Wie steil ist eine Funktion?

Lineare Funktionen

Was ist eine lineare Funktion?

Eine lineare Funktion sieht so aus:

$$\boxed{f(x) = m \cdot x + b}$$

- m: **Steigung** (wie steil ist die Gerade?)
- b: **y-Achsenabschnitt** (wo schneidet die Gerade die y-Achse?)

Wichtig!

Bei linearen Funktionen ist die Steigung **überall gleich**.

Steigung zwischen zwei Punkten

Wie berechnen wir die Steigung zwischen zwei Punkten?

Zwei Punkte auf der Geraden:

$$P_1(x_1; y_1) \quad \text{und} \quad P_2(x_2; y_2)$$

Formel

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{horizontaler Abstand}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- $y_2 - y_1$: Wie viel geht es nach oben/unten?
- $x_2 - x_1$: Wie weit geht es nach rechts?

Übung: Steigung berechnen

Aufgabe: Berechne die Steigung der Geraden $f(x) = 3x + 2$ zwischen den Punkten $P_1(1; f(1))$ und $P_2(4; f(4))$.

Tipp

Nutze die Formel:

$$\text{Steigung} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Übung: Steigung berechnen

Aufgabe: Berechne die Steigung der Geraden $f(x) = 3x + 2$ zwischen den Punkten $P_1(1; f(1))$ und $P_2(4; f(4))$.

Tipp

Nutze die Formel:

$$\text{Steigung} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lösung

$$\text{Steigung} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(3 \cdot 4 + 2) - (3 \cdot 1 + 2)}{3} = \frac{14 - 5}{3} = 3$$

Das Problem bei nicht-linearen Funktionen

Bei nicht-linearen Funktionen:

- Die Steigung ist **nicht überall gleich**.
- Sie ändert sich von Punkt zu Punkt.

Beispiel: $f(x) = x^2$

Frage

Wie finden wir die **genaue Steigung an einer bestimmten Stelle**?

Antwort: Wir nähern uns mit einer Geraden an!

Die Sekante: Eine Hilfsgerade

Was ist eine Sekante?

Eine **Sekante** ist eine Gerade, die den Graphen in **zwei Punkten** schneidet.

Zwei Punkte auf dem Graphen:

- $P(x_0; f(x_0))$ – ein fester Punkt
- $Q(x_0 + h; f(x_0 + h))$ – ein zweiter Punkt, der näher oder weiter weg ist

Steigung der Sekante:

$$m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Übung: Sekantensteigung berechnen

Aufgabe: Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte $P(1; f(1))$ und $Q(3; f(3))$ der Funktion $f(x) = x^2$.

Tipp

Nutze die Formel:

$$m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Hier ist $x_0 = 1$ und $h = 2$.

Übung: Sekantensteigung berechnen

Aufgabe: Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte $P(1; f(1))$ und $Q(3; f(3))$ der Funktion $f(x) = x^2$.

Tipp

Nutze die Formel:

$$m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Hier ist $x_0 = 1$ und $h = 2$.

Lösung

$$m_S = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

Von der Sekante zur Tangente

Idee: Wir lassen den zweiten Punkt Q immer näher an P rücken.

Wenn h immer kleiner wird:

- Q rückt näher an P heran.
- Die Sekante wird zur **Tangente** (Berührgerade).

Steigung der Tangente

Die Steigung der Tangente ist der Grenzwert:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Übung: Tangentensteigung bestimmen

Aufgabe: Bestimme die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Tipp

Nutze die Definition:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Übung: Tangentensteigung bestimmen

Aufgabe: Bestimme die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Tipp

Nutze die Definition:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Lösung

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4$$

Die Ableitung: Steigung an jeder Stelle

Was ist die Ableitung?

Die **Ableitung** $f'(x)$ gibt die **Steigung der Tangente** an jeder Stelle x an.

Formel:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- $f'(x)$ heißt auch **Steigungsfunktion**.
- Äbleiten" bedeutet: Die Steigung berechnen.

Wichtige Begriffe

Zusammenfassung

- **Steigung zwischen zwei Punkten:** $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **Sekante:** Gerade durch zwei Punkte des Graphen
- **Tangente:** Gerade, die den Graphen berührt
- **Ableitung $f'(x)$:** Steigung der Tangente an jeder Stelle
- **Differenzierbar:** Wenn die Ableitung existiert

Der wichtigste Merksatz!

Merksatz

Die Ableitung $f'(x_1)$ gibt die **Steigung der Tangente** an der Stelle x_1 an.

Beispiel: Wenn $f'(2) = 4$, dann steigt die Tangente an der Stelle $x = 2$ mit der Steigung 4.

Übung: Ist die Funktion differenzierbar?

Aufgabe: Ist die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

Tipp

Prüfe, ob der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

existiert.

Übung: Ist die Funktion differenzierbar?

Aufgabe: Ist die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

Tipp

Prüfe, ob der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

existiert.

Lösung

Der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert sind nicht gleich:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

Daher ist $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ **nicht differenzierbar**.

Gleichung der Tangente

Wie finden wir die Gleichung der Tangente?

Formel

Die Tangente ist eine Gerade mit der Steigung $m_T = f'(x_0)$, die durch den Punkt $P(x_0; f(x_0))$ verläuft:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Beispiel: Wenn $f(x) = x^2$ und $x_0 = 2$, dann ist $t(x) = 4x - 4$.

Übung: Tangentengleichung aufstellen

Aufgabe: Bestimme die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $P(2; f(2))$.

Tipp

Nutze die Formel:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Du weißt bereits, dass $f'(2) = 4$ ist.

Übung: Tangentengleichung aufstellen

Aufgabe: Bestimme die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $P(2; f(2))$.

Tipp

Nutze die Formel:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Du weißt bereits, dass $f'(2) = 4$ ist.

Lösung

$$t(x) = 4 \cdot (x - 2) + 4 = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$$

Der Anstiegswinkel

Was ist der Anstiegswinkel?

Der **Anstiegswinkel** α ist der Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet.

Zusammenhang

$$m_T = \tan(\alpha) \quad \text{oder} \quad \alpha = \arctan(m_T)$$

Beispiel: Wenn $m_T = 4$, dann ist $\alpha = \arctan(4) \approx 76$.

Zusammenfassung

Wichtigste Begriffe

- **Steigung zwischen zwei Punkten:** $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **Sekante:** Gerade durch zwei Punkte
- **Tangente:** Berührgerade
- **Ableitung $f'(x)$:** Steigung der Tangente
- **Differenzierbar:** Wenn die Ableitung existiert

Wichtigste Formeln

Formeln

- **Steigung der Sekante:** $m_S = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **Ableitung:** $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- **Tangentengleichung:** $t(x) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

Übungsaufgabe 1: Ableitung berechnen

Aufgabe: Berechne die Ableitung (Steigung der Tangente) an der gegebenen Stelle mit der Definition:

a) $f'(3)$ für $f(x) = x^2$
b) $f'(1)$ für $f(x) = 2x^2 + 3x$
c) $f'(2)$ für $f(x) = \frac{1}{x}$

Tipp

Nutze die Formel:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Übungsaufgabe 2: Tangente bestimmen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) Berechne $f'(1)$ mit der Definition der Ableitung.

b) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $P(1; f(1))$.

c) Berechne den Anstiegswinkel der Tangente.

Tipp

- Für a): Nutze $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Für b): Nutze $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- Für c): Nutze $\alpha = \arctan(m_T)$.

Übungsaufgabe 3: Differenzierbarkeit prüfen

Aufgabe: Untersuche, ob die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar sind:

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$