Grenzwerte von Funktionen
Teil 3: Asymptoten und Polynomdivision

Was wir bereits wissen

Bisher haben wir zwei Arten von Asymptoten kennengelernt:

1. Waagerechte Asymptoten ($y = g$)

- Wenn $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = g$
- Die Funktion nähert sich einer horizontalen Linie

2. Senkrechte Asymptoten ($x = a$)

- Bei Polstellen
- Die Funktion geht gegen $\pm\infty$

Heute: Die dritte Art von Asymptoten!

Waagerechte Asymptoten – Wiederholung

Wann hat eine Funktion eine waagerechte Asymptote?

Bei gebrochenrationalen Funktionen:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots}$$

Regel – Fall 1

Fall 1: Zählergrad $n < m$ (Nenner höher)

$\rightarrow$ Asymptote ist $y = 0$

Waagerechte Asymptoten – Wiederholung (Fortsetzung)

Regel – Fall 2 und 3

Fall 2: Zählergrad $n = m$ (gleich hoch)

$\rightarrow$ Asymptote ist $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ (Verhältnis der höchsten Koeffizienten)

Fall 3: Zählergrad $n > m$ (Zähler höher)

$\rightarrow$ Keine waagerechte Asymptote!

ÜBUNG: Waagerechte Asymptoten

Bestimme die waagerechten Asymptoten (falls vorhanden):

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 4}$

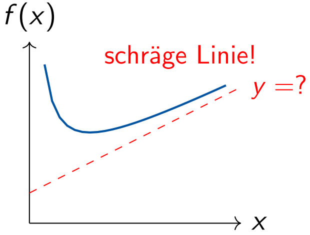
Überleitung: Was fehlt noch?

Beobachtung:
Bei Fall 3 (Zählergrad $>$ Nennergrad) gibt es keine waagerechte Asymptote.

Aber: Die Funktion kann trotzdem ein vorhersagbares Verhalten haben!

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$



Was ist Polynomdivision?

Idee: Polynome durcheinander teilen (wie bei Zahlen)

Erinnerung an Zahlendivision:

$$23 : 4 = 5 \text{ Rest } 3 \quad \text{oder} \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3$$

Bei Polynomen genauso:

$$x^2 + 3x + 1 = (x+1) \cdot (x+2) + (-1)$$

Warum brauchen wir das?

Um schräge Asymptoten zu finden!

Polynomdivision: Schritt für Schritt

Vorgehen:

1. Dividiere den **höchsten Term** des Dividenden durch den **höchsten Term** des Divisors
2. Multipliziere das Ergebnis mit dem ganzen Divisor
3. Subtrahiere vom Dividenden
4. Wiederhole mit dem Rest, bis der Grad des Rests kleiner ist als der Grad des Divisors

Wichtig!

Der Rest kann oft vernachlässigt werden, wenn $x \to \infty$!

Beispiel 1: Polynomdivision

Aufgabe: $(x^2 + 5x + 6) : (x + 2)$

Schritt-für-Schritt-Lösung:

$$
\begin{array}{ll}
(x^2 + 5x + 6) : (x + 2) = x + 3 & \\
\underline{-(x^2 + 2x)} & (1.\ \text{Schritt: } x^2 : x = x) \\
3x + 6 & \\
\underline{-(3x + 6)} & (2.\ \text{Schritt: } 3x : x = 3) \\
0 &
\end{array}
$$

ÜBUNG: Polynomdivision (ohne Rest)

Führe die Polynomdivision durch:

a) $(x^2 + 7x + 12) : (x + 3)$

b) $(x^2 - 4) : (x - 2)$

c) $(2x^2 + 5x + 3) : (x + 1)$

Beispiel 2: Polynomdivision mit Rest

Aufgabe: $(x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$

Schritt-für-Schritt-Lösung:

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + 3x + 1) : (x + 1) = \mathbf{x + 2} \\
\underline{-(x^2 + x)} \quad (1.\ \text{Schritt: } x^2 : x = x) \\
\qquad 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(2x + 2)} \quad (2.\ \text{Schritt: } 2x : x = 2) \\
\qquad\qquad -1 \quad (\text{Rest!})
\end{array}
$$

Ergebnis

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

Für $x \to \infty$: Der Rest $\frac{-1}{x+1} \to 0$

ÜBUNG: Polynomdivision mit Rest

Führe die Polynomdivision durch und gib den Rest an:

a) $(x^2 + 4x + 1) : (x + 2)$

b) $(x^2 - x + 3) : (x - 1)$

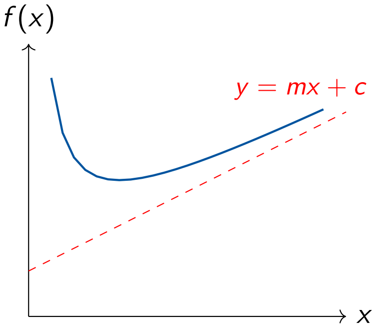
c) $(2x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

Schräge Asymptoten

Was ist eine schräge Asymptote?

