Grenzwert von Zahlenfolgen

Was ist ein Grenzwert?

Anschauliche Beobachtung:
Betrachten wir die Folge $a_n = \frac{1}{n}$:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0{,}5, \quad a_3 = 0{,}333..., \quad a_4 = 0{,}25, \quad a_5 = 0{,}2, \quad ...$$

Für $n = 1000$ erhalten wir: $a_{1000} = 0{,}001$

Beobachtung

Je größer n wird, desto näher kommen die Folgenglieder an die Zahl 0 heran.

Weiteres Beispiel

Betrachten wir die Folge $a_n = \frac{2n+1}{n}$:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2{,}5, \quad a_3 = 2{,}333\ldots, \quad a_4 = 2{,}25, \quad a_5 = 2{,}2, \quad \ldots$$

Die Werte nähern sich offensichtlich immer mehr der Zahl 2 an.

Anschauliche Erklärung

Ein Grenzwert ist eine Zahl, der sich die Folgenglieder immer mehr annähern, wenn n immer größer wird.

Definition des Grenzwertes

Definition (Grenzwert einer Zahlenfolge)

Eine Zahlenfolge (a_n) hat den **Grenzwert** $g \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Bedeutung:
Egal wie klein wir ε wählen, ab einem gewissen Index N liegen alle weiteren Folgenglieder in der ε-Umgebung von g.

Schreibweise und Sprechweise

Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{oder} \quad a_n \to g \text{ für } n \to \infty$$

Sprechweise

„**Limes** (für) n **gegen unendlich** (von) a_n **gleich** g."

Beispiele:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

Wichtige Begriffe

Konvergenz

Eine Folge heißt **konvergent**, wenn ihr Grenzwert als reelle Zahl existiert.
Eine Folge **konvergiert** gegen ihren Grenzwert.
Die Eigenschaft heißt **Konvergenz**.

Divergenz

Eine Folge heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist (kein Grenzwert).
Eine Folge **divergiert**, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.
Die Eigenschaft heißt **Divergenz**.

Arten der Divergenz

Divergent bedeutet: kein Grenzwert

Es gibt zwei Arten:

Bestimmt divergent

Die Folge strebt gegen $+\infty$ oder $-\infty$.
Man spricht von einem **uneigentlichen Grenzwert**:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Unbestimmt divergent

Die Folge hat überhaupt kein Grenzverhalten.

Beispiele: Konvergenz und Divergenz

Konvergente Folgen:

- $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (**Nullfolge**)
- $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

Divergente Folgen:

- $(a_n) = (n^2)$ ist **bestimmt divergent**: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- $(a_n) = ((-1)^n)$ ist **unbestimmt divergent**: $1, -1, 1, -1, \ldots$

Spezialfall: Nullfolge

Definition (Nullfolge)

Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Beispiele für Nullfolgen:

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $a_n = \frac{1}{n^2}$
- $a_n = \frac{1}{2^n}$
- $a_n = \frac{5}{n^3+1}$

Übersicht: Methoden zur Grenzwertbestimmung

Es gibt verschiedene Methoden, um Grenzwerte zu berechnen:

a) **Skizze** (grafische Methode) – selten verwendet
b) **Probieren** (sehr große Werte für n einsetzen)
c) **Typische Standard-Grenzwerte** auswendig kennen
d) **Grenzwertsätze** anwenden
e) **Stetigkeit** einer Funktion $f(x)$ nutzen

Methode a) Grafische Methode (Skizze)

Man trägt die ersten Folgenglieder in ein Koordinatensystem ein und versucht, das Verhalten für große n abzulesen.

Hinweis

Diese Methode liefert meist nur eine grobe Orientierung und wird **selten** verwendet.

Nützlich für eine erste Vermutung, aber nicht für exakte Berechnungen.

Methode b) Probieren

Man setzt sehr große Werte für n ein und beobachtet, gegen welche Zahl die Folgenglieder zu streben scheinen.

Beispiel: $a_n = \frac{3n+5}{n+2}$

$$\begin{aligned} a_{100} &= \frac{305}{102} \approx 2{,}99 \\ a_{1000} &= \frac{3005}{1002} \approx 2{,}999 \\ a_{10000} &= \frac{30005}{10002} \approx 2{,}9999 \end{aligned}$$

Vermutung: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$

Methode c) Typische Standard-Grenzwerte (1)

Einige wichtige Grenzwerte sollte man auswendig kennen:

Standard-Grenzwerte I

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{für } a > 0$$

Methode c) Typische Standard-Grenzwerte (2)

Standard-Grenzwerte II (geometrische Folgen)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ +\infty & \text{für } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

Beispiele:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (-2)^n$ existiert nicht

Methode d) Grenzwertsätze

Grenzwertsätze

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. **Summensatz:** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. **Produktsatz:** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. **Quotientensatz:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)
4. **Faktorregel:** $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$ für $c \in \mathbb{R}$

Beispiel: Anwendung der Grenzwertsätze

Aufgabe: Berechnen Sie $\lim_{n \to \infty} \frac{5n^2+3n-1}{2n^2+7}$

Lösung:
Wir klammern im Zähler und Nenner die höchste Potenz von n aus:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^2+3n-1}{2n^2+7} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2\left(5+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{7}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{5+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{7}{n^2}}$$

Beispiel: Anwendung der Grenzwertsätze (Fortsetzung)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}}$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ folgt:

$$= \frac{5 + 0 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$$

Antwort: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-1}{2n^2+7} = \frac{5}{2}$

Methode e) Stetigkeit nutzen

Satz

Wenn f eine stetige Funktion ist und (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$$

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^{\lim_{n\to\infty} 1/n} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

Besonderer Grenzwert: Die Eulersche Zahl

Definition der Eulerschen Zahl e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828\ldots$$

Diese Zahl e heißt **Eulersche Zahl** und ist die Basis der natürlichen Logarithmen und Exponentialfunktionen.

Bedeutung:
Die Zahl e spielt eine zentrale Rolle in der Analysis, insbesondere bei Wachstumsprozessen, Zinseszinsrechnung und Differentialgleichungen.

Allgemeinere Form

Verallgemeinerung

Für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2}$$

Numerische Annäherung an e

Betrachten wir die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

n	$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00000
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815

Die Folgenglieder nähern sich $e \approx 2{,}71828$ an.

Zusammenfassung

Wichtige Konzepte

- Ein **Grenzwert** ist eine Zahl, der sich die Folgenglieder für $n \to \infty$ annähern
- **Konvergent**: Grenzwert existiert als reelle Zahl
- **Divergent**: Kein Grenzwert (bestimmt oder unbestimmt)
- **Nullfolge**: Grenzwert ist 0

Methoden

Standard-Grenzwerte, Grenzwertsätze, Stetigkeit nutzen

Besonderer Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

Übungsaufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+7}{2n-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5n}{3n^2-2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n^2+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n^3+4n^2}$

Übungsaufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

b) $a_n = \frac{3^n}{2^n}$

c) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{n}$

d) $a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Übungsaufgabe 3

Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$