Grenzwerte von Funktionen
Teil 2: Grenzwerte an einer Stelle

Rückblick: Teil 1

Was haben wir gelernt?

- **Grenzwerte im Unendlichen:** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$
- **Dominanzprinzip:** Höchste Potenz bestimmt das Verhalten
- **Waagerechte Asymptoten:** $y = g$ wenn der Grenzwert existiert

Heute:

- Grenzwerte an festen Stellen: $\lim_{x \to a} f(x)$
- Unstetigkeitsstellen und ihre Typen
- Methoden zur Grenzwertbestimmung
- Schräge Asymptoten

Grenzwert an einer Stelle

Was passiert bei $x \to a$?

Wir untersuchen, welchem Wert sich $f(x)$ nähert, wenn x gegen eine feste Zahl a strebt.

Wichtig!

Dies ist besonders relevant bei **Unstetigkeitsstellen** – Stellen, wo die Funktion nicht definiert ist oder einen Sprung aufweist.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{bei } x = 2$$

Bei $x = 2$ ist f nicht definiert $(\frac{0}{0})$, aber der Grenzwert existiert!

Einseitige Grenzwerte

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = g_l \quad \text{(Annäherung von links, } x < a\text{)}$$

Schreibweise auch: $x \nearrow a$ oder $x \to a^-$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = g_r \quad \text{(Annäherung von rechts, } x > a\text{)}$$

Schreibweise auch: $x \searrow a$ oder $x \to a^+$

Wichtige Regel

Der Grenzwert existiert genau dann, wenn beide einseitigen Grenzwerte existieren und übereinstimmen:

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = g$$

Unstetigkeitsstellen: Übersicht

Drei wichtige Fälle:

1. **Hebbare Lücke (stetig ergänzbar):**
   - $f(a)$ nicht definiert
   - Grenzwert existiert: $\lim_{x \to a} f(x) = g$
   - Lücke kann „geheilt" werden
2. **Polstelle (unendliche Stelle):**
   - $f(a)$ nicht definiert
   - Grenzwert ist $\pm\infty$ (bestimmt divergent)
3. **Sprungstelle:**
   - Einseitige Grenzwerte verschieden

Hebbare Lücke

Charakteristik:

- $f(a)$ ist nicht definiert (oder hat einen „falschen" Wert)
- Aber: Der Grenzwert existiert
- Die Lücke kann durch Definieren von $f(a) := g$ geschlossen werden

Beispiel:

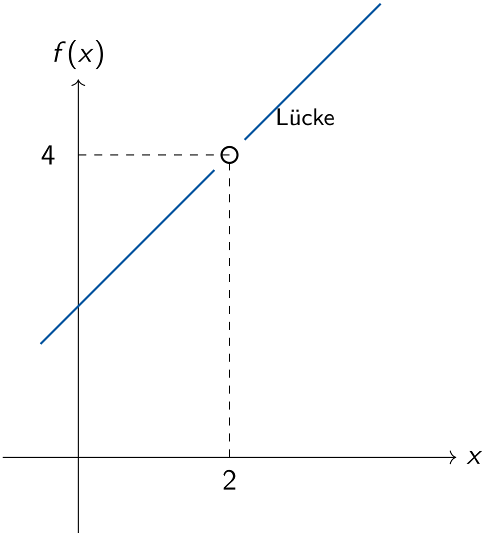
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{bei } x = 2$$

Faktorisieren:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 \quad \text{für } x \neq 2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Hebbare Lücke: Skizze



Weiteres Beispiel: Hebbare Lücke

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad \text{bei } x = 2$$

Faktorisierung: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 \quad \text{für } x \neq 2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 + 4 + 4 = 12$$

Ergebnis

Hebbare Lücke bei $x = 2$ mit Grenzwert 12.

