Integralrechnung

Einführung: Was ist Integralrechnung?

Definition

Die **Integralrechnung** bildet neben der Differentialrechnung einen der beiden Hauptpfeiler der Analysis.

Zwei Grundaufgaben der Integralrechnung

1. **Umkehrung der Differentiation** (Ableitung) $\rightarrow$ unbestimmtes Integral
2. **Flächenberechnung** mit Funktionen $\rightarrow$ bestimmtes Integral

Anwendungen

- **Physik**: Berechnung von Geschwindigkeit aus Beschleunigung, Arbeit und Energie
- **Ingenieurwesen**: Flächeninhalte, Volumen, Schwerpunkte

Was ist eine Stammfunktion?

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Example

- $f(x) = 2x$ hat die Stammfunktion $F(x) = x^2$
- $f(x) = 3x^2$ hat die Stammfunktion $F(x) = x^3$
- $f(x) = \cos(x)$ hat die Stammfunktion $F(x) = \sin(x)$

Besonderheit: Mehrere Stammfunktionen

Wichtig!

Zu jeder Funktion $f(x)$ gibt es **unendlich viele** Stammfunktionen!

Erklärung

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch

$$F(x) + c \quad \text{mit beliebigem } c \in \mathbb{R}$$

eine Stammfunktion von $f(x)$, denn:

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Example

Für $f(x) = 2x$ sind alle folgenden Funktionen Stammfunktionen:

$$F_1(x) = x^2, \quad F_2(x) = x^2 + 5, \quad F_3(x) = x^2 - 17$$

Allgemein: $F(x) = x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Unbestimmtes Integral

Definition: Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ heißt **unbestimmtes Integral**:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und c eine beliebige reelle Konstante ist.

Bezeichnungen und Begriffe

- $\int$: **Integralsymbol** oder **Integralzeichen**
- $f(x)$: **Integrand**
- x: **Integrationsvariable**
- dx: **Differential**
- c: **Integrationskonstante**

Grundintegrale (1/3)

Die wichtigsten Grundintegrale

(1) Potenzfunktionen:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

Beispiele:

- $\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$
- $\int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$
- $\int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

(2) Konstante Funktionen:

$$\int m \, dx = mx + c \quad (m = \text{const.})$$

Beispiel: $\int 5 \, dx = 5x + c$

Grundintegrale (2/3)

Weitere Grundintegrale

(3) Exponentialfunktion:

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

(4) Allgemeine Exponentialfunktion:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Beispiel: $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$

(5) Trigonometrische Funktionen:

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c$$

Grundintegrale (3/3)

Sonderfall für $n = -1$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$

Wichtig!

Die Betragsstriche sind wichtig, da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist!

Tipp für die Prüfung

Diese Grundintegrale sollten Sie **auswendig** kennen!

Faktorregel und Summenregel

Faktorregel

Konstante Faktoren dürfen vor das Integral gezogen werden:

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

Summenregel

Das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Differenzregel

Das Integral einer Differenz ist gleich der Differenz der Integrale:

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Beispiel: Anwendung der Regeln

Example

Berechnen Sie: $\int (2x^3 + 5x - 7)\,dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int (2x^3 + 5x - 7)\,dx &= \int 2x^3\,dx + \int 5x\,dx - \int 7\,dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 7x + c \\ &= \frac{x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - 7x + c\end{aligned}$$

Beispiel: Gemischte Funktionen

Example

Berechnen Sie: $\int \left(4\sin(x) - 3e^x + \frac{2}{x}\right)\, dx$

Lösung:

$$= 4\int \sin(x)\,dx - 3\int e^x\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 4\cdot(-\cos(x)) - 3\cdot e^x + 2\cdot \ln|x| + c$$

$$= -4\cos(x) - 3e^x + 2\ln|x| + c$$

Integrationsverfahren: Übersicht

Problem

Nicht alle Integrale lassen sich direkt mit den Grundintegralen und Rechenregeln lösen!

Beispiel: $\int x \cdot e^{x^2}\, dx = ?$

Drei wichtige Integrationsverfahren

1. **Integration durch Substitution**
2. **Partielle Integration**
3. **Integration nach Partialbruchzerlegung**

Ziel

Schwere Integrale so vereinfachen, dass Grundintegrale entstehen.

[1] Integration durch Substitution

Anwendungsbereich

Wenn der Integrand ein Produkt oder eine verkettete Funktion enthält.

Grundidee

Die Integrationsvariable x wird durch eine neue Variable u ersetzt (substituiert), sodass das Integral einfacher wird.

