Lagebeziehungen und Abstände

Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Übersicht

Was lernen wir heute?

- **3.6.3 Lagebeziehungen Ebene** $\leftrightarrow$ **Ebene**
- **3.7 Abstände** – Sieben grundlegende Fälle
- **Hessesche Normalenform** – Punkt–Ebene-Abstand

Lagebeziehungen: Ebene $\leftrightarrow$ Ebene

Drei mögliche Fälle

Zwei Ebenen E_1 und E_2 im $\mathbb{R}^3$ können:

1. sich in einer **Geraden schneiden**
2. **(echt) parallel** zueinander sein
3. **identisch** sein

Grundidee zur Lage-Bestimmung

Wir lösen das Gleichungssystem beider Ebenengleichungen.
Die Art der Lösungsmenge entscheidet über den Fall.

Bestimmung der Lagebeziehung

Gegeben

$$
\begin{aligned}
E_1 : \quad & a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\
E_2 : \quad & a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2
\end{aligned}
$$

Interpretation der Lösungsmenge

- **Eindimensionale Lösungsmenge** (eine freie Variable):
  $\rightarrow$ Ebenen schneiden sich in einer Geraden
- **Leere Lösungsmenge**:
  $\rightarrow$ Ebenen sind echt parallel
- **Zweidimensionale Lösungsmenge** (zwei freie Variablen):
  $\rightarrow$ Ebenen sind identisch

Beispiel: Schneidende Ebenen (1/3)

Gegeben

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x + 2y - z = 4 \\ E_2: &\quad 2x - y + 3z = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Ebenen.

Vorgehen

Wir lösen das Gleichungssystem durch das Gauß-Verfahren.

Beispiel: Schneidende Ebenen (2/3)

Lösung

Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 2z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung:

$$5y - 5z = 7 \quad \Rightarrow \quad y = z + \frac{7}{5}$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} x + 2\left(z + \frac{7}{5}\right) - z &= 4 \\ x &= -z + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Beispiel: Schneidende Ebenen (3/3)

Parametrisierung

Mit $z = t$ als freiem Parameter:

$$
\begin{aligned}
x &= -t + \frac{6}{5} \\
y &= t + \frac{7}{5} \\
z &= t
\end{aligned}
$$

Schnittgerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis

Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Beispiel: Parallele Ebenen (1/2)

Gegeben

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x - y + 2z = 3 \\ E_2: &\quad 2x - 2y + 4z = 8 \end{aligned}$$

Lösung

Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$2x - 2y + 4z = 6$$

Dies widerspricht der zweiten Gleichung:

$$2x - 2y + 4z = 8$$

Beispiel: Parallele Ebenen (2/2)

Widerspruch

$6 \neq 8 \rightarrow$ System unlösbar!

Ergebnis

Die Ebenen sind **echt parallel**.

Beobachtung

Die Normalenvektoren sind parallel:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}_1$$

Aber die rechten Seiten stehen nicht im gleichen Verhältnis: $d_2 \neq 2d_1$

Der Schnittwinkel zweier Ebenen

Definition

Bei sich schneidenden Ebenen E_1 und E_2 ist der **Schnittwinkel** φ der spitze Winkel zwischen den Ebenen ($0 \leq \varphi \leq 90$).

Formel

Der Schnittwinkel entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Hinweis

Wir verwenden den Betrag, um stets den spitzen Winkel zu erhalten.

Beispiel: Schnittwinkel berechnen (1/2)

Gegeben

Für die Ebenen aus dem ersten Beispiel:

$$E_1: \quad x + 2y - z = 4 \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \quad 2x - y + 3z = 1 \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnung

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -3$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Beispiel: Schnittwinkel berechnen (2/2)

Formel einsetzen

$$\cos\varphi = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \approx 0{,}327$$

Ergebnis

$$\varphi \approx 70{,}9$$

Orthogonale Ebenen

Definition

Zwei Ebenen heißen **orthogonal** (oder **senkrecht**), wenn ihr Schnittwinkel 90 beträgt.

Kriterium

$$E_1 \perp E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Interpretation

Die Normalenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

3.7 Abstände in der analytischen Geometrie

Übersicht

In der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raums unterscheiden wir **sieben grundlegende Abstandsfälle**:

Fall	Objekte	Voraussetzung
1	Punkt – Punkt	—
2	Punkt – Gerade	—
3	Punkt – Ebene	—
4	Gerade – Gerade	parallel
5	Gerade – Gerade	windschief
6	Gerade – Ebene	parallel
7	Ebene – Ebene	parallel

Fall 1: Abstand Punkt–Punkt

Der einfachste Fall

Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

Formel

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Interpretation

Dies ist einfach die Länge des Verbindungsvektors.

Fall 2: Abstand Punkt–Gerade

Geometrische Überlegung

Der kürzeste Abstand wird auf dem Lot von P auf g erreicht.
Wir suchen den Lotfußpunkt F auf g und berechnen dann $|PF|$.

