Differentialrechnung
Teil 7: Kurvendiskussion

Was ist eine Kurvendiskussion?

Kurvendiskussion = Systematische Untersuchung einer Funktion

Ziel: Vollständigen Überblick über die Funktion gewinnen und präzisen Graphen zeichnen

Was haben wir bereits gelernt?

- Grenzwerte und Asymptoten (waagerecht, senkrecht, schräg)
- Polynomdivision
- Regel von L'Hospital
- Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)
- Wendepunkte
- Sattelpunkte

Systematisches Vorgehen

Standard-Schema für Kurvendiskussion

1. **Definitionsbereich** $\mathbb{D}$ bestimmen
2. **Symmetrie** untersuchen
3. **Grenzwerte & Asymptoten**
   - $x \to \pm\infty$
   - An Definitionslücken
4. **Nullstellen**: $f(x) = 0$
5. **Extrempunkte**: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
6. **Wendepunkte**: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
7. **Wertetabelle** erstellen
8. **Graph zeichnen**

Zeichenkonventionen (wichtig für Prüfungen!)

Konventionen – Punkte werden abgezogen bei Nichtbeachtung!

1. **Achsenbeschriftung:**
   - x-Achse nach rechts, y-Achse (oder $f(x)$) nach oben
   - Beide Achsen mit Pfeilen versehen
2. **Skalierung:**
   - Beide Achsen mit Einheiten versehen
   - Wichtige Punkte durch Striche markieren
3. **Besondere Punkte markieren:**
   - Nullstellen, Extrempunkte (H/T), Wendepunkte (W)
   - Mit Koordinaten beschriften

Zeichenkonventionen (Fortsetzung)

Weitere wichtige Konventionen

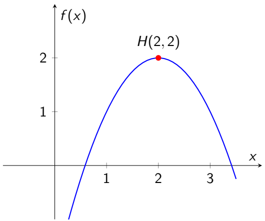
4. **Asymptoten:**
   - Als **gestrichelte Linien** zeichnen
   - Position auf Achsen angeben

5. **Funktionsgraph:**
   - **Durchgezogene Linie**
   - An Definitionslücken: Offener Punkt (Kreis)
   - Verlauf muss berechneten Eigenschaften entsprechen

6. **Sauberkeit:**
   - Mit Lineal zeichnen
   - Leserliche Beschriftung

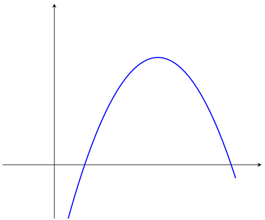
Beispiel: Richtig vs. Falsch gezeichnet

Richtig:



- Achsen beschriftet
- Skalierung vorhanden
- Punkte markiert

Falsch:



- Keine Beschriftung
- Keine Skalierung
- Punkte nicht markiert

Beispiel 1: Polynom 3. Grades

Aufgabe: Kurvendiskussion für $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Schritt 1: Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Schritt 2: Symmetrie
$f(-x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5 \neq f(x)$ und $\neq -f(x)$
Ergebnis: Keine Symmetrie

Schritt 3: Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Keine Asymptoten (Polynom)

Beispiel 1: Nullstellen und Extrempunkte

Schritt 4: Nullstellen

$x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$

Approximativ: $x_1 \approx 0{,}46$, $x_2 \approx -2{,}27$, $x_3 \approx 4{,}81$

Schritt 5: Extrempunkte

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -1$

$f''(x) = 6x - 6$

$$f''(3) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad T(3, -22)$$
$$f''(-1) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad H(-1, 10)$$

Beispiel 1: Wendepunkte und Graph

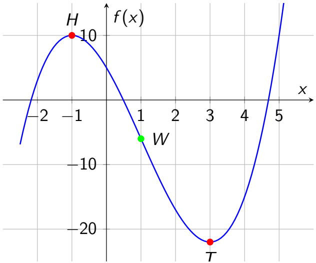
Schritt 6: Wendepunkte

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'''(x) = 6 \neq 0$ (Wendepunkt bestaetigt)

$f(1) = -6 \Rightarrow W(1, -6)$

Schritt 7 + 8: Graph



ÜBUNG: Polynom

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

Tipp: Arbeite das Schema systematisch ab!

Beispiel 2: Gebrochenrationale Funktion

Aufgabe: Kurvendiskussion für $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

Schritt 1: Definitionsbereich
$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Schritt 2: Symmetrie
Keine Symmetrie

Schritt 3: Asymptoten
Polynomdivision: $(x^2 - 4) : (x - 1) = x + 1 - \frac{3}{x-1}$
Schräge Asymptote: $y = x + 1$
Senkrechte Asymptote: $x = 1$ (Polstelle)

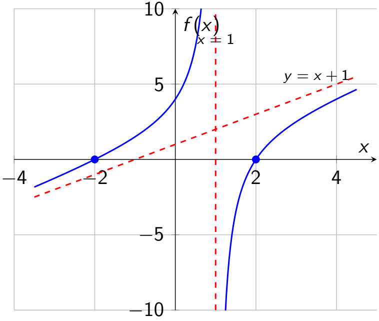
Beispiel 2: Nullstellen und Extrempunkte

