

# Mathematik fürs Studienkolleg

Prüfungsvorbereitung  
T-Kurs

---

Maximilian Völk

Studienkolleg Rahn Education Leipzig

2026



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>I</b>	<b>Vektorrechnung und Analytische Geometrie</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Vektorrechnung – Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Koordinatensystem und Grundlagen . . . . .	3
1.1.1	Rechtshändiges xyz-Koordinatensystem . . . . .	3
1.1.2	Koordinatenebenen und Zeichenregeln . . . . .	3
1.2	Skalare und vektorielle Größen . . . . .	3
1.2.1	Skalare Größen . . . . .	3
1.2.2	Vektorielle Größen . . . . .	4
1.2.3	Der Nullvektor . . . . .	4
1.3	Koordinatendarstellung von Vektoren . . . . .	5
1.3.1	Komponentendarstellung . . . . .	5
1.4	Betrag eines Vektors . . . . .	5
1.5	Einheitsvektoren . . . . .	6
1.6	Basisvektoren . . . . .	6
1.7	Gegenvektor . . . . .	7
1.8	Vektoroperationen . . . . .	8
1.8.1	Addition von Vektoren . . . . .	8
1.8.2	Subtraktion von Vektoren . . . . .	8
1.8.3	Vielfachbildung (Skalarmultiplikation) . . . . .	9
1.9	Skalarprodukt . . . . .	10
1.9.1	Definition und Berechnung . . . . .	10
1.9.2	Geometrische Bedeutung . . . . .	10
1.10	Orthogonalität (Rechtwinkligkeit) . . . . .	11
1.11	Winkelberechnung zwischen Vektoren . . . . .	11
1.11.1	Vorgehen . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Vektorprodukt und Spatprodukt</b>	<b>13</b>
2.1	Einführung: Das Vektorprodukt . . . . .	13
2.1.1	Grundprinzip . . . . .	13
2.1.2	Definition . . . . .	13
2.1.3	Berechnung eines Vektorprodukts . . . . .	13
2.1.4	Wichtige Eigenschaft: Nicht-Kommutativität . . . . .	14
2.2	Parallelität und das Vektorprodukt . . . . .	14
2.2.1	Parallelitätskriterium . . . . .	14
2.3	Geometrische Bedeutungen . . . . .	15
2.3.1	Orthogonalität . . . . .	15
2.3.2	Betrag: Die Länge entspricht dem Flächeninhalt . . . . .	15
2.4	Flächenberechnungen mit dem Vektorprodukt . . . . .	16

2.4.1	Flächeninhalt eines Parallelogramms . . . . .	16
2.4.2	Flächeninhalt eines Dreiecks . . . . .	16
2.5	Das Spatprodukt . . . . .	17
2.5.1	Geometrische Motivation: Der Spat . . . . .	17
2.5.2	Definition des Spatprodukts . . . . .	17
2.5.3	Berechnung des Spatprodukts . . . . .	17
2.5.4	Eigenschaften des Spatprodukts . . . . .	18
2.6	Volumenberechnungen mit dem Spatprodukt . . . . .	18
2.6.1	Volumen eines Spats . . . . .	19
2.6.2	Volumenformeln mit Spatprodukt . . . . .	19
2.7	Punkte und Vektoren . . . . .	20
2.7.1	Vom Punkt zum Vektor: Der Ortsvektor . . . . .	20
2.7.2	Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten . . . . .	21
2.7.3	Punkt aus Anfangspunkt und Vektor berechnen . . . . .	21
2.7.4	Die Mittelpunktformel . . . . .	22
2.7.5	Verallgemeinerung: Schwerpunkt eines Dreiecks . . . . .	22
2.8	Anwendungen: Nachweis besonderer Vierecke . . . . .	22
2.8.1	Nachweis eines Parallelogramms . . . . .	22
2.8.2	Nachweis eines Rhombus . . . . .	23
2.8.3	Nachweis eines Rechtecks . . . . .	23
2.8.4	Nachweis eines Quadrats . . . . .	24
2.8.5	Gleichschenkliges Dreieck . . . . .	24
2.9	Zusammenfassung . . . . .	25
2.9.1	Vektorprodukt . . . . .	25
2.9.2	Spatprodukt . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Geraden und Ebenen im Raum</b>	<b>27</b>
3.1	Einführung . . . . .	27
3.2	Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
3.2.1	Ausgangspunkt: Geraden in der Ebene . . . . .	27
3.2.2	Parametergleichung einer Geraden . . . . .	28
3.2.3	Geradengleichungen aufstellen . . . . .	28
3.3	Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	28
3.3.1	Charakterisierung . . . . .	29
3.3.2	Parametergleichung einer Ebene . . . . .	29
3.3.3	Der Normalenvektor . . . . .	29
3.3.4	Koordinatengleichung (parameterfreie Form) . . . . .	29
3.3.5	Umwandlung der Darstellungsformen . . . . .	30
3.3.6	Ebenengleichungen aufstellen . . . . .	30
3.4	Lagebeziehungen . . . . .	31
3.4.1	Übersicht . . . . .	31
3.4.2	Lagebeziehung: Gerade $\leftrightarrow$ Gerade . . . . .	31
3.4.3	Schnittwinkel zweier Geraden . . . . .	33
3.4.4	Lagebeziehung: Gerade $\leftrightarrow$ Ebene . . . . .	33
3.4.5	Der Durchstoßpunkt . . . . .	37
3.4.6	Schnittwinkel Gerade – Ebene . . . . .	37
3.5	Zusammenfassung . . . . .	37
3.6	Übungsaufgaben . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Lagebeziehungen und Abstände</b>	<b>39</b>
4.1	Lagebeziehungen Ebene $\leftrightarrow$ Ebene . . . . .	39
4.1.1	Drei mögliche Fälle . . . . .	39
4.1.2	Grundidee zur Lagebestimmung . . . . .	39
4.1.3	Beispiel: Ebenen schneiden sich in einer Geraden . . . . .	39
4.1.4	Beispiel: Echte parallele Ebenen . . . . .	40
4.2	Schnittwinkel zweier Ebenen . . . . .	41
4.3	Abstände in der analytischen Geometrie . . . . .	41
4.3.1	Übersicht . . . . .	41
4.3.2	Fall 1: Abstand Punkt–Punkt . . . . .	42
4.3.3	Fall 2: Abstand Punkt–Gerade . . . . .	42
4.3.4	Fall 3: Abstand Punkt–Ebene (Hessesche Normalenform) . . . . .	43
4.3.5	Fall 4: Abstand paralleler Geraden . . . . .	44
4.3.6	Fall 5: Abstand windschiefer Geraden . . . . .	44
4.3.7	Fall 6: Abstand Gerade–Ebene (parallel) . . . . .	45
4.3.8	Fall 7: Abstand paralleler Ebenen . . . . .	45
4.4	Zusammenfassung . . . . .	45
4.5	Übungsaufgaben . . . . .	46
<b>II</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>Matrizen</b>	<b>49</b>
<b>III</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>Zahlenfolgen</b>	<b>53</b>
<b>IV</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Einführung in die Integration</b>	<b>57</b>



**Teil I**

**Vektorrechnung und Analytische  
Geometrie**



# Vektorrechnung – Grundlagen

---

## 1.1 Koordinatensystem und Grundlagen

---

### 1.1.1 Rechtshändiges xyz-Koordinatensystem

In der analytischen Geometrie arbeiten wir mit einem dreidimensionalen rechtshändigen Koordinatensystem. Die Orientierung ist dabei wie folgt festgelegt:

#### Orientierung des Koordinatensystems

- **x-Achse:** von hinten nach vorn
- **y-Achse:** von links nach rechts
- **z-Achse:** von unten nach oben
- **Koordinatenursprung:**  $O(0|0|0)$

### 1.1.2 Koordinatenebenen und Zeichenregeln

Das dreidimensionale Koordinatensystem wird durch drei Koordinatenebenen aufgespannt:

#### Koordinatenebenen

- **xy-Ebene:**  $z = 0$
- **yz-Ebene:**  $x = 0$
- **xz-Ebene:**  $y = 0$

Beim Zeichnen auf kariertem Papier gelten folgende Konventionen:

- 1 LE = 1 cm in  $y$ - und  $z$ -Richtung
- 1 LE = ein Diagonalkästchen in  $x$ -Richtung

## 1.2 Skalare und vektorielle Größen

---

### 1.2.1 Skalare Größen

#### Skalar

Eine **skalare Größe** wird vollständig durch einen Zahlenwert (und eine Einheit) beschrieben.

**Beispiele für skalare Größen:**

- Temperatur: 25°C
- Masse: 2,5 kg
- Zeit: 10 s
- Energie: 100 J
- Volumen: 5 L

**Eigenschaften skalarer Größen:**

- Nur der Betrag ist wichtig
- Keine Richtung vorhanden
- Einfache Addition möglich:  $2\text{ kg} + 3\text{ kg} = 5\text{ kg}$

### 1.2.2 Vektorielle Größen

Im Gegensatz zu skalaren Größen benötigen vektorielle Größen zusätzliche Informationen:

#### Vektor

Eine **vektorielle Größe**  $\vec{a}$  benötigt zur vollständigen Beschreibung:

- einen **Betrag** (Länge):  $|\vec{a}|$
- eine **Richtung** (Orientierung im Raum)
- einen **Richtungssinn** (wohin zeigt der Vektor?)

**Beispiele für vektorielle Größen:**

- Geschwindigkeit  $\vec{v}$
- Kraft  $\vec{F}$
- Beschleunigung  $\vec{a}$
- Weg/Verschiebung  $\vec{s}$

**Darstellung:** Vektoren werden als Pfeile dargestellt, wobei:

- die Pfeillänge den Betrag repräsentiert
- die Pfeilrichtung die Richtung angibt

### 1.2.3 Der Nullvektor

#### Nullvektor

Der **Nullvektor**  $\vec{0}$  ist ein besonderer Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- Hat den Betrag  $|\vec{0}| = 0$
- Hat **keine definierte Richtung**
- Entspricht: keine Bewegung, keine Kraft, keine Verschiebung

**Wichtig**

Der Nullvektor ist der **einzige** Vektor ohne Richtung!

## 1.3 Koordinatendarstellung von Vektoren

### 1.3.1 Komponentendarstellung

**Koordinatendarstellung**

Ein Vektor kann durch seine Komponenten dargestellt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

wobei  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  die Basisvektoren sind.

**Wozu braucht man das?**

- Eindeutige mathematische Beschreibung von Vektoren
- Ermöglicht Berechnungen (Addition, Multiplikation, etc.)
- Konkrete Darstellung von physikalischen Größen (Kraft, Geschwindigkeit, etc.)

**Koordinatendarstellung**

Ein Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bedeutet: 5 m/s nach rechts, 2 m/s nach oben, 1 m/s nach unten.

## 1.4 Betrag eines Vektors

**Betrag eines Vektors**

Der Betrag gibt die **Länge** eines Vektors an:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

**Wozu braucht man das?**

- Bestimmung der Stärke einer physikalischen Größe (z.B. Geschwindigkeit, Kraft)
- Berechnung von Abständen zwischen Punkten
- Normierung von Vektoren
- Überprüfung, ob ein Vektor die gewünschte Länge hat

**Geschwindigkeit berechnen**

Ein Auto fährt mit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

Wie schnell ist das Auto insgesamt?

$$|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3600 + 6400} = \sqrt{10000} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

**1.5 Einheitsvektoren****Einheitsvektor**

Ein Einheitsvektor hat die Länge 1 und zeigt in dieselbe Richtung wie der ursprüngliche Vektor:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

**Wozu braucht man das?**

- Angabe einer Richtung unabhängig von der Länge
- Zerlegung von Vektoren:  $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \hat{a}$  (Betrag  $\times$  Richtung)
- Vereinfachung von Berechnungen
- Definition von Koordinatensystemen (Basisvektoren sind Einheitsvektoren)

**Einheitsvektor berechnen**

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Schritt 1: Betrag berechnen**

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

**Schritt 2: Einheitsvektor berechnen**

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**1.6 Basisvektoren****Basisvektoren**

Die Basisvektoren sind Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Wozu braucht man das?**

- Definition des Koordinatensystems
- Jeder Vektor lässt sich als Linearkombination darstellen
- Vereinfachung der Notation in physikalischen Formeln
- Basis für Vektorzerlegung

#### Darstellung mit Basisvektoren

Der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  lässt sich schreiben als:

$$\vec{a} = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$$

Ausgeschrieben:

$$\vec{a} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 1.7 Gegenvektor

#### Gegenvektor

Der Gegenvektor hat die umgekehrten Komponenten:

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor hat den gleichen Betrag, aber entgegengesetzten Richtungssinn.

#### Wozu braucht man das?

- Darstellung entgegengesetzter physikalischer Größen (z.B. Kraft und Gegenkraft)
- Subtraktion von Vektoren:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- Rückwärtsbewegungen oder umgekehrte Richtungen
- Der Gegenvektor hebt den ursprünglichen Vektor auf:  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

#### Gegenvektor

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gegenvektor:  $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Überprüfung:**

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

**1.8 Vektoroperationen****1.8.1 Addition von Vektoren****Vektoraddition**

Vektoren werden komponentenweise addiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

**Wozu braucht man das?**

- Überlagerung von physikalischen Größen (z.B. mehrere Kräfte, Geschwindigkeiten)
- Beschreibung von zusammengesetzten Bewegungen
- Berechnung von Gesamtverschiebungen
- Geometrisch: Aneinanderhängen von Wegstrecken

**Vektoraddition – Rechnerisch und grafisch**

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Rechnung:**

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ 1 + 3 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Grafische Darstellung:** Pfeilspitzenverfahren (Kopf-an-Schwanz-Methode)

**1.8.2 Subtraktion von Vektoren****Vektorsubtraktion**

Vektoren werden komponentenweise subtrahiert:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

**Wozu braucht man das?**

- Berechnung von Differenzen physikalischer Größen (z.B. Geschwindigkeitsänderung)
- Bestimmung von Verbindungsvektoren zwischen zwei Punkten

- Berechnung relativer Bewegungen (z.B. Relativgeschwindigkeit)
- Änderungen und Unterschiede quantifizieren

### Vektorsubtraktion

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Direkte Subtraktion:**

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-4 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Alternativ mit Gegenvektor:**

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 1.8.3 Vielfachbildung (Skalarmultiplikation)

#### Skalarmultiplikation

Für  $k \in \mathbb{R}$ :

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl (Skalar) multipliziert.

