ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»

Физический факультет

Отчет по практическому заданию №1

Основы математического моделирования.

студента 327 группы

Иванова Ивана Ивановича

Москва - 2021

1. Постановка задачи.

Используя схему бегущего счёта и итерационные методы, решить задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{1+u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -1 \leqslant x < 0 \\ u(x,0) = \cos(\frac{\pi x}{2}) \\ u(0,t) = \exp(-t) \end{cases}$$

2. Характеристики уравнения.

Исследуем существование единственного решения в заданной области, т.е. определим, претерпевает ли решение разрыв в области $D : x \in [-1, 0), t \in (0, T)$. Для этого составим уравнение характеристик и исследуем их на наличие пересечений в заданной области поиска решения. Если пересечения будут, то это означает, что в этой точке существует столько решений, сколько характеристик в ней пересекаются. Если пересечений не будет, то в данной области существует единственное решение поставленной задачи.

$$\frac{dt}{1} = -(1+u)\frac{dx}{1} = \frac{du}{0}$$

получаем, что $u = const = u(x_0, t_0)$ и получаем уравнение характеристики, на которой u является константой:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{1+u}$$

Проинтегрирую это уравнение: $t - t_0 = -(1+u)(x - x_0)$

Учитывая начальные и граничные условия, получим, что характеристики будут иметь следующий вид:

$t = -(1 + cos(\frac{\pi x_0}{2}))(x - x_0), \qquad$ при $t_0 = 0$ и различных x_0

$t = t_0 - (1 + \exp(-t_0))x, \qquad$ при $x_0 = 0$ и различных t_0

Эти характеристики и будем проверять на наличие пересечений в области поиска решения. Из графиков, представленных ниже, видно, что в рассматриваемой области $D : x \in [-1, 0), t \in (0, T)$ характеристики не пересекаются, следовательно, нет опрокидывания волны. Решение на нашем интервале определено однозначно.

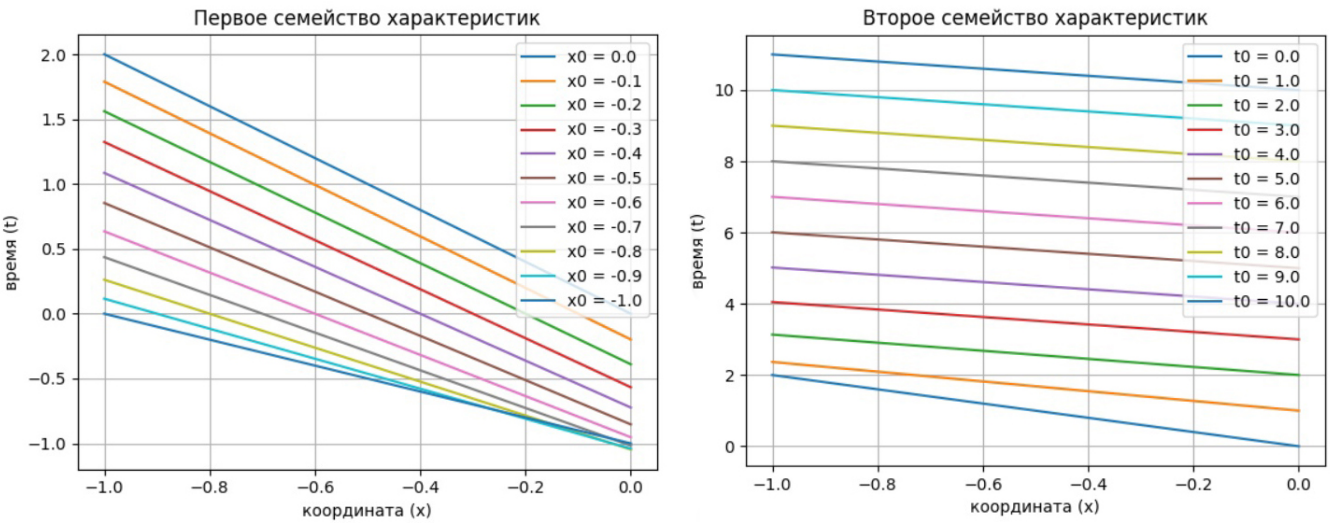


Рис. 1. Характеристики уравнения

Теперь найду точное решение поставленной задачи в неявном виде методом характеристик. Выберу некоторое x^*. Из начальных условий имеем, что $u(x^*,0) = \cos(\frac{\pi x^*}{2})$. На характеристике $u(x^*,t) = \cos(\frac{\pi x^*}{2}) = const$. Тогда получим решение уравнения в виде:

$$\begin{cases} x = x^* - \frac{1}{1+\cos(\frac{\pi x^*}{2})}t \\ u(x,t) = \cos(\frac{\pi x^*}{2}) \end{cases}$$

3. Метод решения.

