

Mathematik fürs Studienkolleg

Prüfungsvorbereitung
T-Kurs

Maximilian Völk
Studienkolleg Rahn Education Leipzig
2026

Inhaltsverzeichnis

I Vektorrechnung und Analytische Geometrie	1
1 Vektorrechnung – Grundlagen	3
1.1 Koordinatensystem und Grundlagen	3
1.1.1 Rechtshändiges xyz-Koordinatensystem	3
1.1.2 Koordinatenebenen und Zeichenregeln	3
1.2 Skalare und vektorielle Größen	3
1.2.1 Skalare Größen	3
1.2.2 Vektorielle Größen	4
1.2.3 Der Nullvektor	4
1.3 Koordinatendarstellung von Vektoren	5
1.3.1 Komponentendarstellung	5
1.4 Betrag eines Vektors	5
1.5 Einheitsvektoren	6
1.6 Basisvektoren	6
1.7 Gegenvektor	7
1.8 Vektoroperationen	8
1.8.1 Addition von Vektoren	8
1.8.2 Subtraktion von Vektoren	8
1.8.3 Vielfachbildung (Skalarmultiplikation)	9
1.9 Skalarprodukt	10
1.9.1 Definition und Berechnung	10
1.9.2 Geometrische Bedeutung	10
1.10 Orthogonalität (Rechtwinkligkeit)	11
1.11 Winkelberechnung zwischen Vektoren	11
1.11.1 Vorgehen	11
2 Vektorprodukt und Spatprodukt	13
2.1 Einführung: Das Vektorprodukt	13
2.1.1 Grundprinzip	13
2.1.2 Definition	13
2.1.3 Berechnung eines Vektorprodukts	13
2.1.4 Wichtige Eigenschaft: Nicht-Kommutativität	14
2.2 Parallelität und das Vektorprodukt	14
2.2.1 Parallelitätskriterium	14
2.3 Geometrische Bedeutungen	15
2.3.1 Orthogonalität	15
2.3.2 Betrag: Die Länge entspricht dem Flächeninhalt	15
2.4 Flächenberechnungen mit dem Vektorprodukt	16

INHALTSVERZEICHNIS

2.4.1 Flächeninhalt eines Parallelogramms	16
2.4.2 Flächeninhalt eines Dreiecks	16
2.5 Das Spatprodukt	17
2.5.1 Geometrische Motivation: Der Spat	17
2.5.2 Definition des Spatprodukts	17
2.5.3 Berechnung des Spatprodukts	17
2.5.4 Eigenschaften des Spatprodukts	18
2.6 Volumenberechnungen mit dem Spatprodukt	18
2.6.1 Volumen eines Spats	19
2.6.2 Volumenformeln mit Spatprodukt	19
2.7 Punkte und Vektoren	20
2.7.1 Vom Punkt zum Vektor: Der Ortsvektor	20
2.7.2 Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten	21
2.7.3 Punkt aus Anfangspunkt und Vektor berechnen	21
2.7.4 Die Mittelpunktformel	22
2.7.5 Verallgemeinerung: Schwerpunkt eines Dreiecks	22
2.8 Anwendungen: Nachweis besonderer Vierecke	22
2.8.1 Nachweis eines Parallelogramms	22
2.8.2 Nachweis eines Rhombus	23
2.8.3 Nachweis eines Rechtecks	23
2.8.4 Nachweis eines Quadrats	24
2.8.5 Gleichschenkliges Dreieck	24
2.9 Zusammenfassung	25
2.9.1 Vektorprodukt	25
2.9.2 Spatprodukt	25
3 Geraden und Ebenen im Raum	27
3.1 Einführung	27
3.2 Geraden im \mathbb{R}^3	27
3.2.1 Ausgangspunkt: Geraden in der Ebene	27
3.2.2 Parametergleichung einer Geraden	28
3.2.3 Geradengleichungen aufstellen	28
3.3 Ebenen im \mathbb{R}^3	28
3.3.1 Charakterisierung	29
3.3.2 Parametergleichung einer Ebene	29
3.3.3 Der Normalenvektor	29
3.3.4 Koordinatengleichung (parameterfreie Form)	29
3.3.5 Umwandlung der Darstellungsformen	30
3.3.6 Ebenengleichungen aufstellen	30
3.4 Lagebeziehungen	31
3.4.1 Übersicht	31
3.4.2 Lagebeziehung: Gerade \leftrightarrow Gerade	31
3.4.3 Schnittwinkel zweier Geraden	33
3.4.4 Lagebeziehung: Gerade \leftrightarrow Ebene	33
3.4.5 Der Durchstoßpunkt	37
3.4.6 Schnittwinkel Gerade – Ebene	37
3.5 Zusammenfassung	37
3.6 Übungsaufgaben	37

4 Lagebeziehungen und Abstände	39
4.1 Lagebeziehungen Ebene ↔ Ebene	39
4.1.1 Drei mögliche Fälle	39
4.1.2 Grundidee zur Lagebestimmung	39
4.1.3 Beispiel: Ebenen schneiden sich in einer Geraden	39
4.1.4 Beispiel: Echte parallele Ebenen	40
4.2 Schnittwinkel zweier Ebenen	41
4.3 Abstände in der analytischen Geometrie	41
4.3.1 Übersicht	41
4.3.2 Fall 1: Abstand Punkt–Punkt	42
4.3.3 Fall 2: Abstand Punkt–Gerade	42
4.3.4 Fall 3: Abstand Punkt–Ebene (Hessesche Normalenform)	43
4.3.5 Fall 4: Abstand paralleler Geraden	44
4.3.6 Fall 5: Abstand windschiefer Geraden	44
4.3.7 Fall 6: Abstand Gerade–Ebene (parallel)	45
4.3.8 Fall 7: Abstand paralleler Ebenen	45
4.4 Zusammenfassung	45
4.5 Übungsaufgaben	46
 II Lineare Algebra	 47
5 Matrizen	49
 III Differentialrechnung	 51
6 Zahlenfolgen	53
 IV Integralrechnung	 55
7 Einführung in die Integration	57

INHALTSVERZEICHNIS

Teil I

Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Vektorrechnung – Grundlagen

1.1 Koordinatensystem und Grundlagen

1.1.1 Rechtshändiges xyz-Koordinatensystem

In der analytischen Geometrie arbeiten wir mit einem dreidimensionalen rechtshändigen Koordinatensystem. Die Orientierung ist dabei wie folgt festgelegt:

Orientierung des Koordinatensystems

- **x-Achse:** von hinten nach vorn
- **y-Achse:** von links nach rechts
- **z-Achse:** von unten nach oben
- **Koordinatenursprung:** $O(0|0|0)$

1.1.2 Koordinatenebenen und Zeichenregeln

Das dreidimensionale Koordinatensystem wird durch drei Koordinatenebenen aufgespannt:

Koordinatenebenen

- **xy-Ebene:** $z = 0$
- **yz-Ebene:** $x = 0$
- **xz-Ebene:** $y = 0$

Beim Zeichnen auf kariertem Papier gelten folgende Konventionen:

- 1 LE = 1 cm in y - und z -Richtung
- 1 LE = ein Diagonalkästchen in x -Richtung

1.2 Skalare und vektorielle Größen

1.2.1 Skalare Größen

Skalar

Eine **skalare Größe** wird vollständig durch einen Zahlenwert (und eine Einheit) beschrieben.

