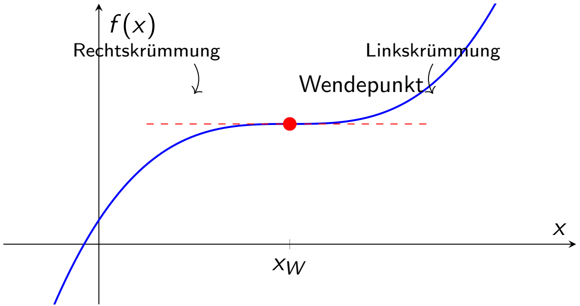
Grenzwerte von Funktionen
Teil 6: Wendepunkte

Was ist ein Wendepunkt?

Bisher: Extrempunkte zeigen, wo eine Funktion ihr Maximum oder Minimum hat.

Neu: Wendepunkte zeigen, wo sich die **Krümmung** ändert!

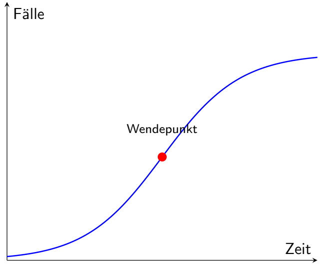


Wendepunkt: Stelle, an der die Krümmungsrichtung wechselt

Anschauliche Beispiele

Wo begegnen uns Wendepunkte?

- **Achterbahnfahrt:** Übergang von Linkskurve zu Rechtskurve
- **Wachstumsprozess:** Punkt des stärksten Wachstums
- **Pandemieverlauf:** Wo flacht die Kurve ab?
- **Physik:** Punkt der maximalen Beschleunigung
- **Straßenbau:** Übergang zwischen Kurven



Definition über Anstieg

Wendepunkt – Präzise Definition

Ein Punkt x_W heißt **Wendepunkt**, wenn dort die Steigungsfunktion $f'(x)$ ein lokales Extremum hat.

Das bedeutet:

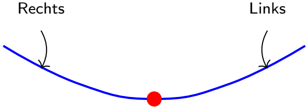
Links-Rechts-Wendepunkt

- Anstieg ist **minimal**
- Steigung nimmt zu
- Von Rechtskrümmung zu Linkskrümmung

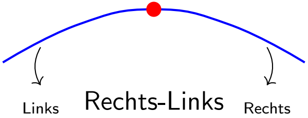
Rechts-Links-Wendepunkt

- Anstieg ist **maximal**
- Steigung nimmt ab
- Von Linkskrümmung zu Rechtskrümmung

Visualisierung: Links-Rechts vs. Rechts-Links



Links-Rechts
(Steigung minimal)



Rechts-Links
(Steigung maximal)

Die notwendige Bedingung

Überlegung: Wendepunkt = Extremum der Steigungsfunktion $f'(x)$

Für Extremum von $f'(x)$ gilt: Ableitung von $f'(x)$ muss null sein!

Ableitung von $f'(x)$ ist $f''(x)$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte

Wenn $f(x)$ an der Stelle x_W einen Wendepunkt hat, dann gilt:

$$f''(x_W) = 0$$

In Worten: Die zweite Ableitung an einer Wendestelle ist gleich null.

Achtung: Nur notwendig, nicht hinreichend!

Wichtig!

Die Bedingung $f''(x_W) = 0$ ist nur **notwendig**!

Das bedeutet:

- Wenn Wendepunkt vorliegt $\Rightarrow$ dann $f''(x_W) = 0$
- Aber: $f''(x_W) = 0 \Rightarrow$ nicht zwingend Wendepunkt!

Problem: Es könnte auch ein **Extrempunkt** sein!

Beispiel: $f(x) = x^4$ hat bei $x = 0$ zwar $f''(0) = 0$, aber dort liegt ein **Minimum**, kein Wendepunkt!

Die dritte Ableitung

Definition

Die **dritte Ableitung** $f'''(x)$ ist die Ableitung der zweiten Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}[f''(x)]$$

Sprechweise: „f Strich Strich Strich von x"

Beispiel: $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 9x^2 + 2 \\ f''(x) &= 20x^3 - 18x \\ f'''(x) &= 60x^2 - 18 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte

Die hinreichende Bedingung

Sei x_W eine Stelle mit $f''(x_W) = 0$.

Wenn $f'''(x_W) \neq 0$, dann hat f bei x_W einen **Wendepunkt**.