Перейдем теперь к построению разностной схемы. Введем равномерную сетку:

$x_i = nh, \qquad n = 0, ..., N, \qquad h = -\frac{1}{N}, \qquad t_j = \tau m, \qquad m = 0, ..., M \qquad \tau = \frac{1}{M}$

Здесь N – число узлов по x, а M – число узлов по t. Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial(\ln(1+u))}{\partial x} = 0$$

Обозначим $f(u) = -\ln(1+u)$

Составлять схему будем методом разностной аппроксимации. Введем сеточную функцию $y_{n,m}$ следующим образом:

$$y_{n,m} = u(x_n, t_m) = y_n, \qquad f(y_{n,m}) = f_n$$

Для простоты обозначу значения функций на $m+1$ слое как: $y_{n,m+1} = \hat{y_n}, \qquad f(y_{n,m+1}) = \hat{f_n}$

Для решения уравнения на сетке используется четырехточечный шаблон, поскольку при использовании такого шаблона разностная схема безусловно устойчива, и она имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. Трехточечные шаблоны не применимы, так как коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial x}$: $c < 0$. Можно показать, что безусловная устойчивость будет отсутствовать.

Разностная аппроксимация уравнения в точке $(x_n + \frac{h}{2}, t_m + \frac{\tau}{2})$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\hat{y}_n - y_n + \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}}{2\tau} + \frac{f_{n+1} - f_n + \hat{f}_{n+1} - \hat{f}_n}{2h} = 0 \\ y_{n,0} = \cos(\frac{\pi x_n}{2}) \\ y(0,m) = \exp(-t_m) \end{cases}$$

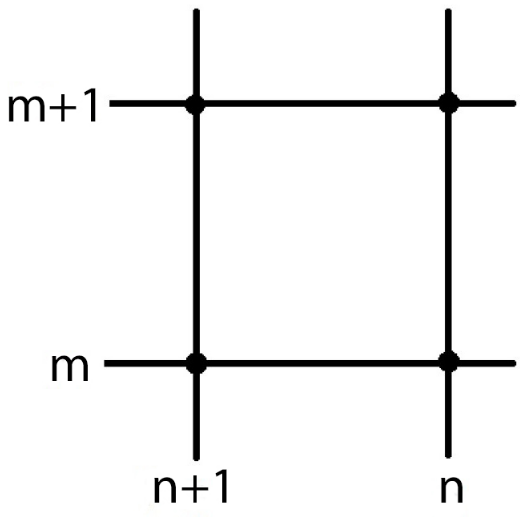


Рис. 2. Четырехточечный шаблон

Данную задачу будем решать при помощи схемы бегущего счета. Значение сеточной функции: $y_{n+1,m+1}$ неизвестно. Считая значения на m-ом слое известным, найдем решение на (m+1) слое. В результате чего можно по начальному и граничному условиям найти решение для любого последующего момента времени. В итоге получим уравнение относительно $\hat{y}_{n+1}$, которое будем решать итерационным методом Ньютона.

$$g(\hat{y}_{n+1}) = \frac{\hat{y}_n - y_n + \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}}{2\tau} - \frac{\ln(y_{n+1}) - \ln(y_n) + \ln(\hat{y}_{n+1}) - \ln(\hat{y}_n)}{2h} = 0$$

$$g'(\hat{y}_{n+1}) = \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2h(1+\hat{y}_{n+1})}$$

Пусть известно некоторое приближение $\hat{y}_{n+1}^{(k)}$ к корню $\hat{y}_{n+1}$, тогда уравнение примет вид:

$$g(\hat{y}_{n+1}^{(k)} + \Delta\hat{y}_{n+1}^{(k)}) = 0, \qquad \Delta\hat{y}_{n+1}^{(k)} = \hat{y}_{n+1} - \hat{y}_{n+1}^{(k)}$$

