Micro-red discreta con SAT, #SAT, Weighted MaxSAT, MIP y CAS en SATX 0.5.4

ASPIE / SATX

2026-01-20

1. Descripción

Este ejemplo modela una micro-red con *decisión de instalación* (binaria) y *despacho operativo* (entero no-negativo), bajo dos escenarios de demanda y un horizonte discreto de dos tiempos. La misma teoría se consulta con distintos backends: SAT (existencia), #SAT (robustez por conteo), Weighted MaxSAT (selección por preferencias), MIP (optimización lineal de operación) y un CAS (motor algebraico) para derivar pesos y, además, construir un certificado dual verificable del óptimo.

El núcleo del ejemplo es que el diseño x induce factibilidad operativa en todos los escenarios, y que el despacho óptimo del MIP admite un certificado dual construido algebraicamente, mostrando *fuerte dualidad* (gap cero) por cada par (k, t).

2. Datos del problema

Conjunto de fuentes:

$$S = \{\text{solar}, \text{nuclear}, \text{bateria}\}.$$

Escenarios y tiempos:

$$K = \{\text{bajo}, \text{alto}\}, \qquad T = \{0, 1\}.$$

Capacidades (enteras):

$$\text{cap}_{\text{solar}} = 5, \qquad \text{cap}_{\text{nuclear}} = 8, \qquad \text{cap}_{\text{bateria}} = 4.$$

Demandas $d_{k,t}$:

$$d_{\text{bajo},0} = 6,\;\; d_{\text{bajo},1} = 5, \qquad d_{\text{alto},0} = 10,\;\; d_{\text{alto},1} = 9.$$

Costos lineales por unidad:

$$c_{\text{solar}} = 1, \qquad c_{\text{nuclear}} = 3, \qquad c_{\text{bateria}} = 2.$$

(En la corrida mostrada, los pesos de escenarios fueron $\pi_{\text{bajo}} = \pi_{\text{alto}} = 1$.)

3. Variables y ontología

3.1. Diseño (variables públicas observables)

Para cada $s \in S$:

$$x_s \in \{0, 1\}.$$

Interpretación: $x_s = 1$ significa "instalar la fuente s".

3.2. Operación (variables privadas/testigos)

Para cada $s \in S,\ k \in K,\ t \in T$:

$$p_{s,k,t} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Interpretación: producción asignada a la fuente s en escenario k y tiempo t.

4. Restricciones hard (SAT / #SAT / MaxSAT / MIP)

4.1. Límite de instalaciones

$$\sum_{s \in S} x_s \leq 2.$$

4.2. Cotas de capacidad inducidas por el diseño

$$0 \leq p_{s,k,t} \leq \mathrm{cap}_s\, x_s \qquad \forall s \in S,\ k \in K,\ t \in T.$$

4.3. Cobertura de demanda por escenario y tiempo

$$\sum_{s \in S} p_{s,k,t} \geq d_{k,t} \qquad \forall k \in K,\ t \in T.$$

Estas tres familias constituyen la teoría hard: el despacho p actúa como testigo existencial de factibilidad para cada diseño x.

5. Preferencias soft (Weighted MaxSAT)

Se agregan preferencias como restricciones soft sobre el diseño x. En este ejemplo:

- Preferir instalar solar: $x_{\text{solar}} = 1$.
- Evitar instalar nuclear: $x_{\text{nuclear}} = 0$.
- Preferir instalar batería: $x_{\text{bateria}} = 1$.

5.1. Pesos derivados simbólicamente con CAS

Los pesos parten como racionales obtenidos por simplificación algebraica y luego se escalan a enteros:

$$w_{\text{solar}} \propto \text{simplify}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad w_{\text{anti-nu}} \propto \text{simplify}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad w_{\text{batt}} \propto \text{simplify}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{10}.$$

Luego, con un factor de escala (por ejemplo 60), se obtienen enteros para Weighted MaxSAT.

6. Consultas y resultados observados

6.1. SAT (existencia hard-only)

Se resolvió la factibilidad ignorando soft y se obtuvo:

$$x = (x_{\text{solar}}, x_{\text{nuclear}}, x_{\text{bateria}}) = (1, 1, 0).$$

Interpretación: instalar solar+nuclear (sin batería) admite un despacho p que satisface todas las restricciones hard en ambos escenarios y tiempos.

