Numerische Methoden für Differentialgleichungen - Aufgabenblatt 2, Sommersemester 2020

1. Zeigen Sie, dass das (Vorwärts-)Euler-Verfahren, angewandt auf das Problem

$$y'(t) = \frac{t+1}{y(t)}, \qquad y(0) = 1,$$

   die exakte Lösung liefert.

   Hinweis: Berechnen Sie zunächst die exakte Lösung. Beweisen Sie die Behauptung dann per Induktion, z.B. für $n = 0$, und dann für $n + 1$, wobei Sie annehmen, dass die Behauptung für n wahr ist.

2. Das Crank-Nicolson-Verfahren lautet

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\big).$$

   Dies ist ein implizites Verfahren. Zeigen Sie, dass das Crank-Nicolson-Verfahren für den speziellen Fall einer linearen GDG 1. Ordnung der Art

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

   zu einem expliziten Ausdruck für y_{n+1} führt, das heißt, dass man keine Iteration anwenden muss, um y_{n+1} zu erhalten.