ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В.ЛОМОНОСОВА»
Физический факультет

Отчет по практическому заданию №2 (13.3(6))

Численные методы в физике.

студента 427 группы
Иванова Ивана Ивановича

Москва - 2022

1. Постановка задачи.

Численно решить выписанную ниже задачу Коши на отрезке $t = [0, 20]$ для $v_0 = 0$ и $u_0 = \frac{401}{30}$, используя двухслойную схему с перешагиваем (Leapfrog method).

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \\ u(t=0) = u_0 = \frac{401}{30} \\ \dot{u}(t=0) = v_0 = 0 \end{cases}$$

Необходимо рассмотреть три варианта шага интегрирования:

1) На границе устойчивости

2) Шаг в два раза меньше предыдущего

3) Шаг в 10 раз меньше шага на границе устойчивости

Также для расчета значений функций в следующем за начальным узлом сетки используется способа:

1) один шаг по схеме Эйлера

2)схему Эйлера с шагом в 2 раза меньше шага основной сетки

3)схему Эйлера с шагом в 10 раз меньше шага основной сетки

2. Аналитическое решение.

Общее решение данной задачи Коши известно и оно задаётся следующим выражением:

$$u(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

Подставляя начальные условия в общее решение получаем точное (аналитическое) решение поставленной задачи Коши:

$$u(t) = \frac{401}{30}\cos(t)$$

3. Численное решение.

Для численного решения представлю исходное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка с помощью следующей замены: $\dot{u} = v$. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -u \\ \frac{du}{dt} = v \\ u(t=0) = u_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases}$$

Численно буду решать именно данную систему уравнений. Для целей аналитических оценок устойчивости и порядка аппроксимации численного метода данное уравнение также можно записать в следующем комплексном виде, где $U = u + iv$:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -iU = f(U,t) \\ U(t=0) = u_0 + iv_0 \end{cases}$$

Численное решение осуществляется с помощью двухслойного метода с перепрыгиванием (Leapfrog).

4. Исследование двухслойного численного метода с перепрыгиванием.

Выпишу явно схему данного численного метода.

$$U_{n+1} = U_{n-1} + f_n 2\Delta t$$

Найду оценку погрешности данного метода, для этого рассмотрю некоторую функцию $U(t)$ непрерывных переменных. Разложу функции $U(t_{n\pm1})$ в ряд Тейлора в точке t_n:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\partial U}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\Delta t^3$$

$$U_{n-1} = U_n - \frac{\partial U}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Delta t^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\Delta t^3$$

Подставляем эти выражения в исходную разностную схему и получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\Delta t^2 = f_n$$

Вычитая из этого выражения точный дифференциальный оператор получим оценку для ошибки данной схемы:

$$z_n = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\Delta t^2 = O(\Delta t^2)$$

Метод имеет второй порядок точности по Δt.

Теперь исследую устойчивость данного метода. Пусть ϵ_n - ошибка решения на n-ом шаге, тогда запишем уравнение:

$$U_{n+1} + \epsilon_{n+1} = U_{n-1} + \epsilon_{n-1} + f_n(U_n + \epsilon_n)2\Delta t$$

Разложу функцию f по U и подставлю уравнению. Тогда получим следующее уравнение для ошибки ϵ:

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_{n-1} + \frac{\partial f}{\partial U}\epsilon_n 2\Delta t$$

Введу множитель перехода λ, такой, что $\epsilon_{n+1} = \lambda\epsilon_n$, тогда получим следующее квадратное уравнение на поиск λ:

$$\lambda^2 - 2\frac{\partial f}{\partial U}\Delta t\lambda - 1 = 0$$

Решение уравнения имеет следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\partial f}{\partial U}\Delta t \pm \sqrt{\frac{\partial f}{(\partial U}\Delta t)^2 + 1}$$

Теперь рассмотрим конкретно нашу задачу: осцилляторное решение, где $f(U,t) = -i\omega U$, где ω - собственная частота осциллятора, тогда:

$$\lambda_{1,2} = -i\omega\Delta t \pm \sqrt{1 - (\omega\Delta t)^2}$$

Если $\omega\Delta t \leq 1$, то $|\lambda_{1,2}| \leq 1$, схема является условно устойчивой.

Условие устойчивости: $\Delta t \leq \frac{1}{\omega}$. В конкретно нашей задаче частота равна 1, а значит, что шаг Δt должен быть меньше 1.

При этих условиях двухслойная схема с перешагиваем (Leapfrog method) устойчива и сходится к аналитическому решению со вторым порядком по времени.

5. Результаты численного решения.

Языком для реализации численного метода выбран Python и библиотеки numpy и matplotlib.

Особенность моей реализации численного метода для этой задачи заключается в том, что не смотря на то, что в правой части нет явной зависимости от времени, время всё равно вычисляется и передаётся во все функции, т.е. данный алгоритм может решать задачи, у которых правая часть уравнения явно зависит от времени без модификаций в алгоритме. Также стоит отметить, что при минимальных изменениях в коде, данный алгоритм способен решать систему из n дифференциальных уравнений первого порядка благодаря векторной записи вычислений. Все графики были построены внутри самой программы.

На графиках ниже представлены численные решения при различных шагах по времени. Видно, что если брать $\Delta t = 1$, то даже качественное решение получить невозможно. Также видно, что при таком шаге решение расходится. Если же взять шаг в 2 раза меньше, то уже можно получить решение, качественно напоминающее косинус, также стоит отметить, что решение не расходится. Если же шаг уменьшить в 10 раз, то уже получаем очень хорошее соответствие с точным решением.

