Integralrechnung

Substitution – Grundprinzip

Anwendungsbereich

Die Substitutionsmethode wird angewendet bei verketteten Funktionen oder wenn die Ableitung der inneren Funktion als Faktor im Integranden erscheint.

Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

wobei $u = g(x)$ und damit $du = g'(x)\, dx$.

Vorgehensweise

1. Wähle eine geeignete Substitution $u = g(x)$
2. Berechne die Ableitung $\frac{du}{dx} = g'(x)$ bzw. $du = g'(x)\, dx$
3. Ersetze im Integral alle Ausdrücke durch u und du
4. Berechne das neue Integral bezüglich u
5. Resubstitution: Ersetze u durch $g(x)$

Substitution – Beispiel 1 (Einfache Substitution)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx$

Lösung:
Wir erkennen, dass die Ableitung von x^2 (nämlich $2x$) als Faktor vorhanden ist.
Substitution: $u = x^2$
Dann gilt: $\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2x\, dx$
Das Integral wird zu:

$$\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx = \int e^u\, du = e^u + C$$

Resubstitution mit $u = x^2$:

$$\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + C$$

Substitution – Beispiel 2 (Mit Anpassung)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int x \cdot \cos(x^2)\, dx$

Lösung:

Substitution: $u = x^2$

Dann: $\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad x\, dx = \frac{1}{2}\, du$

Das Integral wird zu:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\, dx = \int \cos(u) \cdot \frac{1}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2} \sin(u) + C$$

Resubstitution:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$$

Substitution – Beispiel 3 (Logarithmische Substitution)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int \frac{1}{x \ln(x)} \, dx$

Lösung:
Substitution: $u = \ln(x)$
Dann: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} \, dx$
Das Integral wird zu:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} \, dx = \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C$$

Resubstitution:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} \, dx = \ln|\ln(x)| + C$$

Substitution – Beispiel 4 (Trigonometrische Substitution)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Lösung:
Substitution: $x = \sin(u)$
Dann: $\frac{dx}{du} = \cos(u) \quad \Rightarrow \quad dx = \cos(u)\,du$
Außerdem gilt: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$
Für $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $\cos(u) \geq 0$, also $|\cos(u)| = \cos(u)$.
Das Integral wird zu:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)}\,du = \int 1\,du = u + C$$

Resubstitution mit $u = \arcsin(x)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$$

Partielle Integration – Grundprinzip

Anwendungsbereich

Die partielle Integration wird zur Integration von Produkten zweier Funktionen verwendet.

Formel für partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

oder in der kompakten Form:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Grundidee

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung.

Partielle Integration – Vorgehensweise

Schritte zur partiellen Integration

1. Zerlege den Integranden in ein Produkt $u(x) \cdot v'(x)$
2. Berechne $u'(x)$ und $v(x) = \int v'(x)\,dx$
3. Setze in die Formel ein
4. Berechne das verbleibende Integral $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx$

LIATE-Regel für die Wahl von $u(x)$

Reihenfolge der Priorität (von hoch nach niedrig):

- **L**ogarithmusfunktionen: $\ln(x)$, $\log(x)$
- **I**nverse trigonometrische Funktionen: $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$
- **A**lgebraische Funktionen: x^n, Polynome
- **T**rigonometrische Funktionen: $\sin(x)$, $\cos(x)$
- **E**xponentialfunktionen: e^x, a^x

Partielle Integration – Beispiel 1

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int x \cdot e^x \, dx$

Lösung:
Nach der LIATE-Regel wählen wir:

$$u = x \quad \text{und} \quad v' = e^x$$

Dann gilt:

$$u' = 1 \quad \text{und} \quad v = e^x$$

Partielle Integration:

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + C$$

Partielle Integration – Beispiel 2 (Logarithmus)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

Lösung:
Wir schreiben: $\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$
Wähle:

$$u = \ln(x) \quad \text{und} \quad v' = 1$$

Dann:

$$u' = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad v = x$$

Partielle Integration:

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln(x) - \int 1\,dx$$

$$= x\ln(x) - x + C$$

Partielle Integration – Beispiel 3 (Mehrfach)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int x^2 \cdot e^x \, dx$

Lösung:
Erste partielle Integration:

$$u_1 = x^2, \quad v_1' = e^x \quad \Rightarrow \quad u_1' = 2x, \quad v_1 = e^x$$

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx$$

Zweite partielle Integration für $\int 2x \cdot e^x \, dx$:

$$u_2 = 2x, \quad v_2' = e^x \quad \Rightarrow \quad u_2' = 2, \quad v_2 = e^x$$

$$\int 2x \cdot e^x \, dx = 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x \, dx = 2x \cdot e^x - 2e^x$$

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x \, dx &= x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2e^x) + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C \end{aligned}$$

Partielle Integration – Beispiel 4 (Trigonometrisch)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int x \cdot \sin(x)\,dx$

Lösung:
Wähle:

$$u = x \quad \text{und} \quad v' = \sin(x)$$

Dann:

$$u' = 1 \quad \text{und} \quad v = -\cos(x)$$

Partielle Integration:

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x))\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Partielle Integration – Beispiel 5 (Zyklisch)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int e^x \cdot \sin(x)\,dx$

Lösung: Erste partielle Integration:

$$u_1 = \sin(x), \quad v_1' = e^x \quad \Rightarrow \quad u_1' = \cos(x), \quad v_1 = e^x$$

$$I = \int e^x \cdot \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

Zweite partielle Integration für $\int e^x \cos(x)\,dx$:

$$u_2 = \cos(x), \quad v_2' = e^x \quad \Rightarrow \quad u_2' = -\sin(x), \quad v_2 = e^x$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx$$

Integration nach Partialbruchzerlegung

Anwendungsbereich

Die Partialbruchzerlegung wird angewendet bei rationalen Funktionen der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind.