Vorgehen (Kurzübersicht)

1. Substitution: $u = g(x)$
2. Differential: $du = g'(x)\,dx$
3. Integration nach u
4. Rücksubstitution: u wieder durch $g(x)$ ersetzen

Hinweis: Wird in der nächsten Vorlesung ausführlich behandelt.

[2] Partielle Integration

Anwendungsbereich

Wenn der Integrand ein Produkt zweier Funktionen ist.

Grundidee

Das Verfahren basiert auf der Produktregel der Differentiation und wird angewendet bei Integralen der Form:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Hinweis: Wird in der nächsten Vorlesung ausführlich behandelt.

[3] Integration nach Partialbruchzerlegung

Anwendungsbereich

Nur auf **echt gebrochenrationale Funktionen** anwendbar!

Definition: Echt gebrochenrational

Eine gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

heißt **echt gebrochenrational**, wenn:

$$\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung

Example

Echt gebrochenrational:

$$\frac{x+1}{x^2+3x+2} \quad (\text{Grad } 1 < \text{Grad } 2)$$

Nicht echt gebrochenrational:

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} \quad (\text{Grad } 3 > \text{Grad } 2)$$

Nach Polynomdivision:

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

Nun kann die Integration nach Partialbruchzerlegung auf den echt gebrochenrationalen Rest angewendet werden.

Motivation: Flächenberechnung

Wiederholung aus der Geometrie

Für einfache geometrische Figuren kennen wir Flächenformeln:

- Rechteck: $A = a \cdot b$
- Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
- Trapez: $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$
- Kreis: $A = \pi r^2$

Neue Problemstellung

Wie berechnet man die Fläche einer **beliebigen** Fläche, die auch „kurvig" begrenzt sein kann?

Idee

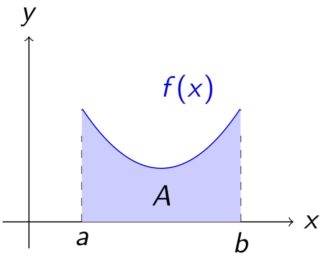
Begrenzung der Fläche durch Funktionen!

Standard-Flächen

Definition: Standard-Fläche

Eine Fläche ist begrenzt von:

1. Von oben: eine Funktion $f(x)$ **oberhalb** der x-Achse ($f(x) \geq 0$)
2. Von links: senkrechte Gerade $x = a$
3. Von rechts: senkrechte Gerade $x = b$
4. Von unten: x-Achse



Näherung durch Rechtecke

Grundidee

Wir nähern die gesuchte Fläche durch Rechtecke an!

Vorgehen

1. Teile das Intervall $[a, b]$ in n gleich breite Teilintervalle. Breite: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
2. Bilde in jedem Teilintervall ein Rechteck

Untersumme U_n

Die Höhe jedes Rechtecks ist der **kleinste** Funktionswert im jeweiligen Teilintervall.

$$U_n \leq A$$

Obersumme O_n

Die Höhe jedes Rechtecks ist der **größte** Funktionswert im jeweiligen Teilintervall.

$$O_n \geq A$$

Grenzwertbetrachtung

Verfeinerung

Je größer n gewählt wird (je mehr Rechtecke), desto besser die Näherung:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = A = \lim_{n\to\infty} O_n$$

$$n = 4 \longrightarrow n = 10 \longrightarrow n = 20 \longrightarrow n \to \infty$$

bessere Näherung

Definition: Bestimmtes Integral

Definition

a) Existieren die Grenzwerte der Ober- und Untersummen und stimmen sie überein, so heißt der gemeinsame Grenzwert **bestimmtes Integral**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

b) Existiert das bestimmte Integral von $f(x)$ über $[a, b]$, so heißt $f(x)$ **bestimmt integrierbar** in $[a, b]$.

Bezeichnungen

- a: **untere Integrationsgrenze**
- b: **obere Integrationsgrenze**
- O_n: **Obersumme** (mit n Rechtecken)
- U_n: **Untersumme** (mit n Rechtecken)

Bedingungen für Integrierbarkeit

Hinreichende Bedingungen

Eine Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ bestimmt integrierbar, wenn:

(1) $f(x)$ ist **stetig** in $[a, b]$
(2) $f(x)$ hat in $[a, b]$ nur **endlich viele Unstetigkeitsstellen**, die **keine Polstellen** sind (nur Lücken oder Sprungstellen erlaubt)

Vergleich: Unbestimmtes $\leftrightarrow$ Bestimmtes Integral

Wichtig für mündliche Prüfungen!

Diese Gegenüberstellung wird häufig gefragt!

