

Vektorprodukt, Spatprodukt und geometrische Anwendungen

Einführung und geometrische Motivation

Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt ist eine besondere Operation, die nur im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 definiert ist.

Grundprinzip:

$$\text{Vektor} \times \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

- Im Gegensatz zum Skalarprodukt: liefert einen **neuen Vektor**
- Geometrische Bedeutung: Resultierender Vektor steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren
- Seine Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

Definition des Vektorprodukts

Definition (Vektorprodukt/Kreuzprodukt)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im \mathbb{R}^3 . Das **Vektorprodukt** ist:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Berechnung eines Vektorprodukts

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung:

Erste Komponente: (streiche Zeile 1)

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

Zweite Komponente: (streiche Zeile 2)

$$a_3 b_1 - a_1 b_3 = (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7$$

Dritte Komponente: (streiche Zeile 3)

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 8 - 1 = 7$$

Ergebnis und Probe

Ergebnis:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Probe: Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ sollte orthogonal zu \vec{a} und \vec{b} sein:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (2, 1, -3) \cdot (14, -7, 7) \\ &= 28 - 7 - 21 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (1, 4, 2) \cdot (14, -7, 7) \\ &= 14 - 28 + 14 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Wichtige Eigenschaft

Wichtig!

Das Vektorprodukt ist **nicht kommutativ!**

Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Bei Vertauschung der Faktoren ändert sich das Vorzeichen (und damit die Richtung des Ergebnisvektors).

Parallelität und Nullvektor

Parallelitätskriterium

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann parallel (oder einer ist der Nullvektor), wenn gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Beweis: Sind \vec{a} und \vec{b} parallel, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Dann gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{a})$$

Für jede Komponente von $\vec{a} \times \vec{a}$ ergibt sich z.B. für die erste Komponente:

$$a_2 a_3 - a_3 a_2 = 0$$

Also $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.



Parallelität prüfen

Aufgabe: Prüfen Sie, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ parallel sind.

Lösung:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} (-1)(-12) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-6) - 2 \cdot (-12) \\ 2 \cdot 3 - (-1)(-6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 12 \\ -24 + 24 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Geometrische Bedeutungen

Zwei fundamentale Eigenschaften

Das Vektorprodukt verbindet Algebra und Geometrie:

[1] Orthogonalität:

Das Vektorprodukt steht senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren

[2] Betrag = Fläche:

Die Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

[1] Orthogonalität

Satz

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \quad \text{und} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$$

Anschauung: Spannen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} eine Ebene auf, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung der Normalen (Senkrechten) auf dieser Ebene.

[2] Betrag: Die Länge entspricht dem Flächeninhalt

Geometrische Bedeutung des Betrags

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

wobei φ der von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ($0 \leq \varphi \leq \pi$) ist.

Folgerung: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

Beweis-Idee: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms:

$$A = \text{Grundseite} \times \text{Höhe} = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \sin \varphi)$$

Dies entspricht genau $|\vec{a} \times \vec{b}|$.



Flächeninhalt eines Parallelogramms

Formel

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seiten \vec{a} und \vec{b} beträgt:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Flächeninhalt Parallelogramm

Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = 6$$

Der Flächeninhalt beträgt **6 Flächeneinheiten**.

Flächeninhalt eines Dreiecks

Formel

Ein Dreieck hat den halben Flächeninhalt des entsprechenden Parallelogramms:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Flächeninhalt Dreieck

Gegeben: Drei Punkte $A(1, 0, 0)$, $B(4, 2, 0)$ und $C(2, 3, 0)$.

Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

Lösung: Bestimme zwei Seitenvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5$$

Geometrische Motivation: Der Spat

Was ist ein Spat?

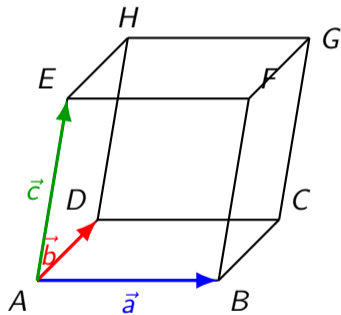
Ein **Spat** (auch **Parallelepiped** genannt) ist ein dreidimensionaler Körper, der von drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird.

Stellen Sie sich einen "schiefen Quader" vor:

- Alle gegenüberliegenden Flächen sind parallel
- Die Winkel müssen nicht rechtwinklig sein

Der Spat wird von drei Vektoren aufgespannt, die von einem gemeinsamen Punkt ausgehen.