Разложим уравнение в ряд Тейлора, оставляя только член первого порядка малости, получим:

$$\Delta\hat{y}_{n+1}^{(k)} = -\frac{g(\hat{y}_{n+1}^{(k)})}{g'(\hat{y}_{n+1}^{(k)})}$$

В итоге получим формулу:

$$\hat{y}_{n+1}^{(k+1)} = \hat{y}_{n+1}^{(k)} - \frac{g(\hat{y}_{n+1}^{(k)})}{g'(\hat{y}_{n+1}^{(k)})}$$

Процесс останавливается при достижении заданной точности (невязки) $\varepsilon : |\hat{y}_{n+1}^{(k)} - \hat{y}_{n+1}^{(k-1)}| < \varepsilon$ или при достижении 10000 итераций. Тогда $\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_{n+1}^{(k)}$

4. Проверка сходимости по спектральному критерию Неймана.

Введу функцию: $C(u) = -\frac{1}{1+u}$.

Выберем какую-нибудь произвольную точку (xo,t0). Зафиксируем функцию перед $\frac{\partial u}{\partial x}$, возьмём её равной C. Тогда разностная схема будет иметь вид:

$$\frac{\hat{y}_n - y_n + \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}}{2\tau} + C\frac{y_{n+1} - y_n + \hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n}{2h} = 0$$

Подставляем решение в виде: $y_{n,m} = \lambda^m e^{i\omega n}$. Выражая λ из этого уравнения получаем:

$$\lambda = \frac{h(1+e^{i\omega}) + C\tau(e^{i\omega} - 1)}{h(1+e^{i\omega}) - C\tau(e^{i\omega} - 1)}$$

$$|\lambda| = |\frac{\cos(\frac{\omega}{2}) + \frac{ic\tau}{h}\sin(\frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{\omega}{2}) - \frac{ic\tau}{h}\sin(\frac{\omega}{2})}| = 1$$

Из этого выражения видно, что условие $|\lambda(\omega)| \leqslant 1$ выполнено для любых значений шага по времени и координате, следовательно, спектральный критерий Неймана также выполнен для любых τ и h. Необходимое условие устойчивости выполнено.

5. Достаточное условие сходимости.

Запишу разностную схему в следующем виде:

$$\begin{cases} \hat{y}_{n+1}(1 - \frac{C\tau}{h}) + \hat{y}_n(1 + \frac{C\tau}{h}) = y_n(1 - \frac{C\tau}{h}) + y_{n+1}(1 + \frac{C\tau}{h}) + \tau(\hat{f}_n + f_{n+1}) \\ y_{n,0} = \phi_n \end{cases}$$

Мажорантно оценим левую часть уравнения. Получаем:

$$|\hat{y}_{n+1}|(1-\frac{C\tau}{h})+|\hat{y}_n|(1+\frac{C\tau}{h})\leqslant|y_n|(1-\frac{C\tau}{h})+|y_{n+1}|(1+\frac{C\tau}{h})+\tau(|\hat{f}_n|+|f_{n+1}|)\leqslant 2\|y_m\|+2\tau\|f\|$$

где, $\|f\|=\max\limits_{n,m}|f_{n,m}|$, а $\|y_m\|=\max\limits_{n}|y_{n,m}|$. Отсюда получаем, что $\|y_{m+1}\|\leqslant\|y_m\|+\tau\|f\|$.

Следовательно, $\|y_m\|\leqslant\|y_0\|+m\tau\|f\|\leqslant\|\phi\|+T\|f\|$, где T - величина интервала времени, на котором мы ищем решение. Эта оценка, по определению, означает устойчивость решения задачи по начальным данным и правой части.

6. Геометрический критерий сходимости.

Рассмотрим шаблон разностной схемы. Имеется простой геометрический критерий, позволяющий установить условия устойчивости той или иной схемы бегущего счета по виду шаблона. А именно, на каждом шаге вычисления по любой из рассматриваемых схем, в одной из точек шаблона разностная функция ищется, а в остальных уже известна. Проведем характеристику уравнения из точки, где решение ищется. Если шаги и h выбраны так, что эта характеристика пересекает отрезок соединяющий точки шаблона, в которых решение известно, то схема будет устойчивой. Если же характеристика проходит мимо такого отрезка, то неустойчивой.

