Mathematik Studienkolleg

Prüfungsvorbereitung
T-Kurs

Studienkolleg Rahn Education Leipzig
2026

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vektorrechnung und Analytische Geometrie

1

Vektorrechnung – Grundlagen

1.1 Koordinatensystem und Grundlagen

1.1.1 Rechtshändiges xyz-Koordinatensystem

In der analytischen Geometrie arbeiten wir mit einem dreidimensionalen rechtshändigen Koordinatensystem. Die Orientierung ist dabei wie folgt festgelegt:

Orientierung des Koordinatensystems

- **x-Achse:** von hinten nach vorn
- **y-Achse:** von links nach rechts
- **z-Achse:** von unten nach oben
- **Koordinatenursprung:** $O(0|0|0)$

1.1.2 Koordinatenebenen und Zeichenregeln

Das dreidimensionale Koordinatensystem wird durch drei Koordinatenebenen aufgespannt:

Koordinatenebenen

- **xy-Ebene:** $z = 0$
- **yz-Ebene:** $x = 0$
- **xz-Ebene:** $y = 0$

Beim Zeichnen auf kariertem Papier gelten folgende Konventionen:

- 1 LE = 1 cm in y- und z-Richtung
- 1 LE = ein Diagonalkästchen in x-Richtung

1.2 Skalare und vektorielle Größen

1.2.1 Skalare Größen

Skalar

Eine **skalare Größe** wird vollständig durch einen Zahlenwert (und eine Einheit) beschrieben.

Beispiele für skalare Größen:

- Temperatur: 25°C
- Masse: 2,5 kg
- Zeit: 10 s
- Energie: 100 J
- Volumen: 5 L

Eigenschaften skalarer Größen:

- Nur der Betrag ist wichtig
- Keine Richtung vorhanden
- Einfache Addition möglich: $2\text{ kg} + 3\text{ kg} = 5\text{ kg}$

1.2.2 Vektorielle Größen

Im Gegensatz zu skalaren Größen benötigen vektorielle Größen zusätzliche Informationen:

Vektor

Eine **vektorielle Größe** $\vec{a}$ benötigt zur vollständigen Beschreibung:

- einen **Betrag** (Länge): $|\vec{a}|$
- eine **Richtung** (Orientierung im Raum)
- einen **Richtungssinn** (wohin zeigt der Vektor?)

Beispiele für vektorielle Größen:

- Geschwindigkeit $\vec{v}$
- Kraft $\vec{F}$
- Beschleunigung $\vec{a}$
- Weg/Verschiebung $\vec{s}$

Darstellung: Vektoren werden als Pfeile dargestellt, wobei:

- die Pfeillänge den Betrag repräsentiert
- die Pfeilrichtung die Richtung angibt

1.2.3 Der Nullvektor

Nullvektor

Der **Nullvektor** $\vec{0}$ ist ein besonderer Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- Hat den Betrag $|\vec{0}| = 0$
- Hat **keine definierte Richtung**
- Entspricht: keine Bewegung, keine Kraft, keine Verschiebung

Wichtig

Der Nullvektor ist der **einzige** Vektor ohne Richtung!

1.3 Koordinatendarstellung von Vektoren

1.3.1 Komponentendarstellung

Koordinatendarstellung

Ein Vektor kann durch seine Komponenten dargestellt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

wobei $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ die Basisvektoren sind.

Wozu braucht man das?

- Eindeutige mathematische Beschreibung von Vektoren
- Ermöglicht Berechnungen (Addition, Multiplikation, etc.)
- Konkrete Darstellung von physikalischen Größen (Kraft, Geschwindigkeit, etc.)

Koordinatendarstellung

Ein Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bedeutet: 5 m/s nach rechts, 2 m/s nach oben, 1 m/s nach unten.

1.4 Betrag eines Vektors

Betrag eines Vektors

Der Betrag gibt die **Länge** eines Vektors an:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Wozu braucht man das?

- Bestimmung der Stärke einer physikalischen Größe (z.B. Geschwindigkeit, Kraft)
- Berechnung von Abständen zwischen Punkten
- Normierung von Vektoren
- Überprüfung, ob ein Vektor die gewünschte Länge hat

Geschwindigkeit berechnen

Ein Auto fährt mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wie schnell ist das Auto insgesamt?

$$|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3600 + 6400} = \sqrt{10000} = 100 \, \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1.5 Einheitsvektoren

Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor hat die Länge 1 und zeigt in dieselbe Richtung wie der ursprüngliche Vektor:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Wozu braucht man das?

- Angabe einer Richtung unabhängig von der Länge
- Zerlegung von Vektoren: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \hat{a}$ (Betrag $\times$ Richtung)
- Vereinfachung von Berechnungen
- Definition von Koordinatensystemen (Basisvektoren sind Einheitsvektoren)

Einheitsvektor berechnen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Betrag berechnen

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Schritt 2: Einheitsvektor berechnen

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.6 Basisvektoren

Basisvektoren

Die Basisvektoren sind Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wozu braucht man das?

- Definition des Koordinatensystems
- Jeder Vektor lässt sich als Linearkombination darstellen
- Vereinfachung der Notation in physikalischen Formeln
- Basis für Vektorzerlegung

Darstellung mit Basisvektoren

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ lässt sich schreiben als:

$$\vec{a} = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$$

Ausgeschrieben:

$$\vec{a} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.7 Gegenvektor

Gegenvektor

Der Gegenvektor hat die umgekehrten Komponenten:

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor hat den gleichen Betrag, aber entgegengesetzten Richtungssinn.

Wozu braucht man das?

- Darstellung entgegengesetzter physikalischer Größen (z.B. Kraft und Gegenkraft)
- Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- Rückwärtsbewegungen oder umgekehrte Richtungen
- Der Gegenvektor hebt den ursprünglichen Vektor auf: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Gegenvektor

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gegenvektor: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Überprüfung:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

1.8 Vektoroperationen

1.8.1 Addition von Vektoren

Vektoraddition

Vektoren werden komponentenweise addiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Wozu braucht man das?

- Überlagerung von physikalischen Größen (z.B. mehrere Kräfte, Geschwindigkeiten)
- Beschreibung von zusammengesetzten Bewegungen
- Berechnung von Gesamtverschiebungen
- Geometrisch: Aneinanderhängen von Wegstrecken

Vektoraddition – Rechnerisch und grafisch

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Rechnung:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ 1 + 3 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Grafische Darstellung: Pfeilspitzenverfahren (Kopf-an-Schwanz-Methode)

1.8.2 Subtraktion von Vektoren

Vektorsubtraktion

Vektoren werden komponentenweise subtrahiert:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Wozu braucht man das?

- Berechnung von Differenzen physikalischer Größen (z.B. Geschwindigkeitsänderung)
- Bestimmung von Verbindungsvektoren zwischen zwei Punkten

- Berechnung relativer Bewegungen (z.B. Relativgeschwindigkeit)
- Änderungen und Unterschiede quantifizieren

Vektorsubtraktion

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Direkte Subtraktion:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-4 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alternativ mit Gegenvektor:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.8.3 Vielfachbildung (Skalarmultiplikation)

Skalarmultiplikation

Für $k \in \mathbb{R}$:

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl (Skalar) multipliziert.

Geometrische Bedeutung:

- $k > 1$: Vektor wird gestreckt (länger)
- $0 < k < 1$: Vektor wird gestaucht (kürzer)
- $k < 0$: Richtungsumkehr und Längenänderung
- $k\vec{a}$ ist immer parallel zu $\vec{a}$

Vielfachbildung

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{(doppelte Länge)}$$

$$0{,}5\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{(halbe Länge)}$$

1.9 Skalarprodukt

1.9.1 Definition und Berechnung

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (= \vec{a}^T \vec{b})$$

Das Skalarprodukt multipliziert zwei Vektoren und ergibt eine Zahl (Skalar).
Grundprinzip: Vektor · Vektor = Zahl (Skalar)

Wozu braucht man das?

- Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren
- Prüfung auf Orthogonalität (rechter Winkel): $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Berechnung von Projektionen (z.B. Komponente einer Kraft in eine Richtung)
- Physikalische Arbeit: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
- Bestimmung, wie stark zwei Vektoren in dieselbe Richtung zeigen

Skalarprodukt berechnen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander (orthogonal)!

1.9.2 Geometrische Bedeutung

Winkelbezug des Skalarprodukts

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.
Umstellung nach dem Winkel:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right)$$

Interpretation:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$: Winkel $\varphi < 90$ř (spitzer Winkel)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$: Winkel $\varphi = 90$ř (rechter Winkel, orthogonal)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$: Winkel $\varphi > 90$ř (stumpfer Winkel)

1.10 Orthogonalität (Rechtwinkligkeit)

Orthogonalität

Zwei Vektoren sind orthogonal (stehen senkrecht aufeinander), wenn:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Warum ist das so?
Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$ folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90ř$$

Wozu braucht man das?

- Schnelle Überprüfung, ob Vektoren senkrecht zueinander stehen
- Konstruktion orthogonaler Koordinatensysteme
- Prüfung geometrischer Eigenschaften (z.B. rechte Winkel in Figuren)
- Wichtig für Projektionen und Zerlegungen

Orthogonale Vektoren

Beispiel 1: Orthogonale Vektoren
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 6 - 6 = 0$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b}$
Beispiel 2: Nicht orthogonale Vektoren
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind nicht orthogonal.

1.11 Winkelberechnung zwischen Vektoren

1.11.1 Vorgehen

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen, geht man wie folgt vor:

Schritt-für-Schritt-Anleitung

Schritt 1: Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ berechnen
Schritt 2: Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ berechnen
Schritt 3: Cosinus des Winkels bestimmen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Schritt 4: Winkel berechnen:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

Winkelberechnung

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 + 0 + 1 = 3$$

Schritt 2: Beträge

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Schritt 3 & 4: Winkel

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \approx 0{,}775$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right) \approx 39{,}2^{\text{ř}}$$

2

Vektorprodukt und Spatprodukt

2.1 Einführung: Das Vektorprodukt

2.1.1 Grundprinzip

Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) ist eine besondere Operation, die nur im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

Grundprinzip des Vektorprodukts

$$\text{Vektor} \times \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Im Gegensatz zum Skalarprodukt: Das Vektorprodukt liefert einen neuen Vektor!
Geometrische Bedeutung:

- Der resultierende Vektor steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren
- Seine Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

2.1.2 Definition

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Das **Vektorprodukt** ist:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Berechnung eines Vektorprodukts

Vektorprodukt berechnen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung:

Erste Komponente: (streiche Zeile 1)

$$a_2b_3 - a_3b_2 = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

Zweite Komponente: (streiche Zeile 2)

$$a_3b_1 - a_1b_3 = (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7$$

Dritte Komponente: (streiche Zeile 3)

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 8 - 1 = 7$$

Ergebnis:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Probe: Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ sollte orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sein:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 1, -3) \cdot (14, -7, 7) = 28 - 7 - 21 = 0 \quad \checkmark$$
$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (1, 4, 2) \cdot (14, -7, 7) = 14 - 28 + 14 = 0 \quad \checkmark$$

2.1.4 Wichtige Eigenschaft: Nicht-Kommutativität

Nicht-Kommutativität

Das Vektorprodukt ist **nicht kommutativ**!
Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Bei Vertauschung der Faktoren ändert sich das Vorzeichen (und damit die Richtung des Ergebnisvektors).

2.2 Parallelität und das Vektorprodukt

2.2.1 Parallelitätskriterium

Parallelitätskriterium

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann parallel (oder einer ist der Nullvektor), wenn gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Beweis: Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Dann gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{a})$$

Für jede Komponente von $\vec{a} \times \vec{a}$ ergibt sich z.B. für die erste Komponente:

$$a_2a_3 - a_3a_2 = 0$$

Also $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. $\square$

Parallelität prüfen

Aufgabe: Prüfen Sie, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ parallel sind.

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} (-1)(-12) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-6) - 2 \cdot (-12) \\ 2 \cdot 3 - (-1)(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12 \\ -24 + 24 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind parallel! (Tatsächlich gilt $\vec{b} = -3\vec{a}$)

2.3 Geometrische Bedeutungen

Das Vektorprodukt verbindet Algebra und Geometrie auf elegante Weise:

Zwei fundamentale Eigenschaften

[1] Orthogonalität:
Das Vektorprodukt steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren
[2] Betrag = Fläche:
Die Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

2.3.1 Orthogonalität

Orthogonalität des Vektorprodukts

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \quad \text{und} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$$

Anschauung: Spannen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Ebene auf, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung der Normalen (Senkrechten) auf dieser Ebene.

2.3.2 Betrag: Die Länge entspricht dem Flächeninhalt

Geometrische Bedeutung des Betrags

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

wobei φ der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ ist.
Folgerung: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Beweis-Idee: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms:

$$A = \text{Grundseite} \times \text{Höhe} = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \sin\varphi)$$

Dies entspricht genau $|\vec{a} \times \vec{b}|$. $\square$

2.4 Flächenberechnungen mit dem Vektorprodukt

2.4.1 Flächeninhalt eines Parallelogramms

Flächeninhalt Parallelogramm

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Flächeninhalt Parallelogramm

Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = 6$$

Der Flächeninhalt beträgt 6 Flächeneinheiten.

2.4.2 Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt Dreieck

Ein Dreieck hat den halben Flächeninhalt des entsprechenden Parallelogramms:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Flächeninhalt Dreieck

Gegeben: Drei Punkte $A(1,0,0)$, $B(4,2,0)$ und $C(2,3,0)$.
Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
Lösung: Bestimme zwei Seitenvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5$$

2.5 Das Spatprodukt

2.5.1 Geometrische Motivation: Der Spat

Was ist ein Spat?

Ein **Spat** (auch **Parallelepiped** genannt) ist ein dreidimensionaler Körper, der von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.
Stellen Sie sich einen ßchiefen Quader"vor:

- Alle gegenüberliegenden Flächen sind parallel
- Die Winkel müssen nicht rechtwinklig sein
- Der Spat wird von drei Vektoren aufgespannt, die von einem gemeinsamen Punkt ausgehen

2.5.2 Definition des Spatprodukts

Spatprodukt / Gemischtes Produkt

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ drei Vektoren. Das **Spatprodukt** ist definiert als:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Das Spatprodukt ist eine **Zahl** (Skalar).
Alternative Darstellung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.5.3 Berechnung des Spatprodukts

Rechenweg

Methode 1:

1. Berechne zunächst das Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$
2. Bilde dann das Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit dem Ergebnis

Methode 2:

- Berechne die Determinante der 3×3-Matrix direkt nach der Regel von Sarrus

Spatprodukt berechnen (Methode 1)

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Zunächst $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Dann das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= (1, 2, 3) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= -1 + 2 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Spatprodukt berechnen (Methode 2 – Determinante)

Lösung (Methode 2):

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nach der Regel von Sarrus (Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0 - 1) + 3 \cdot (2 - 0) \\ &= -1 + 2 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Das Spatprodukt beträgt 7.

2.5.4 Eigenschaften des Spatprodukts

Eigenschaften

1. Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

2. Vorzeichenwechsel bei Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

3. Komplanarität:
Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind genau dann komplanar (liegen in einer Ebene), wenn

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

2.6 Volumenberechnungen mit dem Spatprodukt

2.6.1 Volumen eines Spats

Volumen eines Parallelepipeds

Ein Parallelepiped ist ein vierseitiges schiefes Prisma, bei dem alle Seitenflächen Parallelogramme sind.
Das Volumen beträgt:

$$V_{\text{Spat}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Volumen eines Spats

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des Spats, der von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.
Lösung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6 - 0) = 12$$

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 12$$

Das Volumen beträgt 12 Volumeneinheiten.

2.6.2 Volumenformeln mit Spatprodukt

Übersicht

Vierseitiges schiefes Prisma (Spat):

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Dreiseitiges schiefes Prisma:

$$V = \frac{1}{2}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Vierseitige schiefe Pyramide:

$$V = \frac{1}{3}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Dreiseitige schiefe Pyramide (Tetraeder):

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Herleitung der Volumenformeln:

- **Dreiseitiges Prisma:** Grundfläche ist ein Dreieck (halbes Parallelogramm), daher Faktor $\frac{1}{2}$
- **Vierseitige Pyramide:** Volumen einer Pyramide $= \frac{1}{3}$ des Volumens eines Prismas, daher Faktor $\frac{1}{3}$
- **Dreiseitige Pyramide (Tetraeder):** Kombination: $\frac{1}{2}$ für Dreiecksgrundfläche und $\frac{1}{3}$ für Pyramide, daher Faktor $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Volumen einer Pyramide

Gegeben: Vier Punkte $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(0,4,0)$ und $D(0,0,5)$.
Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCD$.
Lösung: Die Vektoren von A zu den anderen Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Das Spatprodukt:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Das Volumen der dreiseitigen Pyramide (Tetraeder):

$$V = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$$

Das Volumen beträgt 10 Volumeneinheiten.

2.7 Punkte und Vektoren

2.7.1 Vom Punkt zum Vektor: Der Ortsvektor

In der analytischen Geometrie verschmelzen zwei Konzepte zu einer eleganten Einheit:

- Punkte im Raum
- Vektoren

Diese Verbindung ermöglicht es uns:

- Geometrische Probleme rechnerisch zu lösen
- Algebraische Ausdrücke geometrisch zu interpretieren

Ortsvektor

Sei O der Ursprung des Koordinatensystems und A ein Punkt im Raum mit den Koordinaten $A(a_1, a_2, a_3)$. Der **Ortsvektor** von A ist der Vektor, der vom Ursprung O zum Punkt A zeigt:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Konvention: Oft schreibt man einfach $\vec{a}$ statt $\overrightarrow{OA}$ und identifiziert den Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ mit seinem Ortsvektor.

Ortsvektor

Gegeben: Der Punkt $A(2, -3, 5)$

Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.7.2 Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten

Verbindungsvektor

Seien $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ zwei Punkte. Der Vektor von A nach B ist:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Merksatz: SSpitze minus Schaft"
Der Verbindungsvektor zeigt vom ersten zum zweiten Punkt.

Verbindungsvektor

Aufgabe: Bestimmen Sie den Vektor von $A(1, 2, -1)$ nach $B(4, 0, 3)$.
Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.7.3 Punkt aus Anfangspunkt und Vektor berechnen

Punkt berechnen

Gegeben seien ein Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ und ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Der Punkt B, der erreicht wird, wenn man von A aus den Vektor $\vec{v}$ abträgt, hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$$

beziehungsweise in Koordinaten:

$$B = A + \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 + v_1 \\ a_2 + v_2 \\ a_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

Punkt berechnen

Aufgabe: Von Punkt $A(2, 1, 0)$ aus wird der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ abgetragen. Bestimmen Sie Punkt B.

Lösung:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(5, -1, 5)$.

2.7.4 Die Mittelpunktformel

Mittelpunkt einer Strecke

Der Mittelpunkt M der Strecke zwischen den Punkten A und B hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

In Koordinaten:

$$M = \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \\ \frac{a_3+b_3}{2} \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation: Der Mittelpunkt liegt genau in der Mitte zwischen A und B – man bildet das arithmetische Mittel der Koordinaten.

Mittelpunkt berechnen

Aufgabe: Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(1, 3, -2)$ und $B(5, -1, 4)$.
Lösung:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt ist $M(3, 1, 1)$.

2.7.5 Verallgemeinerung: Schwerpunkt eines Dreiecks

Schwerpunkt

Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

2.8 Anwendungen: Nachweis besonderer Vierecke

2.8.1 Nachweis eines Parallelogramms

Parallelogramm nachweisen

Gegeben: Vier Punkte $A(1, 2, 0)$, $B(4, 3, 1)$, $C(5, 6, 2)$ und $D(2, 5, 1)$.
Aufgabe: Zeigen Sie, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.
Lösung: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten

parallel und gleich lang sind, d.h. wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Berechnung der Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-5 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, sind die Seiten AB und DC parallel und gleich lang.
Prüfung der anderen Seiten:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 6-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da auch $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ist $ABCD$ ein Parallelogramm. ✓

2.8.2 Nachweis eines Rhombus

Rhombus nachweisen

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(3,3,0)$ und $D(1,2,0)$ einen Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm) bilden.
Lösung: Ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit allen Seiten gleich lang. Wir prüfen zunächst die Parallelogramm-Eigenschaft:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Nun prüfen wir, ob alle Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Da alle Seiten die Länge $\sqrt{5}$ haben, ist $ABCD$ ein Rhombus. ✓

2.8.3 Nachweis eines Rechtecks

Rechteck nachweisen

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(3,4,0)$ und $D(0,4,0)$ ein Rechteck bilden.
Lösung: Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel (dann sind automatisch alle Winkel rechte Winkel).
Die Parallelogramm-Eigenschaft prüft man über $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prüfung der Orthogonalität (rechter Winkel):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt null ist, stehen die Seiten senkrecht aufeinander.
$ABCD$ ist ein Rechteck. ✓

2.8.4 Nachweis eines Quadrats

Quadrat nachweisen

Aufgabe: Prüfen Sie, ob die Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$ und $D(0, 2, 0)$ ein Quadrat bilden.
Lösung: Ein Quadrat ist ein Rechteck mit allen Seiten gleich lang.
Aus dem vorherigen Beispiel wissen wir bereits, wie man ein Rechteck nachweist. Wir prüfen zusätzlich:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4} = 2, \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4} = 2$$

Alle Seiten haben die Länge 2, und die Seiten stehen orthogonal aufeinander (wie bei einem Rechteck).
$ABCD$ ist ein Quadrat. ✓

2.8.5 Gleichschenkliges Dreieck

Gleichschenkliges Dreieck

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ und $C(2, 2, 0)$ gleichschenklig ist.
Lösung: Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

Da $|AB| = |AC| = \sqrt{5}$, ist das Dreieck gleichschenklig mit Basis BC. ✓

2.9 Zusammenfassung

2.9.1 Vektorprodukt

Zusammenfassung Vektorprodukt

Definition:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Parallelität: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
Geometrie:

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Flächeninhalt Parallelogramm

Anwendungen:

- Flächeninhalt Parallelogramm: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
- Flächeninhalt Dreieck: $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

2.9.2 Spatprodukt

Zusammenfassung Spatprodukt

Definition: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
Volumenformeln:

- Spat: $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 3-seitiges Prisma: $V = \frac{1}{2}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 4-seitige Pyramide: $V = \frac{1}{3}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 3-seitige Pyramide: $V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

3

Geraden und Ebenen im Raum

3.1 Einführung

In diesem Kapitel erweitern wir unsere Kenntnisse der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie im dreidimensionalen Raum. Wir lernen, wie man Geraden und Ebenen mathematisch beschreibt und ihre gegenseitigen Lagebeziehungen untersucht.

Was lernen wir heute?

- **3.4 Geraden im $\mathbb{R}^3$** – Parameterdarstellung
- **3.5 Ebenen im $\mathbb{R}^3$** – Parameter- und Koordinatenform
- **3.6 Lagebeziehungen** – Gerade $\leftrightarrow$ Gerade, Gerade $\leftrightarrow$ Ebene

3.2 Geraden im $\mathbb{R}^3$

3.2.1 Ausgangspunkt: Geraden in der Ebene

Aus der ebenen Geometrie kennen wir bereits verschiedene Darstellungen von Geraden:

Geradengleichungen in der Ebene

In der Ebene kennen wir verschiedene Geradengleichungen:

- **Explizite Form:** $y = mx + b$
- **Normalform:** $ax + by = c$
- **Parameterform:** $(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (v_1, v_2)$

Vorteil der Parameterform

Die Parameterform lässt sich direkt auf den $\mathbb{R}^3$ übertragen!

3.2.2 Parametergleichung einer Geraden

Parametergleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Eine Gerade g im $\mathbb{R}^3$ wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Bezeichnungen:

- $\vec{a}$ = **Ortsvektor / Stützvektor** (fester Punkt auf g)
- $\vec{v}$ = **Richtungsvektor** (gibt die Richtung an, $\vec{v} \neq \vec{0}$)
- t = **Parameter** (durchläuft alle reellen Zahlen)

Geometrische Interpretation: Startpunkt A + Vielfaches der Richtung

3.2.3 Geradengleichungen aufstellen

Fall 1: Punkt + Richtungsvektor gegeben

Direkt einsetzen: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$

Fall 2: Zwei Punkte A und B gegeben

Richtungsvektor: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
Geradengleichung: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Wichtig

Wichtig: Die Darstellung ist nicht eindeutig!

Gerade durch zwei Punkte

Aufgabe: Bestimmen Sie die Gerade durch $A(1|2|3)$ und $B(4|0|7)$.
Lösung:
Richtungsvektor:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.3 Ebenen im $\mathbb{R}^3$

3.3.1 Charakterisierung

Charakterisierung

Eine Ebene ist **zweidimensional** $\rightarrow$ benötigt 2 Parameter!

Zwei wichtige Darstellungen

- **Parameterform:** Aufspannen durch zwei Richtungen
- **Koordinatenform:** Beschreibung durch Normalenvektor

3.3.2 Parametergleichung einer Ebene

Parametergleichung einer Ebene

Eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Bezeichnungen:

- $\vec{a}$ = **Ortsvektor / Stützvektor**
- $\vec{u}, \vec{v}$ = **Richtungsvektoren / Spannvektoren**
- s, t = **Parameter**

Bedingung

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ dürfen nicht parallel sein!

3.3.3 Der Normalenvektor

Normalenvektor

Ein Vektor $\vec{n}$ heißt **Normalenvektor** einer Ebene E, wenn er senkrecht auf der Ebene steht.
Berechnung:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad \text{(Kreuzprodukt)}$$

Geometrische Vorstellung: Der Normalenvektor zeigt wie ein Pfeil senkrecht von der Ebene weg – wie eine Antenne auf einer Tischplatte!

3.3.4 Koordinatengleichung (parameterfreie Form)

Koordinatengleichung

Mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ und einem Punkt A:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d$$

oder ausgeschrieben:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$$

wobei $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$

Vorteil: Kompakte Darstellung ohne Parameter!

3.3.5 Umwandlung der Darstellungsformen

Parameter → Koordinatenform

1. Berechne $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. Berechne $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$
3. Stelle auf: $n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$

Koordinaten → Parameterform

1. Lies $\vec{n}$ ab
2. Finde einen Punkt auf der Ebene
3. Finde zwei Vektoren $\perp$ zu $\vec{n}$

Parameter → Koordinatenform

Gegeben:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
1. Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Berechnung von d: $d = \vec{n} \cdot \vec{a} = -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -4$
3. Koordinatengleichung: $-2x - y + 2z = -4$ oder $2x + y - 2z = 4$

3.3.6 Ebenengleichungen aufstellen

Variante 1: Drei Punkte

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

$$E : \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Variante 2: Punkt + Normalenvektor

$$E : \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

Variante 3: Gerade + Punkt außerhalb

Gerade liefert Stützvektor und einen Richtungsvektor

3.4 Lagebeziehungen

3.4.1 Übersicht

Lagebeziehungen – Übersicht

Objekte	Mögliche Lagen
Gerade $\leftrightarrow$ Gerade	identisch, parallel, schneidend, windschief
Gerade $\leftrightarrow$ Ebene	schneidend, parallel, in Ebene

Besonderheit

Windschiefe Geraden gibt es nur im $\mathbb{R}^3$!

3.4.2 Lagebeziehung: Gerade $\leftrightarrow$ Gerade

Entscheidungsbaum

Schritt 1: Sind die Richtungsvektoren parallel?

- **JA:** Liegt ein Punkt der einen Geraden auf der anderen?
  - **JA** $\rightarrow$ identisch
  - **NEIN** $\rightarrow$ echt parallel
- **NEIN:** Gleichsetzen $\rightarrow$ LGS lösen
  - Lösung existiert $\rightarrow$ schneidend
  - Keine Lösung $\rightarrow$ windschief

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (1/4)

Gegeben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.
Vorbereitung:

Richtungsvektoren prüfen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind nicht parallel

$\rightarrow$ Geraden sind nicht parallel
$\rightarrow$ Mögliche Lagen: schneidend oder windschief

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (2/4)

Gleichungssystem aufstellen
Gleichsetzen von g und h:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Komponentenweise:

$$\begin{aligned}
\text{I:} &\quad 1 + 2r = 3 + s \\
\text{II:} &\quad 2 + r = 1 - s \\
\text{III:} &\quad 3 - r = 4 + 2s
\end{aligned}$$

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (3/4)

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\frac{1}{2}\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\frac{1}{2}\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array}\right)$$

Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (4/4)

Gauß-Elimination (Fortsetzung):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\frac{5}{3}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Interpretation:

- Letzte Zeile: $0 \cdot r + 0 \cdot s = -\frac{4}{3}$
- $\rightarrow$ Widerspruch! ($0 \neq -\frac{4}{3}$)
- Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**

Ergebnis: Die Geraden g und h sind **windschief**.

