Лабораторная работа №1

Свирин Максим
Б19-501

12 марта 2022 г.

Вариант 14

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = x^2 - y^3 \end{cases}$$

---

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from ipywidgets import interact
```

[2]:
```
def F(v, t):
    dxdt = -v[0]    + v[1]**2
    dydt =  v[0]**2 - v[1]**3
    return [dxdt, dydt]

def der_x(x, y):
    return -x + y*y

def der_y(x, y):
    return x*x - y**3

N = 101
t = np.linspace(0, 10, num=N)
```

[3]:
```
def sol_eq(F, s0, s1, t):
    return odeint(F, [s0, s1], t)
```

[4]:
```
def interact_sol(s0=0.05, s1=0.05, T=10, N=101):
    plt.clf()
    t = np.linspace(0, T, num=N)

    v = sol_eq(F, s0, s1, t)
    x, y = v[:, 0], v[:, 1]
```

```
    plt.plot(x, y, label="y=f(x)")
    plt.legend()
    plt.gray()
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("y")

interact(interact_sol, s0=(-1, 1, 0.01), s1=(-1, 1, 0.01), T=(10, 1000, 10),␣
 ↪N=(101, 10001, 100))
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=0.05, description='s0', max=1.0, min=-1.0,␣
 ↪step=0.01), FloatSlider(val...
```

[4]:
```
<function __main__.interact_sol(s0=0.05, s1=0.05, T=10, N=101)>
```

Точки покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

ищутся из условия:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Для данного случая:

$$\begin{cases} f(x, y) = -x + y^2 = 0 \\ g(x, y) = x^2 - y^3 = 0 \end{cases}$$

Из первого имеем:

$$x = y^2$$

Подставив во второе:

$$y^4 - y^3 = 0 \Rightarrow y^3(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$ - точки покоя системы

