Grenzwerte von Funktionen
Teil 1: Verhalten im Unendlichen

Was ist ein Grenzwert?

Definition:

Der Grenzwert einer Funktion $f(x)$ beschreibt das Verhalten der Funktionswerte, wenn sich x einem bestimmten Wert nähert oder ins Unendliche strebt.

Drei Arten von Grenzwerten

- **Typ a):** $\lim_{x \to \infty} f(x) = g$ (Verhalten für sehr große x)
- **Typ b):** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = g$ (Verhalten für sehr kleine x)
- **Typ c):** $\lim_{x \to a} f(x) = g$ (Verhalten in der Nähe von a)

In dieser Präsentation: Fokus auf Typ a) und b) – das Verhalten im Unendlichen

Verhalten im Unendlichen

Was bedeutet das?

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$: Die Funktionswerte nähern sich g an, wenn x immer größer wird
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$: Die Funktionswerte nähern sich g an, wenn x immer kleiner wird (negativ)

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

Für sehr große x: $f(x) \approx \frac{2x}{x} = 2$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

Anschauliches Beispiel

Betrachte: $f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$

Wertetabelle:

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	2,917	2,990	2,999	2,9999	2,99999

Beobachtung: Die Funktionswerte nähern sich immer mehr der Zahl 3 an!

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+5}{x+2} = 3$$

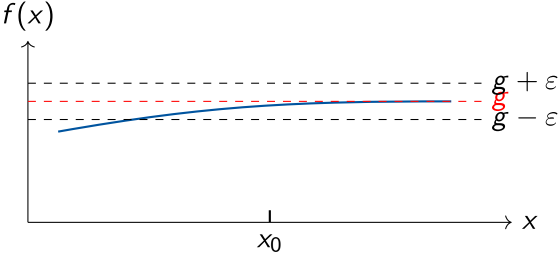
Die Epsilon-Definition

Mathematisch präzise:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } x_0$$

so dass $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x > x_0$

Anschaulich:



Methode: Dominanzbetrachtung

Bei gebrochenrationalen Funktionen:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$$

Faustregel

Vergleiche die höchsten Potenzen:

- **Fall 1:** $n < m \rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
- **Fall 2:** $n = m \rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$
- **Fall 3:** $n > m \rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

Merke: Die niedrigeren Potenzen werden unwichtig!

Beispiel 1: Gleicher Grad

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 7}{2x^2 - 4x + 1}$

Beispiel 1: Gleicher Grad

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 7}{2x^2 - 4x + 1}$

Lösung:
Zählergrad $n = 2$, Nennergrad $m = 2 \to n = m$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{2x^2 - 4x + 1} = \frac{3}{2}$$

Ergebnis

Der Grenzwert ist $\frac{3}{2}$.

Beispiel 2: Zählergrad kleiner

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \to \infty} \frac{4x + 2}{x^3 - 5x}$

Beispiel 2: Zählergrad kleiner

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x+2}{x^3-5x}$

Lösung:
Zählergrad $n = 1$, Nennergrad $m = 3 \to n < m$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x+2}{x^3-5x} = 0$$

Ergebnis

Der Grenzwert ist 0.

Interpretation: Der Nenner wächst viel schneller als der Zähler!

Beispiel 3: Zählergrad größer

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x}{x - 1}$

Beispiel 3: Zählergrad größer

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x}{x - 1}$

Lösung:
Zählergrad $n = 3$, Nennergrad $m = 1 \to n > m$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x}{x - 1} = +\infty$$

Ergebnis

Der Grenzwert ist $+\infty$ (bestimmt divergent).

Interpretation: Der Zähler wächst viel schneller – die Funktion „explodiert"!

Ausklammern der höchsten Potenz

Begründung der Methode:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 7}{2x^2 - 4x + 1}$$

Klammere x^2 aus:

$$= \frac{x^2\left(3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Für $x \to \infty$: Alle Terme mit x im Nenner gehen gegen 0

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{3 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{3}{2}$$

Schritt-für-Schritt: Ausklammern

Beispiel: $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 7}{3x^3 + x - 4}$

Schritt-für-Schritt: Ausklammern

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 7}{3x^3 + x - 4}$

Schritt 1: Höchste Potenz (x^3) ausklammern

$$= \frac{x^3\left(5 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(3 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}$$

Schritt 2: x^3 kürzen

$$= \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}}$$

Schritt 3: Grenzwert bilden ($x \to \infty$)

$$= \frac{5 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{5}{3}$$

Regel für $x \to -\infty$

Praktische Umformungsregel:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

Man ersetzt x durch $-x$ und untersucht den Grenzwert für $x \to +\infty$.

Beispiel:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3}$$

Ersetze x durch $-x$:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2(-x)^2 + (-x)}{(-x)^2 - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

Übung: Grenzwert im Unendlichen (1)

Aufgabe: Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 2x}{x^3 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 7}{x^2 + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^4 - 3x^2}{2x^4 + 5x}$

Tipp

Vergleiche die höchsten Potenzen im Zähler und Nenner!