6.2. Robustez como conteo proyectado sobre el diseño

El conteo "full" vía `exposure` retornó ceros, consistente con un backend de conteo no operativo o no parseado. En cambio, la proyección exacta sobre el diseño se calculó por enumeración finita de $\{0,1\}^3$ y produjo dos diseños factibles:

$$\{\text{solar} = 0, \text{nuclear} = 1, \text{bateria} = 1\}, \qquad \{\text{solar} = 1, \text{nuclear} = 1, \text{bateria} = 0\}.$$

Por lo tanto:

$$\#\{x : \exists p \ \text{hard}(x,p)\} = 2.$$

Y, para el evento "solar instalada":

$$\frac{\#\{x : \exists p \ \text{hard}(x,p) \wedge x_{\text{solar}} = 1\}}{\#\{x : \exists p \ \text{hard}(x,p)\}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

6.3. Weighted MaxSAT (selección por preferencias)

El solver MaxSAT reportó un óptimo con:

$$\text{model} = [1,1,0], \qquad \text{opt\_cost} = 58.$$

La conclusión operacional es que, bajo las preferencias y pesos actuales, el diseño seleccionado coincide con el witness hard-only: $x = (1,1,0)$.

6.4. MIP (despacho óptimo dado el diseño)

Con el diseño fijo $x = (1,1,0)$, el MIP resuelve:

$$\min \sum_{k \in K} \pi_k \sum_{t \in T} \sum_{s \in S} c_s \, p_{s,k,t} \quad \text{sujeto a} \quad \text{hard}(x,p),$$

y reportó objetivo 50. El despacho encontrado (por (k,t)) fue:

(k,t)	$d_{k,t}$	$(p_{\text{solar}}, p_{\text{nuclear}}, p_{\text{bateria}})$
(bajo, 0)	6	(5, 1, 0)
(bajo, 1)	5	(5, 0, 0)
(alto, 0)	10	(5, 5, 0)
(alto, 1)	9	(5, 4, 0)

En todos los casos se observa el patrón "usar solar al máximo y completar con nuclear", coherente con $c_{\text{solar}} < c_{\text{nuclear}}$ y la capacidad efectiva $U_{\text{solar}} = 5$.

7. CAS como verificador: certificados duales y sensibilidad

En este ejemplo, el CAS se usa no solo para pesos, sino para derivar y verificar un certificado dual del óptimo (por cada (k,t)), y para exponer la sensibilidad marginal a la demanda.

7.1. Primal por periodo

Para un (k,t) fijo (suprimimos índices), el subproblema es:

$$\min_{p_s} \sum_{s \in S} c_s p_s \quad \text{s.a.} \quad \sum_{s \in S} p_s \geq d, \quad 0 \leq p_s \leq U_s,$$

donde $U_s = \text{cap}_s x_s$.

7.2. Dual equivalente

Una forma dual consistente con el certificado implementado es:

$$\max_{\lambda,\mu}\ d\lambda - \sum_{s\in S} U_s\mu_s$$

sujeto a

$$\lambda - \mu_s \le c_s\ \forall s, \qquad \lambda \ge 0,\ \mu_s \ge 0.$$

El certificado usado es el de "merit order":

$$\lambda = \text{costo marginal}, \qquad \mu_s = \max(0, \lambda - c_s).$$

7.3. Umbrales merit-order

Con $x = (1, 1, 0)$:

$$U_{\text{solar}} = 5, \qquad U_{\text{bateria}} = 0, \qquad U_{\text{nuclear}} = 8.$$

El orden por costos es:

$$(\text{solar}, 1, 5),\ (\text{bateria}, 2, 0),\ (\text{nuclear}, 3, 8),$$

con umbrales acumulados:

$$5,\ 5,\ 13.$$

Por ende, el precio sombra predicho para demanda d es:

$$\lambda(d) = \begin{cases} 1, & d \le 5, \\ 3, & 5 < d \le 13, \\ \text{infeasible}, & d > 13. \end{cases}$$

7.4. Verificación observada: fuerte dualidad (gap = 0)

El CAS audit reportó, para cada (k, t):

$$\text{gap} = \text{primal\_obj} - \text{dual\_obj} = 0,$$

confirmando fuerte dualidad y certificando el óptimo del MIP con una solución dual explícita.

En particular:

$$\lambda(5) = 1, \qquad \lambda(6) = \lambda(9) = \lambda(10) = 3,$$

lo que explica el cambio de régimen cuando la demanda excede $U_{\text{solar}} = 5$.

8. Lectura operacional integrada

1. SAT garantiza que existe al menos un diseño x con un testigo operativo p.
2. El conteo proyectado sobre x cuantifica robustez de diseño: aquí exactamente 2 diseños funcionan.
3. Weighted MaxSAT elige un diseño factible que maximiza preferencias (o minimiza penalidad) sin violar hard.
4. MIP produce el despacho óptimo lineal dado el diseño seleccionado.
5. CAS deriva pesos racionales y, crucialmente, certifica el óptimo mediante dualidad (precios sombra y umbrales).