Extremwertaufgaben

Einführung: Was sind Extremwertaufgaben?

Definition

Extremwertaufgaben sind Optimierungsprobleme, bei denen der größte oder kleinste Wert einer Größe gesucht wird.

Typische Fragestellungen im T-Kurs

- **Minimierung**: Materialverbrauch, Oberfläche, Kosten, Weg
- **Maximierung**: Volumen, Flächeninhalt, Effizienz, Gewinn

Mathematisches Werkzeug

- **Differentialrechnung**
- **Analysis von Funktionen**
- **Geometrische Zusammenhänge**

Das systematische Lösungsverfahren

Vier-Schritte-Methode

Erfolgreiches Lösen von Extremwertaufgaben erfordert ein strukturiertes Vorgehen!

Schritt 1: Hauptbedingung

Frage: Was soll optimiert werden?

- Identifiziere die zu optimierende Größe
- Stelle die Formel auf (meist mit mehreren Variablen)
- Beispiele: $V(x, y)$, $A(r, h)$, $K(l, b)$

Schritt 2: Nebenbedingung

Frage: Welche festen Bedingungen gibt es?

- Finde den Zusammenhang zwischen den Variablen
- Löse nach einer Variable auf
- Setze in Hauptbedingung ein

Das systematische Lösungsverfahren (Fortsetzung)

Schritt 3: Zielfunktion

Ergebnis: Funktion mit nur einer Variable

- $f(x) = \ldots$
- Bestimme den Definitionsbereich
- Welche Werte sind physikalisch sinnvoll?

Schritt 4: Extremum berechnen

Klassische Kurvendiskussion:

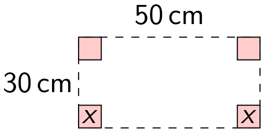
- Erste Ableitung: $f'(x)$
- Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f''(x)$
- Randwerte überprüfen

Beispiel 1: Volumen einer Schachtel

Aufgabenstellung

Aus einer rechteckigen Pappe der Abmessung $50\,\text{cm} \times 30\,\text{cm}$ soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden, indem an den Ecken quadratische Stücke der Seitenlänge x ausgeschnitten und die Seiten hochgeklappt werden.

Gesucht: Der Wert von x, für den das Volumen der Schachtel maximal wird.



Beispiel 1: Lösung

Schritt 1: Hauptbedingung

Volumen eines Quaders: $V = l \cdot b \cdot h$

$$V(x) = (50 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$$

Schritt 2: Nebenbedingung & Zielfunktion

Nebenbedingung bereits eingearbeitet:

$$V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1500x$$

Schritt 3: Definitionsmenge

- $x > 0$
- $50 - 2x > 0 \Rightarrow x < 25$
- $30 - 2x > 0 \Rightarrow x < 15$
- $\Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 15\}$

Beispiel 1: Lösung (Fortsetzung)

Schritt 4: Ableitungen

$$\begin{aligned} V(x) &= 4x^3 - 160x^2 + 1500x \\ V'(x) &= 12x^2 - 320x + 1500 \\ V''(x) &= 24x - 320 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} V'(x) &= 0 \\ 12x^2 - 320x + 1500 &= 0 \\ 3x^2 - 80x + 375 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{80 \pm \sqrt{1900}}{6} \\ x_1 &\approx 20,60 \\ x_2 &\approx \mathbf{6,07} \end{aligned}$$

Beispiel 1: Lösung (Ergebnis)

Hinreichende Bedingung

$$V''(6,07) = 24 \cdot 6,07 - 320 = -174,32 < 0$$

$\Rightarrow$ **Maximum** bei $x \approx 6,07\,\text{cm}$

Maximales Volumen

$$\begin{aligned} V(6,07) &= (50 - 12,14) \cdot (30 - 12,14) \cdot 6,07 \\ &= 37,86 \cdot 17,86 \cdot 6,07 \\ &\approx \mathbf{4100}\,\text{cm}^{\mathbf{3}} \end{aligned}$$

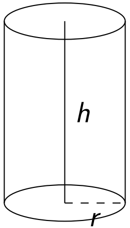
Antwort

Das Volumen wird maximal für $x \approx 6,07\,\text{cm}$ mit etwa $4100\,\text{cm}^3$.

Beispiel 2: Günstigste Dose

Aufgabenstellung

Eine zylinderförmige Dose mit einem Volumen von genau $V = 1000\,\text{cm}^3$ soll so konstruiert werden, dass der Materialverbrauch (Oberfläche) minimal wird.
Gesucht: Der Radius r und die Höhe h der optimalen Dose.



