Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

на правах рукопису

Мельник Василь Сергійович

УДК 517.51

РІВНОМІРНІ ВІДСТАНІ ДО РІЗНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ КЛАСІВ ТА РОЗВИТОК ТЕОРЕМИ ГАНА ПРО ПРОМІЖНІ ФУНКЦІЇ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Науковий керівник:
Маслюченко Володимир Кирилович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Чернівці – 2 0 1 8

Анотація

Мельник В. С. Рівномірні відстані до різних функціональних класів та розвиток теореми Гана про проміжні функції. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз". — Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2018.

У **вступі** обгрунтовано актуальність досліджуваної проблеми, наведено зв‘язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. Відправною точкою нашого дослідження є результат австрійського математика Г. Гана [19] про те, що якщо $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$ – це напівнеперервні відповідно зверху і знизу функції, що задані на метричному просторі X, і такі, що $g(x) \leq h(x)$ на X, то існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Після того як Ж. Д'єдонне [20] переніс результат Гана на випадок паракомпактного простору X, Г. Тонґ [21],[22] та М. Катетов [25],[24] встановили точнішу версію цього результату, а саме, що дане твердження є характеристичним для нормальності в класі T_1-просторів. Сьогодні це твердження відоме як теорема Гана-Д‘єдонне-Тонґа-Катетова. К. Даукер [26] та М. Катетов [24] довели аналогічно теорему до теореми Гана, показавши, що T_1-простір X буде нормальним і зліченно паракомпактним тоді і тільки тоді, коли кожна строга пара Гана на X має строго проміжну неперервну функцію. Е. Майкл [15] показав, що T_1-простір X буде досконало нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана на X має строго проміжну неперервну функцію. Новий підхід до доведення цих результатів запропонували К. Ґуд і Я. Старс [16]. Математик К. Яамазакі

[17] дослідив можливість перенесення теореми Гана на функції зі значеннями у Банахових ґратках. Далі, В. Маслюченко і С. Петей довели, що для довільних зростаючий напівнеперервних зверху чи знизу відповідно функцій $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ з $g(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$ існує зростаюча неперервна проміжна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тому виникло питання про дослідження існування подібних явищ для диференційовних функцій, функцій обмеженої варіації, тощо.

Другий розділ присвячено огляду результатів дисертації.

В **третьому** розділі розглянуто пари функцій зі спеціальними властивостями та можливість існування для цих пар проміжних функцій з даними властивостями.

Ми будемо використовувати позначення:

$$Gr^{-}(g) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y < g(x)\}/$$

і

$$Gr^{+}(h) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y > h(x)\}.$$

Центральний результат підрозділу 3.1 цього розділу становить аналог теореми Гана для опуклих та вгнутих функцій, а саме, що коли E — опукла множина в дійсному векторному просторі X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E, та множини $A = Gr^{-}(g) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y < g(x)\}/$ і $B = Gr^{+}(h) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y > h(x)\}$ напівстрого відокремлюються деякою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$, існує така афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E.

Далі, використовуючи теорему Мазура, ми встановили, що для випадку X — дійсного векторного топологічного простору, $g : X \to \mathbb{R}$ — вгнутої, $h : X \to \mathbb{R}$ — опуклої, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E, і коли з множин $A = Gr^{-}g$ чи $B = Gr^{+}h$ має C-внутрішню точку в добутку $X \times \mathbb{R}$, існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Доведення цієї теореми було проведено двома способами.

Означення. Пару (g, h) напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі X, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X ми називаємо *парою Гана* на X. Якщо ж $g(x) < h(x)$ на X, то пара Гана називається *строгою.* Функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X називається *проміжною* для пари (g, h), а коли $g(x) < f(x) < h(x)$ при $g(x) < h(x)$ і $g(x) = f(x) = h(x)$ при $g(x) = h(x)$, то — *строго проміжною.*

Питання про знаходження проміжної кусково лінійної функції для строгої пари Гана на відрізку було досліджено в підрозділі 3.2 цієї дисертації. Зокрема, встановлено, що для строгої пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$ існує проміжна кусково-лінійна функція f, що проходить через задану точку (a, γ), де $g(a) < \gamma < h(a)$.

В підрозділі 3.3 цієї роботи проведено дослідження питання про існування аналогу теореми Гана для нескінченно диференційовних функцій. Зокрема, було знайдено проміжну нескінченно диференційовну функцію f для строгої пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$ таку, що проходить через задану точку (a, γ), $g(a) < \gamma < h(a)$.

Далі в підрозділі 3.4 було сконструйовано проміжну нескінченно диференційовну функцію f для строгої пари Гана (g, h) на замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$.

Теорема Нехай (g, h) — строга пара Гана на замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$. Тоді для неї існує строго проміжна диференційовна функція $f : X \to \mathbb{R}$.

Підрозділ 3.5 присвячено конструюванню диференційовних розбиттів одиниці та диференційовної проміжної функції для строгої пари Гана на гільбертових просторах. Використовуючи результат з [11, p. 49] ми сконструювали для довільного відкритого покриття гільбертового простору X локально скінченне розбиття одиниці з нескінченно диференційовних функцій, що є підпорядкованим даному покриттю. За допомогою цієї конструкції ми і будуємо проміжну нескінченно диференційовну функцію.

Теорема Нехай (g, h) — строга пара Гана на сепарабельному гільбертовому просторі просторі X. Тоді для неї існує строго проміжна диференційовна функція $f : X \to \mathbb{R}$.

В підрозділі 3.6 проведено дещо аналогічну конструкцію, тільки з використанням поняття шапочки та одного результату з [9, p. 59]. Розбиття одиниці та відповідна проміжна диференційовна функція були побудовані для строгої пари Гана, заданої на сепарабельному аспландовому просторі. Результатом є наступна теорема:

Теорема. Нехай (g, h) — строга пара Гана на сепарабельному асплундовому просторі X. Тоді для неї існує строго проміжна диференційовна функція $f : X \to \mathbb{R}$.

В **четвертому** розділі проведено дослідження аналогів теоерм Гана для многозначних відображень та нарізно неперервних функцій на добутках топологічних просторів.

У підрозділі 4.1 встановлено зв'язок між теоремою Гана та існуванням проміжної неперервної многозначної функції для многозначних напівнеперервних відповідно зверху та знизу функцій вигляду $G(x) = [g_1(x), g_2(x)]$, $H(x) = [h_1(x), h_2(x)]$ на нормальному просторі X, де $g_1, g_2, h_1, h2$ — функції на X.

Також було встановлено наступний результат:

Теорема. Нехай X — топологічний простір, (g, h) — пара Гана на X, $G(x) = (-\infty, g(x)]$ і $H(x) = (-\infty, g(x)]$, і пара Гана (G, H) має проміжну неперервну функцію $F : X \to \mathbb{R}$. Тоді пара Гана (g, h) також має проміжну неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$

У підрозділі 4.3 нами було розглянуто нарізну пару Гана на добутку T_1-просторів X та Y та встановлено, що для існування проміжної нарізнонеперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ необхідною і достатньою умовою є нормальність простору $(X \times Y, \mathcal{C})$, де $\mathcal{C}$ — хрест топологія на добутку топологічних просторів.

Означення. Нехай X і Y — топологічні простори. Множина $W \subseteq X \times Y$ називається *нарізно відкритою*, якщо для кожної точки $p = (x, y) \in W$ існують відкриті околи U та V точок x та y у просторах X та Y відповідно, такі, що $(\{x\} \times V) \cup (U \times \{y\}) \subseteq W$. Система $\mathcal{E}$, що складається з нарізно відкритих множин, утворює топологію на добутку $X \times Y$, яка називається *хрест-топологією* на $X \times Y$.

Теорема. Нехай X та Y — T_1-простори. Тоді кожна нарізна пара Гана (g, h) на добутку $X \times Y$ має проміжну нарізно неперервну функцію тоді і тільки тоді, коли простір $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ є нормальним.

Підрозділ 4.4 містить деякі результати повязані з нульовою оберненою задачею.

Теорема. Для довільного прямокутника $P = X \times Y$, де $X = [a, b]$ і $Y = [c, d]$ і кожної невід'ємної напівнеперервної знизу функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ існує така нарізно неперервна функція $f : P \to \mathbb{R}$, що $\alpha_f = \varphi$

П'ятий розділ дисертації присвячено задачі знаходження відстаней від деяких функцій до просторів функцій з деякими властивостями. Питання про знаходження рівномірної відстані $d(f, C(X))$ рівномірної відстані від довільної функції f до простору неперервних функцій $C(X)$ вперше було розглянуто в монографії [18] для паракомпактного простору X та обмеженої функції f. В підрозділі 5.1 розглянуто деякі приклади, повязані з знаходженням відстаней до простору неперервних функцій для деяких конкретних функцій першого класу Бера.

Підрозділ 5.2 присвячено доведенні формули $d(f, C(X)) = \frac{1}{2} \|\omega_g\|$ для випадку нормального простору X та довільної функції f. Для доведення цієї теореми використовується теорема Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова.

В підрозділі 5.3 розглянуто задачу знаходження відстані від функцій до простору односторонньо квазінеперервних функцій.

В підрозділі 5.4 знайдено відстань до простору квазінеперервних в точці x_0 функцій для функції f з деякими додатковими умовами на простір X та функцію f.

Означення. Нехай X і Y — топологічні простори, $D \subseteq X$, $x_0 \in \overline{D}$, $\mathcal{U}_{x_0}$ — система всіх околів точки x_0 в X і $f : D \to Y$ — відображення. Перетин $C(f, x_0) = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(U \cap D)}$ називається граничною множиною відображення

f у точці x_0.

Теорема. Нехай X — топологічний простір з першою аксіомою зліченності, x_0 — неізольована точка в X, для якої множина $\{x_0\}$ — замкнена, і $f : X \to \mathbb{R}$ — обмежена функція, для якої $D(f) \subseteq \{x_0\}$, та $\dot{f} = f|_{X \setminus \{x_0\}}$. Тоді: $d(f, K_{x_0}(X)) = \frac{1}{2}\rho(f(x_0), C(\dot{f}, x_0))$

Ключові слова: Теорема Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова, нарізно неперервні відображення, асплундові простори, квазінеперервні функції, апроксимація, паракомпактні простори, розбиття одиниці.

Список публікацій здобувача

1. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про відстань до множин квазінеперервних у точці функцій // Буковинський математичний журнал 2 (2-3). — Чернівці: 2014. — С. 154 - 161.

2. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України — Київ: Інститут математики НАН України, 2014. — №1 — Т.XI. — с.158-166.

3. Маслюченко В.К., Мельник В.С. Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій // Бук. мат. журн. — 2016. — 4,№1. — С.110-116.

4. Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Мельник В.С. Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій // Бук. мат. журн. — 2016. — 4,№2-3. — С.93-100.

5. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Мельник В.С. Пари Гана і нульова обернена задача // Мат. студії. — 2017. — **48**, №1. — С. 74-81.

6. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Побудова проміжних диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2018. — 70, № 5. — С. 672-681.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. У 1917 році відомий австрійський математик Ганс Ган встановив такий результат: якщо $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ і $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ – це напівнеперервні відповідно зверху і знизу функції, що задані на метричному просторі X, і такі, що $g(x) \leq h(x)$ на X, то існує неперервна функція $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, така, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Це твердження пізніше дістало назву "теорема про проміжну функцію". У 1944 році Ж. Д'єдонне переніс теорему Гана на випадок паракомпактних просторів. А трохи пізніше Ґ. Тонґ і М. Катетов з'ясували, що існування проміжної функції є характеристичною умовою нормальності в класі T_1-просторів.

К.Г. Даукер і М. Катетов для функцій g і h, таких, що $g(x) < h(x)$ на X цікавилися побудовую неперервної функції $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, для якої $g(x) < f(x) < h(x)$ на X. Виявляється, що для цього необхідною і достатньою умовою є нормальність і зліченна паракомпактність простору X.

Е. Майкл будував таку функцію f, що $g(x) < f(x) < h(x)$, якщо $g(x) < h(x)$, і $g(x) = f(x) = h(x)$, якщо $g(x) = h(x)$. Для цього необхідно і достатньо, щоб X був досконально нормальним.

Нові підходи до доведення цих результатів виявили К. Ґуд і Я. Старс.

Недавно у працях К. Ямазакі та інших авторів вивчалась можливість перенесення теореми Гана про проміжну функцію на випадок відображень зі значеннями у банахових ґратках. Тут були отримані як позитивні результати для сепарабельних і несепарабельних банахових ґраток, що стосується теорем Даукера-Катетова і Майкла, і ґраток l_p $(1 \leq p < \infty)$ і c_0, що стосується теореми Катетова-Тонґа, так і негативні результати щодо останньої теореми для ґратки c.

Ці дослідження ще не завершені, і актуально вивчити можливість перенесення теореми Гана про проміжну функцію на відображення зі значеннями у різних впорядкованих топологічних векторних просторах, наприклад, у просторі $C_p(T)$ всіх неперервних функцій з топологією поточкової збіжності. У цьому останньому випадку фактично йдеться про отримання теореми про проміжну функцію для нарізно неперервних функцій.

В. Маслюченко і С. Петей у 2015 році знайшли інший аналог теореми Гана про проміжну функцію: для довільних зростаючих функцій $g, h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, для яких $g(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$ і g напівнеперевврна зверху, а h – знизу, існує така зростаюча неперервна функція $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$. Цей результат відкрив нові можливості узагальнення теореми Гана, а саме, нами було досліджено, для яких ще властивостей функцій, крім їх зростання, справджується аналог теореми про проміжну функцію.

Так само актуальним є питання, чи є аналоги теореми Гана для многозначних відображень.

Все це було досліджено у третьому та четвертому розділах дисертації.

Теорема про проміжну функцію застосовується для знаходження рівномірної відстані $d(f, C(X))$ до простору $C(X)$ всіх неперервних функцій $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Це частково було зроблено ще Г. Ганом для метричного простору X. Потім Й. Бен'яміні і Й. Лінденштраусс довели, що

$$d(f, C_b(X)) = \frac{1}{2}||\omega_f||$$

де X – паракомпактний простір, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ – обмежена функція, $C_b(X)$ простір всіх обмежених неперервних функцій $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, ω_f – коливання функції f і $|| \cdot ||$ – рівномірна норма.

Втім, теорема про проміжну функцію має місце для нормальних просторів, і тому постало природне питання про рівномірну відстань $d(f, C(X))$, де $C(X)$ – простір усіх неперервних функцій $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, для нормального простору X.

В теорії функцій в XX столітті з'явилося багато аналогів неперервності– квазінеперервність, ледь неперервність, майже неперервність і т.д. Відносно кожного з цих аналогів неперервності природно постає питання про рівномірну відстань до відповідного функціонального класу. В даній роботі проведено ці дослідження, зокрема, для функції f, яка розривна лише в одній точці x_0 знайдена рівномірна відстань $d(f, K_{x_0}(X))$ до простору

$K_{x_0}(X)$ всіх квазінеперервних в точці x_0 функцій $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Все це було розглянуто у п'ятому розділі дисертації.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Тематика досліджень пов'язана з науково-дослідними програмами "Топологічні аспекти теорії функцій та регулярні оператори на банахових ґратках" (номер держ. реєстрації – 0112U002340) і "Різні класи операторів в абстрактних просторах" (номер держ. реєстрації – 0110U001560).

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є дослідження можливості знаходження проміжних функцій для різних класів функцій та різних просторів їх задання, знаходження відстаней до різних функціональних класів.

Задачами дослідження є:

- дослідження можливості перенесення результатів Гана на інші типи функцій (функції обмеженої варіації, квазінеперервні функції);

- дослідження можливості знаходження проміжних функцій для функцій зі значеннями у впорядкованих просторах;

- знаходження рівномірної відстані до функціональх класів, зокрема, класу квазінеперервних функцій в точці;

Об'єктом досліджень є проміжні функції, рівномірна відстань до різних функціональних класів і поточкові границі нарізно неперервних функцій.

Предметом дослідження є аналоги теореми Гана про проміжну функцію, знаходження рівномірної відстані до різних функціональних класів.

Методи дослідження. В дослідженні будуть застосовуватися *методи* загальної теорії функцій, загальної топології та теорії наближення функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано наступні нові наукові результати:

– досліджено питання про існування проміжної афінної функції для пари функцій (g, h), де g — вгнута, h — опукла, та $g(x) \leq h(x)$ на векторному просторі X;

– доведено існування проміжної кусково лінійної функції для пари функцій (g, h), де g — напівнеперервна зверху, h — знизу, та $g(x) < h(x)$ на відрізку;

– доведено існування проміжної нескінченно диференційовної функції для пари функцій (g, h), де g — напівнеперервна зверху, h — знизу, та $g(x) < h(x)$ на відрізку та невиродженому проміжку, такої, що проходить через задану точку;

– доведено аналог теореми Гана для функцій заданих на замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$, сепарабельних гільбертових просторах та асплундових просторах, проведено побудову диференційовних розбитів одиниці, вписаних в задані відкриті покриття;

– досліджено можливість існування аналогу теореми Гана для многозначних відображень з топологічного простору X в $\mathbb{R}$;

– досліджено умови на топологічні простори X та Y, за яких існує аналог теореми Гана для нарізно неперервних відображень;

–дослідженно зв'язок між хрест-топологією та існвання проміжної нарізно неперервної функції;

– встановлено звязок між нарізними парами Гана та так званою нульовою оберненою задачею;

– знайдено відстань від довільної функції до простору неперервних на X функцій для випадку нормального простору X;

– знайдено відстань від довільної обмежної функції до простору односторонньо квазінеперервних на X функцій;

– знайдено відстань до простору квазінеперервних в неізольованій точці x_0 функцій заданих на топологічному просторі X з першою аксіомою зліченності для довільної обмеженої функції f.

Наукове та практичне значення досліджень. Дослідження носять теоретичний характер. Їх результати можуть бути використані в теорії функцій, зокрема в теорії наближень і в функціональному аналізі.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, наведені в дисертації, отримані здобувачем особисто. Постановки задач і вказівки щодо вибору методів досліджень належать науковому керівнику В.К. Маслюченку. О.В. Маслюченку належить ідея використання результатів [18], В.В. Конаровський подав ідею доведення у пункті 4.2.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації були апробовані на міжнародних конференціях:

–“IV Міжнародна Ганська конференція” в Чернівцях [31],

–конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге [32],

–конференції пам’яті Стефана Банаха у Львові [40],

– міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування"присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця у Слов‘янську [37],

– на літній школі з еволюційного обчислення в оптимізації та дата майнингу в Ясах, Румунія [38],

– “Комплексний аналіз, теорія потенціалу та її застосування” у Києві [35],

– на Міжнародній конференції до 120-ліття з дня народження Казиміра Куратовського [34],

– на Всеукраїнських наукових конференціях “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” у Ворохті [33], [36],

– на XII Літній школі “Алгебра, топологія і аналіз” в Колочаві [39],

– на міжвузівському науковому семінарі "Прикладні задачі та IT-технології присвяченому 100-річчю з дня народження професора Василя Павловича Рубаника і 55-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій [41].

Крім того, вони неодноразово доповідалися на наукових семінарах кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівник – проф. В.К. Маслюченко) та на семінарі факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівник – проф. І.М. Черевко).

Публікації. За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 16 наукових праць, з них 5 – у наукових фахових виданнях з математики, 11 – у матеріалах і тезах конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 51. Повний обсяг роботи – 111 сторінок.

Висловлюю щиру вдячність своєму науковому керівнику Володимиру Кириловичу Маслюченку за постановку цікавих задач, корисні поради, постійну увагу та допомогу в роботі.

РОЗДІЛ 1.
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Теорема Гана про проміжну функцію.

У 1917 австрійський математик Ганс Ган опублікував [19] наступний результат. Якщо $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$ – це напівнеперервні відповідно зверху і знизу функції, що задані на метричному просторі X, і такі, що $g(x) \le h(x)$ на X, то існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Ця теорема дістала назву теореми про проміжну функцію, та була розвинута в серії праць математиків XX століття у різних напрямках.

Пару (g, h) напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі X, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X ми називаємо *парою Гана* на X. Якщо ж $g(x) < h(x)$ на X, то пара Гана називається *строгою.* Функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X називається *проміжною* для пари (g, h), а коли $g(x) < f(x) < h(x)$ при $g(x) < h(x)$ і $g(x) = f(x) = h(x)$ при $g(x) = h(x)$, то — *строго проміжною.*

1.2. Теорема Тонґа-Катетова і теорема Д'єдонне.

Після того як Ж. Д'єдонне у 1944 році [20] переніс результат Гана на випадок паракомпактного простору X, Г. Тонґ [21],[22] та М. Катетов [25],[24] встановили, що для довільного T_1-простору X існування проміжної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ для кожної пари Гана (g, h) на X є характеристичною властивістю нормальності простору X.

1.3. Теорема Даукера-Катетова і теорема Майкла.

Система підмножин $\mathcal{U}$ топологічного простору X називається відкритим покриттям простору X, якщо кожен елемент $\mathcal{U}$ є відкритою множиною, та обєднання всіх елементів $\mathcal{U}$ містить X. Покриття $\mathcal{U}$ називається зліченним, якщо воно містить зліченну кількість елементів. Якщо для двох покриттів $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ та $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ справджується, що для довільного $j \in J$ існує $i \in I$, таке, що $V_j \subseteq U_i$, то ми кажемо, що покриття $\mathcal{V}$ є вписаним в покриття $\mathcal{U}$.

Покриття $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ простору X називається локально скінченним, якщо для кожної точки x з X існує окіл U цієї точки, такий що перетинається лише зі скінченним числом елементів з $\mathcal{V}$, тобто, множина $J_{\mathcal{V}} = \{j \in J | V_j \cap U \neq \emptyset\}$. Топологічний простір X називається паракомпактним, якщо в його довільне відкрите покриття можна вписати локально скінченне відкрите покриття. Топологічний простір X називається зліченно паракомпактним, якщо в його довільне зліченне відкрите покриття можна вписати локально скінченне відкрите покриття.

К. Даукер [26] та М. Катетов [24] довели аналогічну теорему до теореми Гана, показавши, що T_1-простір X буде нормальним і зліченно паракомпактним тоді і тільки тоді, коли кожна строга пара Гана на X має строго проміжну неперервну функцію.

Топологічний простір X називається досконалим, якщо довільна замкнена множина є G_δ-множиною, тобто, вона подається у вигляді зліченного перетину відкритих множин. Топологічний простір X називається досконало нормальним, якщо він є нормальним і досконалим.

Е. Майкл [15] показав, що T_1-простір X буде досконало нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана на X має строго проміжну неперервну функцію.

1.4. Підхід Ґуда-Старса та проміжні монотонній функції.

Новий підхід до доведення цих результатів запропонували К. Ґуд і Я. Старс [16]. Доведення теореми Гана вони провели за допомогою побудови функцій $H(t) = \{x \in X : h(x) \leq t\}$ and $G(t) = \{x \in X : g(x) < t\}$, що ставлять у відповідність кожному ірраціональному числу t з відрізку $[0, 1]$ замкнену множину $H(t)$ та відкриту множину $G(t)$. Потім конструюється послідовність замкнених множин $D(r, s)$, таких, що $H(r) \subseteq D(r, s)^\circ \subseteq D(r, s) \subseteq G(s)$ для $r < s$, та множин $F(t) = \bigcap\limits_{s>t} D(t, s)$. Після цього проміжна неперервна функція визначається як $f(x) = inf\{t : x \in F(t)\}$. У праці [27] було встановлено, що для кожної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, в якій функції g і h зростають, існує проміжна зростаюча неперервна функція.

1.5. Проміжна функція зі значеннями в ґратці.

Векторний простір Y називається нетривіальним, якщо $Y \neq \{0\}$. Частково впорядкований векторний простір $(Y, \leq)$ називається векторною ґраткою, якщо виконуються наступні умови:

(i) З того, що $x \leq y$ випливає, що $x + z \leq y + z$ для всіх $x, y, z \in Y$;

(ii) З того, що $x \leq y$ випливає, що $rx \leq ry$ для всіх $x, y \in Y$ і для всіх $r \in Y$ з $r \geq 0$;

(iii) Кожна двоточкова множина $\{x, y\}$ має верхню межу $x \vee y$ і нижню межу $x \wedge y$.

Для векторної ґратки Y, підмножина $A \subseteq Y$ називається тілесною, якщо з того, що $x \in A$ і $|y| \leq |x|$ випливає, що $y \in A$, де $|z|$ визначається через $|z| = z \vee (-z)$ для кожного $z \in Y$.

Топологічний векторний простір Y називається топологічною векторною ґраткою якщо він є векторною ґраткою і локально твердою, тобто, Y містить базу 0-околів твердих множин. Нормованою векторною ґраткою

Y називається векторна ґратка з нормою $||\cdot||$ такою, що наступна умова виконується:

(iv) З $|x| \leq |y|$ випливає $||x|| \leq ||y||$ для всіх $x, y \in Y$.

Нормована векторна ґратка називається банаховою ґраткою, якщо вона є банаховим простором.

Для $y_1, y_2 \in Y$, пишемо $y_1 < y_2$ якщо $y_1 \leq y_2$ і $y_1 \neq y_2$. Підпростори $[y_1, y_2] = z \in Y : y_1 \leq z \leq y_2$ в Y , де $y_1, y_2 \in Y$ з $y_1 \leq y_2$, називаються порядковими інтервалами.

Простір X називається k — колективно нормальним, якщо для кожного дискретного набору $\mathcal{F}$ замкнених підмножин з X з $|\mathcal{F}| \leq k$ існує попарно неперетинний набір $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$ відкритих множин з X таких, що $F \in U(F)$ для кожного $F \in \mathcal{F}$.