Beispiele für skalare Größen:

- Temperatur: 25°C
- Masse: 2,5 kg
- Zeit: 10 s
- Energie: 100 J
- Volumen: 5 L

Eigenschaften skalarer Größen:

- Nur der Betrag ist wichtig
- Keine Richtung vorhanden
- Einfache Addition möglich: $2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 5 \text{ kg}$

1.2.2 Vektorielle Größen

Im Gegensatz zu skalaren Größen benötigen vektorielle Größen zusätzliche Informationen:

Vektor

Eine **vektorielle Größe** \vec{a} benötigt zur vollständigen Beschreibung:

- einen **Betrag** (Länge): $|\vec{a}|$
- eine **Richtung** (Orientierung im Raum)
- einen **Richtungssinn** (wohin zeigt der Vektor?)

Beispiele für vektorielle Größen:

- Geschwindigkeit \vec{v}
- Kraft \vec{F}
- Beschleunigung \vec{a}
- Weg/Verschiebung \vec{s}

Darstellung: Vektoren werden als Pfeile dargestellt, wobei:

- die Pfeillänge den Betrag repräsentiert
- die Pfeilrichtung die Richtung angibt

1.2.3 Der Nullvektor

Nullvektor

Der **Nullvektor** $\vec{0}$ ist ein besonderer Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- Hat den Betrag $|\vec{0}| = 0$
- Hat **keine definierte Richtung**
- Entspricht: keine Bewegung, keine Kraft, keine Verschiebung

Wichtig

Der Nullvektor ist der **einige** Vektor ohne Richtung!

1.3 Koordinatendarstellung von Vektoren

1.3.1 Komponentendarstellung

Koordinatendarstellung

Ein Vektor kann durch seine Komponenten dargestellt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

wobei $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ die Basisvektoren sind.

Wozu braucht man das?

- Eindeutige mathematische Beschreibung von Vektoren
- Ermöglicht Berechnungen (Addition, Multiplikation, etc.)
- Konkrete Darstellung von physikalischen Größen (Kraft, Geschwindigkeit, etc.)

Koordinatendarstellung

Ein Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bedeutet: 5 m/s nach rechts, 2 m/s nach oben, 1 m/s nach unten.

1.4 Betrag eines Vektors

Betrag eines Vektors

Der Betrag gibt die **Länge** eines Vektors an:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Wozu braucht man das?

- Bestimmung der Stärke einer physikalischen Größe (z.B. Geschwindigkeit, Kraft)
- Berechnung von Abständen zwischen Punkten
- Normierung von Vektoren
- Überprüfung, ob ein Vektor die gewünschte Länge hat

Geschwindigkeit berechnen

Ein Auto fährt mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wie schnell ist das Auto insgesamt?

$$|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3600 + 6400} = \sqrt{10000} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1.5 Einheitsvektoren

Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor hat die Länge 1 und zeigt in dieselbe Richtung wie der ursprüngliche Vektor:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Wozu braucht man das?

- Angabe einer Richtung unabhängig von der Länge
- Zerlegung von Vektoren: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \hat{a}$ (Betrag \times Richtung)
- Vereinfachung von Berechnungen
- Definition von Koordinatensystemen (Basisvektoren sind Einheitsvektoren)

Einheitsvektor berechnen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Betrag berechnen

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Schritt 2: Einheitsvektor berechnen

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.6 Basisvektoren

Basisvektoren

Die Basisvektoren sind Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wozu braucht man das?

- Definition des Koordinatensystems
- Jeder Vektor lässt sich als Linearkombination darstellen
- Vereinfachung der Notation in physikalischen Formeln
- Basis für Vektorzerlegung

Darstellung mit Basisvektoren

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ lässt sich schreiben als:

$$\vec{a} = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$$

Ausgeschrieben:

$$\vec{a} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.7 Gegenvektor

Gegenvektor

Der Gegenvektor hat die umgekehrten Komponenten:

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor hat den gleichen Betrag, aber entgegengesetzten Richtungssinn.

Wozu braucht man das?

- Darstellung entgegengesetzter physikalischer Größen (z.B. Kraft und Gegenkraft)
- Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- Rückwärtsbewegungen oder umgekehrte Richtungen
- Der Gegenvektor hebt den ursprünglichen Vektor auf: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Gegenvektor

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gegenvektor: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Überprüfung:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

1.8 Vektoroperationen**1.8.1 Addition von Vektoren****Vektoraddition**

Vektoren werden komponentenweise addiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Wozu braucht man das?

- Überlagerung von physikalischen Größen (z.B. mehrere Kräfte, Geschwindigkeiten)
- Beschreibung von zusammengesetzten Bewegungen
- Berechnung von Gesamtverschiebungen
- Geometrisch: Aneinanderhängen von Wegstrecken

Vektoraddition – Rechnerisch und grafisch

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Rechnung:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ 1 + 3 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Grafische Darstellung: Pfeilspitzenverfahren (Kopf-an-Schwanz-Methode)

1.8.2 Subtraktion von Vektoren**Vektorsubtraktion**

Vektoren werden komponentenweise subtrahiert:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Wozu braucht man das?

- Berechnung von Differenzen physikalischer Größen (z.B. Geschwindigkeitsänderung)
- Bestimmung von Verbindungsvektoren zwischen zwei Punkten

- Berechnung relativer Bewegungen (z.B. Relativgeschwindigkeit)
- Änderungen und Unterschiede quantifizieren

Vektorsubtraktion

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Direkte Subtraktion:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 2 - 4 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alternativ mit Gegenvektor:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.8.3 Vielfachbildung (Skalarmultiplikation)

Skalarmultiplikation

Für $k \in \mathbb{R}$:

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl (Skalar) multipliziert.

