Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Einführung: Warum sind lineare Gleichungssysteme wichtig?

Bedeutung von LGS

Lineare Gleichungssysteme (LGS) sind ein fundamentales Konzept in der Mathematik und haben zahlreiche Anwendungen in verschiedenen Bereichen.

Anwendungen

- **Ingenieurwesen**: Modellierung von elektrischen Netzwerken und mechanischen Systemen.
- **Wirtschaft**: Optimierung von Produktionsprozessen und Ressourcenallokation.
- **Informatik**: Algorithmen für maschinelles Lernen und Datenanalyse.
- **Naturwissenschaften**: Beschreibung physikalischer Systeme und chemischer Reaktionen.

Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Definition

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) besteht aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Wichtige Begriffe

- a_{ij}: **Koeffizienten**
- x_j: **Unbekannte** (Variablen)
- b_i: Komponenten des **Störvektors**

Matrixschreibweise

Kompakte Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit:

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: **Koeffizientenmatrix**
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}$: **Lösungsvektor**
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}$: **Störvektor**

Matrixschreibweise

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$$

Homogen vs. inhomogen

- **Homogen**: $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
- **Inhomogen**: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

Lösung mit inverser Matrix

Voraussetzungen

Die Methode ist nur anwendbar, wenn:

- Die Matrix $\mathbf{A}$ quadratisch ist ($n \times n$).
- Die Matrix $\mathbf{A}$ regulär ist (d.h., $\det(\mathbf{A}) \neq 0$).

Lösungsformel

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Grundidee des Gauß-Algorithmus

Ziel

Umformung der erweiterten Matrix $[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$ in **Zeilenstufenform** durch **elementare Zeilenoperationen**.

Erlaubte Operationen (ändern Lösungsmenge nicht!)

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Beispiel: Eindeutig lösbar

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauß}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

- Rückwärtseinsetzen: $z = 2,\ y = 3,\ x = 1$
- $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3 = n$
- $\rightarrow$ **Genau eine Lösung**

Beispiel: Nicht lösbar

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauß}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Letzte Zeile: $0 = 1 \rightarrow$ Widerspruch!
- $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = 1 < \mathrm{Rg}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$
- $\rightarrow$ **Keine Lösung**

Beispiel: Mehrdeutig lösbar

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauß}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Eine Gleichung, drei Unbekannte $\rightarrow$ 2 freie Parameter
- Allgemeine Lösung: $x = 3 - s - t,\ y = s,\ z = t$
- $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 1 < 3$
- $\rightarrow$ **Unendlich viele Lösungen**

Lösbarkeitskriterien: Eindeutig lösbar

Gegeben: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Eindeutig lösbar

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = n$$

$\rightarrow$ Genau eine Lösung. Falls $\mathbf{A}$ quadratisch: $\mathbf{A}$ regulär.

Lösbarkeitskriterien: Mehrdeutig lösbar

Mehrdeutig lösbar

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) < n$$

$\rightarrow$ Unendlich viele Lösungen. Anzahl freier Parameter: $k = n - \mathrm{Rg}(\mathbf{A})$. Falls $\mathbf{A}$ quadratisch: $\mathbf{A}$ singulär.

Lösbarkeitskriterien: Nicht lösbar

Nicht lösbar

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) < \mathrm{Rg}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$$

$\rightarrow$ Keine Lösung. Falls $\mathbf{A}$ quadratisch: $\mathbf{A}$ singulär.

Prüfungstipp: Parameteraufgaben

Häufige Klausuraufgabe

LGS mit Parameter (z. B. λ, a, t) $\to$ **Fallunterscheidung erforderlich!**

Example

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda x + y = 2 \end{cases}$$

$\to$ Für $\lambda = 1$: Widerspruch $\to$ nicht lösbar $\to$ Für $\lambda \neq 1$: eindeutig lösbar

Lösung von Parameteraufgaben mit Determinanten

Schritt 1: Schreibe das System in Matrixform

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

wobei **A** die Koeffizientenmatrix ist und **b** der Störvektor.

Schritt 2: Berechne die Determinante von A

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Schritt 3: Analysiere die Determinante

- Wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$: Das System ist eindeutig lösbar.
- Wenn $\det(\mathbf{A}) = 0$: Das System ist entweder nicht lösbar oder hat unendlich viele Lösungen. Eine weitere Analyse ist erforderlich.

Homogene LGS: $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

Wichtige Eigenschaften

- Immer **lösbar** (triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$)
- **Nicht lösbar** ist unmöglich!
- $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = n$: nur triviale Lösung
- $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) < n$: unendlich viele Lösungen

Übungsaufgabe 1 – Eindeutig lösbar

Aufgabe

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösung des LGS. Überprüfen Sie, ob die Matrix regulär ist (d. h. $\det(A) \neq 0$).

Übungsaufgabe 2 – Mehrdeutig lösbar

Aufgabe

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y + 2z = 8 \\ 3x + 6y + 3z = 12 \end{cases}$$

Aufgabe: Führen Sie den Gauß-Algorithmus durch und bestimmen Sie die allgemeine Lösung. Geben Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und des erweiterten Systems an.

Übungsaufgabe 3 – Nicht lösbar

Aufgabe

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

Aufgabe: Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an. Untersuchen Sie, ob das System lösbar ist. Erklären Sie den Rangunterschied.

Übungsaufgabe 4 – Parameterabhängiges LGS

Aufgabe

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + \lambda y = 6 \end{cases}$$

Aufgabe: Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Systems in Abhängigkeit vom Parameter

λ. Geben Sie an, für welche Werte von λ das System eindeutig, mehrdeutig oder nicht lösbar ist.

Aussprache mathematischer Notationen

Wichtige Bezeichnungen

- $\mathrm{Rg}(\mathbf{A})$: „Rang von A"
- $\det(\mathbf{A})$: „Determinante von A"
- $\mathbf{A}^{-1}$: „A invers"
- $\mathbb{R}^{m\times n}$: „R m kreuz nöder „R m mal n"
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: „x aus R hoch nöder „x Element von R hoch n"
- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$: „A mal x gleich b"
- $\mathbf{0}$: „Nullvektor"
- $\lambda \neq 0$: „Lambda ungleich null"
- $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$: „Erweiterte Koeffizientenmatrix A b "