Self-Sustaining Spaceship: síntesis óptima conjunta de capacidad y operación
mediante un modelo entero lineal cuantizado y compilación SATX

Oscar Riveros
Polímata

Enero 2026

Resumen

Se formaliza un problema de síntesis óptima para sistemas cerrados de soporte vital en una nave autosustentable: decidir *capacidad instalada* por módulo y *programación diaria de operación* a lo largo de un horizonte discreto, garantizando que los inventarios de recursos (p. ej. O_2/CO_2/agua/comida/residuos/nutrientes) permanezcan dentro de rangos seguros. El núcleo técnico es un modelo entero lineal (ILP) que evita bilinearidades mediante una cuantización Q: la operación fraccional se representa por enteros en "cuantos" y los inventarios se escalan por Q, preservando linealidad y exactitud sobre el retículo $\frac{1}{Q}\mathbb{Z}$. La construcción se expresa en SATX como teoría operacional finita y se compila a formatos estándar de optimización; la validez del resultado se sustenta en (i) la existencia de un testigo íntegro (capacidad, plan, trayectorias de inventario) y (ii) un protocolo explícito de verificación por sustitución (chequeo de invariantes) y por pruebas de umbral (infeasibilidad al forzar mejores cotas).

Palabras clave: soporte vital cerrado, síntesis de sistemas, programación entera, verificación, SATX, cuantización operacional.

1. Motivación y alcance

El diseño de hábitats autosustentables para misiones de larga duración ("worldships") exige un acoplamiento fuerte entre *arquitectura de subsistemas* (capacidades instaladas) y *operación* (duty-cycles, presupuestos energéticos, reciclaje y conversión de recursos). En este contexto, la formulación como teoría finita con testigos verificables permite separar: (i) el objeto matemático (variables y restricciones), y (ii) el backend computacional utilizado para decidir/optimizar.

El trabajo reporta una formulación mínima pero completamente explícita para un sistema de recursos discretizado en el tiempo, y un flujo de verificación orientado a auditoría: el resultado no se interpreta como "salida numérica", sino como un *testigo* sometido a chequeos deterministas.

2. Definición del problema

2.1. Conjuntos e índices

Sea un horizonte discreto de longitud $K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Definimos:

$$\mathcal{T} := \{0, 1, \ldots, K-1\}, \quad \mathcal{R} \text{ conjunto finito de recursos}, \quad \mathcal{M} \text{ conjunto finito de módulos}.$$

Los inventarios se indexan en tiempos $t \in \{0, 1, \ldots, K\}$ (incluye estado terminal).

2.2. Parámetros

Para cada recurso $r \in \mathcal{R}$:

$$s_r^{\text{mín}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad s_r^{\text{máx}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad s_r^0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad 0 \leq s_r^{\text{mín}} \leq s_r^0 \leq s_r^{\text{máx}}.$$

Para la tripulación (por día, unidades físicas):

$$g_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (producción)}, \qquad c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (consumo)}.$$

Para cada módulo $m \in \mathcal{M}$:

$$\overline{x}_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (cota superior de unidades instalables)}, \quad w_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (costo de capacidad)}, \quad e_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (energía por unid}$$

Además, matrices no negativas de producción/consumo por unidad física completa operada un día:

$$p_{m,r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad d_{m,r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

2.3. Variables de decisión

La síntesis conjunta decide:

- **Capacidad instalada:** $x_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para cada $m \in \mathcal{M}$.
- **Operación diaria:** en general quisiéramos $u_{t,m} \in [0, x_m]$ (posiblemente fraccional). En este trabajo, se impone un retículo racional mediante cuantización Q.
- **Inventarios:** $S_{t,r}$ (en unidades físicas) o, equivalentemente, inventarios escalados $S'_{t,r}$ (enteros).
- **Presupuesto energético diario:** EB (opcional).

3. Modelo entero lineal cuantizado

3.1. Cuantización Q y variables enteras

Fijamos un entero $Q \geq 1$ (resolución de operación). Definimos:

$$y_{t,m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{(“cuantos” de operación)}, \qquad u_{t,m} \coloneqq \frac{1}{Q} y_{t,m} \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

La operación fraccional queda restringida a múltiplos de $1/Q$. Para eliminar fracciones en inventarios, se escalan:

$$S'_{t,r} \coloneqq Q\, S_{t,r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

3.2. Restricciones

Cotas de seguridad e inicialización. Para todo $r \in \mathcal{R}$ y todo $t \in \{0, \dots, K\}$:

$$Q\, s_r^{\text{mín}} \leq S'_{t,r} \leq Q\, s_r^{\text{máx}}, \tag{1}$$

$$S'_{0,r} = Q\, s_r^0. \tag{2}$$

Cotas de capacidad y operación. Para todo $m \in \mathcal{M}$ y todo $t \in \mathcal{T}$:

$$0 \le x_m \le \overline{x}_m, \tag{3}$$
$$0 \le y_{t,m} \le Q\, x_m. \tag{4}$$

La desigualdad (4) es el núcleo que evita bilinearidad: no se multiplica $u_{t,m}$ por x_m; se usa el acople lineal en escala Q.