Geometrische Bedeutung:

- $k > 1$: Vektor wird gestreckt (länger)
- $0 < k < 1$: Vektor wird gestaucht (kürzer)
- $k < 0$: Richtungsumkehr und Längenänderung
- $k\vec{a}$ ist immer parallel zu \vec{a}

Vielfachbildung

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (\text{doppelte Länge})$$

$$0,5\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad (\text{halbe Länge})$$

1.9 Skalarprodukt

1.9.1 Definition und Berechnung

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (= \vec{a}^T \vec{b})$$

Das Skalarprodukt multipliziert zwei Vektoren und ergibt eine Zahl (Skalar).

Grundprinzip: Vektor · Vektor = Zahl (Skalar)

Wozu braucht man das?

- Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren
- Prüfung auf Orthogonalität (rechter Winkel): $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Berechnung von Projektionen (z.B. Komponente einer Kraft in eine Richtung)
- Physikalische Arbeit: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
- Bestimmung, wie stark zwei Vektoren in dieselbe Richtung zeigen

Skalarprodukt berechnen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = 0$$

⇒ Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander (orthogonal)!

1.9.2 Geometrische Bedeutung

Winkelbezug des Skalarprodukts

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

Umstellung nach dem Winkel:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$$

Interpretation:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$: Winkel $\varphi < 90^\circ$ (spitzer Winkel)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$: Winkel $\varphi = 90^\circ$ (rechter Winkel, orthogonal)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$: Winkel $\varphi > 90^\circ$ (stumpfer Winkel)

1.10 Orthogonalität (Rechtwinkligkeit)

Orthogonalität

Zwei Vektoren sind orthogonal (stehen senkrecht aufeinander), wenn:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Warum ist das so?

Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Wozu braucht man das?

- Schnelle Überprüfung, ob Vektoren senkrecht zueinander stehen
- Konstruktion orthogonaler Koordinatensysteme
- Prüfung geometrischer Eigenschaften (z.B. rechte Winkel in Figuren)
- Wichtig für Projektionen und Zerlegungen

Orthogonale Vektoren

Beispiel 1: Orthogonale Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 6 - 6 = 0$$

\Rightarrow Die Vektoren sind orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Beispiel 2: Nicht orthogonale Vektoren

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3 \neq 0$$

\Rightarrow Die Vektoren sind nicht orthogonal.

1.11 Winkelberechnung zwischen Vektoren

1.11.1 Vorgehen

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen, geht man wie folgt vor:

Schritt-für-Schritt-Anleitung

Schritt 1: Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ berechnen

Schritt 2: Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ berechnen

Schritt 3: Cosinus des Winkels bestimmen:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Schritt 4: Winkel berechnen:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$$

Winkelberechnung

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 0 + 1 = 3$$

Schritt 2: Beträge

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Schritt 3 & 4: Winkel

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \approx 0,775$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{3}{\sqrt{15}} \right) \approx 39,2^\circ$$

2

Vektorprodukt und Spatprodukt

2.1 Einführung: Das Vektorprodukt

2.1.1 Grundprinzip

Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) ist eine besondere Operation, die nur im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 definiert ist.

Grundprinzip des Vektorprodukts

$$\text{Vektor} \times \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Im Gegensatz zum Skalarprodukt: Das Vektorprodukt liefert einen neuen Vektor!

Geometrische Bedeutung:

- Der resultierende Vektor steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren
- Seine Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

2.1.2 Definition

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im \mathbb{R}^3 . Das **Vektorprodukt** ist:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Berechnung eines Vektorprodukts

Vektorprodukt berechnen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung:

Erste Komponente: (streiche Zeile 1)

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

Zweite Komponente: (streiche Zeile 2)

$$a_3 b_1 - a_1 b_3 = (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7$$

Dritte Komponente: (streiche Zeile 3)

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 8 - 1 = 7$$

Ergebnis:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Probe: Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ sollte orthogonal zu \vec{a} und \vec{b} sein:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (2, 1, -3) \cdot (14, -7, 7) = 28 - 7 - 21 = 0 \quad \checkmark \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (1, 4, 2) \cdot (14, -7, 7) = 14 - 28 + 14 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2.1.4 Wichtige Eigenschaft: Nicht-Kommunitativität

Nicht-Kommunitativität

Das Vektorprodukt ist **nicht kommutativ**!

Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Bei Vertauschung der Faktoren ändert sich das Vorzeichen (und damit die Richtung des Ergebnisvektors).

2.2 Parallelität und das Vektorprodukt

2.2.1 Parallelitätskriterium

Parallelitätskriterium

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann parallel (oder einer ist der Nullvektor), wenn gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Beweis: Sind \vec{a} und \vec{b} parallel, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Dann gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{a})$$

Für jede Komponente von $\vec{a} \times \vec{a}$ ergibt sich z.B. für die erste Komponente:

$$a_2 a_3 - a_3 a_2 = 0$$

Also $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

□

Parallelität prüfen

Aufgabe: Prüfen Sie, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ parallel sind.

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} (-1)(-12) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-6) - 2 \cdot (-12) \\ 2 \cdot 3 - (-1)(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12 \\ -24 + 24 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Die Vektoren sind parallel! (Tatsächlich gilt $\vec{b} = -3\vec{a}$)

2.3 Geometrische Bedeutungen

Das Vektorprodukt verbindet Algebra und Geometrie auf elegante Weise:

Zwei fundamentale Eigenschaften**[1] Orthogonalität:**

Das Vektorprodukt steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren

[2] Betrag = Fläche:

Die Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

2.3.1 Orthogonalität

Orthogonalität des Vektorprodukts

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \quad \text{und} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$$

Anschaung: Spannen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} eine Ebene auf, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung der Normalen (Senkrechten) auf dieser Ebene.

2.3.2 Betrag: Die Länge entspricht dem Flächeninhalt

Geometrische Bedeutung des Betrags

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

wobei φ der von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ($0 \leq \varphi \leq \pi$) ist.

Folgerung: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

Beweis-Idee: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms:

$$A = \text{Grundseite} \times \text{Höhe} = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \sin \varphi)$$

Dies entspricht genau $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

□

2.4 Flächenberechnungen mit dem Vektorprodukt

2.4.1 Flächeninhalt eines Parallelogramms

Flächeninhalt Parallelogramm

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seiten \vec{a} und \vec{b} beträgt:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Flächeninhalt Parallelogramm

Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aufgespannt wird.}$$

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = 6$$

Der Flächeninhalt beträgt 6 Flächeneinheiten.