Geschlossene Dose

Beispiel 2: Lösung

Schritt 1: Hauptbedingung

Oberfläche einer geschlossenen Dose:

$$O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Schritt 2: Nebenbedingung

Volumen des Zylinders:

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

Auflösen nach h:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Schritt 3: Zielfunktion

$$\begin{aligned} O(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Lösung (Fortsetzung)

Schritt 4: Ableitungen

$$
\begin{aligned}
O(r) &= 2\pi r^2 + 2000r^{-1} \\
O'(r) &= 4\pi r - 2000r^{-2} \\
O''(r) &= 4\pi + 4000r^{-3}
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingung

$$
\begin{aligned}
O'(r) &= 0 \\
4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 \\
4\pi r^3 &= 2000 \\
r^3 &= \frac{500}{\pi} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx \mathbf{5,42}\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: Lösung (Ergebnis)

Hinreichende Bedingung

$$O''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \quad \text{für alle } r > 0$$

$\Rightarrow$ **Minimum** bei $r \approx 5{,}42\,\text{cm}$

Optimale Abmessungen

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot (5{,}42)^2} \approx \mathbf{10{,}84}\,\text{cm}$$

Verhältnis: $h = 2r$

Antwort

Die materialsparendste Dose hat Radius $r \approx 5{,}42\,\text{cm}$ und Höhe $h \approx 10{,}84\,\text{cm}$. Sie ist genau so hoch wie ihr Durchmesser.

Typische Fehler und Hinweise

Häufige Fehlerquellen

- **Vergessen der Definitionsmenge**
- **Nicht-Überprüfung der Randwerte**
- **Fehlerhafte Nebenbedingung**
- **Vergessen der Einheiten**

Minimaler Abstand zwischen Funktionen

Aufgabenstellung

Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$.
Gesucht: Der minimale vertikale Abstand zwischen den Funktionen im gegebenen Intervall.

Mathematische Formulierung

Der vertikale Abstand an der Stelle x ist:

$$d(x) = |f(x) - g(x)|$$

Für die Minimierung betrachten wir meist:

$$d(x) = f(x) - g(x) \quad (\text{wenn } f(x) \geq g(x))$$

oder das Quadrat des Abstands:

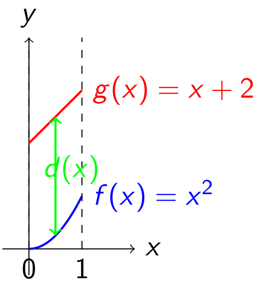
$$d^2(x) = (f(x) - g(x))^2$$

Beispiel: Minimaler Abstand

Aufgabe

Gegeben: $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 2$ im Intervall $[0, 1]$

Bestimme den minimalen vertikalen Abstand zwischen den Funktionen.



Lösung: Minimaler Abstand

Schritt 1: Abstandsfunktion

$$d(x) = |g(x) - f(x)| = |(x+2) - x^2| = |-x^2 + x + 2|$$

Im Intervall $[0, 1]$ ist $-x^2 + x + 2 > 0$, also:

$$d(x) = -x^2 + x + 2$$

Schritt 2: Ableitungen

$$\begin{aligned} d(x) &= -x^2 + x + 2 \\ d'(x) &= -2x + 1 \\ d''(x) &= -2 \end{aligned}$$

Schritt 3: Kritische Stellen

$$d'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0.5$$

Lösung: Minimaler Abstand (Fortsetzung)

Schritt 4: Randwerte und Minimum

- $d(0) = -0 + 0 + 2 = 2$
- $d(0.5) = -0.25 + 0.5 + 2 = 2.25$
- $d(1) = -1 + 1 + 2 = 2$

Schritt 5: Hinreichende Bedingung

$$d''(x) = -2 < 0 \quad \text{(Maximum bei } x = 0.5\text{)}$$

Ergebnis

Der **minimale** Abstand ist $d(0) = d(1) = 2$ an den Intervallrändern.
Die Funktionen haben im Intervall $[0, 1]$ keinen Schnittpunkt.
Der maximale Abstand von 2.25 liegt bei $x = 0.5$.

Maximales Rechteck unter einer Funktion

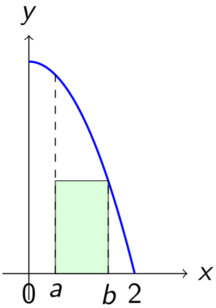
Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ mit $f(x) \geq 0$.
Gesucht: Das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt, das unter dem Funktionsgraphen liegt und eine Seite auf der x-Achse hat.

Beispiel: Maximales Rechteck unter Parabel

Aufgabe

Gegeben: $f(x) = -x^2 + 4$ im Intervall $[0, 2]$
Bestimme das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt unter dem Graphen.



Lösung: Maximales Rechteck unter Parabel

Schritt 1: Allgemeine Formulierung

Sei a die linke und b die rechte Seite des Rechtecks.
Breite: $b - a$
Höhe: $f(b) = -b^2 + 4$ (da Parabel fallend)
Flächeninhalt: $A(a, b) = (b - a) \cdot (-b^2 + 4)$

Schritt 2: Nebenbedingung

Das Rechteck liegt ganz unter dem Graphen:

$$f(a) \geq f(b) \Rightarrow -a^2 + 4 \geq -b^2 + 4 \Rightarrow a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$$

Für maximale Fläche wählen wir $a = 0$ (linker Rand)

Schritt 3: Zielfunktion

$$A(b) = b \cdot (-b^2 + 4) = -b^3 + 4b, \quad b \in [0, 2]$$

Lösung: Maximales Rechteck (Fortsetzung)