Visualisierung eines Spats



Definition des Spatprodukts

Definition (Spatprodukt/Gemischtes Produkt)

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ drei Vektoren. Das **Spatprodukt** ist definiert als:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Das Spatprodukt ist eine **Zahl** (Skalar).

Alternative Darstellung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Berechnung des Spatprodukts

Rechenweg

Methode 1:

- 1 Berechne zunächst das Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$
- 2 Bilde dann das Skalarprodukt von \vec{a} mit dem Ergebnis

Methode 2:

- Berechne die Determinante der 3×3 -Matrix direkt nach der Regel von Sarrus

Spatprodukt berechnen (1/3)

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung (Methode 1):

Zunächst $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\begin{aligned}\vec{b} \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Spatprodukt berechnen (2/3)

Dann das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= (1, 2, 3) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= -1 + 2 + 6 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Spatprodukt berechnen (3/3)

Lösung (Methode 2 – Determinante):

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nach der Regel von Sarrus (Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0 - 1) + 3 \cdot (2 - 0)$$

$$= -1 + 2 + 6 = 7$$

Das Spatprodukt beträgt **7**.

Eigenschaften des Spatprodukts

Satz

1 Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

2 Vorzeichenwechsel bei Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

3 Komplanarität:

Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind genau dann komplanar (liegen in einer Ebene), wenn

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

Volumen eines Spats (Parallelepipeds)

Formel

Ein **Parallelepipед** ist ein vierseitiges schiefes Prisma, bei dem alle Seitenflächen Parallelogramme sind.

Das Volumen beträgt:

$$V_{\text{Spat}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Volumen eines Spats

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des Spats, der von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Lösung:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6 - 0) = 12 \end{aligned}$$

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 12$$

Das Volumen beträgt **12 Volumeneinheiten**.

Volumenformeln mit Spatprodukt

Übersicht

- **Vierseitiges schiefes Prisma (Spat):**

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- **Dreiseitiges schiefes Prisma:**

$$V = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- **Vierseitige schiefe Pyramide:**

$$V = \frac{1}{3} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- **Dreiseitige schiefe Pyramide (Tetraeder):**

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Herleitung der Volumenformeln

Dreiseitiges Prisma:

- Grundfläche ist ein Dreieck (halbes Parallelogramm)
- Daher: Faktor $\frac{1}{2}$

Vierseitige Pyramide:

- Volumen einer Pyramide = $\frac{1}{3}$ des Volumens eines Prismas
- Daher: Faktor $\frac{1}{3}$

Dreiseitige Pyramide (Tetraeder):

- Kombination: $\frac{1}{2}$ für Dreiecksgrundfläche und $\frac{1}{3}$ für Pyramide
- Daher: Faktor $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Volumen einer Pyramide

Gegeben: Vier Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ und $D(0, 0, 5)$.

Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCD$.

Lösung: Die Vektoren von A zu den anderen Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Das Spatprodukt:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Volumen einer Pyramide (Fortsetzung)

Das Volumen der dreiseitigen Pyramide (Tetraeder):

$$V = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$$

Das Volumen beträgt **10 Volumeneinheiten**.

Motivation

Verschmelzung zweier Konzepte

In der analytischen Geometrie verschmelzen zwei Konzepte zu einer eleganten Einheit:

- Punkte im Raum
- Vektoren

Diese Verbindung ermöglicht es uns:

- Geometrische Probleme rechnerisch zu lösen
- Algebraische Ausdrücke geometrisch zu interpretieren

Vom Punkt zum Vektor: Der Ortsvektor

Definition (Ortsvektor)

Sei O der Ursprung des Koordinatensystems und A ein Punkt im Raum mit den Koordinaten $A(a_1, a_2, a_3)$. Der **Ortsvektor** von A ist der Vektor, der vom Ursprung O zum Punkt A zeigt:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Konvention: Oft schreibt man einfach \vec{a} statt \overrightarrow{OA} und identifiziert den Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ mit seinem Ortsvektor.

Ortsvektor

Gegeben: Der Punkt $A(2, -3, 5)$

Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten

Satz

Seien $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ zwei Punkte. Der Vektor von A nach B ist:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Merksatz

"Spitze minus Schaft"

Der Verbindungsvektor zeigt vom ersten zum zweiten Punkt.