Genauer:

- $f'''(x_W) > 0$: **Links-Rechts-Wendepunkt**
- $f'''(x_W) < 0$: **Rechts-Links-Wendepunkt**

Für Prüfungen

Oft reicht: $f'''(x_W) \neq 0$ (ohne Vorzeichen zu bestimmen)

Systematisches Vorgehen – Schritt für Schritt

Wendepunkte bestimmen

Schritt 1: Zweite Ableitung $f''(x)$ berechnen

Schritt 2: Notwendige Bedingung: Löse $f''(x) = 0$

- Lösungen sind mögliche Wendestellen

Schritt 3: Dritte Ableitung $f'''(x)$ berechnen

Schritt 4: Hinreichende Bedingung: Für jede Lösung x_W:

- $f'''(x_W) \neq 0$: Wendepunkt bestätigt

Schritt 5: Funktionswerte: $f(x_W)$ berechnen
Schritt 6: Wendepunkte angeben: $(x_W, f(x_W))$

Beispiel 1: Polynom 3. Grades

Aufgabe: Bestimme alle Wendepunkte von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Schritt 1: Zweite Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

Schritt 2: Notwendige Bedingung

$$6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Mögliche Wendestelle: $x_W = 1$

Beispiel 1: Polynom 3. Grades (Fortsetzung)

Schritt 3: Dritte Ableitung

$$f'''(x) = 6$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \quad \checkmark$$

Wendepunkt bestätigt! (Da $f'''(1) > 0$: Links-Rechts-Wendepunkt)

Schritt 5 + 6: Funktionswert und Wendepunkt

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad W(1, 0)$$

ÜBUNG: Polynom 3. Grades

Bestimme alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

Tipp: Polynome 3. Grades haben immer genau einen Wendepunkt!

Beispiel 2: Polynom 4. Grades

Aufgabe: Bestimme alle Wendepunkte von $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$

Schritt 1 + 2: Zweite Ableitung und Nullstellen

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$
$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$$

Schritt 3: Dritte Ableitung

$$f'''(x) = 24x$$

Beispiel 2: Polynom 4. Grades (Fortsetzung)

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f'''(1) = 24 \neq 0 \quad \checkmark \quad \text{(Links-Rechts-WP)}$$
$$f'''(-1) = -24 \neq 0 \quad \checkmark \quad \text{(Rechts-Links-WP)}$$

Schritt 5 + 6: Funktionswerte und Wendepunkte

$$f(1) = 1 - 6 + 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad W_1(1, -2)$$
$$f(-1) = 1 - 6 + 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad W_2(-1, -2)$$

ÜBUNG: Polynom 4. Grades

Bestimme alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2$

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

Hinweis: Polynome 4. Grades können 0, 1 oder 2 Wendepunkte haben!

Beispiel 3: Exponentialfunktion

Aufgabe: Bestimme alle Wendepunkte von $f(x) = xe^{-x}$

Schritt 1: Zweite Ableitung
Erste Ableitung (Produktregel):

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

Zweite Ableitung:

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

Schritt 2: Nullstellen

$$e^{-x}(x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 2$$

(Da $e^{-x} > 0$ für alle x)

Beispiel 3: Exponentialfunktion (Fortsetzung)

Schritt 3: Dritte Ableitung

$$f'''(x) = e^{-x}(3 - x)$$

Schritt 4: Hinreichende Bedingung

$$f'''(2) = e^{-2}(3 - 2) = e^{-2} > 0 \quad \checkmark$$

Wendepunkt bestätigt!

Schritt 5 + 6: Funktionswert und Wendepunkt

$$f(2) = 2e^{-2} \approx 0{,}27 \quad \Rightarrow \quad W(2, 2e^{-2})$$

ÜBUNG: Exponentialfunktionen

Bestimme alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

b) $f(x) = (x-1)e^{-x}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

Tipp: Bei der Produktregel aufpassen!

Sattelpunkte – Besonderheit

Was ist ein Sattelpunkt?

Definition: Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** (auch **Terrassenpunkt**) ist ein Wendepunkt mit **waagerechter Tangente**:

$$f'(x_S) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_S) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_S) \neq 0$$

Charakteristik:

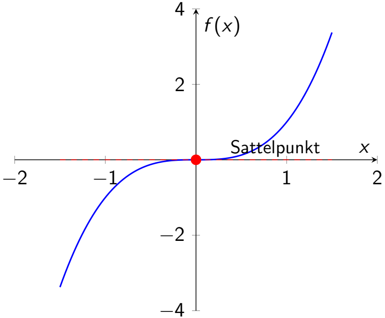
- Wendepunkt (Krümmungswechsel)
- Waagerechte Tangente ($f'(x) = 0$)
- Aber: **Kein** Extrempunkt!