При же увеличении количества шагов в схеме Эйлера уменьшается "начальная"ошибка метода Leapfrog.

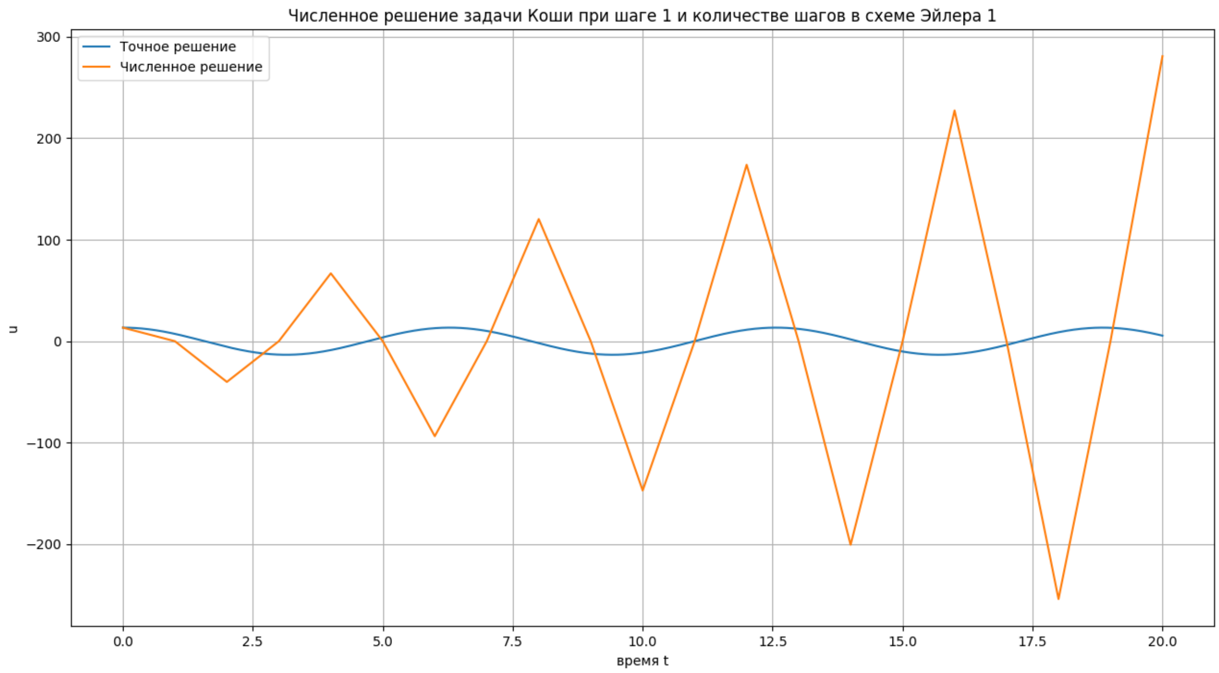
Видно, что ошибка численного решения осциллирует и чем меньше шаг, тем меньше максимальное значение ошибки соответственно. Так же видно, что максимальное значение ошибки при каждом шаге растёт с увеличением t.

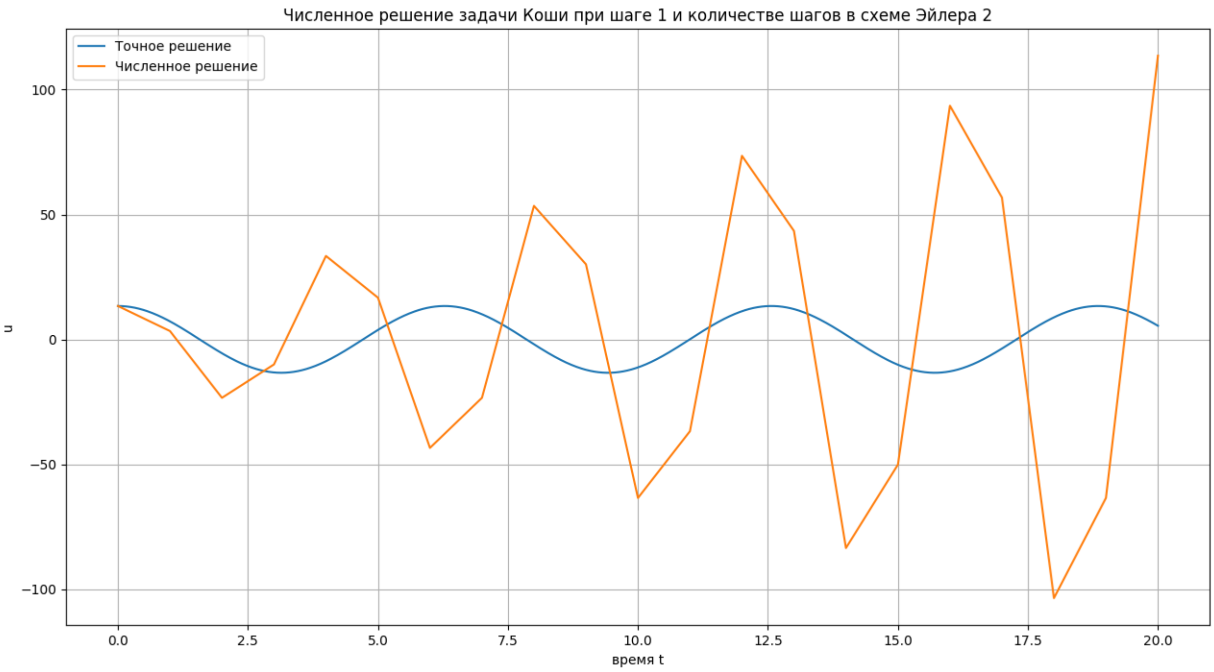
1) Метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации по времени, двухслойный метод с перепрыгиванием имеет второй порядок точности, поэтому, чтобы не "ухудшать"порядок аппроксимации Leapfrog необходимо выбирать шаг схемы Эйлера, равной квадрату шага схемы с перепрыгиванием. В самой же работе видна зависимость погрешности решения от точности первого шага по схеме Эйлера.

