Abgabeblatt 1

Es erfolgt eine Korrektur aller Lösungen, welche bis Donnerstag, den **3. Dezember 2020 um 18 Uhr** abgegeben wurden. Die Abgabe erfolgt digital im ILIAS-System. Beachten Sie, dass eine Bearbeitung der Abgabeblätter Grundlage für die **Klausurzulassung** sowie die Teilnahme am **Bonussystem** ist.

Die folgenden Personen haben an der Gruppenarbeit teilgenommen:

	Vorname	Nachname	Matr.Nr.
1. Mitglied	Jakob	Ketterer	
2. Mitglied	Maximilian	Volk	2101315
3. Mitglied			

In der folgenden Tabelle ist für jedes Mitglied anzukreuzen, an der Lösung welcher Aufgaben es beteiligt war. **Nur für diese Aufgaben erhält das jeweilige Mitglied Punkte.**

	Mitglied 1	Mitglied 2	Mitglied 3
Aufgabe 2	X	X	
Aufgabe 3	X	X	
Aufgabe 4	X	X	
Aufgabe 5	X	X	
Aufgabe 6	X	X	
Aufgabe 7	X	X	

Diese Tabelle wird im Zuge der Korrektur **vom Korrektoren-Team** ausgefüllt:

Aufgabe	Maximale Punktzahl	Erreichte Punktzahl	Unterschrift
2	2		
3	20		
4	4		
5	10		
6	10		
7	4		
Summe	**50**		

Aufgabe 1: Python und GUROBI [nicht bewertet]

- Installieren Sie
  - Git,
  - Python 3 (Anaconda Distribution),
  - GUROBI 9 und
  - das gurobipy-Paket.
- Arbeiten Sie sich in die Grundlagen von Python ein. Dies geschieht zum Beispiel im folgenden Tutorial bis zum Unterkapitel “Lambda Function”: `https://www.programiz.com/python-programming/tutorial`
- Machen Sie sich mit Jupyter Lab bzw. Jupyter Notebook oder einer anderen Entwicklungsumgebung (PyCharm, VS Code,...) vertraut.
- Versuchen Sie den Code zum Transportproblem (erhältlich im ILIAS als Jupyter Notebook) gründlich nachzuvollziehen. Hier sind einige Kontrollfragen:

  Was ist...

  a) ... ein wildcard import in Python? Warum gilt ein wildcard import als schlechter Stil?
  b) ... list comprehension? Erstellen Sie eine Liste der aller Quadratzahlen zwischen 1 und 2500.
  c) Was passiert hier? “m = Model(’netflow’)”.
  d) Machen Sie sich mit der “*-Notation” im Kontext der Summierung vertraut. Geben Sie eine äquivalente Formulierung unter Verwendung der klassischen “sum()” Funktion in Python an (`https://www.programiz.com/python-programming/methods/built-in/sum`).

Aufgabe 2: Nichtmathematische Begriffsbildung [2 Punkte]

Herr Schmidt arbeitet mit Ihnen im gleichen Unternehmen im Bereich Supply Chain Management und würde gern verstehen, worum es sich bei “Mathematischer Optimierung handelt”. Erklären Sie ihm den Begriff nichtmathematisch in eigenen Worten anhand eines kleinen Beispiels aus welchem sich der Anwendungsbezug für seinen Arbeitsbereich herleiten lässt.

A2

In der mathematischen Optimierung modelliert man reale Probleme als mathematische Probleme, die man anschließend löst. Ein mathematisches Optimierungsproblem besteht aus einer Zielfunktion, die maximiert/minimiert werden soll, wobei bestimmte Nebenbedingungen nicht verletzt werden dürfen. Im Bereich SCM wird mathematische Optimierung beispielsweise zur Standortplanung verwendet.

Ziel ist es, Produktions- und Logistikstandorte so zu verteilen, dass die Bedarfe der Kunden kostenminimal gedeckt werden. Zu berücksichtigen sind dabei z.B. Umweltschutz, Arbeits- und Transportkosten.