К. Яамазакі [17] дослідив можливість перенесення теореми Гана на функції зі значеннями у Банахових ґратках. Зокрема, він встановив наступні результати. Для T_1 — простору X і нетривіальної сепарабельної Банахової ґратки Y існування строго проміжної неперервної функції $f : X \to Y$ для кожної строгої пари Гана (g, h), $g, h : X \to Y$ є характеристичною властивістю нормальності та зліченної паракомпактності простору X, а існування строго проміжної неперервної функції $f : X \to Y$ для кожної пари Гана (g, h), $g, h : X \to Y$, є характеристичною властивістю досконалої нормальності простору X.

Окрім того, для T_1 — простору X, замкненої $A \subseteq X$ і банахової ґратки Y з $\omega(Y) = k$ та такої, що кожен порядковий інтервал є компактним, існування проміжної неперервної функції $f : A \to Y$ для кожної пари Гана (g, h), $g, h : A \to Y$ є характеристичною властивістю k — колективної нормальності, існування строго проміжної неперервної функції $f : A \to Y$ для кожної строгої пари Гана (g, h), $g, h : A \to Y$ є характеристичною властивістю k — колективної нормальності та зліченної паракомпактності простору X та зліченної паракомпактності простору X, а існування строго проміжної неперервної функції $f : A \to Y$ для кожної пари Гана (g, h), $g, h : A \to Y$, є характеристичною властивістю досконалості та k — колективної нормальності простору X.

1.6. Функції першого класу Бера та рівномірна відстань до простору неперервних функцій.

Як відомо, *функція першого класу Бера* $f : X \to \mathbb{R}$, що задана на топологічному просторі X, — це поточкова границя деякої послідовності неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$. Зрозуміло, що коли f — розривна, то вона не може бути рівномірною границею неперервних функцій f_n і тому для неї *рівномірна відстань*

$$d(f, C(X)) = \inf\{||f - g|| : g \in C(X)\} > 0$$

(тут $||h|| = \sup\limits_{x \in X} |h(x)|$ і $C(X)$ - простір неперервних функцій $g : X \to \mathbb{R}$). Виникло запитання, чи не можна знайти цю відстань $d(f, C(X))$. Виявляється, що можна. Наприклад, для функції $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ відстань $d(f, C(\mathbb{R})) = 1$ і функція $g(x) = 0$ буде найближчою до f неперервною функцією, а для цілої частини $f(x) = [x]$ уже $d(f, C(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}$ і найближчою неперервною функцією буде $f(x) = x - \frac{1}{2}$.

Має місце і загальний результат: для X — нормального топологічного простору, $f : X \to \mathbb{R}$ - довільної функції і ω_f її коливання. Тоді

$$d(f, C(X)) = \frac{1}{2} ||\omega_f||,$$

причому існує така функція $g \in C(X)$, що $||f - g|| = d(f, C(X))$.

Цей результат для метризовних просторів фактично встановив Г.Ган [19], явно його не сформулювавши. Для паракомпактного простору X, обмеженої функції $f : X \to \mathbb{R}$ і простору $C_b(X)$ всіх обмежених неперервних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ рівність $d(f, C_b(X)) = \frac{1}{2}||\omega_f||$ була доведена в монографії [18]. В роботі [28] давалась оцінка для рівномірної відстані до простору неперервних функцій.

1.7. Диференційовні за Ґато і Фреше відображення.

Нехай X і Y — дійсні нормовані простори і $f : X \to Y$ — відображення. Воно називається *диференційовним за Ґато у точці* x з X, якщо існує такий лінійний неперервний оператор $A : X \to Y$, тобто елемент з простору $L(X, Y)$, що для довільного $h \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = Ah$$

Такий оператор єдиний, він називається *похідною Ґато* відображення f у точці x і ми позначимо його символом $f'_G(x)$. Відображення $f : X \to Y$ називаємо *диференційовним за Фреше у точці* x з X, якщо існує такий оператор A з $L(X, Y)$, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - Ah}{||h||} = 0.$$

І тут такий оператор визначається однозначно, він називається *похідною Фреше* відображення f у точці x і позначається символом $f'(x)$. Легко перевірити [8, p. 556], що з диференційовності за Фреше відображення f у точці x випливає його диференційовність за Ґато у точці x і рівність $f'_G(x) = f'(x)$. Диференційовні за Фреше відображення $f : X \to Y$ ми будемо називати просто *диференційовними*, що означає диференційовність за Фреше у кожній точці $x \in X$.

Добре відомо [8, p. 552], що для дійсних нормованих просторів X, Y і Z і відображень $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$ з диференційовності f у точці x і диференційовності g у точці $f(x)$ випливає диференційовність композиції $h = g \circ f$ у точці x і формула

$$h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Нас буде цікавити випадок $Y = \mathbb{R}$, тобто коли розглядаються функціонали $f : X \to \mathbb{R}$, які ми називатимемо просто функціями. Для функції $f : X \to \mathbb{R}$ її похідна $f'(x)$ у точці x — це лінійний неперервний функціонал на X, тобто елемент спряженого з X простору X^*. Якщо $X = Y = \mathbb{R}$, то співставляючи числу $a \in \mathbb{R}$ лінійне неперервне відображення $y = ax$ ми одержимо лінійну ізометрію $T : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, яка дозволяє ототожнити лінійні неперервні оператори з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ з числами з $\mathbb{R}$. Для відображень $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ під похідною $f'(x)$ прийнято розуміти число з $\mathbb{R}$, що породжує оператор $h \mapsto f'(x)h$, який є диференціалом функції f у точці x. Цей оператор і є похідною Фреше функції f у точці x.

Якщо функція $f : X \to \mathbb{R}$ диференційовна у точці x і функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовна в точці $f(x)$, то і композиція $h = g \circ f$ диференційовна в точці x, причому $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. У цій формулі число $g'(f(x))$ множиться на функціонал $f'(x)$.

В монографії [9] було встановлено наступний результат: якщо (X, p) — нормований простір з диференційовною при $x \neq 0$ нормою $p(x) = ||x||$, то $||p'(x)|| = 1$ для кожного $x \neq 0$.

РОЗДІЛ 2.
ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

2.1. Проміжні афінні функції для опуклих функцій та проміжні кусково лінійні функції.

Дослідженню питання про існування проміжної афінної функції для пари функцій (g, h), де g — вгнута, h — опукла, та $g(x) \le h(x)$ на векторному просторі X присвячено підрозділ 3.1 цієї дисертації.

З'ясовано, що для випадку, коли E — опукла множина в дійсному векторному просторі X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \le h(x)$ на E, та множини $A = Gr^{-}(g) = \{(x, y) : \text{x} \in E \quad \text{і} \quad y < g(x)\}$ і $B = Gr^{+}(h) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y > h(x)\}$ напівстрого відокремлюються деякою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$, то існує така афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на E.

Далі, використовуючи теорему Мазура, ми встановили, що для випадку дійсного векторного топологічного простору X, вгнутої і опуклої функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$ таких, що $g(x) \le h(x)$ на E, з того, що одна з множин $A = Gr^{-}g$ чи $B = Gr^{+}h$ має C-внутрішню точку в добутку $X \times \mathbb{R}$ випливає, що існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Доведення цієї теореми було проведено двома способами.

Питання про знаходження проміжної кусково лінійної функції для строгої пари Гана на відрізку було досліджено в підрозділі 3.2 цієї дисертації.

Зокрема, встановлено, що для всюди щільної множини E у просторі $C_u[a, b]$ і строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує проміжна для (g, h) функція f з множини E. З цього результату та з теореми Вейерштрасса напряму випливає існування проміжних многочленів для кожної строгої пари Гана, та з теореми Кантора випливає існування проміжної кусково-лінійної функції для кожної строгої пари Гана на відрізку $[a, b]$.

В цьому підрозділі також було дано відповідь на питання про існування такої проміжної кусково лінійної функції для строгої пари Гана (g, h), що проходить через задану точку (a, γ), де $g(a) < \gamma < h(a)$.

2.2. Проміжні диференційовні функції.

В підрозділі 3.3 цієї роботи проведено дослідження питання про існування аналогу теореми Гана для нескінченно диференційовних функцій. Зокрема, була розв‘язана задача про існування проміжної нескінченно диференційовної функції f для строгої пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$ такої, що проходить через задану точку (a, γ), $g(a) < \gamma < h(a)$. Існування проміжної нескінченно диференційовної функції без умови проходження через точку випливає з наслідку в підрозділі 3.2.

На дане питання було отримано позитивну відповідь із застосуванням так званих ланцюжків відрізків, та леми, повязаної з ними. Також встановлено, що для $I = (a, b)$ довільного інтервалу в $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, (g, h) — строгої пари Гана на I, і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$, нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(x_0) = y_0$.

Далі в підрозділі 3.4 було сконструйовано проміжну нескінченно диференційовну функцію f для строгої пари Гана (g, h) на замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$. Для цієї конструкції спочатку було доведено існування C^∞-функції φ для кожного невиродженого обмеженого відкритого паралелепіпеда $Q = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$, такої, що $\varphi(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}^n$ і $\mathrm{supp}\varphi = Q$.

Підрозділ 3.5 присвячено конструюванню диференційовних розбиттів одиниці та диференційовної проміжної функції для строгої пари Гана на гільбертових просторах. Використовуючи результат з [11, p. 49] ми сконструювали для довільного відкритого покриття гільбертового простору X локально скінченне розбиття одиниці з нескінченно диференційовних функцій, що є підпорядкованим даному покриттю. За допомогою цієї конструкції ми і будуємо проміжну нескінченно диференційовну функцію.

В підрозділі 3.6 проведено дещо аналогічну конструкцію, тільки з використанням поняття шапочки та одного результату з [9, p. 59]. Розбиття одиниці та відповідна проміжна диференційовна функція були побудовані для строгої пари Гана, заданої на сепарабельному аспландовому просторі.

2.3. Пари Гана, повязані з нарізно неперервними функціями, та многозначні пари Гана.

В підрозділі 4.1 було досліджено умови на топологічні простори X та Y, при яких для довільних многозначних відображень $G : X \to Y$ та $H : X \to Y$, таких, що $G(x) \subseteq H(x)$ для кожного $x \in X$ та G та H є відповідно напівнеперевними зверху та знизу, існує $F : X \to Y$ неперервна, така, що $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$. Для цієї задачі встановлено звязок з теоремою Гана.

В підрозділі 4.2 розвязана задача існування проміжної неперервної функції обмеженої варіації для пари Гана, що складається з функцій обмеженої варіації. Шукана проміжна функція була апроксимована кусково-лінійними функціями мінімальної довжини графіка.

Підрозділ 4.3 цієї роботи присвячено дослідженню так званих нарізних пар Гана, тобто пар (g, h) функцій заданих на добутках топологічних просторів $X \times Y$, таких, що g — нарізно напівнеперервна зверху, h — нарізно напівнеперервна знизу, та $g(x) \leq h(x)$ на $X \times Y$. Спочатку для дослідження можливості існування проміжної нарізно неперервної функції f для нарізної пари Гана було розглянуто так звану хрест-топологію $\mathcal{C}$ на добутку $X \times Y$.

В підрозділі 4.4 встановлено звязок між нарізними парами Гана та так званою нульовою оберненою задачею.

2.4. Рівномірні відстані до просторів функцій.

Питання про знаходження рівномірної відстані $d(f, C(X))$ рівномірної відстані від довільної функції f до простору неперервних функцій $C(X)$ вперше було розглянуто в монографії [18] для паракомпактного простору

X та обмеженої функції f. В підрозділі 5.1 розглянуто деякі приклади, повязані зі знаходженням відстаней до простору неперервних функцій для деяких конкретних функцій першого класу Бера.

Підрозділ 5.2 присвячено доведенні формули $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\|\omega_g\|$ для випадку нормального простору X та довільної функції f. Для доведення цієї теореми використовується теорема Гана-Д‘єдонне-Тонґа-Катетова.

В підрозділі 5.3 розглянуто задачу знаходження відстані від функцій до простору односторонньо квазінеперервних функцій.

В підрозділі 5.4 знайдено відстань до простору квазінеперервних в точці x_0 функцій для функції f з деякими додатковими умовами на простір X та функцію f. Виявляється, що в даному випадку формула повязана з граничною множиною функції $\dot{f} = f|_{X \setminus x_0}$ в точці x_0.

РОЗДІЛ 3.
ТЕОРЕМИ ПРО ПРОМІЖНУ ФУНКЦІЮ З ДОДАТКОВИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ.

3.1. Теореми про проміжну функцію для опуклих функцій.

В цьому підрозділі ми доведемо аналог теореми Гана для опуклих функцій.

Нагадаємо, що функція $f : E \to \mathbb{R}$, яка визначена на опуклій підмножині E деякого дійсного векторного простору X називається *опуклою* або *опуклою вниз*, якщо для довільних елементів x_1 і x_2 з E і будь-яких скалярів λ_1 і $\lambda_2 \geq 0$, таких, що $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, виконується нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Якщо завжди виконується протилежна нерівність $\geq$, то функція називається *вгнутою* або *опуклою вгору*. Легко перевірити, що функція $f : E \to \mathbb{R}$ буде опуклою /вгнутою/ тоді і тільки тоді, коли її *строгий надграфік*

$$Gr^+(f) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y > f(x)\}$$

/*строгий підграфік*

$$Gr^-(f) = \{(x, y) : x \in E \quad \text{і} \quad y < f(x)\}/$$

буде опуклою множиною в добутку $X \times \mathbb{R}$.

Нехай X — дійснимй векторний простір (ВП) над $\mathbb{K}$, f — ненульовий дійсний лінійний неперервний функціонал на X і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді $H_\alpha = \{\mathrm{x} \in X : f(x) = \alpha\}$ — це гіперплощина в X. Множини

$$G_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \text{ і } G^\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

називають відкритими півпросторами простору X, а множини

$$F_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \text{ і } F^\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

замкненими півпросторами.

Якщо X — це топологічний векторний простір (ТВП) і функціонал f неперервний, то відкриті /замкнені/ півпростори є відкритими /замкненими/ множинами в X, а гіперплощина H_α замкнена в X.

Кажуть, що підмножини A і B простору X *відокремлюються* гіперплощиною H_α або функціоналом f, якщо $A \subseteq F_\alpha$ і $B \subseteq F^\alpha$ або навпаки, і *строго відокремлюються* цією гіперплощиною, якщо $A \subseteq G_\alpha$ і $B \subseteq G^\alpha$ або навпаки. Підмножини A і B простору X *напівстрого відокремлюються* гіперплощиною H_α, якщо $A \subseteq F_\alpha$ і $B \subseteq G^\alpha$ або $A \subseteq G_\alpha$ і $B \subseteq F^\alpha$.

Добре відома наступна теорема про відокремлення опуклих множин [5, p. 32]

Теорема 3.1.1. *Нехай A і B — непорожні опуклі множини в ТВП X, причому множина A відкрита і $A \cap B = \varnothing$. Тоді існує лінійний неперервний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$ і число $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що $A \subseteq G_\alpha$, $B \subseteq F^\alpha$, зокрема, A і B напівстрого відокремлюються гіперплощиною $H_\alpha = f^{-1}(\alpha)$.*

Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *афінною*, якщо існує такий лінійний функціонал $\varphi : X \to \mathbb{R}$, що

$$f(x) = \varphi(x) + \gamma$$

на X для деякого числа $\gamma \in \mathbb{R}$. Афінна функція на множині E — це звуження на E деякої афінної функції на X.

Лема 3.1.1. *Нехай X — дійсний ТВП, E — множина в X з непорожньою внутрішністю, $f_0 : E \to \mathbb{R}$ — неперервна афінна функція, причому $f_0 = f|_E$, де f — афінна функція на X. Тоді і функція f неперервна.*

Доведення. Оскільки функція f афінна, то існує лінійний функціонал φ на X такий, що: $f(x) = \varphi(x) + \gamma$ на X для деякого числа $\gamma \in \mathbb{R}$. Ясно, що

$f_0 = \varphi_0 + \gamma$, де $\varphi_0 = \varphi|_E$. При цьому функція $\varphi_0 = f_0 - \gamma$ є неперервною, оскільки f_0 неперервна. За умовою існує $x_0 \in \mathrm{int} E$. Тоді існує такий окіл нуля U, що $U_{x_0} = x_0 + U \subseteq E$ і $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq 1$ як тільки $x \in U_{x_0}$. Нехай $u \in U$. Тоді $x = x_0 + u \in U_{x_0}$, а значить:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq 1.$$

Але $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0) + \varphi(u) - \varphi(x_0) = \varphi(u)$. Таким чином,

$$|\varphi(u)| \leq 1 \text{ на } U.$$

А отже, φ — неперервний функціонал. А тоді неперервним буде і функціонал $f = \varphi + \gamma$. □

Нехай X — дійсний векторний простір, тоді добуток $X \times \mathbb{R} = \{p = (x, \lambda) : x \in X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ — це теж дійсний векторний простір відносно покомпонентного додавання і множення на скаляр. Якщо X — ТВП, то і добуток $X \times \mathbb{R}$ з топологією добутку це теж ТВП.

Ми будемо використовувати наступний опис спряжених з простором $X \times \mathbb{R}$.

Лема 3.1.2. *а) Для дійсного векторного простору X функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде лінійним тоді і тільки тоді, коли існують лінійний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, такі, що*

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \gamma\lambda$$

на $X \times \mathbb{R}$.

б) Для дійсного ТВП X відображення $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде лінійним неперервним функціоналом тоді і тільки тоді, коли існують лінійний неперервний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, такі, що

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \gamma\lambda$$

на $X \times \mathbb{R}$.

Доведення. =>) Нехай $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — лінійний функціонал. Покладемо $\psi(x) = \varphi(x, 0)$ для кожного $x \in X$ і $\gamma = \psi(0, 1)$. Ясно, що $\psi : X \to \mathbb{R}$ —

лінійний функціонал, який буде неперервним, якщо φ неперервний. При цьому.

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi((x,0) + (0,\lambda)) = \varphi(x,0) + \varphi(\lambda(0,1)) = \psi(x) + \lambda\gamma.$$

<=). Перевірка очевидна. □

Теорема 3.1.2. *Нехай X — дійсний векторний простір, E — опукла множина в X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E, та множини $A = Gr^{-}(g)$ і $B = Gr^{+}(h)$ напівстрого відокремлюються деякою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$. Тоді існує така афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E.*

Доведення. Припустимо, що $E \neq \emptyset$, бо коли $E = \emptyset$, твердження тривіальне. Нехай існують лінійний функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і число $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що $\varphi(p) < \alpha$ на A і $\varphi(p) \geq \alpha$ на B. Виберемо $x_0 \in E$ і розглянемо числа $\lambda_1 = g(x_0) - 1$ і $\lambda_2 = h(x_0) + 1$. Ясно, що $\lambda_1 < g(x_0)$, а $\lambda_2 > h(x_0)$. Тому точки $p_1 = (x_0, \lambda_1)$ і $p_2 = (x_0, \lambda_2)$ належать до множин A і B відповідно. В такому разі

$$\varphi(p_1) < \alpha \leq \varphi(p_2).(*)$$

За лемою 2 існують такий лінійний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, що

$$\varphi(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma$$

для кожного $x \in X$ і довільного $\lambda \in \mathbb{R}$. Нерівність $(\star)$ переписується в еквівалентному вигляді так:

$$\psi(x_0) + \lambda_1\gamma < \alpha \leq \psi(x_0) + \lambda_2\gamma.$$

Звідси випливає, що

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\gamma > 0.$$

Але $\lambda_2 - \lambda_1 = h(x_0) + 1 - g(x_0) + 1 = 2 + h(x_0) - g(x_0) \geq 2 > 0$. Тому і $\gamma > 0$. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$ і довільну точку $x \in E$. Для чисел $\lambda = g(x) - \varepsilon$ і $\mu = h(x) + \varepsilon$, очевидно, будемо мати, що $(x,\lambda) \in A$ і $(x,\mu) \in B$. Тому

$$\varphi(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma < \alpha \text{ і } \varphi(x,\mu) = \psi(x) + \mu\gamma \geq \alpha,$$

тобто

$$\lambda\gamma < \alpha - \psi(x) \leq \mu\gamma$$

або інакше, поділивши на додатне число γ,

$$\lambda < \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi(x) \leq \mu.$$

Зрозуміло, що $f = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi$ — це афінний функціонал на просторі X, адже $\frac{1}{\gamma}\psi$ — це лінійний функціонал на X. Для f і фіксованого $x \in E$ виконується нерівність

$$g(x) - \varepsilon < f(x) \leq h(x) + \varepsilon.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Таким чином f — це шукана проміжна афінна функція. $\square$

Теорема 3.1.3. *Нехай X — дійсний векторний простір, E — опукла множина в X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E. Тоді з того що існує така афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E, випливає, що множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ строго відокремлюються деякою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай існує така афінна функція $f = \psi + \beta$, де $\psi : X \to \mathbb{R}$ — лінійний функціонал, а $\beta \in \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E.

Для довільних $(x, \lambda) \in A$ і $(x, \mu) \in B$ виконуються нерівності

$$\lambda < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \mu.$$

Зауважимо, що формулою

$$\varphi(x, \xi) = \xi - f(x),$$

де $\xi \in \mathbb{R}$ і $x \in X$, визначається деяка афінна функція на просторі $X \times \mathbb{R}$. Справді

$$\varphi(x, \xi) = \xi - \psi(x) - \beta,$$

а $\varphi_0(x,\xi) = \xi - \psi(x)$ — це лінійний функціонал на $X \times \mathbb{R}$. Для цього функціонала будемо мати, що

$$\varphi(x,\lambda) = \lambda - f(x) < 0 \text{ на } A$$

і

$$\varphi(x,\mu) = \mu - f(x) > 0 \text{ на } B.$$

Звідси негайно випливає, що множини A і B строго відокремлюються гіперплощиною в $X \times \mathbb{R}$. □

Теорема 3.1.4. *Нехай X — топологічний векторний простір, E — опукла множина в X з непорожньою внутрішністю, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E та множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ напівстрого відокремлюються деякою замкненою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$. Тоді існує така неперервна афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E.*

Доведення. Нехай існують лінійний неперервний функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і число $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що $\varphi(p) < \alpha$ на A і $\varphi(p) \geq \alpha$ на B. Виберемо $x_0 \in E$, і розглянемо числа $\lambda_1 = g(x_0) - 1$ і $\lambda_2 = h(x_0) + 1$. Ясно, що $\lambda_1 < g(x_0)$, а $\lambda_2 > h(x_0)$. Тому точки $p_1 = (x_0, \lambda_1)$ і $p_2 = (x_0, \lambda_2)$ належать до множин A і B відповідно. В такому разі

$$\varphi(p_1) < \alpha \leq \varphi(p_2).$$

За лемою 2 існують такий лінійний неперервний функціонал $\psi : X \to \mathbb{R}$ і число $\gamma \in \mathbb{R}$, що

$$\varphi(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma$$

для кожного $x \in X$ і довільного $\lambda \in \mathbb{R}$. Нерівність (*) переписується в еквівалентному вигляді так:

$$\psi(x_0) + \lambda_1\gamma < \alpha \leq \psi(x_0) + \lambda_2\gamma.$$

Звідси випливає, що

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\gamma > 0.$$

Але $\lambda_2 - \lambda_1 = h(x_0) + 1 - g(x_0) + 1 = 2 + h(x_0) - g(x_0) \geq 2 > 0$. Тому і $\gamma > 0$.

Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$ і довільну точку $x \in E$. Для чисел $\lambda = g(x) - \varepsilon$ і $\mu = h(x) + \varepsilon$, очевидно, будемо мати, що $(x, \lambda) \in A$ і $(x, \mu) \in B$. Тому

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma < \alpha \text{ і } \varphi(x, \mu) = \psi(x) + \mu\gamma \geq \alpha,$$

тобто

$$\lambda\gamma < \alpha - \psi(x) \leq \mu\gamma$$

або інакше, поділивши на додатне число γ,

$$\lambda < \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi(x) < \mu.$$

Зрозуміло, що $f = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi$ — це афінний неперервний функціонал на просторі X, адже $\frac{1}{\gamma}\psi$ — це лінійний неперервний функціонал на X. Для f і фіксованого $x \in E$ виконується нерівність

$$g(x) - \varepsilon < f(x) \leq h(x) + \varepsilon.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Таким чином f — це шукана проміжна афінна неперервна функція. □

Теорема 3.1.5. *Нехай X — топологічний векторний простір, E — опукла множина в X з непорожньою внутрішністю, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута і $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функції, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E. Тоді з того, що існує така неперервна афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E, випливає, що множини $A = Gr^-(g)$ і $B = Gr^+(h)$ строго відокремлюються деякою замкненою гіперплощиною в добутку $X \times \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай існує така неперервна на E афінна функція $f = \psi + \beta$, де $\psi : X \to \mathbb{R}$ — неперервний на E лінійний функціонал, а $\beta \in \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на E. Згідно з лемою 1, функціонали f та φ будуть неперервними на всьому X.

