Grenzwerte von Funktionen
Teil 2: Grenzwerte an einer Stelle

Kurzer Rückblick: Teil 1

Was haben wir bereits gelernt?

- Grenzwerte im Unendlichen: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$
- Dominanzprinzip: Höchste Potenz bestimmt das Verhalten
- Waagerechte Asymptoten: $y = g$

Heute lernen wir:

- Was passiert an einer festen Stelle? $\lim_{x \to a} f(x)$
- Drei Arten von Problemen: Lücke, Polstelle, Sprung
- Wie berechnet man solche Grenzwerte?

Grenzwert an einer Stelle

Die Frage: Was passiert, wenn x gegen eine feste Zahl a geht?

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Bei $x = 2$ können wir nicht einsetzen: $\frac{0}{0} \leftarrow$ undefiniert!

Aber: Wenn x nahe bei 2 ist (z.B. 1.9 oder 2.1), dann ist $f(x)$ nahe bei 4.

Grenzwert

Wir schreiben: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

Das bedeutet: $f(x)$ nähert sich 4 an, wenn x gegen 2 geht.

Einseitige Grenzwerte

Manchmal kommt es darauf an, von welcher Seite wir uns nähern.

Von links: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ oder $x \nearrow a$
(Wir kommen von kleineren Werten, $x < a$)

Von rechts: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ oder $x \searrow a$
(Wir kommen von größeren Werten, $x > a$)

Wichtige Regel

Der Grenzwert existiert nur, wenn beide Seiten zum gleichen Wert führen:

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = g$$

Die drei Probleme bei Grenzwerten

Wenn eine Funktion an der Stelle $x = a$ nicht definiert ist oder springt, gibt es drei Möglichkeiten:

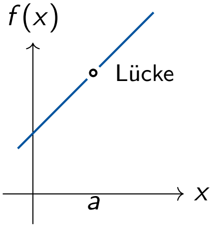
1. **Hebbare Lücke**
   - Der Grenzwert existiert
   - Man könnte die Lücke „schließen"
2. **Polstelle**
   - Die Funktion geht gegen $+\infty$ oder $-\infty$
   - Die Funktion „explodiert"
3. **Sprungstelle**
   - Links und rechts führen zu verschiedenen Werten
   - Die Funktion „springt"

1. Hebbare Lücke

Was ist das?

Eine hebbare Lücke liegt vor, wenn:

- $f(a)$ nicht definiert ist
- ABER: Der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x) = g$ existiert



Beispiel: Hebbare Lücke

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{bei } x = 2$$

Schritt 1: Einsetzen $\rightarrow \frac{0}{0} \leftarrow$ Problem!

Schritt 2: Faktorisieren

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Schritt 3: Kürzen

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad \text{für } x \neq 2$$

Schritt 4: Grenzwert berechnen

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

ÜBUNG: Hebbare Lücke

Berechne die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

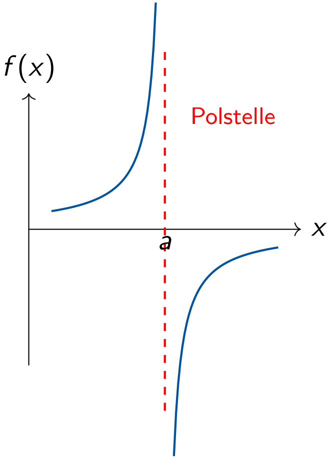
2. Polstelle

Was ist das?

Eine Polstelle liegt vor, wenn:

- $f(a)$ nicht definiert ist
- Die Funktion gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht

Die Gerade $x = a$ ist eine **senkrechte Asymptote**.



Beispiel: Polstelle

Gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \text{bei } x = 3$$

Von links ($x < 3$, z.B. $x = 2.9$):
$x - 3$ ist negativ und klein $\rightarrow$ $f(x)$ ist negativ und sehr groß

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

Von rechts ($x > 3$, z.B. $x = 3.1$):
$x - 3$ ist positiv und klein $\rightarrow$ $f(x)$ ist positiv und sehr groß

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

Ergebnis: Polstelle bei $x = 3$ mit senkrechter Asymptote

ÜBUNG: Polstellen untersuchen

Bestimme die Polstellen und die einseitigen Grenzwerte:

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ bei $x = -3$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$ bei $x = 2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ bei $x = -1$

Polstellen erkennen

Wie erkenne ich eine Polstelle?

