Улучшенный метод Эйлера

$$\begin{cases} u'_{n+1} = u_n + f_n(u_n, t_n)\Delta t \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left[f(u_n, t_n) + f(u'_{n+1}, t_{n+1})\right]\Delta t \end{cases}$$

Исследую устойчивость данного метода.

$$\begin{cases} u'_{n+1} + \varepsilon'_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + f_n(u_n + \varepsilon_n, t_n)\Delta t \\ u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + \frac{1}{2}\left[f(u_n + \varepsilon_n, t_n) + \right. \\ \left. + f(u'_{n+1} + \varepsilon'_{n+1}, t_{n+1})\right]\Delta t \end{cases}$$

Разложу в ряд Тейлора f:

$$\begin{cases} u'_{n+1} + \varepsilon'_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + f(u_n)\Delta t + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n \varepsilon_n \Delta t + \underline{\underline{O}}(\varepsilon_n^2) \\ u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + \frac{1}{2}\left[f(u_n) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n \varepsilon_n + \right. \\ \left. + f(u'_{n+1}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{n+1} \varepsilon'_{n+1}\right]\Delta t + \underline{\underline{O}}(\varepsilon_n^2) + \underline{\underline{O}}(\varepsilon'^2_{n+1}) \end{cases}$$

Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon'_{n+1} = \varepsilon_n + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n \varepsilon_n \Delta t + \underline{\underline{O}}(\varepsilon_n^2) \quad (1) \\ \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n \varepsilon_n + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{n+1} \varepsilon'_{n+1}\right]\Delta t + \\ + \underline{\underline{O}}(\varepsilon_n^2) + \underline{\underline{O}}(\varepsilon'^2_{n+1}) \quad (2) \end{cases}$$

Для простоты буду считать, что шаг сетки достаточно мал для того, чтобы:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_n = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{n+1} \equiv \frac{\partial f}{\partial u}$$

подставлю ε'_{n+1} в (2)

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u}\left[2\varepsilon_n + \frac{\partial f}{\partial u}\varepsilon_n \Delta t\right]\Delta t + \\ + \underline{\underline{O}}(\varepsilon_n^2)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \lambda \varepsilon_n$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u}\left[2 + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta t\right]\Delta t$$

$$\lambda = 1 + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\Delta t\right)^2$$

① Решение с нарастанием:

$$\frac{\partial f}{\partial u} > 0$$

$\lambda > 1$ – неустойчива $\forall\, t$

② Решение с затуханием:

$$\frac{\partial f}{\partial u} < 0$$

$$\lambda = \left|1 - \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\Delta t^2\right| \le 1$$

1) $$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\Delta t^2 - 2\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\Delta t \le 0$$

$$\Delta t \in \left[0;\ \frac{2}{\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|}\right]$$

2) $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \Delta t^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \Delta t + 2 \geq 0$

$\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \Delta t - 1\right)^2 + \frac{3}{2} \geq 0$ – всегда

$\boxed{\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \Delta t \leq 2}$ – условие устойчивости

③ Решение осцилляторного типа:

$F(u) = -i\omega u \quad ; \quad u(t) = u_0 e^{-i\omega t}$

$\lambda = 1 + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} \Delta t\right)^2$

$\lambda = 1 - i\omega \Delta t + \frac{1}{2}\left(-i\omega \Delta t\right)^2 =$

$= 1 - i\omega \Delta t - \frac{1}{2}\omega^2 \Delta t^2$

$|\lambda|^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 \Delta t^2\right)^2 + \omega^2 \Delta t^2 = 1 + \frac{1}{4}\omega^4 \Delta t^4$

Схема неустойчива.

$|\lambda|^2 > 1 \quad \forall \Delta t$