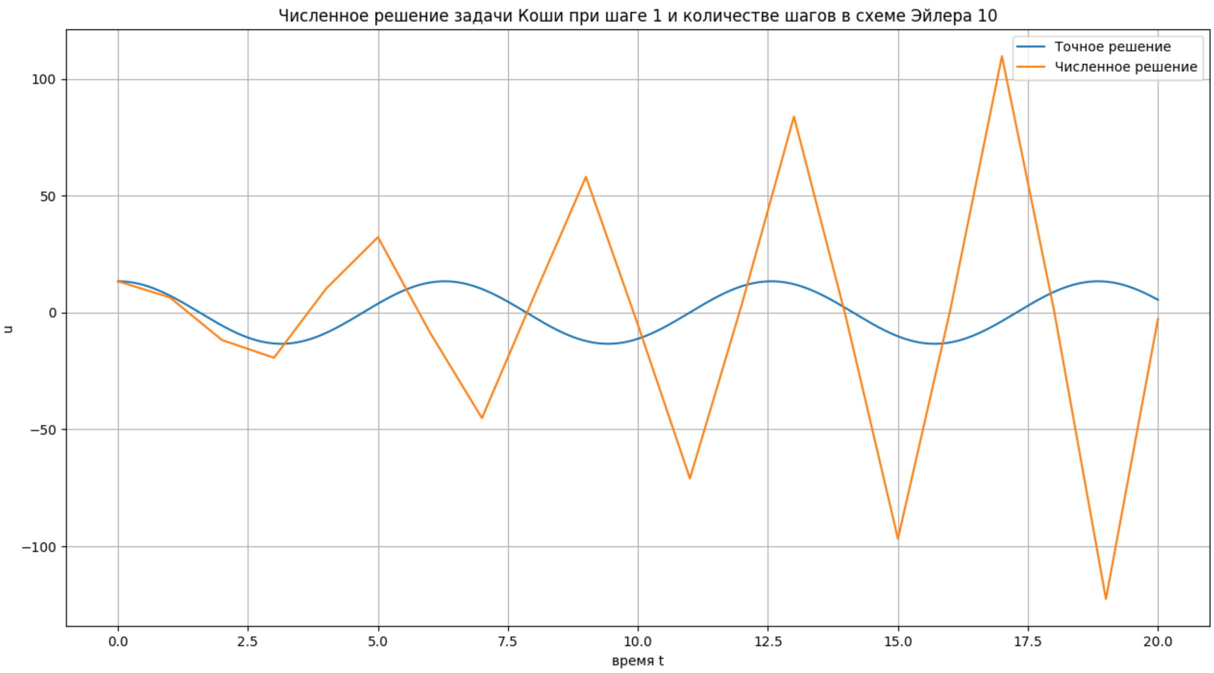
2) Условие устойчивости имеет вид: $\Delta t \leq \frac{1}{\omega}$, однако в работе было продемонстрировано, что значение шага, взятое на границе устойчивости даёт только качественное поведение решения. Тоже самое можно сказать про шаг в два раза меньший, чем $\frac{1}{\omega}$. Хорошая точность

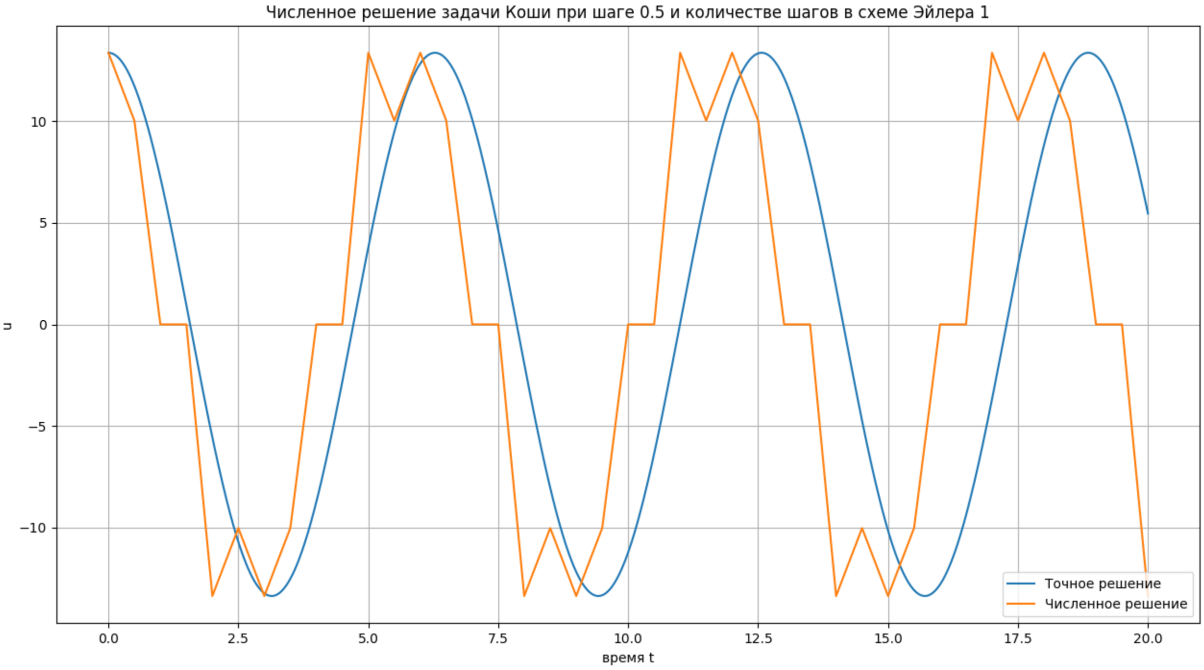
получена на шаге в 10 раз меньшим, чем $\frac{1}{\omega}$. Я бы назвал это значение оптимальным по временным затратам и полученной точности решения. Если же необходимо рассматривать поведение решения на временах больших, нежели рассмотренных в данной задаче 20 секунд, то шаг сетки стоит уменьшить.