Polstelle

Charakteristik:

- $f(a)$ ist nicht definiert
- Mindestens einer der einseitigen Grenzwerte ist $\pm\infty$
- Die Funktion „explodiert"
- Häufig: unterschiedliches Verhalten von links und rechts

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \text{bei } x = 3$$

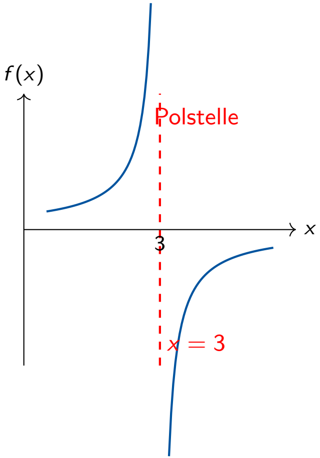
Von links ($x < 3$): $x - 3 < 0$ und strebt gegen 0

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

Von rechts ($x > 3$): $x - 3 > 0$ und strebt gegen 0

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

Polstelle: Skizze



Die Gerade $x = 3$ ist eine **senkrechte Asymptote**.

Polstelle mit gleichem Verhalten

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{bei } x = 1$$

Da das Quadrat immer positiv ist:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Wichtig!

Auch wenn man schreibt $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, existiert der Grenzwert im eigentlichen Sinne nicht! Der Ausdruck ∞ ist kein Zahlenwert, sondern beschreibt ein **bestimmtes Divergenzverhalten**.

Polstellen erkennen

Wie erkennt man Polstellen?

Bei gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$:

Regel

Eine Polstelle liegt bei $x = a$ vor, wenn:

1. Der Nenner $N(a) = 0$ ist
2. Der Zähler $Z(a) \neq 0$ ist

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$$

Polstellen bei $x = 2$ und $x = -2$ (Nenner $= 0$, Zähler $\neq 0$)

Übung: Polstellen

Aufgabe: Bestimme die Polstellen und die einseitigen Grenzwerte:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$

Sprungstelle

Charakteristik:

- Die einseitigen Grenzwerte existieren
- Sie sind aber verschieden
- Die Funktion „springt"

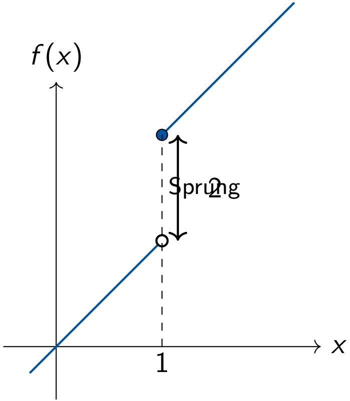
Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 1 \\ x + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $1 \neq 3$.

Sprungstelle: Skizze



Weiteres Beispiel: Sprungstelle

Die Vorzeichenfunktion (Signum):

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Bei $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = +1$$

Ergebnis

Sprungstelle bei $x = 0$ mit Sprunghöhe 2.

Stetige Funktionen

Definition:

Eine Funktion f heißt **stetig an der Stelle** a, wenn gilt:

1. $f(a)$ ist definiert
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Kurzform

Stetigkeit bedeutet: „Grenzwert $=$ Funktionswert"

Anschaulich: Man kann den Graphen ohne Absetzen des Stiftes zeichnen.

Beispiele stetiger Funktionen

Stetige Funktionen:

- Alle **Polynome** (z.B. $f(x) = x^3 - 2x + 5$)
- Alle **Exponentialfunktionen** (z.B. $f(x) = e^x$)
- Alle **trigonometrischen Funktionen** (z.B. $\sin(x), \cos(x)$)
- **Summen, Produkte** und **Kompositionen** stetiger Funktionen
- **Wurzelfunktionen** (im Definitionsbereich)
- **Logarithmusfunktionen** (im Definitionsbereich)

Wichtig

Bei stetigen Funktionen kann der Grenzwert durch direktes Einsetzen berechnet werden!