Для довільних $(x, \lambda) \in A$ і $(x, \mu) \in B$ виконуються нерівності

$$\lambda < g(x) \le f(x) \le h(x) < \mu.$$

Зауважимо, що формулою

$$\varphi(x, \xi) = \xi - f(x),$$

де $\xi \in \mathbb{R}$ і $x \in X$, визначається деяка афінна функція на просторі $E \times \mathbb{R}$. Справді

$$\varphi(x, \xi) = \xi - \psi(x) - \beta,$$

а $\varphi_0(x, \xi) = \xi - \psi(x)$ — це лінійний неперервний функціонал на $X \times \mathbb{R}$. Для цього функціонала будемо мати, що

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda - f(x) < 0 \text{ на } A$$

і

$$\varphi(x, \mu) = \mu - f(x) > 0 \text{ на } B.$$

Звідси негайно випливає, що множини A і B строго відокремлюються замкненою гіперплощиною в $X \times \mathbb{R}$. $\square$

Теорема 3.1.6. *Нехай E — відкрита опукла множина в дійсному топологічному векторному просторі X, $g : E \to \mathbb{R}$ — вгнута функція, $h : E \to \mathbb{R}$ — опукла функція, такі, що $g(x) \le h(x)$ на E, і одна з функцій g чи h неперервна. Тоді існує така неперервна афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на E.*

Доведення. Нехай функція g неперервна. Підграфік $G = \{(x; \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \lambda < g(x)\}$ вгнутої неперервної функції g — це відкрита опукла множина в добутку $P = X \times \mathbb{R}$, а надграфік $H = \{(x; \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \lambda > h(x)\}$ це опукла підмножина в P і $G \cap H = \emptyset$.

За теоремою 3.1.1 існує такий лінійний неперервний функціонал $\varphi : P \to \mathbb{R}$, що $G \subseteq G_\alpha = \{(x; \lambda) : \varphi(x; \lambda) < \alpha\}$ і $H \subseteq F^\alpha = \{(x; \lambda) : \varphi(x; \lambda) \ge \alpha\}$. А отже, G та H напівстрого відокремлюються замкненою гіперплощиною $\varphi^{-1}(\alpha)$. Таким чином, за 3.1.4, існує така неперервна афінна функція $f : E \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на E. $\square$

У першій частині відомого твору "Лінійні оператори"[6, p. 446] подано теорему про відокремлення опуклих множин, яка використовувала поняття C-внутрішньої точки. Ми дамо тут своє доведення цієї теореми подібне до доведення теореми Мазура [5, p. 23].

Нехай X — векторний простір над $\mathbb{R}$ і $M \subseteq X$. Тоді p називається *C-внутрішньою точкою* в M, якщо для довільного $x \in X$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що з того, що $|\delta| \leq \varepsilon$ випливає, що $p + \delta x \in M$.

Лема 3.1.3. *Нехай X — векторний простір над $\mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ — опукла підмножина X, $0 \notin A$, a — C-внутрішня точка в A. Тоді існує лінійний функціонал $\varphi : X \to \mathbb{R}$, такий, що $\varphi(x) \geq 0$ на A.*

Доведення. Розглянемо $U = A - a$. Оскільки U — радіальна, розглянемо $p(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda U\}$ — функціонал Міньковського. Оскільки U-опукла, то з того, що $x \in \lambda U$, $x \in \mu U$, для $\lambda, \mu \geq 0$ випливає, що $x + y \in \lambda U + \mu U = (\lambda + \mu)U$, а отже, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. Окрім того, для функціонала Мінковського справедливою є рівність $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ при $\lambda \geq 0$.

Очевидно, що $\{x : p(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x : p(x) \leq 1\}$, а отже, $\{x : p(x - a) < 1\} \subseteq A = \{x : x - a \in U\} \subseteq \{x : p(x - a) \leq 1\}$. Розглянемо $X_0 = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ лінійний підпростір X, і визначимо на ньому лінійний функціонал $f_0(\lambda a) = -\lambda$, ядром якого точка $\{0\}$.

Доведемо, що $f_0(x) \leq p(x)$ на X_0. Нехай $x_0 \in X_0$, $x_0 = \lambda a$. Розглянемо випадок, коли $\lambda \geq 0$, тоді $f_0(x_0) = -\lambda \leq 0$, а $p(x_0) \geq 0$, а отже, $f_0(x_0) \leq p(x_0)$. Розглянемо тепер випадок, коли $\lambda < 0$. Оскільки $0 \notin A$, то $p(-a) \geq 1$, а отже, $f_0(x_0) = -\lambda \leq -\lambda p(-a) = p(\lambda a) = p(x_0)$. Таким чином, $f_0(x_0) \leq p(x_0)$ всюди на X_0.

З аналітичної форми теореми Гана-Банаха випливає, що існує лінійний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$, такий, що $f|_{X_0} = f_0$ і $f(x) \leq p(x)$ всюди на X. Нехай $x \in A$. Тоді $p(x - a) \leq 1$, а отже, оскільки $f(x - a) \leq p(x - a)$, то $f(x-a) = f(x) - f(a) \leq 1$, а отже, $f(x) \leq 1 + f(a) = 1 + f_0(a) = 1 - 1 = 0$. Таким чином, $f(x) \leq 0$ всюди на A. Поклавши $\varphi(x) = -f(x)$, отримуємо шуканий лінійний функціонал на X. $\square$

Теорема 3.1.7. *Нехай A і B — диз'юнктні опуклі підмножини дійсного ВП X, причому A має C-внутрішню точку, а $B \neq \emptyset$. Тоді існує ненульовий лінійний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$, що відокремлює A від B.*

Доведення. Позначимо $C = A - B$. Нехай a — C-внутрішня точка в A. Тоді для довільного $x \in X$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного $\delta > 0$ з того, що $|\delta| < \varepsilon$ випливає, що $(a + \delta x) \in A$, а отже, для довільного $y \in B$ відповідно $a + \delta x - y \in A - B = C$, а отже, точка $a - y = c$ є C-внутрішньою для множини C.

Очевидно, що $0 \notin C$, інакше існувала б така точка x, що належала б і A, і B. Згідно з 3.1.3, існує лінійний функціонал $\varphi : X \to \mathbb{R}$, такий, що $\varphi(x) \geq 0$ при $x \in C$.

Таким чином, для довільних $x \in A$ та $y \in B$:

$$\varphi(x) \geq \varphi(y)$$

а отже,

$$\inf\{\varphi(x) : x \in A\} = \gamma \geq \beta = \sup\{\varphi(y) : y \in B\}.$$

Оскільки $\gamma \geq \beta$, то можна вибрати $\alpha \in \mathbb{R}$, таке, що $\gamma \geq \alpha \geq \beta$. Таким чином, гіперплощина $\varphi^{-1}(\alpha)$ розділяє опуклі множини A та B. $\square$

Теорема 3.1.8. *Нехай X — дійсний векторний топологічний простір, $g : X \to \mathbb{R}$ — вгнута функція, $h : X \to \mathbb{R}$ — опукла функція, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на E, і одна з множин $A = Gr^{-}g$ чи $B = Gr^{+}h$ має C-внутрішню точку в добутку $X \times \mathbb{R}$. Тоді існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.*

Доведення. <u>I спосіб.</u>

Нехай $A = Gr^{-}g$ має C-внутрішню точку. За 3.1.7, існують лінійний функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $\alpha \in \mathbb{R}$, такі, що гіперплощина $\varphi^{-1}(\alpha)$ відокремлює A і B.

Нехай $A \cap H_\alpha \neq \emptyset$ та $B \cap H_\alpha \neq \emptyset$. Виберемо відповідно $a = (x_1, \lambda) \in A \cap H_\alpha$ та $b = (x_2, \mu) \in B \cap H_\alpha$. Тоді $g(x_1) > \lambda$ та $h(x_2) < \mu$ і

$$\varphi(a) = \psi(x_1) + \lambda\gamma = \alpha = \psi(x_2) + \mu\gamma = \varphi(b).$$

Розглянемо точки $a_1 = (x_1, \frac{\lambda+g(x_1)}{2})$ та $b_1 = (x_2, \frac{\lambda+h(x_2)}{2})$. Нехай $\gamma > 0$. Тоді:

$$\varphi(a_1) = \psi(x_1) + \frac{\lambda + g(x_1)}{2}\gamma > \psi(x_1) + \lambda\gamma = \alpha.$$

Але, розглянувши значення φ в точці $a_2 = (x_1, \lambda - 1)$, маємо:

$$\varphi(a_1) = \psi(x_1) + (\lambda - 1)\gamma < \psi(x_1) + \lambda\gamma = \alpha.$$

Ми отримали, що гіперплощина $\varphi^{-1}(\alpha)$ не відокремлює A та B — суперечність.

Нехай тепер $\gamma < 0$. Тоді:

$$\varphi(b_1) = \psi(x_2) + \frac{\mu + h(x_2)}{2}\gamma > \psi(x_2) + \mu\gamma = \alpha.$$

Але, розглянувши значення φ в точці $b_2 = (x_2, \mu + 1$, маємо:

$$\varphi(b_2) = \psi(x_2) + (\mu + 1)\gamma < \psi(x_2) + \mu\gamma = \alpha.$$

Ми знову ж таки отримали суперечність.

Розглянемо тепер випадок, коли $\gamma = 0$. Тоді для довільних $x \in X$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ маємо, що $\varphi(x, \lambda) = \psi(x)$. Нехай $A \subseteq F_\alpha$. Оскільки $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ненульовий, то існує $x_0 \in X$ така, що

$$\varphi(x_0, \lambda) = \psi(x_0) > \alpha$$

для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$. А отже, $\varphi(x_0, g(x_0)-1) > \alpha$. Але $(x_0, g(x_0)-1) \in A \subseteq F_\alpha$ — ми отримали суперечність. Таким чином, $\gamma \neq 0$ та або $A \cap H_\alpha = \varnothing$, або $B \cap H_\alpha = \varnothing$.

Нехай $A \cap H_\alpha = \varnothing$, $A \subseteq G_\alpha$. Виберемо точку $x_0 \in X$, і розглянемо числа $\lambda_1 = g(x_0) - 1$ і $\lambda_2 = h(x_0) + 1$. Ясно, що $\lambda_1 < g(x_0)$ та $\lambda_2 > h(x_0)$, а тому, точки $p_1 = (x_0, \lambda_1)$ і $p_2 = (x_0, \lambda_2)$ належать до A та B відповідно. В такому разі:

$$\psi(x_0) + \lambda_1\gamma = \varphi(p_1) < \alpha \leq \varphi(p_2) = \psi(x_0) + \lambda_2\gamma.$$

Звідси випливає, що $(\lambda_2 - \lambda_1)\gamma > 0$. Але $\lambda_2 - \lambda_1 = h(x_0) + 1 - g(x_0) + 1 = 2 + h(x_0) - g(x_0) \geq 2 > 0$. Тому і $\gamma > 0$.

Розглянемо $\varepsilon > 0$ і довільну точку $x \in X$. Для чисел $\lambda = g(x) - \varepsilon$ і $\mu = h(x) + \varepsilon$ очевидно будемо мати, що $(x, \lambda) \in A$ і $(x, \mu) \in B$. Тому:

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma < \alpha \text{ і } \varphi(x, \mu) = \psi(x) + \mu\gamma > \alpha,$$

тобто $\lambda\gamma < \alpha - \psi(x) < \mu\gamma$. Поділивши на додатне число γ, отримаємо:

$$\lambda < \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi(x) < \mu$$

Зрозуміло, що $f = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi$ — це афінний функціонал на просторі X, адже $\frac{1}{\gamma}\psi$ — це лінійний функціонал на X. Для f і фіксованого $x \in X$ виконується нерівність:

$$g(x) - \varepsilon < f(x) < h(x) + \varepsilon$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$, ми отримуємо, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Таким чином, f — це шукана проміжна афінна функція на X.

<u>II спосіб.</u> За 3.1.7, існує лінійний неперервний функціонал $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $\alpha \in \mathbb{R}$ такі, що гіперплощина $\varphi^{-1}(\alpha)$ нестрого відокремлює A і B. Нехай $A \cap G_\alpha = \emptyset$. Тоді $A \subseteq H_\alpha$. Виберемо точку $x_0 \in X$ та розглянемо $p_0 = (x_0, g(x_0) - 1) \in A = Gr^-(g)$, $p_0 \in H_\alpha$. Окрім того, розглянемо точку $p = (x_0, g(x_0) - 2) \in A = Gr^-(g) \subseteq H_\alpha$. Оскільки $p_0 \in H_\alpha$ та $p \in H_\alpha$, маємо, що:

$$\varphi(p_0) = \psi(x_0) + \gamma(g(x_0) - 1) = \alpha = \psi(x_0) + \gamma(g(x_0) - 2).$$

Звідси отримаємо, що $\gamma = 0$, а отже, для довільних $x \in X$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ маємо, що $\varphi(x, \lambda) = \psi(x)$. Оскільки $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ненульовий, то існує $x \in X$ така, що

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) > \alpha$$

для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$. А отже, $\varphi(x, g(x) - 1) > \alpha$. Але $(x, g(x) - 1) \in A \subseteq F_\alpha$ — ми отримали суперечність. Таким чином, $A \cap G_\alpha \neq \emptyset$. Виберемо точки $p_1 = (x_0, \lambda_1) \in A \cap G_\alpha$ та відповідно $p_2 = (x_0, h(x_0) + 1 = \lambda_2) \in B$. В такому разі:

$$\psi(x_0) + \lambda_1\gamma = \varphi(p_1) < \alpha \leq \varphi(p_2) = \psi(x_0) + \lambda_2\gamma.$$

Звідси випливає, що $(\lambda_2 - \lambda_1)\gamma > 0$. Але, оскільки $\lambda_1 < g(x_0) \leq h(x_0) < h(x_0) + 1 = \lambda_2$, то $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, а отже, і $\gamma > 0$.

Розглянемо $\varepsilon > 0$ і довільну точку $x \in X$. Для чисел $\lambda = g(x) - \varepsilon$ і $\mu = h(x) + \varepsilon$ очевидно, будемо мати, що $(x, \lambda) \in A$ і $(x, \mu) \in B$. Тому:

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \lambda\gamma < \alpha \text{ і } \varphi(x, \mu) = \psi(x) + \mu\gamma > \alpha,$$

тобто $\lambda\gamma < \alpha - \psi(x) < \mu\gamma$. Поділивши на додатне число γ, отримуємо:

$$\lambda < \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi(x) < \mu.$$

Зрозуміло, що $f = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi$ — це афінний функціонал на просторі X, адже $\frac{1}{\gamma}\psi$ — це лінійний функціонал на X. Для f і фіксованого $x \in X$ виконується нерівність:

$$g(x) - \varepsilon < f(x) < h(x) + \varepsilon.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$ отримаємо, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Таким чином, f — це шукана проміжна афінна функція на X. □

В Математичній енциклопедії [7, p. 797] без доведення і посилань подано такий результат.

Теорема 3.1.9. *Нехай A і B — довільні диз'юнктні опуклі множини у дійсному ВП X. Тоді існує ненульовий лінійний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$, який відокремлює A від B.*

З нього на основі 3.1.8 негайно випливає таке твердження.

Теорема 3.1.10. *Нехай X дійсний ВП X, $g : X \to \mathbb{R}$ — вгнута функція, $h : X \to \mathbb{R}$ — опукла функція, такі, що $g(x) \leq h(x)$ на X. Тоді існує така афінна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.*

3.2. Проміжні кусково лінійні функції.

Розглянемо банаховий простір $C_u[a,b]$ всіх неперервних функцій $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $||f|| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Теорема 3.2.1. *Нехай E — всюди щільна множина у просторі $C_u[a,b]$ і (g,h) строга пара Гана на $[a,b]$. Тоді існує проміжна для (g,h) функція f з множини E.*

Доведення. За теоремою Даукера-Катетова існує неперервна функція $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, яка є строго проміжною для пари (g,h). Оскільки (f_1, h) це теж строга пара Гана, то існує неперервна функція $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка є строго проміжною для (f_1, h). Таким чином, для побудованих функцій маємо, що $g(x) < f_1(x) < f_2(x) < h(x)$ на $[a, b]$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$ на $[a, b]$. Зрозуміло, що функція φ неперервна і $f_1(x) < \varphi(x) < f_2(x)$ на $[a, b]$. При цьому

$$\varphi(x) - f_1(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} = f_2(x) - \varphi(x)$$

на $[a, b]$. За теоремою Вейерштрасса існує число

$$\varepsilon = \min_{a \le x \le b} (\varphi(x) - f_1(x)) = \frac{1}{2} \min_{a \le x \le b} (f_2(x) - f_1(x)) = \min_{a \le x \le b} (f_2(x) - \varphi(x))$$

і $\varepsilon > 0$. В ε-околі

$$U_\varepsilon(\varphi) = \{\psi \in C[a, b] : ||\psi - \varphi|| < \varepsilon\}$$

функції φ знайдеться якийсь елемент f з всюди щільної в $C_u[a, b]$ множини E. Цей елемент і буде шуканою функцією, адже

$$g(x) < f_1(x) = \varphi(x) - (\varphi(x) - f_1(x)) \le \varphi(x) - \varepsilon < f(x) <$$

$$< \varphi(x) + \varepsilon \le \varphi(x) + f_1(x) - \varphi(x) = f_2(x) < h(x)$$

на $[a, b]$. □

Позначимо символом $P[a, b]$ множину всіх многочленів на $[a, b]$. За теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій многочленами на відрізку $[a, b]$ множина $P[a, b]$ всюди щільних в $C_u[a, b]$. Тому з теореми 3.2.1 негайно випливає.

Наслідок 3.2.1. *Для кожної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує такий многочлен $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, який є строго проміжною функцією для (g, h) на $[a, b]$.*

Зауважимо, що многочлен — це не тільки C^1-функція, а й C^∞-функція, тобто нескінченно диференційовна функція, отже, для кожної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує строго проміжна C^∞-функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називають кусково лінійною, якщо існує таке розбиття $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ відрізка $[a, b]$, що кожне звуження $f|_{[x_{k-1},x_k]}$ є лінійною функцією на $[x_{k-1}, x_k]$. Зрозуміло, що кожна кусково лінійна функція неперервна. Множину всіх кусково лінійних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ми позначаємо символом $Q[a, b]$. З теореми Кантора про рівномірну неперервність неперервної на відрізку $[a, b]$ функції негайно випливає, що множина $Q[a, b]$ всюди щільна в $C_u[a, b]$. Тому з 3.2.1 отримуємо і наступний наслідок.

Наслідок 3.2.2. *Для довільної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує строго проміжна кусково лінійна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

Зауважимо, що для строгих пар Гана на $\mathbb{R}$ цей метод побудови строго проміжних C^∞-функцій чи кусково лінійних функцій не застосовний. Тут ми розвинемо інші методи, які дозволяють будувати строго проміжні C^∞-функції і кусково лінійні функції з певними додатковими властивостями для строгих пар Гана на відрізку $[a, b]$, не використовуючи при цьому теорему Даукера-Катетова, а безпосередньо доводячи її підсилені версії для $[a, b]$. Ці результати дозволяють здійснити побудову строго проміжних C^∞-функцій і кусково лінійних функцій і на всій числовій прямій $\mathbb{R}$.

Надалі позначатимемо $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ — ε-окіл точки x_0 в $\mathbb{R}$.

Теорема 3.2.2. *Нехай (g, h) — строга пара Гана на відрізку $I = [a, b]$ і $g(a) < \gamma < h(a)$. Тоді існує кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $g(x) < f(x) < h(x)$ на I та $f(a) = \gamma$.*

Доведення. Розглянемо множину

$$X = \{x \in [a, b] : \exists f_x \in Q[a, x] \mid g(t) < f_x(t) < h(t) \text{ на } [a, x] \text{ і } f_x(a) = \gamma\}$$

Зауважимо, що $a \in X$, оскільки на $\{a\}$ можна визначити кусково лінійну функцію $f_a(a) = \gamma$, і для неї $g(a) < f_a(a) < g(a)$, а отже, $X \neq \emptyset$. Окрім того, $X \subseteq [a, b]$, а отже, множина X обмежена зверху числом b. Тому існує $x_0 = \sup X$ і $a \le x_0 \le b$.

Доведемо спочатку, що $x_0 \in X$. Візьмемо довільне число y_0, таке, що $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Оскільки функції g і h напівнеперервні в точці x_0 відповідно зверху і знизу, то існує таке $\delta_0 > 0$, що $g(x) < y_0 < h(x)$ на $U_{\delta_0}(x_0) \cap I$.

За означенням супремуму існує $x_1 \in X$, таке, що $x_0 - \delta_0 < x_1 \le x_0$. Якщо $x_0 = x_1$, то $x_0 \in X$. Нехай $x_1 < x_0$. Оскільки функції g і h напівнеперервні в точці x_1 відповідно зверху і знизу, то існує таке $\delta_1 > 0$, що $x_1 + \delta_1 < x_0$ і $g(x) < y_1 < h(x)$ з $y_1 = f_{x_1}(x_1)$ на $U_{\delta_1}(x_1) \cap I$. Покладемо $c = \min\{y_0; y_1\}$ і $d = \max\{y_0; y_1\}$. Оскільки $g(x) < y_1 < h(x)$ і $g(x) < y_0 < h(x)$ на $J = [x_1; x_1 + \delta_1]$, то $g(x) < c \le d < h(x)$ на J. Отже, прямокутник $P = J \times [c; d]$ не містить точок жодного з графіків функцій g і h.

Введемо функцію $f_{x_0} : [a, x_0] \to \mathbb{R}$:

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f_{x_1}(x),\ x \in [a; x_1]; \\ y_1 + \frac{y_0 - y_1}{\delta_1}(x - x_1),\ x \in J; \\ y_0,\ x \in [x_1 + \delta_1; x_0]. \end{cases}$$

Дана функція коректно визначена і є кусково лінійною. Окрім того, $f_{x_0}(a) = \gamma$, і, як легко перевірити $g(x) < f_{x_0}(x) < h(x)$ на $[a, x_0]$. Таким чином, $x_0 \in X$.

Доведемо тепер, що $x_0 = b$. Нехай $x_0 < b$. Покладемо $x_2 = \min\{x_0 + \frac{\delta+0}{2}; b\}$ і розглянемо функцію

$$f_{x_2}(x) = \begin{cases} f_{x_0}(x),\ x \in [a; x_0]; \\ y_0,\ x \in [x_0; x_2]. \end{cases}$$

Оскільки $[x_0; x_2] \subseteq U_{\delta_0}(x_0) \cap I$, то $g(x) < y_0 < h(x)$ на $[x_0, x_2]$. Крім того, f_{x_2} — кусково лінійна функція, отже, $x_2 \in X$. Але це неможливо, бо $x_2 > x_0 = \sup X$. Таким чином, маємо, що $x_0 = b$ і функція $f = f_b$ є шуканою. □

Заміною $t = b - x$ з 3.2.2 легко виводиться і такий результат.

Теорема 3.2.3. *Нехай (g, h) — строга пара Гана на відрізку $I = [a, b]$ і $g(b) < \gamma < h(b)$. Тоді існує кусково лінійна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, така, що $g(x) < f(x) < h(x)$ на I і $f(b) = \gamma$.*

3.3. Проміжні нескінченно диференційовні функції на проміжках числової прямої.

Система множин $\mathcal{A}$ називається *вписаною* в систему множин $\mathcal{B}$ (позначається: $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$), якщо для довільного $A \in \mathcal{A}$ існує $B \in \mathcal{B}$, таке, що $A \subseteq B$.

Кажуть, що відрізки $I = [a, b]$ та $J = [c, d]$ *перетинаються нетривіально*, якщо $a < c < b < d$.

Ланцюжком для відрізка $[a, b]$ ми називатимемо скінченну послідовність відрізків $I_1, ..., I_n$, таку, що відрізки I_k та I_{k+1} нетривіально перетинаються для кожного $k = 1, ..., n-1$, відрізки I_k та I_{k+2} не перетинаються для кожного $k = 1, ..., n-2$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k \supseteq [a, b]$.

Надалі через $\overset{\circ}{A}$ ми позначатимемо внутрішність множини A.

Лема 3.3.1. *Нехай $I = [a, b]$, $P_j = [\alpha_j, \beta_j]$ і $\alpha_j < \beta_j$ при $j = 0, 1, ..., m$ та $\tilde{a} = \min\{\beta_0, b\}$, причому $[\tilde{a}, b) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} \overset{\circ}{P}_j$ і $a \in \overset{\circ}{P}_0$. Тоді існує такий ланцюжок відрізків $I_k = [a_k, b_k]$, де $k = 0, 1, ..., n$, що система $\mathcal{I} = \{I_0, I_1, .., I_n\}$ вписана в систему $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, ..., P_m\}$, причому $a_0 = a$, $b_n = b$ і $I_0 \subseteq P_0$.*

Доведення. За умовою $\alpha_0 < a < \beta_0$. Якщо $\beta_0 \geq b$, то ми покладаємо $a_0 = a$, $b_0 = b$, $I_0 = [a_0, b_0]$ і послідовність з одного відрізка I_0 буде шуканим ланцюжком.

Нехай $\beta_0 < b$. Покладемо $b_0 = \beta_0 = \tilde{a}$, $I_0 = [a_0, b_0]$ і $j_0 = 0$. Оскільки $b_0 \in [\tilde{a}, b)$, то існує такий індекс $j_1 = 1, ..., m$, що $b_0 \in \overset{\circ}{P}_{j_1}$, тобто $\alpha_{j_1} < b_0 < \beta_{j_1}$. Візьмемо $a_1 = \frac{\max\{\alpha_{j_1}, a\} + b_0}{2}$, $b_1 = \min\{\beta_{j_1}; b\}$ і покладемо $I_1 = [a_1, b_1]$. Оскільки $\alpha_{j_1} < b_0$ і $a < b_0$, то $\max\{\alpha_{j_1}, a\} < b_0$, а тому $a_0 = a \leq \max\{\alpha_{j_1}, a\} < a_1 < b_0$ і $a_1 > \alpha_{j_1}$. З другого боку $b_1 \leq \beta_{j_1}$, отже, $I_1 \subseteq P_{j_1}$. Крім того, $b_0 < \beta_{j_1}$ і $b_0 < b$, тому $b_0 < b_1$. Таким чином, $a_0 < a_1 < b_0 < b_1$, отже, відрізки I_0 та I_1 нетривіально перетинаються. Якщо $b_1 = b$, то пара (I_0, I_1) буде шуканим ланцюжком.