3.4.3 Schnittwinkel zweier Geraden

Schnittwinkel zweier Geraden

Für schneidende Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Orthogonale Geraden

Geraden schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

3.4.4 Lagebeziehung: Gerade ↔ Ebene

Lagebeziehung: Gerade ↔ Ebene

Gegeben: $g : \vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{v}$ und $E : \vec{n}\cdot\vec{x} = d$
Entscheidungskriterium: $\vec{n}\cdot\vec{v}$
Fall 1: $\vec{n}\cdot\vec{v} \neq 0$

- $\to$ Gerade schneidet Ebene (Durchstoßpunkt)

Fall 2: $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ und $d - \vec{n}\cdot\vec{a} \neq 0$

- $\to$ Gerade parallel zur Ebene

Fall 3: $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ und $d - \vec{n}\cdot\vec{a} = 0$

- $\to$ Gerade liegt in der Ebene

Gerade und Ebene (1/5)

Gegeben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad E : 3x + 2y + z = 9$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E.
Mögliche Lagen:

- Gerade liegt in der Ebene
- Gerade ist parallel zur Ebene (liegt nicht in ihr)
- Gerade schneidet die Ebene (in einem Punkt)

Gerade und Ebene (2/5)

Schritt 1: Normalenvektor bestimmen

Aus der Koordinatenform $E : 3x + 2y + z = 9$ lesen wir den Normalenvektor ab:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene. Wenn $\vec{n} \perp \vec{v}$, dann ist die Gerade parallel zur Ebene oder liegt in ihr.

Gerade und Ebene (3/5)

Schritt 3: Skalarprodukt berechnen

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ &= 6 + 2 - 1 \\ &= 7 \neq 0\end{aligned}$$

Interpretation:

- Da $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$, sind $\vec{n}$ und $\vec{v}$ nicht orthogonal
- $\rightarrow$ Die Gerade ist nicht parallel zur Ebene
- $\rightarrow$ Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt

Gerade und Ebene (4/5)

Schritt 4: Durchstoßpunkt berechnen
Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 0 + t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

In $E : 3x + 2y + z = 9$ einsetzen:

$$\begin{aligned}3(1 + 2t) + 2(0 + t) + (2 - t) &= 9 \\ 3 + 6t + 0 + 2t + 2 - t &= 9 \\ 5 + 7t &= 9 \\ 7t &= 4 \\ t &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

Gerade und Ebene (5/5)

Schritt 5: Koordinaten des Durchstoßpunkts
Parameter $t = \frac{4}{7}$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{8}{7}\\0+\frac{4}{7}\\2-\frac{4}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{15}{7}\\\frac{4}{7}\\\frac{10}{7}\end{pmatrix}$$

Ergebnis: Die Gerade g schneidet die Ebene E im Durchstoßpunkt $D\left(\frac{15}{7}\middle|\frac{4}{7}\middle|\frac{10}{7}\right)$.

Gerade liegt in Ebene (1/5)

Gegeben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad E : x + y - 2z = 1$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E.
Strategie:

1. Prüfen, ob Richtungsvektor orthogonal zum Normalenvektor ist
2. Falls ja: Prüfen, ob ein Punkt der Geraden in der Ebene liegt

Gerade liegt in Ebene (2/5)

Schritt 1: Normalenvektor bestimmen
Aus der Koordinatenform $E : x + y - 2z = 1$ erhalten wir:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Gerade liegt in Ebene (3/5)

Schritt 3: Skalarprodukt berechnen

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{v} &= \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot 1+1\cdot(-1)+(-2)\cdot 1\\ &= 1-1-2\\ &= 0\end{aligned}$$

Interpretation:

- Da $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$, sind $\vec{n}$ und $\vec{v}$ orthogonal
- $\rightarrow$ Die Gerade ist parallel zur Ebene oder liegt in ihr
- $\rightarrow$ Weitere Prüfung notwendig!

Gerade liegt in Ebene (4/5)

Schritt 4: Stützpunkt der Geraden prüfen
Liegt der Stützpunkt $P(1|2|1)$ der Geraden in der Ebene E?
Einsetzen in die Ebenengleichung $E: x+y-2z=1$:

$$\begin{aligned}1+2-2\cdot 1 &\stackrel{?}{=} 1\\ 1+2-2 &\stackrel{?}{=} 1\\ 1 &= 1 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Interpretation:

- Der Stützpunkt liegt in der Ebene
- Die Gerade ist parallel zur Ebene (wegen $\vec{n}\perp\vec{v}$)
- $\rightarrow$ Die Gerade liegt **vollständig in der Ebene**

Gerade liegt in Ebene (5/5)

Ergebnis: Die Gerade g liegt vollständig in der Ebene E.
Begründung:

1. $\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow$ Gerade ist parallel zur Ebene
2. Stützpunkt der Geraden liegt in der Ebene

$\Rightarrow$ Alle Punkte der Geraden liegen in der Ebene

Hinweis: Hätte der Stützpunkt **nicht** in der Ebene gelegen, wäre die Gerade echt parallel zur Ebene (ohne Schnittpunkt).

3.4.5 Der Durchstoßpunkt

Der Durchstoßpunkt

Wenn Gerade und Ebene sich schneiden, berechnen wir den Durchstoßpunkt:

$$t = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

Dann einsetzen in die Geradengleichung:

$$D = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$

3.4.6 Schnittwinkel Gerade – Ebene

Wichtig

Hier verwenden wir **SINUS** (nicht Kosinus!)

Schnittwinkel Gerade – Ebene

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

Merkhilfe:

- Gerade–Gerade: $\cos \alpha$
- Gerade–Ebene: $\sin \alpha$

3.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung: Geraden und Ebenen im Raum

Geraden:

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ mit Stützvektor und Richtungsvektor

Ebenen:

- Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$
- Koordinatenform: $n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$
- Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Lagebeziehungen:
Systematisches Vorgehen mit Richtungsvektoren und Gleichungssystemen

3.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Gerade durch die Punkte $A(2|-1|3)$ und $B(5|2|0)$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$ und $C(0|0|1)$.

a) Stellen Sie die Parametergleichung auf.

b) Bestimmen Sie einen Normalenvektor.

c) Geben Sie die Koordinatengleichung an.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt und den Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und der Ebene $E : x + y + z = 6$.

4

Lagebeziehungen und Abstände

4.1 Lagebeziehungen Ebene $\leftrightarrow$ Ebene

4.1.1 Drei mögliche Fälle

Lagebeziehungen zweier Ebenen

Zwei Ebenen E_1 und E_2 im $\mathbb{R}^3$ können:

1. sich in einer Geraden schneiden
2. (echt) parallel zueinander sein
3. identisch sein

4.1.2 Grundidee zur Lagebestimmung

Lagebestimmung durch Gleichungssystem

Wir lösen das Gleichungssystem beider Ebenengleichungen. Die Art der Lösungsmenge entscheidet über den Fall:
Gegeben:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ E_2: &\quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{aligned}$$

Interpretation der Lösungsmenge:

- **Eindimensionale Lösungsmenge** (eine freie Variable): $\rightarrow$ Ebenen schneiden sich in einer Geraden
- **Leere Lösungsmenge**: $\rightarrow$ Ebenen sind echt parallel
- **Zweidimensionale Lösungsmenge** (zwei freie Variablen): $\rightarrow$ Ebenen sind identisch

4.1.3 Beispiel: Ebenen schneiden sich in einer Geraden

Ebenen schneiden sich (1/3)

Gegeben:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x + 2y - z = 4 \\ E_2: &\quad 2x - y + 3z = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Ebenen.
Vorgehen: Wir lösen das Gleichungssystem durch das Gauß-Verfahren.

Ebenen schneiden sich (2/3)

Lösung:
Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 2z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung:

$$5y - 5z = 7 \quad \Rightarrow \quad y = z + \frac{7}{5}$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} x + 2\left(z + \frac{7}{5}\right) - z &= 4 \\ x &= -z + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Ebenen schneiden sich (3/3)

Parametrisierung:
Mit $z = t$ als freiem Parameter:

$$\begin{aligned} x &= -t + \frac{6}{5} \\ y &= t + \frac{7}{5} \\ z &= t \end{aligned}$$

Schnittgerade:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

4.1.4 Beispiel: Echte parallele Ebenen

Echte parallele Ebenen

Gegeben:

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad x - y + 2z = 3 \\ E_2 : &\quad 2x - 2y + 4z = 8 \end{aligned}$$

Lösung: Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$2x - 2y + 4z = 6$$

Die zweite Gleichung lautet aber:

$$2x - 2y + 4z = 8$$

Dieser Widerspruch $6 \neq 8$ zeigt, dass das System unlösbar ist.
Ergebnis: Die Ebenen sind echt parallel.
Beobachtung: Die Normalenvektoren sind parallel:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}_1$$

Aber die rechten Seiten stehen nicht im gleichen Verhältnis: $d_2 \neq 2d_1$.

4.2 Schnittwinkel zweier Ebenen

Schnittwinkel zweier Ebenen

Bei sich schneidenden Ebenen E_1 und E_2 ist der Schnittwinkel φ der spitze Winkel zwischen den Ebenen $(0 \leq \varphi \leq 90°)$.
Der Schnittwinkel entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Hinweis: Wir verwenden den Betrag, um stets den spitzen Winkel zu erhalten.

Schnittwinkel berechnen

Gegeben:

$$E_1 : 2x - y + 3z = 5, \quad E_2 : x + 2y - z = 4$$

Normalenvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\cos\varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{|2-2-3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \approx 0.327$$

$$\varphi = \arccos(0.327) \approx 70.9°$$

4.3 Abstände in der analytischen Geometrie

4.3.1 Übersicht

Sieben grundlegende Abstandsfälle

In der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raums unterscheiden wir sieben grundlegende Abstandsfälle:

Fall	Objekte	Voraussetzung
1	Punkt – Punkt	—
2	Punkt – Gerade	—
3	Punkt – Ebene	—
4	Gerade – Gerade	parallel
5	Gerade – Gerade	windschief
6	Gerade – Ebene	parallel
7	Ebene – Ebene	parallel

4.3.2 Fall 1: Abstand Punkt–Punkt

Abstand zweier Punkte

Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Interpretation: Dies ist einfach die Länge des Verbindungsvektors.

4.3.3 Fall 2: Abstand Punkt–Gerade

Geometrische Überlegung

Der kürzeste Abstand wird auf dem Lot vom Punkt P auf die Gerade g erreicht. Wir suchen den Lotfußpunkt F auf g und berechnen dann $|PF|$.

Verfahren

Gegeben: Punkt P und Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$

1. Lotfußpunkt: $F = \vec{a} + t_0\vec{v}$ für ein bestimmtes t_0
2. Orthogonalitätsbedingung: $(F - P) \cdot \vec{v} = 0$
3. Daraus t_0 bestimmen und damit F
4. $d(P, g) = |PF|$

Abstand Punkt–Gerade (1/2)

Gegeben: Punkt $P(2, 3, 1)$ und Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

Schritt 1: Allgemeiner Punkt auf g:

$$F = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+2t \\ -t \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Orthogonalitätsbedingung $(F - P) \cdot \vec{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1+t-2 \\ 1+2t-3 \\ -t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(t-1) \cdot 1 + (2t-2) \cdot 2 + (-t-1) \cdot (-1) = 0$$

$$t - 1 + 4t - 4 + t + 1 = 0$$

$$6t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

Abstand Punkt–Gerade (2/2)

Schritt 3: Lotfußpunkt F:

$$F = \begin{pmatrix} 1+\frac{2}{3} \\ 1+\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Abstand berechnen:

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}-2 \\ \frac{7}{3}-3 \\ -\frac{2}{3}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$d(P,g) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4+25}{9}} = \sqrt{\frac{30}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Ergebnis: Der Abstand beträgt $\frac{\sqrt{30}}{3} \approx 1.83$ Längeneinheiten.

4.3.4 Fall 3: Abstand Punkt–Ebene (Hessesche Normalenform)

Wichtigster Abstandsfall!

Dies ist der wichtigste Abstandsfall in der analytischen Geometrie!
Geometrische Idee: Der kürzeste Abstand eines Punktes P von einer Ebene E wird auf der Normalen zur Ebene erreicht.

Hessesche Normalenform

Für eine Ebene $E: n_1x + n_2y + n_3z = d$ und Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$d(P,E) = \frac{|n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Abstand Punkt–Ebene

Gegeben: Punkt $P(3, -1, 2)$ und Ebene $E : 2x - y + 2z = 6$
Lösung mit Hessescher Abstandsformel:

$$\begin{aligned} d(P, E) &= \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|6 + 1 + 4 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|5|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{5}{3} \approx 1.67 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Abstand beträgt $\frac{5}{3} \approx 1.67$ Längeneinheiten.

4.3.5 Fall 4: Abstand paralleler Geraden

Abstand paralleler Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 sind parallel zueinander.
Methode: Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf g_1 und berechnen seinen Abstand zu g_2:

$$d(g_1, g_2) = d(P, g_2) \quad \text{mit } P \in g_1$$

Bemerkung: Dies führt den Fall auf Fall 2 (Punkt–Gerade) zurück.

4.3.6 Fall 5: Abstand windschiefer Geraden

Windschiefe Geraden

Zwei Geraden heißen windschief, wenn sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind. Sie liegen in verschiedenen SStockwerken"des Raums.
Geometrische Idee: Es gibt genau eine gemeinsame Normale zu beiden Geraden. Der Abstand ist die Länge des Stücks dieser Normalen zwischen den beiden Geraden.

Verfahren: Abstand windschiefer Geraden

Gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{v}_1, \quad g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{v}_2 \quad \text{(windschief)}$$

1. **Schritt 1:** Bestimme den Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
2. **Schritt 2:** Berechne den Abstand mit:

$$d = \frac{|(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

4.3.7 Fall 6: Abstand Gerade–Ebene (parallel)

Abstand paralleler Gerade und Ebene

Eine Gerade g ist parallel zu einer Ebene E.
Methode: Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf g und berechnen:

$$d(g, E) = d(P, E)$$

Bemerkung: Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

4.3.8 Fall 7: Abstand paralleler Ebenen

Abstand paralleler Ebenen

Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind parallel zueinander.
Methode: Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf E_1 und berechnen:

$$d(E_1, E_2) = d(P, E_2)$$

Bemerkung: Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

Abstand paralleler Ebenen

Gegeben:

$$E_1 : x - 2y + 2z = 3, \quad E_2 : x - 2y + 2z = 9$$

Aufgabe: Bestimmen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen.
Vorgehen:

1. Wähle einen Punkt auf E_1: Setze $y = 0, z = 0$: $x = 3 \Rightarrow P(3, 0, 0)$

2. Berechne den Abstand P zu E_2 mit Hessescher Formel:

$$d = \frac{|1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{3} = 2$$

Ergebnis: Der Abstand beträgt 2 Längeneinheiten.

4.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung Lagebeziehungen und Abstände

Lagebeziehungen Ebene–Ebene:

- Schneidend in Gerade: eindimensionale Lösungsmenge
- Echt parallel: leere Lösungsmenge
- Identisch: zweidimensionale Lösungsmenge

Sieben Abstandsfälle:

1. Punkt–Punkt: Länge des Verbindungsvektors
2. Punkt–Gerade: Lotfußpunktverfahren

3. Punkt–Ebene: Hessesche Normalenform (wichtigster Fall!)
4. Parallele Geraden: auf Punkt–Gerade zurückführen
5. Windschiefe Geraden: Vektorformel mit Kreuzprodukt
6. Parallele Gerade–Ebene: auf Punkt–Ebene zurückführen
7. Parallele Ebenen: auf Punkt–Ebene zurückführen

4.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Lagebeziehung Ebene–Ebene

Bestimmen Sie die Lagebeziehung der Ebenen:

$$E_1 : 3x + 2y - z = 5, \quad E_2 : 6x + 4y - 2z = 10$$

Aufgabe 2: Schnittgerade

Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen:

$$E_1 : x - y + 2z = 4, \quad E_2 : 2x + y - z = 3$$

Aufgabe 3: Abstand Punkt–Ebene

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(1, -2, 3)$ von der Ebene $E : 4x - 3y + 12z = 26$.

Aufgabe 4: Abstand windschiefer Geraden

Gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Geraden windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.

5

Matrizen – Einführung und Rechenoperationen

5.1 Was ist eine Matrix?

Matrix

Eine **Matrix** ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen in Zeilen und Spalten.
Element: Einzelne Zahl in der Matrix, z.B. a_{ij} (Zeile i, Spalte j).
Größe: $m \times n$ (Anzahl Zeilen m, Anzahl Spalten n).
Schreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiele für Matrizen

2 × 2-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3 × 2-Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor (3 × 1-Matrix):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor (1 × 3-Matrix):

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Besondere Matrizen

Definitionen besonderer Matrizen

- **Nullmatrix:** Alle Elemente sind 0.
- **Einheitsmatrix:** 1 auf der Hauptdiagonale, sonst 0.
- **Diagonalmatrix:** Nur die Elemente auf der Hauptdiagonale sind (möglicherweise) ungleich 0.
- **Obere Dreiecksmatrix:** Alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale sind 0.
- **Spaltenvektor:** Matrix mit nur einer Spalte.
- **Zeilenvektor:** Matrix mit nur einer Zeile.

Beispiele besonderer Matrizen

Nullmatrix (2 × 2):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix (3 × 3):

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix (3 × 3):

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix (3 × 3):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5.3 Addition und Subtraktion von Matrizen

Matrixaddition und -subtraktion

Zwei Matrizen gleicher Größe werden addiert/subtrahiert, indem ihre entsprechenden Elemente addiert/subtrahiert werden:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Beide Matrizen müssen dieselbe Größe $m \times n$ haben.

Beispiele für Addition und Subtraktion

Beispiel 1 (Addition):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2 (Subtraktion):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Nicht definiert bei unterschiedlicher Größe!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{nicht möglich!}$$

5.4 Skalarmultiplikation

Skalarmultiplikation

Eine Matrix wird mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jedes Element mit λ multipliziert wird:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiele für Skalarmultiplikation

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

5.5 Matrixmultiplikation

Wichtige Voraussetzung

Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die **Spaltenzahl der ersten Matrix** gleich der **Zeilenzahl der zweiten Matrix** ist.
Ist A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix, dann ist AB eine $m \times p$-Matrix.

Matrixmultiplikation

Für $A = (a_{ij})_{m \times n}$ und $B = (b_{jk})_{n \times p}$ ist das Produkt $C = AB$ definiert durch:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

für $i = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, p$.
Merkregel: SZeile mal Spalte"– Das Element c_{ik} entsteht durch Multiplikation der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B.

Beispiele für Matrixmultiplikation (1/2)

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Beispiele für Matrixmultiplikation (2/2)

Beispiel 3 (Größenänderung):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Beispiel 4 (Achtung: Nicht kommutativ!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse sind unterschiedlich: $AB \neq BA$!

5.6 Transponieren

Transponierte Matrix

Beim **Transponieren** werden Zeilen und Spalten vertauscht:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Aus einer $m \times n$-Matrix wird eine $n \times m$-Matrix.

Beispiele für das Transponieren

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3 (Spaltenvektor → Zeilenvektor):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

5.7 Rechenregeln für Matrizen

Rechenregeln für Matrixoperationen

Addition und Subtraktion:

- $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)
- $A + 0 = A$ (Neutrales Element = Nullmatrix)
- $A + (-A) = 0$ (Inverses Element)

Skalarmultiplikation:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (Distributivgesetz)
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ (Assoziativgesetz)
- $1 \cdot A = A$ (Neutrales Element)

Rechenregeln für Matrixmultiplikation und Transponieren

Matrixmultiplikation:

- $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativgesetz)
- $A(B + C) = AB + AC$ (Distributivgesetz)
- $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $AI = IA = A$ (Neutrales Element = Einheitsmatrix)
- **Achtung:** $AB \neq BA$ (im Allgemeinen nicht kommutativ!)

Transponieren:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- **Wichtig:** $(AB)^T = B^T A^T$ (Reihenfolge ändert sich!)

Nachweis von $(AB)^T = B^T A^T$

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.
Berechnung von AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

Berechnung von $B^T A^T$:

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \\ 6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 & 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

Es gilt also tatsächlich: $(AB)^T = B^T A^T$.

5.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Grundbegriffe

1. Definieren Sie die Begriffe: Matrix, Einheitsmatrix, Transponierte.
2. Geben Sie die Größe der folgenden Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Grundoperationen

Gegeben seien:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

1. $A + B$
2. $A - B$
3. $2A$
4. $3A - 2B$

Aufgabe 3: Matrixmultiplikation

Gegeben seien:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

1. AB
2. BA
3. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 4: Transponieren

Gegeben sei:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:

1. C^T
2. $(C^T)^T$
3. Vergleichen Sie C und $(C^T)^T$

Aufgabe 5: Besondere Matrizen

Welche der folgenden Matrizen sind Diagonalmatrix, Einheitsmatrix, Nullmatrix oder obere Dreiecksmatrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Rechenregeln beweisen

Zeigen Sie, dass für zwei 2×2-Matrizen A und B gilt:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Hinweis: Schreiben Sie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und berechnen Sie beide Seiten.

5.9 Zusammenfassung

Zusammenfassung Matrizen

Wichtige Definitionen:

- Matrix: Rechteckige Anordnung von Zahlen in Zeilen und Spalten
- Größe: $m \times n$ (Zeilen $\times$ Spalten)
- Besondere Matrizen: Nullmatrix, Einheitsmatrix, Diagonalmatrix, Dreiecksmatrix

Rechenoperationen:

- Addition/Subtraktion: Nur bei gleicher Größe, elementweise
- Skalarmultiplikation: Jedes Element mit Skalar multiplizieren
- Matrixmultiplikation: SZeile mal Spalte", nicht kommutativ
- Transponieren: Zeilen und Spalten vertauschen

Wichtige Regeln:

- $(AB)^T = B^T A^T$ (Reihenfolge ändert sich!)
- $AB \neq BA$ (im Allgemeinen)
- $AI = IA = A$ (Einheitsmatrix ist neutral)

6

Determinanten – Grundlagen und Rechenregeln

6.1 Was ist eine Determinante?

Definition Determinante

Eine **Determinante** ist ein Skalar, der einer quadratischen Matrix zugeordnet wird.
Notation: $\det(A)$ oder $|A|$
Eigenschaften:

- Ordnet jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Zahl $\det(A) \in \mathbb{R}$ zu
- Ist nur für **quadratische** Matrizen definiert
- **Interpretation:** Misst das *orientierte Volumen* des von den Spaltenvektoren aufgespannten Körpers

Schreibweise

Für eine 1×1-Matrix:

$$A = [a], \quad \det(A) = a$$

Allgemein für eine $n \times n$-Matrix:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6.2 Reguläre und singuläre Matrizen

Regulär vs. Singulär

Eine quadratische Matrix A heißt:

- **regulär**, wenn $\det(A) \neq 0$
- **singulär**, wenn $\det(A) = 0$

Äquivalente Charakterisierungen für reguläre Matrizen

Für eine quadratische Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\det(A) \neq 0$ (Matrix ist regulär)
2. A ist invertierbar (A^{-1} existiert)
3. A hat vollen Rang
4. Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$
5. Das inhomogene LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat für jedes $\vec{b}$ genau eine Lösung

Praktische Bedeutung für lineare Gleichungssysteme

Regulär ($\det(A) \neq 0$):

- $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Singulär ($\det(A) = 0$):

- $A\vec{x} = \vec{b}$ hat keine oder unendlich viele Lösungen

6.3 Geometrische Bedeutung

Anschauliche Bedeutung

Die Determinante misst das **orientierte Volumen**:

- $n = 2$: Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren aufgespannten **Parallelogramms**
- $n = 3$: Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten **Spats** (Parallelepipeds)
- Das **Vorzeichen** gibt die **Orientierung** an (Rechtssystem vs. Linkssystem)

Prüfungstipp

"*Die Determinante misst das orientierte Volumen.*"
Diese Formulierung hilft beim Verständnis:

- $\det(A) > 0$: Positiv orientiert (Rechtssystem)
- $\det(A) < 0$: Negativ orientiert (Linkssystem)
- $\det(A) = 0$: Vektoren sind linear abhängig (Volumen = 0)

6.4 Berechnung von Determinanten

6.4.1 Laplace-Entwicklung

Laplace-Entwicklung (Entwicklung nach einer Zeile/Spalte)

Minor M_{ij}: Determinante der Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.
Adjunkte (Kofaktor) A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Formel (Entwicklung nach der i-ten Zeile):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Vorzeichenmuster für Adjunkten

Das Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ ergibt folgendes Schachbrettmuster:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

6.4.2 Spezialfälle

2×2-Matrix – Die Kreuzregel

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

Merksatz: Hauptdiagonale minus Nebendiagonale.

3×3-Matrix – Regel von Sarrus

Vorgehen:

1. Schreibe die ersten zwei Spalten rechts neben die Matrix
2. Addiere die Produkte der **absteigenden** Diagonalen (von links oben nach rechts unten)
3. Subtrahiere die Produkte der **aufsteigenden** Diagonalen (von links unten nach rechts oben)

Formel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Beispiel: Laplace-Entwicklung für 3×3

Gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

Ergebnis: $\det(B) = 0$, also ist B singulär.

Beispiel: Regel von Sarrus

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

Berechnung:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9) \\ &= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) \\ &= 225 - 225 = 0 \end{aligned}$$

6.4.3 Dreiecks- und Diagonalmatrizen

Determinante von Dreiecksmatrizen

Für obere, untere Dreiecksmatrizen oder Diagonalmatrizen gilt:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Merksatz: Das Produkt der Diagonalelemente.

6.5 Inverse Matrizen mit Determinanten

6.5.1 Definition und Eigenschaften

Inverse Matrix

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt mit:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

wobei I_n die Einheitsmatrix ist.
Wichtiger Zusammenhang:

$$A \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow A \text{ ist regulär } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Eigenschaften invertierbarer Matrizen

1. $(A^{-1})^{-1} = A$ (Die Inverse der Inversen ist die Ausgangsmatrix)
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (**Reihenfolge beachten!**)
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (Transponierte der Inversen = Inverse der Transponierten)
4. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

6.5.2 Berechnung der Inversen

Adjunktenformel (allgemein)

Für eine invertierbare Matrix A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

wobei $\operatorname{adj}(A)$ die **Adjunkte** (adjungierte Matrix) ist.

Adjunkte

Die Adjunkte $\operatorname{adj}(A)$ einer Matrix A ist die **Transponierte der Kofaktormatrix** von A:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

wobei $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ der Kofaktor von a_{ij} ist.

Inverse mit Adjunktenformel (3×3)

Gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Kofaktoren berechnen (Entwicklung nach erster Zeile):

$$\begin{aligned} C_{11} &= +\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = +(1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) = -24 \\ C_{12} &= -\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) = +20 \\ C_{13} &= +\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = +(0 \cdot 6 - 1 \cdot 5) = -5 \end{aligned}$$

Schritt 2: Kofaktormatrix C aufstellen:

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Adjunkte = Transponierte der Kofaktormatrix:

$$\operatorname{adj}(B) = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Determinante berechnen (über erste Zeile):

$$\det(B) = 1 \cdot (-24) + 2 \cdot 20 + 3 \cdot (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$$

Schritt 5: Inverse berechnen:

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Inverse einer 2×2-Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: $\det(A) = ad - bc \neq 0$
Merksatz: Hauptdiagonale vertauschen, Nebendiagonale Vorzeichen wechseln, durch Determinante teilen.

6.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1 – Wahr oder Falsch?

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jede quadratische Matrix hat eine Determinante.

b) Die Determinante einer Matrix ist immer positiv.

c) Wenn $\det(A) = 0$, dann ist das LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ unlösbar.

d) Die Determinante einer 1×1-Matrix $[5]$ ist 5.

Aufgabe 2 – Determinanten berechnen

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 – Regel von Sarrus

Verwenden Sie die Regel von Sarrus, um $\det(D)$ zu berechnen:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 – Laplace-Entwicklung

Berechnen Sie $\det(E)$ durch Laplace-Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 – Dreiecksmatrizen

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Dreiecksmatrizen:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 – Regulär oder Singulär?

