

# Flächenberechnung und Rotationsvolumen

Integralrechnung mit Integrationstechniken

# Flächenberechnung mit komplexeren Funktionen

## Problemstellung

Bei komplexeren Funktionen benötigen wir für die Flächenberechnung:

- Substitution
- Partielle Integration
- Kombination beider Methoden

## Empfohlene Vorgehensweise

- 1 **Zuerst:** Stammfunktion  $F(x)$  mit Integrationstechniken berechnen
- 2 **Dann:** Hauptsatz anwenden:  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

## Vorteil

Keine Transformation der Grenzen bei Substitution nötig!

## Beispiel 1: Fläche mit Substitution

### Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche zwischen  $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ , der x-Achse und den Grenzen  $x = 0$  und  $x = 1$ .

### Schritt 1: Stammfunktion berechnen

Wir benötigen  $\int x \cdot e^{x^2} dx$

### Substitution:

- Setze:  $u = x^2$
- Dann:  $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$

## Beispiel 1: Fläche mit Substitution (Fortsetzung)

**Integral in  $u$ :**

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^{x^2} dx &= \int e^u \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C\end{aligned}$$

**Resubstitution:**  $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

**Schritt 2: Grenzen einsetzen**

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^1 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} (e - 1) \approx 0,859 \text{ FE}\end{aligned}$$

## Beispiel 2: Fläche mit partieller Integration

### Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche zwischen  $f(x) = x \cdot \sin(x)$ , der x-Achse und den Grenzen  $x = 0$  und  $x = \pi$ .

### Schritt 1: Stammfunktion berechnen

Wir benötigen  $\int x \cdot \sin(x) dx$

### Partielle Integration:

- Wähle:  $u = x$  und  $v' = \sin(x)$
- Dann:  $u' = 1$  und  $v = -\cos(x)$

## Beispiel 2: Partielle Integration (Fortsetzung)

**Formel anwenden:**

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin(x) \, dx &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) \, dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) \, dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C\end{aligned}$$

Also:  $F(x) = -x \cos(x) + \sin(x) + C$

## Beispiel 2: Partielle Integration (Fortsetzung)

### Schritt 2: Grenzen einsetzen

$$A = \int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) dx = [-x \cos(x) + \sin(x)]_0^{\pi}$$

**Obere Grenze** ( $x = \pi$ ):

$$-\pi \cos(\pi) + \sin(\pi) = -\pi \cdot (-1) + 0 = \pi$$

**Untere Grenze** ( $x = 0$ ):

$$-0 \cdot \cos(0) + \sin(0) = 0$$

**Ergebnis:**

$$A = \pi - 0 = \pi \text{ FE}$$

## Beispiel 3: Kombinierte Methoden

### Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche zwischen  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  und der x-Achse von  $x = 0$  bis  $x = 1$ .

### Schritt 1: Stammfunktion berechnen

#### Substitution:

- Setze:  $u = x^2 + 1$
- Dann:  $du = 2x \, dx \Rightarrow x \, dx = \frac{1}{2} du$
- Außerdem:  $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{u}$

## Beispiel 3: Kombinierte Methoden (Fortsetzung)

**Integral transformieren:**

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du \\&= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{u} + C\end{aligned}$$

**Resubstitution:**  $F(x) = \sqrt{x^2+1} + C$

**Schritt 2: Grenzen einsetzen**

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[ \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 \\&= \sqrt{2} - 1 \approx 0,414 \text{ FE}\end{aligned}$$

# Wichtige Hinweise zur Vorgehensweise

## Vorteile der Methode

- Keine Transformation der Grenzen bei Substitution
- Übersichtlichere Rechnung
- Weniger Fehlerquellen
- Stammfunktion kann wiederverwendet werden

## Typische Fehler vermeiden

- **Nicht vergessen:** Resubstitution durchführen!
- **Nicht vergessen:** Bei Flächen unter der x-Achse Betrag bilden
- **Kontrolle:** Ableitung der Stammfunktion = Integrand?

# Volumen von Rotationskörpern - Einführung

## Grundidee

Rotiert eine Fläche um eine Achse, entsteht ein dreidimensionaler Körper. Das Volumen kann durch Integration berechnet werden.

## Zwei Hauptfälle

- 1 **Rotation um die x-Achse:** Formel mit  $y = f(x)$
- 2 **Rotation um die y-Achse:** Formel mit  $x = g(y)$  (Umkehrfunktion)

## Merkhilfe

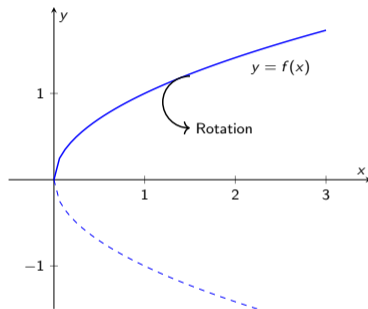
Das Quadrat im Integral stammt aus der Kreisfläche  $\pi r^2$ !