Нехай $b_1 < b$. Оскільки $b_1 > b_0 = \tilde{a}$, та $b_1 \in [\tilde{a}, b)$, отже, існує j_2, таке, що $b_1 \in \overset{\circ}{P}_{j_2} = (\alpha_{j_2}, \beta_{j_2})$, тобто, $\alpha_{j_2} < b_1 < \beta_{j_2}$. Оскільки $b_1 = \beta_{j_1} \notin \overset{\circ}{P}_{j_1}$ і $b_1 \in \overset{\circ}{P}_{j_2}$, то $j_1 \neq j_2$. Тому всі три номери j_0, j_1 і j_2 різні. Візьмемо $a_2 =$

$\frac{\max\{\alpha_{j_2}, b_0\}+b_1}{2}$, $b_2 = \min\{\beta_{j_2}; b\}$, $I_2 = [a_2, b_2]$. Оскільки $\alpha_{j_2} < b_1$ і $b_0 < b_1$, то $\max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < b_1$, а тому $a_1 \leq \max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < a_2 < b_1$ і $a_2 > \alpha_{j_2}$. З другого боку, $b_2 \leq \beta_{j_2}$, отже, $I_2 \subseteq P_{j_2}$. Крім того, $b_1 < \beta_{j_2}$ і $b_1 < b$, тому $b_1 < b_2$. Таким чином, $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, отже, відрізки I_1 та I_2 нетривіально перетинаються. Окрім того, оскільки $b_0 \leq \max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < a_2$, то відрізки I_0 та I_2 не перетинаються. Якщо $b_2 = b$, то трійка $\{I_0, I_1, I_2\}$ буде шуканим ланцюжком, якщо ж $b_2 < b$, то побудова продовжується.

Припустимо, що для деякого номера $k > 2$ вже побудовані відрізки $I_s = [a_s, b_s]$ при $s = 0, ..., k-1$, такі, що сусідні відрізки I_s та I_{s+1} перетинаються нетривіально, при $s = 0, ..., k-2$, а відрізки I_s та I_{s+2} не перетинаються при $s = 0, ..., k-3$. При цьому визначені різні номери $0 = j_0, j_1, ..., j_{j-1}$ серед чисел $0, 1, ..., m$, такі, що $I_s \subseteq P_{j_s}$ при $s = 0, ..., k-1$, $a_s = \frac{\max\{\alpha_{j_s}, b_{s-2}\}+b_{s-1}}{2}$, $b_s = \beta_{j_s}$ при $s = 2, ..., k-2$, $b_{k-1} = \min\{\beta_{j_{k-1}}; b\}$ і $b_0 < b_1 < ... < b_{k-1}$. Якщо $b_{k-1} = b$, то набір $(I_0, ..., I_{k-1})$ і буде шуканим ланцюжком відрізків.

Нехай $b_{k-1} < b$. Тоді $b_{k-1} \in [\tilde{a}, b)$, отже, існує такий номер $j_k = 1, ..., m$, що $b_{k-1} \in \overset{\circ}{P}_{j_k}$, тобто $\alpha_{j_k} < b_{k-1} < \beta_{j_k}$. За побудовою $b_{k-1} = \beta_{j_{k-1}} > b_{k-2} = \beta_{j_{k-2}} > ... > b_1 = \beta_{j_1}$, отже, $b_{k-1} \notin \overset{\circ}{P}_{j_s}$ при $s = 1, ..., k-1$. Крім того, $j_k \neq j_0 = 0$, бо $j_k \geq 1$. Таким чином, всі номери $j_0, ..., j_k$ різні.

Покладемо $a_k = \frac{\max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\}+b_{k-1}}{2}$, $b_k = \min\{\beta_{j_k}; b\}$ і $I_k = [a_k, b_k]$. Перевіримо, що $a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < b_k$. Оскільки за припущенням відрізки I_{k-2} та I_{k-1} нетривіально перетинаються, то $a_{k-2} < a_{k-1} < b_{k-2} < b_{k-1}$, зокрема, $a_{k-1} < b_{k-2}$, а значить, $a_{k-1} < \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\}$. Але $\alpha_{j_k} < b_{k-1}$ і $b_{k-2} < b_{k-1}$, тому $\max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < b_{k-1}$. Тому $a_{k-1} < \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < a_k < b_{k-1}$. Далі $b_{k-1} < \beta_{j_k}$ і $b_{k-1} < b$, тому $b_{k-1} < b_k$. Таким чином, $a_k < b_k$, і відрізки I_{k-1} та I_k нетривіально перетинаються. До того ж

$$a_k > \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} \geq b_{k-2},$$

отже, відрізки I_{k-2} та I_k не перетинаються. Нарешті,

$$\alpha_{j_k} \leq \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < a_k < b_k \leq \beta_{j_k},$$

Отже, $I_k \subseteq P_{j_k}$. Таким чином, побудову можна продовжити ще на один крок.

Оскільки число індексів відрізків P_j дорівнює $m+1$, то процес побудови відрізків I_k не може тривати до нескінченності, адже індекси $j_0, ..., j_k$, які виникають у побудові є різними. Отже, процедура завершується на якомусь кроці $n \leq m$ і ми отримаємо шуканий ланцюжок $I_0, ..., I_n$ для відрізка I. $\square$

Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, \ |x| < 1; \\ 0, \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

і доведемо, що f — нескінченно диференційовна. Знайдемо першу похідну: $f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$, $|x| < 1$, $f'(x) = 0$, $|x| > 1$.

Оскільки $t = \frac{1}{1-x^2} \to +\infty$ при $x \to 1-0$, то

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^2 = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{e^t} = 0.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1-0} f'(x) = \lim_{x\to\pm 1-0} (-2x)\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2}\right) = 0.$$

Звідси, на основі правила Лопіталя, отримуємо, що

$$f'(1) = \lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} f'(x) = 0$$

отже, в точці 1 існує ліва похідна $f'(1)$ і вона дорівнює нулю. Але очевидно, що і права похідна $f'(1)$. Тому функція f диференційовна в точці 1 і $f'(1) = 0$. Оскільки $f(-x) = f(x)$ на $\mathbb{R}$, то і $f'(-1) = 0$. Таким чином, функція f диференційовна на $\mathbb{R}$ і

$$f'(x) = \begin{cases} (-2x)\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2}\right), \ |x| < 1; \\ 0, \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

Припустимо, що $n \geq 1$ і функція f є n разів диференційовною, причому

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2^n}} e^{\frac{1}{x^2-1}}, \ |x| < 1; \\ 0, \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

де $P_n(x)$ — якийсь многочлен. Тоді при $|x| < 1$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)(x^2-1)^{2^n} - 2^n(x^2-1)^{2^n-1} \cdot 2x \cdot P_n(x)}{(x^2-1)^{2^{n+1}}} e^{\frac{1}{x^2-1}} +$$

$$+\frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2^n}}e^{\frac{1}{x^2-1}}\cdot(\frac{-2x}{(x^2-1)^2})=\frac{P_{n+1}(x)}{(x^2-1)^{2^{n+1}}}e^{\frac{1}{x^2-1}},$$

де $P_{n+1}(x)$ деякий многочлен, і $f^{n+1}(x)=0$ при $|x|>1$. Так само як і на першому кроці, легко встановити, що і $f^{n+1}(\pm1)=0$. Тому і функція f — $n+1$ раз диференційовна, причому

$$f^{(n+1)}(x)=\begin{cases}\frac{P_{n+1}(x)}{(x^2-1)^{2^{n+1}}}e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1;\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

де $P_{n+1}(x)$ — деякий многочлен.

Звідси випливає, що f — нескінченно диференційовна функція.

Позначимо $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}e^{\frac{1}{x^2-1}}dx$. Ясно, що $I>0$. Розглянемо функцію $g(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{I}dt$. Оскільки функція f неперервна, то $g'(x)=f(x)\geq 0$ на $\mathbb{R}$. Тому функція g нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$, g зростає на $\mathbb{R}$, причому $g(x)=0$ при $x\leq -1$ і $g(x)=1$ при $x\geq 1$.

Позначимо символом $C^\infty(\mathbb{R})$ простір всіх нескінченно диференційовних функцій $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Лема 3.3.2. *Нехай $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ і $a<b$. Тоді існує функція $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$, така, що $\varphi(x)=\alpha$ при $x\leq a$, $\varphi(x)=\beta$ при $x\geq\beta$, і φ зростає при $\alpha<\beta$, спадає при $\alpha>\beta$ та є сталою при $\alpha=\beta$.*

Доведення. Позначимо

$$\psi(x)=2\frac{x-a}{b-a}-1$$

. Зрозуміло, що ψ — це строго зростаюча функція. Доведемо, що функція $\varphi(x)=(\beta-\alpha)g(\psi(x))+\alpha$, де g — вище побудована функція, є шуканою.

Нехай $\alpha=\beta$. Тоді $\varphi(x)=\alpha=\beta$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, тобто, функція $\varphi(x)$ є сталою.

Якщо ж $\alpha<\beta$, то $\beta-\alpha>0$, а отже, з того, що g — зростає, випливає, що φ також зростаюча. При $x\leq a$ маємо, що $x-a\leq 0$, $2\frac{x-a}{b-a}\leq 0$, а отже, $\psi(x)=2\frac{x-a}{b-a}-1\leq -1$, а при $u\leq -1$ $g(u)=0$, отже, $\varphi(x)=\alpha$. При $x\geq b$ маємо, що $x-a\geq b-a$, $\frac{x-a}{b-a}\leq 1$, $\psi(x)\geq 1$, а при $u\geq 1$ $g(u)=1$, отже, $\varphi(x)=\beta-\alpha+\alpha=\beta$.

Якщо ж $\alpha > \beta$, то $\beta - \alpha < 0$, а отже, з того, що g зростає, випливає, що функція $\varphi(x) = (\beta - \alpha)g(\psi(x)) + \alpha$ спадає ($\gamma \in \mathbb{R}$). Аналогічно до попереднього випадку маємо, що при $x \leq a$ $\varphi(x) = \alpha$ та при $x \geq b$ $\varphi(x) = \beta$. Отже, функція φ є шуканою. □

Теорема 3.3.1. *Нехай (g, h) — строга пара Гана на $I = [a, b]$, і γ — довільне число з інтервалу $(g(a), h(a))$. Тоді для пари (g, h) існує строго проміжна C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що f локально стала в точках a і b і $f(a) = \gamma$.*

Доведення. Для кожної точки $x \in (a, b]$ розглянемо довільне число y_x, таке, що $g(x) < y_x < h(x)$, і покладемо $y_a = \gamma$. Оскільки функція g напівнеперервна зверху, а h знизу, то для кожного $x \in I$ існує таке $\delta_x > 0$, що $g(u) < y_x < h(u)$ при $u \in V_x = (x - 2\delta_x, x + 2\delta_x)$ і $u \in I$.

Якщо $d = a + 2\delta_a \geq b$, то стала функція $f(x) = y$ і буде шуканою. Нехай $d < b$. Покладемо $c = a + \delta_a$. Тоді $a < c < b$. Зрозуміло, що відрізок $[c, b]$ покривається системою інтервалів $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, де x пробігає $[c, b]$, адже $x \in U_x$ для кожного $x \in [c, b]$. За лемою Гейне-Бореля існує скінчене число точок $x_1, ..., x_m$ з відрізка $[c, b]$, таких, що $[c, b] \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_{x_j}$.

Візьмемо $P_j = \overline{U_{x_j}}$, $P_0 = [a, c]$ та $\mathcal{P} = \{P_j, j = 1, ..., m\}$. За лемою 1, існує ланцюжок з відрізків $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 0, 1, ..., n$, вписаний в покриття $\mathcal{P}$, такий, що $I_0 \subseteq P_0$. Оскільки для довільного $k = 0, ..., m$ маємо, що $I_k \subseteq P_{j_k} = \overline{U_{x_{j_k}}} \subseteq V_{x_{j_k}}$, то $g(u) < y_{x_{k_j}} < h(u)$ на $I \cap I_k$. Надалі будемо позначати $z_0 = y_a = \gamma$ і $y_{x_{j_k}} = z_k$ при $k = 1, ..., n$. Для нашого ланцюжка виконуються такі нерівності:

$$a = a_0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < ... < a_n < b_{n-1} < b_n = b$$

Покладемо $A_k = [a_k, b_{k-1}], k = 1, ..., n$; $B_0 = [a_0, a_1]$, $B_k = [a_{k-1}, a_{k+1}]$ при $k = 1, ..., n-1$, $B_n = [b_{n-1}, b_n]$. Маємо, що для кожного $k = 0, ..., n$ виконуються включення $B_k \subseteq I_k$ і для кожного $k = 1, ..., n$ — включення $A_k = I_{k-1} \cap I_k$.

Для кожного відрізку $A_k = [a_k, b_{k-1}]$ при $k = 1, ..., n$, використовуючи 3.3.1 побудуємо C^∞-функцію $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $\varphi_k(x) = z_{k-1}$ при $x \leq a_k$,

$\varphi_k(x) = z_k$ при $x \geq b_{k-1}$, причому функція φ_k зростає при $z_{k-1} \leq z_k$ і спадає при $z_{k-1} \geq z_k$. Визначимо функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, покладаючи $f(x) = z_k$, якщо $x \in B_k$ при $k = 0, 1, ..., n$, і $f(x) = \varphi_k(x)$, якщо $x \in A_k$ при $k = 1, ..., n$.

Зрозуміло, що функція f нескінченно диференційовна, локально стала у точках a і b, і $f(a) = z_0 = \gamma$.

Покажемо, що f є строго проміжною функцією для пари (g, h) на $[a, b]$. Нехай $x \in [a, b]$. Тоді існує такий номер $k = 0, 1, ..., n$, що $x \in B_k$, або такий номер $k = 1, ..., n$, що $x \in A_k$.

Припустимо, що $x \in B_k$ при $k = 1, ..., n-1$. Тоді $f(x) = z_k = y_{j_k}$ і $g(u) < y_{j_k} < h(u)$ на V_{j_k}. Оскільки відрізки I_{k-1} та I_k і I_k та I_{k+1} нетривіально перетинаються і $I_{k-1} \cap I_{k+1} = \emptyset$, то

$$a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < a_{k+1} < b_k < b_{k+1},$$

отже, $B_k = [b_{k-1}, a_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k] = I_k \subseteq V_{x_{j_k}}$ а тому $f(x) = z_k \in (g(x), h(x))$.

Нехай $x \in B_0$. Тоді $f(x) = z_0 = y_a = \gamma$. Але $a = a_0 < a_1 < b_0$, тому

$$B_0 = [a_0, a_1] \subseteq [a_0, b_0] = I_0 \subseteq P_0 = [a, c] \subseteq V_a.$$

Отже $f(x) = \gamma \in (g(x), h(x))$.

Нарешті, нехай $X \in B_n$. Тоді $f(x) = z_n y_{j_n}$. Але відрізки I_{n-1} та I_n нетривіально перетинаються. Тому $a_{n-1} < a_n < b_{n-1} < b_n$, отже,

$$B_n = [b_{n-1}, b_n] \subseteq [a_n, b_n] = I_n \subseteq V_{x_{j_n}}.$$

В такому разі $f(x) = y_{j_n} in (g(x), h(x))$.

Нехай тепер $x \in A_k$ для деякого $k = 1, ..., n$. За побудовою $g(u) < z_s < h(u)$ на I_s для довільного $s = 0, 1, ..., n$. Нехай $c_k = \min\{z_{k-1}, z_k\}$ і $d_k = \max\{z_{k-1}, z_k\}$. Оскільки $A_k = I_{k-1} \cap I_k$, то $g(x) < c_k \leq d_k < h(x)$. Але $f(x) = \varphi_k(x) \in [c_k, d_k]$. Тому $g(x) < f(x) < h(x)$. Таким чином, f — це шукана функція. $\square$

Заміною $t = b - x$ з 3.3 легко виводиться і такий результат.

Теорема 3.3.2. *Нехай (g, h) — строга пара Гана на $I = [a, b]$, і γ — довільне число з інтервалу $(g(b), h(b))$. Тоді для пари (g, h) існує строго проміжна C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що f локально стала в точках a і b і $f(b) = \gamma$.*

Зауважимо, що з леми про існування вписаного ланцюжка відрізків можна вивести і теорему 3.3.

З допомогою теорем 3.2.2, 3.2.3 3.3 і 3.3 ми можемо здійснити побудову строго проміжних кусково лінійних чи C^∞-функцій на довільному інтервалі (a, b) на числовій прямій.

Теорема 3.3.3. *Нехай $I = (a, b)$ довільний інтервал в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, $x_0 \in I$, (g, h) — строга пара Гана на I, і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g, h) нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(x_0) = y_0$.*

Доведення. Легко побудувати строго зростаючу послідовність точок $b_n \in (x_0, b)$ і строго спадну послідовність точок $a_n \in (a, x_0)$, таких, що $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Для одноманітності позначень покладемо $a_0 = x_0 = b_0$. За теоремами 3 і 4 існують такі C^∞-функції $f_1 : [b_0, b_1] \to \mathbb{R}$ і $f_{-1} : [a_1, a_0] \to \mathbb{R}$, що $f_1(b_0) = f_1(x_0) = y_0 = f_{-1}(x_0) = f_{-1}(a_0)$, причому f_1 і f_{-1} локально сталі на кінцях відрізків, де вони визначені і є строго проміжними для строгих пар Гана $(g|_{[b_0,b_1]}, h|_{[b_0,b_1]})$ і $(g|_{[a_1,a_0]}, h|_{[a_1,a_0]})$ відповідно. На другому кроці будуємо такі C^∞-функції $f_2 : [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$ і $f_{-2} : [a_2, a_1] \to \mathbb{R}$, що $f_2(b_1) = f_1(b_1)$, $f_{-2}(a_1) = f_{-1}(a_1)$, причому вони є локально сталими на кінцях відрізків, де визначені, і є строго проміжними для строгих пар Гана $(g|_{[b_1,b_2]}, h|_{[b_1,b_2]})$ і $(g|_{[a_2,a_1]}, h|_{[a_2,a_1]})$ відповідно.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми побудуємо для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ такі C^∞-функції $f_n : [b_{n-1}, b_n] \to \mathbb{R}$ і $f_{-n} : [a_n, a_{n-1}] \to \mathbb{R}$, що локально сталі на кінцях відрізків, де вони визначені, задовольняють умову узгодження $f_n(b_{n-1}) = f_{n-1}(b_{n-1})$ та $f_{-n}(a_{n-1}) = f_{-(n-1)}(a_{n-1})$ і є строго проміжними для строгих пар Гана $(g|_{[b_{n-1},b_n]}, h|_{[b_{n-1},b_n]})$ і $(g|_{[a_n,a_{n-1}]}, h|_{[a_n,a_{n-1}]})$ відповідно.

Покладемо $f(x) = f_n(x)$ на $[[b_{n-1}, b_n]]$ і $f(x) = f_{-n}(x)$ на $[a_n, a_{n-1}]$ де n — довільний номер. Цими умовами коректно визначається C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, яка і буде строго проміжною для строгої пари Гана (g, h) на I, причому $f(x_0) = f_{-1}(x_0) = y_0$. $\square$

Функцію $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ми називатимемо кусково лінійною, якщо існує така двостороння послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ точок x_n з інтервалу (a,b), що $x_n < x_{n+1}$ для кожного $n\in\mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$ і $\lim_{n\to-\infty} x_n = a$, що звуження $f|_{[x_n,x_{n+1}]}$ є лінійною функцією для кожного $n\in\mathbb{Z}$.

Так само, як теорема 3.3.3, на основі теорем і , легко встановлюється:

Теорема 3.3.4. *Нехай $I=(a,b)$ довільний інтервал в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, $x_0\in I$, (g,h) — строга пара Гана на I, і $g(x_0)<y_0<h(x_0)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) кусково лінійна функція $f: I\to\mathbb{R}$, така, що $f(x_0)=y_0$.*

Покажемо, що коли $g(x)=h(x)$ хоча б в одній точці, то проміжні кусково лінійні та нескінченно диференційовні можуть не існувати.

Приклад 1. Візьмемо $x_0=1, x_1=\frac{1}{2},...,x_n=\frac{1}{2^n},...$

$$g(x)=\begin{cases} \frac{-2x_n}{3},\ x=x_n,\ n\ -\ \text{парне;} \\ \frac{x_n}{3},\ x=x_n,\ n\ -\ \text{непарне;} \\ \frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}(g(x_{n-1})-g(x_n))+g(x_n),\ x_{n-1}<x<x_n \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} \frac{-x_n}{3},\ x=x_n,\ n\ -\ \text{парне;} \\ \frac{2x_n}{3},\ x=x_n,\ n\ -\ \text{непарне;} \\ \frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}(h(x_{n-1})-h(x_n))+h(x_n),\ x_{n-1}<x<x_n \end{cases}$$

Маємо, що $h(0)=g(0)=0$, $g(x)<h(x)$ при $x\neq 0$.

Покажемо, що на всіх проміжках $[x_k,x_{k+2}]$, $k=0,1,...$ проміжна функція f не може бути лінійною. Нехай k — парне. Тоді $g(x_k)<f(x_k)<h(x_k)<0<g(x_{k+1})<f(x_{k+1})<h(x_{k+1})$, та $g(x_{k+2})<f(x_{k+2})<h(x_{k+2})<0<g(x_{k+1})<g(x_{k+1})<g(x_{k+1})$, маємо, що $f(x_k)<f(x_{k+1})$ та $f(x_{k+2})<f(x_{k+1})$ — функція не є монотонною, а отже, і лінійною. Нехай k — непарне. Тоді $g(x_{k+1})<f(x_{k+1})<h(x_{k+1})<0<g(x_k)<f(x_k)<h(x_k)$, та $g(x_{k+1})<f(x_{k+1})<h(x_{k+1})<0<g(x_{k+2})<g(x_{k+2})<g(x_{k+2})$, маємо, що $f(x_{k+1})<f(x_k)$ та $f(x_{k+1})<f(x_{k+2})$ — функція не є монотонною, а отже, і лінійною. Отже, f не може бути кусково лінійною.

Приклад 2. Візьмемо $g(x)=|x|$, $h(x)=2|x|$. Покажемо, що не існує проміжної нескінченно диференційовної функції.

Нехай існує проміжна нескінченно диференційовна f. Тоді:

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{g(\Delta x)}{\Delta x} \le \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \le \frac{h(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Маємо, що $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \le \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \le \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$ при $\Delta x > 0$.

Звідси $1 \le \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \le 2$.

З іншої сторони, $\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \ge \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \ge \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}$ при $\Delta x < 0$, а отже, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \ge \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \ge \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}$ звідси, $-1 \ge \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \ge -2$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \le -1$, і $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \ge 1$, а отже, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ — не існує.

3.4. Проміжні нескінченно диференційовні функції на замкнених паралелепіпедах в $\mathbb{R}^n$.

У цьому пункті ми дослідимо питання про існування строго проміжної нескінченно диференційовної функції (коротко: C^∞-функції) для строгої пари Гана на замкненому паралелепіпеді $X = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ у просторі $\mathbb{R}^n$.

Перший підхід базується на згаданій у вступі теоремі Даукера-Катетова. Нехай X — компактний гаусдорфовий простір (коротко: компакт). Символом $C_u(X)$ позначимо банаховий простір всіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $||f|| = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$. Зокрема, в ролі X може виступати замкнений паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.4.1. *Нехай X — компакт, L — всюди щільна множина у просторі $C_u(X)$ і (g, h) — строга пара Гана на X. Тоді існує строго проміжна для (g, h) функція $f : X \to \mathbb{R}$, така, що $f \in L$.*

Доведення. За відомою теоремою [4, p. 199] компакт X є нормальним простором. Крім того, він, очевидно, паракомпактний, а значить, і зліченно паракомпактний. Тому за теоремою Даукера-Катетова існують такі неперервні функції $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, що $g(x) < f_1(x) < f_2(x) < h(x)$ на X.

Функція $\varphi(x) = \frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$ теж буде неперервною і $f_1(x) < \varphi(x) < f_2(x)$ на X. При цьому

$$\varphi(x) - f_1(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} = f_2(x) - \varphi(x)$$

на X. Зрозуміло, що існує число

$$\varepsilon = \min_{x\in X}(\varphi(x) - f_1(x)) = \frac{1}{2}\min_{x\in X}(f_2(x) - f_1(x)) = \min_{x\in X}(f_2(x) - \varphi(x))$$

і $\varepsilon > 0$. В ε-околі $U_\varepsilon(\varphi) = \{\psi \in C_u(X) : ||\psi - \varphi|| < \varepsilon\}$ точки φ з простору $C_u(X)$ знайдеться елемент f з множини L. Він і буде шуканою функцією, бо

$$g(x) < f_1(x) = \varphi(x) - (\varphi(x) - f_1(x)) \leq \varphi(x) - \varepsilon < f(x) < \varphi(x) + \varepsilon \leq$$

$$\leq \varphi(x) + (f_2(x) - \varphi(x)) = f_2(x) < h(x)$$

на X. $\square$

Позначимо символом $P(X)$ простір всіх многочленів

$$f(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{m} a_{k_1,...,k_n}\xi_1^{k_1}...\xi_n^{k_n}$$

від n змінних на замкненому паралелепіпеді X у просторі $\mathbb{R}^n$. Добре відомо (див., наприклад, [19]), що $P(X)$ для замкненого паралелепіпеда X в $\mathbb{R}^n$ — це всюди щільний підпростір простору $C_u(X)$. Тому з теореми 3.4.1 негайно випливає

Теорема 3.4.2. *Нехай $X = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ — це замкнений паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$ і (g, h) — строга пара Гана на X. Тоді існує такий многочлен $f \in P(X)$, що є строго проміжною функцією для пари (g, h).*

Оскільки многочлен є C^∞-функцією, то кожна строга пара Гана на замкненому паралелепіпеді X в $\mathbb{R}^n$ має строго проміжну C^∞-функцію.

