Matrizen – Einführung und Rechenoperationen

Was ist eine Matrix?

Definition

Eine **Matrix** ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen in Zeilen und Spalten.

- **Element**: Einzelne Zahl in der Matrix, z.B. a_{ij} (Zeile i, Spalte j).
- **Größe**: $m \times n$ (Anzahl Zeilen m, Anzahl Spalten n).

Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiele für Matrizen

Beispiel 1: 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: 3×2-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Definitionen

Besondere Matrizen und Vektoren

- **Nullmatrix**: Alle Elemente sind 0.
- **Einheitsmatrix**: 1 auf der Hauptdiagonale, sonst 0.
- **Diagonalmatrix**: Nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen sind (möglicherweise) ungleich 0.
- **Obere Dreiecksmatrix**: Alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale sind 0.
- **Spaltenvektor**: Matrix mit nur einer Spalte.
- **Zeilenvektor**: Matrix mit nur einer Zeile.

Beispiele I

Nullmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiele II

Obere Dreiecksmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion von Matrizen

Definition

Zwei Matrizen gleicher Größe werden addiert/subtrahiert, indem ihre entsprechenden Elemente addiert/subtrahiert werden:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiele für Addition und Subtraktion

Beispiel 1 (Addition)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2 (Subtraktion)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vielfachbildung („Zahl mal Matrix“)

Definition

Jedes Element der Matrix wird mit der Zahl multipliziert:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiele für Vielfachbildung

Beispiel 1

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

Definition

Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Beispiele für Matrixmultiplikation

Beispiel 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Transponieren

Definition

Beim Transponieren werden Zeilen und Spalten vertauscht:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Beispiele für das Transponieren

Beispiel 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Matrizen

Addition und Subtraktion

- $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)
- $A + 0 = A$ (Neutrales Element)

Skalarmultiplikation

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Rechenregeln für Matrizen

Matrixmultiplikation

- $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativgesetz)
- $A(B + C) = AB + AC$ (Distributivgesetz)
- $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- **Achtung:** $AB \neq BA$ (im Allgemeinen nicht kommutativ!)

Transponieren

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Aufgabe 1 – Definitionen

Aufgabe

1. Definieren Sie die Begriffe:
   - Matrix
   - Einheitsmatrix
   - Transponierte
2. Geben Sie die Größe der folgenden Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 – Grundoperationen

Aufgabe

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

1. $A + B$
2. $A - B$
3. $2A$

Aufgabe 3 – Matrixmultiplikation

Aufgabe

Berechnen Sie das Produkt AB, falls

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 – Transponieren

Aufgabe

Gegeben sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie C^T.

Aufgabe 5 – Besondere Matrizen

Aufgabe

Welche der folgenden Matrizen sind **Diagonalmatrix**, **Einheitsmatrix**, **Nullmatrix** oder **obere Dreiecksmatrix**?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 – Rechenregeln

Aufgabe

Zeigen Sie, dass gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Hinweis: Schreiben Sie die Definition des Transponierens und des Matrixprodukts auf und vergleichen Sie.

Aussprache mathematischer Ausdrücke I

Grundlegende Notation

- A – „Matrix A" oder einfach „A"
- A^T – „A transponiert"
- A^{-1} – „A invers"
- $\det(A)$ – „Determinante von A"
- a_{ij} – „a Index i j" oder „a i j"
- a_{23} – „a zwei drei" (Element in Zeile 2, Spalte 3)

Aussprache mathematischer Ausdrücke II

Operationen

- $A + B$ – „A plus B"
- $A - B$ – „A minus B"
- λA – „Lambda mal A" oder „Lambda A"
- AB – „A mal B" oder „A B" (Matrixprodukt)
- $A \cdot B$ – „A mal B" (alternativ)
- kA – „k mal A" oder einfach „k A"

Aussprache mathematischer Ausdrücke III

Kombinierte Ausdrücke

- $(AB)^T$ – „A mal B, transponiert" oder „A B transponiert"
- $(A^T)^T$ – „A transponiert, transponiert"
- λA^T – „Lambda mal A transponiert"
- $(A + B)^T$ – „A plus B, transponiert"
- $A^T B$ – „A transponiert mal B"
- AB^T – „A mal B transponiert"

Aussprache mathematischer Ausdrücke IV

Spezielle Matrizen

- I oder E – „Einheitsmatrix” oder „Identitätsmatrix”
- I_n – „n-reihige Einheitsmatrix” oder „Einheitsmatrix der Ordnung n”
- O oder 0 – „Nullmatrix”
- D – „Diagonalmatrix D” (oft als D bezeichnet)
- $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – „Diagonalmatrix mit Einträgen d eins bis d n”