Matrizen

Einführung und Rechenoperationen

Studienkolleg · Rahn Education

Was ist eine Matrix?

Matrix

Definition

Eine **Matrix** ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen in Zeilen und Spalten.

Größe: $m \times n$ (Zeilen $\times$ Spalten)

Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} = Element in Zeile i, Spalte j

Beispiel

2×2-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3×2-Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung

Gib die Größe an und bestimme a_{23}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Besondere Matrizen

Nullmatrix

Definition

Alle Elemente sind 0.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Definition

1 auf der Hauptdiagonale, sonst 0.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

Definition

Nur auf der Hauptdiagonale stehen (möglicherweise) Zahlen $\neq 0$.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix

Obere Dreiecksmatrix

Alle Elemente **unterhalb** der Hauptdiagonale sind 0.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vektoren als Matrizen

Spaltenvektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung

Welcher Typ? Ordne zu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion

Addition

Definition

Zwei Matrizen **gleicher Größe** werden elementweise addiert:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel

Addition

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Subtraktion

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Übung

Berechne $A + B$ und $A - B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Vielfachbildung

„Zahl mal Matrix”

Skalarmultiplikation

Definition

Jedes Element wird mit der Zahl multipliziert:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Übung

Berechne $2A$ und $-3B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

Wann geht das?

Voraussetzung

A ist $m \times n$ und B ist $n \times p$.

Die **Spaltenzahl** von A muss gleich der **Zeilenzahl** von B sein.

Ergebnis: $m \times p$-Matrix

Formel

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Zeile i von A · Spalte k von B

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Achtung: Matrixmultiplikation ist **nicht** kommutativ!

Übung

Berechne AB und BA. Was fällt auf?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Transponieren

Definition

Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten werden vertauscht:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Beispiel

Quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Nicht-quadratische Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aus 2×3 wird 3×2.

Übung

Bestimme C^T.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

Addition

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = A$

Kommutativ, assoziativ, neutrales Element

Skalarmultiplikation

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Matrixmultiplikation

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $AB \neq BA$ (!)

Transponieren

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Bei $(AB)^T$ dreht sich die Reihenfolge um!

Aussprache mathematischer Symbole

Grundlegende Notation

- $A^T \rightarrow$ „A transponiert”
- $A^{-1} \rightarrow$ „A inverse”
- $a_{ij} \rightarrow$ „a i j”
- $a_{23} \rightarrow$ „a zwei drei”

Operationen

- $A + B \rightarrow$ „A plus B”
- $\lambda A \rightarrow$ „Lambda mal A”
- $AB \rightarrow$ „A mal B”
- $(AB)^T \rightarrow$ „A mal B, transponiert”

Spezielle Matrizen

- I oder E $\rightarrow$ „Einheitsmatrix”
- I_n $\rightarrow$ „Einheitsmatrix der Ordnung n”
- O $\rightarrow$ „Nullmatrix”
- $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ $\rightarrow$ „Diagonalmatrix mit Einträgen d eins bis d n”

Klausuraufgaben

FSP-Niveau

Klausuraufgabe 1

Grundoperationen

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $A + B$ und $A - B$. *(4P)*

b) Berechne $3A - 2B$. *(3P)*

c) Bestimme A^T und B^T. *(4P)*

d) Überprüfe: Gilt $(A + B)^T = A^T + B^T$? *(4P)*

Klausuraufgabe 2

Matrixmultiplikation

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Größe von AB und berechne AB. *(6P)*

b) Ist BA definiert? Wenn ja, berechne BA. *(6P)*

c) Berechne $(AB)C$. *(4P)*

d) Berechne $(AB)^T$ und zeige, dass $(AB)^T = B^T A^T$. *(4P)*

Fragen?