Зараз ми застосуємо інший прямий підхід, що базується на компактності замкненого паралелепіпеда X і не використовує теореми Даукера-Катетова, а дозволяє довести її точніший варіант у цьому випадку.

Для функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ введемо в розгляд множину $\mathrm{supp}\varphi = \{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}$, яку ми називатимемо *носієм* функції φ.

Лема 3.4.1. *Для кожного невиродженого обмеженого відкритого паралелепіпеда $Q = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ існує така C^∞-функція $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що $\varphi(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}^n$ і $supp\varphi = Q$.*

Доведення. Як легко перевірити для довільних чисел a і b з $\mathbb{R}$, таких, що $a < b$, функція

$$\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(t-a)(t-b)}}, \ a < t < b, \\ 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus (a, b), \end{cases}$$

нескінченно диференційовна, невід'ємна і $\mathrm{supp}\varphi_{a,b} = (a, b)$.

Покладемо $\varphi = \varphi_{a_1,b_1} \otimes ... \otimes \varphi_{a_n,b_n}$, тобто для $x = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = \varphi_{a_1,b_1}(\xi_1)...\varphi_{a_n,b_n}(\xi_n)$$

Нескладно переконатися в тому, що ця функція і є шуканою. $\square$

Теорема 3.4.3. *Нехай $X = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ — замкнений паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$, (g, h) — строга пара Гана на X, $x_0 \in X$ і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тоді існує така строго проміжна для пари (g, h) нескінченно диференційовна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $f(x_0) = y_0$.*

Доведення. Розглянемо максимум-норму

$$|x| = \max\{|\xi_k| : k = 1, ..., n\},$$

де $x = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, на просторі $\mathbb{R}^n$ і відповідні кубічні ε-околи $U_\varepsilon(x) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - x| < \varepsilon\}$. З напівнеперервності зверху функції g у точці x_0 і знизу функції h у тій же точці випливає, що існує таке $\delta > 0$, що

$$g(x) < y_0 < h(x) \text{ на } U_\delta(x_0) \cap X.$$

Покладемо $Q_0 = U_\delta(x_0)$ і $K = X \setminus Q_0$. Для кожної точки x з K розглянемо довільне число γ_x, для якого $g(x) < \gamma_x < h(x)$. Для них можна визначити такий кубічний ε_x-окіл $U_x = U_{\varepsilon_x}(x)$ в $\mathbb{R}^n$, що $x_0 \notin U_x$ і

$$g(u) < \gamma_x < h(u) \text{ на } X \cap U_x.$$

Множина K замкнена в X, а значить, компактна. Тому з її відкритого покриття $\{U_x : x \in K\}$ можна виділити скінченне підпокриття, що складається з множин $Q_j = U_{\varepsilon_{x_j}}(x_j)$, де $j = 1, ..., m$.

Для кожного відкритого куба Q_j, $j = 0, 1, ..., m$, згідно з 3.4.1 побудуємо таку невід'ємну C^∞-функцію $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що $\mathrm{supp}\psi_i = Q_i$. Нехай $\psi = \sum\limits_{j=0}^{m} \psi_j$. Оскільки куби $Q_0, Q_1, ..., Q_m$ покривають паралелепіпед X, то для кожного $x \in X$ існує таке $j = 0, 1, ..., m$, що $x \in Q_j$, і тому $\psi(x) \geq \psi_j(x) > 0$, адже $Q_j = \mathrm{supp}\psi_j$. Виходить, що $\psi(x) > 0$ на X. Тому можна визначити на X функції $\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi(x)}$. Ясно, що всі вони нескінченно диференційовні, $\sum\limits_{j=0}^{m} \varphi_j(x) = 1$ на X і $\mathrm{supp}\varphi_j \subseteq Q_j$ при $j = 0, 1, ..., m$.

Покладемо $y_j = \gamma_{x_j}$ при $j = 0, 1, ..., m$ і

$$f = \sum_{j=0}^{m} y_j \varphi_j.$$

Зрозуміло, що f — це нескінченно диференційовна функція на X. Покажемо, що вона є шуканою.

По-перше, $\varphi_j(x_0) = 0$ для всіх $j = 1, ..., m$, бо $x_0 \notin Q_j$ для таких j за побудовою. Тому $\psi(x_0) = \psi_0(x_0)$, отже, $\varphi_0(x_0) = 1$. В такому разі

$$f(x_0) = \sum_{j=0}^{m} y_j \varphi_j(x_0) = y_0 \varphi_0(x_0) = y_0.$$

.

Далі, для $x \in X$ розглянемо множину $J(x) = \{j : x \in \mathrm{supp}\varphi_j\}$. Множина $J(x)$ непорожня, бо $\sum\limits_{j=0}^{m} \varphi_j(x) = 1$ на X. Якщо $j \in J(x)$, то $x \in \mathrm{supp}\varphi_j \subseteq Q_j$, отже, $x \in Q_j$. Тоді за побудовою

$$g(x) < y_j = \gamma_{x_j} < h(x) \text{ і } \varphi_j(x) > 0.$$

Якщо ж $j \notin J(x)$, то $\varphi_j(x) = 0$. Тому

$$g(x) = \sum_{j \in J(x)} g(x)\varphi_j(x) < f(x) = \sum_{j \in J(x)} y_j \varphi_j(x) < \sum_{j \in J(x)} h(x)\varphi_j(x) = h(x).$$

Таким чином, f — шукана функція. $\square$

3.5. Диференційовні розбиття одиниці і диференційовні проміжні функції на гільбертових просторах.

Нам буде потрібний один результат з [9], для якого ми дамо доведення, детальніше, ніж у [9, p. 49].

Лема 3.5.1. *Нехай* (X, p) *— нормований простір з диференційовною при* $x \neq 0$ *нормою* $p(x) = ||x||$. *Тоді* $||p'(x)|| = 1$ *для кожного* $x \neq 0$.

Доведення. Нехай $x \neq 0$. При $t > 0$

$$p(x + tx) - p(x) = ||(1 + t)x|| - ||x|| = (1 + t)||x|| - ||x|| = t||x||.$$

Тоді

$$p'(x)x = \lim_{t\to 0} \frac{p(x + tx) - p(x)}{t} = \lim_{t\to +0} \frac{t||x||}{t} = ||x||,$$

звідки випливає, що $||x|| = |p'(x)x| \leq ||p'(x)||||x||$, отже, $||p'(x)|| \geq 1$.

З іншого боку, з нерівності $|||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$ випливає, що

$$|p(x + th) - p(x)| \leq ||th|| = |t|||h||.$$

Отже, $|\frac{p(x+th)-p(x)}{t}| \leq ||h||$ при $t > 0$. Перейшовши в цій нерівності до границі при $t \to +0$, отримаємо, що $|p'(x)h| \leq ||h||$ для кожного $h \in X$. Звідси випливає, що $||p'(x)|| \leq 1$, отже, $||p'(x)|| = 1$. □

Нескладно перевірити, що на евклідовому просторі X [10, p. 7] квадрат його норми $f(x) = ||x||^2 =< x, x >$, де $< \cdot, \cdot >$ — скалярний добуток на X, є нескінченно диференційовною функцією. Використовуючи C^∞-функції з доведення леми 3.4.1 і функцію $x \mapsto ||x||^2$ можна довести таке твердження [11, p. 49].

Лема 3.5.2. *Нехай* A *і* B *— непорожні неперетинні замкнені множини у дійсному сепарабельному гільбертовому просторі* X. *Тоді існує така* C^∞*-функція* $\varphi : X \to [0, 1]$, *що* $\varphi(x) = 1$ *на* A *і* $\varphi(x) = 0$ *на* B.

З допомогою цієї леми доведемо теорему про існування C^∞-розбиття одиниці на сепарабельному гільбертовому просторі.

Нагадаємо, що сім'я множин $(A_i)_{i\in I}$ топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо у кожної точки x з X існує окіл U, такий, що множина $I(U) = \{i \in I : U \cap A_i \doteq \emptyset\}$ є скінченною. Кажуть що сім'я множин $\alpha = (A_i)_{i\in I}$ вписана у сім'ю множин $\beta = (B_j)_{j\in J}$ (позначається $\alpha \preccurlyeq \beta$), якщо для кожного $i \in I$ існує таке $j \in J$, що $A_i \subseteq B_j$. Кажуть, що сім'я $(\varphi_i)_{i\in I}$ неперервних функцій $\varphi_i : X \to [0,1]$ утворює *локально скінченне розбиття одиниці* на топологічному просторі X, що *підпорядковане* покриттю $(U_j)_{j\in J}$ простору X, якщо сім'я $(\mathrm{supp}\varphi_i)_{i\in I}$ локально скінченна і вписана в сім'ю $(U_j)_{j\in J}$, причому

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1 \text{ на } X.$$

Якщо простір X нормований і функції φ_i нескінченно диференційовні, то кажуть, що маємо *C^∞-розбиття одиниці.*

Теорема 3.5.1. *Нехай X — дійсний сепарабельний гільбертовий простір і $(U_j)_{j\in J}$ — відкрите покриття простору X. Тоді існує локально скінченне C^∞-розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i\in I}$ на X, яке підпорядковане цьому покриттю.*

Доведення. З теореми Стоуна про паракомпактність метризовного простору [4, p. 414] випливає, що існує таке локально скінченне відкрите покриття $(V_i)_{i\in I}$ простору X, що вписане в покриття $(U_j)_{j\in J}$. Для нього можна побудувати [4, p. 416] сім'ю $(A_i)_{i\in I}$ замкнених в X множин, таку, що $A_i \subseteq V_i$ для кожного $i \in I$, яка утворює покриття простору X. Застосувавши до замкнених множин A_i та $B_i = X \setminus V_i$ лему 3, ми побудуємо C^∞-функції $\psi_i : X \to [0,1]$, для яких $\psi_i(x) = 1$ на A_i та $\psi_i(x) = 0$ на B_i. Оскільки $\mathrm{supp}\psi_i \subseteq V_i$, то сім'я $(\mathrm{supp}\psi_i)_{i\in I}$ локально скінченна. Тому можна розглянути на X функцію

$$\psi(x) = \sum_{i\in I} \psi_i(x),$$

яка буде, очевидно, нескінченно диференційовною. При цьому $\psi(x) > 0$ на X, адже для кожного $x \in X$ існує таке $i \in I$, що $x \in A_i$, і тоді $\psi(x) \geq \psi_i(x) = 1 > 0$.

Покладемо $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi}$. Ясно, що φ_i — це C^∞-функції, визначені на X, при цьому $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ і

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = \frac{\sum\limits_{i\in I} \psi_i(x)}{\psi(x)} = 1$$

на X. Разом з тим $\mathrm{supp}\varphi_i = \mathrm{supp}\psi_i \subseteq V_i \subseteq U_j$ для деякого $j = j(i)$. Таким чином $(\varphi_i)_{i\in I}$ — шукане C^∞- розбиття одиниці. □

Теорема 3.5.2. *Нехай X — сепарабельний гільбертовий простір і (g, h) — строга пара Гана на X. Тоді існує C^∞-функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка буде строго проміжною для пари (g, h).*

Доведення. Для кожного $x \in X$ виберемо довільне число γ_x, для якого $g(x) < \gamma_x < h(x)$. З напівнеперервності зверху і знизу у точці x функцій g і h відповідно випливає, що для кожного $x \in X$ існує такий відкритий окіл U_x точки x в X, що

$$g(u) < \gamma_x < h(u) \text{ на } U_x.$$

Згідно з теоремою 3.5.1 існує локально скінченне C^∞-розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i\in I}$, яке підпорядковане покриттю $(U_x)_{x\in X}$. Для кожного $i \in I$ виберемо $x_i \in X$ так, що $\mathrm{supp}\varphi_i \subseteq U_{x_i}$ і покладемо $y_i = \gamma_{x_i}$. Розглянемо на X функцію

$$f(x) = \sum_{i\in I} y_i \varphi_i(x).$$

Її нескінченна диференційовність негайно випливає з нескінченної диференційовності функції φ_i. Покажемо, що функція f і є шуканою.

Нехай $x \in X$. Розглянемо множину $I(x) = \{i \in I : x \in \mathrm{supp}\varphi_i\}$. За побудовою ця множина скінченна. Якщо $x \in \mathrm{supp}\varphi_i$, то $x \in U_{x_i}$, отже,

$$g(x) < \gamma_{x_i} = y_i < h(x) \text{ і } \varphi_i(x) > 0.$$

Тому

$$g(x) = \sum_{i\in I} g(x)\varphi_i(x) < \sum_{i\in I} y_i\varphi_i(x) = f(x) < \sum_{i\in I} h(x)\varphi_i(x) = h(x)$$

для кожного $x \in X$. □

3.6. Асплундові простори і диференційовні проміжні функції на нормованих просторах.

Дійсний банаховий простір X називається *асплундовим* [9, p. 27], якщо для довільного його сепарабельного підпростору L спряжений з ним простір L^* теж сепарабельний. Можна довести, що кожний сепарабельний банаховий простір X з сепарабельним спряженим X^* є асплундовим. Рефлексивні банахові простори є асплундовими, зокрема, такими є простори $l_p(I)$ при $1 < p < \infty$, простори $c_0(I)$ теж асплундові, а простори l_1 і $C[0,1]$ — ні.

Шапочка (bump function) на нормованому просторі X — це функція $\varphi : X \to \mathbb{R}$ з обмеженим непорожнім носієм $\mathrm{supp}\varphi$. Ми будемо використовувати наступний результат з [9, p. 59].

Теорема 3.6.1. *Нехай X — дійсний сепарабельний банаховий простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) на X існує диференційовна при $x \neq 0$ норма, що еквівалентна до вихідної норми простору X;

(ii) на X існує диференційовна шапочка;

(iii) спряжений з X простір X^* сепарабельний.

Зауважимо, що ще в праці [12] вказувалося на те, що диференційовних шапочок на просторах l_1 і $C[0,1]$ не існує.

Введемо в розгляд числа $I = \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{t^2-1}} dt$ і $M = \frac{2}{eI}$. Символами $B[x_0, r]$ і $B(x_0, r)$ ми позначаємо відповідно замкнену і відкриту кулі з центром у точці x_0 і радіусом r у нормованому просторі $(X, ||\cdot||)$.

Лема 3.6.1. *Нехай $(X, ||\cdot||)$ — дійсний банаховий простір з диференційовною при $x \neq 0$ нормою $||\cdot||$, $x_0 \in X$ і $0 < r < R$. Тоді існує диференційовна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 1$ на $B[x_0, r]$, $\mathrm{supp} f = B(x_0, R)$ і $||f'(x)|| \le \frac{M}{R-r}$ на X.*

Доведення. Розглянемо C^∞-функцію $\varphi = \varphi_{-1,1}$ з доведення леми 3.4.1.

Функція
$$\psi(t) = \frac{1}{I}\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(s)ds$$
теж буде нескінченно диференційовною з $\psi'(t) = \frac{\varphi(t)}{I}$, причому $0 \le \psi(t) \le 1$ і $0 \le \psi'(t) \le \frac{1}{eI}$ на $\mathbb{R}$, $\mathrm{supp}\psi = (-1, +\infty)$, $\psi(t) = 1$ при $t \ge 1$. Нехай $\gamma(t) = \frac{2(t-r)}{R-r} - 1$ і $g(t) = 1 - \psi(\gamma(t))$. Ясно, що функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нескінченно диференційовна, $0 \le g(t) \le 1$ на $\mathbb{R}$, $g(t) = 1$ при $t \le r$, $\mathrm{supp} g = (-\infty, R)$ і
$$g'(t) = -\psi'(\gamma(t))\gamma'(t) = -\frac{2\varphi(\gamma(t))}{I(R-r)} \text{ на } \mathbb{R}.$$
Покладемо $p(x) = ||x||$ і $f(x) = g(p(x - x_0))$ на X. Ясно, що функція f диференційовна як при $x \ne x_0$ за теоремою про диференційовність композиції, так і в точці x_0, бо $f(x) = 1$ при $||x - x_0|| \le r$. При цьому $0 \le f(x) \le 1$ і $\mathrm{supp} f = B(x_0, R)$. Нарешті,
$$f'(x) = g'(p(x - x_0))p'(x - x_0) \text{ при } x \ne x_0 \text{ і } f'(x_0) = 0.$$
Тому при $x \ne x_0$ за лемою 3.6.2
$$||f'(x)|| = |g'(p(x - x_0))|||p'(x - x_0)|| = \frac{2|\varphi(\gamma(p(x - x_0)))|}{I(R-r)} \le \frac{2}{eI(R-r)} = \frac{M}{R-r}$$
і
$$||f'(x_0)|| = 0 \le \frac{M}{R-r}.$$
Таким чином, f — це шукана функція. $\square$

Нам буде потрібна теорема про почленне диференціювання рядів з функціоналів на банаховому просторі, яка випливає з теореми про диференціювання граничної функції [13, p. 52].

Теорема 3.6.2. *Нехай X — дійсний банаховий простір, $u_n : X \to \mathbb{R}$ — диференційовні функції і $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на X, причому ряд з похідних $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається рівномірно на X. Тоді функція f диференційовна і $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ на X.*

З леми 3.6.1 і теореми 3.6.2 випливає

Лема 3.6.2. *Нехай X — сепарабельний асплундовий простір і G — відкрита непорожня і обмежена множина в X. Тоді існує диференційовна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $suppf = G$.*

Доведення. Згідно з теоремою 6 на X існує еквівалентна норма $||\cdot||$, яка диференційовна при $x \neq 0$. Відносно цієї норми X буде сепарабельним і банаховим, множина G відкритою і обмеженою, отже, її діаметр

$$D = \mathrm{diam} G = \sup\{||x' - x''|| : x', x'' \in G\}$$

— це скінченне число. З сепарабельності простору $(X, ||\cdot||)$ випливає, що існує така послідовність відкритих куль $U_n = B(x_n, r_n)$ в X, що $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Оскільки $U_n \subseteq G$, то $r_n \leq D$ для кожного n. Нехай $B_n = B[x_n, \frac{r_n}{2}]$. За лемою 4 існує така диференційовна функція $\varphi_n : X \to [0,1]$, що $\varphi_n(x) = 1$ на B_n, $\mathrm{supp}\varphi_n = U_n$ і $||\varphi_n'(x)|| \leq \frac{2M}{r_n}$ на X. Покладемо $u_n(x) = \frac{r_n}{2^n D}\varphi_n(x)$ на X. Оскільки

$$0 \leq u_n(x) = \frac{r_n}{2^n D}\varphi_n(x) \leq \frac{r_n}{2^n D} \leq \frac{1}{2^n} \text{ на } X$$

для кожного n, то ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

збігається на X навіть рівномірно, причому $0 \leq f(x) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Далі, для довільних $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$

$$||u_n'(x)|| = \frac{r_n}{2^n D}||\varphi_n'(x)|| \leq \frac{r_n}{2^n D} \cdot \frac{2M}{r_n} = \frac{M}{2^{n-1} D}.$$

Тому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||u_n'(x)||$$

збігається рівномірно на X, звідки випливає і рівномірна збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ на X. В такому разі за теоремою 3.6.2. функція f буде диференційовною і

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

на X.

Залишилося перевірити, що $\mathrm{supp} f = G$. Якщо $x \in G$, то існує такий номер n, що $x \in U_n = \mathrm{supp}\varphi_n = \mathrm{supp} u_n$. Але $u_k(x) \geq 0$ для кожного k, тому

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \geq u_n(x) > 0,$$

отже, $x \in \mathrm{supp} f$. Навпаки, якщо $x \in \mathrm{supp} f$, то $f(x) > 0$, отже існує такий номер n, що $u_n(x) > 0$, а тоді $x \in \mathrm{supp} u_n = U_n \subseteq G$, значить, $x \in G$.

Таким чином, f — шукана функція. $\square$

На основі леми 3.6.2 ми доведемо теорему про існування розбиття одиниці на асплундовому просторі, що складається з диференційовних функцій.

Теорема 3.6.3. *Нехай X — сепарабельний асплундовий простір і $(U_j)_{j\in J}$ — його відкрите покриття, що складається з обмежених множин U_j. Тоді існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i\in I}$ на X, яке підпорядковане покриттю $(U_j)_{j\in J}$ і складається з диференційовних функцій φ_i.*

Доведення. Впишемо в покриття $(U_j)_{j\in J}$ локально скінченне відкрите покриття $(V_i)_{i\in I}$, де $V_i \neq \varnothing$. Всі множини V_i обмежені, тому на основі леми 3.6.2 для кожного $i \in I$ існує диференційовна функція $\psi_i : X \to [0,1]$, така, що $\mathrm{supp}\psi_i = V_i$. Функція

$$\psi(x) = \sum_{i\in I} \psi_i(x)$$

буде визначеною на X та диференційовною і $\psi(x) > 0$, оскільки

$$X = \bigcup_{i\in I} \mathrm{supp}\psi_i.$$

В такому разі функції $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi}$ визначені і диференційовні на X, $\mathrm{supp}\varphi_i = \mathrm{supp}\psi_i = V_i$ для кожного $i \in I$. При цьому

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1 \text{ на } X,$$

отже, $(\varphi_i)_{i\in I}$ — це шукане розбиття одиниці. $\square$

З теореми 3.6.3 виводиться

Теорема 3.6.4. *Нехай* (g, h) *— строга пара Гана на сепарабельному асплундовому просторі* X*. Тоді для неї існує строго проміжна диференційовна функція* $f : X \to \mathbb{R}$*.*

Доведення. Для кожного $x \in X$ можна вибрати число γ_x і відкриту кулю $U_x = B(x, \varepsilon_x)$, так, що

$$g(u) < \gamma_x < h(u) \text{ на } U_x.$$

Для покриття $(U_x)_{x \in X}$ простору X згідно з теоремою 8 існує підпорядковане йому локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i \in I}$, що складається з диференційовних функцій $\varphi_i : X \to [0, 1]$. Для кожного $i \in I$ існує така точка $x_i \in X$, то $\mathrm{supp}\varphi_i \subseteq U_{x_i}$. Покладемо $y_i = \gamma_{x_i}$ і визначимо на X функцію

$$f(x) = \sum_{i \in I} y_i \varphi_i(x).$$

Як і в доведенні теореми 3.5.2. легко перевіряється, що f — це строго проміжна для пари (g, h) диференційовна функція. □

3.7. Висновки до розділу 3

У цьому розділі розглянуто деякі пари функцій з спеціальними властивостями та можливість існування проміжних функцій з деякими іншими властивостями для них.

У підрозділі 3.3 встановлено, що для дійсного векторного топологічного простору X, вгнутої та опуклої відповідно функцій g та h заданих на цьому просторі, таких, що $g \le h$ на X та одна з множин $Gr^- g$ чи $Gr^+ h$ має C-внутрішню точку, існує проміжна афінна функція.

Підрозділ 3.4 присвячений знаходженню проміжних кусково лінійних функцій для строгих пар Гана на відрізках. Доведено існування проміжної кусково лінійної функції для строгої пари Гана на відрізку, такої, що проходить через задану точку між двома значеннями функцій пари Гана на кінці відрізку.

У підрозділі 3.5 встановлено існування проміжних нескінченно диференційовних функцій для строгих пар Гана на проміжках числової прямої. Доведено існування проміжної нескінченно диференційовної функції для строгої пари Гана на відрізку, такої, що проходить через задану точку між двома значеннями функцій пари Гана в довільній точці відрізку.

У підрозділі 3.6 показано існування проміжної нескінченно диференційовної функції для строгої пари Гана на замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$, такої, що проходить через задану точку між двома функціями пари Гана.

Підрозділ 3.7 присвячено дослідженню питання про існування проміжних диференційовних функцій на нормальних та гільбертових просторах. Зокрема, за допомогою побудови локально скінченних C^∞-розбиттів одиниці вписаних у відповідні відкриті покриття на гільбертовому просторі показано існування проміжної нескінченно диференційовної функції для довільної пари Гана на відповідному Гільбертовому просторі. Також, доведено існування проміжної диференційовної за Фреше функції для довільної пари Гана заданої на асплундовому просторі.

РОЗДІЛ 4.
ДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК ТЕОРЕМИ ГАНА ПРО ПРОМІЖНУ ФУНКЦІЮ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.

4.1. Многозначні пари Гана та проміжні функції.

Для топологічного простору X та Y розглянемо умови, при яких для довільних многозначних відображень $G : X \to Y$ та $H : X \to Y$, таких, що $G(x) \subseteq H(x)$ для кожного $x \in X$ та G та H є відповідно напівнеперевними зверху та знизу, існує $F : X \to Y$ неперервна, така, що $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$. Розглянемо також умови для топологічних просторів, при яких теорема Гана про проміжну функцію має многозначний аналог.

Добре відомо, що концепт напівнеперервності зверху та знизу можна застосувати для многозначних відображень $F : X \to Y$, що ставлять у відповідність непорожні підмножини Y для кожної точки $x \in X$, тобто відображення $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ зі значеннями в множині $\mathcal{P}(Y) = 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ всіх непорожніх підмножин Y. Нагадаємо, що многозначне відображення $F : X \to Y$ з топологічного простору X в топологічний простір Y називається напівнеперервним зверху /знизу/ в точці $x_0 \in X$, якщо для кожної відкритої множини U в Y, такої що $F(x_0) \subseteq V$ $/F(x_0) \cap V \neq \emptyset/$ існує такий окіл U точки $x_0 \in X$, що $F(x) \subseteq V$ $/F(x) \cap V \neq \emptyset/$ для кожного $x \in U$ (тут ми використовуємо термінологію з [14]). Ми кажемо, що F є неперервною в x_0, якщо вона є напівнеперервною зверху та знизу в цій точці. Відображення $F : X \to Y$ називається неперервним, напівнеперервним зверху /знизу/, якщо воно є таким в кожній точці простору X.