Die Zielfunktion wäre in diesem Fall eine Kostenfunktion, die die Arbeits- und Transportkosten einbezieht. Die Deckung der Kundenbedarfe und Einhaltung von Umweltstandards sind mögliche Nebenbedingungen.

Aufgabe 3: Lineare Umformulierungen [4 + 6 + 10 = 20 Punkte]

- Formulieren Sie äquivalente LPs der folgenden nichtlinearen Optimierungsprobleme. Geben Sie hierzu die einzelnen Umformulierungsschritte an.
- Lösen Sie die Optimierungsprobleme graphisch oder mit GUROBI, d.h. geben Sie einen Optimalpunkt sowie den Optimalwert *des nichtlinearen Originalproblems* an.
- Begründen Sie, warum das Optimierungsproblem in b) wohldefiniert ist (Hinweis: Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus)
- Die Eingangsdaten für Problem c) befinden sich in der CSV-Datei "1_3_c.csv", welche 50 Zeilen und 11 Spalten der Form

$$a_{1,1},\, a_{1,2}, \ldots, a_{1,10},\, b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{50,1},\, a_{50,2}, \ldots, a_{50,10},\, b_{50}$$

  enthält.

a)
$$\min_{x \in \mathbb{R}} \max(x, 2-2x) \quad \text{s.t.} \quad |x-3| \leq 2$$

b)
$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \ln(x+2y) \quad \text{s.t.} \quad \min(x,y) \geq 1,\ |x-y| \leq 5$$

c)
$$\min_{x \in \mathbb{R}^{10}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{50} \left| b_i - \sum_{j=1}^{10} a_{ij} x_j \right|}{50} \right)^3 \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{10} |x_i|} \leq 100$$

Aufgabe 4: Redundante Restriktionen [4 Punkte]

Konstruieren Sie eine polyedrische Menge M, sodass das zweidimensionales LP

$$P: \quad \max_{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2} x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad (x_1, x_2) \in M.$$

1. lösbar ist, einen eindeutigen Optimalpunkt $x^\star$ besitzt und
2. *eine beliebige* Restriktion aus M entfernt werden kann, ohne, dass sich der Optimalpunkt ändert.

A3

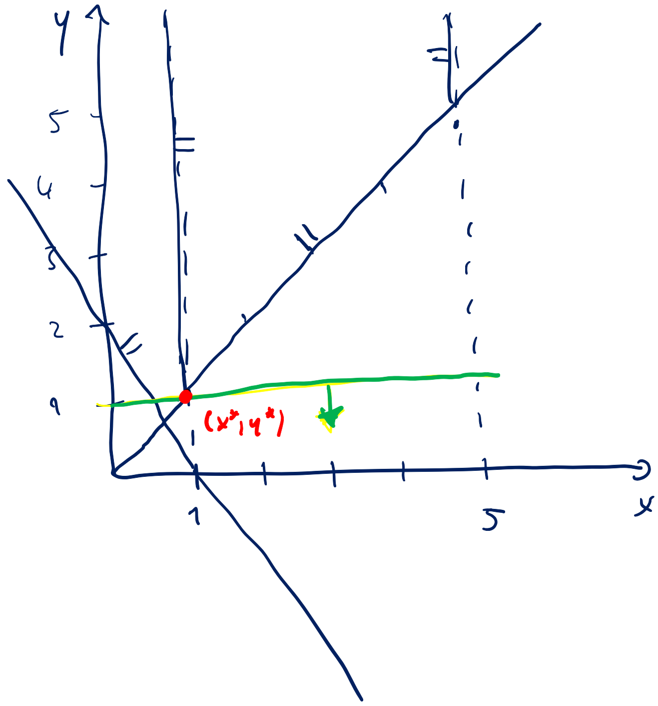
a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} \max(x, 2-2x) \quad \text{s.t.} \quad |x-3| \le 2$

"Epigraph"
$\iff \min\limits_{(y,x)\in\mathbb{R}^2} y \quad \text{s.t.} \quad x \le y, \quad 2-2x \le y, \quad |x-3| \le 2$

(Äquivalent, da $\max(x, 2-2x) \ge x$, $\max(x, 2-2x) \ge 2-2x$)