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen regulär oder singulär sind:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 – Theoretische Frage

Warum ist eine Matrix mit zwei identischen Zeilen immer singulär?
Tipp: Überlegen Sie geometrisch (Volumen) oder verwenden Sie die Eigenschaften der Determinante.

Aufgabe 8 – Inverse Matrizen (2×2)

Bestimmen Sie (falls existent) die Inverse der folgenden Matrizen:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 – Inverse mit Adjunktenformel (3×3)

Gegeben ist die Matrix:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ invertierbar ist.
2. Berechnen Sie $\mathcal{M}^{-1}$ mithilfe der Adjunktenformel.

7

Matrizengleichungen

7.1 Lösen von Matrizengleichungen

Grundprinzip

Matrizengleichungen werden ähnlich wie normale Gleichungen gelöst, wobei die **Nicht-Kommutativität** der Matrixmultiplikation beachtet werden muss:

- **Links** multiplizieren = von links an die Gleichung heranmultiplizieren
- **Rechts** multiplizieren = von rechts an die Gleichung heranmultiplizieren
- Gleiche Operationen müssen auf **beiden Seiten** ausgeführt werden

Erlaubte Umformungen

Seien A, B, X Matrizen, A invertierbar:

1. $AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$ (Multiplikation von **links** mit A^{-1})
2. $XA = B \quad \Rightarrow \quad X = BA^{-1}$ (Multiplikation von **rechts** mit A^{-1})
3. $AX + BX = C \quad \Rightarrow \quad (A + B)X = C$ (Ausklammern von X)

Achtung: Reihenfolge beachten! $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ im Allgemeinen.

7.2 Beispiele für Matrizengleichungen

Beispiel 1: Lineare Umformung

Gleichung:

$$\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}X + A^T &= (B - I) + 2X && \mid -\frac{1}{2}X,\ -(B - I) \\ A^T - (B - I) &= 2X - \frac{1}{2}X && \\ A^T - B + I &= \frac{3}{2}X && \mid \cdot\frac{2}{3} \\ X &= \frac{2}{3}(A^T - B + I) && \end{aligned}$$

Beispiel 2: Inverse von links

Gleichung:

$$A^T B(B^{-1}X + I) = A$$

Lösung:

$$\begin{aligned} A^T B(B^{-1}X + I) &= A && \mid \cdot(A^T B)^{-1} \text{ von links} \\ B^{-1}X + I &= (A^T B)^{-1}A && \mid -I \\ B^{-1}X &= (A^T B)^{-1}A - I && \mid \cdot B \text{ von links} \\ X &= B((A^T B)^{-1}A - I) && \end{aligned}$$

Beispiel 3: Inverse von beiden Seiten

Gleichung:

$$AXB = I$$

Lösung:

$$\begin{aligned} AXB &= I && \mid \cdot A^{-1} \text{ von links} \\ XB &= A^{-1} && \mid \cdot B^{-1} \text{ von rechts} \\ X &= A^{-1}B^{-1} && \end{aligned}$$

Beispiel 4: Ausklammern

Gleichung:

$$AX = BX + I$$

Lösung:

$$\begin{aligned} AX - BX &= I && \text{(bringe alle } X\text{-Terme auf eine Seite)} \\ (A - B)X &= I && \text{(ausklammern)} \\ X &= (A - B)^{-1} && \mid \cdot(A - B)^{-1} \text{ von links} \end{aligned}$$

Wichtig: Hier muss von **links** multipliziert werden, da X rechts steht!

Beispiel 5: Transponierte Gleichung

Gleichung:

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)X^T$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(X + A)^T &= (B^{-1} + I)X^T && \\
X^T + A^T &= (B^{-1} + I)X^T && \mid -X^T \\
A^T &= (B^{-1} + I - I)X^T && \\
A^T &= B^{-1}X^T && \mid \cdot B \text{ von links} \\
BA^T &= X^T && \mid ()^T \\
(BA^T)^T &= (X^T)^T && \\
AB^T &= X &&
\end{aligned}$$

7.3 Übungsaufgaben: 2×2-Matrizen

Übungsblatt 1

Gegebene Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie nach X auf:

a) $\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$

b) $A^T B(B^{-1}X + I) = A$

c) $AXB = I$

d) $2X(A + I) = 2X + B$

e) $AX = BX + I$

f) $(X + A)^T = (B^{-1} + I)X^T$

Übungsblatt 2

Gegebene Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie nach X auf:

a) $3X - A^T = 2(B - I) + X$

b) $AB(X + B^T) = I$

c) $XAB = I$

d) $X(A + 2I) = AX + B$

e) $AX + X = B$

f) $(AX)^T = X^T B^T$

7.4 Übungsaufgaben: 3×3-Matrizen

Übungsblatt 3

Gegebene Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie nach X auf:

a) $2X + A^T = 3C + X + AB$

b) $AB(B^{-1}X + C) = A + B$

c) $AXB = C + B^T$

d) $X(A + C) = X + B + A^T B$

e) $AX = BX + C + A^T B$

f) $(X + A)^T = (B^T + C)X^T + AB$

8

Rang einer Matrix

8.1 Definition und Bedeutung

Was ist der Rang?

Der **Rang** einer Matrix A, geschrieben $\text{Rang}(A)$ oder $\text{rg}(A)$, ist definiert als die maximale Anzahl **linear unabhängiger** Zeilenvektoren (oder äquivalent: Spaltenvektoren).
Intuitive Idee: Der Rang gibt an, in welche Dimension der Raum durch die Matrix transformiert wird:

- Eine Matrix mit Rang 2 transformiert jeden 3D-Körper in eine 2D-Fläche
- Eine Matrix mit Rang 1 transformiert jeden 3D-Körper in eine Linie

Eigenschaften des Rangs

- Der Zeilenrang ist immer gleich dem Spaltenrang
- Für eine $m \times n$-Matrix gilt: $\text{Rang}(A) \leq \min(m, n)$
- A ist regulär (invertierbar) $\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(A) = n$ (bei $n \times n$-Matrix)

8.2 Zeilenstufenform (ZSF)

Zeilenstufenform (ZSF)

Eine Matrix befindet sich in **Zeilenstufenform**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Alle Nullzeilen stehen ganz unten
2. Das erste Element $\neq 0$ einer Zeile (der **Pivot**) steht immer rechts vom Pivot der Zeile darüber

Rangbestimmung:

$$\text{Rang}(A) = \text{Anzahl der Zeilen, die keine Nullzeilen sind}$$

Beispiel für Rang aus ZSF

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analyse:

- Zeile 1: Nicht null, Pivot in Spalte 1
- Zeile 2: Nicht null, Pivot in Spalte 2 (rechts von Spalte 1) ✓
- Zeile 3: Nicht null, Pivot in Spalte 4 (rechts von Spalte 2) ✓
- Zeile 4: Nullzeile (unten) ✓

Ergebnis: $\mathrm{Rang}(A) = 3$ (drei Nicht-Nullzeilen)

8.3 Gauß-Elimination

Das Ziel des Gauß-Verfahrens

Jede beliebige Matrix soll in die **Zeilenstufenform** überführt werden, **ohne dabei den Rang zu ändern**.
Das ermöglicht eine einfache Rangbestimmung durch Abzählen der Nicht-Nullzeilen.

Die drei elementaren Zeilenumformungen

Folgende Operationen ändern den Rang einer Matrix **nicht**:

1. **Zeilen tauschen:** $Z_i \leftrightarrow Z_j$
2. **Zeile skalieren:** $Z_i \to c \cdot Z_i$ mit $c \neq 0$
3. **Zeilen kombinieren:** $Z_i \to Z_i + c \cdot Z_j$
   (Das Vielfache einer Zeile wird zu einer anderen addiert – **wichtigster Schritt!**)

Rangbestimmung mit Gauß-Elimination (1/2)

Gegebene Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Nullen unter dem ersten Pivot erzeugen

$$Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1$$
$$Z_3 \to Z_3 + Z_1$$

Ergebnis:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rangbestimmung mit Gauß-Elimination (2/2)

Aktueller Stand:

$$B' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Nullen unter dem zweiten Pivot erzeugen

$$Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_2$$

Finale Zeilenstufenform:

$$B'' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

- Anzahl der Nicht-Nullzeilen: 2
- $\mathbf{Rang}(B) = 2$

Interpretation: Die dritte Zeile der ursprünglichen Matrix war eine lineare Kombination der ersten beiden. Sie enthielt keine neue Information und wurde daher zu einer Nullzeile.

8.4 Zusammenfassung und Bedeutung

Zusammenfassung

- Der **Rang** ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen einer Matrix
- Das **Gauß-Verfahren** überführt eine Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen in die Zeilenstufenform (ZSF)
- Der Rang bleibt bei diesen Operationen **unverändert**
- In der ZSF ist der Rang einfach die Anzahl der Nicht-Nullzeilen
- Der Rang ist entscheidend für die Analyse linearer Gleichungssysteme (Lösbarkeit, Anzahl der Lösungen)

Aufgabe: Rang bestimmen

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrix durch Überführung in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

9

Matrizengleichungen

9.1 Lösen von Matrizengleichungen

Grundprinzip

Matrizengleichungen werden ähnlich wie normale Gleichungen gelöst, wobei die **Nicht-Kommutativität** der Matrixmultiplikation beachtet werden muss:

- **Links** multiplizieren = von links an die Gleichung heranmultiplizieren
- **Rechts** multiplizieren = von rechts an die Gleichung heranmultiplizieren
- Gleiche Operationen müssen auf **beiden Seiten** ausgeführt werden

Erlaubte Umformungen

Seien A, B, X Matrizen, A invertierbar:

1. $AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$ (Multiplikation von **links** mit A^{-1})
2. $XA = B \quad \Rightarrow \quad X = BA^{-1}$ (Multiplikation von **rechts** mit A^{-1})
3. $AX + BX = C \quad \Rightarrow \quad (A+B)X = C$ (Ausklammern von X)

Achtung: Reihenfolge beachten! $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ im Allgemeinen.

9.2 Beispiele für Matrizengleichungen

Beispiel 1: Lineare Umformung

Gleichung:

$$\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}X + A^T &= (B-I) + 2X && \mid -\frac{1}{2}X,\ -(B-I) \\ A^T - (B-I) &= 2X - \frac{1}{2}X \\ A^T - B + I &= \frac{3}{2}X && \mid \cdot\frac{2}{3} \\ X &= \frac{2}{3}(A^T - B + I) \end{aligned}$$

Beispiel 2: Inverse von links

Gleichung:

$$A^T B(B^{-1}X + I) = A$$

Lösung:

$$\begin{aligned} A^T B(B^{-1}X + I) &= A && \mid \cdot(A^T B)^{-1} \text{ von links} \\ B^{-1}X + I &= (A^T B)^{-1}A && \mid -I \\ B^{-1}X &= (A^T B)^{-1}A - I && \mid \cdot B \text{ von links} \\ X &= B((A^T B)^{-1}A - I) \end{aligned}$$

Beispiel 3: Inverse von beiden Seiten

Gleichung:

$$AXB = I$$

Lösung:

$$\begin{aligned} AXB &= I && \mid \cdot A^{-1} \text{ von links} \\ XB &= A^{-1} && \mid \cdot B^{-1} \text{ von rechts} \\ X &= A^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

Beispiel 4: Ausklammern

Gleichung:

$$AX = BX + I$$

Lösung:

$$\begin{aligned} AX - BX &= I && \text{(bringe alle } X\text{-Terme auf eine Seite)} \\ (A-B)X &= I && \text{(ausklammern)} \\ X &= (A-B)^{-1} && \mid \cdot(A-B)^{-1} \text{ von links} \end{aligned}$$

Wichtig: Hier muss von **links** multipliziert werden, da X rechts steht!

Beispiel 5: Transponierte Gleichung

Gleichung:

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)X^T$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
(X + A)^T &= (B^{-1} + I)X^T \\
X^T + A^T &= (B^{-1} + I)X^T && \mid -X^T \\
A^T &= (B^{-1} + I - I)X^T \\
A^T &= B^{-1}X^T && \mid \cdot B \text{ von links} \\
BA^T &= X^T && \mid ()^T \\
(BA^T)^T &= (X^T)^T \\
AB^T &= X
\end{aligned}$$

9.3 Übungsaufgaben: 2×2-Matrizen

Übungsblatt 1

Gegebene Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie nach X auf:

a) $\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$

b) $A^T B(B^{-1}X + I) = A$

c) $AXB = I$

d) $2X(A + I) = 2X + B$

e) $AX = BX + I$

f) $(X + A)^T = (B^{-1} + I)X^T$

Übungsblatt 2

Gegebene Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie nach X auf:

a) $3X - A^T = 2(B - I) + X$

b) $AB(X + B^T) = I$

c) $XAB = I$

d) $X(A + 2I) = AX + B$

e) $AX + X = B$

f) $(AX)^T = X^T B^T$

9.4 Übungsaufgaben: 3×3-Matrizen

Übungsblatt 3

Gegebene Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie nach X auf:

a) $2X + A^T = 3C + X + AB$

b) $AB(B^{-1}X + C) = A + B$

c) $AXB = C + B^T$

d) $X(A + C) = X + B + A^T B$

e) $AX = BX + C + A^T B$

f) $(X + A)^T = (B^T + C)X^T + AB$

10

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

10.1 Einführung und Bedeutung

Warum sind LGS wichtig?

Lineare Gleichungssysteme (LGS) sind ein fundamentales Konzept in der Mathematik mit zahlreichen Anwendungen:

- **Ingenieurwesen:** Modellierung von elektrischen Netzwerken und mechanischen Systemen
- **Wirtschaft:** Optimierung von Produktionsprozessen und Ressourcenallokation
- **Informatik:** Algorithmen für maschinelles Lernen und Datenanalyse
- **Naturwissenschaften:** Beschreibung physikalischer Systeme und chemischer Reaktionen

10.2 Grundlagen

Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** besteht aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Begriffe:

- a_{ij}: Koeffizienten (Einträge der Koeffizientenmatrix)
- x_j: Unbekannte (Variablen)
- b_i: Komponenten des Störvektors (rechte Seite)

Matrixschreibweise

Die kompakte Matrixschreibweise eines LGS:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

wobei:

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: Koeffizientenmatrix
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: Lösungsvektor (gesucht)
- $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$: Störvektor (rechte Seite)

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Das LGS wird übersichtlich dargestellt durch die **erweiterte Koeffizientenmatrix**:

$$[A \mid \vec{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Homogen vs. Inhomogen

- **Homogen:** $A\vec{x} = \vec{0}$ (rechte Seite ist Nullvektor)
- **Inhomogen:** $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$

10.3 Lösungsmethoden

10.3.1 Lösung mit inverser Matrix

Lösung via Inverse

Voraussetzungen:

- A ist quadratisch ($n \times n$)
- A ist regulär ($\det(A) \neq 0$ bzw. $\mathrm{Rang}(A) = n$)

Lösungsformel:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

10.3.2 Gauß-Algorithmus

Grundidee

Umformung der erweiterten Matrix $[A \mid \vec{b}]$ in **Zeilenstufenform** durch elementare Zeilenoperationen.
Erlaubte Operationen (ändern die Lösungsmenge nicht):

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$

3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

10.4 Lösbarkeitskriterien

Eindeutig lösbar

Ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist **eindeutig lösbar**, wenn:

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A \mid \vec{b}]) = n$$

Falls A quadratisch: A ist regulär ($\det(A) \neq 0$).

Beispiel: Eindeutig lösbar

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauß}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

Rückwärtseinsetzen: $z = 2, y = 3, x = 1$
Prüfung: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A \mid \vec{b}]) = 3 = n \Rightarrow$ Genau eine Lösung.

Mehrdeutig lösbar

Ein LGS ist **mehrdeutig lösbar** (unendlich viele Lösungen), wenn:

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A \mid \vec{b}]) < n$$

Anzahl freier Parameter: $k = n - \text{Rang}(A)$
Falls A quadratisch: A ist singulär ($\det(A) = 0$).

Beispiel: Mehrdeutig lösbar

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauß}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eine Gleichung, drei Unbekannte $\Rightarrow$ 2 freie Parameter
Allgemeine Lösung: $x = 3 - s - t, y = s, z = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$
Prüfung: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A \mid \vec{b}]) = 1 < 3 \Rightarrow$ Unendlich viele Lösungen.

Nicht lösbar

Ein LGS ist **nicht lösbar**, wenn:

$$\text{Rang}(A) < \text{Rang}([A \mid \vec{b}])$$

Falls A quadratisch: A ist singulär, aber das System ist widersprüchlich.

Beispiel: Nicht lösbar

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauß}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Letzte Zeile: $0 = 1 \Rightarrow$ Widerspruch!
Prüfung: $\text{Rang}(A) = 1 < \text{Rang}([A \mid \vec{b}]) = 2 \Rightarrow$ Keine Lösung.

10.5 Parameterabhängige LGS

Häufige Klausuraufgabe

LGS mit Parameter (z. B. λ, a, t) $\rightarrow$ Fallunterscheidung erforderlich!
Beispiel:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda x + y = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Für $\lambda = 1$: Widerspruch (nicht lösbar)
$\rightarrow$ Für $\lambda \neq 1$: eindeutig lösbar

Lösungsstrategie für Parameteraufgaben

1. **Matrixform aufstellen:** $A\vec{x} = \vec{b}$
2. **Determinante berechnen:** $\det(A)$ (bei quadratischem A)
3. **Analyse:**
   - $\det(A) \neq 0$: System ist eindeutig lösbar
   - $\det(A) = 0$: System ist entweder nicht lösbar oder hat unendlich viele Lösungen (weitere Analyse nötig)

10.6 Homogene LGS

Eigenschaften homogener LGS

Für homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ gilt immer:

- Immer lösbar (triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$)
- **Nicht lösbar ist unmöglich!**
- $\text{Rang}(A) = n$: Nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$
- $\text{Rang}(A) < n$: Unendlich viele Lösungen (nicht-triviale Lösungen existieren)

10.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1 – Eindeutig lösbar

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie die Lösung des LGS mit dem Gauß-Algorithmus.
2. Überprüfen Sie, ob die Matrix regulär ist (d. h. $\det(A) \neq 0$).

Aufgabe 2 – Mehrdeutig lösbar

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y + 2z = 8 \\ 3x + 6y + 3z = 12 \end{cases}$$

1. Führen Sie den Gauß-Algorithmus durch und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
2. Geben Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und des erweiterten Systems an.

Aufgabe 3 – Nicht lösbar

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

1. Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an.
2. Untersuchen Sie, ob das System lösbar ist.
3. Erklären Sie den Rangunterschied.

Aufgabe 4 – Parameterabhängiges LGS

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + \lambda y = 6 \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Systems in Abhängigkeit vom Parameter λ. Geben Sie an, für welche Werte von λ das System eindeutig, mehrdeutig oder nicht lösbar ist.

11

Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

11.1 Problemstellung und Methodik

Grundidee

In vielen praktischen Anwendungen hängen die Koeffizienten eines LGS von einem Parameter ab (z. B. Materialkenngrößen, Systemkonstanten).
Aufgabe: Untersuche die Lösbarkeit in Abhängigkeit vom Parameter:

- Eindeutig lösbar?
- Mehrdeutig lösbar (unendlich viele Lösungen)?
- Nicht lösbar?

Beispielhafte Problemstellung

Gegeben ist das LGS mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + \lambda y = 6. \end{cases}$$

Matrixschreibweise:

$$A(\lambda)\vec{x} = \vec{b}, \quad A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Matrix:

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 6 \end{array}\right]$$

11.2 Lösungsstrategie

Determinantentest (für quadratische Systeme)

Für ein quadratisches LGS $A(\lambda)\vec{x} = \vec{b}$ gilt:
Eindeutige Lösung $\Leftrightarrow \det(A(\lambda)) \neq 0$
Vorgehen:

1. Berechne $\det(A(\lambda))$ als Funktion des Parameters
2. Bestimme die Nullstellen der Determinante (kritische Parameterwerte)
3. Für λ mit $\det \neq 0$: Eindeutige Lösung
4. Für λ mit $\det = 0$: Weitere Analyse mit Gauß-Verfahren nötig

Durchgerechnetes Beispiel: 2×2-System

Schritt 1: Determinante berechnen

$$\det(A(\lambda)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \lambda - 1 \cdot 2 = \lambda - 2$$

Fallunterscheidung:

- $\lambda \neq 2$: $\det \neq 0 \Rightarrow A$ regulär $\Rightarrow$ genau eine Lösung
- $\lambda = 2$: $\det = 0 \Rightarrow A$ singulär $\Rightarrow$ weitere Analyse nötig

Schritt 2: Gauß-Elimination für $\lambda \neq 2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right]$$

Aus Zeile 2: $(\lambda - 2)y = 0 \Rightarrow y = 0$ (da $\lambda \neq 2$)
Aus Zeile 1: $x + y = 3 \Rightarrow x = 3$
Ergebnis für $\lambda \neq 2$:

$$\boxed{x = 3, \quad y = 0}$$

Schritt 3: Spezialfall $\lambda = 2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ranganalyse: $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}([A \mid \vec{b}]) = 1 < 2$
$\Rightarrow$ Unendlich viele Lösungen
Allgemeine Lösung: $x + y = 3 \Rightarrow x = 3 - y$ mit $y \in \mathbb{R}$ frei wählbar.

Zusammenfassung der Fälle

Für das LGS $A(\lambda)\vec{x} = \vec{b}$ mit $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$:

Parameter	Determinante	Lösbarkeit
$\lambda \neq 2$	$\det \neq 0$	Eineindeutige Lösung: $(3, 0)^T$
$\lambda = 2$	$\det = 0$	Unendlich viele Lösungen: $(3 - t, t)^T, t \in \mathbb{R}$

Anmerkung: In diesem Beispiel gibt es keinen Parameterwert für "nicht lösbar".

11.3 Komplexeres Beispiel: 3×3-System

Parameterabhängiges 3×3-System

Gegeben:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + \lambda y + z = 4 \\ 3x + 2y + \lambda z = 5 \end{cases}$$

Matrixform:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Determinante berechnen (Entwicklung nach erster Zeile oder Sarrus):

$$\det(A(\lambda)) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$$

Schritt 2: Nullstellen bestimmen

$$\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kritische Werte: $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \approx 3.618$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 1.382$
Fallunterscheidung:

- $\lambda \notin \left\{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$: Eindeutige Lösung (regulär)
- $\lambda \in \left\{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$: Singulär $\Rightarrow$ Rang-Test nötig

Schritt 3: Gauß-Elimination für singuläre Fälle

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 1 & 4 \\ 3 & 2 & \lambda & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1,\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 & -4 \end{array}\right]$$

Elimination der 2. Spalte in R_3: $R_3 \leftarrow (\lambda - 2)R_3 + R_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \underbrace{(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 1}_{=\det A(\lambda)} & -4(\lambda - 2) - 2 \end{array}\right]$$

Für $\det(A(\lambda)) = 0$ wird die letzte Zeile:

$$0 \cdot z = -4\lambda + 6$$

Da für $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ gilt: $-4\lambda + 6 \neq 0$
$\Rightarrow$ Widerspruch! $\Rightarrow$ Keine Lösung.
Ergebnis: Es gibt **keinen** Parameterwert mit unendlich vielen Lösungen.
Beispielrechnung für $\lambda = 1$ (eindeutig):

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Gauß: $R_2 - R_1$: $x = 1$, dann $y + z = 2$ und $2y + z = 2 \Rightarrow y = 0, z = 2$

$$\boxed{x = 1, \quad y = 0, \quad z = 2}$$

11.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1 – Parameterabhängiges 3×3-System

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + \lambda y + z = 4 \\ 3x + 2y + \lambda z = 5 \end{cases}$$

1. Stellen Sie das System in Matrixform $A(\lambda)\vec{x} = \vec{b}$ dar.
2. Berechnen Sie $\det(A(\lambda))$ in Abhängigkeit von λ.
3. Untersuchen Sie die Lösbarkeit (eindeutig/mehrdeutig/nicht lösbar).
4. Bestimmen Sie die Lösung für einen eindeutigen Fall (z. B. $\lambda = 1$).

Aufgabe 2 – Matrizengleichung mit Parameter

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie nach X auf:

$$X - 2A = B + C$$

Zusatz: Berechnen Sie X.

Teil II

Differentialrechnung

12

Zahlenfolgen

12.1 Grundlagen und Definitionen

Was ist eine Zahlenfolge?

Eine **Zahlenfolge** (kurz: Folge) ist eine reelle Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
Schreibweise:

- (a_n) oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bezeichnet die gesamte Folge
- a_n bezeichnet das **n-te Folgenglied**
- Explizite Darstellung: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Wichtige Begriffe

- **Index n:** Die Platznummer oder Position eines Folgenglieds
- **Folgenglied a_n:** Das Element der Folge an der Stelle n

Beispiel: Die Folge (a_n) mit $a_n = 2n$ ergibt:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = 8, \quad \ldots$$

12.2 Bildungsvorschriften

Explizite Bildungsvorschrift

Jedes Folgenglied wird **direkt** als Funktion des Index berechnet:

$$a_n = f(n)$$

Vorteil: Direkter Zugriff auf jedes Folgenglied ohne vorherige Berechnung.
Beispiel: Die Folge $a_n = 2n + 1$ ergibt:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 9, \quad \ldots$$

Berechnung bei expliziter Darstellung

Beispiel: $a_n = 2n + 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a_2 &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ a_3 &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ a_{10} &= 2 \cdot 10 + 1 = 21 \\ a_{100} &= 2 \cdot 100 + 1 = 201 \end{aligned}$$

Man kann jedes Glied direkt berechnen!

Rekursive Bildungsvorschrift

Jedes Folgenglied wird aus einem oder mehreren vorhergehenden Gliedern berechnet. Dazu muss mindestens ein **Anfangsglied** gegeben sein.
Vorteil: Manchmal einfacher zu formulieren, beschreibt den Bildungsprozess.
Beispiel: Die Folge mit $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 2$ ergibt:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 9, \quad \ldots$$

Berechnung bei rekursiver Darstellung

Beispiel: $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 2$

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \quad \text{(gegeben)} \\ a_2 &= a_1 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ a_3 &= a_2 + 2 = 5 + 2 = 7 \\ a_4 &= a_3 + 2 = 7 + 2 = 9 \\ a_5 &= a_4 + 2 = 9 + 2 = 11 \end{aligned}$$

Man muss alle vorherigen Glieder berechnen!

Vergleich: Explizit vs. Rekursiv

Dieselbe Folge, zwei Darstellungen:

- Explizit: $a_n = 2n + 1$
- Rekursiv: $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 2$

Beide beschreiben die Folge: $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

- **Vorteil explizit:** Direkter Zugriff auf jedes Folgenglied
- **Vorteil rekursiv:** Manchmal einfacher zu formulieren

12.3 Beschränktheit

Nach oben beschränkt

Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S_o \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$a_n \leq S_o \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Die Zahl S_o heißt **obere Schranke**.

Nach unten beschränkt

Eine Folge (a_n) heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $S_u \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$a_n \geq S_u \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Die Zahl S_u heißt **untere Schranke**.

Beschränkt und unbeschränkt

Eine Folge (a_n) heißt:

- **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist
- **unbeschränkt**, wenn sie nicht beschränkt ist

Wichtiger Hinweis: Eine Folge kann mehrere obere und untere Schranken haben! Ist S_o eine obere Schranke, so ist auch jede Zahl $S > S_o$ eine obere Schranke.

Beispiel: Beschränkte Folge

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ergibt:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \dots$$

Diese Folge ist beschränkt:

- Nach oben beschränkt durch $S_o = 1$ (oder jede größere Zahl)
- Nach unten beschränkt durch $S_u = 0$ (oder jede kleinere Zahl)

Es gilt: $0 < a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Beispiel: Unbeschränkte Folge

Die Folge $a_n = n^2$ ergibt:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16, \quad a_5 = 25, \dots$$

Diese Folge ist:

- Nach unten beschränkt (z. B. durch $S_u = 0$)
- Nach oben **unbeschränkt** (wird beliebig groß)
- Also insgesamt **unbeschränkt**

Die Folgenglieder werden beliebig groß!

12.4 Monotonie

Monoton wachsend

Eine Folge (a_n) heißt:

- **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$
- **streng monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

Monoton fallend

Eine Folge (a_n) heißt:

- **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$
- **streng monoton fallend**, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

Beispiele zur Monotonie

Beispiel 1: $a_n = 2n - 1$ ergibt $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
Streng monoton wachsend, da $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1 > 2n - 1 = a_n$.
Beispiel 2: $a_n = \frac{1}{n}$ ergibt $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
Streng monoton fallend, da $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$.

