Übungsblatt: Matrizengleichungen

Aufgabenblatt 1: 2×2-Matrizen

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben

Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X auf!

- $\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$
- $A^T B(B^{-1}X + I) = A$
- $AXB = I$
- $2X(A + I) = 2X + B$
- $AX = BX + I$
- $(X + A)^T = (B^{-1} + I)X^T$

Aufgabe

$$\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$$

Umformungsschritte

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}X + A^T &= (B - I) + 2X && \mid -\frac{1}{2}X; -(B - I) \\
A^T - (B - I) &= 2X - \frac{1}{2}X \\
A^T - B + I &= \frac{3}{2}X && \mid \cdot\frac{2}{3} \\
\frac{2}{3}(A^T - B + I) &= X
\end{aligned}$$

Aufgabe

$$A^T B(B^{-1}X + I) = A$$

Umformungsschritte

$$\begin{aligned}
A^T B(B^{-1}X + I) &= A && \mid \cdot(A^T B)^{-1} \text{ von links} \\
B^{-1}X + I &= (A^T B)^{-1}A && \mid -I \\
B^{-1}X &= (A^T B)^{-1}A - I && \mid \cdot B \text{ von links} \\
X &= B\left((A^T B)^{-1}A - I\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe

$$AXB = I$$

Umformungsschritte

$$\begin{aligned} AXB &= I && \mid \cdot A^{-1} \text{ von links} \\ XB &= A^{-1} && \mid \cdot B^{-1} \text{ von rechts} \\ X &= A^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

Aufgabe

$$2X(A+I) = 2X + B$$

Umformungsschritte

$$\begin{aligned}
2X(A+I) &= 2X + B && \mid -2X \\
2X(A+I) - 2XI &= B && \\
2X(A+I-I) &= B && \\
2XA &= B && \mid \cdot\frac{1}{2} \\
XA &= \frac{1}{2}B && \mid \cdot A^{-1} \text{ von rechts} \\
X &= \frac{1}{2}BA^{-1} &&
\end{aligned}$$

Aufgabe

$$AX = BX + I$$

Umformungsschritte

$$\begin{aligned} AX - BX &= I \\ (A-B)X &= I && \mid \cdot (A-B)^{-1} \text{ von links} \\ X &= (A-B)^{-1} \end{aligned}$$

Lösung

Aufgabe

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)X^T$$

Umformungsschritte

$$\begin{aligned}
X^T + A^T &= (B^{-1} + I)X^T && \mid -X^T \\
A^T &= (B^{-1} + I - I)X^T \\
A^T &= B^{-1}X^T && \mid \cdot B \text{ von links} \\
BA^T &= X^T && \mid (\cdot)^T \\
(BA^T)^T &= (X^T)^T \\
AB^T &= X
\end{aligned}$$

Aufgabenblatt 2: 2×2-Matrizen

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben

Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X auf!

- $3X - A^T = 2(B - I) + X$
- $AB(X + B^T) = I$
- $XAB = I$
- $X(A + 2I) = AX + B$
- $AX + X = B$
- $(AX)^T = X^T B^T$

Aufgabenblatt 4: 3×3-Matrizen

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben

Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X auf!

- $2X + A^T = 3C + X + AB$
- $AB(B^{-1}X + C) = A + B$
- $AXB = C + B^T$
- $X(A + C) = X + B + A^T$
- $AX = BX + C + A^T B$
- $(X + A)^T = (B^T + C)X^T + AB$

Aufgabenblatt 5: 3×3-Matrizen

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben

Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X auf!

- $\frac{1}{2}X + A^T = C + \frac{3}{2}X + B^T$
- $A^T B(X + B^T) = C + AB$
- $XAB = C + B^T A$
- $2X(A + C) = 2X + B + A^T$
- $AX + X = B + A^T B$
- $(AX)^T = X^T B^T + AB$

Was ist der Rang einer Matrix?

Intuitive Idee

Der Rang einer Matrix gibt an, in welche Dimension der Raum durch die Matrix transformiert wird.

- Eine Matrix mit Rang 2 transformiert jeden 3D-Körper in eine 2D-Fläche.
- Eine Matrix mit Rang 1 transformiert jeden 3D-Körper in eine 1D-Linie.