Bei einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$:

Regel für Polstellen

Eine Polstelle liegt bei $x = a$ vor, wenn:

1. Der Nenner $N(a) = 0$ ist
2. Der Zähler $Z(a) \neq 0$ ist

Hinweis: Falls sowohl Zähler als auch Nenner 0 sind, liegt eine hebbare Lücke vor.

Polstellen erkennen – Beispiel

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$$

- Nenner $N(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
- Nenner $= 0$ bei $x = 2$ und $x = -2$
- Zähler $Z(x) = x + 1 \neq 0$ bei $x = 2$ und $x = -2$

Ergebnis: Zwei Polstellen bei $x = 2$ und $x = -2$.

ÜBUNG: Polstellen finden

Finde alle Polstellen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

3. Sprungstelle

Was ist das?

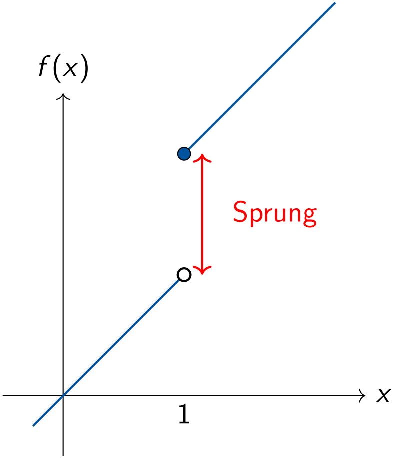
Eine Sprungstelle liegt vor, wenn die einseitigen Grenzwerte verschieden sind.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 1 \\ x + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Von links: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$

Von rechts: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$



ÜBUNG: Sprungstellen

Untersuche auf Sprungstellen bei $x = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Unbestimmte Ausdrücke

Manchmal führt direktes Einsetzen zu unbestimmten Ausdrücken:

- $\frac{0}{0} \leftarrow$ häufigster Fall (hebbare Lücke)
- $\frac{\infty}{\infty} \leftarrow$ bei Grenzwerten im Unendlichen
- $\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad$ etc.

Was tun?

Bei unbestimmten Ausdrücken müssen wir die Funktion algebraisch umformen!

Methode 1: Kürzen und Faktorisieren

Wann? Bei $\frac{0}{0}$ mit Polynomen

Beispiel:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Schritt 1: Faktorisieren

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

Schritt 2: Kürzen (für $x \neq 3$)

$$= x + 3$$

Schritt 3: Grenzwert berechnen

$$\lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

ÜBUNG: Kürzen und Faktorisieren

Berechne die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Methode 2: Erweitern (bei Wurzeln)

Wann? Bei $\frac{0}{0}$ mit Wurzeln

Beispiel:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Schritt 1: Erweitern mit $(\sqrt{x} + 2)$

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

Schritt 2: Kürzen

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Schritt 3: Grenzwert berechnen

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

ÜBUNG: Erweitern mit Wurzeln

Berechne die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

Zusammenfassung

Die drei Arten von Unstetigkeiten:

1. **Hebbare Lücke:** Grenzwert existiert $\rightarrow$ kann geschlossen werden
2. **Polstelle:** Funktion geht gegen $\pm\infty$ $\rightarrow$ senkrechte Asymptote
3. **Sprungstelle:** Einseitige Grenzwerte verschieden $\rightarrow$ Sprung

Methoden zur Grenzwertberechnung:

- **Faktorisieren und Kürzen** bei $\frac{0}{0}$ mit Polynomen
- **Erweitern** bei $\frac{0}{0}$ mit Wurzeln

Hausaufgaben – Aufgabe 1

Übe zu Hause:

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion auf Unstetigkeitsstellen:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

a) Wo ist f nicht definiert?

b) Welche Art von Unstetigkeitsstelle liegt jeweils vor?

c) Bestimme die Grenzwerte.

Hausaufgaben – Aufgabe 2

Aufgabe 2: Berechne die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

Hausaufgaben – Klausuraufgabe

Aufgabe 3 (Klausurstil): Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 5 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

a) Untersuche, ob f an der Stelle $x = 2$ stetig ist. Begründe deine Antwort.

b) Bestimme den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle $x = 2$.

c) Skizziere den Graphen von f im Intervall $[1, 3]$.