Eine Gerade $y = mx + c$ (mit $m \neq 0$) heißt **schräge Asymptote**, wenn sich die Funktion dieser Geraden für $x \to \pm\infty$ annähert.

Anschaulich: Der Abstand zwischen Funktion und Gerade wird beliebig klein.



Wann gibt es schräge Asymptoten?

Bei gebrochenrationalen Funktionen:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$$

Regel

Eine schräge Asymptote gibt es genau dann, wenn:

$$\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad} + 1$$

Also: $n = m + 1$

Wie findet man die schräge Asymptote?

Methode: Polynomdivision!

1. Führe die Polynomdivision durch:
$$\frac{Z(x)}{N(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$$
2. $Q(x)$ ist das Ergebnis (eine Gerade $mx + c$)
3. $\frac{R(x)}{N(x)}$ ist der Rest (geht gegen 0 für $x \to \infty$)
4. Die schräge Asymptote ist: $y = Q(x) = mx + c$

Wichtig!

Der Rest verschwindet für große x, deshalb ist $y = Q(x)$ die Asymptote!

Beispiel: Schräge Asymptote bestimmen

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

Schritt 1: Gradprüfung

- Zählergrad $= 2$
- Nennergrad $= 1$
- Da $2 = 1 + 1$, gibt es eine schräge Asymptote.

Schritt 2: Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (x^2 + 3x + 1) : (x + 1) = \mathbf{x + 2} \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ \qquad\quad 2x + 1 \end{array}$$

Beispiel: Schräge Asymptote bestimmen (Fortsetzung)

Schritt 2: Polynomdivision (Fortsetzung)

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ \underline{-(2x+2)} \\ -1 \quad \text{(Rest)} \end{array}$$

Schritt 3: Ergebnis

$$f(x) = x + 2 - \frac{1}{x+1}$$

Schräge Asymptote

Die schräge Asymptote ist:

$$y = x + 2$$

ÜBUNG: Schräge Asymptoten bestimmen

Bestimme die schrägen Asymptoten:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

Kombination: Polstellen und schräge Asymptoten

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

Schritt 1: Polstellen finden
Nenner $= 0$ bei $x = 1$
Zähler bei $x = 1$: $1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$
$\rightarrow$ Polstelle bei $x = 1$

Schritt 2: Schräge Asymptote (Polynomdivision)

$$(x^2 - x - 2) : (x - 1) = x - 2$$

$\rightarrow$ Schräge Asymptote: $y = x$

ÜBUNG: Vollständige Funktionsanalyse

Analysiere die Funktionen vollständig (Polstellen + Asymptoten):

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

Zusammenfassung: Die drei Asymptoten-Typen

1. Waagerechte Asymptote ($y = g$)

- Wenn Zählergrad $\leq$ Nennergrad
- $y = 0$ oder $y = \frac{a_n}{b_m}$

2. Senkrechte Asymptote ($x = a$)

- Bei Polstellen
- Nenner $= 0$, Zähler $\neq 0$

3. Schräge Asymptote ($y = mx + c$)

- Wenn Zählergrad $=$ Nennergrad $+ 1$
- Durch Polynomdivision bestimmen

Entscheidungsbaum: Welche Asymptote?

Gegeben: $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ mit Graden n (Zähler) und m (Nenner)

- Vergleiche n und m
  - $n < m$
$y = 0$
  - $n = m$
$y = \frac{a_n}{b_m}$
  - $n = m + 1$
Polydivision
$y = mx + c$
  - $n > m + 1$
keine Asymptote

Polstellen: Immer separat prüfen (Nenner $= 0$, Zähler $\neq 0$)

Hausaufgaben – Aufgabe 1

Übe zu Hause:

Aufgabe 1: Führe die Polynomdivision durch:

a) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x - 1)$

b) $(2x^2 + 7x + 3) : (2x + 1)$

Hausaufgaben – Aufgabe 2

Aufgabe 2: Bestimme alle Asymptoten:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$

Hausaufgaben – Klausuraufgabe

Aufgabe 3 (Klausurstil): Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

a) Bestimme alle Asymptoten der Funktion (waagerecht, senkrecht, schräg).

b) Untersuche die Funktion auf Unstetigkeitsstellen. Welche Art liegt vor?

c) Skizziere den Graphen von f unter Berücksichtigung aller Asymptoten.