Self-Sustaining Spaceship: síntesis óptima de capacidad y operación bajo balances discretos verificables

Oscar Riveros
Polímata (Chile)

2026-01-19

Resumen

Se presenta una formulación discreta y verificable para la síntesis de un sistema de soporte vital autosustentable en una nave espacial: se decide (i) la capacidad instalada por módulo y (ii) la operación diaria, bajo balances multi-recurso (O_2, CO_2, agua, comida, residuos y nutrientes) que deben permanecer en rangos seguros durante un horizonte finito. El modelo se construye sobre dominios finitos e integrales mediante una cuantización Q que permite operación fraccional sin bilinearidad, manteniendo la dinámica lineal. La función objetivo minimiza capacidad instalada (ponderada) y, opcionalmente, un presupuesto energético diario, con prioridad lexicográfica implementable como un único objetivo lineal. Se discute el rol de SATX como compilador de teorías operacionales hacia formatos estándar de optimización, y se proporciona un protocolo de verificación mecánica (witness-checking) de factibilidad y optimalidad. Un caso de estudio ilustra una solución óptima con $Q = 4$, $EB = 6{,}5$ y $cap_u = 1$ por módulo.

1. Planteamiento

1.1. Dominio

Sea $K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un horizonte discreto (días), con índices $t \in \{0, 1, \ldots, K-1\}$. Sea $\mathcal{R}$ un conjunto finito de recursos (p. ej. O_2, CO_2, H_2O, FOOD, WASTE, NUTR), y $\mathcal{M}$ un conjunto finito de módulos tecnológicos (p. ej. conversión $CO_2 \to O_2$, reciclaje de agua, compostaje, granja).

Cada recurso $r \in \mathcal{R}$ mantiene un inventario físico $S_{t,r}$ que debe permanecer en un intervalo seguro $[L_r, U_r] \subset \mathbb{R}$, y que evoluciona en función de producción/consumo de la tripulación y de los módulos. Cada módulo $m \in \mathcal{M}$ posee una *capacidad instalada* entera c_m y una *operación diaria* $u_{t,m}$ acotada por la capacidad, con $0 \leq u_{t,m} \leq c_m$.

1.2. Objetivo de síntesis

Se busca una síntesis *diseño+operación* que minimice:

- (primario) capacidad instalada ponderada $\sum_m w_m c_m$;
- (opcional/ secundario) el peor consumo energético diario EB necesario para operar el plan.

2. Modelo matemático: cuantización y formulación íntegra

2.1. Parámetros

Para cada recurso $r \in \mathcal{R}$:

$$L_r \leq S_{0,r} \leq U_r, \qquad L_r \leq U_r.$$

Para tripulación:

$$g_r^+ \geq 0 \ \text{(producción diaria)}, \qquad g_r^- \geq 0 \ \text{(consumo diario)}.$$

Para cada módulo $m \in \mathcal{M}$:

$\bar{c}_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (cota superior de capacidad), $w_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (costo de capacidad), $e_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (energía por unidad/día),

y coeficientes de producción/consumo por unidad operada:

$$p_{m,r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad q_{m,r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

(Se asume no negatividad para mantener una semántica de flujos conservativa y auditable.)

2.2. Cuantización para operación fraccional sin bilinearidad

La operación $u_{t,m}$ puede requerir fracciones (p. ej. 0,75 unidades/día) sin introducir productos bilineales capacidad×operación. Para ello se fija un entero $Q \geq 1$ ("cuantos por unidad") y se introducen variables enteras:

$$x_{t,m} := Q\, u_{t,m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \widehat{S}_{t,r} := Q\, S_{t,r} \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, la restricción $u_{t,m} \leq c_m$ se vuelve lineal íntegra:

$$x_{t,m} \leq Q\, c_m.$$

El inventario queda representado exactamente en la rejilla $S_{t,r} \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}$, y los balances se vuelven ecuaciones lineales enteras.

Proposición 1 (Equivalencia exacta en la rejilla $1/Q$)**.** Fijado Q, existe una biyección entre:

(a) planes $\{c_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, u_{t,m} \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ que satisfacen $u_{t,m} \leq c_m$ y balances físicos;

(b) soluciones enteras $\{c_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, x_{t,m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ con $x_{t,m} = Qu_{t,m}$, $\widehat{S}_{t,r} = QS_{t,r}$, que satisfacen $x_{t,m} \leq Qc_m$ y balances enteros.