"Betrag"
$\iff \min\limits_{(y,x)\in\mathbb{R}^2} y \quad \text{s.t.} \quad x \le y, \quad 2-2x \le y, \quad x-3 \le 2, \quad -x+3 \le 2$

$$\iff \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} y \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} x - y &\le 0 \\ -2x - y &\le -2 \\ x &\le 5 \\ -x &\le -1 \end{aligned}$$



• $(x^*, y^*) = (1,1)$

Im Originalproblem: $x^* = 1$, $z^* = y^* = 1$

b) $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \ln(2x+y) \quad \text{s.t.} \quad \min(x,y) \ge 1, \quad |x-y| \le 5$

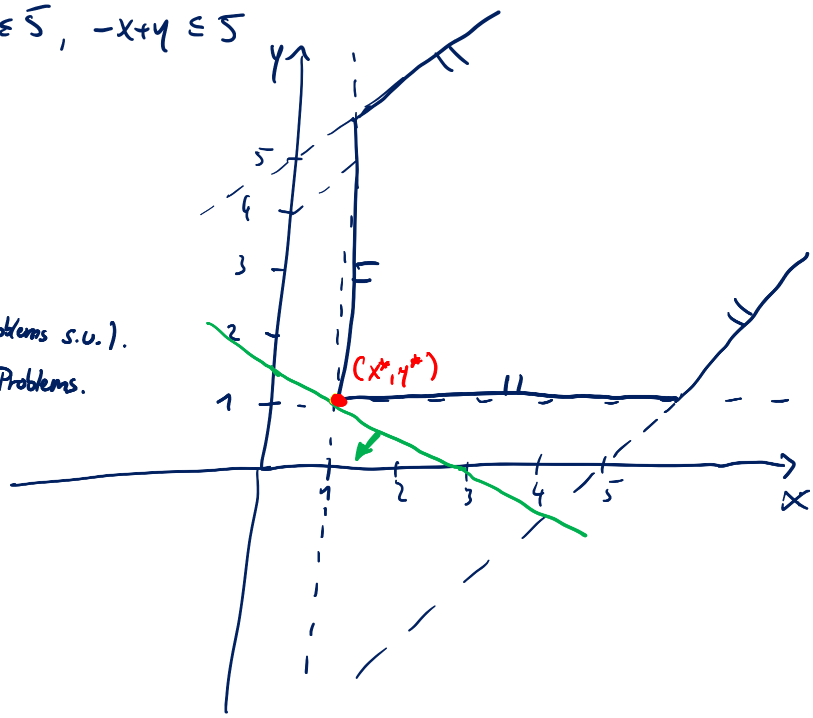
wohldefiniert: wegen $\min(x,y) \ge 1$ gilt $x,y \ge 1$ und somit $x+2y \ge 3$. Also insbesondere $x+2y > 0$. Da $(0,\infty)$ der Definitionsbereich von $\ln(x)$ ist, ist das Problem wohldefiniert

$\overset{*}{\iff} \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x+2y \quad \text{s.t.} \quad \min(x,y) \ge 1, \quad |x-y| \le 5$

$\iff \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x+2y \quad \text{s.t.} \quad x \ge 1, \quad y \ge 1, \quad |x-y| \le 5$

$\iff \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x+2y \quad \text{s.t.} \quad x \ge 1, \quad y \ge 1, \quad x-y \le 5, \quad -x+y \le 5$

$$\iff \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x+2y \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} -x &\le 1 \\ -y &\le 1 \\ x - y &\le 5 \\ -x + y &\le 5 \end{aligned}$$



• $(x^*, y^*) = (1,1)$ ist Optimalpunkt des LP. (auch des ersten Problems s.u.).

$z^* = \ln(3)$ ist also Optimalwert des ersten Problems.

