Vektorrechnung / Analytische Geometrie

Rechtshändiges xyz-Koordinatensystem

Orientierung

- **x-Achse:** von hinten nach vorn
- **y-Achse:** von links nach rechts
- **z-Achse:** von unten nach oben
- Koordinatenursprung: $O(0|0|0)$

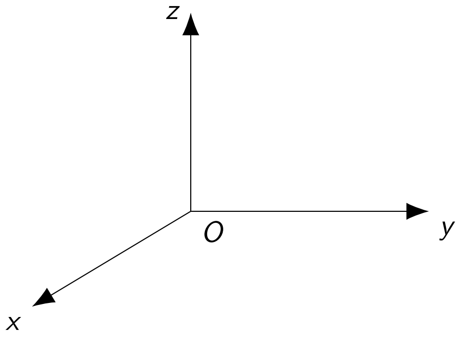
Koordinatenebenen & Zeichenregeln

Koordinatenebenen

- *xy*-Ebene: $z = 0$
- *yz*-Ebene: $x = 0$
- *xz*-Ebene: $y = 0$

Zeichnen (kariertes Papier)

- $1\,\mathrm{LE} = 1\,\mathrm{cm}$ in *y*- und *z*-Richtung
- $1\,\mathrm{LE} =$ ein *Diagonalkästchen* in *x*-Richtung



Skalare Größen

Definition: Skalar

Eine **skalare Größe** wird vollständig durch einen Zahlenwert (und eine Einheit) beschrieben.

Beispiele:

- Temperatur: 25°C
- Masse: 2,5 kg
- Zeit: 10 s
- Energie: 100 J
- Volumen: 5 L

Eigenschaften:

- Nur Betrag wichtig
- Keine Richtung
- Einfache Addition: $2\text{ kg} + 3\text{ kg} = 5\text{ kg}$

Vektorielle Größen

Definition: Vektor

Eine **vektorielle Größe** $\vec{a}$ benötigt zur vollständigen Beschreibung:

- einen **Betrag** (Länge): $|\vec{a}|$
- eine **Richtung** (Orientierung im Raum)
- einen **Richtungssinn** (wohin zeigt der Vektor?)

Beispiele:

- Geschwindigkeit $\vec{v}$
- Kraft $\vec{F}$
- Beschleunigung $\vec{a}$
- Weg/Verschiebung $\vec{s}$

Darstellung:

- Als Pfeil
- Pfeillänge = Betrag
- Pfeilrichtung = Richtung

Der Nullvektor

Besonderer Vektor: Der Nullvektor $\vec{0}$

- Hat den Betrag $|\vec{0}| = 0$
- Hat **keine definierte Richtung**
- Entspricht: keine Bewegung, keine Kraft, keine Verschiebung

Wichtig

Der Nullvektor ist der **einzige** Vektor ohne Richtung!

Koordinatendarstellung

Definition

Ein Vektor kann durch seine Komponenten dargestellt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

wobei $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ die Basisvektoren sind.

Wozu braucht man das?

- Eindeutige mathematische Beschreibung von Vektoren
- Ermöglicht Berechnungen (Addition, Multiplikation, etc.)
- Konkrete Darstellung von physikalischen Größen (Kraft, Geschwindigkeit, etc.)

Koordinatendarstellung – Beispiel

Beispiel

Ein Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

bedeutet: $5\,\mathrm{m/s}$ nach rechts, $2\,\mathrm{m/s}$ nach oben, $1\,\mathrm{m/s}$ nach unten.

Betrag eines Vektors

Definition

Der Betrag gibt die **Länge** eines Vektors an:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Wozu braucht man das?

- Bestimmung der Stärke einer physikalischen Größe (z.B. Geschwindigkeit, Kraft)
- Berechnung von Abständen zwischen Punkten
- Normierung von Vektoren
- Überprüfung, ob ein Vektor die gewünschte Länge hat

Betrag eines Vektors – Beispiel

Beispiel: Geschwindigkeit

Ein Auto fährt mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wie schnell ist das Auto insgesamt?

$$|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3600 + 6400} = \sqrt{10000} = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Einheitsvektor

Definition

Ein Einheitsvektor hat die Länge 1 und zeigt in dieselbe Richtung wie der ursprüngliche Vektor:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Wozu braucht man das?