Übung: Stetigkeit prüfen

Aufgabe: Untersuche, ob die Funktionen stetig sind:

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ bei $x = 2$

b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ bei $x = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ bei $x = 0$

Tipp

Prüfe alle drei Bedingungen der Stetigkeit!

Lösung: Stetigkeit prüfen

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ **bei** $x = 2$

Polynom $\rightarrow$ überall stetig. $f(2) = 9$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$

b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ **bei** $x = 3$

$f(3)$ nicht definiert $\rightarrow$ **nicht stetig**
(Aber hebbare Lücke: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$)

c) Abschnittweise bei $x = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $f(0) = 0$
Alle Bedingungen erfüllt $\rightarrow$ **stetig** bei $x = 0$

Unbestimmte Ausdrücke

Diese Ausdrücke erfordern weitere Umformung:

- $\frac{0}{0}$ – häufigster Fall bei hebbaren Lücken
- $\frac{\infty}{\infty}$ – bei Grenzwerten im Unendlichen
- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$

Strategie: Algebraische Umformung zur Auflösung der Unbestimmtheit

Technik 1: Kürzen und Faktorisieren

Beispiel:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Direktes Einsetzen: $\frac{0}{0}$ (unbestimmt)

Umformung:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = x + 3 \quad \text{für } x \neq 3$$

$$\lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

Ergebnis

Der Grenzwert ist 6.

Technik 2: Erweitern (bei Wurzeln)

Beispiel:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Direktes Einsetzen: $\frac{0}{0}$

Umformung: Erweitern mit $(\sqrt{x} + 2)$

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Technik 3: Polynomdivision bei höheren Graden

Beispiel:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Direktes Einsetzen: $\frac{0}{0}$

Faktorisieren: - Zähler: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ - Nenner: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$$\frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$$

Jetzt einsetzen:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Übung: Grenzwert berechnen (1)

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

Übung: Grenzwert berechnen (1)

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

Lösung

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Übung: Grenzwert berechnen (2)

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

Übung: Grenzwert berechnen (2)

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

Lösung

$$\frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \to \frac{1}{6}$$

Übung: Grenzwert berechnen (3)

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$$

Übung: Grenzwert berechnen (3)

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$$

Lösung

$$\frac{x^2 + 3x}{x} = \frac{x(x+3)}{x} = x + 3 \quad \text{für } x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} (x + 3) = 3$$

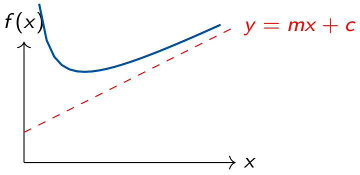
Was sind schräge Asymptoten?

Definition:

Eine Gerade $y = mx + c$ (mit $m \neq 0$) heißt **schräge Asymptote**, wenn

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + c)] = 0$$

Anschaulich: Der Abstand zwischen Graph und Gerade wird beliebig klein.



Bestimmung durch Polynomdivision

Bei gebrochenrationalen Funktionen:
Wenn Zählergrad = Nennergrad + 1, führe Polynomdivision durch.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

Polynomdivision:

$$(x^2 + 3x + 1) : (x + 1) = x + 2 + \frac{-1}{x + 1}$$

Für $x \to \infty$: $\frac{-1}{x+1} \to 0$

Ergebnis

Die schräge Asymptote ist $y = x + 2$.

Polynomdivision: Grundprinzip

Definition: Die Polynomdivision dient dazu, den Quotienten zweier Polynome zu bestimmen. Sie wird z. B. zur Bestimmung von Asymptoten oder Nullstellen verwendet.

Vorgehensweise

1. Dividiere den höchsten Term des Dividenden durch den höchsten Term des Divisors.
2. Multipliziere das Ergebnis mit dem Divisor und subtrahiere es vom Dividenden.
3. Wiederhole den Prozess mit dem neuen Rest, bis der Grad des Rests kleiner ist als der des Divisors.

