

Grenzwerte von Funktionen
Teil 4: Die Regel von de L'Hospital

Das Problem: Unbestimmte Ausdrücke

Was passiert hier?

Berechne: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Direktes Einsetzen: $\frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$

Problem

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist **mathematisch nicht definiert**.

Solche Ausdrücke nennt man **unbestimmte Ausdrücke**.

Heute lernen wir: Eine systematische Methode zur Berechnung solcher Grenzwerte!

Warum ist $\frac{0}{0}$ unbestimmt?

Verschiedene Funktionen, verschiedene Ergebnisse:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

Alle drei Fälle:

- Zähler $\rightarrow 0$
- Nenner $\rightarrow 0$
- Aber: unterschiedliche Grenzwerte!

Fazit: $\frac{0}{0}$ kann jeden beliebigen Wert annehmen!

Die drei Typen unbestimmter Ausdrücke

Typ I (direkt lösbar mit L'Hospital)

- $\frac{0}{0}$ (null durch null)
- $\frac{\infty}{\infty}$ (unendlich durch unendlich)

Typ II (erst umwandeln)

- $\infty \cdot 0$ (unendlich mal null)
- $\infty - \infty$ (unendlich minus unendlich)

Typ III (erst umwandeln)

- 0^0 (null hoch null)
- ∞^0 (unendlich hoch null)
- 1^∞ (eins hoch unendlich)

Die Regel von de L'Hospital

Die Regel

Seien $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbare Funktionen.

Wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In Worten: Leite Zähler und Nenner **getrennt** ab!

Wichtige Hinweise zur Anwendung

Achtung!

- Die Regel gilt **nur** für Typ-I-Ausdrücke ($\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$)
- Leite Zähler und Nenner **getrennt** ab, nicht den ganzen Bruch!
- Die Regel kann mehrfach hintereinander angewendet werden
- **In Prüfungen:** Immer erst den Typ prüfen und dokumentieren!

Vorgehensweise: Schritt für Schritt

Schritt 1: Typ prüfen

- Grenzwerte von Zähler und Nenner separat bestimmen
- Prüfen, ob $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegt
- Dies muss dokumentiert werden!

Schritt 2: L'Hospital anwenden

- Zähler ableiten: $f(x) \rightarrow f'(x)$
- Nenner ableiten: $g(x) \rightarrow g'(x)$
- Neuen Grenzwert berechnen

Schritt 3: Falls nötig wiederholen

- Wenn erneut Typ I vorliegt \rightarrow nochmal L'Hospital

Beispiel 1: Typ $\frac{0}{0}$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Schritt 1: Typ prüfen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Es liegt Typ $\frac{0}{0}$ vor.

Schritt 2: L'Hospital anwenden

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \\ &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Typ $\frac{0}{0}$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Schritt 1: Typ prüfen

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Typ $\frac{0}{0}$ liegt vor.

Schritt 2: L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \\ &= e^0 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

ÜBUNG: Typ $\frac{0}{0}$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Tipp: Immer zuerst den Typ prüfen!

Beispiel 3: Mehrfache Anwendung

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Typ prüfen: Typ $\frac{0}{0}$

L'Hospital (1. Anwendung):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Erneut Typ prüfen: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

Wieder Typ $\frac{0}{0}$!

L'Hospital (2. Anwendung):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Auch bei diesem Typ funktioniert L'Hospital!

Beispiel 4: Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

Typ prüfen: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$ liegt vor.

L'Hospital (1. Anwendung):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Typ prüfen: Wieder $\frac{\infty}{\infty}$

L'Hospital (2. Anwendung):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Beispiel 5: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

Typ prüfen: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$
Typ $\frac{\infty}{\infty}$ liegt vor.

L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Interpretation: x wächst schneller als $\ln x$

ÜBUNG: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

Beobachtung: Was passiert bei **b)**? Wie oft musst du L'Hospital anwenden?

Typ II: $\infty \cdot 0$

Problem: L'Hospital funktioniert nicht direkt!

Lösung: Umwandeln in einen Bruch (Typ I)

Umwandlung

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{oder} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Damit erhält man Typ $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$

Beispiel 6: Typ $\infty \cdot 0$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x}$

Typ prüfen: $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$
Es liegt Typ $\infty \cdot 0$ vor (Typ II).

Umwandlung in Typ I:

$$x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

Neuer Typ: $\frac{\infty}{\infty}$ (jetzt Typ I!)

L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Beispiel 7: Typ $0 \cdot \infty$

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Typ: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Also Typ $0 \cdot \infty$.

Umwandlung:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Typ: $\frac{-\infty}{\infty}$ (Typ I)

L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ÜBUNG: Typ $\infty \cdot 0$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$

Tipp: Schreibe zuerst als Bruch um!

Typ II: $\infty - \infty$

Problem: Auch dieser Typ ist unbestimmt!