- Angabe einer **Richtung** unabhängig von der Länge
- Zerlegung von Vektoren: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \hat{a}$ (Betrag $\times$ Richtung)
- Vereinfachung von Berechnungen
- Definition von Koordinatensystemen (Basisvektoren sind Einheitsvektoren)

Einheitsvektor – Beispiel

Beispiel

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Betrag berechnen

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Schritt 2: Einheitsvektor berechnen

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren

Definition

Die Basisvektoren sind Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wozu braucht man das?

- Definition des Koordinatensystems
- Jeder Vektor lässt sich als Linearkombination darstellen
- Vereinfachung der Notation in physikalischen Formeln
- Basis für Vektorzerlegung

Basisvektoren – Beispiel

Beispiel

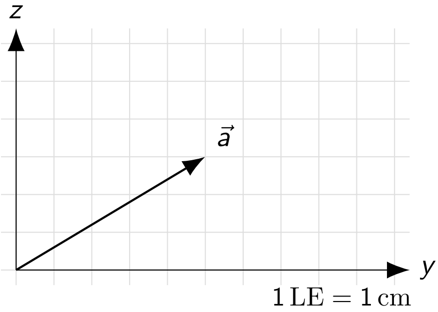
Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ lässt sich schreiben als:

$$\vec{a} = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$$

Ausgeschrieben:

$$\vec{a} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren zeichnen (2D-Ansicht)



Gegenvektor

Definition

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor hat den gleichen Betrag, aber entgegengesetzten Richtungssinn.

Wozu braucht man das?

- Darstellung entgegengesetzter physikalischer Größen (z.B. Kraft und Gegenkraft)
- Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- Rückwärtsbewegungen oder umgekehrte Richtungen
- Der Gegenvektor hebt den ursprünglichen Vektor auf: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Gegenvektor – Beispiel

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gegenvektor: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Überprüfung:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Addition von Vektoren

Definition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Vektoren werden komponentenweise addiert.

Wozu braucht man das?

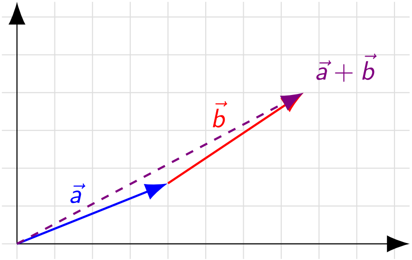
- Überlagerung von physikalischen Größen (z.B. mehrere Kräfte, Geschwindigkeiten)
- Beschreibung von zusammengesetzten Bewegungen
- Berechnung von Gesamtverschiebungen
- Geometrisch: Aneinanderhängen von Wegstrecken

Addition von Vektoren – Beispiel

Beispiel 1: Rechnerisch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ 1 + 3 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Pfeilspitzenverfahren

Subtraktion von Vektoren

Definition

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Vektoren werden komponentenweise subtrahiert.

Wozu braucht man das?

- Berechnung von Differenzen physikalischer Größen (z.B. Geschwindigkeitsänderung)
- Bestimmung von Verbindungsvektoren zwischen zwei Punkten
- Berechnung relativer Bewegungen (z.B. Relativgeschwindigkeit)
- Änderungen und Unterschiede quantifizieren

Subtraktion von Vektoren – Beispiel

Beispiel 1: Rechnerisch

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-4 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alternativ mit Gegenvektor:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vielfachbildung (Skalarmultiplikation)

Definition

Für $k \in \mathbb{R}$:

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl (Skalar) multipliziert.