Übersicht: Monotonie

Eigenschaft	**Bedingung**	**Beispiel**
Monoton wachsend	$a_{n+1} \geq a_n$	$1, 1, 2, 2, 3, \ldots$
Streng mon. wachsend	$a_{n+1} > a_n$	$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
Monoton fallend	$a_{n+1} \leq a_n$	$3, 3, 2, 2, 1, \ldots$
Streng mon. fallend	$a_{n+1} < a_n$	$5, 4, 3, 2, 1, \ldots$

Wichtig: Streng monoton bedeutet: keine gleichen aufeinanderfolgenden Glieder!

12.5 Arithmetische Zahlenfolgen

Definition arithmetische Folge

Eine Folge (a_n) heißt **arithmetische Folge**, wenn die **Differenz** aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Die Zahl $d \in \mathbb{R}$ heißt **Differenz** der arithmetischen Folge.
Merkregel: Bei einer arithmetischen Folge kommt man von einem Glied zum nächsten, indem man immer dieselbe Zahl addiert (die Differenz d).

Rekursive Bildungsvorschrift

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{mit Anfangsglied } a_1$$

Beispiel: $a_1 = 5$ und $d = 3$

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \quad \text{(gegeben)} \\ a_2 &= a_1 + 3 = 5 + 3 = 8 \\ a_3 &= a_2 + 3 = 8 + 3 = 11 \\ a_4 &= a_3 + 3 = 11 + 3 = 14 \\ a_5 &= a_4 + 3 = 14 + 3 = 17 \end{aligned}$$

Explizite Bildungsvorschrift

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel: $a_1 = 5$ und $d = 3$

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n$$

Berechnung einzelner Glieder:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 + 3 \cdot 1 = 5 \\ a_5 &= 2 + 3 \cdot 5 = 17 \\ a_{10} &= 2 + 3 \cdot 10 = 32 \\ a_{100} &= 2 + 3 \cdot 100 = 302 \end{aligned}$$

Summenformel für arithmetische Folgen

Die Summe der ersten n Glieder:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Merkregel:

$$s_n = \frac{\text{Anzahl der Glieder}}{2} \cdot (\text{erstes Glied} + \text{letztes Glied})$$

Beispiel: Summe berechnen

Aufgabe: Berechnen Sie die Summe s_{10} für die arithmetische Folge mit $a_1 = 3$ und $d = 4$.
Lösung:
Schritt 1: Berechne a_{10}

$$a_{10} = 3 + (10-1) \cdot 4 = 3 + 36 = 39$$

Schritt 2: Berechne die Summe

$$s_{10} = \frac{10}{2} \cdot (3 + 39) = 5 \cdot 42 = 210$$

Kontrolle: $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 = 210 \quad \checkmark$

Klassisches Beispiel: Gauß'sche Summenformel

Beispiel: Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100$$

Lösung: Dies ist eine arithmetische Folge mit $a_1 = 1$, $d = 1$ und $n = 100$.

$$\begin{aligned} s_{100} &= \frac{100}{2} \cdot (2 \cdot 1 + (100 - 1) \cdot 1) \\ &= 50 \cdot (2 + 99) = 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

12.6 Geometrische Zahlenfolgen

Definition geometrische Folge

Eine Folge (a_n) heißt **geometrische Folge**, wenn der **Quotient** aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \text{ mit } a_n \neq 0$$

Die Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt **Quotient** der geometrischen Folge.
Merkregel: Bei einer geometrischen Folge kommt man von einem Glied zum nächsten, indem man immer mit derselben Zahl multipliziert (dem Quotienten q).

Rekursive Bildungsvorschrift

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{mit Anfangsglied } a_1 \neq 0$$

Beispiel: $a_1 = 2$ und $q = 3$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \quad \text{(gegeben)} \\ a_2 &= a_1 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \\ a_3 &= a_2 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \\ a_4 &= a_3 \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54 \\ a_5 &= a_4 \cdot 3 = 54 \cdot 3 = 162 \end{aligned}$$

Explizite Bildungsvorschrift

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Beispiel: $a_1 = 2$ und $q = 3$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Berechnung einzelner Glieder:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 3^0 = 2 \\ a_4 &= 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54 \\ a_6 &= 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486 \\ a_{10} &= 2 \cdot 3^9 = 2 \cdot 19683 = 39366 \end{aligned}$$

Summenformel für geometrische Folgen

Für $q \neq 1$ gilt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Für $q = 1$ gilt:

$$s_n = n \cdot a_1$$

Beispiel: Summe berechnen (1)

Aufgabe: Berechnen Sie die Summe s_5 für die geometrische Folge mit $a_1 = 3$ und $q = 2$.
Lösung:

$$s_5 = 3 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{32 - 1}{1} = 3 \cdot 31 = 93$$

Kontrolle: Die Folge lautet: $3, 6, 12, 24, 48$
$3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93 \quad \checkmark$

Beispiel: Summe berechnen (2)

Aufgabe: Berechnen Sie die Summe s_6 für die geometrische Folge mit $a_1 = 64$ und $q = \frac{1}{2}$.
Lösung:

$$s_6 = 64 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \cdot \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = 64 \cdot \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = 64 \cdot \frac{63}{64} \cdot 2 = 63 \cdot 2 = 126$$

Kontrolle: Die Folge lautet: $64, 32, 16, 8, 4, 2$
$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126 \quad \checkmark$

12.7 Zusammenfassung

Arithmetisch vs. Geometrisch

Eigenschaft	**Arithmetisch**	**Geometrisch**
Charakteristik	Konstante Differenz	Konstanter Quotient
Rekursiv	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_{n+1} = a_n \cdot q$
Explizit	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Summe s_n	$\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$
Parameter	Differenz d	Quotient q
Operation	Addition	Multiplikation

Wichtige Formeln

Arithmetische Folgen:

Explizit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Summe: $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$

Geometrische Folgen:

$$\text{Explizit:} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\text{Summe } (q \neq 1): \quad s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

12.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Explizite und rekursive Darstellung

Gegeben ist die Folge $a_n = 5 - 2n$.

1. Berechnen Sie die ersten 5 Glieder.
2. Geben Sie eine rekursive Bildungsvorschrift an.
3. Ist die Folge monoton? Wenn ja, wie?

Aufgabe 2: Beschränktheit prüfen

Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ auf Beschränktheit.

Aufgabe 3: Arithmetische Folge

Eine arithmetische Folge hat das 3. Glied $a_3 = 11$ und das 7. Glied $a_7 = 23$.

1. Bestimmen Sie das erste Glied a_1 und die Differenz d.
2. Berechnen Sie a_{20}.
3. Berechnen Sie die Summe der ersten 20 Glieder.

Aufgabe 4: Geometrische Folge

Bei einer geometrischen Folge gilt $a_2 = 6$ und $a_5 = 162$.

1. Bestimmen Sie den Quotienten q und das erste Glied a_1.
2. Wie lautet das 10. Glied?
3. Berechnen Sie die Summe der ersten 8 Glieder.

Aufgabe 5: Anwendungsaufgabe (Zinsrechnung)

Ein Sparer legt 5000 £ zu einem jährlichen Zinssatz von 4% an. Die Zinsen werden jährlich dem Kapital zugeschlagen (Zinseszins).

1. Welche Art von Folge beschreibt das Kapital? Begründen Sie.
2. Geben Sie eine explizite Formel für das Kapital nach n Jahren an.
3. Wie viel Geld hat der Sparer nach 10 Jahren?
4. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

13

Grenzwert von Zahlenfolgen

13.1 Grundbegriffe des Grenzwerts

Anschauliche Vorstellung des Grenzwerts

Betrachten wir die Folge $a_n = \frac{1}{n}$:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0{,}5, \quad a_3 = 0{,}333\ldots, \quad a_4 = 0{,}25, \quad a_5 = 0{,}2, \quad \ldots$$

Beobachtung: Je größer n wird, desto näher kommen die Folgenglieder an die Zahl 0 heran. Ein **Grenzwert** ist eine Zahl, der sich die Folgenglieder immer mehr annähern, wenn n immer größer wird.
Weiteres Beispiel: Die Folge $a_n = \frac{2n+1}{n}$ mit den Werten:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2{,}5, \quad a_3 = 2{,}333\ldots, \quad a_4 = 2{,}25, \quad a_5 = 2{,}2, \quad \ldots$$

nähert sich offensichtlich immer mehr der Zahl 2 an.

Definition (Epsilon-N-Definition)

Eine Zahlenfolge (a_n) hat den **Grenzwert** $g \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Bedeutung: Egal wie klein wir ε wählen, ab einem gewissen Index N liegen alle weiteren Folgenglieder in der ε-Umgebung von g.

Schreibweise und Sprechweise

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{oder} \quad a_n \to g \text{ für } n \to \infty$$

Sprechweise:

- „Limes n gegen Unendlich von a_n gleich g"
- „a_n konvergiert gegen g für n gegen Unendlich"

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

13.2 Konvergenz und Divergenz

Konvergenz und Divergenz

Konvergenz: Eine Folge heißt **konvergent**, wenn ihr Grenzwert als reelle Zahl existiert. Die Folge konvergiert gegen ihren Grenzwert. Die Eigenschaft heißt Konvergenz.
Divergenz: Eine Folge heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist (kein Grenzwert existiert). Die Eigenschaft heißt Divergenz.

Arten der Divergenz

Divergent bedeutet: kein Grenzwert
Es gibt zwei Arten:

1. **Bestimmt divergent:** Die Folge strebt gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Man spricht von einem *uneigentlichen Grenzwert*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

2. **Unbestimmt divergent:** Die Folge hat überhaupt kein Grenzverhalten (z. B. oszilliert sie zwischen Werten).

Beispiele: Konvergenz und Divergenz

Konvergente Folgen:

- $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Nullfolge)
- $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

Divergente Folgen:

- $(a_n) = (n^2)$ ist bestimmt divergent: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- $a_n = (-1)^n$ ist unbestimmt divergent: $1, -1, 1, -1, \ldots$ (kein Grenzwert)

Nullfolge

Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.
Beispiele für Nullfolgen:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad a_n = \frac{5}{n^3+1}$$

13.3 Methoden zur Grenzwertbestimmung

Übersicht der Methoden

Es gibt verschiedene Methoden, um Grenzwerte zu berechnen:

a) **Skizze (grafische Methode)** – selten verwendet, nur zur Orientierung

b) **Probieren** (sehr große Werte für n einsetzen)

c) **Typische Standard-Grenzwerte** auswendig kennen

d) **Grenzwertsätze** anwenden

e) **Stetigkeit einer Funktion** $f(x)$ nutzen

13.3.1 Standard-Grenzwerte

Wichtige Standard-Grenzwerte I

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{für } a > 0$$

Standard-Grenzwerte II (geometrische Folgen)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ +\infty & \text{für } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} (-2)^n \text{ existiert nicht}$$

13.3.2 Grenzwertsätze

Grenzwertsätze

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. **Summensatz:** $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. **Produktsatz:** $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. **Quotientensatz:** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad$ (falls $b \neq 0$)
4. **Faktorregel:** $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a \quad$ für $c \in \mathbb{R}$

Anwendung der Grenzwertsätze

Aufgabe: Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-1}{2n^2+7}$
Lösung: Wir klammern im Zähler und Nenner die höchste Potenz von n aus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-1}{2n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{7}{n^2}}$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ folgt:

$$= \frac{5+0-0}{2+0} = \frac{5}{2}$$

Antwort: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-1}{2n^2+7} = \frac{5}{2}$

13.3.3 Stetigkeit nutzen

Grenzwert bei stetigen Funktionen

Wenn f eine stetige Funktion ist und (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$$

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n} = e^0 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

13.4 Die Eulersche Zahl

Definition der Eulerschen Zahl e

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828\ldots$$

Diese Zahl e heißt **Eulersche Zahl** und ist die Basis der natürlichen Logarithmen und Exponentialfunktionen.
Bedeutung: Die Zahl e spielt eine zentrale Rolle in der Analysis, insbesondere bei Wachstumsprozessen, Zinseszinsrechnung und Differentialgleichungen.

Verallgemeinerte Form

Für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2}$$

Numerische Annäherung an e

Betrachten wir die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

n	$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00000
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815

Die Folgenglieder nähern sich $e \approx 2{,}71828$ an.

13.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Grenzwerte berechnen

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+7}{2n-1}$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n}{3n^2-2}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n^2+1}$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n^3+4n^2}$

Aufgabe 2: Konvergenz untersuchen

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

1. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
2. $a_n = \frac{3^n}{2^n}$
3. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{n}$
4. $a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Aufgabe 3: Grenzwerte mit e

Berechnen Sie:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$
3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

Zusammenfassung

Wichtige Konzepte:

- Ein Grenzwert ist eine Zahl, der sich die Folgenglieder für $n \to \infty$ annähern
- **Konvergent:** Grenzwert existiert als reelle Zahl
- **Divergent:** Kein Grenzwert (bestimmt oder unbestimmt)
- **Nullfolge:** Grenzwert ist 0

Methoden: Standard-Grenzwerte, Grenzwertsätze, Stetigkeit nutzen
Besonderer Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

14

Grenzwerte von Funktionen – Verhalten im Unendlichen

14.1 Grundlagen

Was ist ein Grenzwert bei Funktionen?

Der **Grenzwert einer Funktion** $f(x)$ beschreibt das Verhalten der Funktionswerte, wenn sich x einem bestimmten Wert nähert oder ins Unendliche strebt.
Drei Arten von Grenzwerten:

Typ a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ (Verhalten für sehr große x)

Typ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$ (Verhalten für sehr kleine x)

Typ c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$ (Verhalten in der Nähe von a)

In diesem Kapitel: Fokus auf Typ a) und b) – das Verhalten im Unendlichen.

Verhalten im Unendlichen

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$: Die Funktionswerte nähern sich g an, wenn x immer größer wird
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$: Die Funktionswerte nähern sich g an, wenn x immer kleiner wird (negativ)

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

Für sehr große x: $f(x) \approx \frac{2x}{x} = 2$, also $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x} = 2$.

Anschauliches Beispiel

Betrachte: $f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$
Wertetabelle:

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	2,917	2,990	2,999	2,9999	2,99999

Beobachtung: Die Funktionswerte nähern sich immer mehr der Zahl 3 an!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x+2} = 3$$

Die Epsilon-Definition (mathematisch präzise)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } x_0, \text{ so dass } |f(x) - g| < \varepsilon \text{ für alle } x > x_0$$

Anschaulich: Egal wie klein wir den Streifen um g wählen (Breite 2ε), ab einem gewissen x_0 bleibt die Funktion in diesem Streifen.

14.2 Dominanzbetrachtung bei gebrochenrationalen Funktionen

Dominanzprinzip

Bei gebrochenrationalen Funktionen:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$$

Vergleiche die höchsten Potenzen (n = Zählergrad, m = Nennergrad):
Fall 1: $n < m \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
Fall 2: $n = m \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$
Fall 3: $n > m \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$
Merke: Die niedrigeren Potenzen werden für große x unwichtig!

Beispiel 1: Gleicher Grad

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-7}{2x^2-4x+1}$
Lösung:

- Zählergrad $n = 2$
- Nennergrad $m = 2$
- $\Rightarrow n = m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-7}{2x^2-4x+1} = \frac{3}{2}$$

Ergebnis: Der Grenzwert ist $\frac{3}{2}$.

Beispiel 2: Zählergrad kleiner

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+2}{x^3-5x}$
Lösung:

- Zählergrad $n = 1$
- Nennergrad $m = 3$
- $\Rightarrow n < m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+2}{x^3-5x} = 0$$

Ergebnis: Der Grenzwert ist 0.
Interpretation: Der Nenner wächst viel schneller als der Zähler!

Beispiel 3: Zählergrad größer

Aufgabe: Berechne $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{x-1}$
Lösung:

- Zählergrad $n = 3$
- Nennergrad $m = 1$
- $\Rightarrow n > m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{x-1} = +\infty$$

Ergebnis: Der Grenzwert ist $+\infty$ (bestimmt divergent).
Interpretation: Der Zähler wächst viel schneller – die Funktion strebt gegen $+\infty$.

14.3 Ausklammern der höchsten Potenz

Begründung der Methode

Klammere x^2 aus:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-7}{2x^2-4x+1} = \frac{x^2\left(3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}{2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Für $x \to \infty$: Alle Terme mit x im Nenner gehen gegen 0:

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{3+0-0}{2-0+0} = \frac{3}{2}$$

Schritt-für-Schritt: Ausklammern

Beispiel: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x^2+7}{3x^3+x-4}$
Schritt 1: Höchste Potenz (x^3) ausklammern

$$= \frac{x^3\left(5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}$$

Schritt 2: x^3 kürzen

$$= \frac{5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}$$

Schritt 3: Grenzwert bilden ($x \to \infty$)

$$= \frac{5-0+0}{3+0-0} = \frac{5}{3}$$

14.4 Grenzwert für $x \to -\infty$

Regel für $x \to -\infty$

Praktische Umformungsregel:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

Man ersetzt x durch $-x$ und untersucht den Grenzwert für $x \to +\infty$.
Beispiel:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2(-x)^2 + (-x)}{(-x)^2 - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

14.5 Waagerechte Asymptoten

Definition

Eine Gerade $y = g$ heißt **waagerechte Asymptote**, wenn

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = g.$$

Anschaulich: Der Graph nähert sich der Geraden $y = g$ immer mehr an.

Beispiel: Waagerechte Asymptote

Beispiel: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$
Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

Ergebnis: Die Funktion hat die waagerechte Asymptote $y = 2$.
Bedeutung: Für sehr große x-Werte kommt $f(x)$ immer näher an $y = 2$ heran.

Wichtige Eigenschaften waagerechter Asymptoten

1. Eine Funktion kann höchstens zwei verschiedene waagerechte Asymptoten haben – eine für $x \to \infty$ und eine für $x \to -\infty$.
2. Es ist möglich, dass nur eine oder keine waagerechte Asymptote existiert.
3. Der Graph kann die Asymptote schneiden oder kreuzen – anders als bei senkrechten Asymptoten!
4. Bei rationalen Funktionen: Waagerechte Asymptote existiert genau dann, wenn $n \leq m$.

Beispiel: Verschiedene Asymptoten

Beispiel: $f(x) = \frac{2x+|x|}{x+1}$
Fallunterscheidung:

- Für $x \to \infty$: $|x| = x$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + x}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x + 1} = 3$$

- Für $x \to -\infty$: $|x| = -x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x + (-x)}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Ergebnis: Zwei verschiedene waagerechte Asymptoten:

- $y = 3$ (rechts)
- $y = 1$ (links)

14.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Grenzwerte im Unendlichen

Berechne die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x}{x^3-1}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+7}{x^2+1}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^4-3x^2}{2x^4+5x}$
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-3x}{2x^2+5}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3x^2}{x^3-7}$
6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x-2}{3x-1}$

Tipp: Vergleiche die höchsten Potenzen im Zähler und Nenner!

Aufgabe 2: Waagerechte Asymptoten

Bestimme alle waagerechten Asymptoten:

1. $f(x) = \frac{4x^2+3x-1}{2x^2-5}$
2. $f(x) = \frac{3x+7}{x^2+2}$
3. $f(x) = \frac{5x^3-x}{x^2+1}$
4. $f(x) = \frac{7x^2-3x+2}{3x^2+x-5}$
5. $f(x) = \frac{4x+9}{2x^2-1}$

Aufgabe 3: Gemischte Aufgabe

Bestimme $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ für:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x|x|}{x^2+1}$$

Hinweis: Betrachte die Fälle $x > 0$ und $x < 0$ getrennt!

Zusammenfassung: Verhalten im Unendlichen

Wichtigste Erkenntnisse:

- Grenzwerte im Unendlichen beschreiben das Verhalten für sehr große oder sehr kleine x-Werte
- Dominanzprinzip: Bei rationalen Funktionen bestimmt die höchste Potenz das Verhalten

Drei Fälle:

- $n < m$: Grenzwert $= 0$
- $n = m$: Grenzwert $= \frac{a_n}{b_m}$
- $n > m$: Grenzwert $= \pm\infty$

Waagerechte Asymptote: $y = g$ wenn $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = g$
Regel für negative Unendlichkeit:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$$

15

Grenzwerte von Funktionen – Grenzwerte an einer Stelle

15.1 Einführung: Grenzwerte an festen Stellen

Kurzer Rückblick: Teil 1

Bisher gelernt:

- Grenzwerte im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$
- Dominanzprinzip: Höchste Potenz bestimmt das Verhalten
- Waagerechte Asymptoten: $y = g$

Heute:

- Was passiert an einer festen Stelle? $\lim\limits_{x \to a} f(x)$
- Drei Arten von Problemen: Lücke, Polstelle, Sprung
- Methoden zur Berechnung solcher Grenzwerte

Grenzwert an einer Stelle

Die Frage: Was passiert, wenn x gegen eine feste Zahl a geht?
Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Bei $x = 2$ können wir nicht einsetzen: $\frac{0}{0}$ ist undefiniert!
Aber: Wenn x nahe bei 2 ist (z. B. $1{,}9$ oder $2{,}1$), dann ist $f(x)$ nahe bei 4.
Grenzwert:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Das bedeutet: $f(x)$ nähert sich 4 an, wenn x gegen 2 geht.

15.2 Einseitige Grenzwerte

Links- und rechtsseitiger Grenzwert

Manchmal kommt es darauf an, von welcher Seite wir uns nähern:

- **Von links:** $\lim_{x \to a^-} f(x)$ oder $x \nearrow a$
  (Wir kommen von kleineren Werten, $x < a$)
- **Von rechts:** $\lim_{x \to a^+} f(x)$ oder $x \searrow a$
  (Wir kommen von größeren Werten, $x > a$)

Wichtige Regel:

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = g$$

Der Grenzwert existiert nur, wenn beide Seiten zum gleichen Wert führen!

15.3 Die drei Probleme bei Grenzwerten

Übersicht: Die drei Arten von Unstetigkeiten

Wenn eine Funktion an der Stelle $x = a$ nicht definiert ist oder springt, gibt es drei Möglichkeiten:

1. **Hebbare Lücke:** Der Grenzwert existiert. Man könnte die Lücke „schließen“.
2. **Polstelle:** Die Funktion geht gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Die Funktion hat eine senkrechte Asymptote.
3. **Sprungstelle:** Links und rechts führen zu verschiedenen Werten. Die Funktion springt.

15.3.1 Hebbare Lücke

1. Hebbare Lücke

Eine **hebbare Lücke** liegt vor, wenn:

- $f(a)$ nicht definiert ist
- **aber:** Der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x) = g$ existiert

Beispiel: Hebbare Lücke

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{bei } x = 2$$

Schritt 1: Einsetzen $\to \frac{0}{0}$ Problem!
Schritt 2: Faktorisieren

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Schritt 3: Kürzen (für $x \neq 2$)

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

Schritt 4: Grenzwert berechnen

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Ergebnis: Hebbare Lücke bei $x = 2$ mit Grenzwert 4.

Übung: Hebbare Lücke

Berechne die Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
2. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

15.3.2 Polstelle

2. Polstelle

Eine **Polstelle** liegt vor, wenn:

- $f(a)$ nicht definiert ist
- Die Funktion gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht

Die Gerade $x = a$ ist eine **senkrechte Asymptote**.

Beispiel: Polstelle

Gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \text{bei } x = 3$$

Von links ($x < 3$, z. B. $x = 2{,}9$): $x - 3$ ist negativ und klein $\Rightarrow$ $f(x)$ ist negativ und sehr groß

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$$

Von rechts ($x > 3$, z. B. $x = 3{,}1$): $x - 3$ ist positiv und klein $\Rightarrow$ $f(x)$ ist positiv und sehr groß

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

Ergebnis: Polstelle bei $x = 3$ mit senkrechter Asymptote $x = 3$.

Polstellen erkennen

Bei einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$:
Regel für Polstellen: Eine Polstelle liegt bei $x = a$ vor, wenn:

1. Der Nenner $N(a) = 0$ ist
2. Der Zähler $Z(a) \neq 0$ ist

Hinweis: Falls sowohl Zähler als auch Nenner 0 sind, liegt eine **hebbare Lücke** vor (oder eine Polstelle höherer Ordnung, falls nach dem Kürzen immer noch 0 im Nenner steht).

Polstellen erkennen – Beispiel

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$$

Nenner: $N(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
Nenner $= 0$ bei $x = 2$ und $x = -2$
Zähler: $Z(x) = x + 1 \neq 0$ bei $x = 2$ und $x = -2$
Ergebnis: Zwei Polstellen bei $x = 2$ und $x = -2$.

Übung: Polstellen untersuchen

Bestimme die Polstellen und die einseitigen Grenzwerte:

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ bei $x = -3$
2. $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$ bei $x = 2$
3. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ bei $x = -1$

Übung: Polstellen finden

Finde alle Polstellen:

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$
3. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ (Achtung: Faktorisieren!)

15.3.3 Sprungstelle

3. Sprungstelle

Eine **Sprungstelle** liegt vor, wenn die einseitigen Grenzwerte verschieden sind.
Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 1 \\ x+2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Von links: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$
Von rechts: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$
Ergebnis: Sprungstelle bei $x = 1$ mit Sprunghöhe 2.

Übung: Sprungstellen

Untersuche auf Sprungstellen bei $x = 0$:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ 2x+1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

15.4 Methoden zur Grenzwertberechnung

Unbestimmte Ausdrücke

Manchmal führt direktes Einsetzen zu unbestimmten Ausdrücken:

$$\frac{0}{0} \leftarrow \text{häufigster Fall (hebbare Lücke)} \qquad \frac{\infty}{\infty} \leftarrow \text{bei Grenzwerten im Unendlichen}$$

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \text{etc.}$$

Was tun? Bei unbestimmten Ausdrücken müssen wir die Funktion algebraisch umformen!

15.4.1 Methode 1: Faktorisieren und Kürzen

Wann?

Bei $\frac{0}{0}$ mit Polynomen

Beispiel

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Schritt 1: Faktorisieren

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3}$$

Schritt 2: Kürzen (für $x \neq 3$)

$$= x + 3$$

Schritt 3: Grenzwert berechnen

$$\lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

Übung: Faktorisieren und Kürzen

Berechne die Grenzwerte:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{x}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

Tipp: Nullstellen des Zählers finden, Polynomdivision oder binomische Formeln verwenden!

15.4.2 Methode 2: Erweitern (bei Wurzeln)

Wann?

Bei $\frac{0}{0}$ mit Wurzeln

Beispiel

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Schritt 1: Erweitern mit $(\sqrt{x} + 2)$

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

Schritt 2: Kürzen

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Schritt 3: Grenzwert berechnen

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Übung: Erweitern mit Wurzeln

Berechne die Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

15.5 Weitere Übungen und Hausaufgaben

Übung: Unstetigkeitsstellen analysieren

Untersuche die Funktion auf Unstetigkeitsstellen:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

1. Wo ist f nicht definiert?
2. Welche Art von Unstetigkeitsstelle liegt jeweils vor?
3. Bestimme die Grenzwerte.

Übung: Grenzwerte berechnen

Berechne die Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

Klausuraufgabe: Stetigkeit untersuchen

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 5 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

1. Untersuche, ob f an der Stelle $x = 2$ stetig ist. Begründe deine Antwort.
2. Bestimme den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle $x = 2$.
3. Skizziere den Graphen von f im Intervall $[1, 3]$.

Zusammenfassung

Die drei Arten von Unstetigkeiten:

1. **Hebbare Lücke:** Grenzwert existiert $\rightarrow$ kann geschlossen werden
2. **Polstelle:** Funktion geht gegen $\pm\infty$ $\rightarrow$ senkrechte Asymptote
3. **Sprungstelle:** Einseitige Grenzwerte verschieden $\rightarrow$ Sprung

Methoden zur Grenzwertberechnung:

- **Faktorisieren und Kürzen:** bei $\frac{0}{0}$ mit Polynomen
- **Erweitern:** bei $\frac{0}{0}$ mit Wurzeln (dritte binomische Formel)

16

Grenzwerte von Funktionen – Asymptoten und Polynomdivision

16.1 Einführung und Wiederholung

Bisherige Ergebnisse

Wir haben bereits zwei Arten von Asymptoten kennengelernt:
1. Waagerechte Asymptoten: $y = g$ wenn $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = g$
2. Senkrechte Asymptoten: Bei Polstellen, wenn die Funktion gegen $\pm\infty$ geht
Heute: Die dritte Art – **schräge Asymptoten**!

