Determinanten – Grundlagen und Rechenregeln

Was ist eine Determinante?

Definition

Eine **Determinante** ist ein Skalar, der einer quadratischen Matrix zugeordnet wird.

- Ordnet jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Zahl $\det(A)$ zu.
- Notation: $\det(A)$ oder $|A|$.
- Interpretation: Misst das *orientierte Volumen* des von den Spaltenvektoren aufgespannten Körpers.

Schreibweise

Für eine 1×1-Matrix:

$$A = [a], \quad \det(A) = a$$

Reguläre vs. singuläre Matrizen

Definition

- Eine quadratische Matrix A heißt **regulär**, wenn $\det(A) \neq 0$
- Eine quadratische Matrix A heißt **singulär**, wenn $\det(A) = 0$

Äquivalente Charakterisierungen für reguläre Matrizen

- $\det(A) \neq 0$
- A ist invertierbar (A^{-1} existiert)
- A hat vollen Rang
- Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung
- Das inhomogene LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat für jedes $\vec{b}$ genau eine Lösung

Praktische Bedeutung

Lineare Gleichungssysteme

- **Regulär:** $A\vec{x} = \vec{b}$ hat *genau eine Lösung*

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

- **Singulär:** $A\vec{x} = \vec{b}$ hat *keine oder unendlich viele Lösungen*

Geometrische Bedeutung

Anschauliche Bedeutung

- $n = 2$: Flächeninhalt des Parallelogramms.
- $n = 3$: Volumen des Parallelepipeds („Spat“).
- Vorzeichen gibt die Orientierung an.

Prüfungstipp

„Die Determinante misst das orientierte Volumen.“

Laplace-Entwicklung

Definition

- Minor M_{ij}: Determinante nach Streichen von Zeile i, Spalte j.
- Adjunkte $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Formel (Zeilenentwicklung)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Beispiel für Laplace-Entwicklung

2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) = 4 - 6 = -2$$

3x3 Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det(B) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3)$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

Spezialfälle

2x2-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

3x3-Matrix – Regel von Sarrus

- Schreibe die ersten zwei Spalten rechts dazu.
- Addiere „absteigende“ Diagonalen.
- Subtrahiere „aufsteigende“ Diagonalen.

Beispiel für die Regel von Sarrus

3x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Erweitere Matrix:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

Berechnung:

$$\det(A) = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9)$$

$$= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72)$$

$$= 225 - 225 = 0$$

Dreiecks- und Diagonalmatrizen

Definitionen

- Obere/untere Dreiecksmatrix.
- Diagonalmatrix.

Determinante

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Inverse Matrizen - Definition

Definition

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt mit:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

wobei I_n die Einheitsmatrix ist.

Wichtiger Zusammenhang

$$A \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Inverse Matrizen - Eigenschaften

Eigenschaften invertierbarer Matrizen

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Reihenfolge beachten!)
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Berechnung der Inversen - Adjunktenformel

Adjunktenformel (allgemein)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

wobei $\operatorname{adj}(A)$ die Adjunkte ist.

Adjunktenformel

Definition der Adjunkten

Die Adjunkte $\mathrm{adj}(A)$ einer Matrix A ist die Transponierte der Kofaktormatrix von A:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

wobei $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ der Kofaktor von a_{ij} ist.

Beispiel für die Adjunktenformel (3x3 Matrix)

Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel für die Adjunktenformel (3x3 Matrix)

Schritt 1: Kofaktoren berechnen - Erste Zeile

$$C_{11} = +\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = +(1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) = -24$$

$$C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) = +20$$

$$C_{13} = +\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = +(0 \cdot 6 - 1 \cdot 5) = -5$$

Zweite Zeile

$$C_{21} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -(2 \cdot 0 - 3 \cdot 6) = +18$$

$$C_{22} = +\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = +(1 \cdot 0 - 3 \cdot 5) = -15$$

$$C_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 6 - 2 \cdot 5) = +4$$

Beispiel für die Adjunktenformel (3x3 Matrix)

Schritt 1: Kofaktoren berechnen - Dritte Zeile (Fortsetzung)

$$C_{31} = +\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = +(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = +5$$

$$C_{32} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 - 3 \cdot 0) = -4$$

$$C_{33} = +\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = +(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = +1$$