2.4.2 Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt Dreieck

Ein Dreieck hat den halben Flächeninhalt des entsprechenden Parallelogramms:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Flächeninhalt Dreieck

Gegeben: Drei Punkte $A(1, 0, 0)$, $B(4, 2, 0)$ und $C(2, 3, 0)$.

Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

Lösung: Bestimme zwei Seitenvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5$$

2.5 Das Spatprodukt

2.5.1 Geometrische Motivation: Der Spat

Was ist ein Spat?

Ein **Spat** (auch **Parallelepiped** genannt) ist ein dreidimensionaler Körper, der von drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird.

Stellen Sie sich einen **l**schießen Quader" vor:

- Alle gegenüberliegenden Flächen sind parallel
- Die Winkel müssen nicht rechtwinklig sein
- Der Spat wird von drei Vektoren aufgespannt, die von einem gemeinsamen Punkt ausgehen

2.5.2 Definition des Spatprodukts

Spatprodukt / Gemischtes Produkt

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ drei Vektoren. Das **Spatprodukt** ist definiert als:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Das Spatprodukt ist eine **Zahl** (Skalar).

Alternative Darstellung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.5.3 Berechnung des Spatprodukts

Rechenweg

Methode 1:

1. Berechne zunächst das Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$
2. Bilde dann das Skalarprodukt von \vec{a} mit dem Ergebnis

Methode 2:

- Berechne die Determinante der 3×3 -Matrix direkt nach der Regel von Sarrus

Spatprodukt berechnen (Methode 1)

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Zunächst $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Dann das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= (1, 2, 3) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= -1 + 2 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Spatprodukt berechnen (Methode 2 – Determinante)

Lösung (Methode 2):

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nach der Regel von Sarrus (Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0 - 1) + 3 \cdot (2 - 0) \\ &= -1 + 2 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Das Spatprodukt beträgt 7.

2.5.4 Eigenschaften des Spatprodukts

Eigenschaften

1. Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

2. Vorzeichenwechsel bei Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

3. Komplanarität:

Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind genau dann komplanar (liegen in einer Ebene), wenn

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

2.6 Volumenberechnungen mit dem Spatprodukt

2.6.1 Volumen eines Spats

Volumen eines Parallelepipeds

Ein Parallelepiped ist ein vierseitiges schiefes Prisma, bei dem alle Seitenflächen Parallelogramme sind.

Das Volumen beträgt:

$$V_{\text{Spat}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Volumen eines Spats

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des Spats, der von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Lösung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6 - 0) = 12$$

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 12$$

Das Volumen beträgt 12 Volumeneinheiten.

2.6.2 Volumenformeln mit Spatprodukt

Übersicht

Vierseitiges schiefes Prisma (Spat):

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Dreiseitiges schiefes Prisma:

$$V = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Vierseitige schiefere Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Dreiseitige schiefere Pyramide (Tetraeder):

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Herleitung der Volumenformeln:

- **Dreiseitiges Prisma:** Grundfläche ist ein Dreieck (halbes Parallelogramm), daher Faktor $\frac{1}{2}$
- **Vierseitige Pyramide:** Volumen einer Pyramide = $\frac{1}{3}$ des Volumens eines Prismas, daher Faktor $\frac{1}{3}$
- **Dreiseitige Pyramide (Tetraeder):** Kombination: $\frac{1}{2}$ für Dreiecksgrundfläche und $\frac{1}{3}$ für Pyramide, daher Faktor $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Volumen einer Pyramide

Gegeben: Vier Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ und $D(0, 0, 5)$.

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCD$.

Lösung: Die Vektoren von A zu den anderen Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Das Spatprodukt:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Das Volumen der dreiseitigen Pyramide (Tetraeder):

$$V = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$$

Das Volumen beträgt 10 Volumeneinheiten.

2.7 Punkte und Vektoren

2.7.1 Vom Punkt zum Vektor: Der Ortsvektor

In der analytischen Geometrie verschmelzen zwei Konzepte zu einer eleganten Einheit:

- Punkte im Raum
- Vektoren

Diese Verbindung ermöglicht es uns:

- Geometrische Probleme rechnerisch zu lösen
- Algebraische Ausdrücke geometrisch zu interpretieren

Ortsvektor

Sei O der Ursprung des Koordinatensystems und A ein Punkt im Raum mit den Koordinaten $A(a_1, a_2, a_3)$. Der **Ortsvektor** von A ist der Vektor, der vom Ursprung O zum Punkt A zeigt:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Konvention: Oft schreibt man einfach \vec{a} statt \overrightarrow{OA} und identifiziert den Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ mit seinem Ortsvektor.

Ortsvektor

Gegeben: Der Punkt $A(2, -3, 5)$

Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.7.2 Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten

Verbindungsvektor

Seien $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ zwei Punkte. Der Vektor von A nach B ist:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Merksatz: SSpitze minus Schaft"

Der Verbindungsvektor zeigt vom ersten zum zweiten Punkt.

Verbindungsvektor

Aufgabe: Bestimmen Sie den Vektor von $A(1, 2, -1)$ nach $B(4, 0, 3)$.

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.7.3 Punkt aus Anfangspunkt und Vektor berechnen

Punkt berechnen

Gegeben seien ein Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ und ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Der Punkt B , der erreicht wird, wenn man von A aus den Vektor \vec{v} abträgt, hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$$

beziehungsweise in Koordinaten:

$$B = A + \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 + v_1 \\ a_2 + v_2 \\ a_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

Punkt berechnen

Aufgabe: Von Punkt $A(2, 1, 0)$ aus wird der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ abgetragen. Bestimmen Sie Punkt B .

Lösung:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(5, -1, 5)$.

2.7.4 Die Mittelpunktfomel

Mittelpunkt einer Strecke

Der Mittelpunkt M der Strecke zwischen den Punkten A und B hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

In Koordinaten:

$$M = \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \\ \frac{a_3+b_3}{2} \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation: Der Mittelpunkt liegt genau in der Mitte zwischen A und B – man bildet das arithmetische Mittel der Koordinaten.

Mittelpunkt berechnen

Aufgabe: Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(1, 3, -2)$ und $B(5, -1, 4)$.**Lösung:**

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt ist $M(3, 1, 1)$.

