Travail pratique **Modélisation d'un problème d'affectation**

Description du problème

Pendant leur dernier semestre, les étudiants et étudiantes du département suivent des enseignements à choix. L'affectation des étudiants à ces cours est un processus complexe, soumis à de nombreuses contraintes, dont une version simplifiée est présentée ici.

On considère les données suivantes :

- ▷ un ensemble $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ de n étudiants ;
- ▷ un ensemble $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ de m cours à choix ;
- ▷ un ensemble $F \subseteq C$ de p cours à choix « fondamentaux » ;
- ▷ pour chaque cours C_j un effectif minimum $b_j \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un effectif maximum $B_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \dots, m$;
- ▷ pour chaque couple (E_i, C_j) une préférence p_{ij} représentant l'intérêt de l'étudiant E_i pour le cours C_j et dont les valeurs possibles sont :

$$p_{ij} = \begin{cases} 10 & \text{(préférence très élevée)} \\ 5 & \text{(préférence élevée)} \\ 0 & \text{(préférence moyenne)} \\ -10 & \text{(préférence très faible)} \\ -\infty & (\textit{veto}) \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.$$

On cherche à affecter les étudiants aux différents cours en respectant les contraintes suivantes :

- ▷ chaque étudiant doit suivre exactement 5 cours à choix dont au moins 2 fondamentaux ;
- ▷ chaque cours C_j doit être suivi par b_j personnes au minimum et par B_j personnes au maximum (on suppose évidemment $B_j \geq b_j$), $j = 1, \dots, m$;
- ▷ aucun étudiant ne peut être affecté à un cours pour lequel il a émis un *veto*.

On fait également les hypothèses suivantes :

- ▷ chaque étudiant a émis des préférences finies (c.-à-d. hors *veto*) pour nettement plus de 5 cours à choix et pour plus de 2 cours fondamentaux ;
- ▷ il y a nettement plus que 5 cours à choix proposés et le nombre de cours fondamentaux est nettement supérieur à 2 ;
- ▷ pour chaque cours, le nombre d'étudiants ayant émis des préférences finies est suffisant pour atteindre l'effectif minimum du cours ;
- ▷ le nombre d'étudiants permet de respecter globalement les effectifs minimums de tous les cours et la somme des effectifs maximums est suffisante pour satisfaire les besoins de tous les étudiants :

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \leq 5n \leq \sum_{j=1}^{m} B_j \qquad \text{et} \qquad \sum_{j \text{ t.q. } C_j \in F} B_j \geq 2n.$$

REMARQUE. Les hypothèses précédentes sont pour la plupart nécessaires pour espérer obtenir une affectation admissible mais elles ne sont globalement pas suffisantes pour assurer son existence.

Travail à effectuer

Vous devez modéliser la recherche d'une affectation admissible (assurant 5 cours à chaque étudiant dont au moins 2 fondamentaux, respectant leurs *veto* et respectant les effectifs minimums et maximums de chaque cours) maximisant la somme des préférences des affectations retenues sous forme d'un problème de transbordement (à coût minimum) ou d'un problème de flot de valeur maximale à coût minimum.

Soyez précis et complet dans la définition et la description de chaque élément de votre modèle et faites en sorte que toutes les capacités minimales soient nulles (dans votre modèle final).

Si vous optez pour un problème de transbordement, assurez l'égalité globale entre l'offre et la demande. Dans tous les cas expliquez comment exploiter la solution du problème de graphes pour affecter les étudiants aux cours à choix ou pour affirmer qu'il n'existe par d'affectations admissibles.

Documents à rendre, modalités et délais

- ▷ Vous devez rendre votre modélisation sous forme d'un document au format PDF. Merci d'utiliser une taille de police de 11 ou 12 points.
- ▷ Soyez attentif à la précision et à la rigueur mathématique de votre travail ainsi, évidemment, qu'à la justesse de votre modèle. Ces éléments sont centraux dans l'évaluation de votre rendu mais travaillez également la qualité de votre rédaction qui, elle aussi, prendra une part importante dans la note finale.
- ▷ Vous devez rendre votre travail sur Cyberlearn au plus tard le **mercredi 15 juin 2022** (avant minuit).