# Hauptsatz der Differential-/Integralrechnung und Flächenberechnung

# Der Hauptsatz (einfache Version)

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Ist $f$ stetig auf $[a, b]$ und $F$ eine Stammfunktion von $f$, d.h. $F'(x) = f(x)$, so gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

**Schreibweise**

$[F(x)]_a^b$ bedeutet:

1. Obere Grenze $b$ in $F(x)$ einsetzen: $F(b)$
2. Untere Grenze $a$ in $F(x)$ einsetzen: $F(a)$
3. Differenz bilden: $F(b) - F(a)$

# Wichtige Bemerkungen

- **Verbindung zweier Konzepte:**
  - Unbestimmtes Integral (Stammfunktion)
  - Bestimmtes Integral (Flächeninhalt)
- **Die Konstante $C$ spielt keine Rolle:**

$$F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

- **Prüfungsrelevanz:**
  Dieser Satz sollte in Wort und Formel beherrscht werden!

# Beispiel 1: Polynom

**Beispiel**

Berechnen Sie $\int_1^3 x^2 \, dx$

# Beispiel 3: Logarithmusfunktion

**Beispiel**

Berechnen Sie $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

**Lösung:**

- Stammfunktion: $F(x) = \ln(x)$ für $x > 0$
- Hauptsatz anwenden:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^e$$

$$= \ln(e) - \ln(1)$$

$$= 1 - 0 = 1$$

# Rechenregeln für bestimmte Integrale

**1. Linearität**

$$\int_a^b [c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)] \, dx = c_1 \int_a^b f(x) \, dx + c_2 \int_a^b g(x) \, dx$$

**2. Vertauschung der Grenzen**

$$\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$$

**3. Intervalladditivität**

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (a < c < b)$$

# Einführung: Flächenberechnung

**Ziel**

Exakte Berechnung von Flächeninhalten, die von Funktionsgraphen begrenzt werden.

**Vier Grundtypen**

1. Fläche zwischen **1 Funktion**, x-Achse und **gegebenen Grenzen**
2. Fläche zwischen **1 Funktion** und x-Achse (*ohne* gegebene Grenzen)
3. Fläche zwischen **2 Funktionen** mit **gegebenen Grenzen**
4. Fläche zwischen **2 Funktionen** (*ohne* gegebene Grenzen)

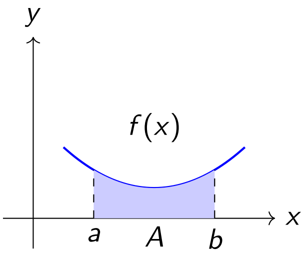
**Hinweis**

Die meisten Flächen lassen sich auf diese 4 Grundtypen zurückführen!

# Grundtyp [1]: Beschreibung

**Gegeben:**

- Funktion $f(x) \geq 0$
- Intervall $[a, b]$




Formel

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

**Voraussetzung:** $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$

# Grundtyp [1]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$, der x-Achse und den Grenzen $x = 0$ und $x = 2$.

**Lösung:**

$$A = \int_0^2 x^2 \, dx$$

**Sonderfall:** $f(x) < 0$

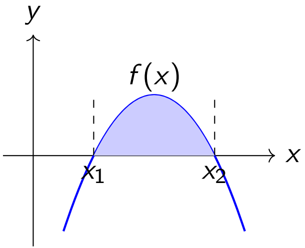
Liegt die Funktion unterhalb der x-Achse, muss der **Betrag** genommen werden:

$$A = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right|$$

# Grundtyp [2]: Beschreibung

**Gegeben:**

- Funktion $f(x)$
- *Keine* Grenzen vorgegeben




Lösungsstrategie

1. **Nullstellen bestimmen:** Löse $f(x) = 0 \rightarrow$ Integrationsgrenzen
2. **Vorzeichen prüfen:** Wo ist $f(x) > 0$, wo $f(x) < 0$?
3. **Teilflächen berechnen:** Bilde Beträge der Integrale
4. **Gesamtfläche:** Addiere alle Teilflächen

# Grundtyp [2]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.

# Grundtyp [2]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.

**Lösung:**

1. Nullstellen: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$

# Grundtyp [2]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.

**Lösung:**

1. Nullstellen: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$
2. Vorzeichen: Für $x \in (-2, 2)$ ist $f(x) < 0$

# Grundtyp [2]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.

**Lösung:**

1. Nullstellen: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$
2. Vorzeichen: Für $x \in (-2, 2)$ ist $f(x) < 0$
3. Flächenberechnung:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-2}^{2} \right|$$

# Grundtyp [2]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse.

**Lösung:**

1. Nullstellen: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$
2. Vorzeichen: Für $x \in (-2, 2)$ ist $f(x) < 0$
3. Flächenberechnung:

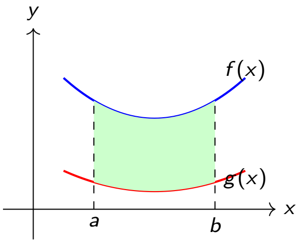
$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-2}^{2} \right|$$