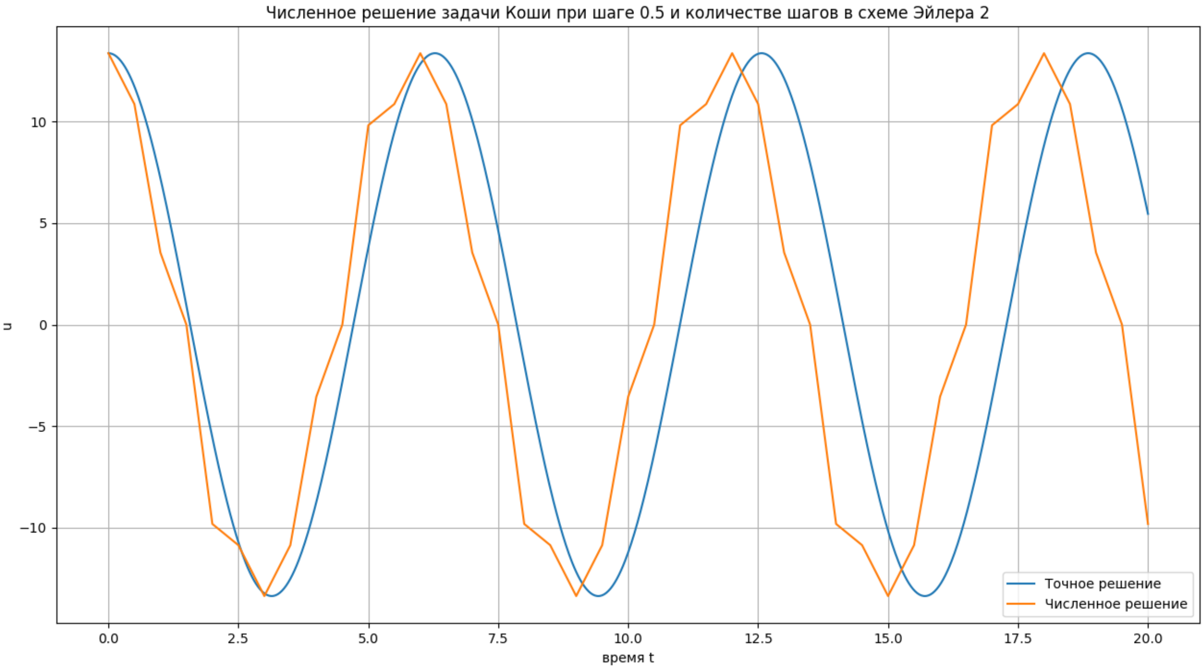
3) Также стоит отметить, что собственная частота может быть довольно маленькой величиной, как и рассматриваемый промежуток времени, из-за чего решение может выглядеть "угловатым"из-за большого шага по сравнению с интервалом времени. В таком случае можно уменьшить шаг, если это позволяют вычислительные ресурсы, в эстетических целях.

