Lineare Gleichungssysteme (LGS) – Parameterabhängigkeit

Einführung: Warum sind lineare Gleichungssysteme wichtig?

Bedeutung von LGS

Lineare Gleichungssysteme sind ein Grundpfeiler der angewandten Mathematik. Parameter in einem LGS modellieren Material- oder Systemkenngrößen und beeinflussen die Lösbarkeit.

Anwendungen

- **Ingenieurwesen**: Netzwerke, Statik, Dynamik
- **Wirtschaft**: Input–Output-Modelle, Optimierung
- **Informatik & ML**: Kleinste Quadrate, lineare Modelle
- **Naturwissenschaften**: Stoff- und Energieerhaltung

Problemstellung (Parameter-LGS)

Gegeben

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + \lambda y = 6, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgabe

Untersuchen Sie die Lösbarkeit in Abhängigkeit von λ:
$\Rightarrow$ eindeutig, mehrdeutig oder nicht lösbar?

Matrixschreibweise

Kompakte Form

$$A(\lambda)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Erweiterte Matrix

$$[A \,|\, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 6 \end{array}\right].$$

Determinantentest

Kriterium

Eindeutige Lösung $\Leftrightarrow \det A(\lambda) \neq 0$.

$$\det A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

- $\lambda \neq 2$: A regulär $\Rightarrow$ **genau eine Lösung**.
- $\lambda = 2$: A singulär $\Rightarrow$ **weitere Analyse nötig**.

Gauß-Elimination für $\lambda \neq 2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda \neq 2 \;\Rightarrow\;$ Pivot in Zeile 2: $(\lambda - 2)y = 0 \Rightarrow y = 0,\quad$ und aus $R_1:\; x + y = 3 \Rightarrow x = 3.$

Ergebnis (Gauß)

$$\boxed{x = 3, \quad y = 0 \quad \text{für } \lambda \neq 2.}$$

Spezialfall $\lambda = 2$ im Gauß-Verfahren

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}([A|b]) = 1 < 2 \;\Rightarrow\; \text{unendlich viele Lösungen.}$$

Allgemeine Lösung

$$x + y = 3 \;\Rightarrow\; x = 3 - y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Spezialfall $\lambda = 2$: Rang-/Zeilenanalyse

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}([A|b]) = 1 < 2 \Rightarrow$ **unendlich viele Lösungen**.
- Allgemeine Lösung: $x = 3 - y, \; y \in \mathbb{R}$.

Übungsaufgabe 1 – Parameterabhängiges 3×3-System

Aufgabe

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + \lambda y + z = 4 \\ 3x + 2y + \lambda z = 5 \end{cases}$$

Aufgabenstellung:

1. Stellen Sie das System in Matrixform $A(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dar.
2. Berechnen Sie $\det(A(\lambda))$ in Abhängigkeit von λ.
3. Untersuchen Sie die Lösbarkeit:
4. Bestimmen Sie die Lösung für einen eindeutigen Fall.

Übungsaufgabe 2

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben

Löse nach X auf:

- $X - 2AX = B + CA^T$

Zusatz: Berechne X.

Lösung zu Übungsaufgabe 1 – Matrixform & Determinante

Matrixform

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Determinante

Entwicklung (z. B. erste Zeile) oder Sarrus:

$$\det A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

Lösung – Lösbarkeitsanalyse (Rang-/Gauß-Sicht)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 1 & 4 \\ 3 & 2 & \lambda & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1,\;\; R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 & -4 \end{array}\right]$$

Eliminiere die 2. Spalte in R_3: $R_3 \leftarrow (\lambda - 2)R_3 + R_2$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 1 & -4(\lambda - 2) - 2 \end{array}\right].$$

Beachte: $(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = \det A(\lambda)$.

Fallunterscheidung

- $\det A(\lambda) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \notin \left\{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$: eindeutige Lösung.
- $\det A(\lambda) = 0$: letzte Zeile wird $0 = -4(\lambda - 2) - 2 = -4\lambda + 6 \neq 0 \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ **keine Lösung**.

Lösung – Beispiel eindeutiger Fall ($\lambda = 1$)

Für $\lambda = 1$ ist $\det A(1) = 1 - 5 + 5 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ eindeutig lösbar.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Subtrahiere 1. von 2.: $x = 1$.
Dann $1 + y + z = 3 \Rightarrow y + z = 2$.
Setze $x = 1$ in die 3.: $3 + 2y + z = 5 \Rightarrow 2y + z = 2$.
Differenz: $(2y + z) - (y + z) = y = 0 \Rightarrow z = 2$.

Ergebnis (Beispiellösung)

$$\boxed{x = 1, \quad y = 0, \quad z = 2 \quad \text{für } \lambda = 1.}$$

Kurzfazit

- $\det A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$.
- $\lambda \notin \left\{ \frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \right\}$: **eindeutige Lösung** (invertierbar).
- $\lambda \in \left\{ \frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \right\}$: **keine Lösung** (Widerspruch in der letzten Zeile).
- Es gibt hier *keinen* Parameterwert mit unendlich vielen Lösungen.