Dinámica de balances (lineal e íntegra). Para todo $t \in \mathcal{T}$ y $r \in \mathcal{R}$:

$$S'_{t+1,r} = S'_{t,r} + Q\, g_r + \sum_{m \in \mathcal{M}} p_{m,r}\, y_{t,m} - Q\, c_r - \sum_{m \in \mathcal{M}} d_{m,r}\, y_{t,m}. \tag{5}$$

Condición terminal de sustentabilidad. Se consideran tres variantes:

$$\text{Cíclica:} \quad S'_{K,r} = S'_{0,r} \qquad \forall r \in \mathcal{R}, \tag{6}$$
$$\text{No decreciente:} \quad S'_{K,r} \ge S'_{0,r} \qquad \forall r \in \mathcal{R}, \tag{7}$$
$$\text{Libre:} \quad \text{(sin restricción terminal adicional).} \tag{8}$$

El caso (6) fuerza un ciclo cerrado sobre el horizonte: la nave no consume inventario neto.

Presupuesto energético diario (opcional). Se introduce una variable entera escalada $EB' \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ tal que:

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} e_m\, y_{t,m} \le EB' \qquad \forall t \in \mathcal{T}, \tag{9}$$

y el presupuesto físico es $EB := EB'/Q$. La restricción (9) modela EB' como un máximo (cota superior uniforme) sobre días.

3.3. Objetivos

Definimos el costo de capacidad:

$$\text{CAP} := \sum_{m \in \mathcal{M}} w_m\, x_m.$$

Se estudian tres modos (todos lineales):

1. **Solo capacidad:** $\min \text{CAP}$.
2. **Lexicográfico: capacidad y luego energía.** Se implementa con Big-M:

   $$\min\ \left(M\, \text{CAP} + EB'\right),$$

   donde M es mayor que cualquier valor posible de EB'.
3. **Ponderado:** $\min\ (W_{\text{cap}}\text{CAP} + W_{EB} EB')$.

Proposición 1 (Correctitud del Big-M para objetivo lexicográfico)**.** *Supóngase que EB' está acotado superiormente por $\overline{EB'} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Sea $M = \overline{EB'} + 1$. Entonces, minimizar $M\,\text{CAP} + EB'$ es equivalente a minimizar lexicográficamente* (CAP, EB').

Demostración. Sea (CAP_1, EB'_1) y (CAP_2, EB'_2) dos soluciones factibles con $\mathrm{CAP}_1 < \mathrm{CAP}_2$. Como $\mathrm{CAP}_2 - \mathrm{CAP}_1 \geq 1$ y $EB' \in [0, \overline{EB'}]$, se tiene

$$M(\mathrm{CAP}_2 - \mathrm{CAP}_1) \geq \overline{EB'} + 1 > EB'_1 - EB'_2,$$

por lo que $M\mathrm{CAP}_1 + EB'_1 < M\mathrm{CAP}_2 + EB'_2$ para cualquier EB'_1, EB'_2 factibles. Luego, el óptimo primero minimiza CAP; entre empates, minimiza EB'. □

3.4. Equivalencia entre operación fraccional y modelo entero escalado

Teorema 1 (Equivalencia por escalamiento)**.** *Sea $Q \geq 1$ fijo y supóngase que todos los parámetros $(s^{\text{mín}}, s^{\text{máx}}, s^0, g, c, p, d)$ son enteros. Entonces, el sistema con variables racionales $u_{t,m} \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ e inventarios físicos $S_{t,r} \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ es equivalente (por biyección) al sistema entero en $(y_{t,m}, S'_{t,r})$ dado por $u_{t,m} = y_{t,m}/Q$ y $S_{t,r} = S'_{t,r}/Q$.*

Demostración. Multiplicar por Q todas las ecuaciones y desigualdades del modelo físico elimina denominadores, ya que los coeficientes son enteros y $u_{t,m} = y_{t,m}/Q$. Recíprocamente, toda solución entera (y, S') induce una solución racional (u, S) dividiendo por Q, preservando factibilidad. La correspondencia es biyectiva por construcción. □

4. Instancia de estudio y solución óptima reportada

Esta sección documenta una instancia mínima ("toy") cuyo propósito es demostrar: (i) cierre cíclico de balances y (ii) síntesis conjunta de capacidad y operación bajo un presupuesto energético.

