Zahlenfolgen

Was ist eine Zahlenfolge?

Definition (Zahlenfolge)

Eine **Zahlenfolge** (kurz: **Folge**) ist eine reelle Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Schreibweise:

- (a_n) oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bezeichnet die gesamte Folge
- a_n bezeichnet das n-te Folgenglied
- Explizite Darstellung: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Wichtige Begriffe

Grundbegriffe

- **Index** n: Die Platznummer oder Position eines Folgenglieds
- **Folgenglied** a_n: Das Element der Folge an der Stelle n

Beispiel:
Die Folge (a_n) mit $a_n = 2n$ ergibt:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = 8, \quad \ldots$$

Explizite Bildungsvorschrift

Definition

Jedes Folgenglied wird direkt als Funktion des Index berechnet:

$$a_n = f(n)$$

Vorteil: Direkter Zugriff auf jedes Folgenglied ohne vorherige Berechnung.

Beispiel:
Die Folge $a_n = 2n + 1$ ergibt:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 9, \quad \dots$$

Explizite Bildungsvorschrift: Berechnung

Beispiel: $a_n = 2n + 1$

Berechnung einzelner Glieder:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\
a_2 &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\
a_3 &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\
a_{10} &= 2 \cdot 10 + 1 = 21 \\
a_{100} &= 2 \cdot 100 + 1 = 201
\end{aligned}
$$

Man kann **jedes** Glied direkt berechnen!

Rekursive Bildungsvorschrift

Definition

Jedes Folgenglied wird aus einem oder mehreren vorhergehenden Gliedern berechnet. Dazu muss mindestens ein Anfangsglied gegeben sein.

Vorteil: Manchmal einfacher zu formulieren, beschreibt den Bildungsprozess.

Beispiel:
Die Folge mit $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 2$ ergibt:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 9, \quad \dots$$

Rekursive Bildungsvorschrift: Berechnung

Beispiel: $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 2$

Schrittweise Berechnung:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \text{ (gegeben)} \\ a_2 &= a_1 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ a_3 &= a_2 + 2 = 5 + 2 = 7 \\ a_4 &= a_3 + 2 = 7 + 2 = 9 \\ a_5 &= a_4 + 2 = 9 + 2 = 11 \end{aligned}$$

Man muss alle vorherigen Glieder berechnen!

Vergleich: Explizit vs. Rekursiv

Dieselbe Folge, zwei Darstellungen

Explizit: $a_n = 2n + 1$
Rekursiv: $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 2$

Beide beschreiben die Folge: $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

- **Vorteil explizit:** Direkter Zugriff auf jedes Folgenglied
- **Vorteil rekursiv:** Manchmal einfacher zu formulieren

Nach oben beschränkt

Definition

Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S_o \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a_n \leq S_o \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Die Zahl S_o heißt **obere Schranke**.

Beispiel:
Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist nach oben beschränkt:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Obere Schranken: $S_o = 1, 2, 100, \ldots$ (alle Zahlen ≥ 1)

Nach unten beschränkt

Definition

Eine Folge (a_n) heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $S_u \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a_n \geq S_u \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Die Zahl S_u heißt **untere Schranke**.

Beispiel:
Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist nach unten beschränkt:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Untere Schranken: $S_u = 0, -1, -5, \ldots$ (alle Zahlen ≤ 0)

Beschränkt und unbeschränkt

Definition

Eine Folge (a_n) heißt
beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

unbeschränkt, wenn sie nicht beschränkt ist.

Wichtiger Hinweis

Eine Folge kann **mehrere** obere und untere Schranken haben!
Ist S_o eine obere Schranke, so ist auch jede Zahl $S > S_o$ eine obere Schranke.

Beispiel: Beschränkte Folge

Beispiel:
Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ergibt:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

Diese Folge ist **beschränkt**:

- Nach oben beschränkt durch $S_o = 1$ (oder jede größere Zahl)
- Nach unten beschränkt durch $S_u = 0$ (oder jede kleinere Zahl)

Es gilt: $0 < a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel: Unbeschränkte Folge

Beispiel:
Die Folge $a_n = n^2$ ergibt:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16, \quad a_5 = 25, \quad \ldots$$

Diese Folge ist:

- **nach unten beschränkt** (z.B. durch $S_u = 0$)
- **nach oben unbeschränkt** (wird beliebig groß)
- Also insgesamt **unbeschränkt**

Die Folgenglieder werden beliebig groß!

