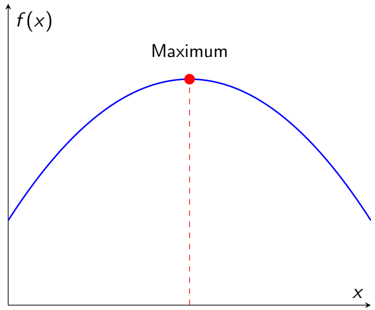
Grenzwerte von Funktionen
Teil 5: Extrempunkte

Motivation: Warum Extrempunkte?

In der Praxis suchen wir oft nach dem „Besten" oder „Schlechtesten":

- Wo ist der höchste Punkt einer Flugbahn?
- Bei welcher Menge ist der Gewinn maximal?
- Wo ist der Materialverbrauch minimal?
- Wann erreicht eine Temperatur ihr Maximum?



Heute: Wie findet man solche Extrempunkte mathematisch?

Definition: Minimalstelle (Tiefpunkt)

Minimalstelle

Ein Punkt x_{min} heißt **Minimalstelle** (oder **lokale Minimalstelle**), wenn gilt:

$$f(x_{\text{min}}) < f(x)$$

für alle x in einer **Umgebung** von x_{min}.

Bezeichnungen:

- $f(x_{\text{min}})$: **Minimum** oder **Minimalwert**
- $(x_{\text{min}}, f(x_{\text{min}}))$: **Tiefpunkt**

In Worten: Der Funktionswert ist an dieser Stelle kleiner als in der Umgebung.

Definition: Maximalstelle (Hochpunkt)

Maximalstelle

Ein Punkt x_{max} heißt **Maximalstelle** (oder **lokale Maximalstelle**), wenn gilt:

$$f(x_{\text{max}}) > f(x)$$

für alle x in einer **Umgebung** von x_{max}.

Bezeichnungen:

- $f(x_{\text{max}})$: **Maximum** oder **Maximalwert**
- $(x_{\text{max}}, f(x_{\text{max}}))$: **Hochpunkt**

In Worten: Der Funktionswert ist an dieser Stelle größer als in der Umgebung.

Wichtige Begriffe

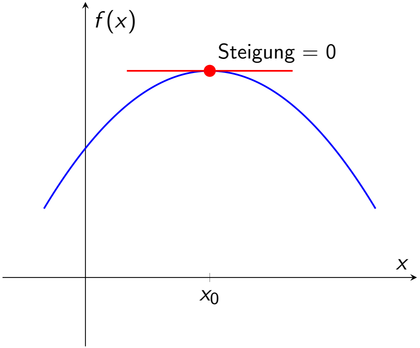
Bezeichnungen

- **Extremstelle**: Die x-Koordinate (x_{min} oder x_{max})
- **Extremwert**: Der Funktionswert ($f(x_{\text{min}})$ oder $f(x_{\text{max}})$)
- **Extrempunkt**: Der Punkt im Koordinatensystem $(x, f(x))$

Zusammenfassend: Maximal- und Minimalstellen heißen **Extremstellen**.

Die notwendige Bedingung

Beobachtung: An einem Extrempunkt ist die Tangente **waagerecht**!



Achtung: Nur notwendig, nicht hinreichend!

Wichtig!

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist nur **notwendig**!

Das bedeutet:

- Wenn Extremum vorliegt $\Rightarrow$ dann $f'(x_0) = 0$
- Aber: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ nicht zwingend Extremum!

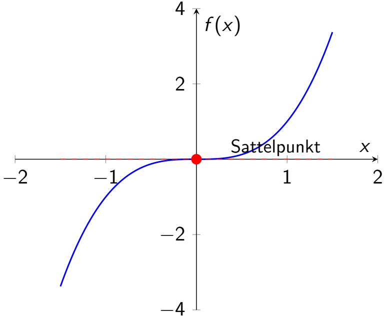
Problem: Es könnte auch ein **Sattelpunkt** sein!

Beispiel: $f(x) = x^3$ hat bei $x = 0$ zwar $f'(0) = 0$, aber **keinen** Extrempunkt!

Beispiel: Sattelpunkt

Funktion: $f(x) = x^3$

Erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2$
Nullstelle: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



Beobachtung:

- Tangente ist waagerecht
- Aber: Kein Extremum!
- Die Funktion steigt weiter

Fazit: Wir brauchen eine **hinreichende** Bedingung!

Die zweite Ableitung

Definition

Die **zweite Ableitung** $f''(x)$ ist die Ableitung der ersten Ableitung:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

Sprechweise: „f Strich Strich von x"

Beispiel: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte

Die hinreichende Bedingung

Sei x_0 eine Stelle mit $f'(x_0) = 0$.