Geometrische Bedeutung

- $k > 1$: Vektor wird gestreckt (länger)
- $0 < k < 1$: Vektor wird gestaucht (kürzer)
- $k < 0$: Richtungsumkehr und Längenänderung
- $k\vec{a}$ ist immer **parallel** zu $\vec{a}$

Vielfachbildung – Beispiel

Beispiel 1: Verschiedene Skalare

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{(doppelte Länge)}$$

$$0{,}5\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{(halbe Länge)}$$

Skalarprodukt

Definition

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (= \vec{a}^{\mathsf{T}} \vec{b})$$

Das Skalarprodukt multipliziert zwei Vektoren und ergibt eine Zahl (Skalar).
Grundprinzip: Vektor · Vektor = Zahl (Skalar)

Wozu braucht man das?

- Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren
- Prüfung auf Orthogonalität (rechter Winkel): $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Berechnung von Projektionen (z.B. Komponente einer Kraft in eine Richtung)
- Physikalische Arbeit: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
- Bestimmung, wie stark zwei Vektoren in dieselbe Richtung zeigen

Skalarprodukt – Beispiel

Beispiel 1: Rechnung

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander (orthogonal)!

Skalarprodukt – Geometrische Bedeutung

Winkelbezug

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\varphi$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.
Umstellung nach dem Winkel:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

Interpretation

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$: Winkel $\varphi < 90$ (spitzer Winkel)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$: Winkel $\varphi = 90$ (rechter Winkel, orthogonal)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$: Winkel $\varphi > 90$ (stumpfer Winkel)

Orthogonalität (Rechtwinkligkeit)

Definition

Zwei Vektoren sind orthogonal (stehen senkrecht aufeinander), wenn:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Warum ist das so?

Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$ folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90$$

Wozu braucht man das?

- Schnelle Überprüfung, ob Vektoren senkrecht zueinander stehen
- Konstruktion orthogonaler Koordinatensysteme
- Prüfung geometrischer Eigenschaften (z.B. rechte Winkel in Figuren)
- Wichtig für Projektionen und Zerlegungen

Orthogonalität – Beispiel

Beispiel 1: Orthogonale Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 6 - 6 = 0$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Beispiel 2: Nicht orthogonale Vektoren

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind nicht orthogonal.

Winkelberechnung zwischen Vektoren

Vorgehen

Schritt 1: Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ berechnen
Schritt 2: Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ berechnen
Schritt 3: Cosinus des Winkels bestimmen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

Schritt 4: Winkel berechnen:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

Winkelberechnung – Beispiel

Beispiel

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 0 + 1 = 3$$

Schritt 2: Beträge

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Schritt 3 & 4: Winkel

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \approx 0{,}775$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right) \approx 39{,}2$$

Übungsaufgaben 1: Vektorgrundlagen

1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$.
b) Bestimme die Einheitsvektoren $\hat{a}$ und $\hat{b}$.

2 Zeichne die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem (2D-Ansicht).

3 Welcher Vektor hat den Betrag 10 und zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Übungsaufgaben 2: Addition & Subtraktion

1 Berechne für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
b) $2\vec{a} - \vec{b}$
c) $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

2 Ein Flugzeug fliegt mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Danach ändert es seine Geschwindigkeit auf $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 180 \\ 80 \\ -5 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wie groß ist die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$?

Übungsaufgaben 3: Skalarprodukt

1 Berechne die Skalarprodukte:

a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 Überprüfe, ob die folgenden Vektorpaare orthogonal sind:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Übungsaufgaben 4: Winkelberechnung

1. Berechne den Winkel zwischen den Vektoren:

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Bestimme alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, die mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 90° einschließen.

Übungsaufgaben 5: Vermischte Aufgaben

1 Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Berechne $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{b}|$.

b) Für welches k ist $k\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$?

2 Bestimme einen Vektor $\vec{n}$, der orthogonal zu beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

3 Ein Dreieck ABC hat die Eckpunkte $A(1|2|0)$, $B(4|3|0)$ und $C(2|5|0)$. Berechne alle drei Innenwinkel des Dreiecks.

Übungsaufgaben 6: Anwendungen

1 Ein Boot fährt mit Eigengeschwindigkeit $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ über einen Fluss.

Die Strömung hat Geschwindigkeit $\vec{v}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$.

a) Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}_{ges}$?