Polynomdivision: Schritt-für-Schritt-Beispiel

Beispiel: $\frac{x^2+3x+1}{x+1}$

$$
\begin{array}{rl}
(x^2 + 3x + 1) : (x + 1) = x + 2 \\
-(x^2 + x) & \\
\hline
2x + 1 & \\
-(2x + 2) & \\
\hline
-1 &
\end{array}
$$

Ergebnis

$$f(x) = x + 2 + \frac{-1}{x + 1}$$

Der Restterm $\frac{-1}{x+1}$ wird für $x \to \infty$ vernachlässigbar.

Schräge Asymptote bestimmen

Aufgabe: Bestimme die schräge Asymptote von

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$$

$$\begin{array}{r}
(2x^2 + 5x + 2) : (x + 2) = 2x + 1 \\
-(2x^2 + 4x) \\
\hline
x + 2 \\
-(x + 2) \\
\hline
0
\end{array}$$

Ergebnis

Die schräge Asymptote ist:

$$y = 2x + 1$$

Da der Rest 0 ist, handelt es sich um eine exakte Division.

Wichtige Hinweise zu Asymptoten

Wichtig!

1. Eine Funktion kann **nicht gleichzeitig** eine waagerechte und eine schräge Asymptote für $x \to \infty$ haben.

2. Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ können **verschiedene Asymptoten** existieren.

3. Schräge Asymptoten treten auf, wenn Zählergrad $=$ Nennergrad $+ 1$

Übung: Schräge Asymptote

Aufgabe: Bestimme die schräge Asymptote von

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

Übung: Schräge Asymptote

Aufgabe: Bestimme die schräge Asymptote von

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

Lösung

$$f(x) = x - \frac{2}{x - 1}$$

Die schräge Asymptote ist $y = x$.
(Bei $x = 1$ liegt zusätzlich eine Polstelle!)

Zusammenfassung: Unstetigkeitsstellen

Drei Typen

1. **Hebbare Lücke:**
   - Grenzwert existiert, $f(a)$ nicht definiert
   - Kann durch Definieren von $f(a) := g$ geschlossen werden
2. **Polstelle:**
   - Funktion divergiert gegen $\pm\infty$
   - Senkrechte Asymptote bei $x = a$
3. **Sprungstelle:**
   - Einseitige Grenzwerte verschieden
   - Funktion „springt"

Zusammenfassung: Methoden

Praktische Vorgehensweisen

1. Direkte Einsetzung (bei stetigen Funktionen)
2. Unbestimmten Ausdruck identifizieren ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc.)
3. Algebraisch umformen:
   - Kürzen und Faktorisieren
   - Erweitern (bei Wurzeln)
   - Polynomdivision (bei schrägen Asymptoten)
4. Erneut einsetzen

Zusammenfassung: Asymptoten

Drei Arten von Asymptoten

- **Waagerecht:** $y = g$
  - wenn $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = g$
  - bei rationalen Funktionen: $n \leq m$
- **Schräg:** $y = mx + c$
  - Bestimmung durch Polynomdivision
  - bei rationalen Funktionen: $n = m + 1$
- **Senkrecht:** $x = a$
  - bei Polstellen

Übungsaufgaben für zu Hause (1)

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion auf Unstetigkeitsstellen:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

a) Bei welchen x-Werten ist f nicht definiert?

b) Welche Art von Unstetigkeitsstelle liegt jeweils vor?

c) Bestimme die Grenzwerte an den Unstetigkeitsstellen.

Tipp: Faktorisiere Zähler und Nenner vollständig!

Übungsaufgaben für zu Hause (2)

Aufgabe 2: Berechne die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

Übungsaufgaben für zu Hause (3)

Aufgabe 3: Bestimme alle Asymptoten der Funktion:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

a) Senkrechte Asymptoten

b) Waagerechte oder schräge Asymptoten

Tipp

- Für a): Wo ist der Nenner gleich Null?
- Für b): Vergleiche Grade, ggf. Polynomdivision durchführen!