2.7.5 Verallgemeinerung: Schwerpunkt eines Dreiecks

Schwerpunkt

Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

2.8 Anwendungen: Nachweis besonderer Vierecke

2.8.1 Nachweis eines Parallelogramms

Parallelogramm nachweisen

Gegeben: Vier Punkte $A(1, 2, 0)$, $B(4, 3, 1)$, $C(5, 6, 2)$ und $D(2, 5, 1)$.**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.**Lösung:** Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten

parallel und gleich lang sind, d.h. wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Berechnung der Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 6 - 5 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, sind die Seiten AB und DC parallel und gleich lang.

Prüfung der anderen Seiten:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 5 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 - 4 \\ 6 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da auch $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ist $ABCD$ ein Parallelogramm. ✓

2.8.2 Nachweis eines Rhombus

Rhombus nachweisen

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(3, 3, 0)$ und $D(1, 2, 0)$ einen Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm) bilden.

Lösung: Ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit allen Seiten gleich lang. Wir prüfen zunächst die Parallelogramm-Eigenschaft:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 3 - 2 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 3 - 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Nun prüfen wir, ob alle Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Da alle Seiten die Länge $\sqrt{5}$ haben, ist $ABCD$ ein Rhombus. ✓

2.8.3 Nachweis eines Rechtecks

Rechteck nachweisen

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(3, 4, 0)$ und $D(0, 4, 0)$ ein Rechteck bilden.

Lösung: Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel (dann sind automatisch alle Winkel rechte Winkel).

Die Parallelogramm-Eigenschaft prüft man über $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prüfung der Orthogonalität (rechter Winkel):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt null ist, stehen die Seiten senkrecht aufeinander.
 $ABCD$ ist ein Rechteck. ✓

2.8.4 Nachweis eines Quadrats

Quadrat nachweisen

Aufgabe: Prüfen Sie, ob die Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$ und $D(0, 2, 0)$ ein Quadrat bilden.

Lösung: Ein Quadrat ist ein Rechteck mit allen Seiten gleich lang.

Aus dem vorherigen Beispiel wissen wir bereits, wie man ein Rechteck nachweist. Wir prüfen zusätzlich:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4} = 2, \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4} = 2$$

Alle Seiten haben die Länge 2, und die Seiten stehen orthogonal aufeinander (wie bei einem Rechteck).

$ABCD$ ist ein Quadrat. ✓

2.8.5 Gleichschenkliges Dreieck

Gleichschenkliges Dreieck

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ und $C(2, 2, 0)$ gleichschenklig ist.

Lösung: Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

Da $|AB| = |AC| = \sqrt{5}$, ist das Dreieck gleichschenklig mit Basis BC . ✓

2.9 Zusammenfassung

2.9.1 Vektorprodukt

Zusammenfassung Vektorprodukt

Definition:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Parallelität: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

Geometrie:

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt Parallelogramm}$

Anwendungen:

- Flächeninhalt Parallelogramm: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
- Flächeninhalt Dreieck: $A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

2.9.2 Spatprodukt

Zusammenfassung Spatprodukt

Definition: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Volumenformeln:

- Spat: $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 3-seitiges Prisma: $V = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 4-seitige Pyramide: $V = \frac{1}{3} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 3-seitige Pyramide: $V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

3

Geraden und Ebenen im Raum

3.1 Einführung

In diesem Kapitel erweitern wir unsere Kenntnisse der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie im dreidimensionalen Raum. Wir lernen, wie man Geraden und Ebenen mathematisch beschreibt und ihre gegenseitigen Lagebeziehungen untersucht.

Was lernen wir heute?

- **3.4 Geraden im \mathbb{R}^3** – Parameterdarstellung
- **3.5 Ebenen im \mathbb{R}^3** – Parameter- und Koordinatenform
- **3.6 Lagebeziehungen** – Gerade \leftrightarrow Gerade, Gerade \leftrightarrow Ebene

3.2 Geraden im \mathbb{R}^3

3.2.1 Ausgangspunkt: Geraden in der Ebene

Aus der ebenen Geometrie kennen wir bereits verschiedene Darstellungen von Geraden:

Geradengleichungen in der Ebene

In der Ebene kennen wir verschiedene Geradengleichungen:

- **Explizite Form:** $y = mx + b$
- **Normalform:** $ax + by = c$
- **Parameterform:** $(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (v_1, v_2)$

Vorteil der Parameterform

Die Parameterform lässt sich direkt auf den \mathbb{R}^3 übertragen!

3.2.2 Parametergleichung einer Geraden

Parametergleichung einer Geraden im \mathbb{R}^3

Eine Gerade g im \mathbb{R}^3 wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Bezeichnungen:

- \vec{a} = **Ortsvektor / Stützvektor** (fester Punkt auf g)
- \vec{v} = **Richtungsvektor** (gibt die Richtung an, $\vec{v} \neq \vec{0}$)
- t = **Parameter** (durchläuft alle reellen Zahlen)

Geometrische Interpretation: Startpunkt A + Vielfaches der Richtung

3.2.3 Geradengleichungen aufstellen

Fall 1: Punkt + Richtungsvektor gegeben

Direkt einsetzen: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$

Fall 2: Zwei Punkte A und B gegeben

Richtungsvektor: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Geradengleichung: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Wichtig

Wichtig: Die Darstellung ist nicht eindeutig!

Gerade durch zwei Punkte

Aufgabe: Bestimmen Sie die Gerade durch $A(1|2|3)$ und $B(4|0|7)$.

Lösung:

Richtungsvektor:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.3 Ebenen im \mathbb{R}^3

3.3.1 Charakterisierung

Charakterisierung

Eine Ebene ist **zweidimensional** → benötigt 2 Parameter!

Zwei wichtige Darstellungen

- **Parameterform:** Aufspannen durch zwei Richtungen
- **Koordinatenform:** Beschreibung durch Normalenvektor

3.3.2 Parametergleichung einer Ebene

Parametergleichung einer Ebene

Eine Ebene E im \mathbb{R}^3 wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Bezeichnungen:

- \vec{a} = **Ortsvektor / Stützvektor**
- \vec{u}, \vec{v} = **Richtungsvektoren / Spannvektoren**
- s, t = **Parameter**

Bedingung

\vec{u} und \vec{v} dürfen nicht parallel sein!

3.3.3 Der Normalenvektor

Normalenvektor

Ein Vektor \vec{n} heißt **Normalenvektor** einer Ebene E , wenn er senkrecht auf der Ebene steht.

