

Differential- und Integralrechnung

Kapitel 4: Ableitungsregeln

Das Problem mit dem Differentialquotienten

Erinnerung: Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Problem: Diese Berechnung ist sehr aufwendig!

Die Lösung: Ableitungsregeln

Glücklicherweise: Berühmte Wissenschaftler haben einfachere Regeln gefunden!

Einfache Regeln:

- Potenzregel, Faktorregel, Summen-/Differenzregel
- Konstantenregel, Lineare-Funktion-Regel
- e^x -Regel, a^x -Regel
- In-Regel, allgemeine-Logarithmus-Regel
- Sinus-Regel, Cosinus-Regel

Schwere Regeln:

- Produktregel
- Quotientenregel
- Kettenregel

Potenzregel

Potenzregel

Für $n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Merkregel: Exponent wird Faktor, dann Exponent minus 1

Beispiele:

1 $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

2 $f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

3 $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Faktorregel und Summenregel

Faktorregel

Für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

Bedeutung: Konstante Faktoren bleiben erhalten!

Summen- und Differenzregel

Für differenzierbare Funktionen f und g gilt:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Bedeutung: Gliedweise ableiten!

ÜBUNG: Einfache Ableitungen (1)

Berechne die Ableitungen:

a) $f(x) = 5x^3$

b) $f(x) = x^5 + x^3$

c) $f(x) = 4x^7 - 2x^3 + x$

Konstantenregel und Lineare-Funktion-Regel

Konstantenregel

Für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Lineare-Funktion-Regel

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a$$

Beispiele:

- $f(x) = 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
- $f(x) = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3$

Exponentialfunktionen

e^x -Regel

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Besonderheit: Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung!

a^x -Regel

Für $a > 0, a \neq 1$ gilt:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

Beispiele:

- $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$

Logarithmus-Funktionen

In-Regel

Für $x > 0$ gilt:

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Allgemeine-Logarithmus-Regel

Für $a > 0, a \neq 1$ und $x > 0$ gilt:

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Beispiele:

- $f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = \log_{10}(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

Trigonometrische Funktionen

Sinus-Regel

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$

Cosinus-Regel

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

Achtung: Negatives Vorzeichen beim Cosinus!

Beispiele:

- $f(x) = 4 \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cos(x)$
- $f(x) = 3 \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3 \sin(x)$
- $f(x) = \sin(x) + \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

ÜBUNG: Kombinierte Ableitungen

Berechne die Ableitungen:

a) $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x - 4$

b) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \sqrt{x} - 5e^x$

c) $f(x) = x^4 + 2\ln(x) + 3\sin(x) - \cos(x)$

Produktregel

Produktregel

Für differenzierbare Funktionen u und v gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Merkregel: Ableitung der ersten mal zweite plus erste mal Ableitung der zweiten

Achtung: Es gilt NICHT $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$!

Beispiel: $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Setze $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x, \quad v'(x) = e^x$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$$

ÜBUNG: Produktregel

Berechne die Ableitungen mit der Produktregel:

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - 5)$

c) $f(x) = x^4 \cdot \cos(x)$

Quotientenregel

Quotientenregel

Für differenzierbare Funktionen u und v mit $v(x) \neq 0$ gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

$$u(x) = x^2, \quad v(x) = e^x, \quad u'(x) = 2x, \quad v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

ÜBUNG: Quotientenregel

Berechne die Ableitungen mit der Quotientenregel:

a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

Kettenregel: Verkettete Funktionen

Was ist eine verkettete (verschachtelte) Funktion?

Eine Funktion f heißt **verkettet**, wenn sie sich schreiben lässt als:

$$f(x) = g(h(x))$$

wobei:

- $h(x)$ die **innere Funktion** ist
- $g(u)$ die **äußere Funktion** ist (mit $u = h(x)$)

Beispiele für Verkettungen:

- $f(x) = (x^2 + 3)^5 \rightarrow$ äußere: u^5 , innere: $x^2 + 3$
- $f(x) = e^{3x} \rightarrow$ äußere: e^u , innere: $3x$
- $f(x) = \sin(x^3) \rightarrow$ äußere: $\sin(u)$, innere: x^3
- $f(x) = \ln(x^2 + 1) \rightarrow$ äußere: $\ln(u)$, innere: $x^2 + 1$

Kettenregel

Kettenregel

Für differenzierbare Funktionen g und h gilt:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Alternative Schreibweise: Setze $u = h(x)$

$$f'(x) = g'(u) \cdot h'(x) = \text{äußere Abl.} \cdot \text{innere Abl.}$$

Merkregel: Äußere Ableitung mal innere Ableitung

Strategie:

- 1 Identifizierte innere Funktion $u = h(x)$
- 2 Identifizierte äußere Funktion $g(u)$
- 3 Berechne äußere Ableitung $g'(u)$
- 4 Berechne innere Ableitung $h'(x)$

Kettenregel: Beispiel 1

Aufgabe: $f(x) = (x^2 + 3x)^5$

Lösung:

- Innere Funktion: $u = h(x) = x^2 + 3x$
- Äußere Funktion: $g(u) = u^5$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 2x + 3$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = 5u^4$

Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 5u^4 \cdot (2x + 3) \\&= 5(x^2 + 3x)^4 \cdot (2x + 3)\end{aligned}$$

Kettenregel: Beispiel 2

Aufgabe: $f(x) = e^{3x}$

Lösung:

- Innere Funktion: $u = 3x$
- Äußere Funktion: $g(u) = e^u$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 3$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = e^u$

Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

Kettenregel: Beispiel 3

Aufgabe: $f(x) = \sin(x^3)$

Lösung:

- Innere Funktion: $u = x^3$
- Äußere Funktion: $g(u) = \sin(u)$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 3x^2$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = \cos(u)$

Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$$

Kettenregel: Beispiel 4

Aufgabe: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Lösung:

- Innere Funktion: $u = x^2 + 1$
- Äußere Funktion: $g(u) = \ln(u)$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 2x$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = \frac{1}{u}$

Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

ÜBUNG: Kettenregel

Berechne die Ableitungen mit der Kettenregel:

a) $f(x) = (2x + 1)^4$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = \sin(3x - 2)$

d) $f(x) = \sqrt{5x - 2}$

Mehrfache Verkettung

Aufgabe: $f(x) = e^{\sin(x^2)}$

Hier liegt eine **dreifache Verkettung** vor!

Lösung: Von außen nach innen arbeiten:

- Äußerste Funktion: e^u mit $u = \sin(x^2)$
- Mittlere Funktion: $\sin(v)$ mit $v = x^2$
- Innerste Funktion: x^2

Schrittweise ableiten:

- 1 Ableitung von e^u : e^u
- 2 Ableitung von $\sin(v)$: $\cos(v)$
- 3 Ableitung von x^2 : $2x$

Kombination: Produktregel + Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$

Lösung: Hier brauchen wir **Produktregel** UND **Kettenregel!**

Setze $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^{3x}$

- $u'(x) = 2x$
- Für $v'(x)$ Kettenregel: $v'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

Produktregel anwenden:

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\&= 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} \\&= e^{3x}(2x + 3x^2)\end{aligned}$$

Kombination: Quotientenregel + Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^3}$

Lösung: Quotientenregel UND Kettenregel!

Setze $u(x) = \sin(2x)$ und $v(x) = x^3$

- Mit Kettenregel: $u'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2 \cos(2x)$
- $v'(x) = 3x^2$

Quotientenregel:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2 \cos(2x) \cdot x^3 - \sin(2x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} \\&= \frac{2x^3 \cos(2x) - 3x^2 \sin(2x)}{x^6} \\&= \frac{2x \cos(2x) - 3 \sin(2x)}{x^4}\end{aligned}$$

ÜBUNG: Kombinierte Regeln

Berechne die Ableitungen (mehrere Regeln nötig):

a) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

Übersicht: Einfache Ableitungsregeln

Regel	Funktion	Ableitung
Potenzregel	x^n	nx^{n-1}
Faktorregel	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
Summenregel	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Konstantenregel	c	0
e^x -Regel	e^x	e^x
In-Regel	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Sinus-Regel	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Cosinus-Regel	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Übersicht: Schweren Ableitungsregeln

Regel	Formel
Produktregel	$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel	$\left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Kettenregel	$[g(h(x))]' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Häufige Fehler vermeiden

FALSCH

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$ ✗
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ ✗
- $[g(h(x))]' = g'(x) \cdot h'(x)$ ✗

RICHTIG

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ✓
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ✓
- $[g(h(x))]' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ ✓

Strategien für komplexe Aufgaben

Frage 1: Ist die Funktion ein Produkt, Quotient oder verschachtelt?

- **Produkt** ($u \cdot v$) → Produktregel
- **Quotient** ($\frac{u}{v}$) → Quotientenregel
- **Verschachtelt** ($g(h(x))$) → Kettenregel

Frage 2: Brauche ich mehrere Regeln?

Häufige Kombinationen:

- Produkt mit verketteten Faktoren: Produkt- + Kettenregel
- Quotient mit verketteten Teilen: Quotienten- + Kettenregel
- Mehrfach verschachtelt: Kettenregel mehrfach anwenden

Wichtige Begriffe

Wichtige Wörter für die Prüfung:

- **Produkt:** Multiplikation zweier Funktionen ($u \cdot v$)
- **Quotient:** Division zweier Funktionen ($\frac{u}{v}$)
- **Verkettete / verschachtelte Funktion:** Funktion in Funktion ($g(h(x))$)
- **Innere Funktion:** Das "Innere" bei Verkettung ($h(x)$)
- **Äußere Funktion:** Das "Äußere" bei Verkettung ($g(u)$)
- **Innere Ableitung:** Ableitung der inneren Funktion ($h'(x)$)
- **Äußere Ableitung:** Ableitung der äußeren Funktion ($g'(u)$)
- **Die 3 schweren Regeln:** Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

Hausaufgaben – Aufgabe 1

Übe zu Hause:

Aufgabe 1: Bestimme die Ableitungen mit einfachen Regeln:

a) $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 7x - 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2} + 2\sqrt{x} - e^x$

c) $f(x) = x^4 + 2 \ln(x) + 3 \sin(x) - \cos(x)$

Hausaufgaben – Aufgabe 2

Aufgabe 2: Bestimme die Ableitungen (schwere Regeln):

a) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ (Produktregel)

b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ (Quotientenregel)

c) $f(x) = (2x + 1)^4$ (Kettenregel)

d) $f(x) = e^{-x^2}$ (Kettenregel)

Hausaufgaben – Aufgabe 3

Aufgabe 3: Kombinierte Anwendung:

a) $f(x) = \sin(3x - 2)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ (Produkt- + Kettenregel)

d) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^3}$ (Quotienten- + Kettenregel)