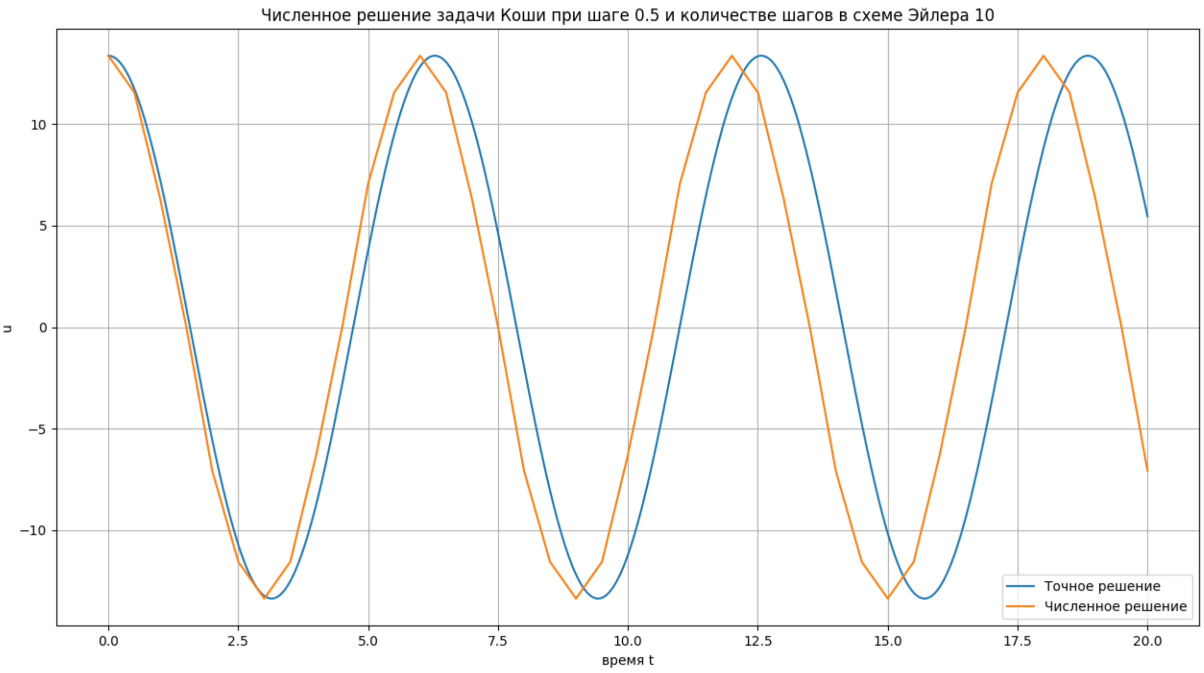


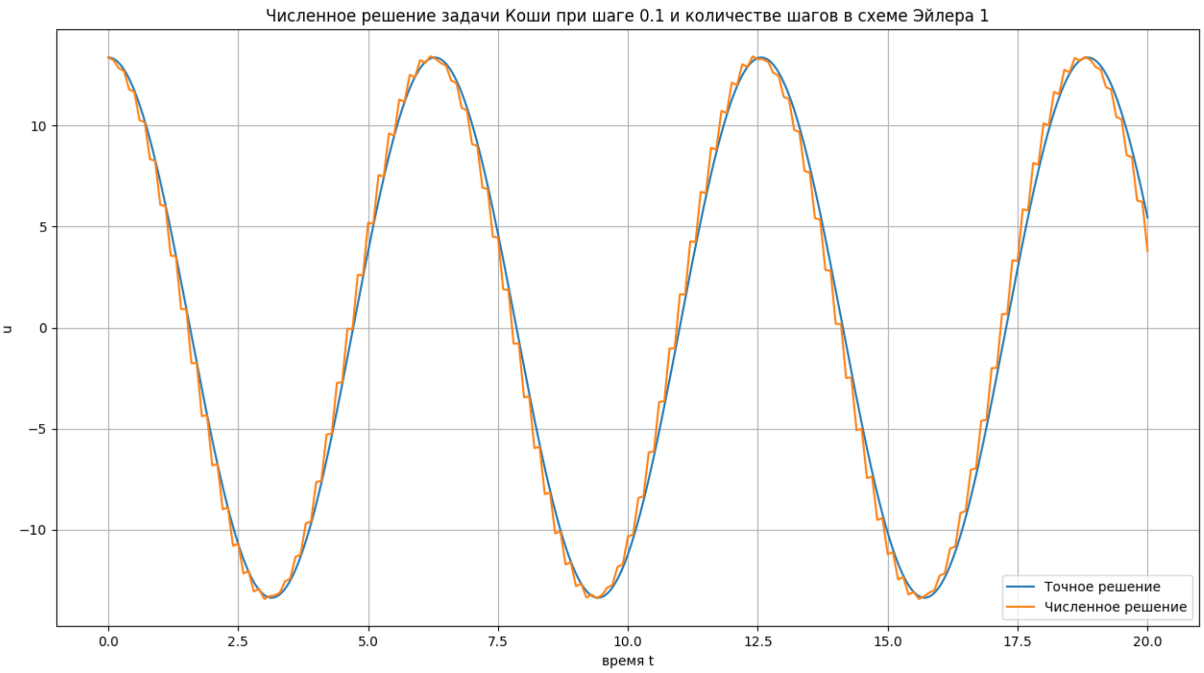

Численное решение задачи Коши при шаге 1 и количестве шагов в схеме Эйлера 2
Точное решение
Численное решение
u
время t