Schritt 2: Kofaktormatrix

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel für die Adjunktenformel (3x3 Matrix)

Schritt 2: Kofaktormatrix aufstellen

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Adjunkte = Transponierte der Kofaktormatrix

$$\mathrm{adj}(B) = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Determinante berechnen

$$\det(B) = 1 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} + 3 \cdot C_{13} = 1 \cdot (-24) + 2 \cdot 20 + 3 \cdot (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$$

Beispiel für die Adjunktenformel (3x3 Matrix) - Ergebnis

Inverse berechnen

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \operatorname{adj}(B) = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Inversen - 2x2-Matrix

Spezialfall 2x2-Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: $\det(A) = ad - bc \neq 0$

Aufgabe 1 – Wahr oder Falsch?

Wahr oder falsch? Begründe deine Antwort.

1. Jede quadratische Matrix hat eine Determinante.
2. Die Determinante einer Matrix ist immer positiv.
3. Wenn $\det(A) = 0$, dann ist das LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ unlösbar.
4. Die Determinante einer 1×1-Matrix $[5]$ ist 5.

Aufgabe 2 – Determinanten berechnen

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 – Regel von Sarrus

Verwende die **Regel von Sarrus**, um $\det(D)$ zu berechnen:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 – Laplace-Entwicklung

Berechne $\det(E)$ durch **Laplace-Entwicklung** nach der zweiten Zeile:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 – Dreiecksmatrizen

Bestimme die Determinante der folgenden **Dreiecksmatrizen**:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 – Regulär oder Singulär?

Entscheide, ob die folgenden Matrizen **regulär** oder **singulär** sind: $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 – Theoretische Frage

Warum ist eine Matrix mit zwei identischen Zeilen immer singulär?

Aufgabe 8 – Inverse Matrizen

Bestimme (falls existent) die **Inverse** der folgenden Matrizen: $K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9 – Inverse mit Adjunktenformel

Gegeben ist die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass M invertierbar ist. Berechne M^{-1} mithilfe der **Adjunktenformel**.

Aussprache mathematischer Symbole

Determinanten und Matrizen

- $\det(A)$ – „Determinante von A"
- $|A|$ – „Determinante von A" (alternative Schreibweise)
- A^{-1} – „A inverse"
- A^T – „A transponiert"
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ – „R hoch n kreuz n"

Aussprache mathematischer Symbole

Indizes und Elemente

- a_{ij} – „a i j" oder „Element in Zeile i, Spalte j"
- M_{ij} – „M i j" oder „Minor i j"
- A_{ij} – „A i j" oder „Adjunkte i j" bzw. „Kofaktor i j"
- $\mathrm{adj}(A)$ – „Adjunkte von A"
- I_n – „I n" oder „Einheitsmatrix der Ordnung n"

Aussprache mathematischer Symbole

Summen und Produkte

- $\sum_{j=1}^{n}$ – „Summe von j gleich 1 bis n"
- $\prod_{i=1}^{n}$ – „Produkt von i gleich 1 bis n"
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ – „Summe von j gleich 1 bis n über a i j mal A i j"

Aussprache mathematischer Symbole

Vektoren und Gleichungssysteme

- $\vec{x}$ – „Vektor x" oder einfach „x"
- $\vec{b}$ – „Vektor b" oder einfach „b"
- $\vec{0}$ – „Nullvektor"
- $A\vec{x} = \vec{b}$ – „A mal x gleich b"
- $A\vec{x} = \vec{0}$ – „A mal x gleich Nullvektor"

Aussprache mathematischer Symbole

Spezielle Ausdrücke

- $(-1)^{i+j}$ – „minus eins hoch i plus j"
- $ad - bc$ – „a mal d minus b mal c"
- $\frac{1}{\det(A)}$ – „eins durch Determinante von A"
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ – „A B inverse gleich B inverse mal A inverse"

Aussprache mathematischer Symbole

Matrixformen

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – „Matrix mit a, b in der ersten Zeile und c, d in der zweiten Zeile"
- Obere Dreiecksmatrix – „alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sind null"
- Untere Dreiecksmatrix – „alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen sind null"
- Diagonalmatrix – „alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind null"