Verfahren

Gegeben: Punkt P und Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$

1. Lotfußpunkt: $F = \vec{a} + t_0\vec{v}$ für ein bestimmtes t_0
2. Orthogonalitätsbedingung: $(\vec{F} - \vec{P}) \cdot \vec{v} = 0$
3. Daraus t_0 bestimmen und damit F
4. $d(P, g) = |\overrightarrow{PF}|$

Beispiel: Punkt–Gerade (1/3)

Gegeben

Punkt $P(2,3,1)$ und Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

Beispiel: Punkt–Gerade (2/3)

Lösung

Lotfußpunkt:

$$F = \begin{pmatrix} 1 + t_0 \\ 1 + 2t_0 \\ -t_0 \end{pmatrix}$$

Vektor $\overrightarrow{PF}$:

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} t_0 - 1 \\ 2t_0 - 2 \\ -t_0 - 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalitätsbedingung: $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{aligned} (t_0 - 1) + 2(2t_0 - 2) + (-1)(-t_0 - 1) &= 0 \\ t_0 - 1 + 4t_0 - 4 + t_0 + 1 &= 0 \\ 6t_0 &= 4 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Beispiel: Punkt–Gerade (3/3)

Lotfußpunkt

$$F = \begin{pmatrix} 1 + 2/3 \\ 1 + 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 7/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Abstandsvektor

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Ergebnis

$$d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{\frac{1 + 4 + 25}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3} \approx 1{,}83$$

Fall 3: Abstand Punkt–Ebene

Wichtigster Abstandsfall!

Dies ist der **wichtigste Abstandsfall** in der analytischen Geometrie!

Geometrische Idee

Der kürzeste Abstand eines Punktes P von einer Ebene E wird auf der Normalen zur Ebene erreicht.

Die Hessesche Normalenform

Für eine Ebene $E : n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$ und Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$d(P, E) = \frac{|n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Beispiel: Punkt–Ebene (1/2)

Gegeben

Punkt $P(3, -1, 2)$ und Ebene $E : 2x - y + 2z = 6$

Aufgabe

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Gegeben

- Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Punkt: $P = (3, -1, 2)$
- Rechte Seite: $d = 6$

Beispiel: Punkt–Ebene (2/2)

Lösung

Hessesche Abstandsformel:

$$
\begin{aligned}
d(P, E) &= \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\
&= \frac{|6 + 1 + 4 - 6|}{\sqrt{9}} \\
&= \frac{|5|}{3} \\
&= \frac{5}{3} \approx 1{,}67
\end{aligned}
$$

Ergebnis

Der Abstand beträgt $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$ Längeneinheiten.

Fall 4: Abstand paralleler Geraden

Situation

Zwei Geraden g_1 und g_2 sind parallel zueinander.

Methode

Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf g_1 und berechnen seinen Abstand zu g_2:

$$d(g_1, g_2) = d(P, g_2) \quad \text{mit } P \in g_1$$

Bemerkung

Dies führt den Fall auf Fall 2 (Punkt–Gerade) zurück.

Fall 5: Abstand windschiefer Geraden

Definition

Zwei Geraden heißen **windschief**, wenn sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind.
Sie liegen in verschiedenen "Stockwerken" des Raums.

Geometrische Idee

Es gibt genau eine gemeinsame Normale zu beiden Geraden.
Der Abstand ist die Länge des Stücks dieser Normalen zwischen den beiden Geraden.

Verfahren: Abstand windschiefer Geraden

Vektorformel

Gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{v}_1, \qquad g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{v}_2$$

(windschief)
Schritt 1: Bestimme den Normalenvektor:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Schritt 2: Berechne den Abstand mit:

$$d = \frac{|(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Fall 6: Abstand Gerade–Ebene (parallel)

Situation

Eine Gerade g ist parallel zu einer Ebene E.

Methode

Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf g und berechnen:

$$d(g, E) = d(P, E)$$

Bemerkung

Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

Fall 7: Abstand paralleler Ebenen

Situation

Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind parallel zueinander.

Methode

Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf E_1 und berechnen:

$$d(E_1, E_2) = d(P, E_2)$$

Bemerkung

Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

Beispiel: Parallele Ebenen (1/2)

Gegeben

$$E_1: \quad x - 2y + 2z = 3$$
$$E_2: \quad x - 2y + 2z = 9$$

Aufgabe

Bestimmen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen.

Vorgehen

1. Wähle einen Punkt auf E_1
2. Berechne den Abstand dieses Punktes zu E_2

Beispiel: Parallele Ebenen (2/2)

Lösung

Punkt auf E_1: Setze $y = z = 0$ in E_1:

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad P(3, 0, 0)$$

Abstand von P zu E_2:

$$\begin{aligned} d(E_1, E_2) &= d(P, E_2) \\ &= \frac{|1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|3 - 9|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

Ergebnis

Der Abstand beträgt 2 Längeneinheiten.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lagebeziehung der Ebenen:

$$E_1 : 2x + y - z = 5, \quad E_2 : 4x + 2y - 2z = 7$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(1, 2, 3)$ von der Ebene $E : x + y + z = 1$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Abstand der parallelen Ebenen:

$$E_1 : 3x - y + 2z = 4, \quad E_2 : 6x - 2y + 4z = 14$$