

Flächenberechnung und Rotationsvolumen

Integralrechnung mit Integrationstechniken

Flächenberechnung mit komplexeren Funktionen

Problemstellung

Bei komplexeren Funktionen benötigen wir für die Flächenberechnung:

- Substitution
- Partielle Integration
- Kombination beider Methoden

Empfohlene Vorgehensweise

- 1 **Zuerst:** Stammfunktion $F(x)$ mit Integrationstechniken berechnen
- 2 **Dann:** Hauptsatz anwenden: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Vorteil

Keine Transformation der Grenzen bei Substitution nötig!

Beispiel 1: Fläche mit Substitution

Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x \cdot e^{x^2}$, der x-Achse und den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$.

Schritt 1: Stammfunktion berechnen

Wir benötigen $\int x \cdot e^{x^2} dx$

Substitution:

- Setze: $u = x^2$
- Dann: $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$

Beispiel 1: Fläche mit Substitution (Fortsetzung)

Integral in u :

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \int e^u \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C$$

Resubstitution: $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

Schritt 2: Grenzen einsetzen

$$A = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e^1 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} (e - 1) \approx 0,859 \text{ FE}$$

Beispiel 2: Fläche mit partieller Integration

Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x \cdot \sin(x)$, der x-Achse und den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$.

Schritt 1: Stammfunktion berechnen

Wir benötigen $\int x \cdot \sin(x) dx$

Partielle Integration:

- Wähle: $u = x$ und $v' = \sin(x)$
- Dann: $u' = 1$ und $v = -\cos(x)$

Beispiel 2: Partielle Integration (Fortsetzung)

Formel anwenden:

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin(x) \, dx &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) \, dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) \, dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C\end{aligned}$$

Also: $F(x) = -x \cos(x) + \sin(x) + C$

Beispiel 2: Partielle Integration (Fortsetzung)

Schritt 2: Grenzen einsetzen

$$A = \int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \, dx = [-x \cos(x) + \sin(x)]_0^{\pi}$$

Obere Grenze ($x = \pi$):

$$-\pi \cos(\pi) + \sin(\pi) = -\pi \cdot (-1) + 0 = \pi$$

Untere Grenze ($x = 0$):

$$-0 \cdot \cos(0) + \sin(0) = 0$$

Ergebnis:

$$A = \pi - 0 = \pi \text{ FE}$$

Beispiel 3: Kombinierte Methoden

Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = 1$.

Schritt 1: Stammfunktion berechnen

Substitution:

- Setze: $u = x^2 + 1$
- Dann: $du = 2x \, dx \Rightarrow x \, dx = \frac{1}{2}du$
- Außerdem: $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{u}$

Beispiel 3: Kombinierte Methoden (Fortsetzung)

Integral transformieren:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du \\&= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{u} + C\end{aligned}$$

Resubstitution: $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + C$

Schritt 2: Grenzen einsetzen

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 \\&= \sqrt{2} - 1 \approx 0,414 \text{ FE}\end{aligned}$$

Wichtige Hinweise zur Vorgehensweise

Vorteile der Methode

- Keine Transformation der Grenzen bei Substitution
- Übersichtlichere Rechnung
- Weniger Fehlerquellen
- Stammfunktion kann wiederverwendet werden

Typische Fehler vermeiden

- **Nicht vergessen:** Resubstitution durchführen!
- **Nicht vergessen:** Bei Flächen unter der x-Achse Betrag bilden
- **Kontrolle:** Ableitung der Stammfunktion = Integrand?

Volumen von Rotationskörpern - Einführung

Grundidee

Rotiert eine Fläche um eine Achse, entsteht ein dreidimensionaler Körper. Das Volumen kann durch Integration berechnet werden.