Множина $\mathcal{P}(Y)$ має природнє відношення часткового порядку, включення $\subseteq$ підмножин Y, і це дозволяє нам перенести концепт пар Гана для многозначних відображень. Ми кажемо, що многозначні відображення утворюють пару Гана /строгу пару Гана/, якщо G напівнеперервна зверху, H

знизу і $G(x) \subseteq H(x)$ $/G(x) \subset H(x)/$ для кожного $x \in X$.

Природньо випливають наступні задачі

Задача 1. За яких умов на простори X і Y кожна пара Гана (G, H) з многозначних відображень $G, H : X \to Y$ має неперервне проміжне многозначне відображення $F : X \to Y$?

Задача 2. За яких умов кожна строга пара Гана (G, H) з X в Y має строге проміжне неперервне многозначне відображення $F : X \to Y$?

Задача 3. За яких умов кожна пара Гана (G, H) з X в Y має строго проміжне неперервне многозначне відображення $F : X \to Y$?

Розглянемо в цьому розділі ці проблеми. Наступні задачі відносяться до задачі 1.

Нехай X топологічний простір і $F : X \to \mathbb{R}$ многозначне відображення, зі значеннями $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, де $f_1, f_2(x) : X \to \mathbb{R}$ це функції, для яких $f_1(x) \leq f_2(x)$ на X.

Лема 4.1.1. *Відображення $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, є напівнеперервним зверху тоді і тільки тоді, коли функція $f_1 : X \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною знизу, і $f_2 : X \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху.*

Доведення. Нехай F напівнеперервна зверху в x_0 і $\varepsilon > 0$. Відкрита множина $V = (f_1(x_0) - \varepsilon, f_2(x_0) + \varepsilon)$ містить відрізок $F(x_0)$. З цього випливає що існує U окіл x_0 такий що $F(x) \subseteq V$ коли $x \in U$. Оскільки $f_1(x) \in F(x)$ і $f_2(x) \in F(x)$ для кожного x, то $\{f_1(x), f_2(x)\} \subseteq V$ для кожного $x \in U$, отже,

$$f_1(x_0) - \varepsilon < f_1(x) \leq f_2(x) < f_2(x_0) + \varepsilon$$

для кожного $x \in U$, отже f_1 напівнеперервна знизу, і f_2 напівнеперервна зверху в x_0.

Нехай f_1 напівнеперервна знизу, f_2 напівнеперервна зверху в x_0 і $\varepsilon > 0$. Тоді існують околи U_1 та U_2 точки x_0, такі, що

$$f_1(x) > f_1(x_0) - \varepsilon \text{ на } U_1 \text{ і } f_2(x) < f_2(x_0) + \varepsilon \text{ на } U_2$$

Перетин $U = U_1 \cap U_2$ є також околом точки x_0 і для $x \in U$:

$$f_1(x_0) - \varepsilon < f_1(x) \leq f_2(x) < f_2(x) + \varepsilon.$$

Нехай V довільна підмножина $\mathbb{R}$, що містить $F(x_0) = [f_1(x_0), f_2(x_0)]$. Оскільки $f_i(x_0) \in V$ для $i = 1, 2$ існує такий $\varepsilon_i > 0$ для $i = 1, 2$ що:

$$(f_i(x_0) - \varepsilon_i, f_i(x_0) + \varepsilon_i) \subseteq V, \text{ де } i = 1, 2.$$

Покладемо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Очевидно, для цього числа:

$$V_0 = (f_1(x_0) - \varepsilon_1, f_2(x_0) + \varepsilon_2) \subseteq V.$$

З доведеного вище, існує окіл U точки x_0 в X, такий, що

$$F(x) \subseteq V_0,$$

як тільки $x \in U$. Крім того, $F(x) \subseteq V$ для кожного $x \in U$, отже, многозначна функція F є напівнеперервною зверху в точці x_0. $\square$

Лема 4.1.2. *Відображення $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, є напівнеперервним знизу тоді і тільки тоді, коли функція $f_1 : X \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною зверху, і $f_2 : X \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною знизу.*

Доведення. Нехай F напівнеперервна знизу в x_0 і $\varepsilon > 0$. Розглянемо відкриту множину $V = (-\infty, f_1(x_0) + \varepsilon)$, для якої, очевидно $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$, звідси випливає, що існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $V \cap F(x) \neq \emptyset$, як тільки $x \in U$. Розглянемо для $x \in U$ точку $y_1 \in V \cap F(x)$. Тоді $y_1 \in V$, отже, $y_1 < f_1(x_0) + \varepsilon$, і $y_1 \in F(x)$, отже $y_1 \geq f_1(x)$. З цього ми маємо, що $f_1(x) < f_1(x_0) + \varepsilon$ на U, і f є напівнеперервною зверху в x_0.

Аналогічно доводиться напівнеперервність знизу функції f_2 в x_0, для цього достатньо розглянути тільки відкриті множини $V = (f_2(x_0) - \varepsilon, +\infty)$.

Навпаки, нехай функція f_1 напівнеперервна зверху, f_2 знизу в x_0 і V є відкритою множиною в $\mathbb{R}$, для якої $V \cup F(x_0) \neq \emptyset$. Розглянемо довільну точку $y \in V \cup F(x_0)$. Тоді $f_1(x_0) \leq y \leq f_2(x_0)$ і $y \in V$. З того факту що V є відкритою випливає, що існує $\varepsilon > 0$, таке, що $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq V$. Також, з того, що f_1 і f_2 напівнеперервні зверху та знизу відповідно в точці x_0 випливає, що існує окіл U точки x_0 в X, такийщо для довільного $x \in U$:

$$f_1(x) < y + \varepsilon \text{ і } f_2(x) > y - \varepsilon.$$

Тоді для $x \in U$ маємо: $F(x) \cup V \neq \emptyset$. Справді, для точок $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ маємо, що $y_1 < y + \varepsilon$ і $y_2 > y - \varepsilon$. Якщо $y_2 < y + \varepsilon$, то $y_2 \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cup F(x) \subseteq V \cup F(x)$, і якщо $y_1 > y - \varepsilon$, тоді $y_1 \in V \cup F(x)$. Нехай тепер $y_2 \geq y + \varepsilon$ і $y_1 \leq y - \varepsilon$. Тоді $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq [y_1, y_2] = F(x)$ і звідси маємо, що $y \in V \cup F(x)$. В довільному випадку $F(x) \cup V \neq \emptyset$.

□

Теорема 4.1.1. *Нехай X нормальний простір і (G, H) пара Гана, така, що $G(x) = [g_1(x), g_2(x)]$ і $H(x) = [h_1(x), h_2(x)]$ для кожного $x \in X$. Тоді існує проміжна для (G, H) неперервна $F : X \to \mathbb{R}$ така, що $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ на X, де функції f_1 і f_2 є неперервними.*

Доведення. З умови $G(x) \subseteq H(x)$ на X ми отримуємо, що

$$h_1(x) \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq h_2(x)$$

для кожного $x \in X$. З лемм 4.1.1 та 4.1.2 отримуємо, що (h_1, g_1) і (g_2, h_2) є парами Гана на X. З теореми Гана випливає, що існують функції $f_i : X \to \mathbb{R}$ для $i = 1, 2$ такі, що:

$$h_1(x) \leq f_1(x) \leq g_1(x) \text{ і } h_1(x) \leq f_1(x) \leq g_1(x)$$

для кожного $x \in X$. Оскільки $g_1(x) \leq g_2(x)$, то $f_1(x) \leq f_2(x)$ на X. З леми 4.1.2. випливає, що відображення

$$F : X \to \mathbb{R}, F(x) = [f_1(x), f_2(x)],$$

є неперервним, і $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$ для кожного $x \in X$. □

Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ є функцією, визначеною на топологічному просторі X і $F(x) = (-\infty, f(x)]$. Наступні три леми можна довести аналогічно до трьох попередніх:

Лема 4.1.3. *Функція f є напівнеперервною зверху тоді і тільки тоді, коли многозначна функція F є напівнеперервною зверху.*

Лема 4.1.4. *Функція f є напівнеперервною знизу тоді і тільки тоді, коли многозначна функція F є напівнеперервною знизу.*

Лема 4.1.5. *Функція f є неперервною тоді і тільки тоді, коли многозначна функція F є неперервною.*

З лемм 4.1.1 та 4.1.2 випливає:

Лема 4.1.6. *Нехай X — топологічний простір, (g, h) — пара Гана на X, $G(x) = (-\infty, g(x)]$ і $H(x) = (-\infty, g(x)]$. Тоді (G, H) також пара Гана на X.*

Теорема 4.1.2. *Нехай X — топологічний простір, (g, h) — пара Гана на X, $G(x) = (-\infty, g(x)]$ і $H(x) = (-\infty, g(x)]$, і пара Гана (G, H) має проміжну неперервну функцію $F : X \to \mathbb{R}$. Тоді пара Гана (g, h) також має проміжну неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$*

Доведення. З умови $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$ на X. Покладемо

$$f(x) = \sup F(x).$$

Оскільки $g(x) \in G(x)$, тоді $g(x) \in F(x)$, і $g(x) \leq f(x)$. Тут, з включення $F(x) \subseteq H(x)$ випливає, що

$$f(x) = \sup F(x) \leq \sup H(x) = h(x).$$

Звідси ми маємо, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо відкриту множину $V_1 = (-\infty, f(x_0)+\varepsilon)$. Очевидно, що $F(x_0) \subseteq V_1$. З того, що F є напівнеперервною зверху в x_0 випливає, що існує окіл U_1 точки x_0 в X, такий, що $F(x) \subseteq V_1$ як тільки $x \in U$. В цьому випадку:

$$f(x) = \sup F(x) \leq \sup V_1 = f(x_0) + \varepsilon$$

на U_1, отже, функція f є напівнеперервною зверху в x_0.

Для відкритої множини $V_2 = (f(x_0) - \varepsilon, +\infty)$ ми маємо, що $V_2 \cup F(x_0) \neq \emptyset$. Справді, оскільки $f(x_0) = \sup F(x_0)$, ми маємо, що існує $y \in F(x_0)$, такий, що $y > f(x_0) - \varepsilon$. Очевидно, що $y \in V_2 \cup F(x_0)$. З того, що F є напівнеперервною знизу в x_0 випливає, що існує окіл U_2 точки x_0 такий, що $F(x) \cup V_2 \neq \emptyset$ коли $x \in U_2$. Тоді для кожного $x \in U$ існує $y_x \in F(x) \cup V_2$, для якого, очевидно, $f(x_0) - \varepsilon < y_x \leq f(x)$, і тоді:

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

на U_2 і f є напівнеперервною знизу x_0.

В околі $U = U_1 \cup U_2$ точки x_0 в X наступні нерівності справджуються:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

і з цього випливає неперервність f в точці x_0. $\square$

4.2. Проміжні функції обмеженої варіації

Нехай (g, h) — пара функцій $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, g — напівнеперервна зверху, h — знизу, $g(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$, і g та h — функції обмеженої варіації. Тут ми побудуємо неперервну функцію обмеженеї варіації $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — неперервну та обмеженої варіації, таку, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$.

Сукупність функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ обмеженої варіації позначимо символом $V[a, b]$, а варіацію функції f на відрізку $[a, b]$ через $V_a^b(f)$.

Тут ми будемо спиратися на добре відомий результат.

Лема 4.2.1. *Нехай $f \in V[a, b]$. Тоді множина $D(f)$ точок розриву функції fне більш ніж злічення.*

Позначимо через T — зліченну щільну в $[a, b]$ множину, таку, що $T \supseteq D(g) \cup D(h) \cup \{a, b\}$. Нехай $T = \{u_0, u_1, u_2, ...\}$, де $u_0 = 0$ та $u_1 = 1$ і $T_n = \{u_0, u_1, ..., u_n\} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, де $t_0 < t_1 < ... < t_n$. Тоді $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n,\ T_n$.

Лема 4.2.2. *Нехай $f_n \in C[a, b]$ для кожного номера n і виконуються умови:*

1) $f_n(t_k) \in [g(t_k), h(t_k)]$ для кожного $k = 0, 1, ..., n$,

2) $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

Тоді $g(t) \leq f(t) \leq h(t)$ на $[a, b]$.

Доведення. Нехай $t \in [a, b]$. Якщо $t \in D(g) \cup D(h)$, то існує N такий, що $t \in T_n$ для кожного $n \geq N$. Звідси випливає, що $g(t) \leq f_n(t) \leq h(t)$ для кожного $n \geq N$. Перейшовши в цій нерівності до границі при $n \to \infty$, отримаємо, що $g(t) \leq f(t) \leq h(t)$.

Нехай $t \notin D(g) \cup D(h)$ отже, g та h неперервні в точці t. Доведемо, що $g(t) \leq f(t) \leq h(t)$. Припустимо, що $f(t) \geq h(t)$. Візьмемо додатне $\varepsilon = \frac{f(t)-h(t)}{2}$ і знайдемо такий окіл U точки t в $[a, b]$, що

$$h(u) < h(t) + \varepsilon < f(t) - \frac{\varepsilon}{2} < f(u) \text{ на } U.$$

Оскільки $f_n \rightrightarrows f$, то існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ і для довільних $u \in [a, b]$ виконується нерівність $f(u) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(u) < f(u) + \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$h(u) < h(t) + \varepsilon = f(t) - \varepsilon = f(t) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < f(u) - \varepsilon < f_n(u) \text{ на } U$$

для кожного $n \geq N$. Оскільки множина $T \setminus T_n$ буде щільною на відрізку $[a, b]$, то існує такий номер $n > N$, що $t_n \in U$. В такому разі $h(t_n) < f_n(t_n)$, що суперечить умові 1). Отже, $f(t) \leq h(t)$. Так само доводиться, що $f(t) \geq g(t)$. $\square$

Конструкція функції f_n

Покладемо $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $a_k = g(t_k)$, $b_k = h(t_k)$. Дослідимо на мінімум функцію:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (t_{k+1} - t_k)^2},$$

де $x_k \in [a_k, b_k]$ для кожного $k = \overline{0, (n-1)}$. За теоремою Вейерштрасса, існує глобальний мінімум $L_n(x)$ на $A = \prod\limits_{k=0}^{n} [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^{\ltimes+\nVdash}$, $x = (x_0, ..., x_n) \in A$. Розглянемо функцію $s_k(t) = (x_{k+1} - x_k)\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} + x_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $s_k : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$, та побудуємо $f_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t) s_k(t) + s_{n-1}(1)$ — неперервна кусково-лінійна ламана.

Лема 4.2.3. *Нехай $t \in [0, 1]$.*

(i) Якщо

$$\frac{d^+}{dt} f_n(t)|_{t_k} < \frac{d^-}{dt} f_n(t)|_{t_k}$$

, то $\exists k \in \overline{0, n}$: $t_k = t$ і $f_n(t_k) = a_k$.

(ii) Якщо

$$\frac{d^+}{dt} f_n(t)|_{t_k} > \frac{d^-}{dt} f_n(t)|_{t_k}$$

, то $\exists k \in \overline{0,n}$*:* $t_k = t$ *і* $f_n(t_k) = b_k$*.*

Доведення. (i) Нехай $f_n(t)$ — кусково-лінійна, точки злому — T_n. При $t \notin T_n$ маємо $t \in (t_k, t_{k+1})$, $f_n(t) = s_k(t)$,

$$\frac{d^+}{dt} f_n(t)|_{t_k} = \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{d^-}{dt} f_n(t)|_{t_k}.$$

Отже, $t \in T_n$, $\exists k = \overline{0,n}$: $t_k = t$.

Нехай $x_k = f(t_k) > a_k$. Покладемо $A = (t_{k-1}, x_{k-1})$, $B = (t_k, x_k)$, $C = (t_{k+1}, x_{k+1})$. Виберемо $\widetilde{x_k} \in (a_k, x_k)$ таку, що D лежить всередині $\triangle ABC$. Доведемо, що $AD + DC < AB + BC$. Продовжимо AD до перетину з BC в точці H. Маємо, що $DC < DH + HC$, а отже, $AD + DC < AD + DH + HC = AH + HC$. Маємо з $\triangle ABC$: $AH < AB + BH$, отже,

$$AD + DC < AH + HC < AB + BH + HC = AB + BC.$$

Таким чином,

$$\sqrt{(x_{k+1} - \widetilde{x_k})^2 + (t_{k+1} - t_k)^2} + \sqrt{(x_{k-1} - \widetilde{x_k})^2 + (t_{k-1} - t_k)^2} <$$

$$< \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (t_{k+1} - t_k)^2} + \sqrt{(x_{k-1} - x_k)^2 + (t_{k-1} - t_k)^2},$$

а отже, $L_n(x_1, ..., x_{k-1}, \widetilde{x_k}, x_{k+1}, ..., x_n) < L_n(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ — це суперечить умові того, що в точці x функція L_n набуває глобальний мінімум.

Доведення (ii) аналогічне. $\square$

Маємо $\{f_n(t), t \in [0,1]\}$ — побудована послідовність.

Гіпотеза. Послідовність функцій f_n, побудована вища, є одностайно рівномірно неперервною.

Окрім того, маємо, що (f_n) — рівномірно обмежена, а отже, за теоремою Асколі-Арцелла, існує збіжна до f підпослідовність f_{n_k}. За лемою 4.2.2, ця f і є проміжною неперервною функцією з обмеженою варіацією.

Теорема 4.2.1. *Нехай* (g, h) *— строга пара Гана функцій з* $[0,1]$ *в* $\mathbb{R}$*,* g *та* h *— обмеженої варіації. Тоді існує функція* f *— неперервна та обмеженої варіації, таку, що* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *на* $[0,1]$*.*

4.3. Хрест-топологія та проміжні нарізно-неперервні функції

Аналогічно до пари Гана можна ввести поняття нарізної пари Гана (g,h), в якій $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно напівнеперервна зверху функція, а h — знизу, причому $g(p) \le h(p)$ на $X \times Y$. Виникає природне питання: за яких умов на простори X і Y для кожної нарізної пари Гана (g,h) існує така нарізнонеперервна $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ що $g(p) \le f(p) \le h(p)$ на $X \times Y$. Тут ми даємо повну відповідь на це питання, з'ясувавши, що для цього необхідно і достатньо, щоб добуток $X \times Y$ наділений так званою хрест-топологією був нормальним. Ми наводимо також випадок, за якого добуток з хрест-топологією не є нормальним.

Нехай X і Y — топологічні простори. Множина $W \subseteq X \times Y$ називається *нарізно відкритою*, якщо для кожної точки $p = (x,y) \in W$ існують відкриті околи U та V точок x та y у просторах X та Y відповідно, такі, що

$$(\{x\} \times V) \cup (U \times \{y\}) \subseteq W$$

. Легко перевірити, що система $\mathcal{E}$, що складається з нарізно відкритих множин, утворює топологію на добутку $X \times Y$, яка називається хрест-топологією на $X \times Y$.

Лема 4.3.1. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія на добутку $X \times Y$ і $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$. Тоді $CC(X \times Y, Z) = C(Q,Z)$.*

Доведення. $<=$). Нехай $f \in CC(X \times Y, Z)$. Розглянемо W — відкриту множину в Z, і доведемо, що $f^{-1}(W)$ — відкрита в Q. Нехай $p_0 = (x_0,y_0) \in f^{-1}(W)$, тоді $z_0 = f(p_0) = f^{x_0}(y_0) = f_{y_0}(x_0) \in W$. Оскільки f^{x_0} та f_{y_0} — неперервні і W — відкритий окіл точки z_0 в Z, то існують окіл U точки x_0 та окіл V точки y_0 в Y такі, що $f^{x_0}(V) \subseteq W$ і $f_{y_0}(U) \subseteq W$. Отже, $f((\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\})) = f^{x_0}(V) \cup f_{y_0}(U) \subseteq W$, а звідси $(\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\}) \subseteq f^{-1}(W)$. Таким чином, маємо, що $f^{-1}(W) \in \mathcal{C}$, отже, $f \in C(Q,Z)$.

=>). Розглянемо $f \in C(Q, Z)$ та $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Нехай W — відкритий окіл точки $z_0 = f(x_0, y_0)$ в Z. Тоді, оскільки $f^{-1}(W) \in \mathcal{C}$ і $p_0 \in f^{-1}(W)$, то існують відкриті околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y такі, що $(\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\}) \subseteq f^{-1}(W)$. Звідси маємо, що $f^{x_0}(V) \cup f_{y_0}(U) = f((\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\})) \subseteq W$. Таким чином, $f^{x_0}(V) \subseteq W$ і $f_{y_0}(U) \subseteq W$, що дає нам неперервність f^{x_0} в точці y_0 та f_{y_0} в точці x_0, отже, $f \in CC(X \times Y, Z)$. □

Лема 4.3.2. *Нехай $\mathcal{T}^u$ — топологія на $\mathbb{R}$, що складаєтьсся з множин $(-\infty, c)$, де $-\infty \le c \le +\infty$, а $C^u(X)$ — простір усіх напівнеперервних зверху функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Тоді $C^u(X) = C(X, \mathbb{R}^u)$, де $\mathbb{R}^u = (\mathbb{R}, \mathcal{T}^u)$.*

Так само: $C^l(X) = C(X, \mathbb{R}^l)$.

Доведення. =>) Нехай $f \in C^u(X)$. Розглянемо $c \in \mathbb{R}$, і доведемо, що $E(f < c) = f^{-1}((-\infty, c))$ відкрита в X. Нехай $x_0 \in E(f < c)$, $f(x_0) < c$. З напівнеперервності зверху функції f маємо, що існує U — окіл точки x_0 в X такий, що для довільного $x \in U$ виконується $f(x) < c$. Отже, $E(f < c)$ містить окіл кожної своєї точки, є відкритою множиною для кожного $c \in \mathbb{R}$. Таким чином, $f \in C(X, \mathbb{R}^l)$.

<=) Нехай $f \in C(X, \mathbb{R}^u)$. Нехай $x_0 \in E(f < c)$. З того, що $f \in C(X, \mathbb{R}^u)$, маємо, що $E(f < c)$ — відкрита, отже, існує окіл U точки x_0 такий, що $U \subseteq E(f < c)$. Таким чином, маємо, що $f(x) < c = f(x_0) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу довільності вибору c маємо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0 такий, що для довільного $x \in U$ $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. □

Введемо наступні позначення: $C^uC^u(X \times Y)$ — простір усіх нарізно напівнеперервних зверху функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $C^lC^l(X \times Y)$ — простір усіх нарізно напівнеперервних знизу функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $C^u(T)$ — це простір напівнеперервних зверху функцій $f : T \to \mathbb{R}$, $C^l(T)$ — це простір напівнеперервних знизу функцій $f : T \to \mathbb{R}$.

Лема 4.3.3. *Для довільних топологічних просторів X та Y маємо, що $C^uC^u(X \times Y) = C^u(Q)$ і $C^lC^l(X \times Y) = C^l(Q)$.*

Доведення. Нехай $f \in C^uC^u(X \times Y)$. За лемою 4.3.2 маємо, що з того, що $f^x \in C^u(Y)$ випливає, що $f^x \in C(Y, \mathbb{R}^u)$, та з $f_y \in C^u(X)$ випливає, що $f_y \in C(X, \mathbb{R}^u)$. Таким чином, врахувавши лему 4.3.1, маємо: $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R}^u) = C(Q, \mathbb{R}^u) = C^u(Q)$. Доведення в іншу сторону аналогічне.

Пару (g, h) напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g, h : X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі X, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X ми називаємо парою Гана на X. Пару (g, h) функцій $g \in C^uC^u(X \times Y)$, $h \in C^lC^l(X \times Y)$ на топологічному просторі X, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X ми називаємо нарізною парою Гана на X. $\square$

Лема 4.3.4. *Нарізна пара Гана (g, h) на добутку $X \times Y$ є парою Гана на просторі $Q = (X \times Y,)$.*

Доведення. Напряму випливає з леми 4.3.3, оскільки $g \in C^uC^u(X \times Y) = C^u(Q)$ та $g \in C^lC^l(X \times Y) = C^l(Q)$ $\square$

Лема 4.3.5. *Нехай X, Y — T_1-простори, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія. Тоді $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ — T_1-простір.*

Доведення. Доведемо, що одноточктова множина $\{p\}$, $p = (x, y) \in Q$, є замкненою. Візьмемо $q = (u, v) \neq p$. Або $x \neq u$, або $y \neq v$. Припустимо, що $x \neq u$. Тоді існує U — відкритий окіл точки u, такий, що $x \notin U$. Покладемо $W = U \times Y$ — відкритий окіл точки q в Q, такий, що $p \notin W$. Отже, $\{p\}$ — замкнена. $\square$

Теорема 4.3.1. *Нехай X та Y — T_1-простори. Тоді кожна нарізна пара Гана (g, h) на добутку $X \times Y$ має проміжну нарізно неперервну функцію тоді і тільки тоді, коли простір $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ є нормальним.*

Доведення. За лемою 4.3.5 маємо, що простір $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$ — T_1-простір, за лемою 4.3.4 маємо, що нарізна пара Гана (g, h) є парою Гана на Q. Таким чином, у випадку нормального простору Q, за теоремою Гана, існує проміжна для пари Гана (g, h) неперервна функція f, та навпаки, з існування проміжної неперервної функції для кожної пари Гана випливає нормальність простору Q. $\square$

Теорема 4.3.2. *Нехай T та S — дискретні простори, $X = \alpha T = T \cup \{\infty\}$, та $Y = \alpha S = S \cup \{\infty\}$ — компактифікації Александровва цих просторів, $\mathcal{C}$ — хрест-топологія на $X \times Y$ і $Q = (X \times Y, \mathcal{C})$. Тоді Q — нормальний топологічний простір.*

Доведення. Нехай A, B — замкнені в Q, $A \cap B = \emptyset$. Чи існують U, V — відкриті в Q, такі, що $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ а $U \cup V = \emptyset$?

