

---

## Numerische Methoden für Differentialgleichungen - Aufgabenblatt 4, Sommersemester 2020

---

4.1\* Man betrachte das Anfangswertproblem  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(0) = y_0$ .

Als Approximation dieses Problems werde, auf einem gleichförmigen Gitter mit  $t_n = nh$ , die folgende (explizite, 3-Schritt) lineare Mehrschrittverfahren untersucht:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + h f(t_n, y_n).$$

- (a) Für eine bestimmte (eindeutige) Wahl von  $a_1$  und  $a_2$  ist diese Methode konsistent. Finden Sie diese Werte für  $a_1$  und  $a_2$ .
- (b) Obwohl diese Methode bei Wahl von  $a_1$  und  $a_2$  gemäss der vorigen Berechnung konsistent ist, wird die erzeugte numerische Lösung im allgemeinen für  $h \rightarrow 0$  nicht gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergieren, da die Methode nicht Null-Stabil ist. Zeigen Sie, dass die Methode für diese  $a_1$  und  $a_2$  nicht Null-Stabil ist.

Null-Stabilität bei einem Mehrschrittverfahren ist so definiert, dass alle Anfangswerte die Kleinheitsbedingung erfüllen müssen:

$$|z_j^{(h)} - y_j^{(h)}| < \varepsilon \quad \text{gelte für } j = 0, \dots, p.$$

Als Gegenbeispiel verwenden Sie folgende Lösung der Methode:

$$f(t, y) \equiv 0, \quad y_j^{(h)} = 0 \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \text{ und}$$

$z_j^{(h)} = \varepsilon r_1^{j+1}$  für  $j = 0, 1, 2$ , wobei  $r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Zeigen Sie, dass  $z_k^{(h)} = \varepsilon r_1^{k+1}$  eine Lösung der obigen Methode ist.

4.2 Implementieren Sie die Adams-Bashforth-Methode (4. Ordnung)

$$y_{n+4} - y_{n+3} = \frac{h}{24} (55f(t_{n+3}, y_{n+3}) - 59f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 37f(t_{n+1}, y_{n+1}) - 9f(t_n, y_n)).$$

Testen Sie Ihren code mit

$$y'(t) = -2ty(t)^2, \quad y(0) = 1.$$

Für die Anfangswerte  $y_1, y_2, y_3$  (der Wert  $y_0$  ist schon gegeben) verwenden Sie

- die genauen Werte (sobald Sie die analytisch exakte Lösung berechnet haben),
- die klassische Runge-Kutta-Methode (vierter Ordnung, "RK4"),
- die explizite Euler-Methode.

Zeigen Sie für alle drei Optionen der Anfangswerte und die Schrittweiten  $h = 1/N$ ,  $N \in \{10, 20, 40, 80, 160, 320\}$  den Fehler  $e_N := |y_N - y(1)|$  und die Konvergenzraten.