**Geometrische Bedeutung:**

- $k > 1$ : Vektor wird gestreckt (länger)
- $0 < k < 1$ : Vektor wird gestaucht (kürzer)
- $k < 0$ : Richtungsumkehr und Längenänderung
- $k\vec{a}$  ist immer parallel zu  $\vec{a}$

#### Vielfachbildung

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (\text{doppelte Länge})$$

$$0,5\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad (\text{halbe Länge})$$

## 1.9 Skalarprodukt

### 1.9.1 Definition und Berechnung

#### Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (= \vec{a}^T \vec{b})$$

Das Skalarprodukt multipliziert zwei Vektoren und ergibt eine Zahl (Skalar).

**Grundprinzip:** Vektor · Vektor = Zahl (Skalar)

#### Wozu braucht man das?

- Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren
- Prüfung auf Orthogonalität (rechter Winkel):  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Berechnung von Projektionen (z.B. Komponente einer Kraft in eine Richtung)
- Physikalische Arbeit:  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
- Bestimmung, wie stark zwei Vektoren in dieselbe Richtung zeigen

#### Skalarprodukt berechnen

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = 0$$

⇒ Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander (orthogonal)!

### 1.9.2 Geometrische Bedeutung

#### Winkelbezug des Skalarprodukts

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

**Umstellung nach dem Winkel:**

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$$

#### Interpretation:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ : Winkel  $\varphi < 90^\circ$  (spitzer Winkel)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ : Winkel  $\varphi = 90^\circ$  (rechter Winkel, orthogonal)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ : Winkel  $\varphi > 90^\circ$  (stumpfer Winkel)

## 1.10 Orthogonalität (Rechtwinkligkeit)

### Orthogonalität

Zwei Vektoren sind orthogonal (stehen senkrecht aufeinander), wenn:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

**Warum ist das so?**

Aus  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$  folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90^\circ$$

**Wozu braucht man das?**

- Schnelle Überprüfung, ob Vektoren senkrecht zueinander stehen
- Konstruktion orthogonaler Koordinatensysteme
- Prüfung geometrischer Eigenschaften (z.B. rechte Winkel in Figuren)
- Wichtig für Projektionen und Zerlegungen

### Orthogonale Vektoren

**Beispiel 1: Orthogonale Vektoren**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 6 - 6 = 0$$

$\Rightarrow$  Die Vektoren sind orthogonal:  $\vec{a} \perp \vec{b}$

**Beispiel 2: Nicht orthogonale Vektoren**

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$  Die Vektoren sind nicht orthogonal.

## 1.11 Winkelberechnung zwischen Vektoren

### 1.11.1 Vorgehen

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen, geht man wie folgt vor:

#### Schritt-für-Schritt-Anleitung

**Schritt 1:** Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  berechnen

**Schritt 2:** Beträge  $|\vec{a}|$  und  $|\vec{b}|$  berechnen

**Schritt 3:** Cosinus des Winkels bestimmen:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

**Schritt 4:** Winkel berechnen:

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$$

**Winkelberechnung**

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Schritt 1: Skalarprodukt**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 0 + 1 = 3$$

**Schritt 2: Beträge**

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

**Schritt 3 & 4: Winkel**

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \approx 0,775$$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{3}{\sqrt{15}} \right) \approx 39,2^\circ$$

# Vektorprodukt und Spatprodukt

## 2.1 Einführung: Das Vektorprodukt

### 2.1.1 Grundprinzip

Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) ist eine besondere Operation, die nur im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  definiert ist.

#### Grundprinzip des Vektorprodukts

$$\text{Vektor} \times \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

**Im Gegensatz zum Skalarprodukt:** Das Vektorprodukt liefert einen neuen Vektor!

**Geometrische Bedeutung:**

- Der resultierende Vektor steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren
- Seine Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

### 2.1.2 Definition

#### Vektorprodukt / Kreuzprodukt

Seien  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Das **Vektorprodukt** ist:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

### 2.1.3 Berechnung eines Vektorprodukts

#### Vektorprodukt berechnen

Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Berechnung:**

**Erste Komponente:** (streiche Zeile 1)

$$a_2b_3 - a_3b_2 = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

**Zweite Komponente:** (streiche Zeile 2)

$$a_3b_1 - a_1b_3 = (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7$$

**Dritte Komponente:** (streiche Zeile 3)

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 8 - 1 = 7$$

**Ergebnis:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**Probe:** Der Vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  sollte orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sein:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 1, -3) \cdot (14, -7, 7) = 28 - 7 - 21 = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (1, 4, 2) \cdot (14, -7, 7) = 14 - 28 + 14 = 0 \quad \checkmark$$

#### 2.1.4 Wichtige Eigenschaft: Nicht-Kommutativität

##### Nicht-Kommutativität

Das Vektorprodukt ist **nicht kommutativ**!

Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Bei Vertauschung der Faktoren ändert sich das Vorzeichen (und damit die Richtung des Ergebnisvektors).

## 2.2 Parallelität und das Vektorprodukt

### 2.2.1 Parallelitätskriterium

#### Parallelitätskriterium

Zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  sind genau dann parallel (oder einer ist der Nullvektor), wenn gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

**Beweis:** Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  parallel, so existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ . Dann gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{a})$$

Für jede Komponente von  $\vec{a} \times \vec{a}$  ergibt sich z.B. für die erste Komponente:

$$a_2a_3 - a_3a_2 = 0$$

Also  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ . □

**Parallelität prüfen**

**Aufgabe:** Prüfen Sie, ob  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$  parallel sind.

**Lösung:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} (-1)(-12) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-6) - 2 \cdot (-12) \\ 2 \cdot 3 - (-1)(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12 \\ -24 + 24 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Die Vektoren sind parallel! (Tatsächlich gilt  $\vec{b} = -3\vec{a}$ )

## 2.3 Geometrische Bedeutungen

Das Vektorprodukt verbindet Algebra und Geometrie auf elegante Weise:

**Zwei fundamentale Eigenschaften**

**[1] Orthogonalität:**

Das Vektorprodukt steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren

**[2] Betrag = Fläche:**

Die Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

### 2.3.1 Orthogonalität

**Orthogonalität des Vektorprodukts**

Für zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  mit  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$  gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \quad \text{und} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$$

**Anschaung:** Spannen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eine Ebene auf, so zeigt  $\vec{a} \times \vec{b}$  in Richtung der Normalen (Senkrechten) auf dieser Ebene.

### 2.3.2 Betrag: Die Länge entspricht dem Flächeninhalt

**Geometrische Bedeutung des Betrags**

Für zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

wobei  $\varphi$  der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eingeschlossene Winkel ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) ist.

**Folgerung:**  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  entspricht dem Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.

**Beweis-Idee:** Der Flächeninhalt eines Parallelogramms:

$$A = \text{Grundseite} \times \text{Höhe} = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \sin \varphi)$$

Dies entspricht genau  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .

□

## 2.4 Flächenberechnungen mit dem Vektorprodukt

### 2.4.1 Flächeninhalt eines Parallelogramms

#### Flächeninhalt Parallelogramm

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seiten  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  beträgt:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

#### Flächeninhalt Parallelogramm

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  aufgespannt wird.

**Lösung:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = 6$$

Der Flächeninhalt beträgt 6 Flächeneinheiten.

### 2.4.2 Flächeninhalt eines Dreiecks

#### Flächeninhalt Dreieck

Ein Dreieck hat den halben Flächeninhalt des entsprechenden Parallelogramms:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

#### Flächeninhalt Dreieck

**Gegeben:** Drei Punkte  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(4, 2, 0)$  und  $C(2, 3, 0)$ .

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .

**Lösung:** Bestimme zwei Seitenvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5$$

## 2.5 Das Spatprodukt

### 2.5.1 Geometrische Motivation: Der Spat

#### Was ist ein Spat?

Ein **Spat** (auch **Parallelepiped** genannt) ist ein dreidimensionaler Körper, der von drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannt wird.

Stellen Sie sich einen "schiefen Quader" vor:

- Alle gegenüberliegenden Flächen sind parallel
- Die Winkel müssen nicht rechtwinklig sein
- Der Spat wird von drei Vektoren aufgespannt, die von einem gemeinsamen Punkt ausgehen

### 2.5.2 Definition des Spatprodukts

#### Spatprodukt / Gemischtes Produkt

Seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  drei Vektoren. Das **Spatprodukt** ist definiert als:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Das Spatprodukt ist eine **Zahl** (Skalar).

**Alternative Darstellung:**

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

### 2.5.3 Berechnung des Spatprodukts

#### Rechenweg

**Methode 1:**

1. Berechne zunächst das Vektorprodukt  $\vec{b} \times \vec{c}$
2. Bilde dann das Skalarprodukt von  $\vec{a}$  mit dem Ergebnis

**Methode 2:**

- Berechne die Determinante der  $3 \times 3$ -Matrix direkt nach der Regel von Sarrus

#### Spatprodukt berechnen (Methode 1)

**Gegeben:**  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Schritt 1:** Zunächst  $\vec{b} \times \vec{c}$ :

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Dann das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= (1, 2, 3) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= -1 + 2 + 6 = 7 \end{aligned}$$

### Spatprodukt berechnen (Methode 2 – Determinante)

**Lösung (Methode 2):**

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nach der Regel von Sarrus (Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0 - 1) + 3 \cdot (2 - 0) \\ &= -1 + 2 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Das Spatprodukt beträgt 7.

## 2.5.4 Eigenschaften des Spatprodukts

### Eigenschaften

**1. Zyklische Vertauschung:**

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

**2. Vorzeichenwechsel bei Vertauschung:**

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

**3. Komplanarität:**

Die drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sind genau dann komplanar (liegen in einer Ebene), wenn

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

## 2.6 Volumenberechnungen mit dem Spatprodukt

## 2.6.1 Volumen eines Spats

**Volumen eines Parallelepipeds**

Ein Parallelepiped ist ein vierseitiges schiefes Prisma, bei dem alle Seitenflächen Parallelogramme sind.

Das Volumen beträgt:

$$V_{\text{Spat}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

**Volumen eines Spats**

**Aufgabe:** Berechnen Sie das Volumen des Spats, der von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

**Lösung:**

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6 - 0) = 12$$

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 12$$

Das Volumen beträgt 12 Volumeneinheiten.

## 2.6.2 Volumenformeln mit Spatprodukt

**Übersicht**

**Vierseitiges schiefes Prisma (Spat):**

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

**Dreieitiges schiefes Prisma:**

$$V = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

**Vierseitige schiefe Pyramide:**

$$V = \frac{1}{3} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

**Dreieitige schiefe Pyramide (Tetraeder):**

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

**Herleitung der Volumenformeln:**

- **Dreieitiges Prisma:** Grundfläche ist ein Dreieck (halbes Parallelogramm), daher Faktor  $\frac{1}{2}$
- **Vierseitige Pyramide:** Volumen einer Pyramide =  $\frac{1}{3}$  des Volumens eines Prismas, daher Faktor  $\frac{1}{3}$
- **Dreieitige Pyramide (Tetraeder):** Kombination:  $\frac{1}{2}$  für Dreiecksgrundfläche und  $\frac{1}{3}$  für Pyramide, daher Faktor  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

### Volumen einer Pyramide

**Gegeben:** Vier Punkte  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 0, 0)$ ,  $C(0, 4, 0)$  und  $D(0, 0, 5)$ .

**Aufgabe:** Berechnen Sie das Volumen der Pyramide  $ABCD$ .

**Lösung:** Die Vektoren von  $A$  zu den anderen Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Das Spatprodukt:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Das Volumen der dreiseitigen Pyramide (Tetraeder):

$$V = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$$

Das Volumen beträgt 10 Volumeneinheiten.

## 2.7 Punkte und Vektoren

### 2.7.1 Vom Punkt zum Vektor: Der Ortsvektor

In der analytischen Geometrie verschmelzen zwei Konzepte zu einer eleganten Einheit:

- Punkte im Raum
- Vektoren

Diese Verbindung ermöglicht es uns:

- Geometrische Probleme rechnerisch zu lösen
- Algebraische Ausdrücke geometrisch zu interpretieren

### Ortsvektor

Sei  $O$  der Ursprung des Koordinatensystems und  $A$  ein Punkt im Raum mit den Koordinaten  $A(a_1, a_2, a_3)$ . Der **Ortsvektor** von  $A$  ist der Vektor, der vom Ursprung  $O$  zum Punkt  $A$  zeigt:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

**Konvention:** Oft schreibt man einfach  $\vec{a}$  statt  $\overrightarrow{OA}$  und identifiziert den Punkt  $A(a_1, a_2, a_3)$  mit seinem Ortsvektor.

### Ortsvektor

**Gegeben:** Der Punkt  $A(2, -3, 5)$

**Ortsvektor:**

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

## 2.7.2 Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten

**Verbindungsvektor**

Seien  $A(a_1, a_2, a_3)$  und  $B(b_1, b_2, b_3)$  zwei Punkte. Der Vektor von  $A$  nach  $B$  ist:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

**Merksatz:** "Spitze minus Schaft"

Der Verbindungsvektor zeigt vom ersten zum zweiten Punkt.

**Verbindungsvektor**

**Aufgabe:** Bestimmen Sie den Vektor von  $A(1, 2, -1)$  nach  $B(4, 0, 3)$ .

**Lösung:**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 2.7.3 Punkt aus Anfangspunkt und Vektor berechnen

**Punkt berechnen**

Gegeben seien ein Punkt  $A(a_1, a_2, a_3)$  und ein Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ .

Der Punkt  $B$ , der erreicht wird, wenn man von  $A$  aus den Vektor  $\vec{v}$  abträgt, hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$$

beziehungsweise in Koordinaten:

$$B = A + \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 + v_1 \\ a_2 + v_2 \\ a_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

**Punkt berechnen**

**Aufgabe:** Von Punkt  $A(2, 1, 0)$  aus wird der Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  abgetragen. Bestimmen Sie Punkt  $B$ .

**Lösung:**

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Punkt  $B$  hat die Koordinaten  $B(5, -1, 5)$ .

#### 2.7.4 Die Mittelpunktformel

##### Mittelpunkt einer Strecke

Der Mittelpunkt  $M$  der Strecke zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

In Koordinaten:

$$M = \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \\ \frac{a_3+b_3}{2} \end{pmatrix}$$

**Geometrische Interpretation:** Der Mittelpunkt liegt genau in der Mitte zwischen  $A$  und  $B$  – man bildet das arithmetische Mittel der Koordinaten.

##### Mittelpunkt berechnen

**Aufgabe:** Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke  $AB$  mit  $A(1, 3, -2)$  und  $B(5, -1, 4)$ .

**Lösung:**

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt ist  $M(3, 1, 1)$ .