16.2 Waagerechte Asymptoten – Wiederholung

Entscheidungsregel für waagerechte Asymptoten

Bei gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots}$:
Fall 1: $n < m$ **(Nennergrad höher)**

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Asymptote: } y = 0$$

Fall 2: $n = m$ **(gleich hoher Grad)**

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \quad \Rightarrow \quad \text{Asymptote: } y = \frac{a_n}{b_m}$$

Fall 3: $n > m$ **(Zählergrad höher)**

Keine waagerechte Asymptote!

Übung: Waagerechte Asymptoten

Bestimmen Sie die waagerechten Asymptoten (falls vorhanden):

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 4}$

16.3 Polynomdivision

Das Problem

Was passiert bei Fall 3 ($n > m$)? Die Funktion kann trotzdem ein vorhersagbares Verhalten haben!
Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$
Für $x \to \infty$ wächst die Funktion unbeschränkt, aber annähernd **linear** – sie nähert sich einer **schrägen Geraden** an!

16.3.1 Grundlagen der Polynomdivision

Polynomdivision

Die **Polynomdivision** ist ein Verfahren, um ein Polynom durch ein anderes zu teilen – analog zur schriftlichen Division von Zahlen.
Erinnerung Zahlendivision:

$$23 : 4 = 5 \text{ Rest } 3 \quad \text{oder} \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3$$

Bei Polynomen:

$$x^2 + 3x + 1 = (x + 1) \cdot (x + 2) + (-1)$$

Vorgehen: Polynomdivision Schritt für Schritt

1. **Divide:** Höchsten Term des Dividenden durch höchsten Term des Divisors
2. **Multipliziere:** Das Ergebnis mit dem ganzen Divisor
3. **Subtrahiere:** Vom Dividenden
4. **Wiederhole:** Mit dem Rest, bis der Grad des Rests kleiner ist als der Grad des Divisors

Wichtig: Für $x \to \infty$ kann der Rest oft vernachlässigt werden!

Beispiel 1: Polynomdivision ohne Rest

Aufgabe: $(x^2 + 5x + 6) : (x + 2)$
Lösung:

$$\begin{array}{ll}
\underline{x^2 + 5x + 6} : (x+2) = x + 3 & \\
-\underline{(x^2 + 2x)} & (\text{1. Schritt: } x^2 : x = x) \\
\quad 3x + 6 & \\
\quad - \underline{(3x + 6)} & (\text{2. Schritt: } 3x : x = 3) \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Ergebnis: $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} = x+3$

Übung: Polynomdivision ohne Rest

Führen Sie die Polynomdivision durch:

a) $(x^2+7x+12):(x+3)$

b) $(x^2-4):(x-2)$

c) $(2x^2+5x+3):(x+1)$

Beispiel 2: Polynomdivision mit Rest

Aufgabe: $(x^2+3x+1):(x+1)$
Lösung:

$$\begin{array}{ll}
\underline{x^2+3x+1} : (x+1) = x+2 \text{ Rest } -1 & \\
\underline{-(x^2+x)} & (1.\text{ Schritt: } x^2 : x = x) \\
\quad 2x+1 & \\
\quad -\underline{(2x+2)} & (2.\text{ Schritt: } 2x : x = 2) \\
\qquad -1 & (\text{Rest!})
\end{array}$$

Ergebnis:

$$\frac{x^2+3x+1}{x+1} = x+2-\frac{1}{x+1}$$

Grenzwertbetrachtung: Für $x \to \infty$ gilt $\dfrac{-1}{x+1} \to 0$

Übung: Polynomdivision mit Rest

Führen Sie die Polynomdivision durch und geben Sie den Rest an:

a $(x^2+4x+1):(x+2)$

b $(x^2-x+3):(x-1)$

c $(2x^2+3x-1):(x+2)$

16.4 Schräge Asymptoten

16.4.1 Definition und Existenzkriterium

Schräge Asymptote

Eine Gerade $y = mx + c$ mit $m \neq 0$ heißt **schräge Asymptote**, wenn sich die Funktion dieser Geraden für $x \to \pm\infty$ annähert.
Anschaulich: Der Abstand zwischen Funktion und Gerade wird beliebig klein.

Wann gibt es eine schräge Asymptote?

Bei gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ existiert eine schräge Asymptote **genau dann**, wenn:

$$\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad} + 1$$

Also: $n = m + 1$
Falls $n > m + 1$: Keine Asymptote (Funktion wächst stärker als linear)

16.4.2 Berechnung schräger Asymptoten

Methode: Polynomdivision zur Bestimmung schräger Asymptoten

1. Führe die Polynomdivision durch:
$$\frac{Z(x)}{N(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$$
2. $Q(x)$ ist das Ergebnis (eine Gerade $mx + c$)
3. $\frac{R(x)}{N(x)}$ ist der Rest (geht gegen 0 für $x \to \infty$)
4. Die schräge Asymptote ist:
$$\boxed{y = Q(x) = mx + c}$$

Wichtig: Der Rest verschwindet für große x, deshalb ist $y = Q(x)$ die Asymptote!

Beispiel: Schräge Asymptote bestimmen

Gegeben: $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$
Schritt 1: Gradprüfung

- Zählergrad $= 2$
- Nennergrad $= 1$
- Da $2 = 1 + 1$, gibt es eine schräge Asymptote.

Schritt 2: Polynomdivision (siehe Beispiel 2 oben)

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

Schritt 3: Ergebnis Die schräge Asymptote ist:

$$\boxed{y = x + 2}$$

Übung: Schräge Asymptoten bestimmen

Bestimmen Sie die schrägen Asymptoten:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

16.5 Vollständige Funktionsanalyse

Beispiel: Polstellen und schräge Asymptoten

Untersuchen Sie: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

Schritt 1: Polstellen finden

- Nenner $= 0$ bei $x = 1$
- Zähler bei $x = 1$: $1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$
- $\Rightarrow$ Polstelle bei $x = 1$ (senkrechte Asymptote)

Schritt 2: Schräge Asymptote (Polynomdivision)

$$\begin{aligned}(x^2 - x - 2) : (x - 1) &= x - \frac{2}{x - 1} \\ &= x \text{ mit Rest } -2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Schräge Asymptote: $y = x$

Übung: Vollständige Funktionsanalyse

Analysieren Sie die Funktionen vollständig (Polstellen + Asymptoten):

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

16.6 Zusammenfassung: Die drei Asymptoten-Typen

Übersicht: Entscheidungsbaum für Asymptoten

Gegeben: $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ mit Graden n (Zähler) und m (Nenner)

Fall	Kriterium	Asymptote
1	$n < m$	Waagerecht: $y = 0$
2	$n = m$	Waagerecht: $y = \frac{a_n}{b_m}$
3	$n = m + 1$	Schräg: $y = mx + c$ (via Polynomdivision)
4	$n > m + 1$	Keine Asymptote

Zusätzlich: Senkrechte Asymptoten bei $N(x) = 0$ und $Z(x) \neq 0$ (Polstellen)
Merksatz:

- $n < m$: Funktion geht gegen 0
- $n = m$: Funktion geht gegen konstanten Wert
- $n = m + 1$: Funktion näher sich schräger Gerade an
- $n > m + 1$: Funktion wächst stärker als linear

16.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Polynomdivision

Führen Sie die Polynomdivision durch:

a) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x - 1)$

b) $(2x^2 + 7x + 3) : (2x + 1)$

Aufgabe 2: Alle Asymptoten bestimmen

Bestimmen Sie alle Asymptoten (waagerecht, senkrecht, schräg):

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$

Aufgabe 3: Klausuraufgabe

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

1. Bestimmen Sie alle Asymptoten der Funktion (waagerecht, senkrecht, schräg).
2. Untersuchen Sie die Funktion auf Unstetigkeitsstellen. Welche Art liegt vor?
3. Skizzieren Sie den Graphen von f unter Berücksichtigung aller Asymptoten.

17

Die Ableitung – Steigung von Funktionen

17.1 Von der linearen zur nicht-linearen Steigung

17.1.1 Wiederholung: Lineare Funktionen

Lineare Funktion

Eine **lineare Funktion** hat die Form:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

Parameter:

- m: Steigung (wie steil ist die Gerade?)
- b: y-Achsenabschnitt (wo schneidet die Gerade die y-Achse?)

Wichtig: Bei linearen Funktionen ist die Steigung überall gleich.

Steigung zwischen zwei Punkten

Für zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ auf einer Geraden gilt:

$$m = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{horizontaler Abstand}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bedeutung:

- $y_2 - y_1$: Wie viel geht es nach oben/unten?
- $x_2 - x_1$: Wie weit geht es nach rechts?

Beispiel: Steigung berechnen

Aufgabe: Berechne die Steigung der Geraden $f(x) = 3x + 2$ zwischen den Punkten $P_1(1, f(1))$ und $P_2(4, f(4))$.
Lösung:

1. Funktionswerte berechnen:

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5, \quad f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

2. Steigungsformel anwenden:

$$m = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{14 - 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Ergebnis: Die Steigung ist $m = 3$ (wie erwartet, da $f(x) = 3x + 2$).

17.1.2 Das Problem bei nicht-linearen Funktionen

Das Problem

Bei nicht-linearen Funktionen (z. B. $f(x) = x^2$) ist die Steigung **nicht überall gleich** – sie ändert sich von Punkt zu Punkt!
Zentrale Frage: Wie finden wir die genaue Steigung an einer **bestimmten Stelle**?
Antwort: Wir nähern uns mit einer Geraden an!

17.2 Die Sekante als Hilfsgerade

Sekante

Eine **Sekante** ist eine Gerade, die den Graphen einer Funktion in zwei Punkten schneidet.
Zwei Punkte auf dem Graphen:

- $P(x_0, f(x_0))$: Ein fester Punkt (der Bezugspunkt)
- $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$: Ein zweiter Punkt im Abstand h

Steigung der Sekante:

$$m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Beispiel: Sekantensteigung berechnen

Aufgabe: Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte $P(1, f(1))$ und $Q(3, f(3))$ der Funktion $f(x) = x^2$.
Lösung:

1. Bestimmung der Werte:

$$x_0 = 1, \quad h = 2, \quad f(1) = 1, \quad f(3) = 9$$

2. Einsetzen in die Formel:

$$m_S = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Ergebnis: Die Sekantensteigung zwischen $x = 1$ und $x = 3$ beträgt 4.

17.3 Von der Sekante zur Tangente

Die zentrale Idee

Wir lassen den zweiten Punkt Q immer näher an P heranrücken!
Wenn h immer kleiner wird:

- Q rückt näher an P heran
- Die Sekante wird zur **Tangente** (Berührgerade)
- Die Sekantensteigung nähert sich der **Tangentensteigung** an

Steigung der Tangente

Die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 ist der Grenzwert der Sekantensteigungen für $h \to 0$:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Bedeutung: Die Tangente berührt den Graphen im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ und hat dort dieselbe Steigung wie der Graph.

Beispiel: Tangentensteigung bestimmen

Aufgabe: Bestimme die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$.
Lösung:

$$\begin{aligned} m_T &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4 + h) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Tangentensteigung an der Stelle $x = 2$ beträgt 4.

17.4 Der Ableitungsbegriff

Die Ableitung

Die **Ableitung** $f'(x)$ gibt die Steigung der Tangente an jeder Stelle x an.
Definition über den Grenzwert:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sprechen:

- $f'(x)$: „f Strich von x”
- Auch: „Steigungsfunktion”
- „Ableiten” bedeutet: Die Steigung berechnen

Der wichtigste Merksatz

Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 an.
Beispiel: Wenn $f'(2) = 4$, dann steigt die Tangente an der Stelle $x = 2$ mit der Steigung 4.
Geometrische Deutung:

- $f'(x) > 0$: Funktion ist steigend (Tangente steigt)
- $f'(x) < 0$: Funktion ist fallend (Tangente fällt)
- $f'(x) = 0$: Waagerechte Tangente (Extremwert möglich)

17.5 Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit

Eine Funktion f heißt an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert (also eindeutig ist).
Anschaulich: Die Funktion hat an dieser Stelle eine eindeutige Steigung (keine „Ecke” oder „Spitze”).

Beispiel: Nicht differenzierbare Funktion

Aufgabe: Ist die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?
Lösung: Wir prüfen den Grenzwert von links und rechts:
Linksseitiger Grenzwert ($h < 0$, also $h \to 0^-$):

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Rechtsseitiger Grenzwert ($h > 0$, also $h \to 0^+$):

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Schluss: Da $-1 \neq 1$, existiert der Grenzwert nicht.
Ergebnis: $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ **nicht differenzierbar** (die Funktion hat dort eine „Ecke”).

17.6 Die Gleichung der Tangente

Tangentengleichung

Die Tangente im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $m_T = f'(x_0)$ hat die Gleichung:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Herleitung: Punktsteigungsform einer Geraden mit Punkt $(x_0, f(x_0))$ und Steigung $f'(x_0)$.

Beispiel: Tangentengleichung aufstellen

Aufgabe: Bestimme die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $P(2, f(2))$.
Lösung:

1. Bekannte Werte: $x_0 = 2$, $f(2) = 4$, $f'(2) = 4$ (aus vorherigem Beispiel)
2. Einsetzen in die Tangentengleichung:

$$\begin{aligned} t(x) &= f'(2) \cdot (x - 2) + f(2) \\ &= 4 \cdot (x - 2) + 4 \\ &= 4x - 8 + 4 \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Tangentengleichung ist $t(x) = 4x - 4$.

17.7 Der Anstiegswinkel

Anstiegswinkel

Der **Anstiegswinkel** α ist der Winkel, den die Tangente mit der positiven x-Achse bildet.
Zusammenhang zwischen Steigung und Winkel:

$$m_T = \tan(\alpha) \quad \text{oder} \quad \alpha = \arctan(m_T)$$

Berechnung:

$$\alpha = \arctan(f'(x_0))$$

Beispiel: Anstiegswinkel berechnen

Wenn $m_T = 4$, dann ist:

$$\alpha = \arctan(4) \approx 75{,}96^\circ$$

Interpretation: Die Tangente steigt unter einem Winkel von etwa 76° an.

17.8 Zusammenfassung

Die wichtigsten Begriffe und Formeln

Grundbegriffe:

- **Sekante:** Gerade durch zwei Punkte des Graphen
- **Tangente:** Berührgerade (Grenzfall der Sekante für $h \to 0$)

- **Ableitung** $f'(x)$**:** Steigung der Tangente an jeder Stelle
- **Differenzierbar:** Wenn die Ableitung existiert (keine Ecke/Spitze)

Wichtigste Formeln:

$$\text{Sekantensteigung:} \quad m_S = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$\text{Ableitung (Tangentensteigung):} \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\text{Tangentengleichung:} \quad t(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$
$$\text{Anstiegswinkel:} \quad \alpha = \arctan(f'(x_0))$$

17.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Ableitung mit der Definition berechnen

Berechnen Sie die Ableitung (Steigung der Tangente) an der gegebenen Stelle mit der Definition:

a) $f'(3)$ für $f(x) = x^2$

b) $f'(1)$ für $f(x) = 2x^2 + 3x$

c) $f'(2)$ für $f(x) = \frac{1}{x}$

Tipp: Nutzen Sie die Formel:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Aufgabe 2: Tangente vollständig bestimmen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) Berechnen Sie $f'(1)$ mit der Definition der Ableitung.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(1, f(1))$.

c) Berechnen Sie den Anstiegswinkel der Tangente.

Tipps:

- Für a): $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- Für b): $t(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- Für c): $\alpha = \arctan(m_T)$

Aufgabe 3: Differenzierbarkeit untersuchen

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar sind:

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Hinweis: Prüfen Sie, ob der links- und rechtsseitige Grenzwert gleich ist!

18

Ableitungsregeln

18.1 Einführung: Das Problem mit dem Differentialquotienten

Das Problem

Erinnerung: Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Problem: Diese Berechnung ist sehr aufwendig!
Die Lösung: Mathematiker haben einfachere Regeln gefunden!

Übersicht: Die Ableitungsregeln

Einfache Regeln:

- Potenzregel, Faktorregel, Summen-/Differenzregel
- Konstantenregel, Lineare-Funktion-Regel
- e^x-Regel, a^x-Regel
- $\ln$-Regel, allgemeine Logarithmus-Regel
- Sinus-Regel, Cosinus-Regel

Schwere Regeln:

- Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

18.2 Die einfachen Ableitungsregeln

18.2.1 Potenzregel

Potenzregel

Für $n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Merkregel: Der Exponent wird zum Faktor, dann wird der Exponent um 1 verringert.

Beispiele zur Potenzregel

1. $f(x) = x^7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 7x^6$
2. $f(x) = x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
3. $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

18.2.2 Faktorregel und Summenregel

Faktorregel

Für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

Bedeutung: Konstante Faktoren bleiben bei der Ableitung erhalten!

Summen- und Differenzregel

Für differenzierbare Funktionen f und g gilt:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Bedeutung: Summen und Differenzen werden gliedweise abgeleitet!

Übung: Einfache Ableitungen

Berechnen Sie die Ableitungen:

a) $f(x) = 5x^3$

b) $f(x) = x^5 + x^3$

c) $f(x) = 4x^7 - 2x^3 + x$

18.2.3 Konstanten und lineare Funktionen

Konstantenregel und Lineare-Funktion-Regel

Konstantenregel: Für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Lineare-Funktion-Regel: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a$$

Beispiele

- $f(x) = 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
- $f(x) = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3$

18.2.4 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen

e^x**-Regel:**

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

Besonderheit: Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung!
a^x**-Regel:** Für $a > 0, a \neq 1$ gilt:

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

Beispiele

- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$
- $f(x) = 2^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$

18.2.5 Logarithmus-Funktionen

Logarithmus-Funktionen

$\ln$**-Regel:** Für $x > 0$ gilt:

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Allgemeine Logarithmus-Regel: Für $a > 0, a \neq 1$ und $x > 0$ gilt:

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Beispiele

- $f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log_{10}(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

18.2.6 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen

Sinus-Regel:

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$

Cosinus-Regel:

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

Achtung: Beim Cosinus ein negatives Vorzeichen!

Beispiele

- $f(x) = 4\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4\cos(x)$
- $f(x) = 3\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3\sin(x)$
- $f(x) = \sin(x) + \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

Übung: Kombinierte Ableitungen

Berechnen Sie die Ableitungen:

a) $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x - 4$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \sqrt{x} - 5e^x$

c) $f(x) = x^4 + 2\ln(x) + 3\sin(x) - \cos(x)$

18.3 Die schweren Ableitungsregeln

18.3.1 Produktregel

Produktregel

Für differenzierbare Funktionen u und v gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Merkregel: „Ableitung der ersten mal zweite plus erste mal Ableitung der zweite"
Wichtig: Es gilt **NICHT** $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$!

Beispiel: Produktregel

Aufgabe: $f(x) = x^2 \cdot e^x$
Lösung: Setze $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$
Dann: $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = e^x$
Einsetzen in die Produktregel:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$$

Übung: Produktregel

Berechnen Sie die Ableitungen mit der Produktregel:

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - 5)$

c) $f(x) = x^4 \cdot \cos(x)$

18.3.2 Quotientenregel

Quotientenregel

Für differenzierbare Funktionen u und v mit $v(x) \neq 0$ gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Merkregel: „Oben abgeleitet mal unten minus oben mal unten abgeleitet, durch unten zum Quadrat"

Beispiel: Quotientenregel

Aufgabe: $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$
Lösung: Setze $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$
Dann: $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = e^x$
Einsetzen in die Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

Übung: Quotientenregel

Berechnen Sie die Ableitungen mit der Quotientenregel:

a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

18.3.3 Kettenregel

Verkettete Funktionen

Eine Funktion f heißt **verkettet**, wenn sie sich schreiben lässt als:

$$f(x) = g(h(x))$$

wobei:

- $h(x)$ die **innere Funktion** ist
- $g(u)$ die **äußere Funktion** ist (mit $u = h(x)$)

Beispiele für Verkettungen:

- $f(x) = (x^2 + 3)^5 \quad \rightarrow \quad$ Äußere: u^5, Innere: $x^2 + 3$
- $f(x) = e^{3x} \quad \rightarrow \quad$ Äußere: e^u, Innere: $3x$

- $f(x) = \sin(x^3) \quad \to \quad$ Äußere: $\sin(u)$, Innere: x^3
- $f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \to \quad$ Äußere: $\ln(u)$, Innere: $x^2 + 1$

Kettenregel

Für differenzierbare Funktionen g und h gilt:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Alternative Schreibweise: Setze $u = h(x)$

$$f'(x) = g'(u) \cdot h'(x) = \text{äußere Ableitung} \cdot \text{innere Ableitung}$$

Merkregel: Äußere Ableitung mal innere Ableitung

Strategie zur Anwendung der Kettenregel

1. Identifiziere innere Funktion $u = h(x)$
2. Identifiziere äußere Funktion $g(u)$
3. Berechne äußere Ableitung $g'(u)$
4. Berechne innere Ableitung $h'(x)$
5. Multipliziere: $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Beispiel 1: Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = (x^2 + 3x)^5$
Lösung:

- Innere Funktion: $u = h(x) = x^2 + 3x$
- Äußere Funktion: $g(u) = u^5$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 2x + 3$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = 5u^4$

Einsetzen:

$$f'(x) = 5(x^2 + 3x)^4 \cdot (2x + 3)$$

Beispiel 2: Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = e^{3x}$
Lösung:

- Innere Funktion: $u = 3x$
- Äußere Funktion: $g(u) = e^u$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 3$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = e^u$

Einsetzen:

$$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

Beispiel 3: Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = \sin(x^3)$
Lösung:

- Innere Funktion: $u = x^3$
- Äußere Funktion: $g(u) = \sin(u)$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 3x^2$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = \cos(u)$

Einsetzen:

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$$

Beispiel 4: Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
Lösung:

- Innere Funktion: $u = x^2 + 1$
- Äußere Funktion: $g(u) = \ln(u)$
- Innere Ableitung: $h'(x) = 2x$
- Äußere Ableitung: $g'(u) = \frac{1}{u}$

Einsetzen:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

Übung: Kettenregel

Berechnen Sie die Ableitungen mit der Kettenregel:

a) $f(x) = (2x+1)^4$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = \sin(3x-2)$

d) $f(x) = \sqrt{5x-2}$

18.4 Kombinationen und mehrfache Verkettungen

18.4.1 Mehrfache Verkettung

Beispiel: Dreifache Verkettung

Aufgabe: $f(x) = e^{\sin(x^2)}$
Lösung: Hier liegt eine dreifache Verkettung vor!
Schrittweise von außen nach innen:

- Äußerste Funktion: e^u mit $u = \sin(x^2)$
- Mittlere Funktion: $\sin(v)$ mit $v = x^2$
- Innerste Funktion: x^2

Ableitungen:

1. Ableitung von e^u: e^u
2. Ableitung von $\sin(v)$: $\cos(v)$
3. Ableitung von x^2: $2x$

Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

18.4.2 Kombination mehrerer Regeln

Beispiel: Produktregel + Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$
Lösung: Hier brauchen wir Produktregel **und** Kettenregel!
Produktregel: Setze $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^{3x}$

- $u'(x) = 2x$
- Für $v'(x)$ Kettenregel: $v'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

Einsetzen in die Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} \\ &= e^{3x}(2x + 3x^2) \end{aligned}$$

Beispiel: Quotientenregel + Kettenregel

Aufgabe: $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^3}$
Lösung: Quotientenregel **und** Kettenregel!
Setze $u(x) = \sin(2x)$ und $v(x) = x^3$

- Mit Kettenregel: $u'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$
- $v'(x) = 3x^2$

Einsetzen in die Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x) \cdot x^3 - \sin(2x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$$
$$= \frac{2x^3 \cos(2x) - 3x^2 \sin(2x)}{x^6}$$
$$= \frac{2x \cos(2x) - 3\sin(2x)}{x^4}$$

Übung: Kombinierte Regeln

Berechnen Sie die Ableitungen (mehrere Regeln nötig):

a) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

18.5 Zusammenfassung und Strategien

Übersicht: Einfache Ableitungsregeln

Regel	**Funktion**	**Ableitung**
Potenzregel	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Faktorregel	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
Summenregel	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Konstantenregel	c	0
e-Regel	e^x	e^x
ln-Regel	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Sinus-Regel	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Cosinus-Regel	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Übersicht: Schwere Ableitungsregeln

Regel	**Formel**
Produktregel	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Kettenregel	$[g(h(x))]' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Häufige Fehler vermeiden

FALSCH:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v' \quad \times$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'} \quad \times$$
$$[g(h(x))]' = g'(x) \cdot h'(x) \quad \times$$

RICHTIG:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$
$$[g(h(x))]' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Strategien für komplexe Aufgaben

Frage 1: Ist die Funktion ein Produkt, Quotient oder verschachtelt?

- Produkt $(u \cdot v)$ → Produktregel
- Quotient $\left(\frac{u}{v}\right)$ → Quotientenregel
- Verschachtelt $(g(h(x)))$ → Kettenregel

Frage 2: Brauche ich mehrere Regeln?
Häufige Kombinationen:

- Produkt mit verketteten Faktoren: Produkt- + Kettenregel
- Quotient mit verketteten Teilen: Quotienten- + Kettenregel
- Mehrfach verschachtelt: Kettenregel mehrfach anwenden

Wichtige Begriffe für die Prüfung

- **Produkt:** Multiplikation zweier Funktionen $(u \cdot v)$
- **Quotient:** Division zweier Funktionen $\left(\frac{u}{v}\right)$
- **Verkettete/verschachtelte Funktion:** Funktion in Funktion $(g(h(x)))$
- **Innere Funktion:** Das „Innere" bei Verkettung $(h(x))$
- **Äußere Funktion:** Das „Äußere" bei Verkettung $(g(u))$
- **Innere Ableitung:** Ableitung der inneren Funktion $(h'(x))$
- **Äußere Ableitung:** Ableitung der äußeren Funktion $(g'(u))$
- **Die 3 schweren Regeln:** Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

18.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Einfache Regeln

Bestimmen Sie die Ableitungen mit einfachen Regeln:

a) $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 7x - 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2} + 2\sqrt{x} - e^x$

c) $f(x) = x^4 + 2\ln(x) + 3\sin(x) - \cos(x)$

Aufgabe 2: Schwere Regeln

Bestimmen Sie die Ableitungen (schwere Regeln):

a) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ (Produktregel)

b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ (Quotientenregel)

c) $f(x) = (2x+1)^4$ (Kettenregel)

d) $f(x) = e^{-x^2}$ (Kettenregel)

Aufgabe 3: Kombinierte Anwendung

a) $f(x) = \sin(3x - 2)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ (Produkt- + Kettenregel)

d) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^3}$ (Quotienten- + Kettenregel)

19

Die Regel von de L'Hospital

19.1 Das Problem: Unbestimmte Ausdrücke

Das Problem

Berechne: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
Direktes Einsetzen:

$$\frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Problem: Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist mathematisch nicht definiert. Solche Ausdrücke nennt man **unbestimmte Ausdrücke**.
Heute: Eine systematische Methode zur Berechnung solcher Grenzwerte!

Warum ist $\frac{0}{0}$ unbestimmt?

Verschiedene Funktionen, verschiedene Ergebnisse:
Beispiel 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Beispiel 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

Beispiel 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

Alle drei Fälle: Zähler $\to 0$, Nenner $\to 0$
Aber: Unterschiedliche Grenzwerte!
Fazit: $\frac{0}{0}$ kann jeden beliebigen Wert annehmen!

19.2 Die drei Typen unbestimmter Ausdrücke

Die drei Typen unbestimmter Ausdrücke

Typ I (direkt lösbar mit L'Hospital):

$$\frac{0}{0} \quad \text{(null durch null)} \qquad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(unendlich durch unendlich)}$$

Typ II (erst umwandeln):

$\infty \cdot 0$ (unendlich mal null) $\infty - \infty$ (unendlich minus unendlich)

Typ III (erst umwandeln):

0^0 (null hoch null) ∞^0 (unendlich hoch null) 1^∞ (eins hoch unendlich)

19.3 Die Regel von de L'Hospital

Die Regel von de L'Hospital

Seien $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbare Funktionen.
Voraussetzung: Wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In Worten: Leite Zähler und Nenner getrennt ab!

Wichtige Hinweise zur Anwendung

- Die Regel gilt nur für **Typ-I-Ausdrücke** $\left(\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}\right)$
- Leite Zähler und Nenner **getrennt** ab, nicht den ganzen Bruch (nicht Quotientenregel!)
- Die Regel kann **mehrfach** hintereinander angewendet werden
- In Prüfungen: Immer erst den Typ prüfen und dokumentieren!