2.3. Restricciones

Capacidad instalada (entera).

$$c_m \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq c_m \leq \bar{c}_m, \quad \forall m \in \mathcal{M}.$$

Operación diaria (cuantizada).

$$x_{t,m} \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq x_{t,m} \leq Q\, c_m, \quad \forall t, m.$$

Rangos seguros de inventario (cuantizados).

$$\widehat{S}_{t,r} \in \mathbb{Z}, \qquad QL_r \leq \widehat{S}_{t,r} \leq QU_r, \quad \forall t \in \{0, \ldots, K\},\ \forall r.$$

y condición inicial:

$$\widehat{S}_{0,r} = QS_{0,r}.$$

Dinámica de balances (lineal entera). Para cada $t = 0, \dots, K-1$ y $r \in \mathcal{R}$,

$$\widehat{S}_{t+1,r} = \widehat{S}_{t,r} + Qg_r^+ + \sum_{m\in\mathcal{M}} p_{m,r}\, x_{t,m} - Qg_r^- - \sum_{m\in\mathcal{M}} q_{m,r}\, x_{t,m}. \tag{1}$$

Condición de sustentabilidad al final del horizonte. Se consideran modos, siendo el más fuerte el modo cíclico:

$$\widehat{S}_{K,r} = \widehat{S}_{0,r} \quad \forall r \in \mathcal{R}.$$

(Alternativamente, $\widehat{S}_{K,r} \geq \widehat{S}_{0,r}$ o condición libre; el artículo se centra en el modo cíclico por su carácter de cierre operacional.)

Presupuesto energético diario. Se define una variable entera $\widehat{EB} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que, para todo t,

$$\sum_{m\in\mathcal{M}} e_m\, x_{t,m} \leq \widehat{EB}. \tag{2}$$

En unidades físicas, $EB = \widehat{EB}/Q$.

3. Función objetivo y prioridad lexicográfica

3.1. Costo de capacidad

$$\text{CAPCOST} := \sum_{m\in\mathcal{M}} w_m\, c_m.$$

3.2. Lexicografía: minimizar primero capacidad, luego energía

Cuando se desea prioridad estricta, se implementa como un único objetivo lineal mediante una cota superior segura $\widehat{EB}_{\text{máx}}$ y una constante grande M:

$$\widehat{EB}_{\text{máx}} := \sum_{m\in\mathcal{M}} Q\, \bar{c}_m\, e_m, \qquad M := \widehat{EB}_{\text{máx}} + 1.$$

Se minimiza:

$$\text{mín} \quad M \cdot \text{CAPCOST} + \widehat{EB}. \tag{3}$$

Lema 1 (Correctitud de la reducción lexicográfica)**.** Sea $\widehat{EB} \in [0, \widehat{EB}_{\text{máx}}]$. Entonces el problema (3) induce el orden lexicográfico: cualquier mejora en CAPCOST domina cualquier posible cambio en $\widehat{EB}$.

Demostración. Si $\text{CAPCOST}_1 \leq \text{CAPCOST}_2 - 1$, entonces:

$$M\text{CAPCOST}_1 + \widehat{EB}_1 \leq M(\text{CAPCOST}_2 - 1) + \widehat{EB}_{\text{máx}} = M\text{CAPCOST}_2 - (M - \widehat{EB}_{\text{máx}}) < M\text{CAPCOST}_2 \leq M\text{CAP}$$

pues $M - \widehat{EB}_{\text{máx}} = 1$. □

4. SATX como compilador operacional y sustrato de verificación

4.1. Rol de SATX

SATX opera como un *compilador de teorías operacionales* en dominios finitos: el usuario declara variables tipadas y restricciones; la herramienta compila a formatos estándar (por ejemplo, instancias de optimización entera lineal) manteniendo una correspondencia explícita variable–semántica. En el presente problema, SATX se utiliza para:

(I) declarar variables enteras $c_m, x_{t,m}, \widehat{S}_{t,r}, \widehat{EB}$;
(II) declarar restricciones lineales (1)–(2) y cotas;
(III) exportar un artefacto estándar para resolución por un optimizador externo;
(IV) reimportar un *witness* (asignación) y exponerlo como valores concretos de variables para auditoría.