$\overset{*}{\iff}$: Die Ableitung des $\ln(x)$ auf $(0,\infty)$ ist $\frac{1}{x} > 0$. Damit ist $\ln(x)$ eine streng monotone Transformation.
Mit dem Satz aus der VL folgt, dass die beiden Probleme dieselben Optimalpunkte haben.

c) $$\min_{x\in\mathbb{R}^{10}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{50}\left|b_i - \sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j\right|}{50}\right)^3 \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{\sum_{j=1}^{10}|x_j|} \le 100$$

$\overset{*}{\Leftrightarrow}$: Die Ableitung von x^3 ist $3x^2 \ge 0$. Da $3x^2 = 0$ nur für $x = 0$ gilt, ist x^3 eine streng monotone Transformation. Nach Satz aus VL stimmen die Optimalpunkte beider Probleme überein.

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} \min_{x\in\mathbb{R}^{10}} \frac{1}{50}\cdot\sum_{i=1}^{50}\left|b_i - \sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j\right| \qquad \sqrt{\sum_{j=1}^{10}|x_j|} \le 100$$

$$\Leftrightarrow \min_{x\in\mathbb{R}^{10}} \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}\left|b_i - \sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j\right| \qquad \sum_{j=1}^{10}|x_j| \le 10000$$

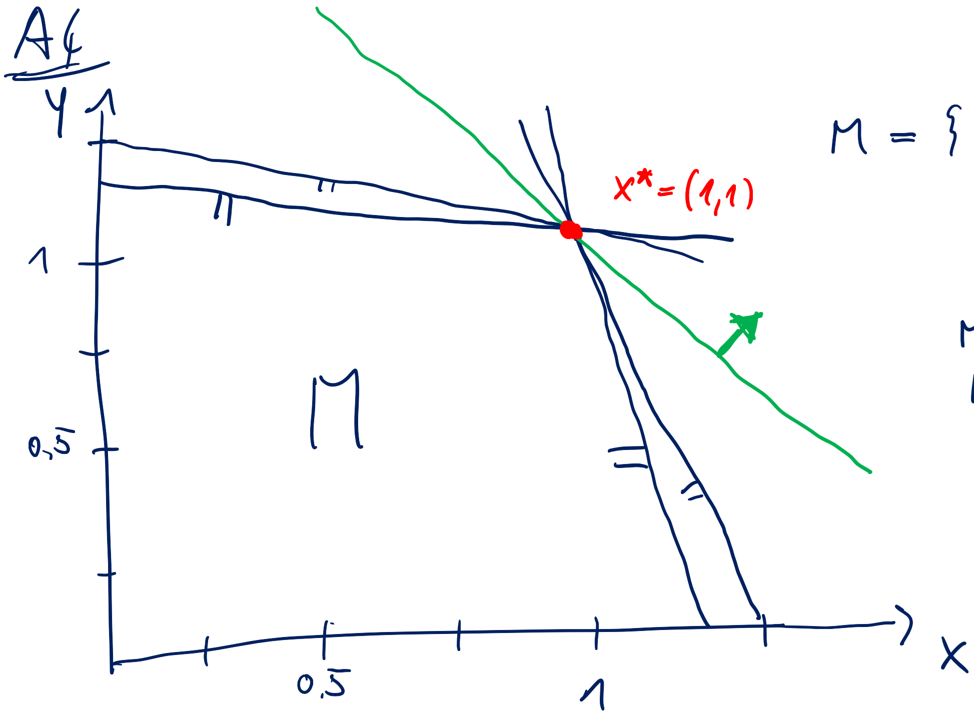
"Betrag"

$$\Leftrightarrow \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^{10}\\ \alpha\in\mathbb{R}^{50}}} \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}\alpha_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} b_i - \sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j &\le \alpha_i & i=1,\dots,50\\ -b_i + \sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j &\le \alpha_i & i=1,\dots,50\\ \sum_{j=1}^{10}|x_j| &\le 10000 \end{aligned}$$

"Betrag in Nebenbed."

$$\Leftrightarrow \min_{(x,\alpha,z)\in\mathbb{R}^{10}\times\mathbb{R}^{50}\times\mathbb{R}^{10}} \sum_{i=1}^{50}\alpha_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} -\sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j - \alpha_i &\le -b_i & i=1,\dots,50\\ \sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j - \alpha_i &\le b_i & i=1,\dots,50\\ \sum_{j=1}^{10} z_j &\le 10000 \\ x_j - z_j &\le 0 \\ -x_j - z_j &\le 0 & \text{(LP2: S.3)} \end{aligned}$$

A4



$$M = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\le 6,\\ x_1 + 4x_2 &\le 5,\\ 5x_1 + x_2 &\le 6,\\ 4x_1 + x_2 &\le 5 \end{aligned}\}$$

M ist polyedrisch, da M ein Schnitt endlich vieler Halbräume ist.