Vorgehensweise: Schritt für Schritt

Schritt 1: Typ prüfen

- Grenzwerte von Zähler und Nenner separat bestimmen
- Prüfen, ob $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegt
- Dies muss dokumentiert werden!

Schritt 2: L'Hospital anwenden

- Zähler ableiten: $f(x) \to f'(x)$
- Nenner ableiten: $g(x) \to g'(x)$
- Neuen Grenzwert berechnen

Schritt 3: Falls nötig wiederholen

- Wenn erneut Typ I vorliegt $\to$ Nochmal L'Hospital

19.4 Typ I: Direkte Anwendung

19.4.1 Fall $\frac{0}{0}$

Beispiel 1: Typ $\frac{0}{0}$

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Schritt 1: Typ prüfen

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

Es liegt Typ $\frac{0}{0}$ vor.

Schritt 2: L'Hospital anwenden

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = \mathbf{1}$$

Beispiel 2: Typ $\frac{0}{0}$

Aufgabe: Berechne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Schritt 1: Typ prüfen

$$\lim_{x\to 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

Typ $\frac{0}{0}$ liegt vor.

Schritt 2: L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} \\ &= e^0 = \mathbf{1}\end{aligned}$$

Übung: Typ $\frac{0}{0}$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

Tipp: Immer zuerst den Typ prüfen!

19.4.2 Mehrfache Anwendung

Beispiel 3: Mehrfache Anwendung

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
Typ prüfen: Typ $\frac{0}{0}$
L'Hospital (1. Anwendung):

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Erneut Typ prüfen:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} 2x = 0$$

Wieder Typ $\frac{0}{0}$!
L'Hospital (2. Anwendung):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

19.4.3 Fall $\frac{\infty}{\infty}$

Beispiel 4: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$
Typ prüfen:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$ liegt vor.
L'Hospital (1. Anwendung):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Typ prüfen: Wieder $\frac{\infty}{\infty}$
L'Hospital (2. Anwendung):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Beispiel 5: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$
Typ prüfen:

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$ liegt vor.
L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Interpretation: x wächst schneller als $\ln x$.

Übung: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

Beobachtung: Was passiert bei b)? Wie oft müssen Sie L'Hospital anwenden?

19.5 Typ II: Umwandlung erforderlich

19.5.1 Fall $\infty \cdot 0$

Umwandlung in Typ I

Problem: L'Hospital funktioniert nicht direkt bei $\infty \cdot 0$!
Lösung: Umwandeln in einen Bruch (Typ I).
Methoden:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{oder} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Damit erhält man Typ $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$.

Beispiel 6: Typ $\infty \cdot 0$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-x}$
Typ prüfen:

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

Es liegt Typ $\infty \cdot 0$ vor (Typ II).
Umwandlung in Typ I:

$$x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

Neuer Typ: $\frac{\infty}{\infty}$ (jetzt Typ I!)
L'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \mathbf{0}$$

Beispiel 7: Typ $0 \cdot \infty$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
Typ:

$$\lim_{x \to 0^+} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Also Typ $0 \cdot \infty$.

Umwandlung:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Typ: $\frac{-\infty}{\infty}$ (Typ I)
L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{-x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = \mathbf{0}$$

Übung: Typ $\infty \cdot 0$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-2x}$

b) $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$ **(Tipp:** umformen!)

Tipp: Schreiben Sie zuerst als Bruch um!

19.5.2 Fall $\infty - \infty$

Beispiel 8: Typ $\infty - \infty$

Aufgabe: $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
Typ: Beide Summanden $\to +\infty$, also Typ $\infty - \infty$
Umformung auf gemeinsamen Nenner:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

Neuer Typ: $\frac{0}{0}$ (jetzt können wir L'Hospital anwenden!)

19.6 Typ III: Potenzen

Methode für Potenzen

Bei Ausdrücken der Form $[f(x)]^{g(x)}$:
Methode: Logarithmus verwenden

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = \exp\left(\lim g(x) \cdot \ln f(x)\right)$$

Das Produkt $g(x) \cdot \ln f(x)$ ist dann vom Typ II ($\infty \cdot 0$).
Vorgehen:

1. Logarithmus ziehen: $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$
2. Produkt in Bruch umwandeln (Typ II $\to$ Typ I)

3. L'Hospital anwenden
4. Exponentialfunktion anwenden: e^{Ergebnis}

Beispiel 9: Typ 0^0

Aufgabe: Berechne $\lim_{x\to 0^+} x^x$
Typ: 0^0 (Typ III)
Umformung:

$$x^x = e^{x\ln x}$$

Berechne zunächst: $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$
Das ist Typ $0\cdot\infty$ (siehe Beispiel 7).
Ergebnis: $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
Daher:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = \mathbf{1}$$

Beispiel 10: Typ 1^∞ – Die Eulersche Zahl!

Aufgabe: Berechne $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
Typ: 1^∞ (Typ III)
Setze $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, dann:

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Typ: $\frac{0}{0}$
L'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Also: $\lim_{x\to\infty} y = e^1 = \mathbf{e}$

Übung: Typ III

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

Tipp: Verwenden Sie den Logarithmus!

19.7 Häufige Fehler vermeiden

Häufige Fehler

Fehler 1: Quotientenregel verwenden
Falsch:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{(Das ist die Quotientenregel!)}$$

Richtig bei L'Hospital:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zähler und Nenner **separat** ableiten!

Fehler 2: Typ nicht prüfen
In Prüfungen muss immer explizit gezeigt werden, dass ein Typ-I-Ausdruck vorliegt!
Schreibe: „Es liegt Typ $\frac{0}{0}$ vor."

Fehler 3: Zu früh aufhören
Nach der ersten Anwendung von L'Hospital prüfen:

- Ist das Ergebnis bestimmbar? $\rightarrow$ Fertig!
- Ist es wieder Typ I? $\rightarrow$ Nochmal L'Hospital!

Fehler 4: Falsche Typen
L'Hospital nur bei $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ anwenden!
Nicht bei $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{\infty}$ etc.

19.8 Zusammenfassung

Zusammenfassung: Die drei Typen

Typ I: Direkt lösbar
$\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ $\rightarrow$ L'Hospital direkt anwenden

---

Typ II: In Bruch umwandeln

- $\infty \cdot 0$: Schreibe als $\frac{f(x)}{g(x)}$
- $\infty - \infty$: Auf gemeinsamen Nenner bringen

Typ III: Logarithmus verwenden
$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$
$0^0, \infty^0, 1^\infty$ $\rightarrow$ Logarithmus, dann Typ II $\rightarrow$ Typ I

Entscheidungsbaum

Grenzwert berechnen – Wie gehe ich vor?

1. **Direktes Einsetzen**

- Bestimmter Wert $\to$ Fertig!
- Unbestimmter Ausdruck $\to$ Weiter zu 2.

2. **Typ bestimmen**
   - Typ I $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ $\to$ L'Hospital direkt
   - Typ II/III $\to$ Umwandeln in Typ I

Wichtige Grenzwerte zum Merken

Diese Grenzwerte sollten Sie kennen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

19.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Typ I

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (Typ I):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 5x}{e^x}$

Aufgabe 2: Typ II

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (Typ II):

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$

Tipp für b): Erweitern Sie mit $x + \sqrt{x^2 + x}$

Aufgabe 3: Typ III

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (Typ III):

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

c) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

Aufgabe 4: Klausuraufgabe

Gegeben ist der Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

1. Bestimmen Sie den Typ des unbestimmten Ausdrucks.
2. Berechnen Sie den Grenzwert mit der Regel von L'Hospital.
3. Wie oft mussten Sie L'Hospital anwenden?
4. Was sagt das Ergebnis über das Verhalten von $\sin x$ im Vergleich zu x für kleine x aus?

20 Extrempunkte

20.1 Motivation

Warum Extrempunkte?

In der Praxis suchen wir oft nach dem Maximum oder Minimum:

- Wo ist der höchste Punkt einer Flugbahn?
- Bei welcher Menge ist der Gewinn maximal?
- Wo ist der Materialverbrauch minimal?
- Wann erreicht eine Temperatur ihr Maximum?

Heute: Wie findet man solche Extrempunkte mathematisch?

20.2 Grundlagen und Definitionen

20.2.1 Minimalstelle (Tiefpunkt)

Minimalstelle

Ein Punkt x_{min} heißt **Minimalstelle** (oder lokale Minimalstelle), wenn gilt:

$$f(x_{\text{min}}) < f(x) \quad \text{für alle } x \text{ in einer Umgebung von } x_{\text{min}}$$

Bezeichnungen:

- $f(x_{\text{min}})$: Minimum oder Minimalwert
- $(x_{\text{min}}, f(x_{\text{min}}))$: Tiefpunkt

In Worten: Der Funktionswert ist an dieser Stelle kleiner als in der Umgebung.

20.2.2 Maximalstelle (Hochpunkt)

Maximalstelle

Ein Punkt $x_{\max}$ heißt **Maximalstelle** (oder lokale Maximalstelle), wenn gilt:

$$f(x_{\max}) > f(x) \quad \text{für alle } x \text{ in einer Umgebung von } x_{\max}$$

Bezeichnungen:

- $f(x_{\max})$: Maximum oder Maximalwert
- $(x_{\max}, f(x_{\max}))$: Hochpunkt

In Worten: Der Funktionswert ist an dieser Stelle größer als in der Umgebung.

Wichtige Begriffe

Zusammenfassung:

- **Extremstelle:** Die x-Koordinate ($x_{\min}$ oder $x_{\max}$)
- **Extremwert:** Der Funktionswert ($f(x_{\min})$ oder $f(x_{\max})$)
- **Extrempunkt:** Der Punkt im Koordinatensystem $(x, f(x))$

Maximal- und Minimalstellen heißen zusammen **Extremstellen**.

20.3 Die notwendige Bedingung

Die notwendige Bedingung

An einem Extrempunkt ist die Tangente waagerecht, d. h.:

$$f'(x_0) = 0$$

Beobachtung: Die Steigung der Tangente ist null.

Achtung: Nur notwendig, nicht hinreichend!

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist **nur notwendig**!
Das bedeutet:

- Wenn Extremum vorliegt $\Rightarrow$ dann $f'(x_0) = 0$
- Aber: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ **nicht zwingend** Extremum!

Problem: Es könnte auch ein **Sattelpunkt** sein!
Beispiel: $f(x) = x^3$ hat bei $x = 0$ zwar $f'(0) = 0$, aber keinen Extrempunkt!

Beispiel: Sattelpunkt

Funktion: $f(x) = x^3$
Erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2$
Nullstelle: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Beobachtung:

- Tangente ist waagerecht
- Aber: Kein Extremum!
- Die Funktion steigt weiter durch

Fazit: Wir brauchen eine **hinreichende Bedingung**!

20.4 Die zweite Ableitung und hinreichende Bedingung

Die zweite Ableitung

Die **zweite Ableitung** $f''(x)$ ist die Ableitung der ersten Ableitung:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

Sprechweise: „f Strich Strich von x"
Beispiel: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Die hinreichende Bedingung

Sei x_0 eine Stelle mit $f'(x_0) = 0$.
Fall 1: Tiefpunkt (Minimum)

$$\text{Wenn } f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Minimum}$$

Fall 2: Hochpunkt (Maximum)

$$\text{Wenn } f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

Fall 3: Unentschieden

$$\text{Wenn } f''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Aussage möglich}$$

Merkregel (Eselsbrücke)

- $f''(x_0) > 0$ (positiv): Graph ist nach **oben** gekrümmt ⇒ **Tief**punkt (Minimum)
- $f''(x_0) < 0$ (negativ): Graph ist nach **unten** gekrümmt ⇒ **Hoch**punkt (Maximum)

Merke: Plus = nach oben gekrümmt = Minimum (Tiefpunkt)
Minus = nach unten gekrümmt = Maximum (Hochpunkt)

20.5 Systematisches Vorgehen

Extrempunkte bestimmen – Schritt für Schritt

Schritt 1: Erste Ableitung $f'(x)$ berechnen
Schritt 2: Notwendige Bedingung: Löse $f'(x) = 0$
Lösungen sind mögliche Extremstellen
Schritt 3: Zweite Ableitung $f''(x)$ berechnen
Schritt 4: Hinreichende Bedingung: Für jede Lösung x_0:

- $f''(x_0) > 0$: Tiefpunkt
- $f''(x_0) < 0$: Hochpunkt

Schritt 5: Extremwerte: $f(x_0)$ berechnen
Schritt 6: Extrempunkte angeben: $(x_0, f(x_0))$

20.6 Beispiele

20.6.1 Beispiel 1: Polynom 3. Grades

Beispiel 1: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Schritt 1: Erste Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Schritt 2: Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Mögliche Extremstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$
Schritt 3: Zweite Ableitung

$$f''(x) = 6x$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung
Für $x_1 = 1$:

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

Für $x_2 = -1$:

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

Schritt 5 + 6: Extrempunkte

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 3 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T(1, 0) \\ f(-1) &= -1 + 3 + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad H(-1, 4) \end{aligned}$$

Übung: Polynom 3. Grades

Bestimmen Sie alle Extrempunkte:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

Tipp: Folgen Sie den 6 Schritten systematisch!

20.6.2 Beispiel 2: Polynom 4. Grades

Beispiel 2: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

Schritt 1 + 2: Erste Ableitung und Nullstellen

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}$$

Schritt 3: Zweite Ableitung

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f''(0) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$
$$f''(\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 8 = 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$
$$f''(-\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

Schritt 5 + 6: Extrempunkte

$$f(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad H(0, 3)$$
$$f(\sqrt{2}) = 4 - 8 + 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad T_1(\sqrt{2}, -1)$$
$$f(-\sqrt{2}) = -1 \quad \Rightarrow \quad T_2(-\sqrt{2}, -1)$$

Übung: Polynom 4. Grades

Bestimmen Sie alle Extrempunkte:

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

20.6.3 Beispiel 3: Exponentialfunktion

Beispiel 3: $f(x) = x^2 e^{-x}$

Schritt 1: Erste Ableitung (Produktregel!)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(2x - x^2) \\ &= xe^{-x}(2 - x) \end{aligned}$$

Schritt 2: Nullstellen

$$xe^{-x}(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

(Da $e^{-x} > 0$ für alle x)

Schritt 3: Zweite Ableitung

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f''(0) = e^0 \cdot 2 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$
$$f''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

Schritt 5 + 6: Extrempunkte

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(0, 0)$$
$$f(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54 \quad \Rightarrow \quad H(2, 4e^{-2})$$

Übung: Exponentialfunktionen

Bestimmen Sie alle Extrempunkte:

a) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

c) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

Tipp: Vergessen Sie die Produktregel nicht!

20.6.4 Beispiel 4: Trigonometrische Funktion

Beispiel 4: $f(x) = \sin x + \cos x$ in $[0, 2\pi]$

Schritt 1 + 2: Erste Ableitung und Nullstellen

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$
$$\cos x = \sin x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1$$
$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Schritt 3 + 4: Zweite Ableitung und Bedingung

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$
$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$
$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

Schritt 5 + 6: Extrempunkte (y-Koordinaten berechnen)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad H\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$$

Übung: Trigonometrische Funktionen

Bestimmen Sie alle Extrempunkte im Intervall $[0, 2\pi]$:

a) $f(x) = 2\sin x - x$

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$

20.7 Sonderfälle und Vertiefung

20.7.1 Der Fall $f''(x_0) = 0$

Was passiert, wenn die zweite Ableitung null ist?

Problem: Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, liefert die zweite Ableitung keine Aussage.
Mögliche Lösungen:

1. Höhere Ableitungen untersuchen ($f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \ldots$)
2. Vorzeichen von $f'(x)$ links und rechts von x_0 prüfen

Beispiel: $f(x) = x^4$ bei $x = 0$

$$f'(0) = 0 \text{ und } f''(0) = 0, \text{ aber } f^{(4)}(0) = 24 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

20.7.2 Sattelpunkte erkennen

Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** ist eine Stelle mit waagerechter Tangente, aber kein Extremum.
Beispiel: $f(x) = x^3$

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt (Wendepunkt)
Merke: Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht automatisch Extrempunkt!

Regeln: Extremum oder Sattelpunkt?

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$:
Untersuchung mit höheren Ableitungen:
Bestimme die niedrigste Ableitung $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
Fall 1: n ist gerade (z. B. $f^{(4)}(x_0) \neq 0$)

- Wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$: Minimum
- Wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$: Maximum

Fall 2: n ist ungerade (z. B. $f^{(3)}(x_0) \neq 0$)

- Kein Extremum, sondern **Sattelpunkt** (Wendepunkt)

20.8 Zusammenfassung

Zusammenfassung: Extrempunkte bestimmen

Notwendige Bedingung:

$$f'(x_0) = 0$$

Liefert mögliche Extremstellen (aber nicht alle sind Extrema!)
Hinreichende Bedingung:

- $f''(x_0) > 0$: Tiefpunkt (Minimum)
- $f''(x_0) < 0$: Hochpunkt (Maximum)
- $f''(x_0) = 0$: Weitere Untersuchung nötig

Besonderheit: Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht immer Extrempunkt! Es könnte ein Sattelpunkt sein.

Entscheidungsbaum

Extrempunkte bestimmen – Wie gehe ich vor?

1. **Berechne** $f'(x)$**, löse** $f'(x) = 0$
   $\downarrow$
2. **Berechne** $f''(x_0)$
   $\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$
3. **Auswertung:**

$f'' > 0$: Tiefpunkt
$f'' < 0$: Hochpunkt
$f'' = 0$: Weitere Untersuchung

Wichtige Begriffe – Überblick

- **Extremstelle:** x-Koordinate
- **Extremwert:** $f(x)$-Wert
- **Extrempunkt:** Punkt $(x, f(x))$
- **Maximum/Hochpunkt:** Größter Wert
- **Minimum/Tiefpunkt:** Kleinster Wert
- **Lokal:** Nur in Umgebung extrem
- **Global:** Im ganzen Bereich extrem
- **Notwendige Bedingung:** Muss erfüllt sein ($f'(x_0) = 0$)
- **Hinreichende Bedingung:** Reicht zum Nachweis ($f''(x_0)$)
- **Zweite Ableitung:** $f''(x)$ („f Strich Strich”)

20.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Polynome

Bestimmen Sie alle Extrempunkte:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 5$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

Aufgabe 2: Gemischte Aufgaben

Bestimmen Sie alle Extrempunkte:

a) $f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$

b) $f(x) = x^2 \ln x$ für $x > 0$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Aufgabe 3: Trigonometrische Funktionen

Bestimmen Sie alle Extrempunkte im Intervall $[0, 2\pi]$:

a) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos x$

b) $f(x) = x - 2\sin x$

Aufgabe 4: Klausuraufgabe

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

1. Bestimmen Sie alle Extrempunkte der Funktion.
2. Entscheiden Sie, welche der Extrempunkte lokale und welche globale Extrema sind.
3. Skizzieren Sie den Graphen von f und markieren Sie die Extrempunkte.
4. Erklären Sie: Warum ist $f'(-1) = 0$ aber bei $x = -1$ liegt kein Extremum vor? (Diese Frage bezieht sich auf eine andere Funktion als Beispiel!)

21

Wendepunkte

21.1 Motivation und Einführung

Was ist ein Wendepunkt?

Bisher haben wir gelernt, dass Extrempunkte die Stellen zeigen, wo eine Funktion ihr Maximum oder Minimum hat.
Neu: Wendepunkte zeigen, wo sich die **Krümmung** der Funktion ändert!

Wendepunkt – Definition

Ein **Wendepunkt** ist eine Stelle x_W, an der die Funktion ihre **Krümmungsrichtung wechselt**.
Visualisierung:

- **Links-Rechts-Wendepunkt:** Anstieg ist minimal, Steigung nimmt zu, Wechsel von Rechtskrümmung zu Linkskrümmung
- **Rechts-Links-Wendepunkt:** Anstieg ist maximal, Steigung nimmt ab, Wechsel von Linkskrümmung zu Rechtskrümmung

Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die Funktion von einer Rechtskrümmung (wie eine rechte Kurve) in eine Linkskrümmung (wie eine linke Kurve) übergeht oder umgekehrt.

Anschauliche Beispiele für Wendepunkte

Wo begegnen uns Wendepunkte in der Praxis?

- **Achterbahnfahrt:** Übergang von Linkskurve zu Rechtskurve
- **Wachstumsprozess:** Punkt des stärksten Wachstums (bei logistischem Wachstum)
- **Pandemieverlauf:** Wenn die Infektionskurve von steigender zu fallender Steigung wechselt (Wendepunkt = Punkt der maximalen Steigung)
- **Physik:** Punkt der maximalen Beschleunigung
- **Straßenbau:** Übergang zwischen Kurven (Übergangsbogen)

21.2 Definition über die Steigung

Wendepunkt – Präzise Definition

Ein Punkt x_W heißt **Wendepunkt**, wenn dort die Steigungsfunktion $f'(x)$ ein **lokales Extremum** hat.
Das bedeutet:

- **Links-Rechts-Wendepunkt:** Anstieg ist minimal, Steigung nimmt zu, Wechsel von Rechtskrümmung zu Linkskrümmung
- **Rechts-Links-Wendepunkt:** Anstieg ist maximal, Steigung nimmt ab, Wechsel von Linkskrümmung zu Rechtskrümmung

21.3 Die notwendige Bedingung

Herleitung der notwendigen Bedingung

Überlegung: Ein Wendepunkt ist ein Extremum der Steigungsfunktion $f'(x)$.
Für ein Extremum von $f'(x)$ gilt: Die Ableitung von $f'(x)$ muss null sein!
Die Ableitung von $f'(x)$ ist $f''(x)$.
Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$$f''(x_W) = 0$$

In Worten: Die zweite Ableitung an einer Wendestelle ist gleich null.

Achtung: Nur notwendig, nicht hinreichend!

Die Bedingung $f''(x_W) = 0$ ist **nur notwendig**!
Das bedeutet:

- Wenn Wendepunkt vorliegt $\Rightarrow$ dann $f''(x_W) = 0$
- Aber: $f''(x_W) = 0 \Rightarrow$ **nicht zwingend** Wendepunkt!

Problem: Es könnte auch ein Extrempunkt sein!
Beispiel: $f(x) = x^4$ hat bei $x = 0$ zwar $f''(0) = 0$, aber dort liegt ein Minimum, kein Wendepunkt!

21.4 Die dritte Ableitung

Die dritte Ableitung

Die **dritte Ableitung** $f'''(x)$ ist die Ableitung der zweiten Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}[f''(x)]$$

Sprechweise: „f Strich Strich Strich von x"
Beispiel: $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 9x^2 + 2 \\ f''(x) &= 20x^3 - 18x \\ f'''(x) &= 60x^2 - 18 \end{aligned}$$

21.5 Die hinreichende Bedingung

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte

Sei x_W eine Stelle mit $f''(x_W) = 0$.
Wenn $f'''(x_W) \neq 0$, dann hat f bei x_W einen Wendepunkt.
Genauer:

- $f'''(x_W) > 0$: Links-Rechts-Wendepunkt
- $f'''(x_W) < 0$: Rechts-Links-Wendepunkt

Für Prüfungen: Oft reicht $f'''(x_W) \neq 0$ (ohne Vorzeichen zu bestimmen).

21.6 Systematisches Vorgehen

Wendepunkte bestimmen – Schritt für Schritt

Schritt 1: Zweite Ableitung $f''(x)$ berechnen
Schritt 2: Notwendige Bedingung: Löse $f''(x) = 0$
Lösungen sind mögliche Wendestellen
Schritt 3: Dritte Ableitung $f'''(x)$ berechnen
Schritt 4: Hinreichende Bedingung: Für jede Lösung x_W:

- $f'''(x_W) \neq 0$: Wendepunkt bestätigt

Schritt 5: Funktionswerte $f(x_W)$ berechnen
Schritt 6: Wendepunkte angeben: $(x_W, f(x_W))$

21.7 Beispiele

21.7.1 Beispiel 1: Polynom 3. Grades

Beispiel 1: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Schritt 1: Zweite Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

Schritt 2: Notwendige Bedingung

$$6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Mögliche Wendestelle: $x_W = 1$
Schritt 3: Dritte Ableitung

$$f'''(x) = 6$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \quad \checkmark$$

Wendepunkt bestätigt! (Da $f'''(1) > 0$: Links-Rechts-Wendepunkt)
Schritt 5 + 6: Funktionswert und Wendepunkt

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad W(1, 0)$$

Übung: Polynom 3. Grades

Bestimmen Sie alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

Tipp: Polynome 3. Grades haben immer genau einen Wendepunkt!

21.7.2 Beispiel 2: Polynom 4. Grades

Beispiel 2: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$

Schritt 1 + 2: Zweite Ableitung und Nullstellen

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$
$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$$

Schritt 3: Dritte Ableitung

$$f'''(x) = 24x$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f'''(1) = 24 \neq 0 \quad \checkmark \quad \text{(Links-Rechts-Wendepunkt)}$$
$$f'''(-1) = -24 \neq 0 \quad \checkmark \quad \text{(Rechts-Links-Wendepunkt)}$$

Schritt 5 + 6: Funktionswerte und Wendepunkte

$$f(1) = 1 - 6 + 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad W_1(1, -2)$$
$$f(-1) = 1 - 6 + 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad W_2(-1, -2)$$

Übung: Polynom 4. Grades

Bestimmen Sie alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2$

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

Hinweis: Polynome 4. Grades können 0, 1 oder 2 Wendepunkte haben!

21.7.3 Beispiel 3: Exponentialfunktionen

Beispiel 3: $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Schritt 1: Zweite Ableitung
Erste Ableitung (Produktregel):

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

Zweite Ableitung:

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

Schritt 2: Nullstellen (Da $e^{-x} > 0$ für alle x)

$$e^{-x}(x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 2$$

Schritt 3: Dritte Ableitung

$$f'''(x) = e^{-x}(3 - x)$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f'''(2) = e^{-2}(3 - 2) = e^{-2} > 0 \quad \checkmark$$

Wendepunkt bestätigt!

Schritt 5 + 6: Funktionswert und Wendepunkt

$$f(2) = 2e^{-2} \approx 0{,}27 \quad \Rightarrow \quad W(2, 2e^{-2})$$

Übung: Exponentialfunktionen

Bestimmen Sie alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

b) $f(x) = (x-1) \cdot e^{-x}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$ (Gaußsche Glockenkurve)

Tipp: Bei der Produktregel aufpassen!

21.8 Sattelpunkte – Besonderheit

Was ist ein Sattelpunkt?

Ein **Sattelpunkt** (auch **Terrassenpunkt**) ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente:
Charakteristik:

$$f'(x_S) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_S) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_S) \neq 0$$

- Wendepunkt (Krümmungswechsel)
- Waagerechte Tangente ($f'(x) = 0$)
- Aber: **Kein Extrempunkt!**

Beispiel: Sattelpunkt bei $f(x) = x^3$

Aufgabe: Zeige, dass $f(x) = x^3$ bei $x = 0$ einen Sattelpunkt hat.
Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

Bei $x = 0$:

$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = 0$$
$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

Fazit: $S(0, 0)$ ist ein Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente, aber kein Extremum).

21.9 Unterscheidung: Extrempunkt vs. Wendepunkt vs. Sattelpunkt

Untersuchung mit höheren Ableitungen

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$:
Bestimme die niedrigste Ableitung $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
Fall 1: n ist gerade (z. B. $f^{(4)}(x_0) \neq 0$)

- Wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$: Minimum (Extrempunkt)
- Wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$: Maximum (Extrempunkt)

Fall 2: n ist ungerade (z. B. $f^{(3)}(x_0) \neq 0$)

- **Sattelpunkt** (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

Übung: Sattelpunkte erkennen

Untersuchen Sie, ob bei x_0 ein Extrempunkt oder Sattelpunkt vorliegt:

a) $f(x) = x^5$ bei $x = 0$

b) $f(x) = x^6$ bei $x = 0$

c) $f(x) = (x-1)^3 + 1$ bei $x = 1$

Tipp: Bestimmen Sie die niedrigste nicht verschwindende Ableitung!