Lösung: Grenzwert im Unendlichen (1)

Lösungen:

a)

$$n = 3, m = 3 \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^3 - 1} = \frac{5}{1} = 5$$

b)

$$n = 1, m = 2 \rightarrow n < m \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x + 7}{x^2 + 1} = 0$$

c)

$$n = 4, m = 4 \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{7x^4 - 3x^2}{2x^4 + 5x} = \frac{7}{2}$$

Übung: Grenzwert im Unendlichen (2)

Aufgabe: Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 3x}{2x^2 + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5 + 3x^2}{x^3 - 7}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x - 2}{3x + 1}$

Tipp

Für a) und c): Nutze bei Bedarf die Regel $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$

Lösung: Grenzwert im Unendlichen (2)

Lösungen:

a)

$$n = 2, m = 2 \to \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 + 5} = \frac{4}{2} = 2$$

b)

$$n = 5, m = 3 \to n > m \to \lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + 3x^2}{x^3 - 7} = +\infty$$

c)

$$n = 1, m = 1 \to \lim_{x \to -\infty} \frac{6x - 2}{3x + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

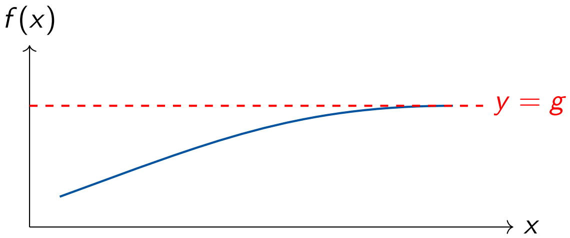
Waagerechte Asymptoten

Definition:

Eine Gerade $y = g$ heißt **waagerechte Asymptote**, wenn

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = g$$

Anschaulich: Der Graph nähert sich der Geraden $y = g$ an.



Beispiel: Waagerechte Asymptote

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

Ergebnis

Die Funktion hat die waagerechte Asymptote $y = 2$.

Bedeutung: Für sehr große x-Werte kommt $f(x)$ immer näher an $y = 2$ heran.

Wichtige Eigenschaften

Eigenschaften waagerechter Asymptoten

1. Eine Funktion kann höchstens **zwei verschiedene waagerechte Asymptoten** haben – eine für $x \to \infty$ und eine für $x \to -\infty$.
2. Es ist möglich, dass nur eine oder **keine waagerechte Asymptote** existiert.
3. Der Graph kann die Asymptote **schneiden oder kreuzen** – anders als bei senkrechten Asymptoten!
4. Bei rationalen Funktionen: Waagerechte Asymptote existiert genau dann, wenn $n \leq m$.

Beispiel: Verschiedene Asymptoten

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x + |x|}{x + 1}$$

Für $x \to \infty$: $|x| = x$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + x}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x + 1} = 3$$

Für $x \to -\infty$: $|x| = -x$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + (-x)}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

Ergebnis

Zwei verschiedene waagerechte Asymptoten: $y = 3$ (rechts) und $y = 1$ (links)

Übung: Waagerechte Asymptoten

Aufgabe: Bestimme die waagerechten Asymptoten:

a) $f(x) = \frac{4x^2+3x-1}{2x^2-5}$

b) $f(x) = \frac{3x+7}{x^2+2}$

c) $f(x) = \frac{5x^3-x}{x^2+1}$

Lösung: Waagerechte Asymptoten

Lösungen:

a)

$n = 2, m = 2 \rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$ ist waagerechte Asymptote

b)

$n = 1, m = 2 \rightarrow n < m \rightarrow y = 0$ ist waagerechte Asymptote

c)

$n = 3, m = 2 \rightarrow n > m \rightarrow$ **Keine** waagerechte Asymptote (Funktion divergiert)

Zusammenfassung: Verhalten im Unendlichen

Wichtigste Erkenntnisse

- **Grenzwerte im Unendlichen** beschreiben das Verhalten für sehr große oder sehr kleine x-Werte
- **Dominanzprinzip:** Bei rationalen Funktionen bestimmt die höchste Potenz das Verhalten
- **Drei Fälle:**
  - $n < m$: Grenzwert $= 0$
  - $n = m$: Grenzwert $= \frac{a_n}{b_m}$
  - $n > m$: Grenzwert $= \pm\infty$
- **Waagerechte Asymptote:** $y = g$ wenn $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = g$

Wichtigste Formel

Grenzwert rationaler Funktionen

Für $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n < m \\ \pm\infty & \text{falls } n > m \end{cases}$$

Regel für negative Unendlichkeit:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

Methode: Schritt für Schritt

Vorgehen zur Grenzwertbestimmung

1. **Identifiziere** die höchsten Potenzen in Zähler und Nenner
2. **Vergleiche** die Grade: n vs. m
3. **Wende** die entsprechende Regel an:
   - Falls $n = m$: Koeffizientenvergleich
   - Falls $n < m$: Grenzwert ist 0
   - Falls $n > m$: Funktion divergiert
4. **Alternative:** Ausklammern und Grenzwertbildung

Übungsaufgaben für zu Hause (1)

Aufgabe 1: Berechne die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^4 - 3x^2 + 1}{2x^4 + 5x - 7}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9x^2 + 4}{3x^3 - x + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 2x}{x^3 + 7}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x}{2x - 1}$

Übungsaufgaben für zu Hause (2)

Aufgabe 2: Bestimme alle waagerechten Asymptoten:

a) $f(x) = \frac{7x^2-3x+2}{3x^2+x-5}$

b) $f(x) = \frac{4x+9}{2x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{3x^3+x^2}{x^2-4}$

Aufgabe 3: Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ für:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x|x|}{x^2 + 1}$$

Hinweis: Betrachte die Fälle $x > 0$ und $x < 0$ getrennt!