Numerische Methoden für Differentialgleichungen - Aufgabenblatt 4, Sommersemester 2020

4.1* Man betrachte das Anfangswertproblem $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$, $y(0) = y_0$.
Als Approximation dieses Problems werde, auf einem gleichförmigen Gitter mit $t_n = nh$, die folgende (explizite, 3-Schritt) lineare Mehrschrittmethode untersucht:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + hf(t_n, y_n).$$

(a) Für eine bestimmte (eindeutige) Wahl von a_1 und a_2 ist diese Methode konsistent. Finden Sie diese Werte für a_1 und a_2.

(b) Obwohl diese Methode bei Wahl von a_1 und a_2 gemäss der vorigen Berechnung konsistent ist, wird die erzeugte numerische Lösung im allgemeinen für $h \to 0$ nicht gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergieren, da die Methode nicht Null-Stabil ist. Zeigen Sie, dass die Methode für diese a_1 und a_2 nicht Null-Stabil ist.

Null-Stabilität bei einem Merhschrittverfahren ist so definiert, dass alle Anfangswerte die Kleinheitsbedingung erfüllen müssen:

$$|z_j^{(h)} - y_j^{(h)}| < \varepsilon \quad \text{gelte für} \quad j = 0, \ldots, p.$$

Als Gegenbeispiel verwenden Sie folgende Lösung der Methode:
$f(t, y) \equiv 0$, $y_j^{(h)} = 0$ für $j = 0, 1, 2$, und
$z_j^{(h)} = \varepsilon r_1^j$ für $j = 0, 1, 2$, wobei $r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Zeigen Sie, dass $z_k^{(h)} = \varepsilon r_1^k$ eine Lösung der obigen Methode ist.

4.2 Implementieren Sie die Adams-Bashforth-Methode (4. Ordnung)

$$y_{n+4} - y_{n+3} = \frac{h}{24}\big(55f(t_{n+3}, y_{n+3}) - 59f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 37f(t_{n+1}, y_{n+1}) - 9f(t_n, y_n)\big).$$

Testen Sie Ihren code mit

$$y'(t) = -2ty(t)^2, \qquad y(0) = 1.$$

Für die Anfangswerte y_1, y_2, y_3 (der Wert y_0 ist schon gegeben) verwenden Sie

- die genauen Werte (sobald Sie die analytisch exakte Lösung berechnet haben),
- die klassische Runge-Kutta-Methode (vierter Ordnung, "RK4"),
- die explizite Euler-Methode.

Zeigen Sie für alle drei Optionen der Anfangswerte und die Schrittweiten $h = 1/N$, $N \in \{10, 20, 40, 80, 160, 320\}$ den Fehler $e_N := |y_N - y(1)|$ und die Konvergenzraten.