Geraden und Ebenen im Raum

Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Übersicht

Was lernen wir heute?

- **3.4 Geraden im $\mathbb{R}^3$** – Parameterdarstellung
- **3.5 Ebenen im $\mathbb{R}^3$** – Parameter- und Koordinatenform
- **3.6 Lagebeziehungen** – Gerade$\leftrightarrow$Gerade, Gerade$\leftrightarrow$Ebene

3.4 Geraden – Ausgangspunkt $\mathbb{R}^2$

Geradengleichungen in der Ebene

In der Ebene kennen wir verschiedene Geradengleichungen:

- Explizite Form: $y = mx + b$
- Normalform: $ax + by = c$
- Parameterform: $(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (v_1, v_2)$

Vorteil der Parameterform

Sie lässt sich direkt auf den $\mathbb{R}^3$ übertragen!

Parametergleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Definition

Eine Gerade g im $\mathbb{R}^3$ wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Bezeichnungen

- $\vec{a}$ = **Ortsvektor / Stützvektor** (fester Punkt auf g)
- $\vec{v}$ = **Richtungsvektor** (gibt die Richtung an, $\vec{v} \neq \vec{0}$)
- t = **Parameter** (durchläuft alle reellen Zahlen)

Geometrische Interpretation

Startpunkt A + Vielfaches der Richtung

Geradengleichungen aufstellen

Fall 1: Punkt + Richtungsvektor gegeben

Direkt einsetzen: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$

Fall 2: Zwei Punkte A und B gegeben

Richtungsvektor: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
Geradengleichung: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Wichtig: Die Darstellung ist nicht eindeutig!

Beispiel: Gerade durch zwei Punkte

Aufgabe

Bestimmen Sie die Gerade durch $A(1|2|3)$ und $B(4|0|7)$.

Lösung

Richtungsvektor:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.5 Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Charakterisierung

Eine Ebene ist **zweidimensional** $\rightarrow$ benötigt 2 Parameter!

Zwei wichtige Darstellungen

- **Parameterform:** Aufspannen durch zwei Richtungen
- **Koordinatenform:** Beschreibung durch Normalenvektor

Parametergleichung einer Ebene

Definition

Eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Bezeichnungen

- $\vec{a} =$ **Ortsvektor / Stützvektor**
- $\vec{u}, \vec{v} =$ **Richtungsvektoren / Spannvektoren**
- $s, t =$ **Parameter**

Bedingung

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ dürfen nicht parallel sein!

Der Normalenvektor

Definition

Ein Vektor $\vec{n}$ heißt **Normalenvektor** einer Ebene E, wenn er **senkrecht** auf der Ebene steht.

Berechnung

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad \text{(Kreuzprodukt)}$$

Geometrische Vorstellung

Der Normalenvektor zeigt wie ein Pfeil senkrecht von der Ebene weg.
Wie eine Antenne auf einer Tischplatte!

Koordinatengleichung (parameterfreie Form)

Definition

Mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ und einem Punkt A:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d$$

oder ausgeschrieben:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$$

wobei $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$

Vorteil

Kompakte Darstellung ohne Parameter!

Umwandlung der Darstellungsformen

Parameter $\rightarrow$ Koordinatenform

1. Berechne $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. Berechne $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$
3. Stelle auf: $n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$

Koordinaten $\rightarrow$ Parameterform

1. Lies $\vec{n}$ ab
2. Finde einen Punkt auf der Ebene
3. Finde zwei Vektoren $\perp$ zu $\vec{n}$

Beispiel: Parameter $\rightarrow$ Koordinatenform

Gegeben

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

1. Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Berechnung von d: $d = \vec{n} \cdot \vec{a} = -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -4$
3. Koordinatengleichung: $-2x - y + 2z = -4$ oder $2x + y - 2z = 4$

Ebenengleichungen aufstellen

Variante 1: Drei Punkte A, B, C

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

$$E : \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Variante 2: Punkt + Normalenvektor

$$E : \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

Variante 3: Gerade + Punkt außerhalb

Gerade liefert Stützvektor und einen Richtungsvektor

3.6 Lagebeziehungen – Übersicht

Objekte	**Mögliche Lagen**
Gerade $\leftrightarrow$ Gerade	identisch, parallel, schneidend, windschief
Gerade $\leftrightarrow$ Ebene	schneidend, parallel, in Ebene

Besonderheit

Windschiefe Geraden gibt es nur im $\mathbb{R}^3$!