Berechnung:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (\text{Kreuzprodukt})$$

Geometrische Vorstellung: Der Normalenvektor zeigt wie ein Pfeil senkrecht von der Ebene weg – wie eine Antenne auf einer Tischplatte!

3.3.4 Koordinatengleichung (parameterfreie Form)

Koordinatengleichung

Mit dem Normalenvektor \vec{n} und einem Punkt A :

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d$$

oder ausgeschrieben:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$$

wobei $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$

Vorteil: Kompakte Darstellung ohne Parameter!

3.3.5 Umwandlung der Darstellungsformen

Parameter → Koordinatenform

1. Berechne $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. Berechne $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$
3. Stelle auf: $n_1x + n_2y + n_3z = d$

Koordinaten → Parameterform

1. Lies \vec{n} ab
2. Finde einen Punkt auf der Ebene
3. Finde zwei Vektoren \perp zu \vec{n}

Parameter → Koordinatenform

Gegeben:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Berechnung von d : $d = \vec{n} \cdot \vec{a} = -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -4$

3. Koordinatengleichung: $-2x - y + 2z = -4$ oder $2x + y - 2z = 4$

3.3.6 Ebenengleichungen aufstellen

Variante 1: Drei Punkte

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

$$E : \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Variante 2: Punkt + Normalenvektor

$$E : \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

Variante 3: Gerade + Punkt außerhalb

Gerade liefert Stützvektor und einen Richtungsvektor

3.4 Lagebeziehungen

3.4.1 Übersicht

Lagebeziehungen – Übersicht

Objekte	Mögliche Lagen
Gerade \leftrightarrow Gerade	identisch, parallel, schneidend, windschief
Gerade \leftrightarrow Ebene	schneidend, parallel, in Ebene

Besonderheit

Windschiefe Geraden gibt es nur im \mathbb{R}^3 !

3.4.2 Lagebeziehung: Gerade \leftrightarrow Gerade

Entscheidungsbaum

Schritt 1: Sind die Richtungsvektoren parallel?

- JA: Liegt ein Punkt der einen Geraden auf der anderen?
 - JA \rightarrow identisch
 - NEIN \rightarrow echt parallel
- NEIN: Gleichsetzen \rightarrow LGS lösen
 - Lösung existiert \rightarrow schneidend
 - Keine Lösung \rightarrow windschief

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (1/4)

Gegeben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.

Vorbereitung:

Richtungsvektoren prüfen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind nicht parallel

\rightarrow Geraden sind nicht parallel

\rightarrow Mögliche Lagen: schneidend oder windschief

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (2/4)

Gleichungssystem aufstellen

Gleichsetzen von g und h :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Komponentenweise:

$$\text{I: } 1 + 2r = 3 + s$$

$$\text{II: } 2 + r = 1 - s$$

$$\text{III: } 3 - r = 4 + 2s$$

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (3/4)

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} - \frac{1}{2}\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + \frac{1}{2}\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array} \right)$$

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (4/4)

Gauß-Elimination (Fortsetzung):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + \frac{5}{3}\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{array} \right)$$

Interpretation:

- Letzte Zeile: $0 \cdot r + 0 \cdot s = -\frac{4}{3}$
- \rightarrow Widerspruch! ($0 \neq -\frac{4}{3}$)
- Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**

Ergebnis: Die Geraden g und h sind **windschief**.

3.4.3 Schnittwinkel zweier Geraden

Schnittwinkel zweier Geraden

Für schneidende Geraden mit Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Orthogonale Geraden

Geraden schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3.4.4 Lagebeziehung: Gerade \leftrightarrow Ebene

Lagebeziehung: Gerade \leftrightarrow Ebene

Gegeben: $g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ und $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = d$

Entscheidungskriterium: $\vec{n} \cdot \vec{v}$

Fall 1: $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$

- \rightarrow Gerade schneidet Ebene (Durchstoßpunkt)

Fall 2: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ und $d - \vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$

- \rightarrow Gerade parallel zur Ebene

Fall 3: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ und $d - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$

- \rightarrow Gerade liegt in der Ebene

Gerade und Ebene (1/5)

Gegeben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E : 3x + 2y + z = 9$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E .

Mögliche Lagen:

- Gerade liegt in der Ebene
- Gerade ist parallel zur Ebene (liegt nicht in ihr)
- Gerade schneidet die Ebene (in einem Punkt)

Gerade und Ebene (2/5)

Schritt 1: Normalenvektor bestimmen

Aus der Koordinatenform $E : 3x + 2y + z = 9$ lesen wir den Normalenvektor ab:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene. Wenn $\vec{n} \perp \vec{v}$, dann ist die Gerade parallel zur Ebene oder liegt in ihr.

Gerade und Ebene (3/5)

Schritt 3: Skalarprodukt berechnen

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ &= 6 + 2 - 1 \\ &= 7 \neq 0 \end{aligned}$$

Interpretation:

- Da $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$, sind \vec{n} und \vec{v} nicht orthogonal
- → Die Gerade ist nicht parallel zur Ebene
- → Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt

Gerade und Ebene (4/5)

Schritt 4: Durchstoßpunkt berechnen

Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 0+t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

In $E : 3x + 2y + z = 9$ einsetzen:

$$\begin{aligned} 3(1+2t) + 2(0+t) + (2-t) &= 9 \\ 3 + 6t + 0 + 2t + 2 - t &= 9 \\ 5 + 7t &= 9 \\ 7t &= 4 \\ t &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Gerade und Ebene (5/5)**Schritt 5: Koordinaten des Durchstoßpunkts**

Parameter $t = \frac{4}{7}$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{8}{7} \\ 0 + \frac{4}{7} \\ 2 - \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Gerade g schneidet die Ebene E im Durchstoßpunkt $D\left(\frac{15}{7} \mid \frac{4}{7} \mid \frac{10}{7}\right)$.

Gerade liegt in Ebene (1/5)**Gegeben:**

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E : x + y - 2z = 1$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E .

Strategie:

1. Prüfen, ob Richtungsvektor orthogonal zum Normalenvektor ist
2. Falls ja: Prüfen, ob ein Punkt der Geraden in der Ebene liegt

Gerade liegt in Ebene (2/5)**Schritt 1: Normalenvektor bestimmen**

Aus der Koordinatenform $E : x + y - 2z = 1$ erhalten wir:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade liegt in Ebene (3/5)**Schritt 3: Skalarprodukt berechnen**

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\ &= 1 - 1 - 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Interpretation:

- Da $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, sind \vec{n} und \vec{v} orthogonal
- → Die Gerade ist parallel zur Ebene oder liegt in ihr
- → Weitere Prüfung notwendig!