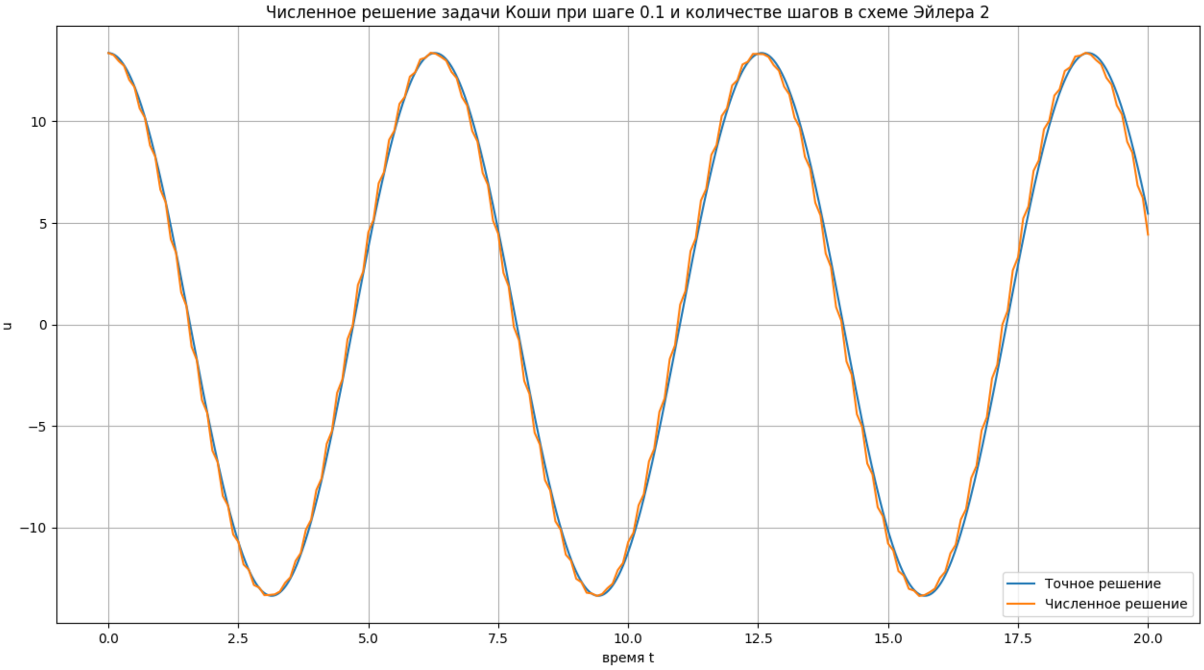

Численное решение задачи Коши при шаге 1 и количестве шагов в схеме Эйлера 10
Точное решение
Численное решение
u
время t

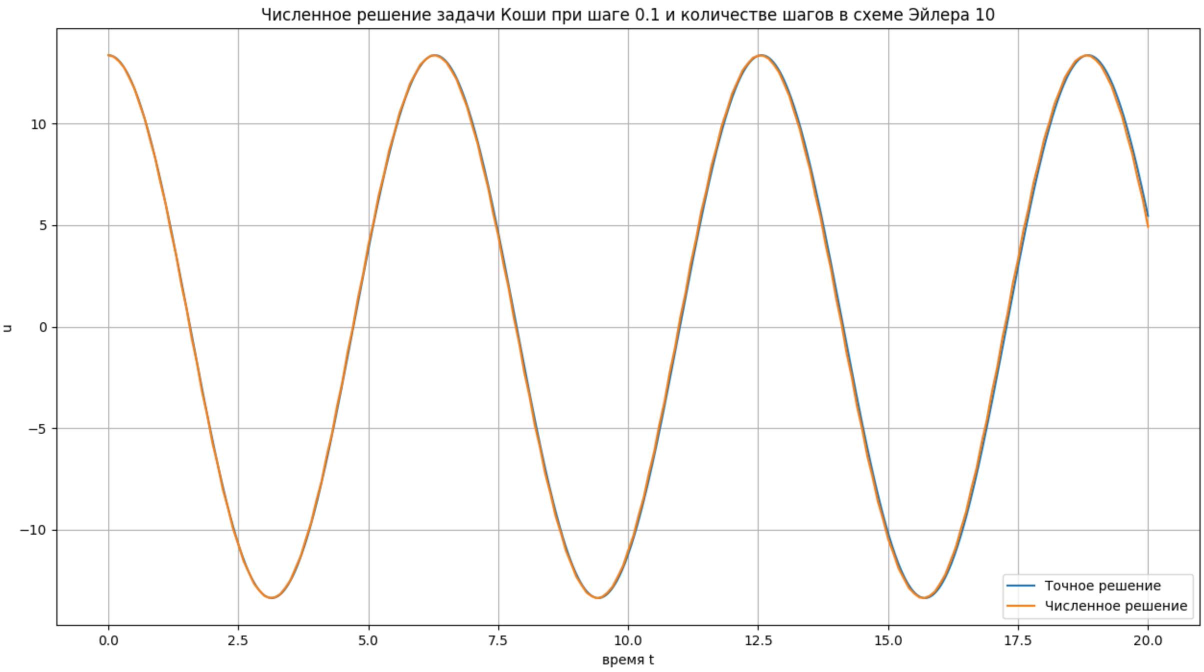

Численное решение задачи Коши при шаге 0.5 и количестве шагов в схеме Эйлера 1
u
время t
Точное решение
Численное решение

