

# Obliczenia naukowe - Lista nr 4

Paweł Narolski

6 grudnia 2018 r.

## 1 Interpolacja wielomianowa funkcji

### 1.1 Obliczanie ilorazów różnicowych funkcji

Naszym pierwszym zadaniem zrealizowanym na potrzeby niniejszej listy laboratoryjnej z *Obliczeń Naukowych* było zaimplementowanie algorytmu obliczającego ilorazy różnicowe danej funkcji na podstawie danych wektorów węzłów oraz wartości, które przyjmuje funkcja.

Ilorazem różnicowym  $n$ -tego rzędu funkcji  $f : X \rightarrow Y$  w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$  nazywamy funkcję:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0}^n (x_i - x_j)}. \quad (1)$$

W celu zrealizowania zadania bez konieczności użycia tablicy wielowymiarowej (macierzy) posługujemy się zależnością rekurencyjną:

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) & (0 \leq i \leq N) \\ f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}]}{x_{k+m} - x_k} & (0 \leq k < k+m \leq n) \end{cases} \quad (2)$$

Wynikiem przeprowadzonych obliczeń jest wektor  $f_{diff}$  zawierający obliczone ilorazy różnicowe danej funkcji

### 1.2 Obliczanie wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia $n$ w postaci Newtona w danym punkcie

W celu obliczenia wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n$  w postaci Newtona  $N_n(x)$  w punkcie  $x = t$  zaimplementowano *uogólniony schemat Hornera*.

Wartość wielomianu przyjmowania w danym punkcie  $t$  obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$w(x) = (x - t) \cdot q(z) \cdot w(t) \quad (3)$$

Algorytm zaczynamy od przypisania do zmiennej  $nt$  danego wektora ilorazów różnicowych. W kolejnych iteracjach pętli, począwszy od  $i = n - 1$  zwiększamy odpowiednią wartość wektora o poprzednią wartość wektora pomnożoną przez różnicę wartości węzła  $i$  wielomianu i  $t$ . Otrzymujemy wzór:

$$nt = f_{diff}(i) + nt * (t - w[i]) \quad (4)$$

gdzie  $f_{diff}$  - wektor ilorazów różnicowych. Przygotowany algorytm działa w czasie liniowym.

### 1.3 Obliczanie współczynników postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona

Zajmiemy się teraz omówieniem implementacji algorytmu, którego zadaniem jest obliczanie wartości współczynników postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona.

W celu obliczenia współczynników korzystamy z zależności opisanych wzorami:

$$\begin{cases} w_n(x) = f(x_0, \dots, x_i) \\ w_k(x) = (x - x_k)w_{k+1}(x), (k = n-1, \dots, 0) \\ N_n(x) = w_0(x) \end{cases} \quad (5)$$

Wielomian  $w_k$  posiada współczynniki przy odpowiadających im potęgach  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ , gdzie  $a_k$  - współczynnik leżący przy największej potędze. Ustalamy, że  $w_k(i) = a_i$ .

Dokonujemy mnożenia danego wielomianu począwszy od jego ostatnich potęg. W każdym kolejnym kroku nasz wielomian początkowy  $w_n(x)$  mnożymy przez dwumian  $t = (x - x_{n-1})$ , gdzie  $t_1 = 1, t_2 = -x_{n-1}$ .

Wielomian wynikowy  $w_k$  będzie reprezentowany jako wektor współczynników przy odpowiednich potęgach, gdzie  $a_l = t[i] * w_{k-1}[j]$ , gdzie  $l = i \times j$  dla każdego  $i, j$  spełniających warunek. Dokonując takich mnożeń otrzymany wielomian wynikowy będzie miał postać analogiczną do tej przedstawionej na wejściu.

Po wykonaniu poszczególnych mnożeń otrzymujemy postać wielomianu wynikowego  $w_0$ , którego współczynniki wynoszą kolejno  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ . Aby otrzymać wielomian w postaci  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  musimy zatem dokonać odpowiednie przestawienia. Ponieważ złożoność obliczeniowa schematu Hornera wynosi  $O(n)$ , a mnożenie wielomianów również  $O(n)$ , całkowita złożoność obliczeniowa programu wynosi  $O(n^2)$ .

### 1.4 Wizualizowanie wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona i graficzne porównanie z wykresem interpolowanej funkcji

Za pomocą przygotowanego programu w języku Julia dokonamy wizualizacji danego wykresu funkcji  $f(x)$  oraz obliczonego wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n$  w postaci Newtona.

Zaimplementowana zgodnie ze specyfikacją zadania funkcja *rysujNnfx* oblicza odległość pomiędzy kolejnymi węzłami, a następnie wartości przyjmowane przez funkcję  $f$  w poszczególnych węzłach interpolacji.