Gerade liegt in Ebene (4/5)**Schritt 4: Stützpunkt der Geraden prüfen**

Liegt der Stützpunkt $P(1|2|1)$ der Geraden in der Ebene E ?

Einsetzen in die Ebenengleichung $E : x + y - 2z = 1$:

$$\begin{aligned}1 + 2 - 2 \cdot 1 &\stackrel{?}{=} 1 \\ 1 + 2 - 2 &\stackrel{?}{=} 1 \\ 1 &= 1 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Interpretation:

- Der Stützpunkt liegt in der Ebene
- Die Gerade ist parallel zur Ebene (wegen $\vec{n} \perp \vec{v}$)
- → Die Gerade liegt **vollständig in der Ebene**

Gerade liegt in Ebene (5/5)

Ergebnis: Die Gerade g liegt vollständig in der Ebene E .

Begründung:

1. $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ Gerade ist parallel zur Ebene
2. Stützpunkt der Geraden liegt in der Ebene
⇒ Alle Punkte der Geraden liegen in der Ebene

Hinweis: Hätte der Stützpunkt **nicht** in der Ebene gelegen, wäre die Gerade echt parallel zur Ebene (ohne Schnittpunkt).

3.4.5 Der Durchstoßpunkt

Der Durchstoßpunkt

Wenn Gerade und Ebene sich schneiden, berechnen wir den Durchstoßpunkt:

$$t = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

Dann einsetzen in die Geradengleichung:

$$D = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$

3.4.6 Schnittwinkel Gerade – Ebene

Wichtig

Hier verwenden wir **SINUS** (nicht Kosinus!)

Schnittwinkel Gerade – Ebene

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

Merkhilfe:

- Gerade–Gerade: $\cos \alpha$
- Gerade–Ebene: $\sin \alpha$

3.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung: Geraden und Ebenen im Raum

Geraden:

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \text{ mit Stützvektor und Richtungsvektor}$$

Ebenen:

- Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$
- Koordinatenform: $n_1x + n_2y + n_3z = d$
- Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Lagebeziehungen:

Systematisches Vorgehen mit Richtungsvektoren und Gleichungssystemen

3.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Gerade durch die Punkte $A(2|-1|3)$ und $B(5|2|0)$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$ und $C(0|0|1)$.

- Stellen Sie die Parametergleichung auf.
- Bestimmen Sie einen Normalenvektor.
- Geben Sie die Koordinatengleichung an.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt und den Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und der Ebene $E : x + y + z = 6$.

4

Lagebeziehungen und Abstände

4.1 Lagebeziehungen Ebene \leftrightarrow Ebene

4.1.1 Drei mögliche Fälle

Lagebeziehungen zweier Ebenen

Zwei Ebenen E_1 und E_2 im \mathbb{R}^3 können:

1. sich in einer Geraden schneiden
2. (echt) parallel zueinander sein
3. identisch sein

4.1.2 Grundidee zur Lagebestimmung

Lagebestimmung durch Gleichungssystem

Wir lösen das Gleichungssystem beider Ebenengleichungen. Die Art der Lösungsmenge entscheidet über den Fall:

Gegeben:

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

Interpretation der Lösungsmenge:

- **Eindimensionale Lösungsmenge** (eine freie Variable): \rightarrow Ebenen schneiden sich in einer Geraden
- **Leere Lösungsmenge**: \rightarrow Ebenen sind echt parallel
- **Zweidimensionale Lösungsmenge** (zwei freie Variablen): \rightarrow Ebenen sind identisch

4.1.3 Beispiel: Ebenen schneiden sich in einer Geraden

Ebenen schneiden sich (1/3)

Gegeben:

$$E_1 : x + 2y - z = 4$$

$$E_2 : 2x - y + 3z = 1$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Ebenen.

Vorgehen: Wir lösen das Gleichungssystem durch das Gauß-Verfahren.

Ebenen schneiden sich (2/3)

Lösung:

Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 2z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung:

$$5y - 5z = 7 \quad \Rightarrow \quad y = z + \frac{7}{5}$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} x + 2\left(z + \frac{7}{5}\right) - z &= 4 \\ x &= -z + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Ebenen schneiden sich (3/3)

Parametrisierung:

Mit $z = t$ als freiem Parameter:

$$\begin{aligned} x &= -t + \frac{6}{5} \\ y &= t + \frac{7}{5} \\ z &= t \end{aligned}$$

Schnittgerade:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

4.1.4 Beispiel: Echte parallele Ebenen

Echte parallele Ebenen

Gegeben:

$$E_1 : \quad x - y + 2z = 3$$

$$E_2 : \quad 2x - 2y + 4z = 8$$

Lösung: Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$2x - 2y + 4z = 6$$

Die zweite Gleichung lautet aber:

$$2x - 2y + 4z = 8$$

Dieser Widerspruch $6 \neq 8$ zeigt, dass das System unlösbar ist.

Ergebnis: Die Ebenen sind echt parallel.

Beobachtung: Die Normalenvektoren sind parallel:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}_1$$

Aber die rechten Seiten stehen nicht im gleichen Verhältnis: $d_2 \neq 2d_1$.

4.2 Schnittwinkel zweier Ebenen

Schnittwinkel zweier Ebenen

Bei sich schneidenden Ebenen E_1 und E_2 ist der Schnittwinkel φ der spitze Winkel zwischen den Ebenen ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$).

Der Schnittwinkel entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Hinweis: Wir verwenden den Betrag, um stets den spitzen Winkel zu erhalten.

Schnittwinkel berechnen

Gegeben:

$$E_1 : 2x - y + 3z = 5, \quad E_2 : x + 2y - z = 4$$

Normalenvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\cos \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{|2 - 2 - 3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \approx 0.327$$

$$\varphi = \arccos(0.327) \approx 70.9^\circ$$

4.3 Abstände in der analytischen Geometrie

4.3.1 Übersicht

Sieben grundlegende Abstandsfälle

In der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raums unterscheiden wir sieben grundlegende Abstandsfälle:

Fall	Objekte	Voraussetzung
1	Punkt – Punkt	—
2	Punkt – Gerade	—
3	Punkt – Ebene	—
4	Gerade – Gerade	parallel
5	Gerade – Gerade	windschief
6	Gerade – Ebene	parallel
7	Ebene – Ebene	parallel

4.3.2 Fall 1: Abstand Punkt–Punkt

Abstand zweier Punkte

Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Interpretation: Dies ist einfach die Länge des Verbindungsvektors.