Egal welche der Restriktionen entfernt wird, bleiben je mind. 1 Restriktion übrig, deren Steigung größer und kleiner als die Zielfunktion ist.

Damit bleibt x^* unverändert.

Aufgabe 5: Median-Regression [10 Punkte]

Sie möchten ein möglichst gutes lineares Modell an einen Datensatz fitten, der starke Ausreißer enthält (s. CSV-Datei "1_5.csv"). Eine Minimierung der Fehlerquadrate ergibt eine Steigung von 79,9 und einen Intercept von 710.8. Die zugehörige lineare Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt.

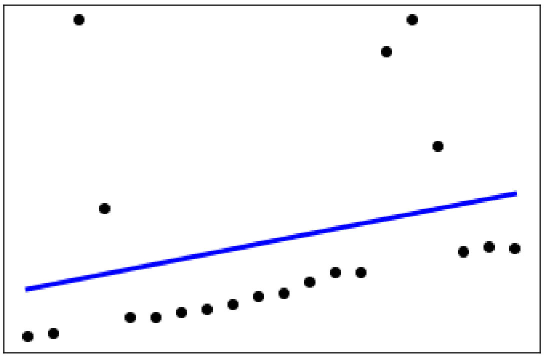


Abbildung 1: Lineares Modell, dessen Koeffizienten durch eine Minimierung der Fehlerquadrate berechnet wurde.

Führen Sie eine sogenannte Median-Regression durch, d.h. finden Sie alternative Koeffizienten des linearen Modells durch Minimierung der absoluten Abweichungen.

- Bestimmen Sie Steigung und Intercept des linearen Modells gemäß einer Median-Regression.
- Formulieren Sie hierzu das reformulierte LP und lösen Sie es mit GUROBI.
- Plotten Sie beide linearen Modelle. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 6: Klee-Minty Polytop [5 + 5 = 10 Punkte]

a) Zeichnen Sie das D-dimensionale Klee-Minty Polytop für $D \in \{1, 2, 3\}$ mit $\varepsilon = 0.25$

b) Berechnen Sie alle Ecken des vierdimensionalen Klee-Minty Polytops.

Aufgabe 7: Konvexität [2 + 2 = 4 Punkte]

Zeigen oder widerlegen Sie die Konvexität der folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2 + \sin(x_2) + x_2^2$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2 + \sin(x_2) \cdot x_2^2$

A5

Median Regression:
$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} |a^T x^i + b - y_i|$$

$$\Longleftrightarrow \min_{(\alpha,a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} a^T x^i + b - y_i \leq \alpha_i & i=1,\dots,N \\ -a^T x^i - b + y_i \leq \alpha_i & i=1,\dots,N \end{array}$$

(Epigraph-Umformulierung des Betrags, da $|x| = \max(x,-x)$.)

$$\Longleftrightarrow \min_{(\alpha,a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} a^T x^i + b - \alpha_i \leq y_i \\ -a^T x^i - b - \alpha_i \leq -y_i \end{array}$$

A7

b) $f(x) = x_1^2 + \sin(x_2)\cdot x_2^2$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \cos(x_2)\cdot x_2^2 + \sin(x_2)\cdot 2x_2 \end{pmatrix}$

$f_{22}(x) = -\sin(x_2)\cdot x_2^2 + \cos(x_2)\cdot 2x_2 + \cos(x_2)\cdot 2x_2 - 2\sin(x_2)$
$= (-2 - x_2^2)\sin(x_2) + 4x_2\cos(x_2)$

$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (-2-x_2^2)\cdot\sin(x_2) + 4x_2\cos(x_2) \end{pmatrix}$

$f(x)$ konvex $\Longleftrightarrow D^2 f(x) \succsim 0$ (pos. semidefinit) $\forall x\in\mathbb{R}^2$ (C^2-Charakterisierung)