Lagebeziehung: Gerade $\leftrightarrow$ Gerade

Entscheidungsbaum

Schritt 1: Sind die Richtungsvektoren parallel?

- **JA:** Liegt ein Punkt der einen Geraden auf der anderen?
  - **JA** $\rightarrow$ identisch
  - **NEIN** $\rightarrow$ echt parallel
- **NEIN:** Gleichsetzen $\rightarrow$ LGS lösen
  - Lösung existiert $\rightarrow$ schneidend
  - Keine Lösung $\rightarrow$ windschief

Beispiel: Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (1/4)

Gegeben

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.

Vorbereitung

- Richtungsvektoren prüfen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind nicht parallel
- $\rightarrow$ Geraden sind **nicht parallel**
- $\rightarrow$ Mögliche Lagen: **schneidend** oder **windschief**

Beispiel: Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (2/4)

Gleichungssystem aufstellen

Gleichsetzen von g und h:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Komponentenweise

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 1 + 2r = 3 + s \\ \text{II:}\quad & 2 + r = 1 - s \\ \text{III:}\quad & 3 - r = 4 + 2s \end{aligned}$$

Beispiel: Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (3/4)

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Gauß-Elimination

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel: Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (4/4)

Gauß-Elimination (Fortsetzung)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\frac{5}{3}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Interpretation

- Letzte Zeile: $0 \cdot r + 0 \cdot s = -\frac{4}{3}$
- $\rightarrow$ Widerspruch! $(0 \neq -\frac{4}{3})$
- Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**

Ergebnis

Die Geraden g und h sind **windschief**.

Schnittwinkel zweier Geraden

Formel

Für schneidende Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Orthogonale Geraden

Geraden schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Lagebeziehung: Gerade $\leftrightarrow$ Ebene

Gegeben

$g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ und $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = d$

Entscheidungskriterium: $\vec{n} \cdot \vec{v}$

Fall 1: $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$

- $\rightarrow$ Gerade schneidet Ebene (Durchstoßpunkt)

Fall 2: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ und $d - \vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$

- $\rightarrow$ Gerade parallel zur Ebene

Fall 3: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ und $d - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$

- $\rightarrow$ Gerade liegt in der Ebene

Beispiel: Gerade und Ebene (1/5)

Gegeben

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E : 3x + 2y + z = 9$$

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E.

Mögliche Lagen

- Gerade liegt in der Ebene
- Gerade ist parallel zur Ebene (liegt nicht in ihr)
- Gerade schneidet die Ebene (in einem Punkt)

Beispiel: Gerade und Ebene (2/5)

Schritt 1: Normalenvektor bestimmen

Aus der Koordinatenform $E : 3x + 2y + z = 9$ lesen wir den Normalenvektor ab:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis

Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene. Wenn $\vec{n} \perp \vec{v}$, dann ist die Gerade parallel zur Ebene oder liegt in ihr.

Beispiel: Gerade und Ebene (3/5)

Schritt 3: Skalarprodukt berechnen

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)$$

$$= 6 + 2 - 1$$

$$= 7 \neq 0$$

Interpretation

- Da $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$, sind $\vec{n}$ und $\vec{v}$ **nicht orthogonal**
- $\rightarrow$ Die Gerade ist **nicht parallel** zur Ebene
- $\rightarrow$ Die Gerade **schneidet** die Ebene in einem Punkt

Beispiel: Gerade und Ebene (4/5)

Schritt 4: Durchstoßpunkt berechnen

Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 0 + t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