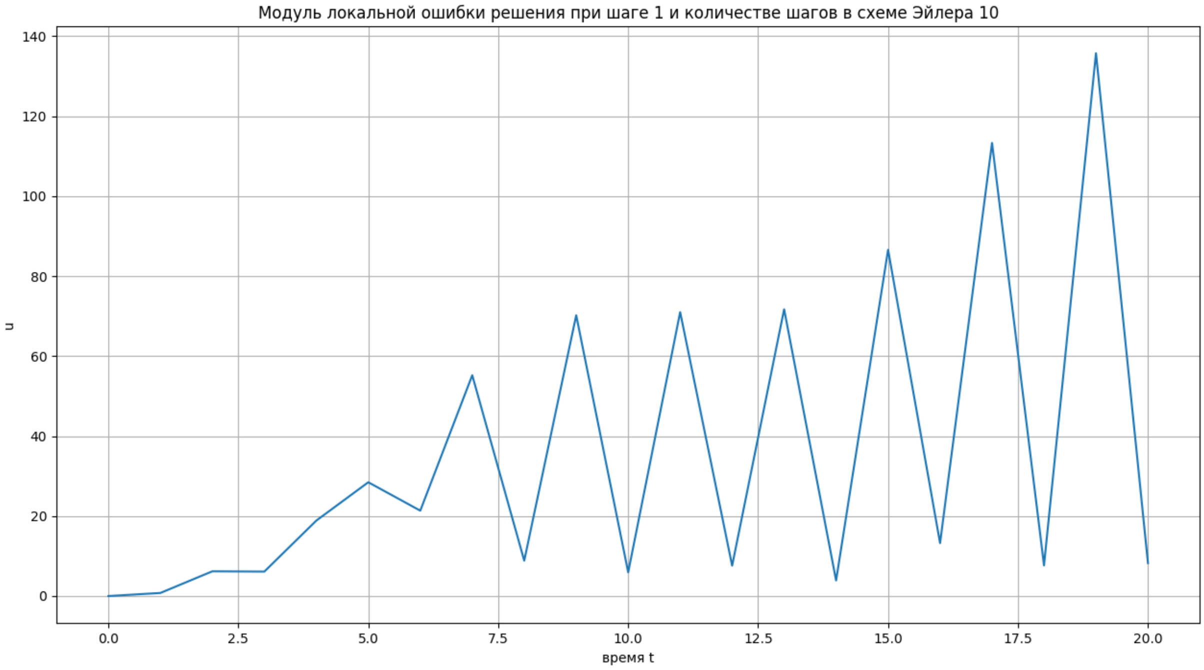

Численное решение задачи Коши при шаге 0.5 и количестве шагов в схеме Эйлера 2
u
время t
Точное решение
Численное решение

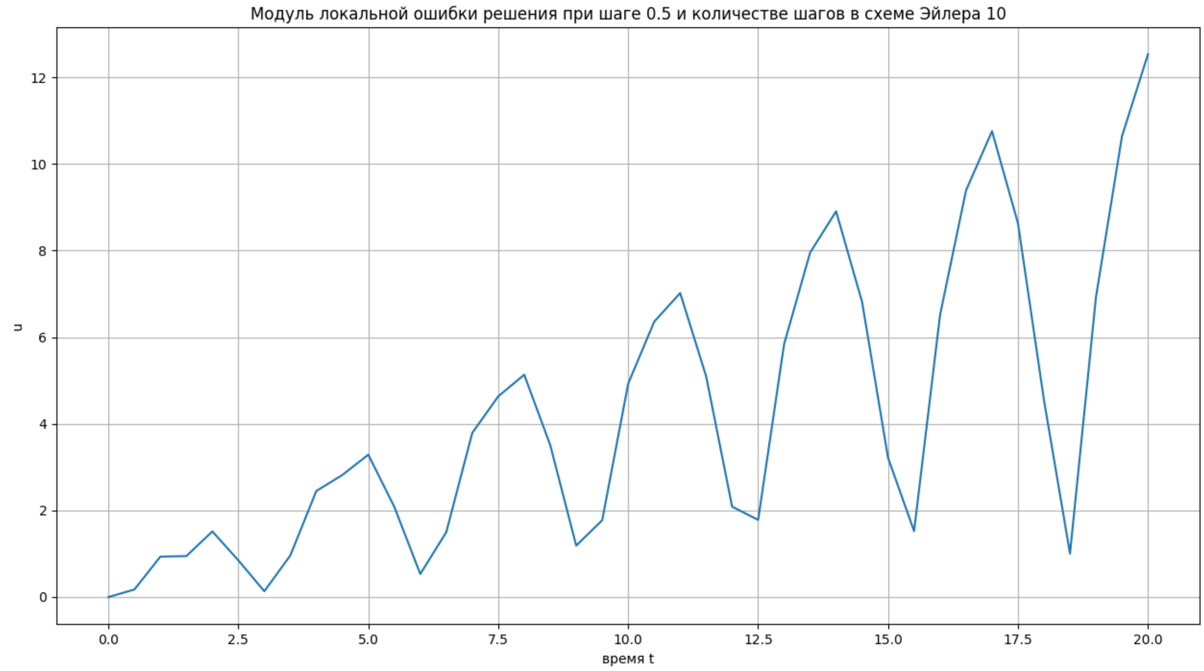

Численное решение задачи Коши при шаге 0.5 и количестве шагов в схеме Эйлера 10
u
время t
Точное решение
Численное решение