Monoton wachsend

Definition

Eine Folge (a_n) heißt
monoton wachsend, wenn

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

streng monoton wachsend, wenn

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Beispiel: $a_n = 2n - 1$

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

Streng monoton wachsend, da $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1 > 2n - 1 = a_n$

Monoton fallend

Definition

Eine Folge (a_n) heißt
monoton fallend, wenn

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

streng monoton fallend, wenn

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Streng monoton fallend, da $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

Monotonie: Vergleich

Eigenschaft	Bedingung	Beispiel
Monoton wachsend	$a_{n+1} \geq a_n$	$1, 1, 2, 2, 3, \ldots$
Streng mon. wachsend	$a_{n+1} > a_n$	$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
Monoton fallend	$a_{n+1} \leq a_n$	$3, 3, 2, 2, 1, \ldots$
Streng mon. fallend	$a_{n+1} < a_n$	$5, 4, 3, 2, 1, \ldots$

Wichtig

Streng monoton bedeutet: keine gleichen aufeinanderfolgenden Glieder!

Arithmetische Zahlenfolgen: Definition

Definition (Arithmetische Folge)

Eine Folge (a_n) heißt **arithmetische Folge**, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Die Zahl $d \in \mathbb{R}$ heißt **Differenz** der arithmetischen Folge.

Merkregel

Bei einer arithmetischen Folge kommt man von einem Glied zum nächsten, indem man immer dieselbe Zahl **addiert** (die Differenz d).

Rekursive Bildungsvorschrift

Rekursive Bildungsvorschrift:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{mit Anfangsglied } a_1$$

Beispiel: $a_1 = 5$ und $d = 3$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 5 \text{ (gegeben)} \\
a_2 &= a_1 + 3 = 5 + 3 = 8 \\
a_3 &= a_2 + 3 = 8 + 3 = 11 \\
a_4 &= a_3 + 3 = 11 + 3 = 14 \\
a_5 &= a_4 + 3 = 14 + 3 = 17
\end{aligned}$$

Explizite Bildungsvorschrift: Herleitung

Wie kommt man zur expliziten Formel?

Ausgehend von a_1 und d:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\
a_5 &= a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Muster erkennen: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Explizite Bildungsvorschrift

Explizite Formel

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel: $a_1 = 5$ und $d = 3$

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n$$

Berechnung einzelner Glieder:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 + 3 \cdot 1 = 5 \\ a_5 &= 2 + 3 \cdot 5 = 17 \\ a_{10} &= 2 + 3 \cdot 10 = 32 \\ a_{100} &= 2 + 3 \cdot 100 = 302 \end{aligned}$$

Summenformel: Idee

Problem: Berechne die Summe der ersten n Glieder

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Trick von Gauß: Schreibe die Summe vorwärts und rückwärts

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - d) + a_n$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + d) + a_1$$

Idee: Addiere beide Zeilen!

Summenformel: Herleitung

Addition der beiden Zeilen:

$$2s_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n\text{-mal}}$$

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

Division durch 2:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ erhalten wir auch:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Summenformel

Satz (Summenformel für arithmetische Folgen)

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Merkregel

Die Summe ist:

$$s_n = \frac{\text{Anzahl der Glieder}}{2} \cdot (\text{erstes Glied} + \text{letztes Glied})$$

Beispiel: Summe berechnen

Aufgabe: Berechnen Sie die Summe s_{10} für die arithmetische Folge mit $a_1 = 3$ und $d = 4$.

Lösung:
Schritt 1: Berechne a_{10}

$$a_{10} = 3 + (10 - 1) \cdot 4 = 3 + 36 = 39$$

Schritt 2: Berechne die Summe

$$s_{10} = \frac{10}{2} \cdot (3 + 39) = 5 \cdot 42 = 210$$

Kontrolle: $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 = 210$ ✓

Klassisches Beispiel: Gauß'sche Summenformel

Beispiel (Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen):
Berechnen Sie: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$

Lösung:
Dies ist eine arithmetische Folge mit $a_1 = 1$, $d = 1$ und $n = 100$.

$$s_{100} = \frac{100}{2} \cdot (2 \cdot 1 + (100 - 1) \cdot 1)$$
$$= 50 \cdot (2 + 99) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Geometrische Zahlenfolgen: Definition

Definition (Geometrische Folge)

Eine Folge (a_n) heißt **geometrische Folge**, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \text{ mit } a_n \neq 0$$

Die Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt **Quotient** der geometrischen Folge.

Merkregel

Bei einer geometrischen Folge kommt man von einem Glied zum nächsten, indem man immer mit derselben Zahl **multipliziert** (dem Quotienten q).

Rekursive Bildungsvorschrift

Rekursive Bildungsvorschrift:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{mit Anfangsglied } a_1 \neq 0$$

Beispiel: $a_1 = 2$ und $q = 3$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \text{ (gegeben)} \\
a_2 &= a_1 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \\
a_3 &= a_2 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \\
a_4 &= a_3 \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54 \\
a_5 &= a_4 \cdot 3 = 54 \cdot 3 = 162
\end{aligned}$$

Explizite Bildungsvorschrift: Herleitung

Wie kommt man zur expliziten Formel?