Schritt 4: Ableitungen

$$\begin{aligned} A(b) &= -b^3 + 4b \\ A'(b) &= -3b^2 + 4 \\ A''(b) &= -6b \end{aligned}$$

Schritt 5: Kritische Stellen

$$A'(b) = 0 \Rightarrow -3b^2 + 4 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$$

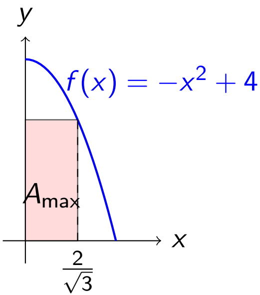
Schritt 6: Überprüfung

- $A(0) = 0$
- $A(1.155) \approx -1.54 + 4.62 = 3.08$
- $A(2) = -8 + 8 = 0$
- $A''(1.155) = -6 \cdot 1.155 < 0$ Maximum

Lösung: Maximales Rechteck (Ergebnis)

Ergebnis

Maximale Fläche für $a = 0$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$
Flächeninhalt: $A \approx 3.08$ FE
Abmessungen: Breite ≈ 1.155, Höhe ≈ 2.667



Minimaler Abstand Punkt-Funktion

Aufgabenstellung

Gegeben ist ein Punkt $P(x_0, y_0)$ und eine Funktion $f(x)$.
Gesucht: Der Punkt auf dem Funktionsgraphen, der den kleinsten Abstand zu P hat.

Mathematische Formulierung

Abstand zwischen $P(x_0, y_0)$ und $Q(x, f(x))$:

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$$

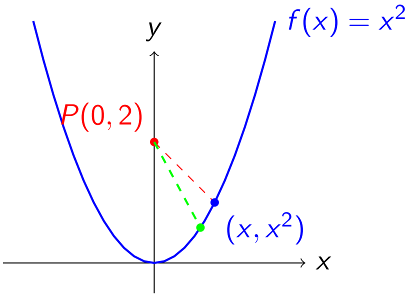
Zur Vereinfachung minimieren wir oft das Quadrat des Abstands:

$$d^2(x) = (x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2$$

Beispiel: Minimaler Abstand Punkt-Parabel

Aufgabe

Gegeben: Punkt $P(0, 2)$ und Parabel $f(x) = x^2$
Bestimme den Punkt auf der Parabel mit minimalem Abstand zu P.



Lösung: Minimaler Abstand Punkt-Parabel

Schritt 1: Abstandsfunktion

Quadrat des Abstands:

$$d^2(x) = (x-0)^2 + (x^2-2)^2 = x^2 + (x^4 - 4x^2 + 4)$$

$$d^2(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

Schritt 2: Ableitungen

$$d^2(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

$$(d^2(x))' = 4x^3 - 6x$$

$$(d^2(x))'' = 12x^2 - 6$$

Schritt 3: Kritische Stellen

$$4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2-3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.225$$

Lösung: Minimaler Abstand (Fortsetzung)

Schritt 4: Werte vergleichen

- $d^2(0) = 0 + 0 + 4 = 4 \Rightarrow d(0) = 2$
- $d^2(1.225) = (1.225)^4 - 3(1.225)^2 + 4 \approx 2.25 - 4.5 + 4 = 1.75$
- $d^2(-1.225) = 1.75$ (symmetrisch)

Schritt 5: Hinreichende Bedingung

- $(d^2)''(0) = -6 < 0$ Maximum bei $x = 0$
- $(d^2)''(1.225) = 12(1.5) - 6 = 12 > 0$ Minimum

Ergebnis

Minimale Abstände bei $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.225$
Punkte: $(\pm 1.225, 1.5)$, Abstand ≈ 1.323

Übungsaufgabe 1: Minimaler Abstand

Aufgabe

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 2 - x$ im Intervall $[0, 2]$
Bestimme den minimalen vertikalen Abstand zwischen den Funktionen.

Übungsaufgabe 2: Maximales Rechteck unter Funktion

Aufgabe

Gegeben: $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, \pi]$
Bestimme das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt unter dem Sinus.

Übungsaufgabe 3: Quader mit maximalem Volumen

Aufgabe

Aus einem Draht der Länge $L = 1\,\text{m}$ soll das Kantenmodell eines Quaders gebogen werden, dessen Grundfläche ein Quadrat ist und der maximales Volumen besitzt. Bestimmen Sie die Abmessungen des Quaders.

Hinweise

- Ein Quader hat 12 Kanten

Übungsaufgabe 4: Rechteck mit minimalem Umfang

Aufgabe

Ein Rechteck soll einen Flächeninhalt von $100\,\mathrm{cm}^2$ haben.
Für welche Seitenlängen a und b wird der Umfang minimal?

Übungsaufgabe 5: Rechteck unter Bogenbrücke

Aufgabe

Eine parabelförmige Bogenbrücke wird beschrieben durch die Funktion

$$f(x) = -0,1x^2 + 10$$

(Einheit: Meter).
Welches Rechteck mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen hat den größten Flächeninhalt, wenn es in den Bogen eingepasst wird?