Sei $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$. Dann gilt $D^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4\pi \end{pmatrix} \prec 0$ ($\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$)

$\cdot$ $D^2 f(x)$ negativ definit, da die Vorzeichen der Hauptminoren alternieren.
Also $\exists x\in\mathbb{R}^2$ mit $D^2 f(x) \not\succsim 0$ und f ist nicht konvex.

a) $f(x) = x_1^2 + \sin(x_2) + x_2^2$

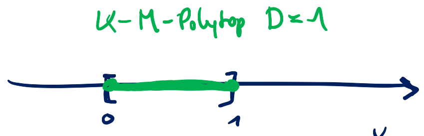
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \cos(x_2) + 2x_2 \end{pmatrix}$ $\quad D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \sin(x_2) \end{pmatrix} \succ 0$, da $\forall x_2\in\mathbb{R}$ $2 - \underbrace{\sin(x_2)}_{\leq 1} > 0$

$D^2 f(x)$ pos. definit für alle $x\in\mathbb{R}^2$, somit ist f konvex (nach C^2-Charakterisierung)

A6

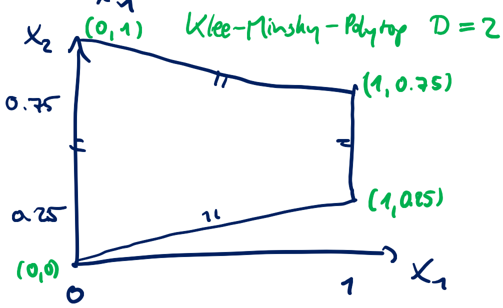
a) $\varepsilon = 0{,}25 \qquad D \in \{1,2,3\}$