Zwei Hauptfälle

- 1 Rotation um die x-Achse:** Formel mit $y = f(x)$
- 2 Rotation um die y-Achse:** Formel mit $x = g(y)$ (Umkehrfunktion)

Merkhilfe

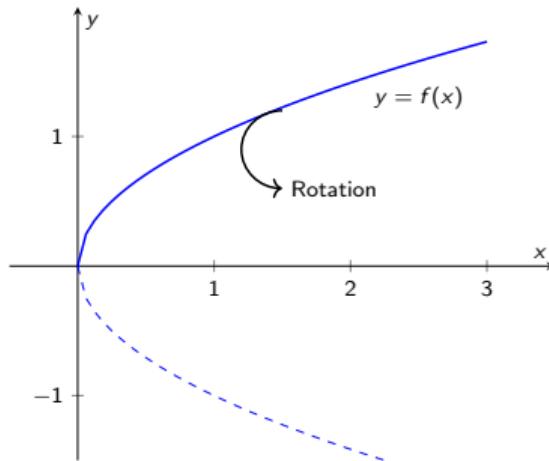
Das Quadrat im Integral stammt aus der Kreisfläche πr^2 !

Rotation um die x-Achse

Formel

Rotiert $y = f(x)$ um die x-Achse im Intervall $[a, b]$:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Anschaugung

- An jeder Stelle x entsteht eine Kreisscheibe mit Radius $r = |f(x)|$
- Fläche der Scheibe: $A(x) = \pi[f(x)]^2$
- Integration über alle Scheiben ergibt das Volumen

Beispiel 1: Rotation um die x-Achse

Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn $f(x) = \sqrt{x}$ zwischen $x = 0$ und $x = 4$ um die x-Achse rotiert.

Lösung:

Schritt 1: Formel aufstellen

$$V_x = \pi \int_0^4 [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

Schritt 2: Integration

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 16 - 0 \right) = 8\pi \approx 25,13 \text{ VE} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Rotation um die x-Achse

Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn $f(x) = e^x$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ um die x-Achse rotiert.

Lösung:

Schritt 1: Formel aufstellen

$$V_x = \pi \int_0^1 [e^x]^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$$

Schritt 2: Integration (mit Substitution $u = 2x$)

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) \approx 10,04 \text{ VE} \end{aligned}$$

Rotation um die y-Achse

Formel

Rotiert der Graph um die y-Achse im Intervall $[c, d]$ (in y-Richtung):

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

wobei $x = g(y)$ die Umkehrfunktion ist.

Wichtige Schritte

- 1 Funktion nach x auflösen: $x = g(y)$
- 2 Grenzen in y -Werte umrechnen
- 3 Nach dy integrieren

Achtung

Die Integrationsvariable ist jetzt y , nicht x !

Beispiel: Rotation um die y-Achse

Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn der Graph von $y = x^2$ zwischen $y = 0$ und $y = 4$ um die y-Achse rotiert.

Lösung:

Schritt 1: Umkehrfunktion bilden

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad (\text{für } x \geq 0)$$

Schritt 2: Volumenformel aufstellen

$$V_y = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^4 y dy$$

Schritt 3: Integration

$$V_y = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi \text{ VE}$$

Rotation einer Fläche zwischen zwei Funktionen

Unterscheidung

Fall 1: Nur Graph rotiert

- Nur die Kurve rotiert um die Achse
- Formel: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Fall 2: Fläche zwischen zwei Funktionen rotiert

- Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ rotiert
- Formel: $V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$
- Voraussetzung: $f(x) \geq g(x) \geq 0$

Merksatz

Äußerer Radius zum Quadrat minus innerer Radius zum Quadrat!

Beispiel: Fläche zwischen zwei Funktionen

Aufgabe

Die Fläche zwischen $f(x) = 2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 2]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Lösung:

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 ([2]^2 - [x]^2) dx \\&= \pi \int_0^2 (4 - x^2) dx \\&= \pi \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\&= \pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{16\pi}{3} \approx 16,76 \text{ VE}\end{aligned}$$

Beispiel: Hohlkörper

Aufgabe

Ein Hohlzylinder entsteht durch Rotation der Fläche zwischen $f(x) = 3$ und $g(x) = 2$ um die x-Achse im Intervall $[0, 5]$. Berechnen Sie das Volumen.