Fall 1: Tiefpunkt (Minimum)

$$\text{Wenn } f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales } \textbf{Minimum}$$

Fall 2: Hochpunkt (Maximum)

$$\text{Wenn } f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales } \textbf{Maximum}$$

Fall 3: Unentschieden

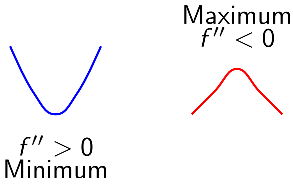
$$\text{Wenn } f''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Aussage möglich}$$

Merkregel für die zweite Ableitung

Eselsbrücke

- $f''(x_0) > 0$ (positiv): Graph ist nach **oben** gekrümmt
  $\Rightarrow$ **Tiefpunkt** (Minimum)

- $f''(x_0) < 0$ (negativ): Graph ist nach **unten** gekrümmt
  $\Rightarrow$ **Hochpunkt** (Maximum)



Systematisches Vorgehen – Schritt für Schritt

Extrempunkte bestimmen

Schritt 1: Erste Ableitung $f'(x)$ berechnen

Schritt 2: Notwendige Bedingung: Löse $f'(x) = 0$

- Lösungen sind mögliche Extremstellen

Schritt 3: Zweite Ableitung $f''(x)$ berechnen

Schritt 4: Hinreichende Bedingung: Für jede Lösung x_0:

- $f''(x_0) > 0$: Tiefpunkt
- $f''(x_0) < 0$: Hochpunkt

Schritt 5: Extremwerte: $f(x_0)$ berechnen
Schritt 6: Extrempunkte angeben: $(x_0, f(x_0))$

Beispiel 1: Polynom 3. Grades

Aufgabe: Bestimme alle Extrempunkte von $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Schritt 1: Erste Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Schritt 2: Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Mögliche Extremstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

Beispiel 1: Polynom 3. Grades (Fortsetzung)

Schritt 3: Zweite Ableitung

$$f''(x) = 6x$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung
Für $x_1 = 1$:

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Tiefpunkt}$$

Für $x_2 = -1$:

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Hochpunkt}$$

Schritt 5 + 6: Extrempunkte

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T(1, 0)$$
$$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad H(-1, 4)$$

ÜBUNG: Polynom 3. Grades

Bestimme alle Extrempunkte:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

Tipp: Folge den 6 Schritten systematisch!

Beispiel 2: Polynom 4. Grades

Aufgabe: Bestimme alle Extrempunkte von $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

Schritt 1 + 2: Erste Ableitung und Nullstellen

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}$$

Schritt 3: Zweite Ableitung

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

Beispiel 2: Polynom 4. Grades (Fortsetzung)

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f''(0) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Hochpunkt}$$
$$f''(\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 8 = 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Tiefpunkt}$$
$$f''(-\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Tiefpunkt}$$

Schritt 5 + 6: Extrempunkte

$$f(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad H(0, 3)$$
$$f(\sqrt{2}) = 4 - 8 + 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad T_1(\sqrt{2}, -1)$$
$$f(-\sqrt{2}) = -1 \quad \Rightarrow \quad T_2(-\sqrt{2}, -1)$$

ÜBUNG: Polynom 4. Grades

Bestimme alle Extrempunkte:

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Beispiel 3: Exponentialfunktion

Aufgabe: Bestimme alle Extrempunkte von $f(x) = x^2 e^{-x}$

Schritt 1: Erste Ableitung (Produktregel!)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(2x - x^2) \\ &= xe^{-x}(2 - x) \end{aligned}$$

Schritt 2: Nullstellen

$$xe^{-x}(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

(Da $e^{-x} > 0$ für alle x)

Beispiel 3: Exponentialfunktion (Fortsetzung)

Schritt 3: Zweite Ableitung

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f''(0) = e^0 \cdot 2 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Tiefpunkt}$$
$$f''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Hochpunkt}$$

Schritt 5 + 6: Extrempunkte

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(0, 0)$$
$$f(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54 \quad \Rightarrow \quad H(2, 4e^{-2})$$

ÜBUNG: Exponentialfunktionen

Bestimme alle Extrempunkte:

a) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

c) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

Tipp: Vergiss die Produktregel nicht!

Beispiel 4: Trigonometrische Funktion

Aufgabe: Extrempunkte von $f(x) = \sin x + \cos x$ in $[0, 2\pi]$

Schritt 1 + 2: Erste Ableitung und Nullstellen

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$
$$\cos x = \sin x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1$$
$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Schritt 3 + 4: Zweite Ableitung und Bedingung

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$
$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Hochpunkt}$$
$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Tiefpunkt}$$

ÜBUNG: Trigonometrische Funktionen

Bestimme alle Extrempunkte im Intervall $[0, 2\pi]$**:**

a) $f(x) = 2\sin x - x$

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$

Der Fall $f''(x_0) = 0$

Was passiert, wenn die zweite Ableitung null ist?