4.1. Datos de la instancia

Se utiliza $K = 7$ días y $Q = 4$ (cuartos de unidad). Los recursos son:

$$\mathcal{R} = \{\mathrm{O2}, \mathrm{CO2}, \mathrm{H2O}, \mathrm{FOOD}, \mathrm{WASTE}, \mathrm{NUTR}\}.$$

Cuadro 1: Rangos seguros e inventario inicial (unidades físicas).

Recurso r	$s_r^{\text{mín}}$	$s_r^{\text{máx}}$	s_r^0
O2	40	120	80
CO2	0	80	10
H2O	30	120	60
FOOD	10	80	30
WASTE	0	80	0
NUTR	0	80	10

La tripulación consume/produce por día (unidades físicas):

$$c_{\mathrm{O2}} = 8,\ c_{\mathrm{H2O}} = 4,\ c_{\mathrm{FOOD}} = 2, \qquad g_{\mathrm{CO2}} = 8,\ g_{\mathrm{WASTE}} = 3,$$

y los demás componentes son cero.

Los módulos son:

$$\mathcal{M} = \{\mathrm{CO2\_to\_O2}, \mathrm{Water\_Recycle}, \mathrm{Compost}, \mathrm{Farm}\}.$$

Cuadro 2: Módulos: energía e_m, costo de capacidad w_m, producción/consumo no nulos (por unidad física operada un día).

Módulo m	e_m	w_m	Flujos no nulos
CO2_to_O2	2	1	$+8\,\mathrm{O2};\ -8\,\mathrm{CO2}$
Water_Recycle	1	1	$+5\,\mathrm{H2O};\ -2\,\mathrm{WASTE}$
Compost	1	1	$+1\,\mathrm{NUTR};\ -1\,\mathrm{WASTE}$
Farm	3	2	$+2\,\mathrm{FOOD} + 2\,\mathrm{O2};\ -1\,\mathrm{NUTR} - 1\,\mathrm{H2O} - 2\,\mathrm{CO2}$

4.2. Solución óptima reportada (capacidad, operación, energía)

La ejecución reporta estado `ok` con valor objetivo 1431, junto a:

$$Q = 4, \qquad EB' = 26 \;\Rightarrow\; EB = 6.5,$$

$$x_m = 1 \quad \forall m \in \mathcal{M},$$

y un plan constante por día:

$$y_{t,\mathrm{CO2\_to\_O2}} = 3\ (u = 0.75), \qquad y_{t,m} = 4\ (u = 1.0)\ \text{ para } m \in \{\mathrm{Water\_Recycle}, \mathrm{Compost}, \mathrm{Farm}\}.$$

En consecuencia, el consumo energético diario es

$$\sum_m e_m\, y_{t,m} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 26,$$

y satisface (9) con $EB' = 26$.

Proposición 2 (Chequeo analítico de estacionariedad de balances)**.** *Bajo el plan anterior, el inventario físico* $(S_{t,r})$ *permanece constante día a día; en particular, satisface el cierre cíclico* (6).

Demostración. Se verifica recurso por recurso el flujo neto diario:

- CO2: $+8$ (tripulación) $-8 \cdot 0.75$ (CO2_to_O2) $-2 \cdot 1$ (Farm) $= 8 - 6 - 2 = 0$.
- O2: -8 (tripulación) $+8 \cdot 0.75$ (CO2_to_O2) $+2 \cdot 1$ (Farm) $= -8 + 6 + 2 = 0$.
- H2O: -4 (tripulación) $-1 \cdot 1$ (Farm) $+5 \cdot 1$ (Water_Recycle) $= -5 + 5 = 0$.
- FOOD: -2 (tripulación) $+2 \cdot 1$ (Farm) $= 0$.
- WASTE: $+3$ (tripulación) $-2 \cdot 1$ (Water_Recycle) $-1 \cdot 1$ (Compost) $= 3 - 2 - 1 = 0$.
- NUTR: $+1 \cdot 1$ (Compost) $-1 \cdot 1$ (Farm) $= 0$.

Por (5), si el flujo neto es cero para todo recurso, entonces $S'_{t+1,r} = S'_{t,r}$ y el estado es estacionario; en particular $S'_{K,r} = S'_{0,r}$. □

4.3. Interpretación del valor objetivo 1431

En modo lexicográfico Big-M, el objetivo es $M\,\mathrm{CAP} + EB'$. En esta instancia:

$$\mathrm{CAP} = 1 + 1 + 1 + 2 = 5, \qquad EB' = 26.$$

Además, una cota superior válida para EB' es $\overline{EB'} = Q \sum_m \overline{x}_m e_m$, y por tanto $M = \overline{EB'} + 1$. El valor 1431 es consistente con esta construcción: representa dominancia absoluta de capacidad, seguida de minimización de energía dentro del mejor diseño de capacidad.