Исследуем полученные точки покоя системы на устойчивость

1. $(0, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \Bigg|_{x=0,y=0} = \begin{bmatrix} f(x, y) & = & -x + y^2 \\ g(x, y) & = & x^2 - y^3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 2x & -3y^2 \end{pmatrix} \Bigg|_{x=0,y=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём корни характеристического многочлена для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1$$

Видим, что оба значения лямбда действительные, одно из них равно 0, а другое отрицательное. Значит, **точка** $(0,0)$ **является устойчивой**, задаёт **устойчивую прямую**.

---

2. $(1,1)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=1} = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 2x & -3y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

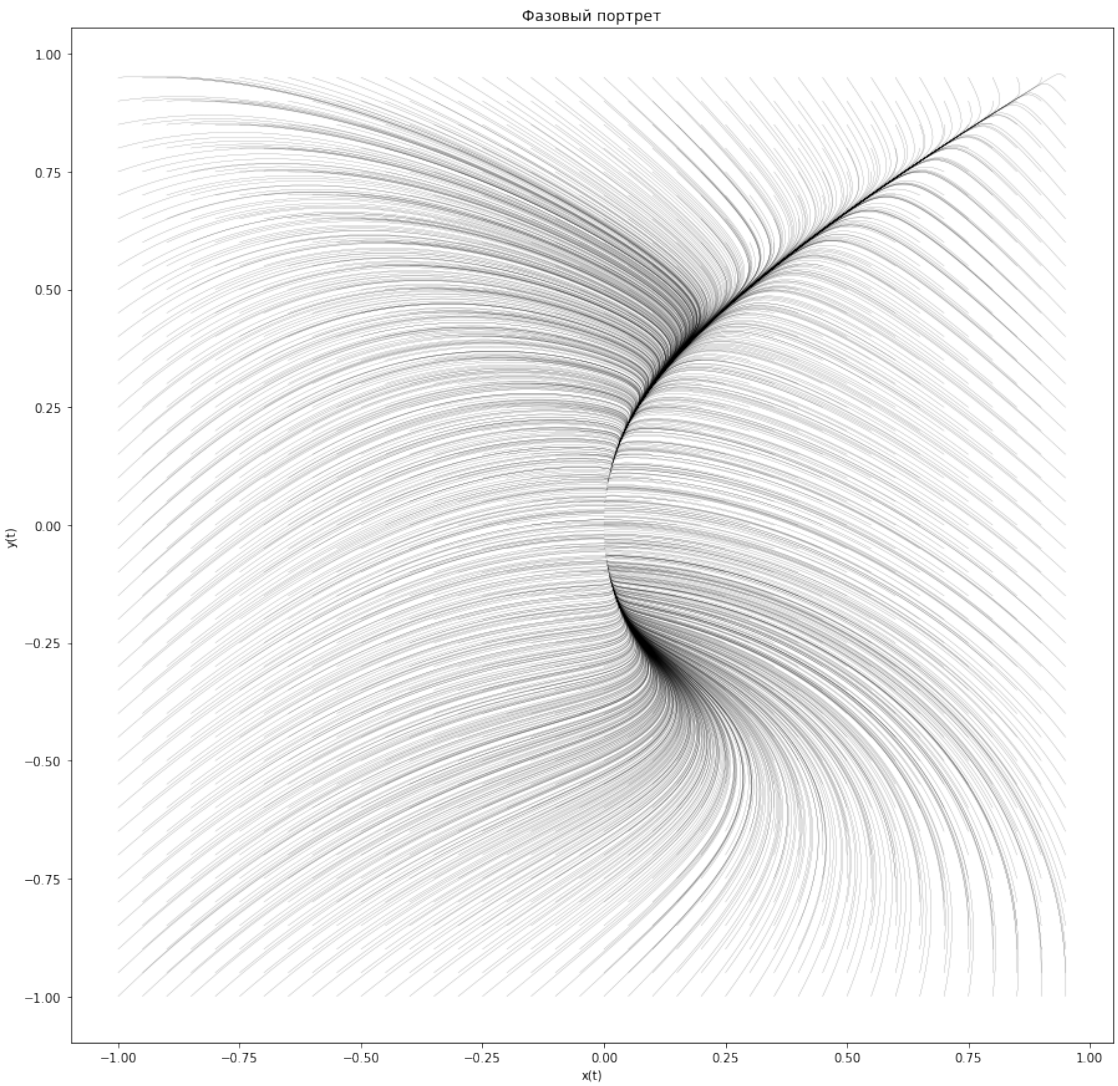
Найдём корни характеристического многочлена для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1)-4 = (\lambda^2+4\lambda+3)-4 = (\lambda+2)^2-5 = 0 \Rightarrow \Rightarrow \lambda_1 = -2-\sqrt{5}, \ \lambda_2 = -2+\sqrt{5}$$

Оба значения действительные, причём $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 2$. Значит **точка (1,1)** задаёт **«седло»** и **не является устойчивой**.

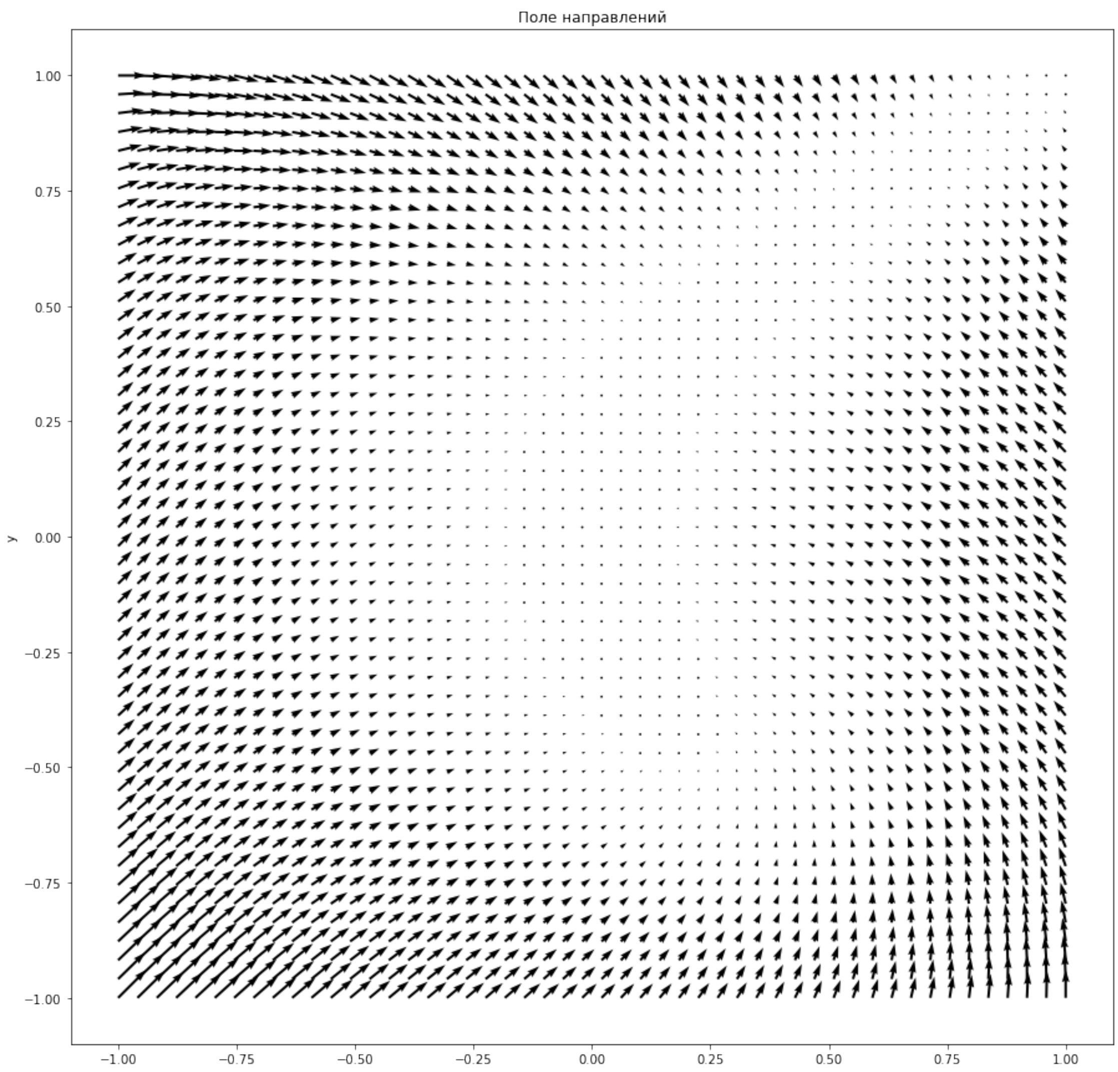
---

[5]:
```python
%matplotlib inline
def phase_portrait(s0_min=-1, s0_max=1, s1_min=-1, s1_max=1, s0_step=0.1,␣
↪s1_step=0.1, T=10, N=101, F=F):
    plt.clf()
    fig = plt.gcf()
    fig.set_size_inches(15, 15)

