(f(u(t),t) - f(\hat{u}(t),t))dt.$$

Из предположения 1 о вогнутости имеем неравенство

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \hat{p}(t,T), t) - \mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t,T), t) \leq$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t,T), t)\bigg(u(t) - \hat{u}(t)\bigg) +$$

$$+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t,T), t)\bigg(x(t) - \hat{x}(t)\bigg).$$

Применим теперь многомерную формулу Ито к процессу $\hat{p}(t,T)(x(t)-\hat{x}(t))$. Получим

$$\begin{aligned}
&d(\hat{p}(t,T)(x(t)-\hat{x}(t))) = (x(t)-\hat{x}(t))d\hat{p}(t,T) + \hat{p}(t,T)dx(t) - \hat{p}(t,T)d\hat{x}(t) = \\
&= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),t)(x(t)-\hat{x}(t))dt + \hat{p}(t,T)(f(u(t),t)dt + \sigma(t)dW_t) - \\
&- \hat{p}(t,T)(f(\hat{u}(t),t)dt + \sigma(t)dW_t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),t)(x(t)-\hat{x}(t))dt + \\
&+ \hat{p}(t,T)(f(u(t),t) - f(\hat{u}(t),t))dt.
\end{aligned}$$

Данное равенство означает, что

$$\begin{aligned}
\hat{p}(T,T)(x(T)-\hat{x}(T)) = \hat{p}(0,T)(x(0)-\hat{x}(0)) + \int\limits_0^T -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),\hat{h}(t,T),t)(x(t)-\hat{x}(t))dt + \\
+ \int\limits_0^T \hat{p}(t,T)(f(u(t),t) - f(\hat{u}(t),t))dt.
\end{aligned}$$

Заметим, что, исходя из определения $\hat{p}(t,T)$ и $x(t)$, $\hat{p}(T,T)=0$ и $x(0)-\hat{x}(0)=0$. Тогда, объединяя полученное ранее, находим, что

$$\begin{aligned}
\Delta J(T) \geqslant \mathbb{E}\left(\int\limits_0^T \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),\hat{h}(t,T),t)(\hat{u}(t)-u(t))dt\right) + \\
+\mathbb{E}\left(\int\limits_0^T -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),\hat{h}(t,T),t)(x(t)-\hat{x}(t))dt\right) + \\
+\mathbb{E}\left(\int\limits_0^T \hat{p}(t,T)(f(u(t),t) - f(\hat{u}(t),t))dt\right) = \\
= \mathbb{E}\left(\int\limits_0^T \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t,T),\hat{h}(t,T),t)(\hat{u}(t)-u(t))dt\right).
\end{aligned}$$

Окончательно, переходя к пределам, находим достаточные условия оптимальности

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}(x,u,\hat{p},t)(\hat{u}(t)-u(t))\ dt \geq 0$$

и

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}(x,u,\hat{p},t)(\hat{u}(t)-u(t))\ dt \geq 0.$$

$\square$

4 Примеры

Пример 1 Рассмотрим задачу максимизации интеграла при динамических ограничениях

$$dx(t) = u(t)dt, \qquad x(0) = 0,$$

$$\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} f(t)x(t)dt \to \max_{u(\cdot)},$$

где на принимаемые значения процесса управления наложены «поточечные» ограничения $u(t) \le 1$, для всех $t \ge 0$. Процесс $f(t) \ge 0$, для п.в. $t \ge 0$. Гамильтониан задается уравнением:

$$\mathcal{H}(x, u, p, t) = pu + f(t)x.$$

Процесс $\hat{p}(\cdot)$, определенный в (8) задан соотношением:

$$\hat{p}(t, T) = \mathbb{E}\Bigg(\int_t^T f(s)ds|\mathcal{F}_s\Bigg),$$

так как процесс принимает положительные значения, то $\hat{p}(t, T) \ge 0$.

Тогда $\hat{u} \equiv 1$ обгоняюще оптимально, так как:

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \hat{p}(t, T)(x, u, \hat{p}, t)(1 - u(t))\ dt \ge 0,$$

выполнено для любого допустимого $u(\cdot)$.

Пример 2 Рассматривается задача из q-теории инвестиций [4],

$$dx(t) = u(t)dt, \qquad x(0) = x_0,$$

$$\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \mathbb{E}\int_{t_0}^{+\infty} e^{-rt}\Bigg(f(t)x - u - \frac{1}{2}u^2\Bigg)dt \to \max_{u(\cdot)}$$

$f(t)$ — некоторый случайный процесс,

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & t < \tau,\ P\text{-п.в.} \\ f_+ & t \ge \tau,\ \text{с вер. } \frac{1}{2} \\ f_- & t \ge \tau,\ \text{с вер. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

моделирует повышение/понижение налоговой ставки в определенный момент времени τ.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H} = pu + e^{-rt}\Bigg(f(t)x - u - \frac{1}{2}u^2\Bigg)$$

Запишем формулу типа Коши:

$$\hat{p}(t, T) := \mathbb{E}\Bigg(\int_t^T e^{-rs} f(s)ds|\mathcal{F}_t\Bigg).$$

Производная гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \hat{p} - e^{-rt} - e^{-rt}u.$$

Проверим, что $\hat{u} = \hat{p}e^{rt} - 1$ обгоняюще оптимально (ОО):

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T (\hat{p} - e^{-rt} - e^{-rt}u)(\hat{p}e^{rt} - 1 - u)\ dt,$$

вынесем из второй скобки множетель e^{rt}, получим:

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T e^{rt}(\hat{p} - e^{-rt} - e^{-rt}u)^2\ dt \geq 0,$$

выполнено для любого допустимого $u(\cdot)$.

5 Заключение

В работе сформулирован и доказан аналог условия Сейерстада для задачи стохастического оптимального управления. Для этой задачи решены примеры и продемонстрирована применимость новых условий.

Список литературы

[1] *Bernt Øksendal, Agnès Sulem.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Berlin: Springer, 2019.

[2] *Беляков А.О.* О достаточных условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом времени // Труды Математического института им.В.А.Стеклова РАН, издательство МИАН, 2020. Т. 308, с. 65–75.

[3] *Кабанов Ю. М.* О принципе максимума Понтрягина для стохастических дифференциальных уравнений // Вероятностные модели и управление в экономических моделях, ЦЭМИ РАН, 1978, с. 85-94.

[4] *Romer D.* Advanced Macroeconomics. California, McGraw-Hill, 2012.

[5] *А. Н. Ширяев, А. С. Черный* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража, Стохастическая финансовая математика, Сборник статей, Труды МИАН, 237, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2002, 12–56; Proc. Steklov Inst. Math., 237 (2002), 6–49.

[6] *Seierstad A., Sydsæter K.* Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: North-Holland, 1987. (Adv. Textb. Econ,; V.24).