#### 2.7.5 Verallgemeinerung: Schwerpunkt eines Dreiecks

##### Schwerpunkt

Der Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks  $ABC$  liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

### 2.8 Anwendungen: Nachweis besonderer Vierecke

#### 2.8.1 Nachweis eines Parallelogramms

##### Parallelogramm nachweisen

**Gegeben:** Vier Punkte  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(4, 3, 1)$ ,  $C(5, 6, 2)$  und  $D(2, 5, 1)$ .

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass  $ABCD$  ein Parallelogramm ist.

**Lösung:** Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten

parallel und gleich lang sind, d.h. wenn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .  
Berechnung der Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-5 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , sind die Seiten  $AB$  und  $DC$  parallel und gleich lang.  
Prüfung der anderen Seiten:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 6-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da auch  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ , ist  $ABCD$  ein Parallelogramm. ✓

### 2.8.2 Nachweis eines Rhombus

#### Rhombus nachweisen

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass die Punkte  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(3, 3, 0)$  und  $D(1, 2, 0)$  einen Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm) bilden.

**Lösung:** Ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit allen Seiten gleich lang. Wir prüfen zunächst die Parallelogramm-Eigenschaft:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ABCD$  ist ein Parallelogramm.

Nun prüfen wir, ob alle Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Da alle Seiten die Länge  $\sqrt{5}$  haben, ist  $ABCD$  ein Rhombus. ✓

### 2.8.3 Nachweis eines Rechtecks

#### Rechteck nachweisen

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass die Punkte  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 0, 0)$ ,  $C(3, 4, 0)$  und  $D(0, 4, 0)$  ein Rechteck bilden.

**Lösung:** Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel (dann sind automatisch alle Winkel rechte Winkel).

Die Parallelogramm-Eigenschaft prüft man über  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  und  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prüfung der Orthogonalität (rechter Winkel):

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt null ist, stehen die Seiten senkrecht aufeinander.  
 $ABCD$  ist ein Rechteck. ✓

#### 2.8.4 Nachweis eines Quadrats

##### Quadrat nachweisen

**Aufgabe:** Prüfen Sie, ob die Punkte  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(2, 2, 0)$  und  $D(0, 2, 0)$  ein Quadrat bilden.

**Lösung:** Ein Quadrat ist ein Rechteck mit allen Seiten gleich lang.

Aus dem vorherigen Beispiel wissen wir bereits, wie man ein Rechteck nachweist. Wir prüfen zusätzlich:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4} = 2, \quad |\vec{AD}| = \sqrt{4} = 2$$

Alle Seiten haben die Länge 2, und die Seiten stehen orthogonal aufeinander (wie bei einem Rechteck).

$ABCD$  ist ein Quadrat. ✓

#### 2.8.5 Gleichschenkliges Dreieck

##### Gleichschenkliges Dreieck

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass das Dreieck  $ABC$  mit  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  und  $C(2, 2, 0)$  gleichschenkelig ist.

**Lösung:** Ein Dreieck ist gleichschenkelig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.

$$|\vec{AB}| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{AC}| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{BC}| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

Da  $|AB| = |AC| = \sqrt{5}$ , ist das Dreieck gleichschenkelig mit Basis  $BC$ . ✓

## 2.9 Zusammenfassung

### 2.9.1 Vektorprodukt

#### Zusammenfassung Vektorprodukt

**Definition:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

**Parallelität:**  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

**Geometrie:**

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$  und  $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt Parallelogramm}$

**Anwendungen:**

- Flächeninhalt Parallelogramm:  $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
- Flächeninhalt Dreieck:  $A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

### 2.9.2 Spatprodukt

#### Zusammenfassung Spatprodukt

**Definition:**  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

**Volumenformeln:**

- Spat:  $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 3-seitiges Prisma:  $V = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 4-seitige Pyramide:  $V = \frac{1}{3} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
- 3-seitige Pyramide:  $V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$



# Geraden und Ebenen im Raum

---

## 3.1 Einführung

---

In diesem Kapitel erweitern wir unsere Kenntnisse der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie im dreidimensionalen Raum. Wir lernen, wie man Geraden und Ebenen mathematisch beschreibt und ihre gegenseitigen Lagebeziehungen untersucht.

### Was lernen wir heute?

- **3.4 Geraden im  $\mathbb{R}^3$**  – Parameterdarstellung
- **3.5 Ebenen im  $\mathbb{R}^3$**  – Parameter- und Koordinatenform
- **3.6 Lagebeziehungen** – Gerade  $\leftrightarrow$  Gerade, Gerade  $\leftrightarrow$  Ebene

## 3.2 Geraden im $\mathbb{R}^3$

---

### 3.2.1 Ausgangspunkt: Geraden in der Ebene

Aus der ebenen Geometrie kennen wir bereits verschiedene Darstellungen von Geraden:

### Geradengleichungen in der Ebene

In der Ebene kennen wir verschiedene Geradengleichungen:

- **Explizite Form:**  $y = mx + b$
- **Normalform:**  $ax + by = c$
- **Parameterform:**  $(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (v_1, v_2)$

### Vorteil der Parameterform

Die Parameterform lässt sich direkt auf den  $\mathbb{R}^3$  übertragen!

## 3.2.2 Parametergleichung einer Geraden

Parametergleichung einer Geraden im  $\mathbb{R}^3$ 

Eine Gerade  $g$  im  $\mathbb{R}^3$  wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

**Bezeichnungen:**

- $\vec{a}$  = **Ortsvektor** / **Stützvektor** (fester Punkt auf  $g$ )
- $\vec{v}$  = **Richtungsvektor** (gibt die Richtung an,  $\vec{v} \neq \vec{0}$ )
- $t$  = **Parameter** (durchläuft alle reellen Zahlen)

**Geometrische Interpretation:** Startpunkt  $A$  + Vielfaches der Richtung

## 3.2.3 Geradengleichungen aufstellen

## Fall 1: Punkt + Richtungsvektor gegeben

Direkt einsetzen:  $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$

Fall 2: Zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben

Richtungsvektor:  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Geradengleichung:  $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

## Wichtig

**Wichtig:** Die Darstellung ist nicht eindeutig!

## Gerade durch zwei Punkte

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Gerade durch  $A(1|2|3)$  und  $B(4|0|7)$ .

**Lösung:**

Richtungsvektor:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.3 Ebenen im  $\mathbb{R}^3$

## 3.3.1 Charakterisierung

**Charakterisierung**

Eine Ebene ist **zweidimensional**  $\rightarrow$  benötigt 2 Parameter!

**Zwei wichtige Darstellungen**

- **Parameterform:** Aufspannen durch zwei Richtungen
- **Koordinatenform:** Beschreibung durch Normalenvektor

## 3.3.2 Parametergleichung einer Ebene

**Parametergleichung einer Ebene**

Eine Ebene  $E$  im  $\mathbb{R}^3$  wird durch ihre Parametergleichung beschrieben:

$$\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

**Bezeichnungen:**

- $\vec{a}$  = Ortsvektor / Stützvektor
- $\vec{u}, \vec{v}$  = Richtungsvektoren / Spannvektoren
- $s, t$  = Parameter

**Bedingung**

$\vec{u}$  und  $\vec{v}$  dürfen nicht parallel sein!

## 3.3.3 Der Normalenvektor

**Normalenvektor**

Ein Vektor  $\vec{n}$  heißt **Normalenvektor** einer Ebene  $E$ , wenn er senkrecht auf der Ebene steht.

**Berechnung:**

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (\text{Kreuzprodukt})$$

**Geometrische Vorstellung:** Der Normalenvektor zeigt wie ein Pfeil senkrecht von der Ebene weg – wie eine Antenne auf einer Tischplatte!

