**Série 7 - Optimisaton linéaire** **Problèmes d'ordonnancement**

## Exercice 1

On considère $n$ tâches (*jobs*) qui doivent toutes être réalisées sur une seule machine. Pour chaque tâche $i = 1, \ldots, n$ on connaît

- ▷ sa date de disponibilité (date de début au plus tôt, *release date*) $r_i$,
- ▷ sa date d'échéance (date de fin au plus tard, *due date*) $d_i$,
- ▷ son temps d'exécution (durée de réalisation, *processing time*) $p_i$.

La machine ne peut exécuter qu'une seule tâche à la fois et l'exécution d'une tâche ne peut pas être interrompue (pas de préemption).

On cherche un ordonnancement des tâches, autrement dit des dates de début d'exécution pour chaque tâche, respectant les données et les contraintes précédentes et minimisant la date de fin d'exécution de la dernière tâche à terminer (*makespan*).

Remarques. On supposera que les données sont cohérentes et vérifient en particulier, pour chaque tâche $i$,

$$p_i \geq 0 \qquad \text{et} \qquad r_i + p_i \leq d_i.$$

On supposera également, sans perte de généralité, que la plus petite date de disponibilité est égale à 0.

a) Modéliser le problème de la recherche d'un ordonnancement optimal sous forme d'un programme linéaire mixte.

b) Traduire votre modèle mathématique en GMPL. Séparer clairement le modèle des données.

c) Déterminer un ordonnancement optimal pour les trois jeux de données qui suivent.

1.

| | Tâche $i$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| Disponibilité $r_i$ | 0 | 3 | 6 |
| Échéance $d_i$ | 25 | 25 | 20 |
| Temps d'exécution $p_i$ | 4 | 9 | 8 |

2.

| | Tâche $i$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Disponibilité $r_i$ | 0 | 3 | 0 | 9 | 28 |
| Échéance $d_i$ | 50 | 25 | 40 | 20 | 45 |
| Temps d'exécution $p_i$ | 15 | 12 | 8 | 3 | 7 |

3. Mêmes valeurs que ci-dessus sauf pour la date d'échéance de la cinquième tâche qui passe de 45 à 46.

SIMULATION ET OPTIMISATION — HEIG-VD - TIC - ISC

J.-F. Hêche — Automne 2022

---

**Série 7 - Optimisaton linéaire** — **Problèmes d'ordonnancement** — **Solutions**

---

## Exercice 1

a) ▷ On définit les variables de décision, réelles et non négatives,

$$x_i = \text{date de début de l'exécution de la tâche } i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

▷ L'objectif consiste à minimiser le maximum des dates de fin d'exécution des différentes tâches :

$$\text{Minimiser} \quad z = \max_{i=1,\ldots,n} \big(x_i + p_i\big).$$

Cet objectif se linéarise de manière classique en introduisant une variable auxiliaire $t$ pour le maximum et en imposant pour chaque tâche $i$ la contrainte

$$t \geq x_i + p_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

▷ Pour les autres contraintes on a premièrement

$$x_i \geq r_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

car l'exécution de chaque tâche ne peut commencer avant sa date de disponibilité.

▷ On a aussi

$$x_i + p_i \leq d_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

car l'exécution de chaque tâche doit être terminée au plus tard à la date d'échéance de la tâche en question.

▷ Finalement, pour chaque paire $\{i, j\}$ de tâches différentes, soit la tâche $i$ termine son exécution avant que la tâche $j$ ne débute la sienne soit c'est l'inverse. Toute solution admissible doit donc vérifier

$$x_i + p_i \leq x_j \qquad \text{ou} \qquad x_j + p_j \leq x_i \qquad 1 \leq i < j \leq n.$$

Afin de linéariser cette disjonction, on introduit une borne supérieure $M$ sur la date de fin d'exécution de n'importe quelle tâche (dans une solution admissible). Ici poser la borne $M$ égale à la plus grande date d'échéance fait parfaitement l'affaire. On introduit également une variable binaire $y_{ij}$ pour chaque paire $\{i, j\}$ de tâches différentes et dont l'interprétation est

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tâche } i \text{ est exécutée avant la tâche } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad 1 \leq i < j \leq n.$$

La disjonction précédente est alors remplacée par la formulation linéaire

$$\begin{cases} x_i + p_i - x_j \leq M(1 - y_{ij}) \\ x_j + p_j - x_i \leq M y_{ij} \end{cases} \qquad 1 \leq i < j \leq n.$$

b) Voir le fichier `S7-Exercice1-Ordonnancement.mod`.

c) Les dates minimales de fin d'exécution de la dernière tâche sont respectivement égales à 23, 50 et 46.