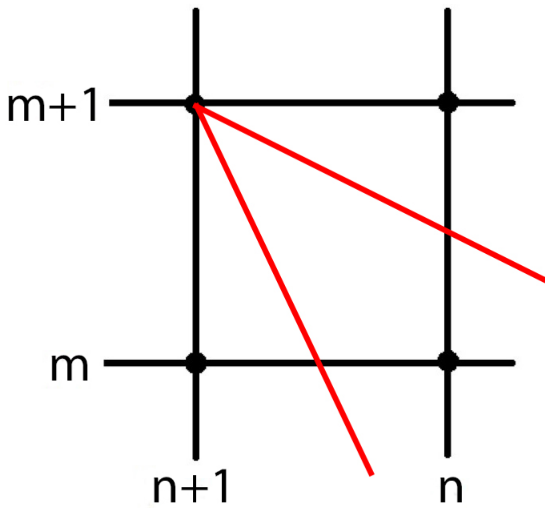


Рис. 3. Геометрический критерий сходимости.

По рисунку видно, что характеристика всегда пересекает отрезок, соединяющий точки, в которых решение известно, при любых выбранных шагах сетки. Таким образом, схема является безусловно устойчивой.

7. Порядок аппроксимации разностной схемы.

Для аппроксимации используется четырехточечный шаблон – схема с симметричными производными. Вычислим порядок аппроксимации (невязку) для этого шаблона. Для этого разложим функции в ряд Тейлора в середине квадрата, т.е. в точке $(x_n+\frac{h}{2},t_m+\frac{\tau}{2})$.

$$y^{m+1}_{n+1}=y^{m+0.5}_{n+0.5}+(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})y+\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^2y+\frac{1}{6}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^3y+...$$

$$y^{m+1}_{n}=y^{m+0.5}_{n+0.5}+(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})y+\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^2y+\frac{1}{6}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^3y+...$$

$$y_{n+1}^m = y_{n+0.5}^{m+0.5} + (-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})y + \frac{1}{2}(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^2 y + \frac{1}{6}(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^3 y + ...$$

$$y_n^m = y_{n+0.5}^{m+0.5} - (\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})y + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^2 y - \frac{1}{6}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau}{2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{h}{2})^3 y + ...$$

Приводя подобные слагаемые, имеем с точностью до членов следующего порядка малости:

$$\frac{\hat{y}_n - y_n + \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}}{2\tau} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{24}\tau^2 y_{ttt} + \frac{1}{8}h^2 y_{txx}$$

$$\frac{\hat{c}_n - c_n + \hat{c}_{n+1} - c_{n+1}}{2h} = \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{8}\tau^2 c_{xtt} + \frac{1}{24}h^2 c_{xxx}$$

Таким образом, разностная схема аппроксимирует задачу с вторым порядком малости как по пространственной координате, так и по времени.

8. Результаты.

В результате выполнения программы получены следующие графики:

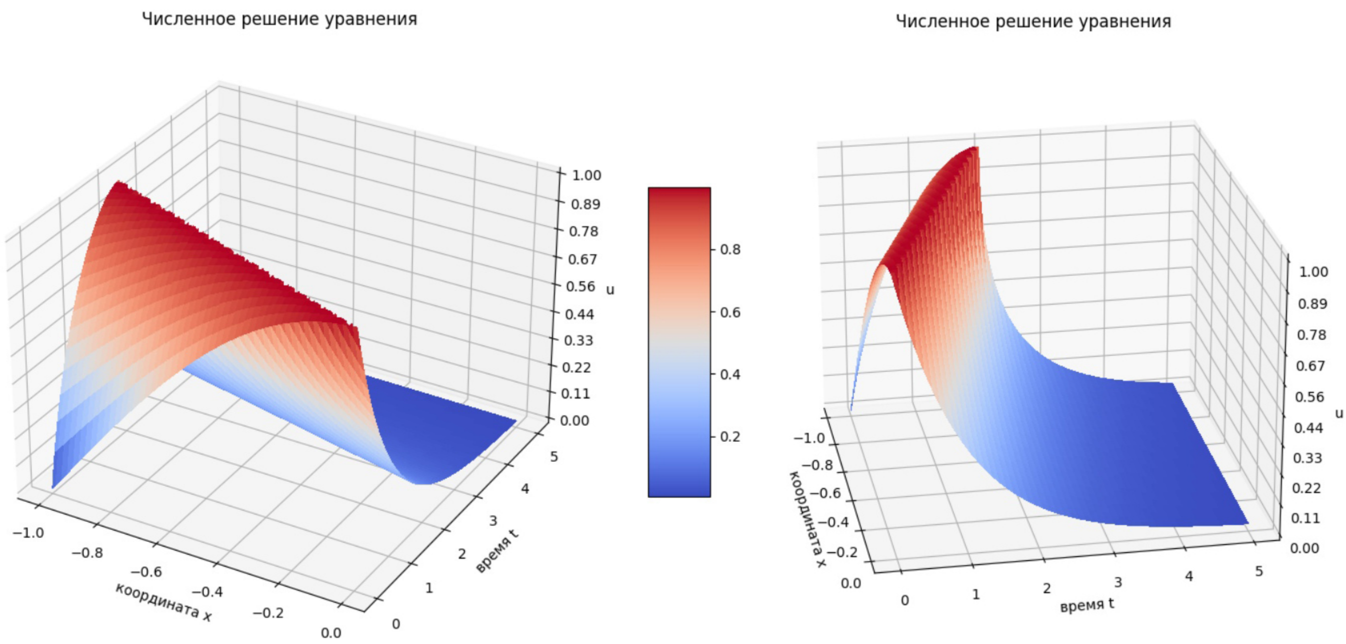
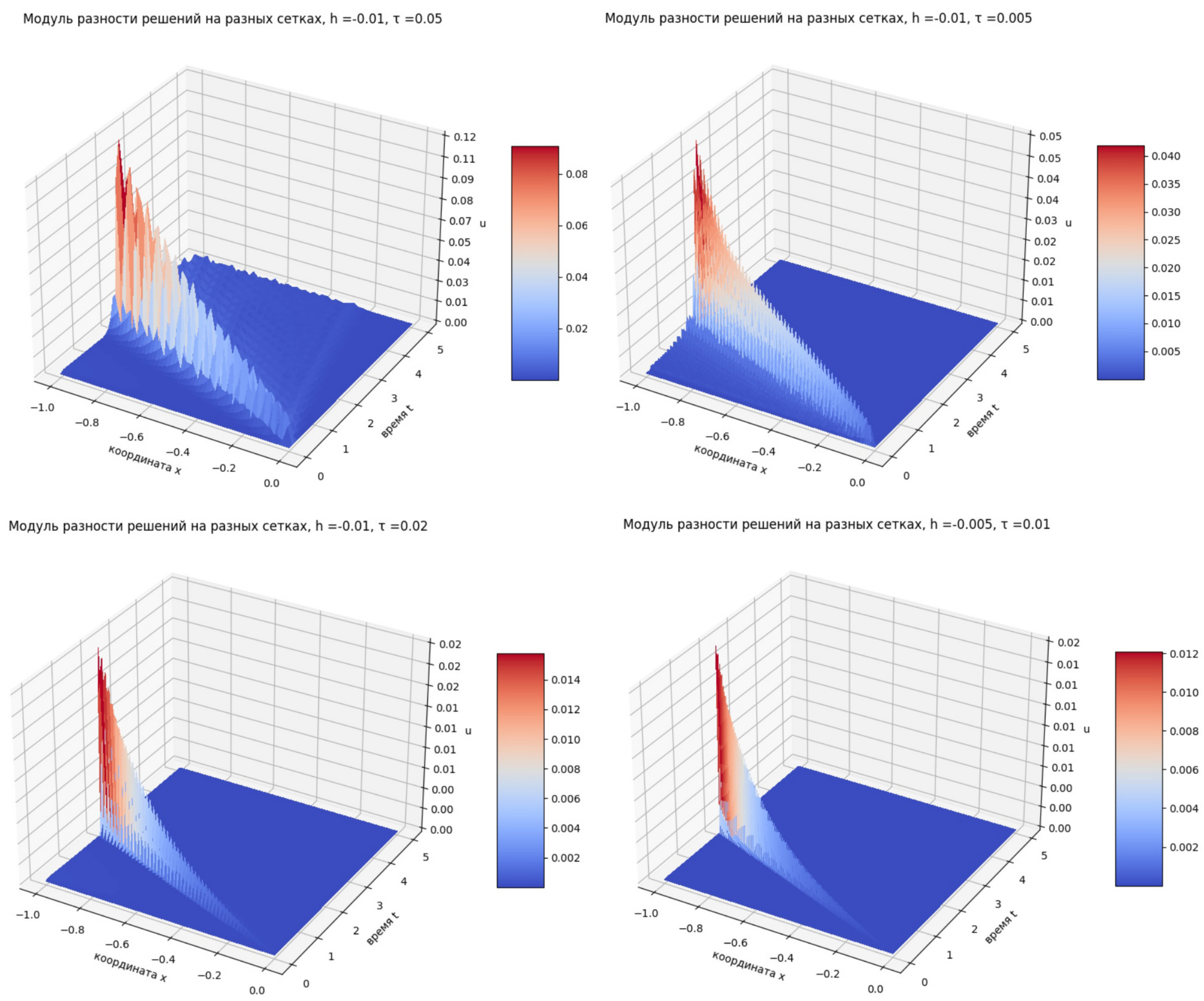