## 3.3.4 Koordinatengleichung (parameterfreie Form)

**Koordinatengleichung**

Mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$  und einem Punkt  $A$ :

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d$$

oder ausgeschrieben:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$$

wobei  $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$

**Vorteil:** Kompakte Darstellung ohne Parameter!

## 3.3.5 Umwandlung der Darstellungsformen

**Parameter  $\rightarrow$  Koordinatenform**

1. Berechne  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. Berechne  $d = \vec{n} \cdot \vec{a}$
3. Stelle auf:  $n_1x + n_2y + n_3z = d$

**Koordinaten  $\rightarrow$  Parameterform**

1. Lies  $\vec{n}$  ab
2. Finde einen Punkt auf der Ebene
3. Finde zwei Vektoren  $\perp$  zu  $\vec{n}$

**Parameter  $\rightarrow$  Koordinatenform**

**Gegeben:**

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

1. Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Berechnung von  $d$ :  $d = \vec{n} \cdot \vec{a} = -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -4$
3. Koordinatengleichung:  $-2x - y + 2z = -4$  oder  $2x + y - 2z = 4$

## 3.3.6 Ebenengleichungen aufstellen

**Variante 1: Drei Punkte**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

$$E : \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

**Variante 2: Punkt + Normalenvektor**

$$E : \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

**Variante 3: Gerade + Punkt außerhalb**

Gerade liefert Stützvektor und einen Richtungsvektor

## 3.4 Lagebeziehungen

### 3.4.1 Übersicht

**Lagebeziehungen – Übersicht**

Objekte	Mögliche Lagen
Gerade $\leftrightarrow$ Gerade	identisch, parallel, schneidend, windschief
Gerade $\leftrightarrow$ Ebene	schneidend, parallel, in Ebene

**Besonderheit**

Windschiefe Geraden gibt es nur im  $\mathbb{R}^3$ !

### 3.4.2 Lagebeziehung: Gerade $\leftrightarrow$ Gerade

**Entscheidungsbaum**

**Schritt 1:** Sind die Richtungsvektoren parallel?

- **JA:** Liegt ein Punkt der einen Geraden auf der anderen?
  - **JA**  $\rightarrow$  identisch
  - **NEIN**  $\rightarrow$  echt parallel
- **NEIN:** Gleichsetzen  $\rightarrow$  LGS lösen
  - Lösung existiert  $\rightarrow$  schneidend
  - Keine Lösung  $\rightarrow$  windschief

**Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (1/4)**

**Gegeben:**

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.

**Vorbereitung:**

Richtungsvektoren prüfen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind nicht parallel

$\rightarrow$  Geraden sind nicht parallel

$\rightarrow$  Mögliche Lagen: schneidend oder windschief

## Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (2/4)

**Gleichungssystem aufstellen**Gleichsetzen von  $g$  und  $h$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Komponentenweise:

I:  $1 + 2r = 3 + s$

II:  $2 + r = 1 - s$

III:  $3 - r = 4 + 2s$

## Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (3/4)

**Erweiterte Koeffizientenmatrix:**

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

**Gauß-Elimination:**

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{II} - \frac{1}{2} \cdot \text{I}} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{III} + \frac{1}{2} \cdot \text{I}} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

## Lagebeziehung mit Gauß-Verfahren (4/4)

**Gauß-Elimination (Fortsetzung):**

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + \frac{5}{3} \cdot \text{II}} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{array} \right)$$

**Interpretation:**

- Letzte Zeile:  $0 \cdot r + 0 \cdot s = -\frac{4}{3}$
- $\rightarrow$  Widerspruch! ( $0 \neq -\frac{4}{3}$ )
- Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**

**Ergebnis:** Die Geraden  $g$  und  $h$  sind **windschief**.

## 3.4.3 Schnittwinkel zweier Geraden

**Schnittwinkel zweier Geraden**

Für schneidende Geraden mit Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

**Orthogonale Geraden**

Geraden schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3.4.4 Lagebeziehung: Gerade  $\leftrightarrow$  Ebene**Lagebeziehung: Gerade  $\leftrightarrow$  Ebene**

**Gegeben:**  $g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$  und  $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = d$

**Entscheidungskriterium:**  $\vec{n} \cdot \vec{v}$

**Fall 1:**  $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$

- $\rightarrow$  Gerade schneidet Ebene (Durchstoßpunkt)

**Fall 2:**  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  und  $d - \vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$

- $\rightarrow$  Gerade parallel zur Ebene

**Fall 3:**  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  und  $d - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$

- $\rightarrow$  Gerade liegt in der Ebene

**Gerade und Ebene (1/5)**

**Gegeben:**

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E : 3x + 2y + z = 9$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden  $g$  und der Ebene  $E$ .

**Mögliche Lagen:**

- Gerade liegt in der Ebene
- Gerade ist parallel zur Ebene (liegt nicht in ihr)
- Gerade schneidet die Ebene (in einem Punkt)

**Gerade und Ebene (2/5)**

**Schritt 1: Normalenvektor bestimmen**

Aus der Koordinatenform  $E : 3x + 2y + z = 9$  lesen wir den Normalenvektor ab:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Hinweis:** Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene. Wenn  $\vec{n} \perp \vec{v}$ , dann ist die Gerade parallel zur Ebene oder liegt in ihr.

#### Gerade und Ebene (3/5)

**Schritt 3: Skalarprodukt berechnen**

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ &= 6 + 2 - 1 \\ &= 7 \neq 0 \end{aligned}$$

**Interpretation:**

- Da  $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$ , sind  $\vec{n}$  und  $\vec{v}$  nicht orthogonal
- $\rightarrow$  Die Gerade ist nicht parallel zur Ebene
- $\rightarrow$  Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt

#### Gerade und Ebene (4/5)

**Schritt 4: Durchstoßpunkt berechnen**

Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 0 + t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

In  $E : 3x + 2y + z = 9$  einsetzen:

$$\begin{aligned} 3(1 + 2t) + 2(0 + t) + (2 - t) &= 9 \\ 3 + 6t + 0 + 2t + 2 - t &= 9 \\ 5 + 7t &= 9 \\ 7t &= 4 \\ t &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

**Gerade und Ebene (5/5)****Schritt 5: Koordinaten des Durchstoßpunkts**

Parameter  $t = \frac{4}{7}$  in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{8}{7} \\ 0 + \frac{4}{7} \\ 2 - \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Ergebnis:** Die Gerade  $g$  schneidet die Ebene  $E$  im Durchstoßpunkt  $D\left(\frac{15}{7} \mid \frac{4}{7} \mid \frac{10}{7}\right)$ .

**Gerade liegt in Ebene (1/5)**

**Gegeben:**

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E : x + y - 2z = 1$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden  $g$  und der Ebene  $E$ .

**Strategie:**

1. Prüfen, ob Richtungsvektor orthogonal zum Normalenvektor ist
2. Falls ja: Prüfen, ob ein Punkt der Geraden in der Ebene liegt

**Gerade liegt in Ebene (2/5)****Schritt 1: Normalenvektor bestimmen**

Aus der Koordinatenform  $E : x + y - 2z = 1$  erhalten wir:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2: Richtungsvektor der Geraden**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Gerade liegt in Ebene (3/5)****Schritt 3: Skalarprodukt berechnen**

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\
 &= 1 - 1 - 2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

**Interpretation:**

- Da  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ , sind  $\vec{n}$  und  $\vec{v}$  orthogonal
- $\rightarrow$  Die Gerade ist parallel zur Ebene oder liegt in ihr
- $\rightarrow$  Weitere Prüfung notwendig!