Schritt 4: Nullstellen
$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Schritt 5: Extrempunkte
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$
$x^2 - 2x + 4 = 0$ hat keine reellen Lösungen (Diskriminante < 0)
Ergebnis: Keine Extrempunkte

Schritt 6: Wendepunkte
$$f''(x) = \frac{-6}{(x-1)^3} \neq 0 \text{ für alle } x \neq 1$$
Ergebnis: Keine Wendepunkte

Beispiel 2: Graph



ÜBUNG: Gebrochenrationale Funktionen

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Hinweis: Nicht vergessen: Asymptoten bestimmen!

Beispiel 3: Exponentialfunktion

Aufgabe: Kurvendiskussion für $f(x) = x^2 e^{-x}$

Schritte 1-3:

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Keine Symmetrie
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \to$ Asymptote $y = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Schritt 4: Nullstellen

$x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (doppelte Nullstelle)

Beispiel 3: Extrempunkte und Wendepunkte

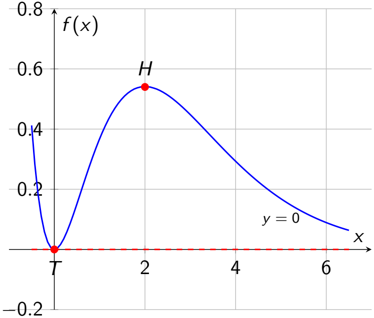
Schritt 5: Extrempunkte
$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = xe^{-x}(2 - x)$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$$f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad T(0,0)$$
$$f''(2) = -2e^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad H(2, 4e^{-2})$$

Schritt 6: Wendepunkte
$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$
Zwei Wendepunkte bei $x \approx 0{,}59$ und $x \approx 3{,}41$

Beispiel 3: Graph



ÜBUNG: Exponentialfunktionen

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

Tipp: Produktregel nicht vergessen!

Zusammenfassung: Checkliste

Checkliste für vollständige Kurvendiskussion

- ☐ Definitionsbereich $\mathbb{D}$ bestimmt
- ☐ Symmetrie geprüft (gerade/ungerade?)
- ☐ Grenzwerte berechnet ($x \to \pm\infty$ und an Lücken)
- ☐ Asymptoten bestimmt (waagerecht, senkrecht, schräg)
- ☐ Nullstellen gefunden
- ☐ Extrempunkte berechnet ($f' = 0$ und $f'' \neq 0$)
- ☐ Wendepunkte berechnet ($f'' = 0$ und $f''' \neq 0$)
- ☐ Wertetabelle erstellt
- ☐ Graph nach Konventionen gezeichnet

Übersicht: Funktionstypen

Funktionstyp	**Asymptoten?**	**Besonderheiten**
Polynome	Keine	Glatt, keine Lücken
Gebrochenrational	Ja	Polstellen, Lücken
Exponential	Oft $y = 0$	L'Hospital bei ∞
Trigonometrisch	Keine	Periodisch
Logarithmisch	Senkrecht	Nur für $x > 0$

Häufige Fehler vermeiden!

Typische Fehlerquellen

- **Definitionsbereich** nicht angegeben oder falsch
- **Asymptoten** vergessen oder falsch berechnet
- Nur **notwendige** Bedingung geprüft, nicht hinreichende
- **Achsenbeschriftung** oder **Skalierung** fehlt
- **Besondere Punkte** nicht markiert oder beschriftet
- **Graph** entspricht nicht den Eigenschaften
- **Asymptoten** nicht gestrichelt gezeichnet

Prüfungstipp: Checkliste durchgehen!

Vergleich: Notwendig vs. Hinreichend

	Extrempunkte	**Wendepunkte**
Notwendig	$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$
Hinreichend	$f''(x) \neq 0$	$f'''(x) \neq 0$
Vorzeichen	$f'' > 0$: Min $f'' < 0$: Max	$f''' > 0$: L-R $f''' < 0$: R-L

Merke: Immer **beide** Bedingungen prüfen!

Hausaufgaben – Aufgabe 1

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizziere den Graphen:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 5$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Hinweis: Nutze die Checkliste!

Hausaufgaben – Aufgabe 2

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizziere den Graphen:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 2}$

Achtung: Asymptoten nicht vergessen!

Hausaufgaben – Aufgabe 3

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizziere den Graphen:

a) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Tipp: L'Hospital bei Grenzwerten verwenden!

Hausaufgaben – Klausuraufgabe

Aufgabe 4 (Klausurstil):
Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$$

a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch.

b) Bestimme alle Asymptoten (Art und Gleichung angeben).

c) Skizziere den Graphen der Funktion unter Beachtung aller Konventionen.

d) Beschreibe das Monotonieverhalten der Funktion in den Intervallen zwischen den kritischen Stellen.