Formale Definition

Der Rang einer Matrix ist definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren. Es gilt immer: Der Zeilenrang ist gleich dem Spaltenrang.

Der einfache Fall: Die Zeilenstufenform

Merkmale der Zeilenstufenform (ZSF)

1. Nullzeilen stehen ganz unten.
2. Das erste Element $\neq 0$ einer Zeile (der **Pivot**) steht immer **rechts** vom Pivot der Zeile darüber.

Rang = Anzahl der Zeilen, die keine Nullzeilen sind

Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 5 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist der Rang also **3**.

Der Weg zur Lösung: Gauß-Elimination

Das Ziel

Jede beliebige Matrix in die einfache Zeilenstufenform zu überführen, **ohne dabei den Rang zu verändern**.

Das Werkzeug

Wir verwenden die **elementaren Zeilenoperationen**. Diese Operationen sind erlaubt, da sie die grundlegenden Abhängigkeiten zwischen den Zeilen nicht verändern.

Die 3 erlaubten Operationen

1. Zeilen tauschen

Zwei Zeilen werden miteinander vertauscht.

$$Z_i \leftrightarrow Z_j$$

2. Zeile skalieren

Eine Zeile wird mit einer Konstante $c \neq 0$ multipliziert.

$$Z_i \to c \cdot Z_i$$

3. Zeilen kombinieren

Das Vielfache einer Zeile wird zu einer anderen Zeile addiert. (Dies ist der wichtigste Schritt!)

$$Z_i \to Z_i + c \cdot Z_j$$

Praxisbeispiel: Rangbestimmung (1/2)

Gegebene Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ziel 1: Nullen unter dem ersten Pivot erzeugen

$$\begin{aligned} Z_2 &\to Z_2 - 2 \cdot Z_1 \\ Z_3 &\to Z_3 + Z_1 \end{aligned}$$

Ergebnis nach den ersten Schritten

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Praxisbeispiel: Rangbestimmung (2/2)

Aktueller Stand

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ziel 2: Nullen unter dem zweiten Pivot erzeugen

$$Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_2$$

Finale Zeilenstufenform

$$B'' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis und Interpretation

Die finale Matrix in ZSF

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Wir zählen die Anzahl der Zeilen, die **nicht** nur aus Nullen bestehen.

Der Rang

Es gibt 2 Nicht-Nullzeilen.

$$\mathbf{Rg(B) = 2}$$

Was bedeutet das?

Die dritte Zeile der ursprünglichen Matrix war eine lineare Kombination der ersten beiden. Sie enthielt keine neuen Informationen und wurde daher zu einer Nullzeile.

Zusammenfassung

- Der **Rang** ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen einer Matrix.
- Das **Gauß-Verfahren** überführt eine Matrix mittels elementarer Zeilenoperationen in die **Zeilenstufenform (ZSF)**.
- Der Rang bleibt bei diesen Operationen **unverändert**.
- In der ZSF ist der Rang einfach die **Anzahl der Nicht-Nullzeilen**.
- Der Rang ist entscheidend für die Analyse von **linearen Gleichungssystemen** (Lösbarkeit, Anzahl der Lösungen).

Wie spricht man Symbole aus?

Beispiele

$$A^T \quad \rightarrow \quad \text{„A transponiert“}$$

$$A^{-1} \quad \rightarrow \quad \text{„A invers“ oder „Inverse von A“}$$

$$A \cdot B \quad \rightarrow \quad \text{„A mal B“}$$

Weitere Beispiele

Beispiele

$$I \quad \rightarrow \quad \text{„Einheitsmatrix“}$$

$$X^T B^T \quad \rightarrow \quad \text{„X transponiert mal B transponiert“}$$

$$\det(A) \quad \rightarrow \quad \text{„Determinante von A“}$$

Noch mehr Beispiele

Beispiele

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{„Matrix mit a, b in der ersten Zeile und c, d in der zweiten Zeile"}$$

$$A + B \quad \rightarrow \quad \text{„A plus B"}$$

$$AX = B \quad \rightarrow \quad \text{„A mal X gleich B"}$$