**Gerade liegt in Ebene (4/5)****Schritt 4: Stützpunkt der Geraden prüfen**

Liegt der Stützpunkt  $P(1|2|1)$  der Geraden in der Ebene  $E$ ?

Einsetzen in die Ebenengleichung  $E : x + y - 2z = 1$ :

$$\begin{aligned}
 1 + 2 - 2 \cdot 1 &\stackrel{?}{=} 1 \\
 1 + 2 - 2 &\stackrel{?}{=} 1 \\
 1 &= 1 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

**Interpretation:**

- Der Stützpunkt liegt in der Ebene
- Die Gerade ist parallel zur Ebene (wegen  $\vec{n} \perp \vec{v}$ )
- $\rightarrow$  Die Gerade liegt **vollständig in der Ebene**

**Gerade liegt in Ebene (5/5)**

**Ergebnis:** Die Gerade  $g$  liegt vollständig in der Ebene  $E$ .

**Begründung:**

1.  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$  Gerade ist parallel zur Ebene
  2. Stützpunkt der Geraden liegt in der Ebene
- $\Rightarrow$  Alle Punkte der Geraden liegen in der Ebene

**Hinweis:** Hätte der Stützpunkt **nicht** in der Ebene gelegen, wäre die Gerade echt parallel zur Ebene (ohne Schnittpunkt).

### 3.4.5 Der Durchstoßpunkt

#### Der Durchstoßpunkt

Wenn Gerade und Ebene sich schneiden, berechnen wir den Durchstoßpunkt:

$$t = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

Dann einsetzen in die Geradengleichung:

$$D = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$

### 3.4.6 Schnittwinkel Gerade – Ebene

#### Wichtig

Hier verwenden wir **SINUS** (nicht Kosinus!)

#### Schnittwinkel Gerade – Ebene

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

**Merkhilfe:**

- Gerade–Gerade:  $\cos \alpha$
- Gerade–Ebene:  $\sin \alpha$

## 3.5 Zusammenfassung

### Zusammenfassung: Geraden und Ebenen im Raum

**Geraden:**

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \text{ mit Stützvektor und Richtungsvektor}$$

**Ebenen:**

- Parameterform:  $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$
- Koordinatenform:  $n_1x + n_2y + n_3z = d$
- Normalenvektor:  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

**Lagebeziehungen:**

Systematisches Vorgehen mit Richtungsvektoren und Gleichungssystemen

## 3.6 Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Gerade durch die Punkte  $A(2|-1|3)$  und  $B(5|2|0)$ .

**Aufgabe 2**

Gegeben ist die Ebene  $E$  durch die Punkte  $A(1|0|0)$ ,  $B(0|1|0)$  und  $C(0|0|1)$ .

- a) Stellen Sie die Parametergleichung auf.
- b) Bestimmen Sie einen Normalenvektor.
- c) Geben Sie die Koordinatengleichung an.

**Aufgabe 3**

Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt und den Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und der Ebene  $E : x + y + z = 6$ .

# Lagebeziehungen und Abstände

## 4.1 Lagebeziehungen Ebene $\leftrightarrow$ Ebene

### 4.1.1 Drei mögliche Fälle

#### Lagebeziehungen zweier Ebenen

Zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  im  $\mathbb{R}^3$  können:

1. sich in einer Geraden schneiden
2. (echt) parallel zueinander sein
3. identisch sein

### 4.1.2 Grundidee zur Lagebestimmung

#### Lagebestimmung durch Gleichungssystem

Wir lösen das Gleichungssystem beider Ebenengleichungen. Die Art der Lösungsmenge entscheidet über den Fall:

**Gegeben:**

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

**Interpretation der Lösungsmenge:**

- **Eindimensionale Lösungsmenge** (eine freie Variable):  $\rightarrow$  Ebenen schneiden sich in einer Geraden
- **Leere Lösungsmenge**:  $\rightarrow$  Ebenen sind echt parallel
- **Zweidimensionale Lösungsmenge** (zwei freie Variablen):  $\rightarrow$  Ebenen sind identisch

### 4.1.3 Beispiel: Ebenen schneiden sich in einer Geraden

#### Ebenen schneiden sich (1/3)

**Gegeben:**

$$E_1 : x + 2y - z = 4$$

$$E_2 : 2x - y + 3z = 1$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Lagebeziehung der beiden Ebenen.

**Vorgehen:** Wir lösen das Gleichungssystem durch das Gauß-Verfahren.

### Ebenen schneiden sich (2/3)

**Lösung:**

Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$2x + 4y - 2z = 8$$

$$2x - y + 3z = 1$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung:

$$5y - 5z = 7 \Rightarrow y = z + \frac{7}{5}$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$x + 2\left(z + \frac{7}{5}\right) - z = 4$$

$$x = -z + \frac{6}{5}$$

### Ebenen schneiden sich (3/3)

**Parametrisierung:**

Mit  $z = t$  als freiem Parameter:

$$x = -t + \frac{6}{5}$$

$$y = t + \frac{7}{5}$$

$$z = t$$

**Schnittgerade:**

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Ergebnis:** Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

#### 4.1.4 Beispiel: Echte parallele Ebenen

### Echte parallele Ebenen

**Gegeben:**

$$E_1 : x - y + 2z = 3$$

$$E_2 : 2x - 2y + 4z = 8$$

**Lösung:** Erste Gleichung mit 2 multiplizieren:

$$2x - 2y + 4z = 6$$

Die zweite Gleichung lautet aber:

$$2x - 2y + 4z = 8$$

Dieser Widerspruch  $6 \neq 8$  zeigt, dass das System unlösbar ist.

**Ergebnis:** Die Ebenen sind echt parallel.

**Beobachtung:** Die Normalenvektoren sind parallel:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}_1$$

Aber die rechten Seiten stehen nicht im gleichen Verhältnis:  $d_2 \neq 2d_1$ .

## 4.2 Schnittwinkel zweier Ebenen

### Schnittwinkel zweier Ebenen

Bei sich schneidenden Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  ist der Schnittwinkel  $\varphi$  der spitze Winkel zwischen den Ebenen ( $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ ).

Der Schnittwinkel entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

**Hinweis:** Wir verwenden den Betrag, um stets den spitzen Winkel zu erhalten.

### Schnittwinkel berechnen

**Gegeben:**

$$E_1 : 2x - y + 3z = 5, \quad E_2 : x + 2y - z = 4$$

Normalenvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\cos \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{4 + 1 + 9} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|2 - 2 - 3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \approx 0.327$$

$$\varphi = \arccos(0.327) \approx 70.9^\circ$$

## 4.3 Abstände in der analytischen Geometrie

### 4.3.1 Übersicht

#### Sieben grundlegende Abstandsfälle

In der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raums unterscheiden wir sieben grundlegende Abstandsfälle:

Fall	Objekte	Voraussetzung
1	Punkt – Punkt	—
2	Punkt – Gerade	—
3	Punkt – Ebene	—
4	Gerade – Gerade	parallel
5	Gerade – Gerade	windschief
6	Gerade – Ebene	parallel
7	Ebene – Ebene	parallel

### 4.3.2 Fall 1: Abstand Punkt–Punkt

#### Abstand zweier Punkte

Der Abstand zweier Punkte  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  und  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

**Interpretation:** Dies ist einfach die Länge des Verbindungsvektors.

### 4.3.3 Fall 2: Abstand Punkt–Gerade

#### Geometrische Überlegung

Der kürzeste Abstand wird auf dem Lot vom Punkt  $P$  auf die Gerade  $g$  erreicht. Wir suchen den Lotfußpunkt  $F$  auf  $g$  und berechnen dann  $|PF|$ .