Verbindungsvektor

Aufgabe: Bestimmen Sie den Vektor von $A(1, 2, -1)$ nach $B(4, 0, 3)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Punkt aus Anfangspunkt und Vektor berechnen

Satz

Gegeben seien ein Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ und ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Der Punkt B , der erreicht wird, wenn man von A aus den Vektor \vec{v} abträgt, hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$$

beziehungsweise in Koordinaten:

$$B = A + \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 + v_1 \\ a_2 + v_2 \\ a_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

Punkt berechnen

Aufgabe: Von Punkt $A(2, 1, 0)$ aus wird der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ abgetragen. Bestimmen Sie Punkt B .

Lösung:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(5, -1, 5)$.

Die Mittelpunktsformel

Satz (Mittelpunkt einer Strecke)

Der Mittelpunkt M der Strecke zwischen den Punkten A und B hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

In Koordinaten:

$$M = \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \\ \frac{a_3+b_3}{2} \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation: Der Mittelpunkt liegt genau in der Mitte zwischen A und B – man bildet das arithmetische Mittel der Koordinaten.

Mittelpunkt berechnen

Aufgabe: Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(1, 3, -2)$ und $B(5, -1, 4)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Mittelpunkt ist $M(3, 1, 1)$.

Verallgemeinerung: Schwerpunkt eines Dreiecks

Schwerpunkt

Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Nachweis eines Parallelogramms (1/2)

Gegeben: Vier Punkte $A(1, 2, 0)$, $B(4, 3, 1)$, $C(5, 6, 2)$ und $D(2, 5, 1)$.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Lösung: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind, d.h. wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Berechnung der Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 6 - 5 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nachweis eines Parallelogramms (2/2)

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, sind die Seiten AB und DC parallel und gleich lang.

Prüfung der anderen Seiten:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 5 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 - 4 \\ 6 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da auch $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ist $ABCD$ ein **Parallelogramm**. ✓

Nachweis eines Rhombus (1/2)

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(3, 3, 0)$ und $D(1, 2, 0)$ einen Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm) bilden.

Lösung: Ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit allen Seiten gleich lang. Wir prüfen zunächst die Parallelogramm-Eigenschaft:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Nachweis eines Rhombus (2/2)

Nun prüfen wir, ob alle Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Da alle Seiten die Länge $\sqrt{5}$ haben, ist $ABCD$ ein **Rhombus**. ✓

Nachweis eines Rechtecks (1/2)

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(3,4,0)$ und $D(0,4,0)$ ein Rechteck bilden.

Lösung: Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel (dann sind automatisch alle Winkel rechte Winkel).

Die Parallelogramm-Eigenschaft prüft man über $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nachweis eines Rechtecks (2/2)

Prüfung der Orthogonalität (rechter Winkel):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt null ist, stehen die Seiten senkrecht aufeinander.

$ABCD$ ist ein **Rechteck**. ✓

Nachweis eines Quadrats

Aufgabe: Prüfen Sie, ob die Punkte $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$ und $D(0,2,0)$ ein Quadrat bilden.

Lösung: Ein Quadrat ist ein Rechteck mit allen Seiten gleich lang.

Aus Beispiel 3.34 wissen wir bereits, wie man ein Rechteck nachweist. Wir prüfen zusätzlich:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4} = 2, \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4} = 2$$

Alle Seiten haben die Länge 2, und die Seiten stehen orthogonal aufeinander (wie bei einem Rechteck).

$ABCD$ ist ein **Quadrat**. ✓

Gleichschenkliges Dreieck

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ und $C(2, 2, 0)$ gleichschenklig ist.

Lösung: Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 2$$

Da $|AB| = |AC| = \sqrt{5}$, ist das Dreieck **gleichschenklig** mit Basis BC . ✓

Zusammenfassung (1/2)

Vektorprodukt

- **Definition:** $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
- **Parallelität:** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
- **Geometrie:**
 - $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$
 - $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt Parallelogramm}$
- **Anwendungen:**
 - Flächeninhalt Parallelogramm: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
 - Flächeninhalt Dreieck: $A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

Zusammenfassung (2/2)

Spatprodukt

- **Definition:** $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- **Volumenformeln:**
 - Spat: $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
 - 3-seitiges Prisma: $V = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
 - 4-seitige Pyramide: $V = \frac{1}{3} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
 - 3-seitige Pyramide: $V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$