# Rotation um die x-Achse

## Formel

Rotiert  $y = f(x)$  um die x-Achse im Intervall  $[a, b]$ :

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



## Anschauung

- An jeder Stelle  $x$  entsteht eine Kreisscheibe mit Radius  $r = |f(x)|$
- Fläche der Scheibe:  $A(x) = \pi[f(x)]^2$
- Integration über alle Scheiben ergibt das Volumen

# Beispiel 1: Rotation um die x-Achse

## Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn  $f(x) = \sqrt{x}$  zwischen  $x = 0$  und  $x = 4$  um die x-Achse rotiert.

## Lösung:

**Schritt 1:** Formel aufstellen

$$V_x = \pi \int_0^4 [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

**Schritt 2:** Integration

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 \\ &= \pi \left( \frac{1}{2} \cdot 16 - 0 \right) = 8\pi \approx 25,13 \text{ VE} \end{aligned}$$

## Beispiel 2: Rotation um die x-Achse

### Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn  $f(x) = e^x$  zwischen  $x = 0$  und  $x = 1$  um die x-Achse rotiert.

### Lösung:

**Schritt 1:** Formel aufstellen

$$V_x = \pi \int_0^1 [e^x]^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$$

**Schritt 2:** Integration (mit Substitution  $u = 2x$ )

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) \approx 10,04 \text{ VE} \end{aligned}$$

# Rotation um die y-Achse

## Formel

Rotiert der Graph um die y-Achse im Intervall  $[c, d]$  (in y-Richtung):

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

wobei  $x = g(y)$  die Umkehrfunktion ist.

## Wichtige Schritte

- 1 Funktion nach  $x$  auflösen:  $x = g(y)$
- 2 Grenzen in  $y$ -Werte umrechnen
- 3 Nach  $dy$  integrieren

## Achtung

Die Integrationsvariable ist jetzt  $y$ , nicht  $x$ !

# Beispiel: Rotation um die y-Achse

## Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn der Graph von  $y = x^2$  zwischen  $y = 0$  und  $y = 4$  um die y-Achse rotiert.

## Lösung:

**Schritt 1:** Umkehrfunktion bilden

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad (\text{für } x \geq 0)$$

**Schritt 2:** Volumenformel aufstellen

$$V_y = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^4 y dy$$

**Schritt 3:** Integration

$$V_y = \pi \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi \text{ VE}$$

# Rotation einer Fläche zwischen zwei Funktionen

## Unterscheidung

### Fall 1: Nur Graph rotiert

- Nur die Kurve rotiert um die Achse
- Formel:  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

### Fall 2: Fläche zwischen zwei Funktionen rotiert

- Die Fläche zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$  rotiert
- Formel:  $V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$
- Voraussetzung:  $f(x) \geq g(x) \geq 0$

## Merksatz

Äußerer Radius zum Quadrat minus innerer Radius zum Quadrat!

# Beispiel: Fläche zwischen zwei Funktionen

## Aufgabe

Die Fläche zwischen  $f(x) = 2$  und  $g(x) = x$  im Intervall  $[0, 2]$  rotiert um die  $x$ -Achse. Berechnen Sie das Volumen.

## Lösung:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 ([2]^2 - [x]^2) dx \\ &= \pi \int_0^2 (4 - x^2) dx \\ &= \pi \left[ 4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \pi \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{16\pi}{3} \approx 16,76 \text{ VE} \end{aligned}$$

# Beispiel: Hohlkörper

## Aufgabe

Ein Hohlzylinder entsteht durch Rotation der Fläche zwischen  $f(x) = 3$  und  $g(x) = 2$  um die x-Achse im Intervall  $[0, 5]$ . Berechnen Sie das Volumen.

