Matrizengleichungen & Rang

Gleichungen lösen und Gauß-Elimination

Studienkolleg · Rahn Education

Matrizengleichungen lösen

Grundprinzip

Wie löst man Matrizengleichungen?

Wie bei normalen Gleichungen – aber **Reihenfolge beachten!**

Links multiplizieren $\neq$ Rechts multiplizieren.

Wichtige Regeln

- $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$ (von **links** mit A^{-1})
- $XA = B \;\Rightarrow\; X = BA^{-1}$ (von **rechts** mit A^{-1})
- $AXB = C \;\Rightarrow\; X = A^{-1}CB^{-1}$

$AB \neq BA$ – deshalb ist links/rechts entscheidend!

Beispiel 1

Sammeln und Auflösen

$$\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$$

Beispiel 1

Lösung

$$\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$$

Beispiel 1

Lösung

$$\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$$

$$A^T - B + I = \frac{3}{2}X$$

Beispiel 1

Lösung

$$\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$$

$$A^T - B + I = \frac{3}{2}X$$

$$X = \frac{2}{3}(A^T - B + I)$$

Beispiel 2

Von links multiplizieren

$$AXB = I$$

Beispiel 2

Lösung

$$AXB = I$$

Beispiel 2

Lösung

$$AXB = I$$

$$XB = A^{-1} \qquad \cdot A^{-1} \text{ von links}$$

Beispiel 2

Lösung

$$AXB = I$$

$$XB = A^{-1} \qquad \cdot A^{-1} \text{ von links}$$

$$X = A^{-1}B^{-1} \qquad \cdot B^{-1} \text{ von rechts}$$

Beispiel 3

Ausklammern

$$AX = BX + I$$

Beispiel 3

Lösung

$$AX = BX + I$$

Beispiel 3

Lösung

$$AX = BX + I$$

$$AX - BX = I$$

Beispiel 3

Lösung

$$AX = BX + I$$

$$AX - BX = I$$

$$(A - B)X = I$$

Beispiel 3

Lösung

$$AX = BX + I$$

$$AX - BX = I$$

$$(A - B)X = I$$

$$X = (A - B)^{-1}$$

Beispiel 4

Ausmultiplizieren und Umformen

$$2X(A + I) = 2X + B$$

Beispiel 4

Lösung

$$2X(A + I) = 2X + B$$

Beispiel 4

Lösung

$$2X(A + I) = 2X + B$$

$$2XA + 2X = 2X + B$$

Beispiel 4

Lösung

$$2X(A+I) = 2X + B$$

$$2XA + 2X = 2X + B$$

$$2XA = B \quad \Rightarrow \quad XA = \frac{1}{2}B$$

Beispiel 4

Lösung

$$2X(A+I) = 2X + B$$

$$2XA + 2X = 2X + B$$

$$2XA = B \quad \Rightarrow \quad XA = \frac{1}{2}B$$

$$X = \frac{1}{2}BA^{-1} \qquad \cdot A^{-1} \text{ von rechts}$$

Beispiel 5

Mit Transponieren

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

Beispiel 5

Lösung

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

Beispiel 5

Lösung

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

$$X^T + A^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

Beispiel 5

Lösung

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

$$X^T + A^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

$$A^T = B^{-1} X^T$$

Beispiel 5

Lösung

$$(X + A)^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

$$X^T + A^T = (B^{-1} + I)\, X^T$$

$$A^T = B^{-1} X^T$$

$$BA^T = X^T \quad \Rightarrow \quad X = AB^T$$

Übung

Aufgabenblatt 1

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 1

1. $\frac{1}{2}X + A^T = (B - I) + 2X$
2. $A^T B(B^{-1}X + I) = A$
3. $AXB = I$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 1 (Fortsetzung)

4. $2X(A + I) = 2X + B$
5. $AX = BX + I$
6. $(X + A)^T = (B^{-1} + I)\,X^T$

Übung

Aufgabenblatt 2

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 2

1. $3X - A^T = 2(B - I) + X$
2. $AB(X + B^T) = I$
3. $XAB = I$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 2 (Fortsetzung)

4. $X(A + 2I) = AX + B$
5. $AX + X = B$
6. $(AX)^T = X^T B^T$

Rang einer Matrix

Intuition

Was ist der Rang?

Der Rang gibt an, in welche **Dimension** der Raum durch die Matrix transformiert wird.

- Rang 2 $\rightarrow$ 3D-Körper wird zu einer Fläche
- Rang 1 $\rightarrow$ 3D-Körper wird zu einer Linie

Formale Definition

Rang

Der Rang einer Matrix ist die **maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen** (oder Spalten).

Es gilt immer: Zeilenrang = Spaltenrang.

