Numerische Methoden für Differentialgleichungen - Aufgabenblatt 7, Sommersemester 2020

7.1 Man betrachte die Konvektions-Gleichung (=Transportgleichung) mit konstantem Koeffizient:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + a\partial_x u(x,t) &= 0, \quad x \in D, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in D \end{aligned}$$

Es sei $a = -1$, und $D = [0,1]$. Zusätzlich seien periodische Randbedingungen gegeben:
$u(0,t) = u(1,t)$ für alle t.

Implementieren Sie das Upwind-Verfahren und das Lax-Friedrichs-Verfahren mit $u_0(x) = \sin(2\pi x)$, $N = 50$ und $N = 400$ Gitterpunkten in Ortsrichtung und einem Zeitschritt k, der die Stabilitäts-Bedingung $|a|k/h < 1$ erfüllt.

Vergleichen Sie die Verfahren und die exakte Lösung zu den Zeiten $T = 0.5$ und $T = 1$.