Eigenschaft	**Unbestimmt**	**Bestimmt**
Schreibweise	$\int f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
Grenzen	keine	mit a und b
Ergebnis	Funktion	Zahl
Bedeutung	Stammfunktionen	Flächeninhalt
Konstante	erforderlich (+ c)	entfällt

Wichtige Unterschiede im Detail (1/2)

(1) Integrationsgrenzen

Unbestimmtes Integral: ohne Integrationsgrenzen
Bestimmtes Integral: mit unterer und oberer Grenze

(2) Ergebnis

Unbestimmtes Integral: Das Ergebnis ist eine **Funktion** (+ Integrationskonstante c)
Bestimmtes Integral: Das Ergebnis ist eine **Zahl**

(3) Integrationskonstante

Unbestimmtes Integral: Die Integrationskonstante c ist zwingend erforderlich
Bestimmtes Integral: Es gibt keine Integrationskonstante

Wichtige Unterschiede im Detail (2/2)

(4) Interpretation

Unbestimmtes Integral:

- Sammlung aller Stammfunktionen
- Umkehrung der Ableitung

Bestimmtes Integral:

- Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse
- Konkreter Zahlenwert

Merksatz

Unbestimmtes Integral = **Funktion** + c
Bestimmtes Integral = **Zahl**

Zusammenfassung

Unbestimmtes Integral

- Suche nach Stammfunktionen
- Umkehrung der Differentiation
- Ergebnis: Funktion + Konstante
- Symbol: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Bestimmtes Integral

- Berechnung von Flächeninhalten
- Definition über Grenzwert von Ober-/Untersummen
- Ergebnis: konkrete Zahl
- Symbol: $\int_a^b f(x)\,dx$

Übungsaufgabe 1

Aufgabe

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int 5x^4 \, dx$
b) $\int (3x^2 - 2x + 1) \, dx$
c) $\int (4 \sin(x) + e^x) \, dx$
d) $\int \frac{3}{x} \, dx$

Übungsaufgabe 2

Aufgabe

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Jede Funktion hat genau eine Stammfunktion.
b) Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale.
c) Das bestimmte Integral liefert immer eine Funktion als Ergebnis.
d) Eine stetige Funktion ist auf jedem abgeschlossenen Intervall integrierbar.

Übungsaufgabe 3

Aufgabe

Prüfen Sie durch Ableiten, ob die folgenden Stammfunktionen korrekt sind:

a) $\int 6x^2\,dx = 2x^3 + c$

b) $\int \cos(x)\,dx = -\sin(x) + c$

c) $\int e^x\,dx = e^x + c$

Übungsaufgabe 4 – Grundintegrale

Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (x^5 - 3x^3 + 2x)\, dx$
b) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x}\right)\, dx$
c) $\int (5e^x - 2\cos(x))\, dx$
d) $\int \left(\frac{4}{x} + 3^x\right)\, dx$

Übungsaufgabe 5 – Stammfunktionen prüfen

Aufgabe

Überprüfen Sie durch Ableiten, ob die folgenden Stammfunktionen korrekt sind. Falls nicht, korrigieren Sie sie.

a) $\int 4x^3 \, dx = x^4 + c$

b) $\int (2x + 3) \, dx = x^2 + 3x + c$

c) $\int \sin(x) \, dx = \cos(x) + c$

d) $\int \frac{1}{x^4} \, dx = -\frac{1}{3x^3} + c$

Übungsaufgabe 6 – Bestimmte Integrale (Konzept)

Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^2$ auf dem Intervall $[0, 2]$.
a) Bestimmen Sie zunächst eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.
b) Erklären Sie den Unterschied zwischen $\int 3x^2\,dx$ und $\int_0^2 3x^2\,dx$.
c) Was gibt das bestimmte Integral $\int_0^2 3x^2\,dx$ geometrisch an?
d) Welche Einheit hat das Ergebnis, wenn x in Metern gemessen wird?

Übungsaufgabe 7 – Partialbruchzerlegung (Vorbereitung)

Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden gebrochenrationalen Funktionen echt gebrochenrational sind. Falls nicht, führen Sie eine Polynomdivision durch.

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

c) $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{x}{x^3+x^2}$

Aussprache mathematischer Notationen

Wichtige Bezeichnungen

- $\int f(x)\,dx$: „Integral von f von x dx" oder „Integral f von x nach dx"
- $\int_a^b f(x)\,dx$: „Integral von a bis b über f von x dx"
- $F(x)$: „F von x" oder „groß F von x"
- $F'(x)$: „F Strich von x" oder „Ableitung von F nach x"
- $c \in \mathbb{R}$: „c aus R" oder „c Element von R"
- $\lim_{n\to\infty}$: „Limes für n gegen unendlich"
- U_n: „U n" oder „Untersumme n"
- O_n: „O n" oder „Obersumme n"
- Δx: „Delta x"