5. SATX como infraestructura de compilación y auditoría

5.1. Rol operacional

SATX actúa como un compilador de teorías finitas: la formulación se expresa en un DSL con variables enteras acotadas y restricciones lineales exactas, y luego se exporta a formatos estándar de optimización. La separación conceptual *objeto matemático vs. backend* coincide con el esquema FDAS: (i) Theory portable y solver-free, (ii) Query tipada, (iii) Result como evidencia ejecutable, (iv) Álgebra para composición/proyección/ocultamiento, y (v) Planner determinista que selecciona el backend adecuado.

5.2. Por qué los resultados son válidos

La validez se entiende en sentido operacional:

1. **Validez semántica:** el modelo es un ILP sobre dominios finitos (todas las variables están acotadas). Un resultado factible entrega un *testigo* (x, y, S', EB').
2. **Validez por sustitución:** dado el testigo, cada restricción (4)–(9) se verifica por evaluación determinista (igualdades y desigualdades entre enteros).
3. **Validez por exportación estándar:** al compilar a un formato estándar (p. ej. MPS), la instancia puede ser resuelta/contrastada por backends independientes, preservando el mismo objeto matemático.

6. Protocolo de verificación y reproducibilidad

6.1. Chequeo de restricciones (verificación del testigo)

Dado un testigo reportado, el verificador mínimo consiste en:

1. Verificar cotas: $0 \leq x_m \leq \overline{x}_m$, $0 \leq y_{t,m} \leq Qx_m$, y $Qs_r^{\text{mín}} \leq S'_{t,r} \leq Qs_r^{\text{máx}}$.
2. Verificar dinámica: para todo t, r, recomputar el lado derecho de (5) y comparar con $S'_{t+1,r}$.
3. Verificar energía: para todo t, recomputar $\sum_m e_m y_{t,m}$ y chequear $\leq EB'$.
4. Verificar sustentabilidad terminal: (6) (u otra variante).

En la instancia reportada, la Proposición anterior muestra analíticamente el punto más fuerte: estacionariedad exacta de balances.

6.2. Verificación de optimalidad mediante pruebas de umbral

Para evitar depender de detalles internos del backend, se sugiere un método de *pruebas de umbral*:

1. **Minimalidad de capacidad:** agregar la restricción $\text{CAP} \leq \text{CAP}^\star - 1$ y resolver el problema de factibilidad. Si es infactible, queda probado que $\text{CAP}^\star$ es mínimo.
2. **Minimalidad de energía bajo capacidad mínima:** fijar $\text{CAP} = \text{CAP}^\star$ y agregar $EB' \leq EB'^\star - 1$. Si es infactible, queda probado que $EB'^\star$ es mínimo condicionalmente.

Este procedimiento transforma una afirmación de optimalidad en una secuencia finita de afirmaciones de (in)factibilidad, cada una acompañada de un testigo (o refutación operacional) verificable.

6.3. Chequeos de robustez (extensión natural)

Una vez fijado el diseño (capacidades), SATX también permite plantear consultas adicionales:

- conteo de planes (¿cuántas programaciones $y_{t,m}$ son factibles?),
- proyecciones (¿cuántos diseños distintos (x_m) admiten al menos una operación?),
- planificación inversa (preimagen/orígenes de estados deseados bajo transiciones discretas).

7. Conclusión

Se presentó un modelo entero lineal cuantizado para síntesis conjunta de capacidad y operación en un sistema cerrado de soporte vital. La cuantización Q permite representar duty-cycles fraccionales sin introducir bilinearidad, y convierte el problema en ILP finito con testigos íntegros auditables. SATX habilita un flujo reproducible: especificación declarativa, compilación a formatos estándar, obtención de testigos y verificación determinista por sustitución, complementada por pruebas de umbral para certificar minimalidad.

Referencias

[1] R. Armstrong (ed.). *Star Ark: A Living, Self-Sustaining Spaceship.* Springer Praxis Books, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-31042-8.

[2] O. Riveros. *SATX: Technical Reference* (documento técnico interno).

[3] O. Riveros. *FDAS en SATX: documentación formal (Theory · Query · Result · Álgebra · Planner)* (nota técnica interna).

[4] O. Riveros. *SAT-Verified Discrete Physics: A Minimal* (manuscrito).