## Lösung:

$$V = \pi \int_0^5 (3^2 - 2^2) dx$$

$$= \pi \int_0^5 5 dx$$

$$= \pi [5x]_0^5 = 25\pi \text{ VE}$$

## Alternative mit Geometrie:

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h = \pi(9 - 4) \cdot 5 = 25\pi$$

# Masse eines Rotationskörpers

## Konstante Dichte

Ist  $\rho$  die konstante Dichte des Materials:

$$m = \rho \cdot V$$

## Variable Dichte

Ist  $\rho(x)$  eine ortsabhängige Dichte:

$$m = \pi \int_a^b \rho(x) \cdot [f(x)]^2 dx$$

## Einheiten beachten

Volumen in  $\text{cm}^3$ , Dichte in  $\text{g}/\text{cm}^3 \Rightarrow$  Masse in g

## Beispiel: Masse mit konstanter Dichte

### Aufgabe

Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von  $f(x) = \sqrt{x}$  um die x-Achse von  $x = 0$  bis  $x = 4$ . Die Dichte beträgt konstant  $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$ . Berechnen Sie die Masse.

### Lösung:

Aus einem vorherigen Beispiel:  $V = 8\pi \text{ cm}^3$

Mit konstanter Dichte:

$$m = \rho \cdot V = 2 \cdot 8\pi = 16\pi \approx 50,27 \text{ g}$$

# Beispiel: Masse mit variabler Dichte

## Aufgabe

Ein Kegel entsteht durch Rotation von  $f(x) = x$  um die x-Achse von  $x = 0$  bis  $x = 2$ . Die Dichte nimmt linear zu:  $\rho(x) = 1 + x$  (in  $\text{g/cm}^3$ ). Berechnen Sie die Masse.

## Lösung:

$$\begin{aligned} m &= \pi \int_0^2 (1+x) \cdot [x]^2 dx = \pi \int_0^2 (1+x) \cdot x^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^2 + x^3) dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \\ &= \pi \left( \frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{20\pi}{3} \approx 20,94 \text{ g} \end{aligned}$$

# Zusammenfassung: Flächenberechnung

## Vorgehen bei schwierigen Integralen

- 1 Stammfunktion mit geeigneter Methode bestimmen
- 2 Hauptsatz anwenden:  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

## Integrationsmethoden

- **Substitution:** Bei verketteten Funktionen
- **Partielle Integration:** Bei Produkten verschiedenartiger Funktionen
- **Kombination:** Bei komplexeren Ausdrücken

# Zusammenfassung: Rotationsvolumen

Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy \quad \text{mit } x = g(y)$$

Fläche zwischen Funktionen rotiert

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Masse

Konstant:  $m = \rho \cdot V$     Variabel:  $m = \pi \int_a^b \rho(x) \cdot [f(x)]^2 dx$

# Übungsaufgaben - Flächenberechnung

## Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fläche zwischen  $f(x) = x \cdot \cos(x^2)$  und der x-Achse von  $x = 0$  bis  $x = \sqrt{\pi/2}$ .

## Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fläche zwischen  $f(x) = x^2 \cdot e^x$  und der x-Achse von  $x = 0$  bis  $x = 1$ .  
*Hinweis:* Zweimalige partielle Integration nötig

## Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Fläche zwischen  $f(x) = \ln(x)$  und der x-Achse von  $x = 1$  bis  $x = e$ .

# Übungsaufgaben - Rotationsvolumen

## Aufgabe 4

Berechnen Sie das Volumen, das entsteht, wenn  $f(x) = \frac{1}{x}$  zwischen  $x = 1$  und  $x = 2$  um die x-Achse rotiert.

## Aufgabe 5

Die Fläche zwischen  $y = x$  und  $y = x^2$  rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

## Aufgabe 6

Ein Kegel mit Grundradius  $r = 3$  und Höhe  $h = 5$  wird durch Rotation der Geraden  $y = \frac{3}{5}x$  um die x-Achse erzeugt. Bestätigen Sie die Kegelformel  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

# Übungsaufgaben - Masse

## Aufgabe 7

Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  (Halbkreis) um die x-Achse von  $x = -2$  bis  $x = 2$ . Die Dichte beträgt  $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$ . Berechnen Sie die Masse.

*Hinweis:* Das Volumen ist eine Kugel

## Aufgabe 8

Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von  $f(x) = 2x$  um die x-Achse von  $x = 0$  bis  $x = 3$ . Die Dichte variiert mit  $\rho(x) = 2 + 0,5x$ . Berechnen Sie die Masse.

# Übungsaufgaben - Anspruchsvoll

## Aufgabe 9

Die Fläche zwischen  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = 1$  im Intervall  $[0, \ln(2)]$  rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

## Aufgabe 10

Die Funktion  $y = \sin(x)$  rotiert von  $x = 0$  bis  $x = \pi$  um die x-Achse. Berechnen Sie:

(a) Das Volumen

(b) Die Masse bei konstanter Dichte  $\rho = 1,5 \text{ g/cm}^3$

*Hinweis für (a):* Verwenden Sie  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$