

# Grenzwerte von Funktionen

## Teil 4: Die Regel von de L'Hospital

# Das Problem: Unbestimmte Ausdrücke

**Was passiert hier?**

Berechne:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Direktes Einsetzen:  $\frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$

## Problem

Der Ausdruck  $\frac{0}{0}$  ist **mathematisch nicht definiert**.

Solche Ausdrücke nennt man **unbestimmte Ausdrücke**.

**Heute lernen wir:** Eine systematische Methode zur Berechnung solcher Grenzwerte!

Warum ist  $\frac{0}{0}$  unbestimmt?

**Verschiedene Funktionen, verschiedene Ergebnisse:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

**Alle drei Fälle:**

- Zähler  $\rightarrow 0$
- Nenner  $\rightarrow 0$
- Aber: unterschiedliche Grenzwerte!

**Fazit:**  $\frac{0}{0}$  kann jeden beliebigen Wert annehmen!

# Die drei Typen unbestimmter Ausdrücke

## Typ I (direkt lösbar mit L'Hospital)

- $\frac{0}{0}$  (null durch null)
- $\frac{\infty}{\infty}$  (unendlich durch unendlich)

## Typ II (erst umwandeln)

- $\infty \cdot 0$  (unendlich mal null)
- $\infty - \infty$  (unendlich minus unendlich)

## Typ III (erst umwandeln)

- $0^0$  (null hoch null)
- $\infty^0$  (unendlich hoch null)
- $1^\infty$  (eins hoch unendlich)

# Die Regel von de L'Hospital

## Die Regel

Seien  $f(x)$  und  $g(x)$  differenzierbare Funktionen.

Wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

oder  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**In Worten:** Leite Zähler und Nenner **getrennt** ab!

# Wichtige Hinweise zur Anwendung

## Achtung!

- Die Regel gilt **nur** für Typ-I-Ausdrücke ( $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$ )
- Leite Zähler und Nenner **getrennt** ab, nicht den ganzen Bruch!
- Die Regel kann mehrfach hintereinander angewendet werden
- **In Prüfungen:** Immer erst den Typ prüfen und dokumentieren!

# Vorgehensweise: Schritt für Schritt

## Schritt 1: Typ prüfen

- Grenzwerte von Zähler und Nenner separat bestimmen
- Prüfen, ob  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  vorliegt
- Dies muss dokumentiert werden!

## Schritt 2: L'Hospital anwenden

- Zähler ableiten:  $f(x) \rightarrow f'(x)$
- Nenner ableiten:  $g(x) \rightarrow g'(x)$
- Neuen Grenzwert berechnen

## Schritt 3: Falls nötig wiederholen

- Wenn erneut Typ I vorliegt  $\rightarrow$  nochmal L'Hospital

# Beispiel 1: Typ $\frac{0}{0}$

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

## Schritt 1: Typ prüfen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Es liegt Typ  $\frac{0}{0}$  vor.

## Schritt 2: L'Hospital anwenden

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \\ &= \cos(0) = 1\end{aligned}$$

Beispiel 2: Typ  $\frac{0}{0}$

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

**Schritt 1: Typ prüfen**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Typ  $\frac{0}{0}$  liegt vor.

**Schritt 2: L'Hospital**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \\ &= e^0 = 1\end{aligned}$$

# ÜBUNG: Typ $\frac{0}{0}$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Tipp: Immer zuerst den Typ prüfen!

## Beispiel 3: Mehrfache Anwendung

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

**Typ prüfen:** Typ  $\frac{0}{0}$

**L'Hospital (1. Anwendung):**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

**Erneut Typ prüfen:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

Wieder Typ  $\frac{0}{0}$ !

**L'Hospital (2. Anwendung):**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

# Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Auch bei diesem Typ funktioniert L'Hospital!