Lösung: Auf gemeinsamen Nenner bringen oder algebraisch umformen

Beispiel 8: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Typ: Beide Summanden $\rightarrow +\infty$, also Typ $\infty - \infty$

Umformung auf gemeinsamen Nenner:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

Neuer Typ: $\frac{0}{0}$ (jetzt können wir L'Hospital anwenden!)

Typ III: Potenzen (0^0 , ∞^0 , 1^∞)

Bei Ausdrücken der Form $[f(x)]^{g(x)}$:

Methode: Logarithmus verwenden

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = \exp(\lim g(x) \cdot \ln f(x))$$

Das Produkt $g(x) \cdot \ln f(x)$ ist dann vom Typ II ($\infty \cdot 0$)

Vorgehen:

- 1 Logarithmus ziehen
- 2 Produkt in Bruch umwandeln (Typ II \rightarrow Typ I)
- 3 L'Hospital anwenden
- 4 Exponentialfunktion anwenden: e^{Ergebnis}

Beispiel 9: Typ 0^0

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

Typ: 0^0 (Typ III)

Umformung:

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Berechne zunächst: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Das ist Typ $0 \cdot \infty$ (siehe Beispiel 7)

Ergebnis: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Daher:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = \mathbf{1}$$

Beispiel 10: Typ 1^∞ – Die Eulersche Zahl!

Aufgabe: Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Typ: 1^∞ (Typ III)

Setze $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, dann:

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Typ: $\frac{0}{0}$

L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Also: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^1 = e$

ÜBUNG: Typ III

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Tipp: Verwende den Logarithmus!

Häufige Fehler vermeiden!

Fehler 1: Quotientenregel verwenden

Falsch:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Richtig bei L'Hospital:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zähler und Nenner **separat** ableiten!

Häufige Fehler vermeiden! (Fortsetzung)

Fehler 2: Typ nicht prüfen

In Prüfungen muss **immer** explizit gezeigt werden, dass ein Typ-I-Ausdruck vorliegt!

Schreibe: „Es liegt Typ $\frac{0}{0}$ vor. “

Fehler 3: Zu früh aufhören

Nach der ersten Anwendung von L'Hospital prüfen:

- Ist das Ergebnis bestimmbar? → Fertig!
- Ist es wieder Typ I? → Nochmal L'Hospital!

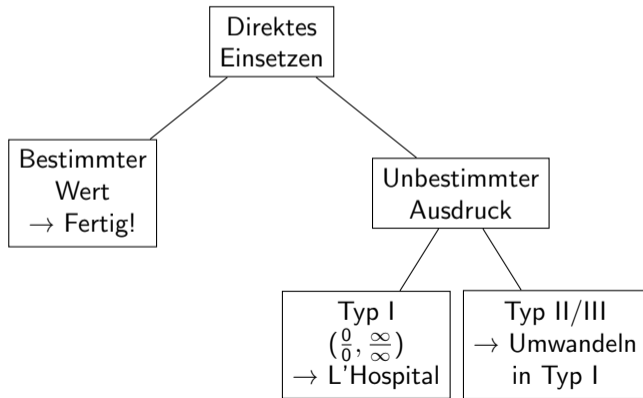
Fehler 4: Falsche Typen

L'Hospital nur bei $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ anwenden!

Nicht bei $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{1}$!

Zusammenfassung: Entscheidungsbaum

Grenzwert berechnen – Wie gehe ich vor?



Zusammenfassung: Die drei Typen

Typ I: Direkt lösbar

$$\frac{0}{0} \text{ und } \frac{\infty}{\infty}$$

→ L'Hospital direkt anwenden

Typ II: In Bruch umwandeln

$$\infty \cdot 0: \text{Schreibe als } \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$\infty - \infty$: Auf gemeinsamen Nenner bringen

Typ III: Logarithmus verwenden

$$0^0, \infty^0, 1^\infty$$

$$\rightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Wichtige Grenzwerte zum Merken

Diese Grenzwerte solltest du kennen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Hausaufgaben – Aufgabe 1

Berechne die folgenden Grenzwerte (Typ I):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{e^x}$

Hausaufgaben – Aufgabe 2

Berechne die folgenden Grenzwerte (Typ II):

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x} \right)$

Tipp für b): Erweitere mit $x + \sqrt{x^2 + x}$

Hausaufgaben – Aufgabe 3

Berechne die folgenden Grenzwerte (Typ III):

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

Hausaufgaben – Klausuraufgabe

Aufgabe 4 (Klausurstil):

Gegeben ist der Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

- a) Bestimme den Typ des unbestimmten Ausdrucks.
- b) Berechne den Grenzwert mit der Regel von L'Hospital.
- c) Wie oft musstest du L'Hospital anwenden?
- d) Was sagt das Ergebnis über das Verhalten von $\sin x$ im Vergleich zu x für kleine x aus?