21.10 Zusammenfassung

Zusammenfassung: Wendepunkte bestimmen

Notwendige Bedingung:

$$f''(x_W) = 0$$

Liefert mögliche Wendestellen (aber nicht alle sind Wendepunkte!)
Hinreichende Bedingung:

$$f'''(x_W) \neq 0$$

Bestätigt den Wendepunkt

- $f'''(x_W) > 0$: Links-Rechts-Wendepunkt
- $f'''(x_W) < 0$: Rechts-Links-Wendepunkt

Besonderheit Sattelpunkt:

$$f'(x_S) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_S) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_S) \neq 0$$

Wendepunkt mit waagerechter Tangente, aber kein Extremum!

Entscheidungsbaum

Wendepunkte bestimmen – Wie gehe ich vor?

1. **Berechne** $f''(x)$**, löse** $f''(x) = 0$
   $\downarrow$

2. **Berechne** $f'''(x_W)$

   $\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$

3. **Auswertung:**

$f''' \neq 0$: Wendepunkt bestätigt

$f''' = 0$: Weitere Untersuchung (höhere Ableitungen)

Vergleich: Extrempunkte vs. Wendepunkte

Eigenschaft	Extrempunkt	Wendepunkt
Notwendige Bedingung	$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$
Hinreichende Bedingung	$f''(x) \neq 0$	$f'''(x) \neq 0$
Bedeutung	Hoch-/Tiefpunkt	Krümmungswechsel
Sprechweise	„f Strich"	„f Strich Strich" / „f Strich Strich Strich"
Besonderheit	Sattelpunkt möglich (wenn $f''(x) = 0$)	Sattelpunkt möglich (wenn $f'(x) = 0$)

Wichtige Begriffe – Überblick

- **Wendestelle:** x-Koordinate
- **Wendepunkt:** Punkt $(x_W, f(x_W))$
- **Links-Rechts-Wendepunkt:** Steigung minimal ($f''' > 0$)
- **Rechts-Links-Wendepunkt:** Steigung maximal ($f''' < 0$)
- **Sattelpunkt/Terrassenpunkt:** Wendepunkt mit $f'(x) = 0$, aber kein Extremum
- **Krümmung:** Rechtskrümmung oder Linkskrümmung
- **Dritte Ableitung:** $f'''(x)$ („f Strich Strich Strich")

21.11 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Polynome

Bestimmen Sie alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$

b) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Aufgabe 2: Gemischte Funktionen

Bestimmen Sie alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (Cauchy-Verteilung)

Aufgabe 3: Sattelpunkte

Untersuchen Sie auf Sattelpunkte:

a) $f(x) = x^3 - 3x$ bei allen kritischen Stellen

b) $f(x) = (x - 2)^3 + 1$

c) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10$

Hinweis: Prüfen Sie sowohl auf Extrempunkte als auch auf Wendepunkte!

Aufgabe 4: Klausuraufgabe

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

1. Bestimmen Sie alle Extrempunkte der Funktion.
2. Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Funktion.
3. Prüfen Sie, ob Sattelpunkte vorliegen.
4. Skizzieren Sie den Graphen von f und markieren Sie alle besonderen Punkte.

22

Kurvendiskussion

22.1 Einführung

Was ist eine Kurvendiskussion?

Eine **Kurvendiskussion** ist die systematische Untersuchung einer Funktion.
Ziel: Vollständigen Überblick über die Funktion gewinnen und einen präzisen Graphen zeichnen.
Was haben wir bereits gelernt?

- Grenzwerte und Asymptoten (waagerecht, senkrecht, schräg)
- Polynomdivision
- Regel von L'Hospital
- Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)
- Wendepunkte und Sattelpunkte

22.2 Das Standard-Schema

Systematisches Vorgehen — das 8-Schritte-Schema

1. **Definitionsbereich** $\mathbb{D}$ bestimmen
2. **Symmetrie** untersuchen (Achsensymmetrie, Punktsymmetrie)
3. **Grenzwerte und Asymptoten** ($x \to \pm\infty$, an Definitionslücken)
4. **Nullstellen:** $f(x) = 0$
5. **Extrempunkte:** $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
6. **Wendepunkte:** $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
7. **Wertetabelle** erstellen
8. **Graph** zeichnen (unter Beachtung aller Konventionen)

22.3 Zeichenkonventionen

Konventionen für das Zeichnen — Punkte werden abgezogen bei Nichtbeachtung!

1. Achsenbeschriftung:

- x-Achse nach rechts, y-Achse (oder $f(x)$) nach oben
- Beide Achsen mit Pfeilen versehen

2. Skalierung:

- Beide Achsen mit Einheiten versehen
- Wichtige Punkte durch Striche markieren

3. Besondere Punkte markieren:

- Nullstellen, Extrempunkte (H/T), Wendepunkte (W)
- Mit Koordinaten beschriften

4. Asymptoten:

- Als gestrichelte Linien zeichnen
- Gleichung angeben (z. B. $y = x + 1$ oder $x = 1$)

5. Funktionsgraph:

- Durchgezogene Linie
- An Definitionslücken: Offener Punkt (Kreis) oder Asymptotenverlauf
- Verlauf muss berechneten Eigenschaften entsprechen

6. Sauberkeit:

- Leserliche Beschriftung
- Achsen beschriftet (x und $f(x)$ oder y)

22.4 Beispiele

22.4.1 Beispiel 1: Polynom 3. Grades

Vollständige Kurvendiskussion: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Schritt 1: Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Schritt 2: Symmetrie

$$f(-x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5 \neq f(x) \text{ und } \neq -f(x)$$

Ergebnis: Keine Symmetrie

Schritt 3: Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Keine Asymptoten (Polynom)
Schritt 4: Nullstellen

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

Approximativ: $x_1 \approx 0{,}46$, $x_2 \approx -2{,}27$, $x_3 \approx 4{,}81$
Schritt 5: Extrempunkte

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -1$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(3) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad T(3, -22)$$
$$f''(-1) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad H(-1, 10)$$

Schritt 6: Wendepunkte

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \quad \text{(Wendepunkt bestätigt)}$$

$$f(1) = -6 \Rightarrow W(1, -6)$$

Schritt 7: Wertetabelle (Auszug)

x	-2	-1	0	1	3	5
$f(x)$	-5	10	5	-6	-22	0

Schritt 8: Graph
Der Graph verläuft von links unten ($-\infty$) über den Hochpunkt $H(-1, 10)$ durch die Nullstellen, durch den Wendepunkt $W(1, -6)$ zum Tiefpunkt $T(3, -22)$ und weiter nach rechts oben ($+\infty$).

Übung: Polynome

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

Tipp: Arbeiten Sie das Schema systematisch ab!

22.4.2 Beispiel 2: Gebrochenrationale Funktion

Vollständige Kurvendiskussion: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

Schritt 1: Definitionsbereich

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Schritt 2: Symmetrie
Keine Symmetrie erkennbar.
Schritt 3: Asymptoten

Polynomdivision:

$$(x^2 - 4) : (x - 1) = x + 1 - \frac{3}{x - 1}$$

- Schräge Asymptote: $y = x + 1$
- Senkrechte Asymptote: $x = 1$ (Polstelle)

Schritt 4: Nullstellen

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Schritt 5: Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2}$$

Die Gleichung $x^2 - 2x + 4 = 0$ hat keine reellen Lösungen (Diskriminante < 0).
Ergebnis: **Keine Extrempunkte**
Schritt 6: Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{-6}{(x - 1)^3} \neq 0 \quad \text{für alle } x \neq 1$$

Ergebnis: **Keine Wendepunkte**
Schritt 7: Wertetabelle (Auszug)

x	-3	-2	-1	0	2	3	4
$f(x)$	$-1{,}25$	0	$1{,}5$	4	0	$2{,}5$	4

Schritt 8: Graph
Der Graph hat zwei Nullstellen bei $x = \pm 2$, eine Polstelle bei $x = 1$ mit Vorzeichenwechsel und nähert sich der schrägen Asymptote $y = x + 1$ für $x \to \pm\infty$.

Übung: Gebrochenrationale Funktionen

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Hinweis: Nicht vergessen: Asymptoten bestimmen!

22.4.3 Beispiel 3: Exponentialfunktion

Vollständige Kurvendiskussion: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

Schritt 1: Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Schritt 2: Symmetrie
Keine Symmetrie.
Schritt 3: Grenzwerte und Asymptoten

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Waagerechte Asymptote: } y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Schritt 4: Nullstellen

$$x^2 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{(doppelte Nullstelle)}$$

Schritt 5: Extrempunkte

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = x \cdot e^{-x}(2 - x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$
$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

$$f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad T(0,0)$$
$$f''(2) = -2e^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad H(2, 4e^{-2}) \approx H(2, 0{,}54)$$

Schritt 6: Wendepunkte

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

Zwei Wendepunkte bei $x \approx 0{,}59$ und $x \approx 3{,}41$.
Schritt 7: Wertetabelle

x	-1	0	1	2	4	6
$f(x)$	2,72	0	0,37	0,54	0,29	0,06

Schritt 8: Graph
Der Graph startet bei $-\infty$ im positiven Bereich, berührt die x-Achse im Ursprung (Tangentiale), steigt zum Hochpunkt $H(2, 0{,}54)$ und fällt dann gegen die Asymptote $y = 0$.

Übung: Exponentialfunktionen

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

b) $f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^{-x}$

Tipp: Produktregel nicht vergessen!

22.5 Zusammenfassung und Checkliste

Checkliste für die vollständige Kurvendiskussion

- ☐ Definitionsbereich $\mathbb{D}$ bestimmt
- ☐ Symmetrie geprüft (gerade/ungerade/neutral)
- ☐ Grenzwerte berechnet ($x \to \pm\infty$ und an Lücken)
- ☐ Asymptoten bestimmt (waagerecht, senkrecht, schräg)
- ☐ Nullstellen gefunden ($f(x) = 0$)
- ☐ Extrempunkte berechnet ($f' = 0$ und $f'' \neq 0$)

- ☐ Wendepunkte berechnet ($f'' = 0$ und $f''' \neq 0$)
- ☐ Wertetabelle erstellt (mit ausgewählten Punkten)
- ☐ Graph nach Konventionen gezeichnet

Übersicht: Funktionstypen und Besonderheiten

Funktionstyp	**Asymptoten?**	**Besonderheiten**
Polynome	Keine	Glatt, keine Lücken
Gebrochen-rational	Ja	Polstellen, Lücken
Exponential	Oft $y = 0$	L'Hospital bei Grenzwerten
Trigonometrisch	Keine	Periodisch
Logarithmisch	Senkrecht	Nur für $x > 0$

Häufige Fehler vermeiden!

Typische Fehlerquellen:

- Definitionsbereich nicht angegeben oder falsch
- Asymptoten vergessen oder falsch berechnet
- Nur notwendige Bedingung geprüft, nicht hinreichende
- Achsenbeschriftung oder Skalierung fehlt
- Besondere Punkte nicht markiert oder beschriftet
- Graph entspricht nicht den berechneten Eigenschaften
- Asymptoten nicht gestrichelt gezeichnet

Prüfungstipp: Checkliste durchgehen!

22.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Polynome

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie den Graphen:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 5$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Hinweis: Nutzen Sie die Checkliste!

Aufgabe 2: Gebrochenrationale Funktionen

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie den Graphen:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$

Achtung: Asymptoten nicht vergessen!

Aufgabe 3: Gemischte Funktionen

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie den Graphen:

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Tipp: L'Hospital bei Grenzwerten verwenden!

Aufgabe 4: Klausuraufgabe

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$$

1. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch.
2. Bestimmen Sie alle Asymptoten (Art und Gleichung angeben).
3. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion unter Beachtung aller Konventionen.
4. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der Funktion in den Intervallen zwischen den kritischen Stellen.

23

Extremwertaufgaben

23.1 Einführung: Was sind Extremwertaufgaben?

Definition

Extremwertaufgaben sind Optimierungsprobleme, bei denen der größte oder kleinste Wert einer Größe gesucht wird. Dabei werden reale Probleme mit Hilfe der Differentialrechnung mathematisch modelliert und gelöst.

Typische Fragestellungen im T-Kurs

Minimierung:

- Materialverbrauch (z. B. bei Dosen, Schachteln)
- Oberfläche von Körpern
- Kosten bei Produktionsprozessen
- Wegstrecken oder Abstände

Maximierung:

- Volumen bei gegebenem Material
- Flächeninhalt unter Funktionen
- Effizienz oder Gewinn
- Ausbeute bei begrenzten Ressourcen

Mathematisches Werkzeug

Zur Lösung verwenden wir:

- Differentialrechnung (Ableitungen bis 2. Ordnung)
- Analysis von Funktionen (Nullstellen, Extrema)
- Geometrische Zusammenhänge (Formeln für Volumen, Flächen etc.)

23.2 Das systematische Lösungsverfahren

Die Vier-Schritte-Methode

Erfolgreiches Lösen von Extremwertaufgaben erfordert ein strukturiertes Vorgehen!

23.2.1 Schritt 1: Hauptbedingung

Hauptbedingung

Frage: Was soll optimiert werden?

- Identifiziere die zu optimierende Größe (Volumen, Fläche, Kosten . . .)
- Stelle die Formel auf (meist mit mehreren Variablen)
- Beispiele: $V(x, y)$, $A(r, h)$, $K(l, b)$

23.2.2 Schritt 2: Nebenbedingung

Nebenbedingung

Frage: Welche festen Bedingungen gibt es?

- Finde den Zusammenhang zwischen den Variablen (z. B. festes Volumen)
- Löse nach einer Variable auf
- Setze in die Hauptbedingung ein, um die Variablenzahl zu reduzieren

23.2.3 Schritt 3: Zielfunktion

Zielfunktion

Das Ergebnis nach Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung ist die **Zielfunktion**:

$$f(x) = \dots$$

Wichtig:

- Die Funktion hängt jetzt nur noch von einer Variable ab
- Bestimme den Definitionsbereich (physikalisch sinnvolle Werte)

23.2.4 Schritt 4: Extremum berechnen

Extremum berechnen

Klassische Kurvendiskussion der Zielfunktion:

1. Erste Ableitung berechnen: $f'(x)$
2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ (kritische Stellen finden)
3. Hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$ prüfen (Maximum oder Maximum?)

4. Randwerte überprüfen (falls Definitionsbereich beschränkt)

23.3 Beispiel 1: Volumen einer Schachtel

Aufgabenstellung

Aus einer rechteckigen Pappe der Abmessung 50 cm × 30 cm soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden, indem an den Ecken quadratische Stücke der Seitenlänge x ausgeschnitten und die Seiten hochgeklappt werden.
Gesucht: Der Wert von x, für den das Volumen der Schachtel maximal wird.

Lösung

Schritt 1: Hauptbedingung
Volumen eines Quaders:

$$V = l \cdot b \cdot h$$

Nach dem Ausschneiden:

$$V(x) = (50 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$$

Schritt 2: Nebenbedingung
Bereits eingearbeitet durch die geometrische Bedingung, dass an jeder Ecke x abgezogen wird.
Schritt 3: Zielfunktion und Definitionsmenge
Ausmultiplizieren:

$$V(x) = (1500 - 100x - 60x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 160x^2 + 1500x$$

Definitionsmenge (physikalisch sinnvoll):

$$x > 0, \quad 50 - 2x > 0 \Rightarrow x < 25, \quad 30 - 2x > 0 \Rightarrow x < 15$$

$$\Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 15\}$$

Schritt 4: Ableitungen und Extremum
Erste Ableitung:

$$V'(x) = 12x^2 - 320x + 1500$$

Notwendige Bedingung ($V'(x) = 0$):

$$12x^2 - 320x + 1500 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 80x + 375 = 0$$

Mit der p-q-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4500}}{6} = \frac{80 \pm \sqrt{1900}}{6}$$

$$x_1 \approx 20{,}60 \quad \text{(nicht in } \mathbb{D}\text{)}, \qquad x_2 \approx 6{,}07 \quad \text{(in } \mathbb{D}\text{)}$$

Zweite Ableitung:

$$V''(x) = 24x - 320$$

Hinreichende Bedingung:

$$V''(6{,}07) = 24 \cdot 6{,}07 - 320 \approx -174{,}32 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Maximales Volumen:

$$V(6{,}07) = (50 - 12{,}14) \cdot (30 - 12{,}14) \cdot 6{,}07 \approx 37{,}86 \cdot 17{,}86 \cdot 6{,}07 \approx 4100\,\text{cm}^3$$

Antwort: Das Volumen wird maximal für $x \approx 6{,}07$ cm mit etwa $4100\,\text{cm}^3$.

23.4 Beispiel 2: Günstigste Dose

Aufgabenstellung

Eine zylinderförmige Dose mit einem Volumen von genau $V = 1000\,\text{cm}^3$ (1 Liter) soll so konstruiert werden, dass der Materialverbrauch (Oberfläche) minimal wird.
Gesucht: Der Radius r und die Höhe h der optimalen Dose.

Lösung

Schritt 1: Hauptbedingung
Oberfläche einer geschlossenen Dose (Deckel + Boden + Mantel):

$$O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Schritt 2: Nebenbedingung
Volumen des Zylinders:

$$V = \pi r^2 h = 1000 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Schritt 3: Zielfunktion
Einsetzen von h:

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Definitionsbereich: $r > 0$
Schritt 4: Ableitungen und Extremum
Umgeschrieben für einfacheres Ableiten:

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2000 r^{-1}$$

Erste Ableitung:

$$O'(r) = 4\pi r - 2000 r^{-2} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

Notwendige Bedingung ($O'(r) = 0$):

$$4\pi r = \frac{2000}{r^2} \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^3 = 2000 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42\,\text{cm}$$

Zweite Ableitung:

$$O''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \quad \text{für alle } r > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

Optimale Abmessungen:

$$r \approx 5{,}42\,\text{cm}, \qquad h = \frac{1000}{\pi \cdot (5{,}42)^2} \approx 10{,}84\,\text{cm}$$

Bemerkung: $h \approx 2r$ (die Höhe entspricht etwa dem Durchmesser).
Antwort: Die materialsparendste Dose hat Radius $r \approx 5{,}42\,\text{cm}$ und Höhe $h \approx 10{,}84\,\text{cm}$. Sie ist genau so hoch wie ihr Durchmesser.

23.5 Beispiel 3: Minimaler Abstand zwischen Funktionen

Abstand zwischen Funktionen

Der vertikale Abstand zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x ist:

$$d(x) = |f(x) - g(x)|$$

Zur Minimierung verwendet man oft das Quadrat des Abstands (vermeidet Betragsbetrachtung):

$$d^2(x) = (f(x) - g(x))^2$$

Beispiel: Minimaler Abstand

Gegeben: $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 2$ im Intervall $[0, 1]$
Gesucht: Der minimale vertikale Abstand zwischen den Funktionen.
Lösung:
Da $g(x) > f(x)$ im Intervall $[0, 1]$:

$$d(x) = g(x) - f(x) = (x + 2) - x^2 = -x^2 + x + 2$$

Ableitungen:

$$d'(x) = -2x + 1, \qquad d''(x) = -2$$

Kritische Stelle:

$$d'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}5$$

Da $d''(0{,}5) = -2 < 0$ liegt hier ein **Maximum** der Abstandsfunktion vor!
Randwerte prüfen:

$$\begin{aligned} d(0) &= 0 + 0 + 2 = 2 \\ d(0{,}5) &= -0{,}25 + 0{,}5 + 2 = 2{,}25 \\ d(1) &= -1 + 1 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der minimale Abstand ist $d(0) = d(1) = 2$ an den Intervallrändern. Die Funktionen haben im Intervall $[0, 1]$ keinen Schnittpunkt. Der maximale Abstand von $2{,}25$ liegt bei $x = 0{,}5$.

23.6 Beispiel 4: Maximales Rechteck unter einer Funktion

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ im Intervall $[0, 2]$ mit $f(x) \geq 0$.
Gesucht: Das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt, das unter dem Funktionsgraphen liegt und eine Seite auf der x-Achse hat.

Lösung

Sei b die rechte Seite des Rechtecks (linke Seite bei $a = 0$ wegen Symmetrie/Maximum).
Breite: b
Höhe: $f(b) = -b^2 + 4$ (da Parabel fallend für $b > 0$)
Flächeninhalt:

$$A(b) = b \cdot (-b^2 + 4) = -b^3 + 4b, \qquad b \in [0, 2]$$

Ableitungen:

$$A'(b) = -3b^2 + 4, \qquad A''(b) = -6b$$

Kritische Stelle:

$$-3b^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$$

Hinreichende Bedingung:

$$A''(1{,}155) = -6 \cdot 1{,}155 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Randwerte: $A(0) = 0$, $A(2) = 0$
Ergebnis:

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$$
$$\text{Höhe} = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2{,}667$$
$$\text{Fläche} \approx 1{,}155 \cdot 2{,}667 \approx 3{,}08\,\text{FE}$$

23.7 Beispiel 5: Minimaler Abstand Punkt-Funktion

Abstand Punkt-Kurve

Der Abstand zwischen einem Punkt $P(x_0, y_0)$ und einem Punkt $Q(x, f(x))$ auf dem Funktionsgraphen ist:

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$$

Zur Vereinfachung minimiert man meist das Quadrat des Abstands:

$$d^2(x) = (x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2$$

Beispiel: Punkt zu Parabel

Gegeben: Punkt $P(0, 2)$ und Parabel $f(x) = x^2$
Gesucht: Der Punkt auf der Parabel mit minimalem Abstand zu P.
Lösung:
Quadrat des Abstands:

$$d^2(x) = (x - 0)^2 + (x^2 - 2)^2 = x^2 + x^4 - 4x^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4$$

Ableitungen:

$$(d^2)'(x) = 4x^3 - 6x, \qquad (d^2)''(x) = 12x^2 - 6$$

Kritische Stellen:

$$4x^3 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(2x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1{,}225$$

Wertevergleich:

$$d^2(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad d(0) = 2$$
$$d^2(1{,}225) \approx (1{,}225)^4 - 3(1{,}225)^2 + 4 \approx 2{,}25 - 4{,}5 + 4 = 1{,}75$$

Hinreichende Bedingung bei $x = 1{,}225$:

$$(d^2)''(1{,}225) = 12 \cdot 1{,}5 - 6 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

Ergebnis: Minimale Abstände bei $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1{,}225$.
Punkte: $(\pm 1{,}225, 1{,}5)$, Abstand $\approx 1{,}323$.

23.8 Typische Fehler und Hinweise

Häufige Fehlerquellen

- **Vergessen der Definitionsmenge:** Physikalisch unmögliche Werte (z. B. negative Längen) müssen ausgeschlossen werden.
- **Randwerte nicht überprüfen:** Bei abgeschlossenen Intervallen können Extrema auch an den Rändern liegen.
- **Fehlerhafte Nebenbedingung:** Der Zusammenhang zwischen den Variablen muss korrekt aufgestellt werden (z. B. Volumen konstant).
- **Vergessen der Einheiten:** Das Endergebnis muss immer mit der richtigen Einheit angegeben werden.
- **Einheiten vermischen:** Alle Größen in derselben Einheit verwenden (z. B. alles in cm oder alles in m).

23.9 Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Minimaler Abstand zwischen Funktionen

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 2 - x$ im Intervall $[0, 2]$
Bestimmen Sie den minimalen vertikalen Abstand zwischen den Funktionen.

Aufgabe 2: Maximales Rechteck unter Funktion

Gegeben: $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, \pi]$
Bestimmen Sie das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt unter dem Sinus.

Aufgabe 3: Quader mit maximalem Volumen

Aus einem Draht der Länge $L = 1\,\text{m}$ soll das Kantenmodell eines Quaders gebogen werden, dessen Grundfläche ein Quadrat ist und der maximales Volumen besitzt.
Hinweis: Ein Quader hat 12 Kanten. Bestimmen Sie die Abmessungen des Quaders.

Aufgabe 4: Rechteck mit minimalem Umfang

Ein Rechteck soll einen Flächeninhalt von $100\,\text{cm}^2$ haben. Für welche Seitenlängen a und b wird der Umfang minimal?

Aufgabe 5: Rechteck unter Bogenbrücke

Eine parabelförmige Bogenbrücke wird beschrieben durch die Funktion:

$$f(x) = -0{,}1x^2 + 10 \quad \text{(Einheit: Meter)}$$

Welches Rechteck mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen hat den größten Flächeninhalt, wenn es in den Bogen eingepasst wird?

Teil III

Integralrechnung

24

Integralrechnung

24.1 Einführung: Zwei fundamentale Fragestellungen

Die Integralrechnung bildet neben der Differentialrechnung den zweiten Hauptpfeiler der Analysis. Während die Differentialrechnung mit Steigungen und Änderungsraten arbeitet, beschäftigt sich die Integralrechnung mit der **Umkehrung** dieser Operation sowie mit der Berechnung von Flächen, Volumen und anderen kumulativen Größen.

Grundaufgaben der Integralrechnung

Die Integralrechnung beantwortet zwei zentrale Fragestellungen:

1. **Unbestimmtes Integral:** Wie lautet die ursprüngliche Funktion, wenn wir ihre Ableitung kennen? $\rightarrow$ *Umkehrung der Differentiation*
2. **Bestimmtes Integral:** Wie berechnet man die Fläche unter einer Kurve? $\rightarrow$ *Flächenberechnung mit Funktionen*

Anwendungsbereiche

- **Physik:** Berechnung von Geschwindigkeit aus Beschleunigung, Arbeit und Energie, Schwerpunkte
- **Ingenieurwesen:** Flächeninhalte, Volumina, Materialverbrauch
- **Geometrie:** Flächen von krummlinig begrenzten Gebieten

24.2 Das unbestimmte Integral und Stammfunktionen

24.2.1 Definition der Stammfunktion

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Die Stammfunktion ist also die Umkehrung der Ableitung.

Beispiele für Stammfunktionen

- $f(x) = 2x$ hat die Stammfunktion $F(x) = x^2$
- $f(x) = 3x^2$ hat die Stammfunktion $F(x) = x^3$
- $f(x) = \cos(x)$ hat die Stammfunktion $F(x) = \sin(x)$
- $f(x) = e^x$ hat die Stammfunktion $F(x) = e^x$

24.2.2 Die Integrationskonstante

Unendlich viele Stammfunktionen

Zu jeder Funktion $f(x)$ gibt es **unendlich viele** Stammfunktionen!
Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, denn:

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Mehrere Stammfunktionen

Für $f(x) = 2x$ sind alle folgenden Funktionen Stammfunktionen:

$$F_1(x) = x^2, \quad F_2(x) = x^2 + 5, \quad F_3(x) = x^2 - 17$$

Allgemein gilt: $F(x) = x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

24.2.3 Das unbestimmte Integral

Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ heißt **unbestimmtes Integral**:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und c eine beliebige reelle Konstante ist.

Bezeichnungen

- $\int$ Integralsymbol oder Integralzeichen
- $f(x)$ Integrand (zu integrierende Funktion)
- x Integrationsvariable
- dx Differential (zeigt die Integrationsvariable an)
- c Integrationskonstante

24.3 Grundintegrale

Die folgenden Grundintegrale sollten Sie auswendig kennen:

Grundintegrale (1) – Potenzfunktionen

Für $n \neq -1$ gilt:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Besonderheit für $n = -1$:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$

Die Betragsstriche sind wichtig, da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist!

Anwendung der Potenzregel

- $\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$
- $\int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$ (also $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$)
- $\int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

Grundintegrale (2) – Exponential- und Konstante

- **Natürliche Exponentialfunktion:** $\int e^x \, dx = e^x + c$
- **Allgemeine Exponentialfunktion:** $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$
- **Konstante Funktion:** $\int m \, dx = mx + c \quad (m = \text{const.})$

Exponentialfunktionen integrieren

$$\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

Grundintegrale (3) – Trigonometrische Funktionen

- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$
- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c$

24.4 Integrationsregeln

24.4.1 Faktorregel

Konstante Faktoren dürfen vor das Integral gezogen werden:

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

24.4.2 Summen- und Differenzregel

Das Integral einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe oder Differenz der Integrale:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Anwendung der Regeln

Aufgabe: Berechnen Sie $\int (2x^3 + 5x - 7)\,dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int (2x^3 + 5x - 7)\,dx &= \int 2x^3\,dx + \int 5x\,dx - \int 7\,dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 7x + c \\ &= \frac{x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - 7x + c\end{aligned}$$

Gemischte Funktionen

Aufgabe: Berechnen Sie $\int \left(4\sin(x) - 3e^x + \frac{2}{x}\right) dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \left(4\sin(x) - 3e^x + \frac{2}{x}\right) dx &= 4\int \sin(x)\,dx - 3\int e^x\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 4 \cdot (-\cos(x)) - 3 \cdot e^x + 2 \cdot \ln|x| + c \\ &= -4\cos(x) - 3e^x + 2\ln|x| + c\end{aligned}$$

24.5 Das bestimmte Integral

24.5.1 Geometrische Interpretation: Flächenberechnung

Während das unbestimmte Integral eine Funktion liefert, berechnet das bestimmte Integral eine konkrete Zahl – nämlich den Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse.