Następnie korzystamy z zaimplementowanej wcześniej funkcji *ilorazyRoznicowe* w celu obliczenia ilorazów różnicowych danej funkcji  $f$  oraz dokonujemy obliczenia wartości przyjmowanych przez wielomian interpolacyjny w  $n$  równo oddalonych od siebie punktach (przyjmujemy  $n = 100$  dla uzyskania dużej dokładności interpolacji).

Wykresy funkcji przygotowujemy przy użyciu pakietu *Plots* dostępnego dla programistów języka *Julia*.

#### 1.4.1 Wykresy funkcji, których wartości pokrywają się z wartościami wielomianu interpolacyjnego

Działanie przygotowanego programu przetestowaliśmy na zadanych przykładach:

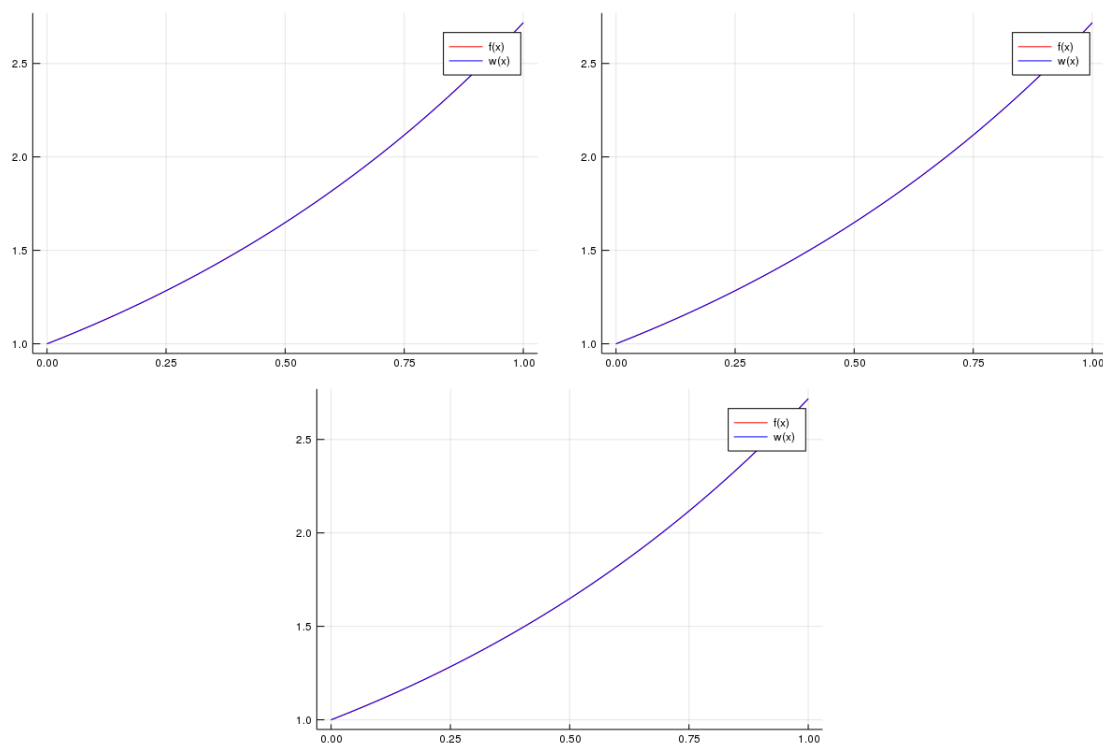
$$f(x) = e^x \quad (6)$$

dla przedziału  $[0, 1]$  oraz  $n = 5, 10, 15$ , a także

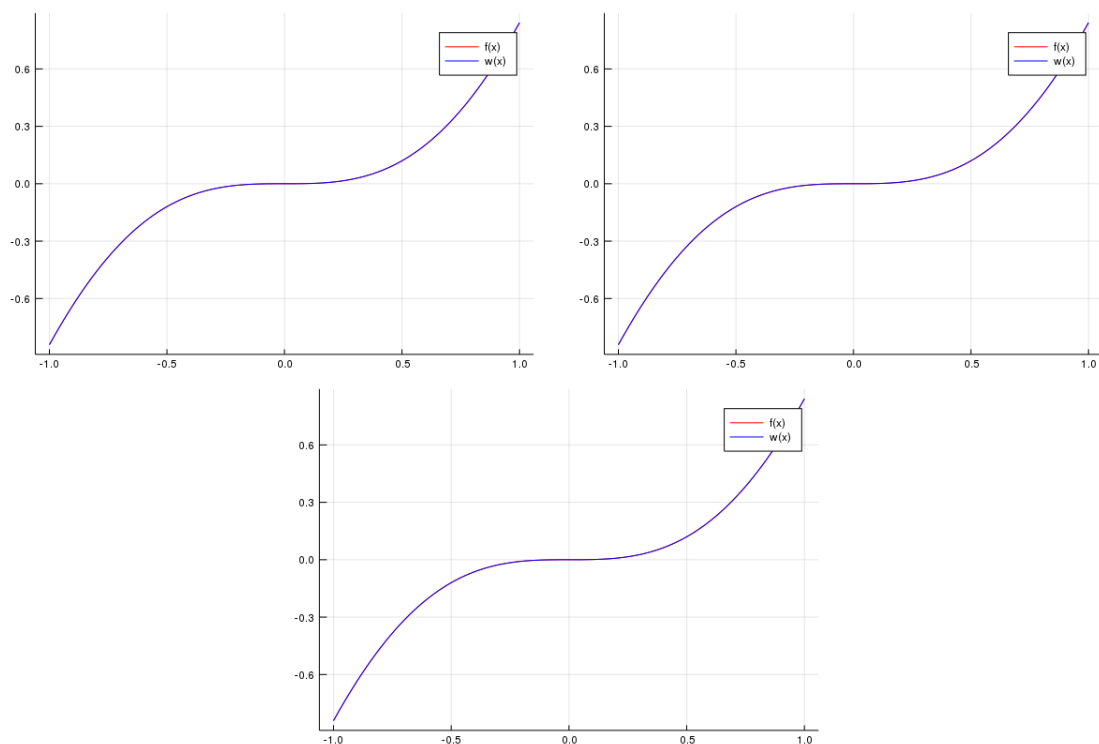
$$f(x) = x^2 \sin(x) \quad (7)$$

dla przedziału  $[-1, 1]$  oraz  $n = 5, 10, 15$ .

Wykresy funkcji (6) kolejno dla  $n = 5, 10, 15$  prezentują się następująco:



Dla funkcji (7) zaś kolejno dla  $n = 5, 10, 15$  otrzymujemy następujące wyniki:



Zauważamy, że na zadanych przedziałach liczbowych wartości funkcji dla danych argumentów oraz wartości wielomianów interpolacyjnych bardzo dobrze pokrywają się.

Co więcej, zwiększenie stopnia wielomianu wpływa na poprawę jakości interpolacji. Wartości danej funkcji  $f(x)$  bardzo dobrze pokrywają się z wartościami przyjmowanymi przez wielomian interpolacyjny.

### 1.4.2 Wykresy funkcji, których wartości nie pokrywają się z wartościami wielomianu interpolacyjnego

Dokonałiśmy także sprawdzenia otrzymywanych wyników dla przykładów:

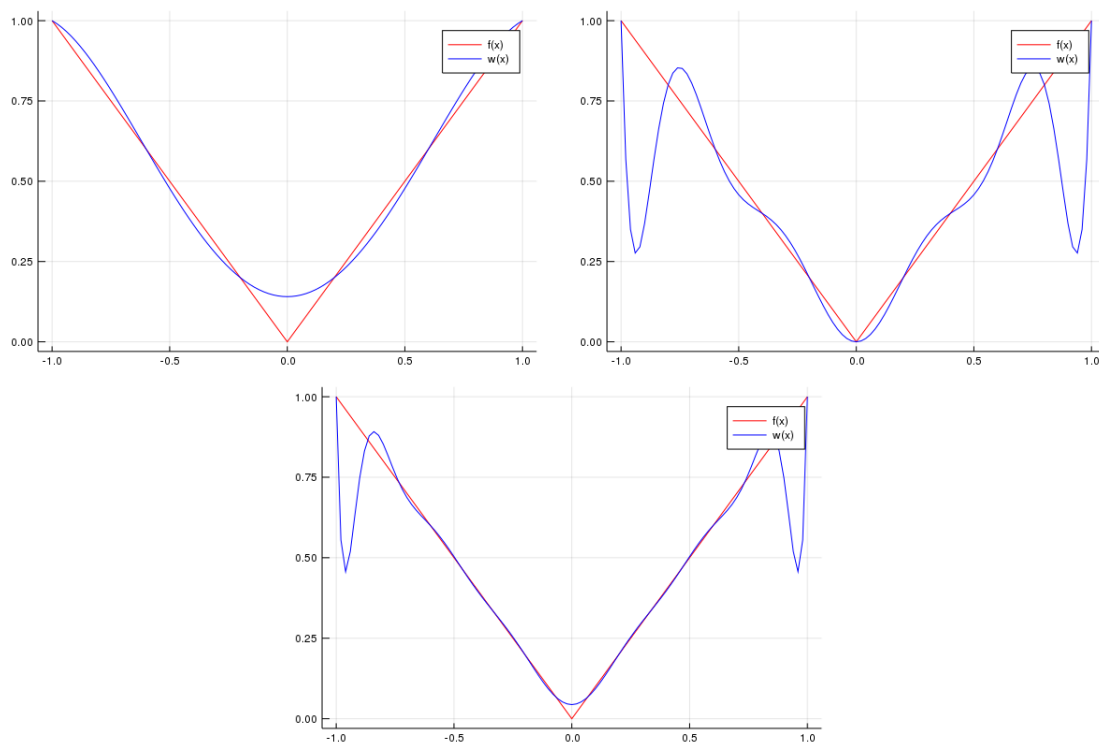
$$f(x) = |x| \quad (8)$$

dla przedziału  $[-1, 1]$ ,  $n = 5, 10, 15$  oraz

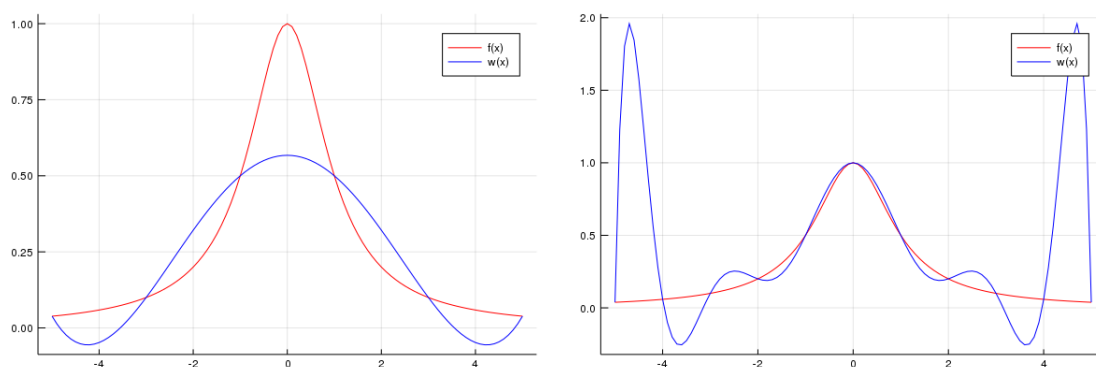
$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

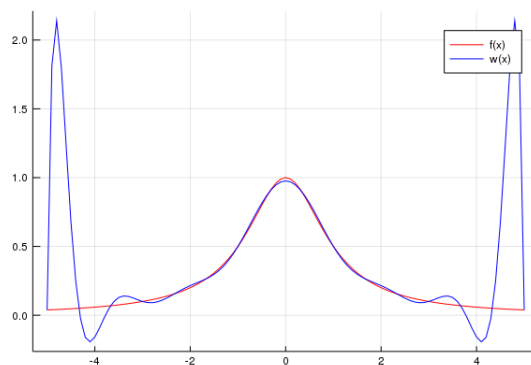
dla przedziału  $[-5, 5]$ ,  $n = 5, 10, 15$ .

W wyniku jego działania otrzymaliśmy następujące wykresy funkcji dla funkcji (8) kolejno dla  $n = 5, 10, 15$ :



Dla funkcji (9) i  $n = 5, 10, 15$  otrzymujemy wykresy:





Na podstawie powyższych wizualizacji zauważamy, że wartości funkcji dla danych argumentów nie pokrywają się z wartościami wielomianów interpolacyjnych. Dla funkcji  $f(x) = |x|$  dzieje się tak, ponieważ funkcja ta nie jest różniczkowalna.

Dla funkcji  $g(x) = 1/(1+x^2)$  możemy zaobserwować zaś zajście zjawiska Runge'go, objawiającego się znacznym pogorszeniem jakości interpolacji wielomianowej pomimo zwiększenia ilości węzłów wielomianu interpolacyjnego. Początkowo, wraz ze wzrostem liczby węzłów  $n$  otrzymywane przybliżenie zbliża się do rzeczywistych wartości funkcji, by następnie ulec znacznemu pogorszeniu.

Jest to zjawisko typowe dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy zastosowanej stałej odległości pomiędzy węzłami. Możemy się z nim spotkać także w przypadku, gdy interpolowana funkcja jest nieciągła lub znacząco różni się od funkcji gładkiej.

Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Przykładem zbioru takich węzłów są węzły Czebyszewa, dla których wraz ze wzrostem stopnia wielomianu maleje błąd maksymalny aproksymacji danej funkcji.

Zjawisko Runge'a demonstruje, że wielomiany wysokiego stopnia przeważnie nie są odpowiednim wyborem do przeprowadzenia interpolacji dla równo oddalonych węzłów.