In $E : 3x + 2y + z = 9$ einsetzen:

$$\begin{aligned} 3(1 + 2t) + 2(0 + t) + (2 - t) &= 9 \\ 3 + 6t + 0 + 2t + 2 - t &= 9 \\ 5 + 7t &= 9 \\ 7t &= 4 \\ t &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Beispiel: Gerade und Ebene (5/5)

Schritt 5: Koordinaten des Durchstoßpunkts

Parameter $t = \frac{4}{7}$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{8}{7} \\ 0 + \frac{4}{7} \\ 2 - \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

Ergebnis

Die Gerade g schneidet die Ebene E im Durchstoßpunkt $D\left(\frac{15}{7} \middle| \frac{4}{7} \middle| \frac{10}{7}\right)$.

Beispiel: Gerade liegt in Ebene (1/5)

Gegeben

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E : x + y - 2z = 1$$

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E.

Strategie

1. Prüfen, ob Richtungsvektor orthogonal zum Normalenvektor ist
2. Falls ja: Prüfen, ob ein Punkt der Geraden in der Ebene liegt

Beispiel: Gerade liegt in Ebene (2/5)

Schritt 1: Normalenvektor bestimmen

Aus der Koordinatenform $E : x + y - 2z = 1$ erhalten wir:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Gerade liegt in Ebene (3/5)

Schritt 3: Skalarprodukt berechnen

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\
&= 1 - 1 - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Interpretation

- Da $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, sind $\vec{n}$ und $\vec{v}$ **orthogonal**
- $\rightarrow$ Die Gerade ist **parallel** zur Ebene oder liegt in ihr
- $\rightarrow$ Weitere Prüfung notwendig!

Beispiel: Gerade liegt in Ebene (4/5)

Schritt 4: Stützpunkt der Geraden prüfen

Liegt der Stützpunkt $P(1|2|1)$ der Geraden in der Ebene E?
Einsetzen in die Ebenengleichung $E : x + y - 2z = 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 - 2 \cdot 1 &\stackrel{?}{=} 1 \\ 1 + 2 - 2 &\stackrel{?}{=} 1 \\ 1 &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Interpretation

- Der Stützpunkt liegt in der Ebene
- Die Gerade ist parallel zur Ebene (wegen $\vec{n} \perp \vec{v}$)
- $\rightarrow$ Die Gerade liegt **vollständig in der Ebene**

Beispiel: Gerade liegt in Ebene (5/5)

Ergebnis

Die Gerade g liegt vollständig in der Ebene E.

Begründung

1. $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ Gerade ist parallel zur Ebene
2. Stützpunkt der Geraden liegt in der Ebene

$\Rightarrow$ Alle Punkte der Geraden liegen in der Ebene

Hinweis

Hätte der Stützpunkt **nicht** in der Ebene gelegen, wäre die Gerade echt parallel zur Ebene (ohne Schnittpunkt).

Der Durchstoßpunkt

Formel

Wenn Gerade und Ebene sich schneiden, berechnen wir den **Durchstoßpunkt**:

$$t = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

Durchstoßpunkt bestimmen

Dann einsetzen in die Geradengleichung:

$$D = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$

Schnittwinkel Gerade – Ebene

Wichtig

Hier verwenden wir SINUS (nicht Kosinus!)

Formel

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

Merkhilfe

- Gerade–Gerade: $\cos \alpha$
- Gerade–Ebene: $\sin \alpha$

Zusammenfassung

Geraden

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ mit Stützvektor und Richtungsvektor

Ebenen

- Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$
- Koordinatenform: $n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$
- Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Lagebeziehungen

Systematisches Vorgehen mit Richtungsvektoren und Gleichungssystemen

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Gerade durch die Punkte $A(2|-1|3)$ und $B(5|2|0)$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$ und $C(0|0|1)$.

(a) Stellen Sie die Parametergleichung auf.

(b) Bestimmen Sie einen Normalenvektor.

(c) Geben Sie die Koordinatengleichung an.

Übungsaufgaben (Fortsetzung)

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt und den Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und der Ebene $E : x + y + z = 6$.