Determinanten

Grundlagen und Rechenregeln

Studienkolleg · Rahn Education

Was ist eine Determinante?

Determinante

Definition

Eine **Determinante** ordnet jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

eine reelle Zahl $\det(A)$ zu.

Alternative Schreibweise: $|A|$

Der einfachste Fall

Für eine 1×1-Matrix:

$$A = [a] \quad \Rightarrow \quad \det(A) = a$$

Geometrische Bedeutung

- $n = 2$: Fläche des Parallelogramms
- $n = 3$: Volumen des Spats
- Das Vorzeichen gibt die Orientierung an

Prüfungstipp: „Die Determinante misst das orientierte Volumen."

Reguläre Matrix

Definition

A heißt **regulär**, wenn $\det(A) \neq 0$.

Das bedeutet:

A ist invertierbar, hat vollen Rang, und $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

Singuläre Matrix

Definition

A heißt **singulär**, wenn $\det(A) = 0$.

Das bedeutet:

A ist nicht invertierbar,
und $A\vec{x} = \vec{b}$ hat keine oder unendlich viele Lösungen.

Beispiel

Regulär oder singulär?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Regulär oder singulär?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Beispiel

Regulär oder singulär?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

$\rightarrow$ singulär

Übung

Wahr oder falsch? Begründe.

1. Jede quadratische Matrix hat eine Determinante.
2. Die Determinante ist immer positiv.
3. Wenn $\det(A) = 0$, ist $A\vec{x} = \vec{0}$ unlösbar.
4. $\det\big([5]\big) = 5$

Die 2×2-Determinante

Formel

2×2-Determinante

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Übung

Berechne die Determinanten.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus

Nur für 3×3-Matrizen!

So geht’s

- Schreibe die ersten zwei Spalten rechts dazu
- Addiere die absteigenden Diagonalen
- Subtrahiere die aufsteigenden Diagonalen

Beispiel

Schritt 1: Matrix erweitern

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

Beispiel

Schritt 2: Diagonalen berechnen

$$\det(A) = \underbrace{(45 + 84 + 96)}_{\text{absteigende}} - \underbrace{(105 + 48 + 72)}_{\text{aufsteigende}}$$

Beispiel

Schritt 2: Diagonalen berechnen

$$\det(A) = \underbrace{(45 + 84 + 96)}_{\text{absteigende}} - \underbrace{(105 + 48 + 72)}_{\text{aufsteigende}}$$

$$= 225 - 225 = 0$$

$\det(A) = 0 \ \rightarrow$ singulär!

Übung

Berechne $\det(D)$ **mit der Regel von Sarrus.**

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Laplace-Entwicklung

Begriffe

Minor und Kofaktor

Minor M_{ij}: Determinante nach Streichen von Zeile i, Spalte j

Kofaktor $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Formel

Laplace-Entwicklung nach Zeile i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Wähle die Zeile mit den meisten Nullen!

Beispiel

Entwicklung nach der 1. Zeile

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Aufspalten in 2×2-Determinanten

$$\det(B) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Ergebnis

$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3)$$

Beispiel

Ergebnis

$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3)$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

Übung

Laplace-Entwicklung nach der 2. Zeile

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dreiecks- und Diagonalmatrizen

Einfache Regel

Determinante von Dreiecksmatrizen

Die Determinante ist das **Produkt der Diagonalelemente**:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Gilt für obere/untere Dreiecksmatrizen und Diagonalmatrizen.

Übung

Bestimme die Determinanten.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung

Regulär oder singulär?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Übung

Theoretische Frage

Warum ist eine Matrix mit zwei identischen Zeilen immer singulär?

Inverse Matrizen

Definition

Inverse Matrix

A heißt **invertierbar**, wenn es ein A^{-1} gibt mit:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Zusammenhang

$$A \text{ invertierbar} \;\Leftrightarrow\; \det(A) \neq 0$$

Eigenschaften

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Bei $(AB)^{-1}$ dreht sich die Reihenfolge um!

Inverse einer 2×2-Matrix

Formel

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beispiel

Inverse einer 2×2-Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Inverse einer 2×2-Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(K) = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \checkmark$$

Beispiel

Inverse einer 2×2-Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(K) = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$K^{-1} = \tfrac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Übung

Berechne die Inverse (falls existent).

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Adjunktenformel

Formel

Adjunktenformel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

wobei $\mathrm{adj}(A) =$ Transponierte der Kofaktormatrix

Was ist die Adjunkte?

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \ \rightarrow$ Kofaktor von a_{ij}

Beispiel

Adjunktenformel für eine 3×3-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Kofaktoren – Zeile 1

$$C_{11} = +\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 24 = -24$$

$$C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(0 - 20) = +20$$

$$C_{13} = +\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 0 - 5 = -5$$

Kofaktoren – Zeile 2

$$C_{21} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -(0 - 18) = +18$$

$$C_{22} = +\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 15 = -15$$

$$C_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -(6 - 10) = +4$$

Kofaktoren – Zeile 3

$$C_{31} = +\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 = +5$$

$$C_{32} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -(4 - 0) = -4$$

$$C_{33} = +\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = +1$$

Kofaktormatrix und Adjunkte

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Kofaktormatrix und Adjunkte

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(B) = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante und Ergebnis

$$\det(B) = 1 \cdot (-24) + 2 \cdot 20 + 3 \cdot (-5) = 1$$

Determinante und Ergebnis

$$\det(B) = 1 \cdot (-24) + 2 \cdot 20 + 3 \cdot (-5) = 1$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung

Berechne M^{-1} mit der Adjunktenformel.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeige zuerst, dass M invertierbar ist.

Aussprache mathematischer Symbole

Determinanten und Matrizen

- $\det(A) \rightarrow$ „Determinante von A”
- $|A| \rightarrow$ „Determinante von A”
- $A^{-1} \rightarrow$ „A inverse”
- $A^{T} \rightarrow$ „A transponiert”

Indizes und Operationen

- $a_{ij} \rightarrow$ „a i j”
- $M_{ij} \rightarrow$ „Minor i j”
- $\mathrm{adj}(A) \rightarrow$ „Adjunkte von A”
- $\sum_{j=1}^{n} \rightarrow$ „Summe von j gleich 1 bis n”
- $\prod_{i=1}^{n} \rightarrow$ „Produkt von i gleich 1 bis n”

Vektoren und Ausdrücke

- $\vec{x} \rightarrow$ „Vektor x”
- $A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow$ „A mal x gleich b”
- $(-1)^{i+j} \rightarrow$ „minus eins hoch i plus j”
- $\frac{1}{\det(A)} \rightarrow$ „eins durch Determinante von A”

Klausuraufgaben

Klausuraufgabe 1

Gegeben ist die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $\det(A)$ mit der Regel von Sarrus. *(6P)*

b) Ist A regulär? Begründe. *(2P)*

c) Berechne A^{-1} mit der Adjunktenformel. *(10P)*

d) Überprüfe dein Ergebnis: Zeige, dass $A \cdot A^{-1} = I_3$. *(2P)*

Klausuraufgabe 2

Lineares Gleichungssystem

Gegeben ist das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass das LGS eindeutig lösbar ist. *(5P)*

b) Bestimme die Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. *(8P)*

c) Führe die Probe durch. *(2P)*

Fragen?