Problem

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, liefert die zweite Ableitung **keine Aussage**.

Mögliche Lösungen:

- Höhere Ableitungen untersuchen ($f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$, ...)
- Vorzeichen von $f'(x)$ links und rechts von x_0 prüfen

Beispiel: $f(x) = x^4$ bei $x = 0$
$f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, aber $f^{(4)}(0) = 24 > 0 \Rightarrow$ Minimum

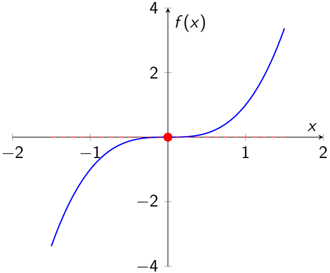
Sattelpunkte erkennen

Sattelpunkt: Stelle mit waagerechter Tangente, aber **kein** Extremum

Beispiel: $f(x) = x^3$

- $f'(0) = 0$
- $f''(0) = 0$
- $f'''(0) = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt (Wendepunkt)



Merke: $f'(x_0) = 0$ bedeutet **nicht** automatisch Extremum!

Regeln: Extremum oder Sattelpunkt?

Wenn $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) = 0$**:**

Untersuchung mit höheren Ableitungen

Bestimme die niedrigste Ableitung $f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

Fall 1: n **ist gerade** (z.B. $f^{(4)}(x_0) \neq 0$)

- Wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$: **Minimum**
- Wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$: **Maximum**

Fall 2: n **ist ungerade** (z.B. $f^{(3)}(x_0) \neq 0$)

- **Kein Extremum**, sondern **Sattelpunkt** (Wendepunkt)

Zusammenfassung: Extrempunkte bestimmen

Notwendige Bedingung

$$f'(x_0) = 0$$

Liefert mögliche Extremstellen (aber nicht alle sind Extrema!)

Hinreichende Bedingung

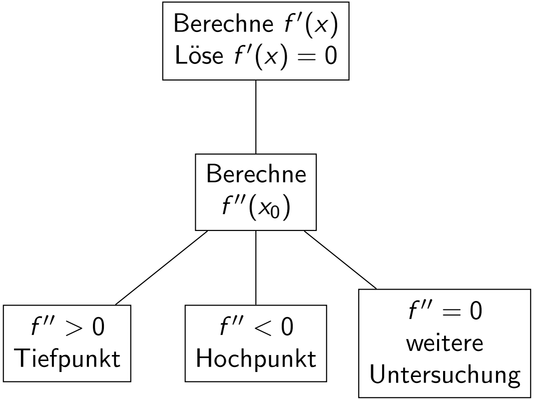
- $f''(x_0) > 0$: **Tiefpunkt** (Minimum)
- $f''(x_0) < 0$: **Hochpunkt** (Maximum)
- $f''(x_0) = 0$: Weitere Untersuchung nötig

Besonderheit

Aus $f'(x_0) = 0$ folgt **nicht** immer Extrempunkt!
Es könnte ein **Sattelpunkt** sein.

Entscheidungsbaum

Extrempunkte bestimmen – Wie gehe ich vor?



Wichtige Begriffe – Überblick

Begriffe

- **Extremstelle**: x-Koordinate
- **Extremwert**: $f(x)$-Wert
- **Extrempunkt**: Punkt $(x, f(x))$
- **Maximum/Hochpunkt**: Größter Wert
- **Minimum/Tiefpunkt**: Kleinster Wert
- **Lokal**: Nur in Umgebung extrem
- **Global**: Im ganzen Bereich extrem
- **Notwendige Bedingung**: Muss erfüllt sein
- **Hinreichende Bedingung**: Reicht zum Nachweis
- **Zweite Ableitung**: $f''(x)$ („f Strich Strich")

Hausaufgaben – Aufgabe 1

Bestimme alle Extrempunkte:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 5$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

Hausaufgaben – Aufgabe 2

Bestimme alle Extrempunkte:

a) $f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$

b) $f(x) = x^2 \ln x$ für $x > 0$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Hausaufgaben – Aufgabe 3

Bestimme alle Extrempunkte im Intervall $[0, 2\pi]$**:**

a) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos x$

b) $f(x) = x - 2\sin x$

Hausaufgaben – Klausuraufgabe

Aufgabe 4 (Klausurstil):
Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

a) Bestimme alle Extrempunkte der Funktion.

b) Entscheide, welche der Extrempunkte lokale und welche globale Extrema sind.

c) Skizziere den Graphen von f und markiere die Extrempunkte.

d) Warum ist $f'(-1) = 0$, aber bei $x = -1$ liegt kein Extremum vor? (Diese Frage bezieht sich auf eine andere Funktion als Beispiel!)