Покладемо $w = (\infty, \infty)$. Нехай $w \in A$. Позначимо $H = Q \setminus B$ — відкрита в Q, $w \in A \subseteq H$. Оскільки H — відкритий і $w \in H$, то існують $t_1, ..., t_n \in T$, $s_1, ..., s_n \in S$, такі, що $W_0 = (X_0 \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times Y_0) \subseteq H$, де $X_0 = X \setminus T_0$, $Y_0 = Y \setminus S_0$, $T_0 = \{t_1, ..., t_n\}$, $S_0 = \{s_1, ..., s_m\}$. Для кожного $t \in T$ та $s \in S$ покладемо $p_t = (t, \infty)$, $q_s = (\infty, s)$, $T_1 = \{t \in T_0 : p_t \in A\}$, $S_1 = \{s \in S_0 : q_s \in A\}$. Візьмемо $X_1 = X_0 \cup T_1$ та $Y_1 = Y_0 \cup S_1$. Маємо, що для кожного $t \in X_1$ існує $U_t \subseteq Y$: $\{t\} \times U_t \subseteq H$, та для кожного $s \in Y_1$ існує $U_s \subseteq X$: $U_s \times \{s\} \subseteq H$, оскільки H — відкрита.

Візьмемо $C' = \bigcup\limits_{t \in X_1} \{t\} \times U_t \subseteq H$, $C'' = \bigcup\limits_{s \in Y_1} U_s \times \{s\} \subseteq H$, та $C = C' \cup C''$. Покладемо тепер $U = C \cup (A \cap (T \times S))$. Маємо, що $A \subseteq U \subseteq H$.

Покажемо, що U є замкнено-вікритою. Очевидно, що U є відкритою як об'єднання відкритих. Доведемо, що $Q \setminus U$ є замкненою.

Нехай $p \in Q \setminus U$. Якщо $p \in T \times S$, то $\{p\}$ — відкрита, і p належить $Q \setminus U$ зі своїм околом. Нехай же тепер $p \in (T \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times s)$. Припустимо, що $p = (t, \infty) \in T \times \{\infty\}$, тоді $t \notin X_1$. Тоді, оскільки $p \notin (A \cap (T \times S))$ — замкнена, то існує відкрита $V_p \subseteq Y$, така, що $Y \setminus V_p$ — скінченна і $O_p = \{t\} \times V_p \subseteq U$. O_p — відкритий окіл p, отже, U — замкнен.

Нехай тепер $w \notin A \cup B$, $H = Q \setminus B$. Покладемо $T_1 = \{t \in T : p_t \in A\}$, $S_1 = \{s \in S : q_s \in A\}$, де $p_t = (t, \infty)$, $q_s = (\infty, s)$. Для кожного $t \in T_1$ існує $U_t \subseteq Y$ така, що $\{t\} \times U_t \subseteq H$, та для кожного $s \in S$ існує $U_s \subseteq X$ така, що $U_s \times \{s\} \subseteq H$. Покладемо тепер $C' = \bigcup\limits_{t \in T_1} \{t\} \times U_t \subseteq H$, $C'' = \bigcup\limits_{s \in S_1} U_s \times \{s\} \subseteq H$, $C = C' \cup C''$, $U = C \cup (A \cap (T \times S))$. Маємо, що U є відкрито-замкненою. та $A \subseteq U \subseteq H$.

Ми отримали, що $A \subseteq U$, $B \subseteq Q \setminus U$, де U та $Q \setminus U$ — відкриті, отже, Q — нормальний. $\square$

4.4. Пара Гана і нульова обернена задача

Згідно з оберненною теоремою Бернштейна для кожної спадної нескінченно малої послідовності невід'ємних чисел α_n, $n = 0, 1, \dots$, існує така неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, що для кожного n її найкраще рівномірне наближення $E_n(f)$ многочленами степеня $\leq n$ дорівнює α_n. Ця теорема послужила відправною точкою для багатьох узагальнень та аналогів.

4.4.1. Пара Гана, що пов'язана з нарізно неперервною функцією.

Теорема 4.4.1. *Нехай X – топологічний простір, Y – непорожня множина, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – неперервна відносно першої змінної і обмежена відносно другої функція і $g(x) = \inf\limits_{y \in Y} f^x(y)$, а $h(x) = \sup\limits_{y \in Y} f^x(y)$ на X. Тоді (g, h) – це пара Гана на X.*

Доведення. Ясно, що функції g і h набувають скінченних значень. Нерівність $g(x) \leq h(x)$, очевидно, виконується для кожного $x \in X$. Доведемо, що функція $g : X \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху, а h – знизу. Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. З означення інфімуму випливає, що існує така точка $y_1 \in Y$, що $f^{x_0}(y_1) < g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. З неперервності функції f_{y_1} у точці x_0 випливає, що існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f_{y_1}(x) < f_{y_1}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ на U. Тоді при $x \in U$ виконується нерівність

$$g(x) \leq f^x(y_1) = f_{y_1}(x) < f_{y_1}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f^{x_0}(y_1) + \frac{\varepsilon}{2} < g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = g(x_0) + \varepsilon,$$

що дає нам напівнеперервність зверху функції g в точці x_0.

Так само існує $y_2 \in Y$, що $f^{x_0}(y_2) > h(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$. З неперервності функції f_{y_2} у точці x_0 випливає, що існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f_{y_2}(x) > f_{y_2}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ на U. Тоді для $x \in U$ маємо:

$$g(x) \geq f^x(y_2) = f_{y_2}(x) > f_{y_2}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} = f^{x_0}(y_2) - \frac{\varepsilon}{2} > h(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = h(x_0) - \varepsilon,$$

а це означає, що функція h напівнеперервна знизу в точці x_0.

□

Зауваження. Ясно, що для доведення напівнеперервності зверху функції g ми використали лише те, що функції f_y напівнеперервні зверху, а для напівнеперервності знизу функції h – лише те, що функції f_y напівнеперервні знизу.

Наслідок. Нехай X – топологічний простір, Y – непорожній компактний простір, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція і $g(x) = \min\limits_{y\in Y} f^x(y)$, а $h(x) = \max\limits_{y\in Y} f^x(y)$ на X. Тоді (g, h) – це пара Гана на X.

4.4.2. Побудова нарізно неперервної функції з даними максимумами чи мінімумами

Для довільної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ визначимо функції $S_f : X \to (-\infty, +\infty]$ та $I_f : X \to [-\infty, +\infty)$ формулами

$$S_f(x) = \sup_{y\in Y} f(x, y) \qquad \text{та} \qquad I_f(x) = \inf_{y\in Y} f(x, y).$$

У попередньому пункті ми з'ясували, що для довільних топологічних просторів X і Y і нарізно неперервної функції f функції S_f та I_f будуть напівнеперервними знизу і зверху відповідно, якщо вони набувають скінченних значень. Легко перевірити, що це збережеться і у випадку нескінченних значень. Природно постають і обернені задачі: для для напівнеперервних зверху і знизу функцій $h : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to \mathbb{R}$ побудувати нарізно неперервну функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, таку, що: а)$S_f = h$; б)$I_f = g$; в)$(I_f, S_f) = (g, h)$, якщо $g(x) \le h(x)$ на X. Тут ми займемося двома першими задачами а) і б).

Для цього нам буде потрібен один результат Тонґа [4, с.106], який ми подамо у розширеній редакції.

Теорема 4.4.2. *Для T_1-простору X наступні умови рівносильні:*

(i) X – досконало нормальний простір;

(ii) для кожної напівнеперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$ існує така зростаюча послідовність неперервних функцій $h_n : X \to \mathbb{R}$, що $h_n(x) \to h(x)$ на X;

(iii) для кожної напівнеперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$ існує така

спадна послідовність неперервних функцій $g_n : X \to \mathbb{R}$, що $g_n(x) \to g(x)$ на X;

(iv) для кожної напівнеперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$ існує така послідовність неперервних функцій $h_n : X \to \mathbb{R}$, що $h_n(x) \to h(x)$ на X і $h_n(x) \le h(x)$ на X для кожного n;

(v) для кожної напівнеперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$ існує така послідовність неперервних функцій $g_n : X \to \mathbb{R}$, що $g_n(x) \to g(x)$ на X і $g_n(x) \ge g(x)$ на X для кожного n;

Скористаємося методом, застосовним у [53] для побудови нарізно неперервної функції $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з даною діагоналлю, що належить до першого класу Бера.

Теорема 4.4.3. *Нехай $h : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна знизу функція, що задана на досконало нормальному просторі X з нормальним квадратом X^2, в якому діагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ є G_δ-множиною, і $h_0 : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, для якої $h_0(x) \le h(x)$ на X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$, що $h_0(x) \le f(x, y) \le h(x)$ на X^2 і $S_f(x) = h(x)$ на X.*

Доведення. Згідно з теоремою Тонґа існує така послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, що $f_n(x) \to h(x)$ на X і $f_n(x) \le h(x)$ на X для кожного n. Функції $h_n(x) = \max\{f_n(x), h_0(x)\}$ теж неперервні і для них уже $h_0(x) \le h_n(x) \le h(x)$ на X, причому як і раніше $h_n(x) \to h(x)$ на X.

Використовуючи побудову з доведення теореми 1 з [9] ми можемо визначити таку локально скінченну послідовність неперервних функцій $\varphi_n : X^2 \to [0, 1]$, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p) = 1$ на $X^2 \setminus \Delta$ і $\varphi_k(p) = 0$ на Δ для довільного k, для якої функція

$$f(x, y) = h(x)\chi_\Delta(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, y) h_n(x)$$

нарізно неперервна і $f(x, x) = h(x)$ на X (тут χ_A – характеристична функція множини A). Оскільки $h_0(x) \le h_n(x) \le h(x)$ на X, $\varphi_n(x, y) \ge 0$ на X^2

для кожного n і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(p)=1$ при $x\neq y$, то при $x\neq y$

$$h_0(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x,y))h_0(x)\leq f(x,y)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x,y)h_n(x)\leq(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x,y))h(x)=h(x).$$

Але $f(x,x)=h(x)$. Отже, $h_0(x)\leq f(x,y)\leq h(x)$ на X^2.

Нарешті, для довільних $x\in X$ і $y\in Y$ маємо, що

$$f(x,y)\leq h(x)=f(x,x),$$

отже, $S_f(x)=\max\limits_{y\in Y}f^x(y)=h(x)$.

□

З цієї теореми легко вивести і наступнй результат

Теорема 4.4.4. *Нехай $g:X\to\mathbb{R}$ – напівнеперервна зверху функція, що задана на досконало нормальному просторі X з нормальним квадратом X^2, в якому діагональ $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ є G_δ-множиною, і $g_0:X\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, для якої $g_0(x)\geq g(x)$ на X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f:X^2\to\mathbb{R}$, що $g(x)\leq f(x,y)\leq g_0(x)$ на X^2 і $I_f(x)=g(x)$ на X.*

4.4.3. Побудова нарізно неперервної функції з даною парою Гана, що з нею пов'язана. Розглянемо тепер задачу в) для випадку $X=[a,b]$ і $Y=[c,d]$, де $a<b$ і $c<d$. При цьому ми використаємо теорему Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова [4, с. 105].

Теорема 4.4.5. *Нехай $X=[a,b]$, $Y=[c,d]$, $P=X\times Y$ – прямокутник, $D=\{(x,l(x)):x\in X\}$ – його діагональ, де $l:X\to Y$ – лінійна функція, у якої $l(a)=c$, $l(b)=d$, (g,h) – пара Гана на X і $f:X\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, для якої $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ на X. Тоді існують такі нарізно неперервні функції $f_1:P\to\mathbb{R}$ і $f_2:P\to\mathbb{R}$, що $g(x)\leq f_1(x,y)\leq f(x)\leq f_2(x,y)\leq h(x)$ на P, $I_{f_1}(x)=g(x)=f_1(x,l(x))$ і $S_{f_2}(x)=h(x)=f_2(x,l(x))$ на X.*

Доведення. Розглянемо лінійні заміни

$$x = \varphi(t) = a + (b-a)t \quad \text{і} \quad y = \psi(s) = c + (d-c)s,$$

які гомеоморфно відображають відрізок $[0,1]$ на відрізки X і Y відповідно і гомеоморфізм $\gamma : [0,1]^2 \to P$, $\gamma(t,s) = (\varphi(t), \psi(s))$, для якого $\gamma(\Delta) = D$, де Δ – діагональ квадрата $[0,1]^2$. Застосувавши до функцій $\widetilde{h} = h \circ \varphi^{-1}$, $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ та $\widetilde{g} = g \circ \varphi^{-1}$ і $\widetilde{f}$ теореми 3 і 4 відповідно, отримаємо, що існують такі нарізно неперервні функції $\widetilde{f_1} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ і $\widetilde{f_2} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $\widetilde{g}(t) \le \widetilde{f_1}(t,s) \le \widetilde{f}(t) \le \widetilde{f_2}(t,s) \le h(t)$ на $[0,1]^2$ і $I_{f_1}(t) = \widetilde{f_1}(t,t) = \widetilde{g}(t)$, а $S_{f_2}(t) = \widetilde{f_2}(t,t) = \widetilde{h}(t)$ на [0,1]. Функції $f_i(x,y) = \widetilde{f_i}(\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(y))$ теж нарізно неперервні при $i = 1,2$ і для них

$$g(x) = \widetilde{g}(\varphi^{-1}(x)) \le f_1(x,y) \le f(\varphi^{-1}(x)) = f(x) \le f_2(x,y) \le \widetilde{h}(\varphi^{-1}(x)) = h(x)$$

на прямокутнику P. При цьому, якщо $x = \varphi(t) \in X$, то

$$I_{f_1}(x) = \min_{y\in Y} f_1(x,y) = \min_{0\le s\le 1} f_1(\varphi(t), \psi(s)) = I_{\widetilde{f_1}}(t) = \widetilde{f_1}(t,t) = \widetilde{g}(t) = g(x)$$

і

$$S_{f_2}(x) = \max_{y\in Y} f_2(x,y) = \max_{0\le s\le 1} f_2(\varphi(t), \psi(s)) = S_{\widetilde{f_2}}(t) = \widetilde{f_2}(t,t) = \widetilde{h}(t) = h(x)$$

Разом з тим з співвідношення $x = \varphi(t) = a + (b-a)t$ знаходимо, що $t = \frac{x-a}{t-a}$, і тому $y = \psi(t) = c + (d-c)t = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a) = l(x)$. Отже,

$$\widetilde{f_i}(t,t) = f_i(\varphi(t), \psi(t)) = f_i(x, l(x))$$

при $i = 1,2$. Таким чином,

$$I_{f_1}(x) = f_1(x, l(x)) = g(x) \quad \text{і} \quad S_{f_2}(x = f_2(x, l(x))) = h(x)$$

на X. □

Теорема 4.4.6. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$, де $a < b$, $c < d$ і (g,h) – довільна пара Гана на відрізку X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $(I_f, S_f) = (g,h)$.*

Доведення. За теоремою Гана-Д'єдонне-Катетова-Тонґа існує така неперервна функція $f_0 : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f_0(x) \leq h(x)$ на X. Візьмемо які-небудь точки y_i, де $i = 1, 2$, такі, що $c < y_1 < y_2 < d$ і покладемо $Y_1 = [c, y_1]$, $Y_2 = [y_1, y_2]$, $Y_3 = [y_2, d]$, $P = X \times Y$ та $P_i = X \times Y_i$ при $i = 1, 2$. За теоремою 4.4.5, застосованої до прямокутника P_1, існує така нарізно неперервна функція $f_1 : P_1 \to \mathbb{R}$, що

$$g(x) = \min_{v \in Y_1} f_1(x, v) \leq f_1(x, y) \leq f_0(x) \quad \text{на} \quad P_1.$$

З цієї ж теореми, застосованої вже до прямокутника P_3, випливає, що існує нарізно неперервна $f_3 : P_3 \to \mathbb{R}$, що

$$f_0(x) \leq f_3(x, y) \leq \max_{v \in Y_3} f_3(x, v) = h(x) \quad \text{на} \quad P_3.$$

Для кожної точки $(x, y) \in P_2$ покладемо

$$f_2(x, y) = f_1(x, y_1) + \frac{f_3(x, y_2) - f_1(x, y_1)}{y_2 - y_1}(y - y_1).$$

Функція $f_2 : P_2 \to \mathbb{R}$, очевидно, неперервна і

$$f_2(x, y_1) = f_1(x, y_1), \quad \text{а} \quad f_2(x, y_2) = f_3(x, y_2) \;\; \text{на} \;\; X.$$

Функція $f : P \to \mathbb{R}$, для якої $f|_{P_i} = f_i$ при $i = 1, 2, 3$ визначена коректно і є нарізно неперервною Для кожного $x \in X$ за побудовою

$$g(x) \leq f_1(x, y_1) \leq f_0(x) \leq f_3(x, y_2) \leq h(x),$$

тому $f_1(x, y_1) \leq f_2(x, y_2)$. В такому разі при $y \in Y_2$

$$f(x, y) = f_2(x, y) \geq f_1(x, y_1) \geq g(x)$$

і при $y \in Y_3$

$$f(x, y) = f_3(x, y) \geq f_0(x) \geq g(x),$$

звідки випливає, що $g(x) = \min_{y \in Y} f(x, y) = I_f(x)$.

Так само при $y \in Y_1$

$$f(x, y) = f_1(x, y) \leq f_0(x) \leq h(x),$$

а при $y \in Y_2$

$$f(x,y) = f_2(x,y) \leq f_3(x,y_2) \leq h(x),$$

звідки випливає, що $h(x) = \max\limits_{y \in Y} f(x,y) = S_f(x)$.

Таким чином $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – шукана функція.

$\square$

4.4.4. Нарізно непрервні функції з даним нульовим наближенням. Згідно з теоремою 1 для кожної нарізно неперервної функції $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ її нульове найкраще наближення α_f визначається на відрізку $X = [a,b]$ формулою

$$\alpha_f(x) = \frac{M(f^x) - m^(f^x)}{2},$$

а тому за теоремою 4.4.2 є невід'ємною і напівнеперервною знизу функцією. Справедливе і обернене твердження.

Теорема 4.4.7. *Для довільного прямокутника $P = X \times Y$, де $X = [a,b]$ і $Y = [c,d]$ і кожної невід'ємної напівнеперервної знизу функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ існує така нарізно неперервна функція $f : P \to \mathbb{R}$, що $\alpha_f = \varphi$.*

Доведення. Функції $h = 2\varphi$ і $g = 0$ утворюють пару Гана (g,h) на відрізку X. Тому за теоремою 6 існує така нарізно неперервна функція $f : P \to \mathbb{R}$, що $(I_f, S_f) = (g,h)$. В такому разі

$$m(f^x) = I_f(x) = 0$$

і

$$M(f^x) = S_f(x) = h(x)$$

на X. Тоді

$$\alpha_f(x) = \frac{M(f^x) - m(f^x)}{2} = \frac{2\varphi(x)}{2} = \varphi(x)$$

на X, тобто $\alpha_f = \varphi$.

$\square$

4.5. Висновки до розділу 4

У цьому розділі розглянуто деякі пари функцій зі спеціальними властивостями та можливість існування проміжних функцій з деякими іншими властивостями для них.

У підрозділі 4.1 встановлено звязок між теоремою Гана та існуванням проміжної неперервної многозначної функції для многозначних напівнеперервних відповідно зверху та знизу функцій вигляду $G(x) = [g_1(x), g_2(x)]$, $H(x) = [h_1(x), h_2(x)]$ на нормальному просторі X, де $g_1, g_2, h_1, h2$ — функції на X.

У підрозділі 4.2 було знайдено проміжну неперервну функцію обмеженої варіації $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ для строгої пари Гана (g, h) функцій обмеженої варіації на $[0,1]$.

У підрозділі 4.3 нами було розглянуто нарізну пару Гана на добутку T_1-просторів X та Y та встановлено, що для існування проміжної нарізнонеперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ необхідною і достатньою умовою є нормальність простору $(X \times Y, \mathcal{C})$, де $\mathcal{C}$ — хрест топологія на добутку топологічних просторів.

Підрозділ 4.4 містить деякі результати повязані з нульовою оберненою задачею.

РОЗДІЛ 5. РІВНОМІРНА ВІДСТАНЬ ДО РІЗНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ КЛАСІВ.

5.1. Рівномірна відстань.

Нехай $C(\mathbb{R})$ – простір усіх неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для двох функцій $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ розглянемо невід'ємне число

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|,$$

яке може набувати і значення $+\infty$. Воно називається *рівномірним відхиленням* функції f від функції g (див. [2]). Нехай E – деяка непорожня множина функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – деяка функція. Число

$$d(f, E) = \inf \{d(f, g) : g \in E\}$$

назвемо *відхиленням функції f від множини E.*

Зауважимо, що $d(f, C(\mathbb{R})) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f \in C(\mathbb{R})$.

Почнемо з таких прикладів знаходження відстані $d(f, C(\mathbb{R}))$, які були досліджені в [23].

Теорема 5.1.1. *а). Функція $f(x) = sgn\, x$ належить до першого класу Бера і*

$$d(f, C(\mathbb{R})) = 1,$$

причому існує послідовність неперервних функцій $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така, що $d(f_n, f) = 1$ і $f_n(x) \to f(x)$ на $\mathbb{R}$.

б). Функція $f(x) = [x]$ належить до першого класу Бера і

$$d(f, C(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}.$$

При цьому функція $g(x) = x - \frac{1}{2}$ є найближчою до f серед неперервних функцій $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Доведення. а) Для неперервних функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, \ x < -\frac{1}{n}, \\ nx, \ -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 1, \ x > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

будемо мати, що $f_n(x) \to f(x)$ на $\mathbb{R}$ і $d(f_n, f) = ||f - f_n|| = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Так само $d(f_0, f) = 1$, якщо $f_0(x) = 0$ на $\mathbb{R}$.

Нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ довільна неперервна функція. Покажемо, що $||f - g|| \ge 1$. Ясно, що для кожного $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|f(x) - g(x)| \le ||f - g|| = \Delta$$

зокрема,$|1 - g(x)| \le \Delta$ при $x > 0$ і $|1 + g(x)| \le \Delta$ при $x < 0$. Переходячи до границі, отримаємо

$$\lim_{x \to -0} |1 + g(x)| = |1 + g(0)| \le \Delta$$

і

$$\lim_{x \to +0} |1 - g(x)| = |1 - g(0)| \le \Delta$$

Якщо $g(0) < 0$, то $|1 - g(0)| = 1 - g(0) \ge 1$, а якщо $g(0) \ge 0$, то $|1 + g(0)| = 1 + g(0) \ge 1$, таким чином $\Delta \ge 1$, що і треба було довести. Отже, $d(f, C(\mathbb{R})) = 1$.

б) Ясно, що функція $g(x) = x - \frac{1}{2}$ неперервна. Знайдемо відстань $d(f, g) = ||f - g||$.

Зрозуміло, що для кожного $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність:

$$[x] \le x < [x] + 1$$

що в еквівалентному викладі записується так:

$$[x] - \frac{1}{2} \le x - \frac{1}{2} < [x] + \frac{1}{2}$$

або

$$-\frac{1}{2} \le x - \frac{1}{2} - [x] < \frac{1}{2},$$

тобто,

$$|g(x) - f(x)| = |x - \frac{1}{2} - [x]| \le \frac{1}{2}$$

на $\mathbb{R}$. Звідси випливає, що $||g-f|| \leq \frac{1}{2}$. Але $|g(0)-f(0)| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Отже, $||g-f|| = \frac{1}{2}$.

Розглянемо довільну неперервну функцію $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, і доведемо, що

$$||f-h|| \geq \frac{1}{2}.$$

При $-1 < x < 0$ маємо, що:

$$|f(x)-h(x)| = |1+h(x)| \leq ||f-h||$$

А при $0 < x < 1$ виконується нерівність:

$$|f(x)-h(x)| = |h(x)| \leq |f-h||$$

Переходячи до границі, будемо мати:

$$\lim_{x\to -0} |f(x)-h(x)| = |1+h(0)| \leq ||f-h||,$$

$$\lim_{x\to +0} |f(x)-h(x)| = |h(0)| \leq ||f-h||.$$

Якщо $|h(0)| \geq \frac{1}{2}$, то і $||f-h|| \geq \frac{1}{2}$. Якщо $|h(0)| \leq \frac{1}{2}$, то $|1+h(0)| \geq 1-|h(0)| \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Тоді так само $||f-h|| \geq \frac{1}{2}$, а отже, $d(f, C(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}$. □

5.2. Рівномірна відстань до простору $C(X)$ неперервних функцій на нормальному просторі X.