4.3.3 Fall 2: Abstand Punkt–Gerade

Geometrische Überlegung

Der kürzeste Abstand wird auf dem Lot vom Punkt P auf die Gerade g erreicht. Wir suchen den Lotfußpunkt F auf g und berechnen dann $|PF|$.

Verfahren

Gegeben: Punkt P und Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$

1. Lotfußpunkt: $F = \vec{a} + t_0\vec{v}$ für ein bestimmtes t_0
2. Orthogonalitätsbedingung: $(F - P) \cdot \vec{v} = 0$
3. Daraus t_0 bestimmen und damit F
4. $d(P, g) = |PF|$

Abstand Punkt–Gerade (1/2)

Gegeben: Punkt $P(2, 3, 1)$ und Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g .

Schritt 1: Allgemeiner Punkt auf g :

$$F = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+2t \\ -t \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Orthogonalitätsbedingung $(F - P) \cdot \vec{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1+t-2 \\ 1+2t-3 \\ -t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(t-1) \cdot 1 + (2t-2) \cdot 2 + (-t-1) \cdot (-1) = 0$$

$$t-1 + 4t-4 + t+1 = 0$$

$$6t-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

Abstand Punkt–Gerade (2/2)

Schritt 3: Lotfußpunkt F :

$$F = \begin{pmatrix} 1+\frac{2}{3} \\ 1+\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Abstand berechnen:

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}-2 \\ \frac{7}{3}-3 \\ -\frac{2}{3}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4+25}{9}} = \sqrt{\frac{30}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Ergebnis: Der Abstand beträgt $\frac{\sqrt{30}}{3} \approx 1.83$ Längeneinheiten.

4.3.4 Fall 3: Abstand Punkt–Ebene (Hessesche Normalenform)

Wichtigster Abstandsfall!

Dies ist der wichtigste Abstandsfall in der analytischen Geometrie!

Geometrische Idee: Der kürzeste Abstand eines Punktes P von einer Ebene E wird auf der Normalen zur Ebene erreicht.

Hessesche Normalenform

Für eine Ebene $E : n_1x + n_2y + n_3z = d$ und Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$d(P, E) = \frac{|n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Abstand Punkt–Ebene

Gegeben: Punkt $P(3, -1, 2)$ und Ebene $E : 2x - y + 2z = 6$

Lösung mit Hessescher Abstandsformel:

$$\begin{aligned} d(P, E) &= \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|6 + 1 + 4 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|5|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{5}{3} \approx 1.67 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Abstand beträgt $\frac{5}{3} \approx 1.67$ Längeneinheiten.

4.3.5 Fall 4: Abstand paralleler Geraden

Abstand paralleler Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 sind parallel zueinander.

Methode: Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf g_1 und berechnen seinen Abstand zu g_2 :

$$d(g_1, g_2) = d(P, g_2) \quad \text{mit } P \in g_1$$

Bemerkung: Dies führt den Fall auf Fall 2 (Punkt–Gerade) zurück.

4.3.6 Fall 5: Abstand windschiefer Geraden

Windschiefe Geraden

Zwei Geraden heißen windschief, wenn sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind. Sie liegen in verschiedenen "Stockwerken" des Raums.

Geometrische Idee: Es gibt genau eine gemeinsame Normale zu beiden Geraden. Der Abstand ist die Länge des Stücks dieser Normalen zwischen den beiden Geraden.

Verfahren: Abstand windschiefer Geraden

Gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{v}_1, \quad g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{v}_2 \quad (\text{windschief})$$

1. Schritt 1: Bestimme den Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

2. Schritt 2: Berechne den Abstand mit:

$$d = \frac{|(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

4.3.7 Fall 6: Abstand Gerade–Ebene (parallel)

Abstand paralleler Gerade und Ebene

Eine Gerade g ist parallel zu einer Ebene E .

Methode: Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf g und berechnen:

$$d(g, E) = d(P, E)$$

Bemerkung: Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

4.3.8 Fall 7: Abstand paralleler Ebenen

Abstand paralleler Ebenen

Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind parallel zueinander.

Methode: Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf E_1 und berechnen:

$$d(E_1, E_2) = d(P, E_2)$$

Bemerkung: Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

Abstand paralleler Ebenen

Gegeben:

$$E_1 : x - 2y + 2z = 3, \quad E_2 : x - 2y + 2z = 9$$

Aufgabe: Bestimmen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen.

Vorgehen:

1. Wähle einen Punkt auf E_1 : Setze $y = 0, z = 0$: $x = 3 \Rightarrow P(3, 0, 0)$
2. Berechne den Abstand P zu E_2 mit Hessescher Formel:

$$d = \frac{|1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{3} = 2$$

Ergebnis: Der Abstand beträgt 2 Längeneinheiten.

4.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung Lagebeziehungen und Abstände

Lagebeziehungen Ebene–Ebene:

- Schneidend in Gerade: eindimensionale Lösungsmenge
- Echt parallel: leere Lösungsmenge
- Identisch: zweidimensionale Lösungsmenge

Sieben Abstandsfälle:

1. Punkt–Punkt: Länge des Verbindungsvektors
2. Punkt–Gerade: Lotfußpunktverfahren

3. Punkt–Ebene: Hessesche Normalenform (wichtigster Fall!)
4. Parallelle Geraden: auf Punkt–Gerade zurückführen
5. Windschiefe Geraden: Vektorformel mit Kreuzprodukt
6. Parallelle Gerade–Ebene: auf Punkt–Ebene zurückführen
7. Parallelle Ebenen: auf Punkt–Ebene zurückführen

4.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Lagebeziehung Ebene–Ebene

Bestimmen Sie die Lagebeziehung der Ebenen:

$$E_1 : 3x + 2y - z = 5, \quad E_2 : 6x + 4y - 2z = 10$$

Aufgabe 2: Schnittgerade

Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen:

$$E_1 : x - y + 2z = 4, \quad E_2 : 2x + y - z = 3$$

Aufgabe 3: Abstand Punkt–Ebene

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(1, -2, 3)$ von der Ebene $E : 4x - 3y + 12z = 26$.

Aufgabe 4: Abstand windschiefer Geraden

Gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Geraden windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.

Teil II

Lineare Algebra

5

Matrizen

Teil III

Differentialrechnung

6

Zahlenfolgen

Teil IV

Integralrechnung

7

Einführung in die Integration