Este patrón implementa un ciclo *modelo* → *instancia* → *witness* → *verificación* en el cual la validez de la solución se reduce a comprobar un conjunto finito de desigualdades e igualdades enteras.

4.2. Validez: ¿qué significa "resultado válido"?

En esta metodología, un resultado es válido en dos niveles:

(a) **Validez de factibilidad (certificado primal).** Una asignación $\mathcal{W}$ para todas las variables es un certificado verificable si satisface, por evaluación directa, cada restricción del modelo. Dado que las restricciones son lineales y los dominios son finitos, la verificación es mecánica y exacta.

(b) **Validez de optimalidad.** La optimalidad se interpreta como la ausencia de soluciones factibles con menor valor objetivo. En general, este hecho depende del algoritmo del optimizador (p. ej. branch-and-bound) y de su criterio de cierre. Para robustecer la aseveración, se recomiendan (i) chequeos analíticos de cotas inferiores cuando existan, y/o (ii) validación cruzada con otro optimizador, y/o (iii) reducción del tamaño para enumeración exhaustiva en instancias pequeñas.

5. Protocolo de verificación (witness-checking)

Sea $\mathcal{W}$ un witness que entrega valores para $\{c_m\}, \{x_{t,m}\}, \{\widehat{S}_{t,r}\}, \widehat{EB}$. La verificación de factibilidad se realiza evaluando:

V1. Dominios y cotas: $0 \le c_m \le \bar{c}_m$, $0 \le x_{t,m} \le Qc_m$, $QL_r \le \widehat{S}_{t,r} \le QU_r$, $\widehat{EB} \ge 0$.
V2. Condición inicial: $\widehat{S}_{0,r} = QS_{0,r}$.
V3. Dinámica: igualdad (1) para todo t, r.
V4. Sustentabilidad terminal: (modo cíclico) $\widehat{S}_{K,r} = \widehat{S}_{0,r}$.
V5. Energía: desigualdad (2) para todo t.
V6. Objetivo: calcular $M\mathrm{CAPCOST} + \widehat{EB}$ y contrastar con el valor reportado.

Observación 1 (Complejidad de verificación). La verificación requiere $O(K|\mathcal{R}||\mathcal{M}|)$ operaciones aritméticas enteras para evaluar (1) y $O(K|\mathcal{M}|)$ para (2), además de chequeos de cotas.

6. Caso de estudio (instancia toy): cierre cíclico y solución óptima

6.1. Datos

Se considera $K = 7$, $Q = 4$, recursos $\mathcal{R} = \{\text{O2, CO2, H2O, FOOD, WASTE, NUTR}\}$ y módulos $\mathcal{M} = \{\text{CO2\_to\_O2, Water\_Recycle, Compost, Farm}\}$. Los coeficientes diarios (por unidad operada) y costos se resumen en la Tabla 1.

Cuadro 1: Parámetros (toy). Energía e_m por unidad/día; costo de capacidad w_m.

Módulo m	w_m	e_m	Producción $p_{m,r}$	Consumo $q_{m,r}$
CO2_to_O2	1	2	O2:8	CO2:8
Water_Recycle	1	1	H2O:5	WASTE:2
Compost	1	1	NUTR:1	WASTE:1
Farm	2	3	FOOD:2, O2:2	NUTR:1, H2O:1, CO2:2

Tripulación: produce CO2:8 y WASTE:3; consume O2:8, H2O:4 y FOOD:2 por día.

6.2. Derivación analítica del plan cíclico y cotas inferiores

En modo cíclico, sumar (1) para $t = 0, \ldots, K-1$ implica $\widehat{S}_{K,r} - \widehat{S}_{0,r} = 0$, por lo que, en unidades físicas, el cambio neto por día debe ser cero para cada recurso. Definiendo $u_m := u_{t,m}$ constante por día (suficiente en este toy), se obtienen ecuaciones lineales:

- **FOOD:** $2u_{\text{Farm}} - 2 = 0 \Rightarrow u_{\text{Farm}} = 1$.
- **NUTR:** $u_{\text{Compost}} - u_{\text{Farm}} = 0 \Rightarrow u_{\text{Compost}} = 1$.
- **H2O:** $5u_{\text{Water}} - u_{\text{Farm}} - 4 = 0 \Rightarrow u_{\text{Water}} = 1$.
- **O2:** $8u_{\text{CO2}} + 2u_{\text{Farm}} - 8 = 0 \Rightarrow u_{\text{CO2}} = 3/4$.