**Beispiel 4:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

**Typ prüfen:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$   
Typ  $\frac{\infty}{\infty}$  liegt vor.

L'Hospital (1. Anwendung):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

**Typ prüfen:** Wieder  $\frac{\infty}{\infty}$

L'Hospital (2. Anwendung):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

## Beispiel 5: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

**Typ prüfen:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$   
Typ  $\frac{\infty}{\infty}$  liegt vor.

**L'Hospital:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

**Interpretation:**  $x$  wächst schneller als  $\ln x$

# ÜBUNG: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

**Beobachtung:** Was passiert bei b)? Wie oft musst du L'Hospital anwenden?

Typ II:  $\infty \cdot 0$

**Problem:** L'Hospital funktioniert nicht direkt!

**Lösung:** Umwandeln in einen Bruch (Typ I)

### Umwandlung

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{oder} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Damit erhält man Typ  $\frac{\infty}{\infty}$  oder  $\frac{0}{0}$

## Beispiel 6: Typ $\infty \cdot 0$

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x}$

**Typ prüfen:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$   
Es liegt Typ  $\infty \cdot 0$  vor (Typ II).

**Umwandlung in Typ I:**

$$x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

**Neuer Typ:**  $\frac{\infty}{\infty}$  (jetzt Typ !!)

**L'Hospital:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

## Beispiel 7: Typ $0 \cdot \infty$

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

**Typ:**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Also Typ  $0 \cdot \infty$ .

**Umwandlung:**

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

**Typ:**  $\frac{-\infty}{\infty}$  (Typ I)

**L'Hospital:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0\end{aligned}$$

# ÜBUNG: Typ $\infty \cdot 0$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-2x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$

Tipp: Schreibe zuerst als Bruch um!

## Typ II: $\infty - \infty$

**Problem:** Auch dieser Typ ist unbestimmt!

**Lösung:** Auf gemeinsamen Nenner bringen oder algebraisch umformen

**Beispiel 8:**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

**Typ:** Beide Summanden  $\rightarrow +\infty$ , also Typ  $\infty - \infty$

**Umformung auf gemeinsamen Nenner:**

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

**Neuer Typ:**  $\frac{0}{0}$  (jetzt können wir L'Hospital anwenden!)

## Typ III: Potenzen ( $0^0$ , $\infty^0$ , $1^\infty$ )

Bei Ausdrücken der Form  $[f(x)]^{g(x)}$ :

Methode: Logarithmus verwenden

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = \exp(\lim g(x) \cdot \ln f(x))$$

Das Produkt  $g(x) \cdot \ln f(x)$  ist dann vom Typ II ( $\infty \cdot 0$ )

**Vorgehen:**

- 1 Logarithmus ziehen
- 2 Produkt in Bruch umwandeln (Typ II  $\rightarrow$  Typ I)
- 3 L'Hospital anwenden
- 4 Exponentialfunktion anwenden:  $e^{\text{Ergebnis}}$

## Beispiel 9: Typ $0^0$

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

**Typ:**  $0^0$  (Typ III)

**Umformung:**

$$x^x = e^{x \ln x}$$

**Berechne zunächst:**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Das ist Typ  $0 \cdot \infty$  (siehe Beispiel 7)

Ergebnis:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

**Daher:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$$

## Beispiel 10: Typ $1^\infty$ – Die Eulersche Zahl!

**Aufgabe:** Berechne  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

**Typ:**  $1^\infty$  (Typ III)

Setze  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , dann:

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

**Typ:**  $\frac{0}{0}$

**L'Hospital:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

**Also:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^1 = e$

# ÜBUNG: Typ III

**Berechne die folgenden Grenzwerte:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

**Tipp:** Verwende den Logarithmus!

# Häufige Fehler vermeiden!

## Fehler 1: Quotientenregel verwenden

**Falsch:**

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Richtig bei L'Hospital:**

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zähler und Nenner **separat** ableiten!

# Häufige Fehler vermeiden! (Fortsetzung)

## Fehler 2: Typ nicht prüfen

In Prüfungen muss **immer** explizit gezeigt werden, dass ein Typ-I-Ausdruck vorliegt!