    t = np.linspace(0, T, num=N)

    for s0 in np.arange(s0_min, s0_max, s0_step):
        for s1 in np.arange(s1_min, s1_max, s1_step):
            v = sol_eq(F, s0, s1, t)
            x, y = v[:, 0], v[:, 1]
            plt.plot(x, y, color='black', linewidth=0.125) #␣
↪label=f"s0={round(s0, 2)}, s1={round(s1, 2)}"

    plt.title("Фазовый портрет")
    plt.xlabel("x(t)")
    plt.ylabel("y(t)")
    plt.show()

# Фазовый портрет
phase_portrait(s0_step=0.05, s1_step=0.05, N=1001)
```



[6]:
```
%matplotlib inline
def vector_field(x_min=-1, x_max=1, y_min=-1, y_max=1, N=50):
    plt.clf()
    fig = plt.gcf()
    fig.set_size_inches(15, 15)

    X = np.linspace(x_min, x_max, num=N)
    Y = np.linspace(y_min, y_max, num=N)
    X, Y = np.meshgrid(X, Y)

    u = der_x(X, Y)
    v = der_y(X, Y)

    # Векторное поле
```

```
    plt.quiver(X, Y, u, v, color='black', linewidth=0.5)

    # Поток
    # color = v
    # plt.streamplot(X, Y, u, v, color=v, linewidth=1.5, density=1., cmap='jet',␣
 ↪arrowsize=1)

    plt.title("Поле направлений")
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("y")
    plt.show()

vector_field(x_max=1.0, y_max=1.0)
```



Далее имеются функции для интерактивного взаимодействия с фазовым портретом и векторным полем. НЕ рекомендуется к использованиею на слабой машине.

[7]:
```
# Интерактивный фазовый портрет с настройкой шагов, максимального времени T и␣
↪количества "шагов" времени N
# !!! ВНИМАНИЕ !!!
# Требует большие вычислительные мощности, не советую использовать на␣
↪относительно слабом компьютере
#
# def interact_phase_portrait(s0_step=0.05, s1_step=0.05, T=10, N=101):
#     phase_portrait(s0_step=s0_step, s1_step=s1_step, T=T, N=N)
#
# %matplotlib widget
# interact(interact_phase_portrait, s0_step=(0.01, 1, 0.01), s1_step=(0.01, 1, 0.
↪01), T=(10, 1000, 10), N=(101, 1001, 100))
```

[8]:
```
# Интерактивное векторное поле с настройкой шагов, максимального времени T и␣
↪количества "шагов" времени N
# !!! ВНИМАНИЕ !!!
# Требует не очень большие, но средние вычислительные мощности, не советую␣
↪использовать на очень слабом компьютере
#
# def interact_vector_field(x_min=-1, x_max=1, y_min=-1, y_max=1, N=50):
#     vector_field(x_min=-1, x_max=1, y_min=-1, y_max=1, N=50)
#
# %matplotlib widget
# interact(vector_field, x_min=(-10, 0, 0.1), x_max=(0, 10, 0.1), y_min=(-10, 0,␣
↪0.1), y_max=(0, 10, 0.1), N=(10, 100, 10))
```