Así, el plan diario mínimo requiere operación fraccional 3/4 en CO2_to_O2, lo cual es representable exactamente con $Q = 4$. Además, las capacidades mínimas satisfacen

$$c_m \geq \max_t u_{t,m},$$

por lo que necesariamente $c_m \geq 1$ para cada módulo del toy, y por consiguiente

$$\text{CAPCOST} \geq 1 + 1 + 1 + 2 = 5.$$

La energía diaria mínima asociada a este cierre es

$$EB \geq 2 \cdot \tfrac{3}{4} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6{,}5.$$

6.3. Solución óptima reportada y verificación

El witness reportado para el toy es:

$$c_m = 1 \ \forall m, \qquad Q = 4, \qquad \widehat{EB} = 26 \Rightarrow EB = 6{,}5.$$

En efecto, $u_{\text{Farm}} = 1 \Rightarrow x = 4$, $u_{\text{Water}} = 1 \Rightarrow x = 4$, $u_{\text{Compost}} = 1 \Rightarrow x = 4$, $u_{\text{CO2}} = 3/4 \Rightarrow x = 3$. El valor objetivo lexicográfico se obtiene como:

$$\widehat{EB}_{\text{máx}} = \sum_m Q\bar{c}_m e_m = 4 \cdot 10 \cdot (2 + 1 + 1 + 3) = 280, \qquad M = 281,$$

$$\mathrm{CAPCOST} = 5, \qquad M\mathrm{CAPCOST} + \widehat{EB} = 281 \cdot 5 + 26 = 1431.$$

Las cotas inferiores analíticas anteriores implican que ninguna solución puede mejorar $\mathrm{CAPCOST} < 5$ ni $\widehat{EB} < 26$ manteniendo cierre cíclico; por lo tanto, el witness es óptimo para el toy bajo (3).

7. Discusión: alcance, límites y extensiones

Alcance. El modelo es deliberadamente *operacional* y *auditable*: el estado es un vector de inventarios en rangos seguros, la dinámica es lineal, y la factibilidad se reduce a un chequeo finito.

Límites. La discretización en $1/Q$ impone una rejilla de operación. Procesos biológicos reales pueden requerir dinámicas no lineales, retardos, degradación de eficiencia y estocasticidad; éstos pueden modelarse extendiendo el estado o introduciendo restricciones adicionales, manteniendo el carácter compilable.

Extensiones compatibles con SATX. Una vez expresado el problema como teoría finita:

- *Robustez*: conteo de planes factibles bajo escenarios discretizados (variación de consumos, fallas).
- *Optimización multiobjetivo*: MaxSAT ponderado o MIP con pesos/jerarquías adicionales.
- *Matemática inversa*: preimagen de estados seguros/objetivos para explicar "de dónde proviene" un estado.

8. Conclusión

Se formalizó un problema de síntesis de nave autosustentable como un modelo discreto (capacidad + operación) con balances multi-recurso, energía y condición de cierre. La cuantización Q permite operación fraccional sin bilinearidad, manteniendo una formulación lineal entera. SATX actúa como compilador operacional hacia artefactos estándar y habilita un ciclo auditable de witness-checking. En el caso de estudio, el witness $cap_u = 1$ por módulo y $EB = 6{,}5$ satisface el cierre cíclico y alcanza el óptimo lexicográfico con objetivo 1431.

Referencias

[1] O. Riveros, *SAT-Verified Discrete Physics: A Minimal, Auditable SAT Workflow for Finite Discrete Geometry and Locality*, Methods paper, 2025-12-29.

[2] O. Riveros, *spaceship_satx.py: Self-Sustaining Spaceship — síntesis óptima (capacidad + operación)*, artefacto de referencia (código), 2026-01-19.