$D = 1: \qquad 0 \leq x_1 \leq 1$



$D = 2: \qquad 0.25 x_1 \leq x_2 \leq 1 - 0.25 x_1$

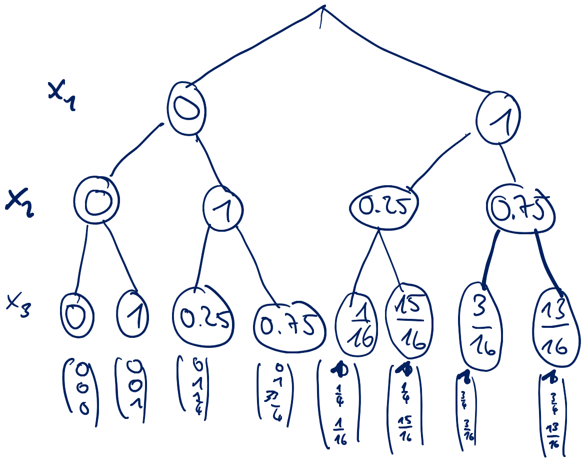
$0 \leq x_1 \leq 1$

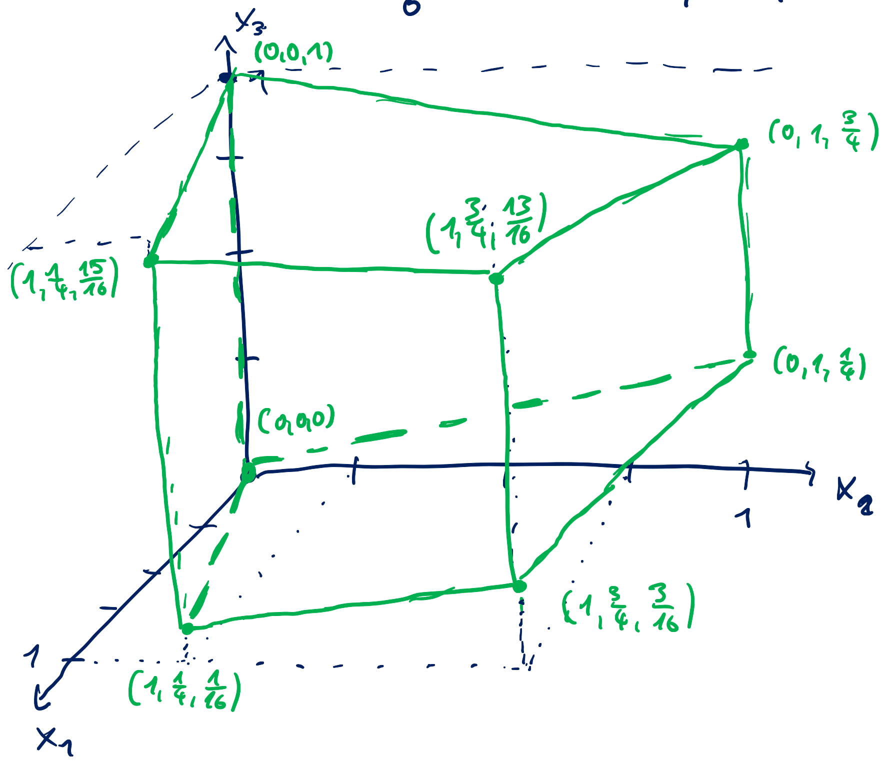


$D = 3: \qquad 0 \leq x_1 \leq 1$

$0.25 x_1 \leq x_2 \leq 1 - 0.25 x_1$

$0.25 x_2 \leq x_3 \leq 1 - 0.25 x_2$





b) Fall I: $x_1 = 0 \Rightarrow 0 \leq x_2 \leq 1$

Ecken für D=4

Fall 1: $x_2 = 0 \Rightarrow 0 \leq x_3 \leq 1$

Fall a: $x_3 = 0 \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq 1 \quad \Rightarrow (0,0,0,0)\ ,\ (0,0,0,1)$

$(0,0,0,0)\ ,\ (0,0,0,1)$

Fall b: $x_3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x_4 \leq \frac{3}{4} \quad \Rightarrow (0,0,1,\frac{1}{4})\ ,\ (0,0,1,\frac{3}{4})$

$(0,0,1,\frac{1}{4})\ ,\ (0,0,1,\frac{3}{4})$

Fall 2: $x_2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x_3 \leq \frac{3}{4}$

Fall a: $x_3 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{16} \leq x_4 \leq \frac{15}{16} \quad \Rightarrow (0,1,\frac{1}{4},\frac{1}{16})\ ,\ (0,1,\frac{1}{4},\frac{15}{16})$

$(0,1,\frac{1}{4},\frac{1}{16})\ ,\ (0,1,\frac{1}{4},\frac{15}{16})$

Fall b: $x_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{16} \leq x_4 \leq \frac{13}{16} \quad \Rightarrow (0,1,\frac{3}{4},\frac{3}{16})\ ,\ (0,1,\frac{3}{4},\frac{13}{16})$

$(0,1,\frac{3}{4},\frac{3}{16})\ ,\ (0,1,\frac{3}{4},\frac{13}{16})$

Fall II: $x_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x_2 \leq \frac{3}{4}$

Fall 1: $x_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{16} \leq x_3 \leq \frac{15}{16}$

Fall a: $x_3 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{64} \leq x_4 \leq \frac{63}{64} \quad \Rightarrow (1,\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64})\ ,\ (1,\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{63}{64})$

Fall b: $x_3 = \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{15}{64} \leq x_4 \leq \frac{49}{64} \quad \Rightarrow (1,\frac{1}{4},\frac{15}{16},\frac{15}{64})\ ,\ (1,\frac{1}{4},\frac{15}{16},\frac{49}{64})$

Fall 2: $x_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{16} \leq x_3 \leq \frac{13}{16}$

Fall a: $x_3 = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{3}{64} \leq x_4 \leq \frac{61}{64} \quad \Rightarrow (1,\frac{3}{4},\frac{3}{16},\frac{3}{64})\ ,\ (1,\frac{3}{4},\frac{3}{16},\frac{61}{64})$

Fall b: $x_3 = \frac{13}{16} \Rightarrow \frac{13}{64} \leq x_4 \leq \frac{51}{64} \quad \Rightarrow (1,\frac{3}{4},\frac{13}{16},\frac{13}{64})\ ,\ (1,\frac{3}{4},\frac{13}{16},\frac{51}{64})$