Рис. 4

Модуль разности рассчитывался между решениями с записанным на графике (рис.5) шагом по времени и координате и вдвое большим. Видно, что чем меньше шаг, тем меньше модуль разности между решениями, что подтверждает сходимость.

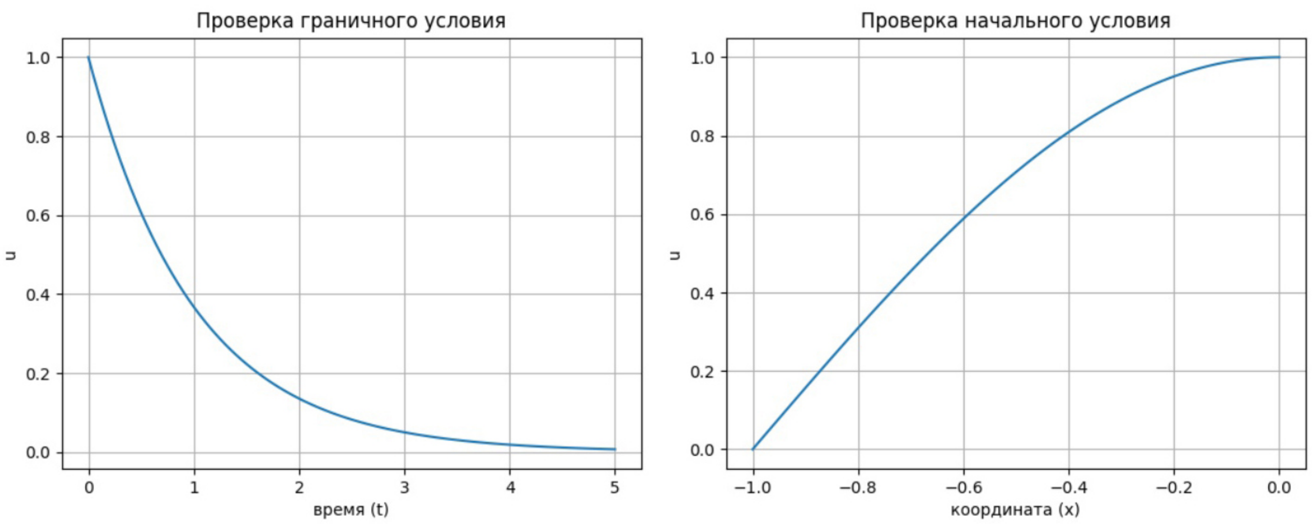
Как видно из рисунка 6 граничные и начальные условия заданы верно.

На рисунках 7 и 8 проилюстрирована сходимость при разных шагах по времени и координате.



