Numerische Methoden für Differentialgleichungen - Aufgabenblatt 1, Sommersemester 2020

1. Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= t^2 - \dot{y}_1 - y_2^2, \\ \ddot{y}_2 &= t + \dot{y}_2 + y_1^3, \end{aligned}$$
$$y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad \dot{y}_2(0) = 0,$$

als ein System 1. Ordnung $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ um.

2. Die Approximierung eines Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_N], \quad y(t_0) = y_0,$$

$y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_d(t))^T$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$, durch das explizite Euler-Verfahren lautet

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k), \quad k = 0, ..., N-1,$$

mit $h = (t_N - t_0)/N$, und Anzahl N der Intervalle (Schritte), $t_k = k \cdot h$ und $y_0 = y(t_0)$.
Schreiben Sie eine Funktion $euler(f, y_0, t_0, t_N, N)$ (z.B. in Matlab), die auch für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen funktioniert.

   (a) Testen Sie Ihre Funktion mit $y' = y$, $y(1) = 1$ und vergleichen Sie Ihre Lösung mit der exakten Lösung für $t_N = 4$ und $N = 10$.

   (b) Testen Sie Ihre Funktion mit dem Gleichungssystem des Räuber-Beute-Modells ($y_1(t)$ ist die Zahl der Räuber und $y_2(t)$ die Anzahl der Beute zur Zeit t):

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= -(\alpha - \beta y_2) y_1, \\ \dot{y_2} &= (\gamma - \delta y_1) y_2. \end{aligned}$$

   Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gibt es 3 Räuber ($y_1(0) = 3$) und 5 Beutetiere ($y_2(0) = 5$). Plotten Sie die Lösung zum Zeitpunkt $t = 10$ für $\alpha = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 4$, und $\delta = 1$.