# Grundtyp [3]: Beschreibung

**Gegeben:**

- Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$
- $f(x) \geq g(x)$
- Intervall $[a, b]$




Formel

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

**Merksatz**

**Obere Funktion** minus **untere Funktion**!

# Grundtyp [3]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$.

# Grundtyp [3]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$.

**Lösung:**

- Prüfung: Für $x \in [0, 1]$ ist $x^2 \leq x$, also $g(x) \geq f(x)$

# Grundtyp [3]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$.

**Lösung:**

- Prüfung: Für $x \in [0, 1]$ ist $x^2 \leq x$, also $g(x) \geq f(x)$
- Berechnung:

$$A = \int_0^1 [x - x^2]\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}\ \text{FE}$$

# Grundtyp [3]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$.

**Lösung:**

- Prüfung: Für $x \in [0, 1]$ ist $x^2 \leq x$, also $g(x) \geq f(x)$
- Berechnung:

$$A = \int_0^1 [x - x^2] \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \text{ FE}$$

# Grundtyp [3]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$.

**Lösung:**

- Prüfung: Für $x \in [0, 1]$ ist $x^2 \leq x$, also $g(x) \geq f(x)$
- Berechnung:

$$A = \int_0^1 [x - x^2] \, dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

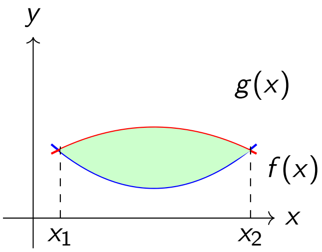
$$= \frac{1}{6} \text{ FE}$$

# Grundtyp [4]: Beschreibung

**Gegeben:**

- Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$
- *Keine* Grenzen vorgegeben

**Gesucht:**
Fläche zwischen den beiden Funktionen




Lösungsstrategie

1. **Schnittpunkte:** Löse $f(x) = g(x) \rightarrow$ Integrationsgrenzen
2. **Lage prüfen:** Welche Funktion liegt oben?
3. **Teilflächen:** Berechne Integrale mit oberer minus unterer Funktion
4. **Gesamtfläche:** Addiere alle Teilflächen

# Grundtyp [4]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$.

# Grundtyp [4]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$.

**Lösung:**

1. Schnittpunkte bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

# Grundtyp [4]: Beispiel

**Beispiel**

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$.

**Lösung:**

1. Schnittpunkte bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

# Grundtyp [4]: Beispiel (Fortsetzung)

2 Lage der Funktionen bestimmen (Testpunkt $x = 0{,}5$):

$$f(0{,}5) = (0{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$g(0{,}5) = 0{,}5$$

# Grundtyp [4]: Beispiel (Fortsetzung)

2 Lage der Funktionen bestimmen (Testpunkt $x = 0{,}5$):

$$f(0{,}5) = (0{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$g(0{,}5) = 0{,}5$$

Da $0{,}25 < 0{,}5$, gilt: $g(x) \geq f(x)$ in $[0, 1]$

# Grundtyp [4]: Beispiel (Fortsetzung)

2. Lage der Funktionen bestimmen (Testpunkt $x = 0{,}5$):

$$f(0{,}5) = (0{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$g(0{,}5) = 0{,}5$$

   Da $0{,}25 < 0{,}5$, gilt: $g(x) \geq f(x)$ in $[0, 1]$

3. Flächeninhalt berechnen:

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^1 [x - x^2]\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} \text{ FE}$$

# Grundtyp [4]: Beispiel (Fortsetzung)

2. Lage der Funktionen bestimmen (Testpunkt $x = 0{,}5$):

$$f(0{,}5) = (0{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$g(0{,}5) = 0{,}5$$

   Da $0{,}25 < 0{,}5$, gilt: $g(x) \geq f(x)$ in $[0,1]$

3. Flächeninhalt berechnen:

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^1 [x - x^2]\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}\ \text{FE}$$

# Grundtyp [4]: Beispiel (Fortsetzung)

2. Lage der Funktionen bestimmen (Testpunkt $x = 0{,}5$):

$$f(0{,}5) = (0{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$g(0{,}5) = 0{,}5$$

   Da $0{,}25 < 0{,}5$, gilt: $g(x) \geq f(x)$ in $[0, 1]$

3. Flächeninhalt berechnen:

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 [x - x^2]\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} \text{ FE}$$

# Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

Berechnen Sie: $\int_1^2 x^3\,dx$

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 9$ und der x-Achse.

### Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 2x$ im Intervall $[0, 2]$.

### Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4$.

# Übungsaufgaben

## Aufgabe 5

Berechnen Sie die Fläche, die vollständig von den drei Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 4$ und $h(x) = 0$ (x-Achse) eingeschlossen wird.

## Aufgabe 6

Gegeben sind $f(x) = x^3 - 3x$ und $g(x) = x$. Bestimmen Sie alle Teilflächen zwischen den beiden Funktionen und berechnen Sie die Gesamtfläche.

## Aufgabe 7

Die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^3 - 4x$ schneiden sich mehrfach. Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionen im Bereich $x \in [-3, 3]$.
*Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst alle Schnittpunkte und beachten Sie, welche Funktion jeweils oben liegt.