Модуль разности решений на разных сетках, h =-0.01, τ =0.05
Модуль разности решений на разных сетках, h =-0.01, τ =0.005
Модуль разности решений на разных сетках, h =-0.01, τ =0.02
Модуль разности решений на разных сетках, h =-0.005, τ =0.01
координата x
время t
u

Рис. 5



Проверка граничного условия
Проверка начального условия
u
время (t)
координата (x)

Рис. 6

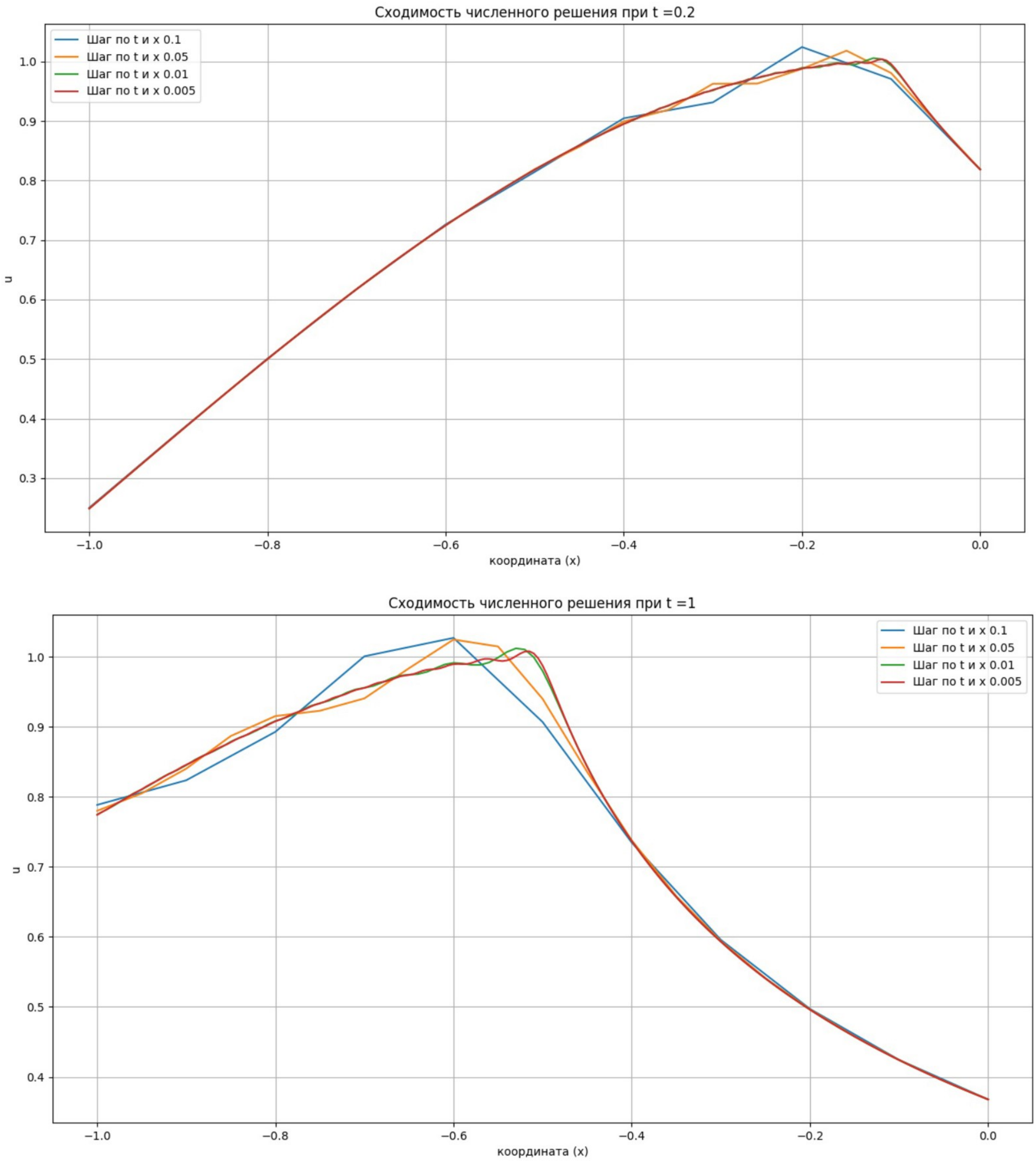

Сходимость численного решения при t =0.2
Шаг по t и x 0.1
Шаг по t и x 0.05
Шаг по t и x 0.01
Шаг по t и x 0.005
u
координата (x)
Сходимость численного решения при t =1
Шаг по t и x 0.1
Шаг по t и x 0.05
Шаг по t и x 0.01
Шаг по t и x 0.005
u
координата (x)