#### Verfahren

Gegeben: Punkt  $P$  und Gerade  $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$

1. Lotfußpunkt:  $F = \vec{a} + t_0\vec{v}$  für ein bestimmtes  $t_0$
2. Orthogonalitätsbedingung:  $(F - P) \cdot \vec{v} = 0$
3. Daraus  $t_0$  bestimmen und damit  $F$
4.  $d(P, g) = |PF|$

#### Abstand Punkt–Gerade (1/2)

**Gegeben:** Punkt  $P(2, 3, 1)$  und Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $g$ .

**Schritt 1:** Allgemeiner Punkt auf  $g$ :

$$F = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+2t \\ -t \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Orthogonalitätsbedingung  $(F - P) \cdot \vec{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1+t-2 \\ 1+2t-3 \\ -t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(t-1) \cdot 1 + (2t-2) \cdot 2 + (-t-1) \cdot (-1) = 0$$

$$t-1+4t-4+t+1=0$$

$$6t-4=0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

#### Abstand Punkt–Gerade (2/2)

**Schritt 3:** Lotfußpunkt  $F$ :

$$F = \begin{pmatrix} 1+\frac{2}{3} \\ 1+\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Schritt 4:** Abstand berechnen:

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}-2 \\ \frac{7}{3}-3 \\ -\frac{2}{3}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4+25}{9}} = \sqrt{\frac{30}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

**Ergebnis:** Der Abstand beträgt  $\frac{\sqrt{30}}{3} \approx 1.83$  Längeneinheiten.

#### 4.3.4 Fall 3: Abstand Punkt–Ebene (Hessesche Normalenform)

##### Wichtigster Abstandsfall!

Dies ist der wichtigste Abstandsfall in der analytischen Geometrie!

**Geometrische Idee:** Der kürzeste Abstand eines Punktes  $P$  von einer Ebene  $E$  wird auf der Normalen zur Ebene erreicht.

##### Hessesche Normalenform

Für eine Ebene  $E : n_1x + n_2y + n_3z = d$  und Punkt  $P(x_0, y_0, z_0)$ :

$$d(P, E) = \frac{|n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

**Abstand Punkt–Ebene**

**Gegeben:** Punkt  $P(3, -1, 2)$  und Ebene  $E : 2x - y + 2z = 6$

**Lösung mit Hessescher Abstandsformel:**

$$\begin{aligned} d(P, E) &= \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|6 + 1 + 4 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|5|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{5}{3} \approx 1.67 \end{aligned}$$

**Ergebnis:** Der Abstand beträgt  $\frac{5}{3} \approx 1.67$  Längeneinheiten.

## 4.3.5 Fall 4: Abstand paralleler Geraden

**Abstand paralleler Geraden**

Zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  sind parallel zueinander.

**Methode:** Wir wählen einen beliebigen Punkt  $P$  auf  $g_1$  und berechnen seinen Abstand zu  $g_2$ :

$$d(g_1, g_2) = d(P, g_2) \quad \text{mit } P \in g_1$$

**Bemerkung:** Dies führt den Fall auf Fall 2 (Punkt–Gerade) zurück.

## 4.3.6 Fall 5: Abstand windschiefer Geraden

**Windschiefe Geraden**

Zwei Geraden heißen windschief, wenn sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind. Sie liegen in verschiedenen "Stockwerken" des Raums.

**Geometrische Idee:** Es gibt genau eine gemeinsame Normale zu beiden Geraden. Der Abstand ist die Länge des Stücks dieser Normalen zwischen den beiden Geraden.

**Verfahren: Abstand windschiefer Geraden**

Gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{v}_1, \quad g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{v}_2 \quad (\text{windschief})$$

1. **Schritt 1:** Bestimme den Normalenvektor:  $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
2. **Schritt 2:** Berechne den Abstand mit:

$$d = \frac{|(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

## 4.3.7 Fall 6: Abstand Gerade–Ebene (parallel)

**Abstand paralleler Gerade und Ebene**

Eine Gerade  $g$  ist parallel zu einer Ebene  $E$ .

**Methode:** Wir wählen einen beliebigen Punkt  $P$  auf  $g$  und berechnen:

$$d(g, E) = d(P, E)$$

**Bemerkung:** Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

## 4.3.8 Fall 7: Abstand paralleler Ebenen

**Abstand paralleler Ebenen**

Zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind parallel zueinander.

**Methode:** Wir wählen einen beliebigen Punkt  $P$  auf  $E_1$  und berechnen:

$$d(E_1, E_2) = d(P, E_2)$$

**Bemerkung:** Dies führt den Fall auf Fall 3 (Punkt–Ebene) zurück.

**Abstand paralleler Ebenen**

**Gegeben:**

$$E_1 : x - 2y + 2z = 3, \quad E_2 : x - 2y + 2z = 9$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen.

**Vorgehen:**

1. Wähle einen Punkt auf  $E_1$ : Setze  $y = 0, z = 0$ :  $x = 3 \Rightarrow P(3, 0, 0)$
2. Berechne den Abstand  $P$  zu  $E_2$  mit Hessescher Formel:

$$d = \frac{|1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{3} = 2$$

**Ergebnis:** Der Abstand beträgt 2 Längeneinheiten.

## 4.4 Zusammenfassung

**Zusammenfassung Lagebeziehungen und Abstände**

**Lagebeziehungen Ebene–Ebene:**

- Schneidend in Gerade: eindimensionale Lösungsmenge
- Echt parallel: leere Lösungsmenge
- Identisch: zweidimensionale Lösungsmenge

**Sieben Abstandsfälle:**

1. Punkt–Punkt: Länge des Verbindungsvektors
2. Punkt–Gerade: Lotfußpunktverfahren

3. Punkt–Ebene: Hessesche Normalenform (wichtigster Fall!)
4. Parallele Geraden: auf Punkt–Gerade zurückführen
5. Windschiefe Geraden: Vektorformel mit Kreuzprodukt
6. Parallele Gerade–Ebene: auf Punkt–Ebene zurückführen
7. Parallele Ebenen: auf Punkt–Ebene zurückführen

## 4.5 Übungsaufgaben

### Aufgabe 1: Lagebeziehung Ebene–Ebene

Bestimmen Sie die Lagebeziehung der Ebenen:

$$E_1 : 3x + 2y - z = 5, \quad E_2 : 6x + 4y - 2z = 10$$

### Aufgabe 2: Schnittgerade

Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen:

$$E_1 : x - y + 2z = 4, \quad E_2 : 2x + y - z = 3$$

### Aufgabe 3: Abstand Punkt–Ebene

Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $P(1, -2, 3)$  von der Ebene  $E : 4x - 3y + 12z = 26$ .

### Aufgabe 4: Abstand windschiefer Geraden

Gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Geraden windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.

**Teil II**

**Lineare Algebra**



# 5

## Matrizen

---



**Teil III**

**Differentialrechnung**



# 6

## Zahlenfolgen

---



**Teil IV**

**Integralrechnung**



# 7

## Einführung in die Integration

---