Numerische Methoden für Differentialgleichungen - Aufgabenblatt 3, Sommersemester 2020

1. Betrachten Sie die explizite Ein-Schritt-Methode

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

wobei

$$\Phi(t,y,h) = a_1 f(t,y) + a_2 f(t + b_2 h, y + b_2 h f(t,y))$$

mit den Koeffizienten $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, und wenden Sie es auf das Modellproblem $y' = \lambda y$ an, mit einer *positiven* reellen Zahl λ. Zeigen Sie: Die Folge $\{y_n\}_{n\geq 0}$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn $h \leq \frac{2}{\lambda}$.

2. Implementieren Sie das Crank-Nicholson-Verfahren (e.g., in Matlab) mit der Fixpunkt-Iteration aus der Vorlesung:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})\big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad y_{n+1}^{(0)} = y_n$$

und das Implizite Euler-Verfahren (Rückwärts - Euler) mit der Fixpunkt-Iteration

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad y_{n+1}^{(0)} = y_n$$

Wählen Sie ein passendes Abbruchkriterium für die Iteration. Testen Sie ihr Programm mit den Beispiel-Problemen von Aufgabenblatt 1, Aufg 2. (a) und (b).