Standard-Fläche

Eine Fläche ist begrenzt durch:

1. Von oben: eine Funktion $f(x)$ oberhalb der x-Achse ($f(x) \geq 0$)
2. Von links: die senkrechte Gerade $x = a$
3. Von rechts: die senkrechte Gerade $x = b$
4. Von unten: die x-Achse

24.5.2 Definition durch Grenzwert

Die Fläche unter einer Kurve lässt sich durch Annaherung mit Rechtecken (Untersumme und Obersumme) definieren. Je mehr Rechtecke verwendet werden ($n \to \infty$), desto genauer wird die Annäherung.

Bestimmtes Integral

Existieren die Grenzwerte der Ober- und Untersummen und stimmen sie überein, so heißt der gemeinsame Grenzwert **bestimmtes Integral**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

wobei O_n die Obersumme und U_n die Untersumme mit n Rechtecken ist.

Integrierbarkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ bestimmt integrierbar, wenn:

- $f(x)$ in $[a, b]$ stetig ist, oder
- $f(x)$ in $[a, b]$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen hat (keine Polstellen, nur Lücken oder Sprungstellen)

24.5.3 Vergleich: Unbestimmtes vs. Bestimmtes Integral

Wichtige Unterschiede

Eigenschaft	**Unbestimmt**	**Bestimmt**
Schreibweise	$\int f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
Grenzen	keine	mit a (unten) und b (oben)
Ergebnis	Funktion + c	Konkrete Zahl
Bedeutung	Stammfunktionen	Flächeninhalt
Konstante	Integrationskonstante c erforderlich	keine Konstante

Konkreter Vergleich

Für $f(x) = 3x^2$:

- **Unbestimmt:** $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$ (eine Funktion)
- **Bestimmt:** $\int_0^2 3x^2\,dx = [x^3]_0^2 = 8 - 0 = 8$ (eine Zahl, der Flächeninhalt)

24.6 Übungsaufgaben

Grundintegrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int 5x^4\,dx$

b) $\int (x^2 - 2x + 1)\,dx$

c) $\int (4\sin(x) + e^x)\,dx$

d) $\int \frac{3}{x}\,dx$

Stammfunktionen prüfen

Überprüfen Sie durch Ableiten, ob die folgenden Stammfunktionen korrekt sind. Falls nicht, korrigieren Sie sie.

a) $\int 6x^2\,dx = 2x^3 + c$

b) $\int \cos(x)\,dx = -\sin(x) + c$

c) $\int e^x\,dx = e^x + c$

d) $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3} + c$

Bestimmte Integrale (Konzept)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^2$ auf dem Intervall $[0, 2]$.

a) Bestimmen Sie zunächst eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

b) Erklären Sie den Unterschied zwischen $\int 3x^2\,dx$ und $\int_0^2 3x^2\,dx$.

c) Was gibt das bestimmte Integral $\int_0^2 3x^2\,dx$ geometrisch an?

d) Welche Einheit hat das Ergebnis, wenn x in Metern gemessen wird?

Kombinierte Integrale

Berechnen Sie:

a) $\int (x^5 - 3x^3 + 2x)\,dx$

b) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x}\right)dx$

c) $\int (5e^x - 2\cos(x))\,dx$

d) $\int \left(\frac{4}{x} + 3^x\right)dx$

25

Integrationsmethoden

25.1 Einführung: Wann welche Methode?

Nicht alle Integrale lassen sich direkt mit den Grundintegralen lösen. Für komplexere Funktionen benötigen wir systematische Verfahren, um schwierige Integrale in einfache Grundintegrale zu transformieren.

Übersicht der Integrationsverfahren

1. **Integration durch Substitution** – Bei verketteten Funktionen und wenn die Ableitung der inneren Funktion als Faktor erscheint
2. **Partielle Integration** – Bei Produkt zweier Funktionen (Umkehrung der Produktregel)
3. **Partialbruchzerlegung** – Bei rationalen Funktionen (Brüchen von Polynomen)

Ziel: Schwere Integrale so vereinfachen, dass Grundintegrale entstehen.

25.2 Integration durch Substitution

25.2.1 Grundprinzip

Substitutionsregel

Die Substitution ersetzt die Integrationsvariable x durch eine neue Variable $u = g(x)$:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

wobei $u = g(x)$ und damit $du = g'(x)\, dx$.

Vorgehensweise

1. Wähle Substitution $u = g(x)$ (innere Funktion)
2. Berechne $du = g'(x)\, dx$ bzw. $\frac{du}{dx} = g'(x)$
3. Ersetze im Integral alle Ausdrücke durch u und du
4. Berechne das neue Integral bezüglich u
5. **Resubstitution:** Ersetze u wieder durch $g(x)$

25.2.2 Beispiele zur Substitution

Einfache Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie $\int 2x \cdot e^{x^2}\,dx$

Lösung: Wir erkennen, dass die Ableitung von x^2 (nämlich $2x$) als Faktor vorhanden ist.
Substitution: $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$
Das Integral wird zu:

$$\int 2x \cdot e^{x^2}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C$$

Resubstitution mit $u = x^2$:

$$\int 2x \cdot e^{x^2}\,dx = e^{x^2} + C$$

Substitution mit Anpassung

Aufgabe: Berechnen Sie $\int x \cdot \cos(x^2)\,dx$

Lösung: Substitution: $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$
Anpassung des Faktors:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\,dx = \int \cos(u) \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C$$

Resubstitution:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

Logarithmische Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

Lösung: Substitution: $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$
Das Integral wird zu:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

Resubstitution:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln|\ln(x)| + C$$

Trigonometrische Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Lösung: Substitution: $x = \sin(u) \Rightarrow dx = \cos(u)\,du$
Radikand umformen:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$$

Für $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\cos(u) \geq 0$, also:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)}\,du = \int 1\,du = u + C$$

Resubstitution mit $u = \arcsin(x)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$$

25.3 Partielle Integration

25.3.1 Grundprinzip

Partielle Integration

Das Verfahren basiert auf der Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

oder in kompakter Form:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

LIATE-Regel für die Wahl von $u(x)$

Prioritätsreihenfolge (von hoch nach niedrig):

1. **L** – Logarithmusfunktionen: $\ln(x), \log(x)$
2. **I** – Inverse trigonometrische Funktionen: $\arcsin(x), \arctan(x)$
3. **A** – Algebraische Funktionen: x^n, Polynome
4. **T** – Trigonometrische Funktionen: $\sin(x), \cos(x)$
5. **E** – Exponentialfunktionen: e^x, a^x

Merke: Die Funktion höherer Priorität wird als u gewählt.

25.3.2 Beispiele zur partiellen Integration

Polynom mal Exponentialfunktion

Aufgabe: Berechnen Sie $\int x \cdot e^x\,dx$

Lösung: Nach LIATE-Regel: $u = x$ (algebraisch) und $v' = e^x$
Dann: $u' = 1$ und $v = e^x$
Partielle Integration:

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Logarithmusfunktion

Aufgabe: Berechnen Sie $\int \ln(x)\,dx$

Lösung: Wir schreiben: $\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'}\,dx$

Wahl: $u = \ln(x)$ und $v' = 1$
Dann: $u' = \frac{1}{x}$ und $v = x$
Partielle Integration:

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + C$$

Mehrfache partielle Integration

Aufgabe: Berechnen Sie $\int x^2 \cdot e^x\,dx$
Lösung: Erste partielle Integration: $u_1 = x^2, v_1' = e^x \Rightarrow u_1' = 2x, v_1 = e^x$

$$\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\,dx$$

Zweite partielle Integration für $\int 2x \cdot e^x\,dx$: $u_2 = 2x, v_2' = e^x \Rightarrow u_2' = 2, v_2 = e^x$

$$\int 2x \cdot e^x\,dx = 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x\,dx = 2x \cdot e^x - 2e^x$$

Zusammenfassung:

$$\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Zyklische partielle Integration

Aufgabe: Berechnen Sie $\int e^x \cdot \sin(x)\,dx$
Lösung: Erste Integration mit $u_1 = \sin(x), v_1' = e^x$:

$$I = \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

Zweite Integration für $\int e^x \cos(x)\,dx$ mit $u_2 = \cos(x), v_2' = e^x$:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cos(x) + I$$

Rücksubstitution:

$$I = e^x \sin(x) - [e^x \cos(x) + I] = e^x(\sin(x) - \cos(x)) - I$$

Auflösen nach I:

$$2I = e^x(\sin(x) - \cos(x)) \Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C$$

25.4 Integration durch Partialbruchzerlegung

25.4.1 Grundlagen

Voraussetzungen

Bei rationalen Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ muss gelten:

- **Echt gebrochen:** Grad des Zählers $<$ Grad des Nenners
- Falls Grad$(P) \geq$ Grad(Q): Zuerst Polynomdivision durchführen!

Grundidee

Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \text{einfache Brüche}$$

25.4.2 Fälle der Partialbruchzerlegung

Fall 1: Einfache reelle Nullstellen

Hat $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ lauter verschiedene Nullstellen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Fall 2: Mehrfache reelle Nullstellen

Hat $Q(x)$ eine k-fache Nullstelle bei $x = a$:

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$$

Fall 3: Irreduzible quadratische Terme

Hat $Q(x)$ einen Faktor $x^2 + px + q$ (nicht weiter zerlegbar):

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

25.4.3 Beispiele zur Partialbruchzerlegung

Einfache Nullstellen

Aufgabe: Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$
Lösung: Schritt 1: Faktorisierung: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
Schritt 2: Ansatz:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

Schritt 3: Multiplikation mit $(x - 1)(x + 1)$:

$$1 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

Schritt 4: Koeffizientenbestimmung durch Einsetzen:

- $x = 1: \quad 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $x = -1: \quad 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

Schritt 5: Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \end{aligned}$$

Mehrfache Nullstelle

Aufgabe: Berechnen Sie $\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$
Lösung: Schritt 1: Ansatz:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Schritt 2: Multiplikation mit $(x-1)^2$:

$$x = A(x-1) + B$$

Schritt 3: Koeffizientenvergleich:

- $x = 1: \quad 1 = B \Rightarrow B = 1$
- Koeffizient von $x: \quad 1 = A \Rightarrow A = 1$

Schritt 4: Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\ &= \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

Polynomdivision erforderlich

Aufgabe: Berechnen Sie $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$
Lösung: Schritt 1: Da Zählergrad = Nennergrad, Polynomdivision:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

Schritt 2: Partialbruchzerlegung des Restes (siehe vorheriges Beispiel):

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Schritt 3: Integration:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx &= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx\\ &= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C\\ &= x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

25.5 Entscheidungshilfe und Übungen

Wann welche Methode?

- **Substitution:** Bei verketteten Funktionen, wenn die innere Ableitung als Faktor vorhanden ist, Wurzeln, logarithmische Integrale
- **Partielle Integration:** Bei Produkten zweier Funktionen, Integralen von $\ln(x)$, $\arcsin(x)$ etc., Polynome mal exp/trig
- **Partialbruchzerlegung:** Bei rationalen Funktionen (Brüchen), wenn der Nenner in Linearfaktoren zerlegbar ist

Substitutionsaufgaben

Berechnen Sie durch Substitution:

a) $\displaystyle\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Partielle Integration

Berechnen Sie durch partielle Integration:

a) $\displaystyle\int x\cos(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \ln(x^2)\,dx$

d) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$

Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie nach Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-4}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+5x+6}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$

Methodenwahl

Entscheiden Sie, welche Integrationsmethode jeweils am besten geeignet ist, und berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+3x+2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

26

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

26.1 Der Hauptsatz – Verbindung zwischen beiden Welten

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt die Verbindung zwischen dem unbestimmten Integral (Stammfunktion) und dem bestimmten Integral (Flächeninhalt) her. Er ist das zentrale Fundament der gesamten Integralrechnung.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist f stetig auf $[a, b]$ und F eine Stammfunktion von f, d.h. $F'(x) = f(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Schreibweise: Die eckigen Klammern $[F(x)]_a^b$ bedeuten:

1. Obere Grenze b in $F(x)$ einsetzen: $F(b)$
2. Untere Grenze a in $F(x)$ einsetzen: $F(a)$
3. Differenz bilden: $F(b) - F(a)$

Wichtige Bemerkungen

- **Verbindung zweier Konzepte:** Unbestimmtes Integral (Stammfunktion) und bestimmtes Integral (Flächeninhalt)
- **Konstante C spielt keine Rolle:**

$$[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

- Dieser Satz sollte in Wort und Formel beherrscht werden (prüfungsrelevant!)

26.2 Berechnung bestimmter Integrale

Beispiel 1: Polynom

Aufgabe: Berechnen Sie $\int_1^3 x^2\,dx$
Lösung: Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$
Hauptsatz anwenden:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Beispiel 2: Logarithmusfunktion

Aufgabe: Berechnen Sie $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$
Lösung: Stammfunktion: $F(x) = \ln(x)$ für $x > 0$
Hauptsatz anwenden:

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x}\,dx &= [\ln(x)]_1^e \\ &= \ln(e) - \ln(1) \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

26.3 Rechenregeln für bestimmte Integrale

Grundlegende Eigenschaften

Seien f und g integrierbar auf $[a, b]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
1. Linearität:

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Vertauschung der Grenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3. Intervalladditivität:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a < c < b)$$

26.4 Flächenberechnung mit Integralen

26.4.1 Systematisierung der Grundtypen

Vier Grundtypen der Flächenberechnung

1. **Grundtyp [1]:** Fläche zwischen einer Funktion, der x-Achse und gegebenen Grenzen
2. **Grundtyp [2]:** Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse (ohne gegebene Grenzen)
3. **Grundtyp [3]:** Fläche zwischen zwei Funktionen mit gegebenen Grenzen

4. **Grundtyp [4]:** Fläche zwischen zwei Funktionen (ohne gegebene Grenzen)

Hinweis: Die meisten Flächen lassen sich auf diese 4 Grundtypen zurückführen!

26.4.2 Grundtyp [1]: Funktion mit gegebenen Grenzen

Gegeben und Gesucht

Gegeben:

- Funktion $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$
- Intervall $[a, b]$

Formel für den Flächeninhalt:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Voraussetzung: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$

Sonderfall: Funktion verläuft unterhalb der x-Achse

Liegt die Funktion unterhalb der x-Achse ($f(x) < 0$), muss der Betrag gebildet werden:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

Fläche unter einer Parabel

Aufgabe: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$, der x-Achse und den Grenzen $x = 0$ und $x = 2$.
Lösung: Da $f(x) = x^2 \geq 0$ auf $[0, 2]$:

$$A = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}\text{ FE}$$

26.4.3 Grundtyp [2]: Funktion ohne gegebene Grenzen

Lösungsstrategie

Wenn die Grenzen nicht vorgegeben sind:

1. **Nullstellen bestimmen:** Löse $f(x) = 0 \to$ Integrationsgrenzen
2. **Vorzeichen prüfen:** Wo ist $f(x) > 0$, wo $f(x) < 0$?
3. **Teilflächen berechnen:** Bilde Beträge der Integrale dort, wo $f(x) < 0$
4. **Gesamtfläche:** Addiere alle Teilflächen

Fläche unterhalb der x-Achse

Aufgabe: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.
Lösung:
Schritt 1: Nullstellen bestimmen

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

Schritt 2: Vorzeichen prüfen Für $x \in (-2, 2)$ ist $f(x) < 0$ (Parabel öffnet nach oben, Scheitelpunkt bei $(0, -4)$)
Schritt 3: Flächenberechnung mit Betrag

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-2}^{2} \right|$$

Einsetzen:

$$\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = \frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 = \frac{16}{3} - 16 = -\frac{32}{3}$$

Schritt 4: Betrag bilden

$$A = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ FE}$$

26.4.4 Grundtyp [3]: Zwei Funktionen mit gegebenen Grenzen

Gegeben und Gesucht

Gegeben:

- Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x) \geq g(x)$ auf $[a, b]$
- Intervall $[a, b]$

Formel für den Flächeninhalt:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Merksatz: Obere Funktion minus untere Funktion!

Fläche zwischen Parabel und Gerade

Aufgabe: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$.
Lösung:
Schritt 1: Lage prüfen Für $x \in [0, 1]$ ist $x^2 \leq x$ (z.B. bei $x = 0.5$: $0.25 \leq 0.5$), also $g(x) \geq f(x)$.
Schritt 2: Berechnung

$$A = \int_0^1 [x - x^2]\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6} \text{ FE}$$

26.4.5 Grundtyp [4]: Zwei Funktionen ohne gegebene Grenzen

Lösungsstrategie

Wenn die Grenzen nicht vorgegeben sind:

1. **Schnittpunkte bestimmen:** Löse $f(x) = g(x) \rightarrow$ Integrationsgrenzen x_1, x_2
2. **Lage prüfen:** Welche Funktion liegt im Intervall oben? (Testpunkt einsetzen)
3. **Teilflächen berechnen:** Integral von (obere Funktion − untere Funktion)
4. **Gesamtfläche:** Addiere alle Teilflächen (falls mehrere Intervalle)

Schnittpunkte bestimmen

Aufgabe: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$.
Lösung:
Schritt 1: Schnittpunkte bestimmen

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$
Schritt 2: Lage der Funktionen bestimmen Testpunkt $x = 0.5$:

$$f(0.5) = 0.25, \quad g(0.5) = 0.5$$

Da $0.25 < 0.5$, gilt: $g(x) \geq f(x)$ auf $[0, 1]$.
Schritt 3: Flächeninhalt berechnen

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 [x - x^2]\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ FE}$$

26.5 Übungsaufgaben

Bestimmte Integrale

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_1^2 x^3\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 + 1)\, dx$

Flächen zwischen Funktion und x-Achse

a) Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 9$ und der x-Achse.

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = -x^2 + 4$ und der x-Achse.

c) Finden Sie die Fläche, die von $f(x) = x(x-1)(x-2)$ und der x-Achse im Intervall $[0, 2]$ eingeschlossen wird (Hinweis: Beträge beachten!).

Flächen zwischen zwei Kurven

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 2x$ im Intervall $[0, 2]$.

b) Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4$.

c) Gegeben sind $f(x) = x^3 - 3x$ und $g(x) = x$. Bestimmen Sie alle Teilflächen zwischen den beiden Funktionen und berechnen Sie die Gesamtfläche.

Gemischte Aufgaben

a) Berechnen Sie die Fläche, die vollständig von den drei Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 4$ und $h(x) = 0$ (x-Achse) eingeschlossen wird.

b) Die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^3 - 4x$ schneiden sich mehrfach. Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionen im Bereich $x \in [-3, 3]$. Hinweis: Bestimmen Sie zunächst alle Schnittpunkte und beachten Sie, welche Funktion jeweils oben liegt.

27

Anwendungen: Flächen und Rotationskörper

27.1 Flächenberechnung mit komplexen Funktionen

27.1.1 Systematische Vorgehensweise

Bei komplexeren Funktionen benötigen wir für die Flächenberechnung die Integrationsmethoden aus dem vorherigen Kapitel (Substitution, partielle Integration).

Empfohlene Vorgehensweise

1. **Zuerst:** Stammfunktion $F(x)$ mit geeigneter Integrationstechnik berechnen
2. **Dann:** Hauptsatz anwenden: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Vorteil: Keine Transformation der Grenzen bei Substitution nötig (wenn man zuerst die Stammfunktion bestimmt und dann substituiert zurück)!

Wichtige Hinweise

- Nicht vergessen: Resubstitution durchführen!
- Bei Flächen unter der x-Achse: Betrag bilden
- Kontrolle: Ableitung der Stammfunktion = Integrand?

27.1.2 Beispiele mit verschiedenen Methoden

Fläche mit Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x \cdot e^{x^2}$, der x-Achse und den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$.
Lösung:
Schritt 1: Stammfunktion berechnen
Substitution: $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \int e^u \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}e^u + C$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Also: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$
Schritt 2: Grenzen einsetzen

$$A = \int_0^1 x \cdot e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}(e-1) \approx 0{,}859 \text{ FE}$$

Fläche mit partieller Integration

Aufgabe: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x\sin(x)$, der x-Achse und den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$.
Lösung:
Schritt 1: Stammfunktion berechnen
Partielle Integration mit $u = x$ und $v' = \sin(x)$, also $u' = 1$ und $v = -\cos(x)$:

$$\int x\sin(x)\,dx = x\cdot(-\cos(x)) - \int 1\cdot(-\cos(x))\,dx$$
$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Also: $F(x) = -x\cos(x) + \sin(x)$
Schritt 2: Grenzen einsetzen

$$A = \big[-x\cos(x) + \sin(x)\big]_0^\pi$$
$$= (-\pi\cdot(-1) + 0) - (0 + 0) = \pi \text{ FE}$$

Kombinierte Methoden

Aufgabe: Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = 1$.
Lösung:
Schritt 1: Stammfunktion durch Substitution
Substitution: $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$
Außerdem: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{u}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{u} + C$$
$$= \sqrt{x^2+1} + C$$

Schritt 2: Grenzen einsetzen

$$A = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414 \text{ FE}$$

27.2 Rotationsvolumina

27.2.1 Grundidee

Rotiert eine Fläche um eine Achse, entsteht ein dreidimensionaler Körper. Das Volumen kann durch Integration berechnet werden, indem man unendlich viele infinitesimale Kreisscheiben aufsummiert.

Rotationsvolumen um die x-Achse

Rotiert $y = f(x)$ um die x-Achse im Intervall $[a, b]$, so gilt für das Volumen:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Anschauung: An jeder Stelle x entsteht eine Kreisscheibe mit Radius $r = |f(x)|$. Die Fläche der Scheibe ist $A(x) = \pi[f(x)]^2$. Integration über alle Scheiben ergibt das Volumen.

Das Quadrat im Integral

Das Quadrat im Integral stammt aus der Kreisflächenformel $A = \pi r^2$!

27.2.2 Beispiele zur Rotation um die x-Achse

Rotation einer Wurzelfunktion

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn $f(x) = \sqrt{x}$ zwischen $x = 0$ und $x = 4$ um die x-Achse rotiert.
Lösung:

$$V_x = \pi \int_0^4 [\sqrt{x}]^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi \approx 25{,}13 \text{ VE}$$

Rotation der Exponentialfunktion

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen für $f(x) = e^x$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ (Rotation um x-Achse).
Lösung:

$$V_x = \pi \int_0^1 [e^x]^2 \, dx = \pi \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

Mit Substitution $u = 2x$ oder direkt:

$$= \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \approx 10{,}04 \text{ VE}$$

27.2.3 Rotation um die y-Achse

Rotationsvolumen um die y-Achse

Rotiert der Graph um die y-Achse im Intervall $[c, d]$ (in y-Richtung):

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy$$

wobei $x = g(y)$ die Umkehrfunktion ist (nach x aufgelöst).

Wichtige Schritte:

1. Funktion nach x auflösen: $x = g(y)$
2. Grenzen in y-Werte umrechnen
3. Nach y integrieren

Rotation um die y-Achse

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn der Graph von $y = x^2$ zwischen $y = 0$ und $y = 4$ um die y-Achse rotiert.
Lösung:
Schritt 1: Umkehrfunktion bilden

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad (\text{für } x \geq 0)$$

Schritt 2: Volumenformel aufstellen

$$V_y = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 \, dy = \pi \int_0^4 y \, dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi \text{ VE}$$

27.2.4 Rotation einer Fläche zwischen zwei Funktionen

Hohlkörper / Ringkörper

Wenn die Fläche zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x) \geq g(x) \geq 0$ rotiert, entsteht ein Hohlkörper:

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

Merksatz: Äußerer Radius zum Quadrat minus innerer Radius zum Quadrat!

Fläche zwischen zwei Funktionen rotiert

Aufgabe: Die Fläche zwischen $f(x) = 2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 2]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.
Lösung:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left([2]^2 - [x]^2\right) dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} \approx 16{,}76 \text{ VE} \end{aligned}$$

Hohlzylinder

Aufgabe: Ein Hohlzylinder entsteht durch Rotation der Fläche zwischen $f(x) = 3$ und $g(x) = 2$ um die x-Achse im Intervall $[0, 5]$. Berechnen Sie das Volumen.
Lösung:

$$V = \pi \int_0^5 (3^2 - 2^2) \, dx = \pi \int_0^5 5 \, dx = \pi [5x]_0^5 = 25\pi \text{ VE}$$

Kontrolle mit Geometrie:

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(9-4) \cdot 5 = 25\pi \quad \checkmark$$

27.3 Masse von Rotationskörpern

Masse bei konstanter Dichte

Ist ρ die konstante Dichte des Materials:

$$m = \rho \cdot V$$

Einheiten beachten: Volumen in cm^3, Dichte in g/cm^3 $\Rightarrow$ Masse in g.

Masse bei variabler Dichte

Ist $\rho(x)$ eine ortsabhängige Dichte (z.B. durch Materialverdichtung):

$$m = \pi \int_a^b \rho(x) \cdot [f(x)]^2 \, dx$$

Masse mit konstanter Dichte

Aufgabe: Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von $f(x) = \sqrt{x}$ um die x-Achse von $x = 0$ bis $x = 4$. Die Dichte beträgt konstant $\rho = 2$ g/cm^3. Berechnen Sie die Masse.
Lösung: Aus vorherigem Beispiel: $V = 8\pi$ cm^3

$$m = \rho \cdot V = 2 \cdot 8\pi = 16\pi \approx 50{,}27 \text{ g}$$

Masse mit variabler Dichte

Aufgabe: Ein Kegel entsteht durch Rotation von $f(x) = x$ um die x-Achse von $x = 0$ bis $x = 2$. Die Dichte nimmt linear zu: $\rho(x) = 1 + x$ (in g/cm^3). Berechnen Sie die Masse.
Lösung:

$$\begin{aligned} m &= \pi \int_0^2 (1+x) \cdot [x]^2 \, dx = \pi \int_0^2 (x^2 + x^3) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \pi \left(\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{20\pi}{3} \approx 20{,}94 \text{ g} \end{aligned}$$

27.4 Zusammenfassung

Flächenberechnung

Vorgehen bei schwierigen Integralen:

1. Stammfunktion mit geeigneter Methode bestimmen
2. Hauptsatz anwenden: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Integrationsmethoden:

- **Substitution:** Bei verketteten Funktionen

- **Partielle Integration:** Bei Produkten verschiedenartiger Funktionen
- **Kombination:** Bei komplexeren Ausdrücken

Rotationsvolumen

Rotation um die x-Achse:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Rotation um die y-Achse:

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy \quad \text{mit } x = g(y)$$

Fläche zwischen Funktionen (Hohlkörper):

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

Masse:

- Konstant: $m = \rho \cdot V$
- Variabel: $m = \pi \int_a^b \rho(x) \cdot [f(x)]^2 \, dx$

27.5 Übungsaufgaben

Flächenberechnung mit Techniken

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x\cos(x^2)$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\pi/2}$ (Hinweis: Substitution).

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 e^x$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = 1$ (Hinweis: Zweimalige partielle Integration).

c) Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = \ln(x)$ und der x-Achse von $x = 1$ bis $x = e$.

Rotationsvolumina

a) Berechnen Sie das Volumen, das entsteht, wenn $f(x) = \frac{1}{x}$ zwischen $x = 1$ und $x = 2$ um die x-Achse rotiert.

b) Die Fläche zwischen $y = x$ und $y = x^2$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen (Schnittpunkte: $x = 0$ und $x = 1$).

c) Ein Kegel mit Grundradius $r = 3$ und Höhe $h = 5$ wird durch Rotation der Geraden $y = \frac{3}{5}x$ um die x-Achse erzeugt. Bestätigen Sie die Kegelformel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Anspruchsvolle Aufgaben

a) Die Fläche zwischen $f(x) = e^x$ und $g(x) = 1$ im Intervall $[0, \ln(2)]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

b) Die Funktion $y = \sin(x)$ rotiert von $x = 0$ bis $x = \pi$ um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen und die Masse bei konstanter Dichte $\rho = 1{,}5$ g/cm^3.

c) Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation von $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (Halbkreis) um die x-Achse von $x = -2$ bis $x = 2$. Die Dichte beträgt $\rho = 3$ g/cm^3. Berechnen Sie die Masse (Hinweis: Das Volumen ist eine Kugel).