Lösung:

$$V = \pi \int_0^5 (3^2 - 2^2) dx$$

$$= \pi \int_0^5 5 dx$$

$$= \pi [5x]_0^5 = 25\pi \text{ VE}$$

Alternative mit Geometrie:

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h = \pi(9 - 4) \cdot 5 = 25\pi$$

Masse eines Rotationskörpers

Konstante Dichte

Ist ρ die konstante Dichte des Materials:

$$m = \rho \cdot V$$

Variable Dichte

Ist $\rho(x)$ eine ortsabhängige Dichte:

$$m = \pi \int_a^b \rho(x) \cdot [f(x)]^2 dx$$

Einheiten beachten

Volumen in cm^3 , Dichte in $\text{g/cm}^3 \Rightarrow$ Masse in g

Beispiel: Masse mit konstanter Dichte

Aufgabe

Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von $f(x) = \sqrt{x}$ um die x-Achse von $x = 0$ bis $x = 4$. Die Dichte beträgt konstant $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$. Berechnen Sie die Masse.

Lösung:

Aus einem vorherigen Beispiel: $V = 8\pi \text{ cm}^3$

Mit konstanter Dichte:

$$m = \rho \cdot V = 2 \cdot 8\pi = 16\pi \approx 50,27 \text{ g}$$

Beispiel: Masse mit variabler Dichte

Aufgabe

Ein Kegel entsteht durch Rotation von $f(x) = x$ um die x-Achse von $x = 0$ bis $x = 2$. Die Dichte nimmt linear zu: $\rho(x) = 1 + x$ (in g/cm³). Berechnen Sie die Masse.

Lösung:

$$\begin{aligned}m &= \pi \int_0^2 (1+x) \cdot [x]^2 \, dx = \pi \int_0^2 (1+x) \cdot x^2 \, dx \\&= \pi \int_0^2 (x^2 + x^3) \, dx \\&= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \\&= \pi \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{20\pi}{3} \approx 20,94 \text{ g}\end{aligned}$$

Zusammenfassung: Flächenberechnung

Vorgehen bei schwierigen Integralen

- 1 Stammfunktion mit geeigneter Methode bestimmen
- 2 Hauptsatz anwenden: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Integrationsmethoden

- **Substitution:** Bei verketteten Funktionen
- **Partielle Integration:** Bei Produkten verschiedenartiger Funktionen
- **Kombination:** Bei komplexeren Ausdrücken

Zusammenfassung: Rotationsvolumen

Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy \quad \text{mit } x = g(y)$$

Fläche zwischen Funktionen rotiert

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Masse

Konstant: $m = \rho \cdot V$ Variabel: $m = \pi \int_a^b \rho(x) \cdot [f(x)]^2 dx$

Übungsaufgaben - Flächenberechnung

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x \cdot \cos(x^2)$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\pi/2}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 \cdot e^x$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = 1$.

Hinweis: Zweimalige partielle Integration nötig

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = \ln(x)$ und der x-Achse von $x = 1$ bis $x = e$.

Übungsaufgaben - Rotationsvolumen

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Volumen, das entsteht, wenn $f(x) = \frac{1}{x}$ zwischen $x = 1$ und $x = 2$ um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 5

Die Fläche zwischen $y = x$ und $y = x^2$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Aufgabe 6

Ein Kegel mit Grundradius $r = 3$ und Höhe $h = 5$ wird durch Rotation der Geraden $y = \frac{3}{5}x$ um die x-Achse erzeugt. Bestätigen Sie die Kegelformel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Übungsaufgaben - Masse

Aufgabe 7

Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (Halbkreis) um die x-Achse von $x = -2$ bis $x = 2$. Die Dichte beträgt $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$. Berechnen Sie die Masse.

Hinweis: Das Volumen ist eine Kugel

Aufgabe 8

Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von $f(x) = 2x$ um die x-Achse von $x = 0$ bis $x = 3$. Die Dichte variiert mit $\rho(x) = 2 + 0,5x$. Berechnen Sie die Masse.

Übungsaufgaben - Anspruchsvoll

Aufgabe 9

Die Fläche zwischen $f(x) = e^x$ und $g(x) = 1$ im Intervall $[0, \ln(2)]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Aufgabe 10

Die Funktion $y = \sin(x)$ rotiert von $x = 0$ bis $x = \pi$ um die x-Achse. Berechnen Sie:

- (a) Das Volumen
- (b) Die Masse bei konstanter Dichte $\rho = 1,5 \text{ g/cm}^3$

Hinweis für (a): Verwenden Sie $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$