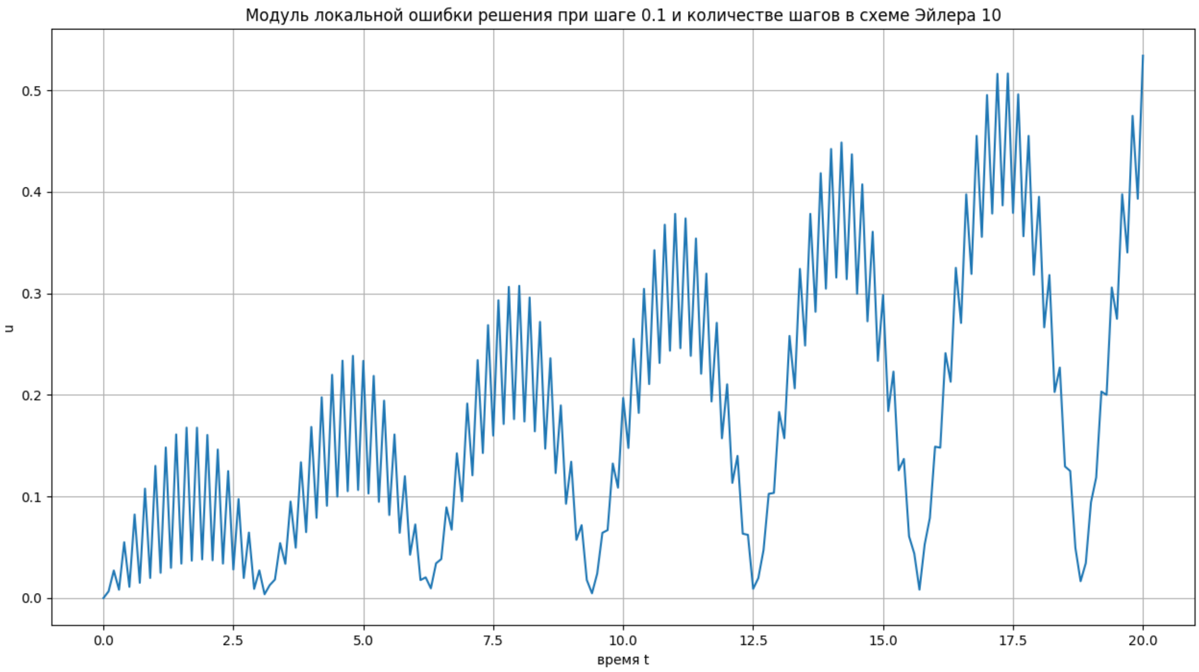

Численное решение задачи Коши при шаге 0.1 и количестве шагов в схеме Эйлера 1
u
время t
Точное решение
Численное решение

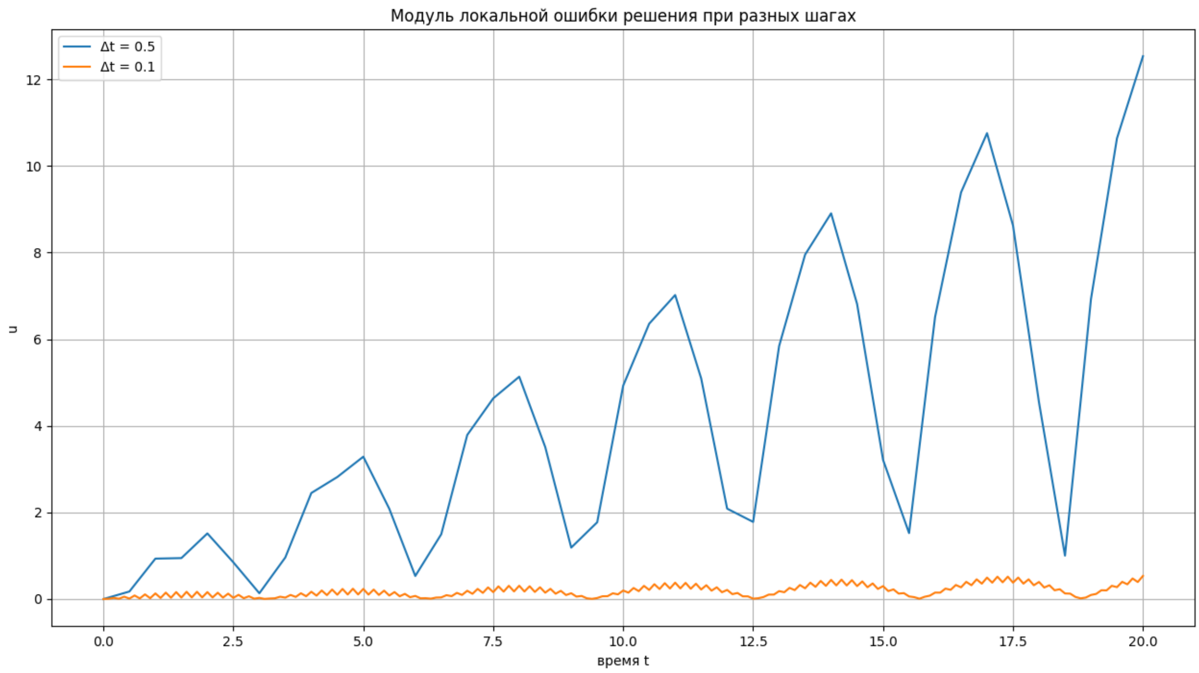

Численное решение задачи Коши при шаге 0.1 и количестве шагов в схеме Эйлера 2
u
время t
Точное решение
Численное решение


Численное решение задачи Коши при шаге 0.1 и количестве шагов в схеме Эйлера 10
u
время t
Точное решение
Численное решение


Модуль локальной ошибки решения при шаге 1 и количестве шагов в схеме Эйлера 10
u
время t
0
20
40
60
80
100
120
140
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


Модуль локальной ошибки решения при шаге 0.5 и количестве шагов в схеме Эйлера 10
u
время t
0
2
4
6
8
10
12
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


Модуль локальной ошибки решения при шаге 0.1 и количестве шагов в схеме Эйлера 10
u
время t


Модуль локальной ошибки решения при разных шагах
Δt = 0.5
Δt = 0.1
u
время t