Рис. 7

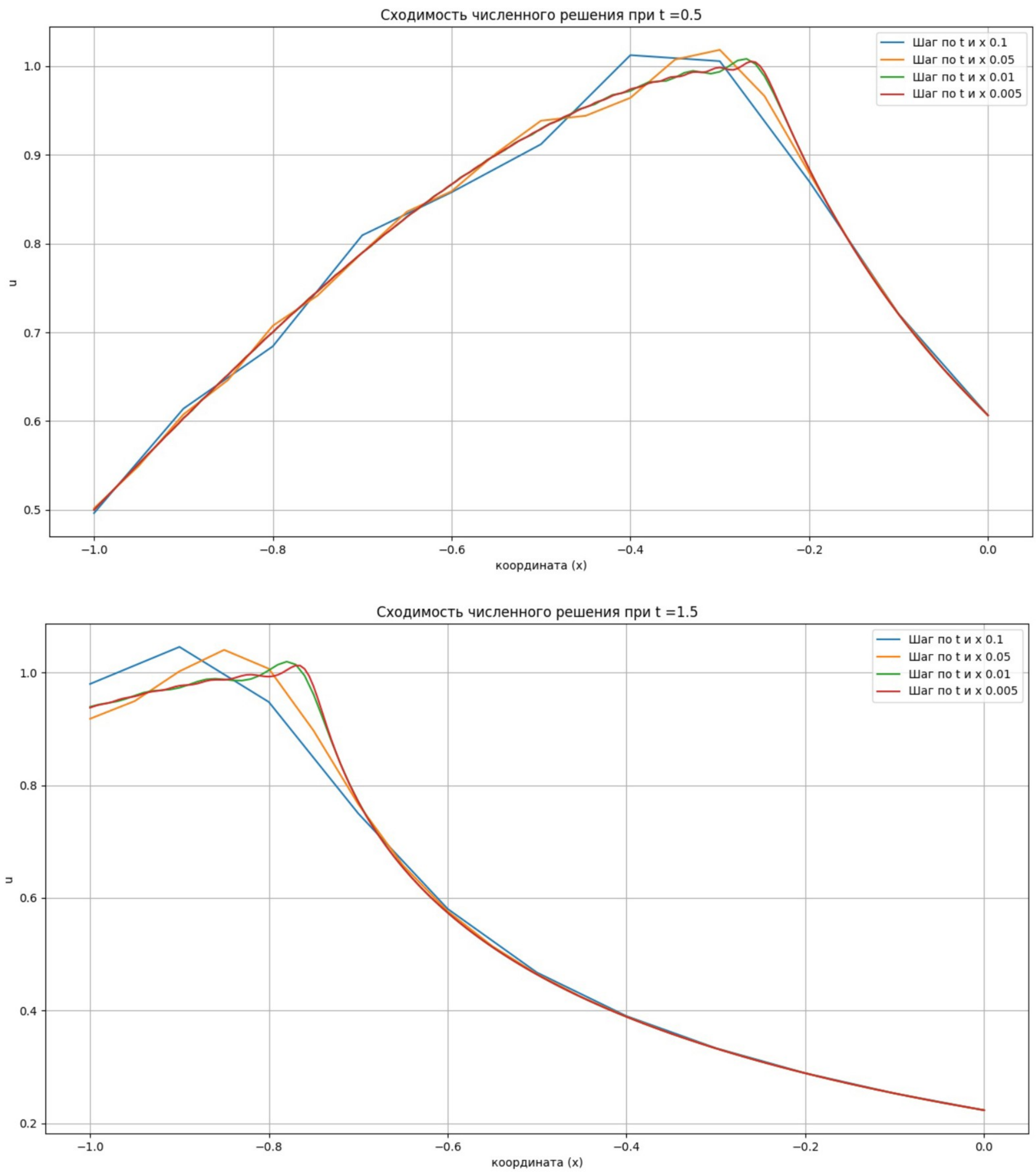

Сходимость численного решения при t =0.5
Шаг по t и x 0.1
Шаг по t и x 0.05
Шаг по t и x 0.01
Шаг по t и x 0.005
u
координата (x)
Сходимость численного решения при t =1.5
Шаг по t и x 0.1
Шаг по t и x 0.05
Шаг по t и x 0.01
Шаг по t и x 0.005
u
координата (x)

Рис. 8