Wie bestimmt man den Rang?

$$\text{Rang} = \text{Anzahl der Nicht-Nullzeilen in der ZSF}$$

ZSF = Zeilenstufenform

Zeilenstufenform

Merkmale der ZSF

1. Nullzeilen stehen ganz unten
2. Der **Pivot** (erstes Element $\neq 0$) steht immer rechts vom Pivot der Zeile darüber

Beispiel

Rang ablesen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Rang ablesen

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 5 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{3 Nicht-Nullzeilen} \;\rightarrow\; \mathrm{Rg}(A) = 3$$

Gauß-Elimination

Ziel

Gauß-Elimination

Jede Matrix in die **Zeilenstufenform** überführen,
ohne den Rang zu verändern.

Die 3 erlaubten Operationen

- **Tauschen:** $Z_i \leftrightarrow Z_j$
- **Skalieren:** $Z_i \to c \cdot Z_i \quad (c \neq 0)$
- **Kombinieren:** $Z_i \to Z_i + c \cdot Z_j$

Die dritte Operation ist der wichtigste Schritt!

Beispiel

Rangbestimmung

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1

Nullen unter dem ersten Pivot

$$Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1$$

$$Z_3 \to Z_3 + Z_1$$

Schritt 1

Nullen unter dem ersten Pivot

$$Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1$$
$$Z_3 \to Z_3 + Z_1$$

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Schritt 2

Nullen unter dem zweiten Pivot

$$Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_2$$

Schritt 2

Nullen unter dem zweiten Pivot

$$Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis

2 Nicht-Nullzeilen $\rightarrow$ $\mathrm{Rg}(B) = 2$

Ergebnis

$$\text{2 Nicht-Nullzeilen} \;\rightarrow\; \mathrm{Rg}(B) = 2$$

Die dritte Zeile war eine Linearkombination
der ersten beiden – sie enthielt keine neue Information.

Übung

Bestimme den Rang durch Gauß-Elimination.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Übungsblätter
3×3-Matrizen

Übung

Aufgabenblatt 3

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 3

1. $2X + A^T = 3C + X + AB$
2. $AB(B^{-1}X + C) = A + B$
3. $AXB = C + B^T$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 3 (Fortsetzung)

4. $X(A + C) = X + B + A^T$
5. $AX = BX + C + A^T B$
6. $(X + A)^T = (B^T + C)\,X^T + AB$

Übung

Aufgabenblatt 4

Gegebene Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 4

1. $\frac{1}{2}X + A^T = C + \frac{3}{2}X + B^T$
2. $A^T B(X + B^T) = C + AB$
3. $XAB = C + B^T A$

Übung

Löse nach X auf.

Aufgabenblatt 4 (Fortsetzung)

4. $2X(A + C) = 2X + B + A^T$
5. $AX + X = B + A^TB$
6. $(AX)^T = X^TB^T + AB$

Aussprache mathematischer Symbole

Matrizengleichungen

- $A^T \rightarrow$ „A transponiert”
- $A^{-1} \rightarrow$ „A inverse”
- $AX = B \rightarrow$ „A mal X gleich B”
- $X^T B^T \rightarrow$ „X transponiert mal B transponiert”

Rang und Gauß

- $\mathrm{Rg}(A) \;\rightarrow\;$ „Rang von A”
- $Z_i \leftrightarrow Z_j \;\rightarrow\;$ „Zeile i tauschen mit Zeile j”
- $Z_i \rightarrow Z_i + c \cdot Z_j \;\rightarrow\;$ „Zeile i plus c mal Zeile j”
- ZSF $\rightarrow$ „Zeilenstufenform”

Klausuraufgaben

Klausuraufgabe 1

Matrizengleichungen

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Löse $AXB = I$ nach X auf und berechne X. *(8P)*

b) Löse $3X - A^T = X + B$ nach X auf und berechne X. *(6P)*

c) Löse $AX = BX + I$ nach X auf und berechne X. *(6P)*

Klausuraufgabe 2

Rangbestimmung und Interpretation

Gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Überführe M durch Gauß-Elimination in die ZSF. *(6P)*

b) Bestimme $\mathrm{Rg}(M)$. *(2P)*

c) Ist M invertierbar? Begründe. *(3P)*

d) Hat $M\vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b}$ genau eine Lösung? Begründe. *(4P)*

Klausuraufgabe 3

Matrizengleichungen mit Transponieren

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Löse $2X(A + I) = 2X + B + A^T$ nach X auf. *(5P)*

b) Berechne X. *(5P)*

c) Überprüfe dein Ergebnis durch Einsetzen. *(5P)*

Klausuraufgabe 4

Rang und Matrizengleichung

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme $\mathrm{Rg}(A)$ durch Gauß-Elimination. *(5P)*

b) Ist A invertierbar? Begründe. *(2P)*

c) Bestimme $\mathrm{Rg}(B)$ und löse $BXB = I$ nach X. *(8P)*

d) Berechne X. *(5P)*

Fragen?