Beispiel: Sattelpunkt bei $f(x) = x^3$

Aufgabe: Zeige, dass $f(x) = x^3$ bei $x = 0$ einen Sattelpunkt hat.

Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$



Bei $x = 0$:

$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = 0$$
$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

Fazit: $S(0, 0)$ ist ein Sattelpunkt

Unterscheidung: Extrempunkt vs. Wendepunkt vs. Sattelpunkt

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$:

Untersuchung mit höheren Ableitungen

Bestimme die niedrigste Ableitung $f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

Fall 1: n ist gerade (z.B. $f^{(4)}(x_0) \neq 0$)

- Wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$: **Minimum** (Extrempunkt)
- Wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$: **Maximum** (Extrempunkt)

Fall 2: n ist ungerade (z.B. $f^{(3)}(x_0) \neq 0$)

- **Sattelpunkt** (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

ÜBUNG: Sattelpunkte erkennen

Untersuche, ob bei $x = 0$ ein Extrempunkt oder Sattelpunkt vorliegt:

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = x^6$

c) $f(x) = (x-1)^3 + 1$ bei $x = 1$

Tipp: Bestimme die niedrigste nicht verschwindende Ableitung!

Zusammenfassung: Wendepunkte bestimmen

Notwendige Bedingung

$$f''(x_W) = 0$$

Liefert mögliche Wendestellen (aber nicht alle sind Wendepunkte!)

Hinreichende Bedingung

$$f'''(x_W) \neq 0$$

Bestätigt den Wendepunkt

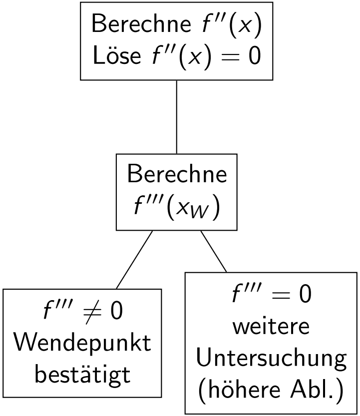
- $f'''(x_W) > 0$: Links-Rechts-Wendepunkt
- $f'''(x_W) < 0$: Rechts-Links-Wendepunkt

Besonderheit: Sattelpunkt

$f'(x_S) = 0$ und $f''(x_S) = 0$ und $f'''(x_S) \neq 0$
Wendepunkt mit waagerechter Tangente, aber kein Extremum!

Entscheidungsbaum

Wendepunkte bestimmen – Wie gehe ich vor?



Vergleich: Extrempunkte vs. Wendepunkte

Eigenschaft	**Extrempunkt**	**Wendepunkt**
Notwendige Bedingung	$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$
Hinreichende Bedingung	$f''(x) \neq 0$	$f'''(x) \neq 0$
Bedeutung	Hoch-/Tiefpunkt	Krümmungswechsel
Sprechweise	„f Strich Strich"	„f Strich Strich Strich"
Besonderheit	Sattelpunkt möglich (wenn $f''(x) = 0$)	Sattelpunkt möglich (wenn $f'(x) = 0$)

Wichtige Begriffe – Überblick

Begriffe

- **Wendestelle**: x-Koordinate
- **Wendepunkt**: Punkt $(x_W, f(x_W))$
- **Links-Rechts-Wendepunkt**: Steigung minimal
- **Rechts-Links-Wendepunkt**: Steigung maximal
- **Sattelpunkt/Terrassenpunkt**: Wendepunkt mit $f'(x) = 0$
- **Krümmung**: Rechtskrümmung oder Linkskrümmung
- **Notwendige Bedingung**: Muss erfüllt sein
- **Hinreichende Bedingung**: Reicht zum Nachweis
- **Dritte Ableitung**: $f'''(x)$ („f Strich Strich Strich")

Hausaufgaben – Aufgabe 1

Bestimme alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$

b) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Hausaufgaben – Aufgabe 2

Bestimme alle Wendepunkte:

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Hausaufgaben – Aufgabe 3

Untersuche auf Sattelpunkte:

a) $f(x) = x^3 - 3x$ bei allen kritischen Stellen

b) $f(x) = (x-2)^3 + 1$

Hinweis: Prüfe sowohl auf Extrempunkte als auch auf Wendepunkte!

Hausaufgaben – Klausuraufgabe

Aufgabe 4 (Klausurstil):
Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

a) Bestimme alle Extrempunkte der Funktion.

b) Bestimme alle Wendepunkte der Funktion.

c) Prüfe, ob Sattelpunkte vorliegen.

d) Skizziere den Graphen von f und markiere alle besonderen Punkte.