Ausgehend von a_1 und q:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
a_5 &= a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \cdot q = a_1 \cdot q^4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Muster erkennen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Explizite Bildungsvorschrift

Explizite Formel

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Beispiel: $a_1 = 2$ und $q = 3$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Berechnung einzelner Glieder:

$$a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$$
$$a_4 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$
$$a_6 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$$
$$a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 2 \cdot 19683 = 39366$$

Beispiel: Fallende geometrische Folge

Beispiel: $a_1 = 8$ und $q = \frac{1}{2}$

Rekursiv: $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$
Explizit: $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Die Folge lautet:

$$8, \quad 4, \quad 2, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

Berechnung einzelner Glieder:

$$a_1 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 8$$
$$a_5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$
$$a_7 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 8 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$$

Summenformel: Idee

Problem: Berechne die Summe der ersten n Glieder

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Mit $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

Trick: Multipliziere die Summe mit q

$$q \cdot s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n$$

Idee: Subtrahiere die beiden Gleichungen!

Summenformel: Herleitung

Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{aligned}$$

$$s_n - q \cdot s_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Für $q \neq 1$ folgt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Summenformel

Satz (Summenformel für geometrische Folgen)

Für $q \neq 1$ gilt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Für $q = 1$ gilt:

$$s_n = n \cdot a_1$$

Beispiel: Summe berechnen (1)

Aufgabe: Berechnen Sie die Summe s_5 für die geometrische Folge mit $a_1 = 3$ und $q = 2$.

Lösung:

$$s_5 = 3 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{32 - 1}{1} = 3 \cdot 31 = 93$$

Kontrolle:
Die Folge lautet: $3, 6, 12, 24, 48$

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93 \quad \checkmark$$

Beispiel: Summe berechnen (2)

Aufgabe: Berechnen Sie die Summe s_6 für die geometrische Folge mit $a_1 = 64$ und $q = \frac{1}{2}$.

Lösung:

$$s_6 = 64 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \cdot \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 64 \cdot \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = 64 \cdot \frac{63}{64} \cdot 2 = 63 \cdot 2 = 126$$

Kontrolle:
Die Folge lautet: $64, 32, 16, 8, 4, 2$

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126 \quad \checkmark$$

Zusammenfassung: Arithmetische vs. Geometrische Folgen

Eigenschaft	**Arithmetisch**	**Geometrisch**
Charakteristik	Konstante Differenz	Konstanter Quotient
Rekursiv	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_{n+1} = a_n \cdot q$
Explizit	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Summe s_n	$\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$
Parameter	Differenz d	Quotient q
Operation	Addition	Multiplikation

Wichtige Formeln

Arithmetische Folgen

- Explizit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
- Summe: $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$

Geometrische Folgen

- Explizit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Summe (für $q \neq 1$): $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Übungsaufgabe 1: Explizite und rekursive Darstellung

Gegeben ist die Folge $a_n = 5 - 2n$.

a) Berechnen Sie die ersten 5 Glieder.
b) Geben Sie eine rekursive Bildungsvorschrift an.
c) Ist die Folge monoton? Wenn ja, wie?

Übungsaufgabe 2: Beschränktheit prüfen

Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ auf Beschränktheit.

Übungsaufgabe 3: Arithmetische Folge

Eine arithmetische Folge hat das 3. Glied $a_3 = 11$ und das 7. Glied $a_7 = 23$.

a) Bestimmen Sie das erste Glied a_1 und die Differenz d.
b) Berechnen Sie a_{20}.
c) Berechnen Sie die Summe der ersten 20 Glieder.

Übungsaufgabe 4: Geometrische Folge

Bei einer geometrischen Folge gilt $a_2 = 6$ und $a_5 = 162$.

a) Bestimmen Sie den Quotienten q und das erste Glied a_1.
b) Wie lautet das 10. Glied?
c) Berechnen Sie die Summe der ersten 8 Glieder.

Übungsaufgabe 5: Anwendungsaufgabe (Zinsrechnung)

Ein Sparer legt 5000€ zu einem jährlichen Zinssatz von 4% an. Die Zinsen werden jährlich dem Kapital zugeschlagen (Zinseszins).

a) Welche Art von Folge beschreibt das Kapital? Begründen Sie.
b) Geben Sie eine explizite Formel für das Kapital nach n Jahren an.
c) Wie viel Geld hat der Sparer nach 10 Jahren?
d) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?