Schreibe: „Es liegt Typ  $\frac{0}{0}$  vor.“

## Fehler 3: Zu früh aufhören

Nach der ersten Anwendung von L'Hospital prüfen:

- Ist das Ergebnis bestimmbar? → Fertig!
- Ist es wieder Typ I? → Nochmal L'Hospital!

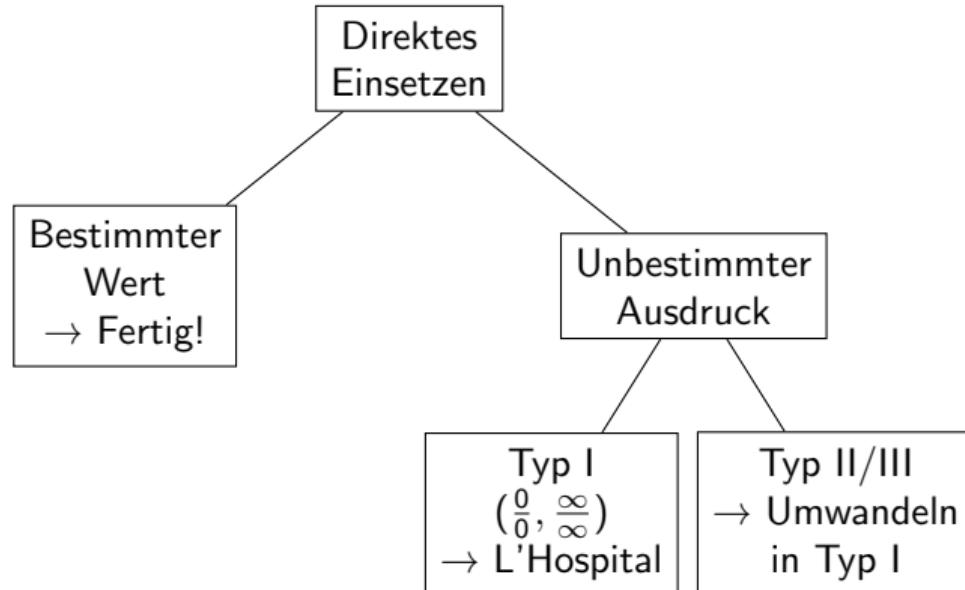
## Fehler 4: Falsche Typen

L'Hospital nur bei  $\frac{0}{0}$  und  $\frac{\infty}{\infty}$  anwenden!

Nicht bei  $\frac{1}{0}$  oder  $\frac{0}{1}$ !

# Zusammenfassung: Entscheidungsbaum

**Grenzwert berechnen – Wie gehe ich vor?**



# Zusammenfassung: Die drei Typen

## Typ I: Direkt lösbar

$$\frac{0}{0} \text{ und } \frac{\infty}{\infty}$$

→ L'Hospital direkt anwenden

## Typ II: In Bruch umwandeln

$\infty \cdot 0$ : Schreibe als  $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

$\infty - \infty$ : Auf gemeinsamen Nenner bringen

## Typ III: Logarithmus verwenden

$$0^0, \infty^0, 1^\infty$$

$$\rightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

# Wichtige Grenzwerte zum Merken

Diese Grenzwerte solltest du kennen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

# Hausaufgaben – Aufgabe 1

Berechne die folgenden Grenzwerte (Typ I):

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{e^x}$

## Hausaufgaben – Aufgabe 2

**Berechne die folgenden Grenzwerte (Typ II):**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt{x^2 + x} \right)$

**Tipp für b):** Erweitere mit  $x + \sqrt{x^2 + x}$

# Hausaufgaben – Aufgabe 3

**Berechne die folgenden Grenzwerte (Typ III):**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x} \right)^x$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

# Hausaufgaben – Klausuraufgabe

## Aufgabe 4 (Klausurstil):

Gegeben ist der Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- a) Bestimme den Typ des unbestimmten Ausdrucks.
- b) Berechne den Grenzwert mit der Regel von L'Hospital.
- c) Wie oft musstest du L'Hospital anwenden?
- d) Was sagt das Ergebnis über das Verhalten von  $\sin x$  im Vergleich zu  $x$  für kleine  $x$  aus?