Voraussetzung

Der Zählergrad muss kleiner sein als der Nennergrad, d.h. $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$.

Falls Grad(P) $\geq$ Grad(Q)

Zunächst muss eine Polynomdivision durchgeführt werden!

Grundidee

Eine rationale Funktion wird in eine Summe einfacherer Brüche (Partialbrüche) zerlegt, die sich leichter integrieren lassen.

Partialbruchzerlegung – Ansätze

Fall 1: Einfache reelle Nullstellen

Hat $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ mit verschiedenen a_i, so:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Fall 2: Mehrfache reelle Nullstellen

Hat $Q(x)$ eine k-fache Nullstelle bei $x = a$, so:

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$$

Fall 3: Irreduzible quadratische Terme

Hat $Q(x)$ einen Faktor $x^2 + px + q$ (nicht weiter zerlegbar), so:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 1 (Teil 1)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$

Lösung:

Schritt 1: Faktorisierung des Nenners

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Schritt 2: Partialbruchansatz

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

Schritt 3: Multiplikation mit $(x - 1)(x + 1)$

$$1 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 1 (Teil 2)

Schritt 4: Bestimmung der Koeffizienten

Setze $x = 1$: $1 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$

Setze $x = -1$: $1 = -2B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$

Also: $\dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1/2}{x - 1} - \dfrac{1/2}{x + 1}$

Schritt 5: Integration

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1}\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 2 (Teil 1)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$

Lösung:

Schritt 1: Partialbruchansatz

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Schritt 2: Multiplikation mit $(x-1)^2$

$$x = A(x-1) + B$$

Schritt 3: Bestimmung der Koeffizienten

Setze $x = 1$: $1 = B \quad \Rightarrow \quad B = 1$

Koeffizientenvergleich bei x: $1 = A \quad \Rightarrow \quad A = 1$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 2 (Teil 2)

Schritt 4: Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Schritt 5: Integration

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x-1| + \int (x-1)^{-2}\,dx$$

$$= \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 3 (Teil 1)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

Lösung:

Schritt 1: Überprüfung des Grades

Da Zählergrad = Nennergrad, führen wir zunächst eine Polynomdivision durch.

Schritt 2: Polynomdivision

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

Schritt 3: Partialbruchzerlegung des Restes

Der Bruch $\frac{2}{x^2-1}$ wurde bereits in Beispiel 1 behandelt:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 3 (Teil 2)

Schritt 4: Integration

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$= x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Ergebnis:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 4 (Teil 1)

Aufgabe

Berechnen Sie: $\int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

Lösung:
Schritt 1: Partialbruchansatz

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Schritt 2: Multiplikation mit $(x-1)(x^2+1)$

$$x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Schritt 3: Bestimmung der Koeffizienten
Setze $x=1$: $3 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{2}$
Koeffizientenvergleich bei x^2: $0 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{3}{2}$
Koeffizientenvergleich bei x^0: $2 = A - C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2}$

Partialbruchzerlegung – Beispiel 4 (Teil 2)

Schritt 4: Partialbruchzerlegung

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3/2}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{3/2}{x-1} - \frac{3x+1}{2(x^2+1)}$$

Schritt 5: Integration
Für $\int \frac{3x+1}{2(x^2+1)}\,dx$ spalten wir auf:

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C\end{aligned}$$

Zusammenfassung: Integrationsmethoden

Wann welche Methode?

Substitution:

- Bei verketteten Funktionen
- Wenn die Ableitung der inneren Funktion als Faktor erscheint

Partielle Integration:

- Bei Produkten zweier Funktionen
- Besonders mit Polynomen, Logarithmen oder inversen trig. Funktionen

Partialbruchzerlegung:

- Bei rationalen Funktionen (Brüchen von Polynomen)
- Nur wenn Zählergrad $<$ Nennergrad (sonst zuerst Polynomdivision)

Übungsaufgabe 1 – Substitution

Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale durch Substitution:

a) $\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\,dx$
b) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$
c) $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx$
d) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Übungsaufgabe 2 – Partielle Integration

Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration:

a) $\int x \cdot \cos(x)\, dx$
b) $\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx$
c) $\int \ln(x^2)\, dx$
d) $\int x \cdot e^{2x}\, dx$

Übungsaufgabe 3 – Partialbruchzerlegung

Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale nach Partialbruchzerlegung:

a) $\int \frac{3}{x^2-4}\,dx$

b) $\int \frac{x+3}{x^2+5x+6}\,dx$

c) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$

Übungsaufgabe 4 – Methodenwahl

Aufgabe

Entscheiden Sie, welche Integrationsmethode jeweils am besten geeignet ist, und berechnen Sie dann das Integral:

a) $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

b) $\int x \cdot \ln(x)\, dx$

c) $\int \frac{5x+2}{x^2+3x+2}\, dx$

d) $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$