Теорема 5.2.1. *Нехай $g : X \to \mathbb{R}$ - функція. Тоді відстань від функції g до простору неперервних функцій на X дорівнює $\frac{1}{2}\|\omega_g\| = \delta$*

Доведення. Доведемо, що $d(g, C(X)) \geq \delta$. При $\delta = 0$,$\|\omega_g\| = 0$, і $g \in C(X)$, а отже, $d(g, C(X)) = 0$

Розглянемо $\delta > 0$. Нехай $x \in X$, U - окіл точки x в X, x' і $x''\in U$, $f \in C(X)$. Тоді:

$$|g(x')-g(x'')| = |g(x')-f(x')+f(x')-f(x'')+f(x'')-g(x'')| \leq |g(x')-f(x')|+$$

$$+|f(x')-f(x'')|+|f(x'')-g(x'')| \leq \|f-g\|+\omega_f(U)+\|f-g\|$$

Отже, $\omega_g(U) \leq 2\|f-g\| + \omega_f(U)$. Тоді,

$$0 \leq \omega_g(x) = \inf_{U \in U_x} \omega_g(U) \leq \inf(2\|f-g\| + \omega_f(U)) = 2\|f-g\|, \forall x \in X$$

($\inf\limits_{U \in U_x} \omega_f(U) = 0$, оскільки $f \in C(X)$), а значить, $\|\omega_g\| \leq 2\|f-g\|$. Звідси $\|f-g\| \geq \frac{1}{2}\|\omega_g\| = \delta$. Отже, $d(g, C(X)) \geq \delta$ у випадку, коли $\|\omega_g\| \leq +\infty$ і $d(g, C(X)) = +\infty = \delta$, коли $\|\omega_g\| = +\infty$

Нехай тепер $\|\omega_g\| \leq +\infty$. Доведемо, що $d(g, C(X)) \leq \delta$. Для цього покладемо:

$$g_1(x) = \inf_{U \in U_x} \sup_{u \in U} g(u) - \delta = g^*(x) - \delta$$

$$g_2(x) = \sup_{U \in U_x} \inf_{u \in U} g(u) + \delta = g_*(x) + \delta$$

Доведемо, що $g_1 : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - напівнеперервна зверху, $g_2 : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ - напівнеперервна знизу, і $g_1 \leq g_2$.

Позначимо $M_g(U) = \sup\limits_{u \in U} g(u)$, $m_g(U) = \inf\limits_{u \in U} g(u)$.

Спочатку доведемо, що g^* - напівнеперервна зверху. Візьмемо $\varepsilon > 0$ та $x \in X$ такі, щоб $g^*(x) < +\infty$. Очевидно, що $g^*(x) + \varepsilon > g^*(x)$. Існує окіл $U \in U_x$, такий, що $M_g(U) < g^*(x) + \varepsilon$. За означенням інфімуму, $\forall u \in U$, $g^*(u) \leq M_g(U)$. Отже, $g^*(u) < g^*(x) + \varepsilon$, $\forall u \in U$. Маємо, що $\forall x \in X$ або $g^*(x) = +\infty$, або $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \in U_x$, такий, що $\forall u \in U\ g^*(u) < g^*(x) + \varepsilon$. Отже, g^* - напівнеперервна зверху.

Доведемо тепер, що g_* - напівнеперервна знизу. Візьмемо $\varepsilon > 0$ та $x \in X$ такі, щоб $g_*(x) > -\infty$. Очевидно, що $g_*(x) - \varepsilon < g_*(x)$. Існує окіл $U \in U_x$, такий, що $m_g(U) > g_*(x) - \varepsilon$. За означенням супремуму, $\forall u \in U$, $g_*(u) \geq m_g(U)$. Отже, $g_*(u) > g_*(x) - \varepsilon$, $\forall u \in U$. Маємо, що $\forall x \in X$ або $g_*(x) = -\infty$, або $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \in U_x$, такий, що $\forall u \in U\ g_*(u) > g_*(x) - \varepsilon$. Отже, g_* - напівнеперервна знизу.

Тепер доведемо, що $g_1(x) \leq g_2(x)$, $\forall x \in X$. Для цього спочатку доведемо, що$\omega_g(x) = g^*(x) - g_*(x)$. Покажемо, що $\omega_g(U) = M_g(U) - m_g(U)$:

$$\omega_g(U) = \sup_{x',x''\in U} |g(x') - g(x'')| = \sup_{x',x''\in U} (g(x')-g(x'')) = \sup(g(U)+(-g(U))) =$$

$$= \sup g(U) + \sup(-g(U)) = \sup g(U) - \inf g(U) = M_g(U) - m_g(U)$$

Виберемо $\varepsilon > 0$. Очевидно, що $\omega_g(x) + \varepsilon > \omega_g(x)$. Існує окіл $U \in U_x$, такий, що $\omega_g(U) < \omega_g(x) + \varepsilon$. Але $\omega_g(U) = M_g(U) - m_g(U)$. За означенням супремуму та інфімуму: $g^*(u) \leq M_g(U)$ та $g_*(u) \geq m_g(U)$. Звідси отримуємо: $g^*(x) - g_*(x) \leq M_g(U) - m_g(U) < \omega_g(x) + \varepsilon$. Спрямуємо $\varepsilon \to 0$, отримуємо, що $g^*(x) - g_*(x) \leq \omega_g(x)$.

Виберемо $\varepsilon > 0$. Існує окіл $U_1 \in U_x$, такий, що $M_g(U_1) < g^*(x) + \varepsilon$, та існує окіл $U_2 \in U_x$, такий, що $m_g(U_2) > g_*(x) - \varepsilon$. Розглянемо $U = U_1 \cap U_2 \in U_x$. Оскільки $U \subseteq U_1$, то $m_g(U) \leq M_g(U_1) < g^*(x) + \varepsilon$, та оскільки $U \subseteq U_2$, то $m_g(U) \geq m_g(U_2) > g_*(x) - \varepsilon$. Таким чином, маємо:

$$\omega_g(x) \leq \omega_g(U) = M_g(U) - m_g(U) < (g^*(x)+\varepsilon) - (g_*(x)-\varepsilon) = g^*(x) - g_*(x) + 2\varepsilon$$

Спрямуємо $\varepsilon \to 0$, отримуємо $g^*(x) - g_*(x) \geq \omega_g(x)$.

Таким чином, оскільки $g^*(x) - g_*(x) = \omega_g(x)$, то $g^*(x) - g_*(x) \leq 2\delta = \|\omega_g\|$, звідси $g^*(x) - \delta \leq g_*(x) + \delta$, а отже, $g_1(x) \leq g_2(x), \forall x \in X$

Оскільки $g_1(x) \leq g_2(x)$, то $g_1(x) < +\infty$, і $g_2(x) > -\infty$ $\forall x \in X$. Маємо, що g_1 - напівнеперервна зверху, g_2 - напівнеперервна знизу, $g_1 \leq g_2$, отже, $\exists f$ - неперервна, така, що $g_1 \leq f \leq g_2$. Звідси випливає, що $f - \delta \leq g_2 - \delta$, та $g_1 + \delta \leq f + \delta$. А отже, $f - \delta \leq g_2 - \delta = g_* \leq g \leq g^* = g_1 + \delta \leq f + \delta$, а отже, $f - \delta \leq g \leq f + \delta$, звідси випливає, що $\|f - g\| \leq \delta$, тому $d(g, C(X)) \leq \delta$.

Отже, $d(g, C(X)) = \delta$. $\square$

5.3. Рівномірна відстань до простору $K_{x_0}(X)$ квазінеперервних у точці x_0 функцій.

Нехай X і Y — топологічні простори, $f : X \to Y$ — відображення і $x_0 \in X$.

Означення. Відображення $f : X \to Y$ називається квазінеперервним у точці x_0 з X, якщо для довільних околів U і V точок x_0 і $y_0 = f(x_0)$ у просторах X і Y відповідно існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. $f : X \to Y$ називається квазінеперервним, якщо воно квазінеперервне в кожній точці x з X

Зокрема, функція $f : X \to \mathbb{R}$ буде квазінеперервною у точці x_0 з X, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x_0 у просторі X існує непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$.

Сукупність усіх квазінеперервних у точці x_0 дійснозначних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ ми позначаємо символом $K_{x_0}(X)$. Будь-яка неперервна в точці $x_0 \in X$ функція f є квазінеперервною в цій точці. Обернене твердження не вірне. Наприклад, функція f, яка рівна нулю при $x = 0$ та $\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ є квазінеперервною в точці 0, але не є неперервною в цій точці.

Теорема 5.3.1. *Нехай* $b_1,\ b_2,\ b_3$ *– довільні дійсні числа і* $f = b_1\chi_{(-\infty,0)} + b_2\chi_{\{0\}} + b_3\chi_{(0,+\infty)}$. *Тоді*

$$d(f,\ K_0(\mathbb{R})) = d(f,\ S_0(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\min\left\{|b_1 - b_2|\,,\,|b_2 - b_3|\right\}.$$

Якщо $b_1 = -1$, $b_2 = 0,\ b_3 = 1,$ *то* $f(x) = sgnx$ *і* $d(sgnx,,\ K_0(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}$, *але* $d(sgnx, C(\mathbb{R})) = 1$.

Доведення. Нехай $g \in S_0(\mathbb{R})$. Доведемо, що

$$d(f,g) \geq \frac{1}{2}\min\{|b_1 - b_2|, |b_2 - b_3|\}$$

Припустимо, що $|g(x_0) - b_3| \geq \frac{|b_3-b_2|}{2}$, для деякого $x_0 > 0$. Тоді

$$d(f,g) \geq |f(x_0) - g(x_0)| = |b_3 - g(x_0)| \geq \frac{|b_3 - b_2|}{2} \geq b$$

Якщо ж $|g(x_0) - b_1| \geq \frac{|b_1-b_2|}{2}$, для деякого $x_0 < 0$, то:

$$d(f,g) \geq |f(x_0) - g(x_0)| = |b_1 - g(x_0)| \geq \frac{|b_1 - b_2|}{2} \geq b$$

Нехай тепер $|g(x) - b_1| < \frac{|b_1-b_2|}{2}$ при $x < 0$ і $|g(x) - b_3| < \frac{|b_2-b_3|}{2}$ при $x > 0$. Доведемо, що тоді $|g(0) - b_2| \geq b$. Нехай це не так, тобто $|g(0) - b_2| < b$.

Розглянемо окіл $V = (b_2 - b, b_2 + b)$ точки $g(0)$. З ледь неперервності g в точці 0 випливає, що існує інтервал $G = (\alpha, \beta)$, $(\alpha < \beta)$, такий, що $g(G) \subseteq V$. А отже, існує $x^* \in G \backslash \{0\}$. Якщо $x^* > 0$, то $|g(x^*) - b_3| < \frac{|b_2 - b_3|}{2}$ і $|g(x^*) - b_2| < b$. Тоді : $|b_2 - b_3| \leq |b_2 - g(x^*)| + |g(x^*) - b_3| < b + \frac{|b_2 - b_3|}{2} \leq \frac{|b_2 - b_3|}{2} + \frac{|b_2 - b_3|}{2} = |b_2 - b_3|$

Отримана суперечність показує, що $|g(0) - b_2| \geq b$. В такому разі :

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| \geq |f(0) - g(0)| = |b_2 - g(0)| \geq b.$$

А отже :

$$d(f, K_0(\mathbb{R})) \geq b$$

Розглянемо функцію :

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{b_1 + b_2}{2}, & \text{при } x < 0; \\ \frac{b_2 + b_3}{2}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases},$$

яка є ледь неперервною за побудовою, і для якої $d(f, g_0) = b$. □

Аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 5.3.2. *Нехай* $|b| > 1$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ *при* $x \neq 0$ *і* $f(0) = b$. *Тоді*

$$d(f,\ K_0(\mathbb{R})) = d(f,\ S_0(\mathbb{R})) = \frac{|b| - 1}{2}.$$

Нехай $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $f : E \to \mathbb{R}$, $D_f = E$ та x_0 гранична справа для E (тобто $\forall \delta > 0 | E \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$). Позначимо $\underline{l} = \underline{f}(x_0 + 0) = \sup\limits_{\delta > 0} \inf\limits_{x_0 < x < x_0 + \delta} f(x)$, $\overline{l} = \overline{f}(x_0 + 0) = \inf\limits_{\delta > 0} \sup\limits_{x_0 < x < x_0 + \delta} f(x)$, $M_f^+(x_0; \delta) = \sup\limits_{x_0 < x < x_0 + \delta} f(x)$ та $m_f^+(x_0; \delta) = \inf\limits_{x_0 < x < x_0 + \delta} f(x)$.

Лема 5.3.1. *Нехай* $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$,. *Тоді виконуєтьcя наступне:*

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \mid f(x) < \overline{f}(x_0 + 0) + \varepsilon$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in (x_0, x_0 + \delta) \mid f(x) > \overline{f}(x_0 + 0) - \varepsilon$

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \mid f(x) > \underline{f}(x_0 + 0) - \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in (x_0, x_0 + \delta) \mid f(x) < \underline{f}(x_0 + 0) + \varepsilon$

Доведення. Надалі позначимо $M_f^+(x_0; \delta) = M_f$, $m_f^+(x_0; \delta) = m_f$.

1) Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки верхня границя $\overline{l}$ є точною нижньою межею чисел M_f, то знайдеться таке $\delta > 0$, що $M_f < \overline{l} + \varepsilon$. Але, за означенням

супремуму, $f(x) \leq M_f$ на $(x_0, x_0+\delta)$, отже, $f(x) < \bar{l}+\varepsilon$ для всіх x з $(x_0, x_0+\delta)$.

2) Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки верхня границя $\bar{l}$ є точною нижньою межею чисел M_f, то для довільного $\delta > 0$ $M_f > \bar{l}-\varepsilon$. Але, так як M_f є точною верхньою межею чисел $f(x)$ при $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то існує $x \in (x_0, x_0+\delta)$, такий, що $f(x) > \bar{l}-\varepsilon$.

3) Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки нижня границя $\underline{l}$ є точною верхньою межею чисел m_f, то знайдеться таке $\delta > 0$, що $m_f > \underline{l}-\varepsilon$. Але, за означенням інфімуму, $f(x) \geq m_f$ на $(x_0, x_0+\delta)$, а отже, $f(x) > \underline{l}-\varepsilon$ для всіх $x \in (x_0, x_0+\delta)$.

4) Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки нижня границя $\underline{l}$ є точною верхньою межею чисел m_f, то $m_f < \underline{l}+\varepsilon$ для довільного $\delta > 0$. Оскільки m_f є точною нижньою межею чисел $f(x)$, то існує $x \in (x_0, x_0+\delta)$, такий, що $f(x) < \underline{l}+\varepsilon$. $\square$

Лема 5.3.2. *1) Нехай $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — функція, яка неперервна на $(x_0, +\infty)$ і $\underline{l} \leq f(x_0) \leq \bar{l}$. Тоді f — квазінеперервна в x_0.*

2) Нехай $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — функція, $f(x_0) \notin [\underline{l}, \bar{l}]$. Тоді f не є квазінеперервною в точці x_0.

Доведення. 1) Позначимо $y_0 = f(x_0)$. Візьмемо довільні додатні числа ε і δ, і покладемо $V = (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ і $U = [x_0, x_0+\delta)$. Покажемо, що існує таке ξ, що $x_0 < \xi < x_0+\delta$ і $f(\xi) \in V$.

За лемою 5.3.1 існують такі точки x^* і x_*, що $x^*, x_* \subseteq (x_0, x_0+\delta) = G$, $f(x^*) > \bar{l}-\varepsilon$, а $f(x_*) < \underline{l}+\varepsilon$.

Припустимо, що $f(x^*) < y_0+\varepsilon$. Оскільки $f(x^*) > \bar{l}-\varepsilon$ і $\bar{l} \geq y_0$, то $f(x^*) > y_0-\varepsilon$, отже

$$y_0 - \varepsilon < f(x^*) < y_0 + \varepsilon$$

належність $f(\xi) \in V$ виконується при $\xi = x^*$.

Нехай $f(x_*) > y_0-\varepsilon$. Оскільки $f(x_*) < \underline{l}+\varepsilon$ і $\underline{l} \leq y_0$, то $f(x_*) < y_0+\varepsilon$, отже:

$$y_0 - \varepsilon < f(x_*) < y_0 + \varepsilon.$$

В такому разі $f(\xi) \in V$ виконується при $\xi = x_*$.

Нехай тепер $f(x^*) \geq y_0 + \varepsilon$ і $f(x_*) \leq y_0 - \varepsilon$. Розглянемо відрізок I з кінцями x_* і x^*. Оскільки $x_0 < x^* < x_0 + \delta$ та $x_0 < x_* < x_0 + \delta$, то $I \subseteq (x_0, x_0 + \delta)$. За умовою $D(f) = x_0$, тому $I \subseteq C(f)$, тобто функція f неперервна на I. Але

$$f(x_*) \leq y_0 - \varepsilon < y_0 = f(x_0) < y_0 + \varepsilon \leq f(x^*),$$

Отже, $f(x_*) < y_0 < f(x^*)$. За теоремою про проміжне значення існує точка $\xi \in I$, така, що $f(\xi) = y_0$. Зрозуміло, що $x_0 < \xi < x_0 + \delta$. Таким чином, оголошена нами властивість доведена , і ми маємо таку точку ξ, що $x_0 < \xi < x_0 + \delta$ і $f(\xi) \in V$.

Оскільки і $V = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ і $G = (x_0, x_0 + \delta)$ - відкриті інтервали, та V- окіл точки $f(\xi)$, і з неперервності функції f у точці ξ випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $U_0 = (\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq G$ і $f(U_0) \subseteq V$. Ми знайшли відкриту непорожню множину U_0 таку, що $U_0 \subseteq U$ і $f(U_0) \subseteq V$, що і дає нам квазінеперервність функції f у точці x_0.

2) Нехай $y_0 \notin [\underline{l}, \overline{l}]$. Доведемо, що тоді f не буде квазінеперервною в точці x_0.

Припустимо, що $y_0 > \overline{l}$. Візьмемо $\varepsilon = y_0 - \overline{l}$ та $v = (\overline{l} + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty)$ - окіл точки y_0. Згідно з 1) Леми 5.3.1, знайдеться $\delta > 0$, таке, що для довільного $x \in (x_0, x_0 + \delta) | f(x) < \overline{l} + \frac{\varepsilon}{2}$. Покладемо $U = [x_0, x_0 + \delta)$, $G = (x_0, x_0 + \delta)$. Очевидно, що для довільної відкритої і непорожньої множини $U_0 \subseteq U$ виконується $U_0 \cap G \neq \emptyset$. Для довільної $x \in U_0 \cap G$ $f(x) < \overline{l} + \varepsilon$, отже, $f(x) \notin V$, а тому $f(U_0) \nsubseteq V$.

Таким чином, ми знайшли V - окіл точки y_0 та U - окіл x_0, такі, що для довільної відкритої та непорожньої $U_0 \subseteq U$ виконується $f(U_0) \nsubseteq V$ - функція f не є квазінеперервною в точці x_0.

Припустимо тепер, що $y_0 < \overline{l}$. Візьмемо $\varepsilon = \overline{l} - y_0$ та $V = (-\infty, \overline{l} - \frac{\varepsilon}{2})$ - окіл точки y_0. Згідно з 3) Леми 5.3.1, знайдеться $\delta > 0$, таке, що для довільного $x \in (x_0, x_0 + \delta) | f(x) > \underline{l} - \frac{\varepsilon}{2}$. Покладемо $U = [x_0, x_0 + \delta)$, $G = (x_0, x_0 + \delta)$. Для довільної $x \in U_0 \cap G$ $f(x) > \underline{l} - \frac{\varepsilon}{2}$, а отже, $f(x) \notin V$, а тому $f(U_0) \nsubseteq V$.

Таким чином, ми знайшли V — окіл точки y_0 та U — окіл точки x_0, такі, що для довільної відкритої та непорожньої $U_0 \subseteq U$ виконується $f(U_0) \nsubseteq V$.

Отже, ми отримали, що функція f не є квазінеперервної в точці x_0. $\square$

Означення Позначимо символом $K^+_{x_0}$ множину всіх квазінеперервних у точці x_0 функцій $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, та $K^-_{x_0}$ множину всіх квазінеперервних у точці x_0 функцій $f : (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$.

Теорема 5.3.3. *Нехай $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ – функція, $D(f) \subseteq x_0$ та $y_0 = f(x_0) \notin [\underline{l}, \bar{l}]$. Тоді*

$$d(f, K^+_{x_0}) = \frac{1}{2}\min\{| \underline{l} - y_0 |, | \bar{l} - y_0 |\} = \Delta$$

.

Доведення. Розглянемо функцію $g_0 : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, яка при $y_0 > \bar{l}$ визначається як $g_0(x) = f(x) + \Delta$ при $x > x_0$ та $g_0(x) = y_0 - \Delta$ при $x = x_0$, а при $y_0 < \underline{l}$ визначається як $g_0(x) = f(x) - \Delta$ при $x > x_0$ та $g_0(x) = y_0 + \Delta$ при $x = x_0$

Оскільки $| f(x) - g_0(x) |=| \pm\Delta |= \Delta$ для всіх $x \geq x_0$, то $d(f, g_0) = \Delta$.

Доведемо, що g_0 - квазінеперервна в точці x_0.

Оскільки f — неперервна при $x > x_0$, то такою ж буде і функція g_0, адже $g_0(x) = f(x) + \Delta$ або $g_0(x) = f(x) - \Delta$ при $x > x_0$.

Якщо $y_0 > \bar{l}$ то $0 < y_0 - \bar{l} \leq y_0 - \underline{l}$, тому $\Delta = \frac{1}{2}(y_0 - \bar{l})$. Знайдемо $\overline{g_0}(x_0+0)$ і $g_0(x_0)$:

$$\overline{g_0}(x_0+0) = \overline{\lim_{x\to x_0+0}} g_0(x) = \overline{\lim_{x\to x_0+0}}(f(x)+\Delta) = \bar{l}+\Delta = \bar{l}+\frac{1}{2}(y_0-\bar{l}) = \frac{1}{2}(y_0+\bar{l}),$$

$$g_0(x_0) = y_0 - \Delta = y_0 - \frac{1}{2}(y_0 - \bar{l}) = \frac{1}{2}(y_0 + \bar{l}).$$

Таким чином, $g_0(x_0) = \overline{g_0}(x_0 + 0)$

Якщо $y_0 < \underline{l}$ то $\bar{l} - y_0 \geq \underline{l} - y_0 > 0$, а отже, $\Delta = \frac{1}{2}(\underline{l} - y_0)$. У цьому випадку:

$$\underline{g_0}(x_0+0) = \underline{\lim_{x\to x_0+0}} g_0(x) = \underline{\lim_{x\to x_0+0}}(f(x)-\Delta) = \underline{l}-\Delta = \underline{l}-\frac{1}{2}(\underline{l}-y_0) = \frac{1}{2}(y_0+\underline{l}),$$

$$g_0(x_0) = y_0 + \Delta = \frac{1}{2}(y_0 + \underline{l}).$$

Тут також маємо $g_0(x_0) = \underline{g_0}(x_0+0)$. Отже, $g_0(x_0) \in [\underline{g_0}(x_0+0), \overline{g_0}(x_0+0)]$, звідси, за лемою 5.3.2 маємо, що g_0 є квазінеперервною в точці x_0.

Таким чином, $g_0 \in K^+_{x_0}$ і $d(f, g_0) = \Delta$. Доведемо тепер, що ця відстань є мінімальною, тобто, що для довільного $g \in K^+_{x_0}$, $d(f, g_0) \geq \Delta$.

Припустимо, що $g(x) > f(x) + \Delta$ для деякого $x > x_0$. Тоді

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq | g(x) - f(x) | = g(x) - f(x) > \Delta,$$

бо $g(x) - f(x) > \Delta > 0$.

Припустимо тепер, що $g(x) < f(x) - \Delta$ для деякого $x > x_0$. Тоді

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq | g(x) - f(x) | = f(x) - g(x) > \Delta,$$

бо $f(x) - g(x) > \Delta > 0$.

Нехай тепер $f(x) - \Delta \leq g(x) \leq f(x) + \Delta$ для кожного $x > x_0$. Тоді $\overline{g_0}(x_0 + 0) = \overline{\lim_{x \to x_0+0}} g_0(x) = \overline{\lim_{x \to x_0+0}}(f(x) + \Delta) = \bar{l} + \Delta$ і $\underline{g_0}(x_0 + 0) = \underline{\lim_{x \to x_0+0}} g_0(x) = \underline{\lim_{x \to x_0+0}}(f(x) - \Delta) = \underline{l} - \Delta$. За лемою 5.3.2 з квазінеперервності функції g в точці x_0 випливає, що

$$\underline{g_0}(x_0 + 0) \leq g(x_0) \leq \overline{g_0}(x_0 + 0).$$

Тому $\underline{l} - \Delta \leq g(x_0) \leq \bar{l} + \Delta$. В такому разі

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq | g(x_0) - f(x_0) | = f(x_0) - g(x_0) \geq y_0 - \bar{l} - \Delta = 2\Delta - \Delta = \Delta,$$

якщо $y_0 > \bar{l}$, і

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq | g(x_0) - f(x_0) | = g(x_0) - f(x_0) \geq \underline{l} - \Delta - y_0 = 2\Delta - \Delta = \Delta,$$

якщо $y_0 < \underline{l}$.

Ми показали, що для кожної функції $g \in K^+_{x_0}$ виконується нерівність $||f - g|| \geq \Delta$, а для функції $g_0 \in K^+_{x_0}$ має місце рівність $||f - g|| = \Delta$. Тому $d(f, K^+_{x_0}) = \Delta$. $\square$

Лема 5.3.3. *Нехай $f : X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне і відкрите відображення на X, $g : Y \to Z$ — квазінеперервне в точці $y_0 = f(x_0)$ відображення. Тоді $h = g \circ f$ — квазінеперервне в точці x_0.*

Доведення. Нехай W — окіл точки $z_0 = h(x_0)$, та U — відкритий окіл точки x_0. $V = f(U)$ — відкритий, оскільки f — відкрите. Оскільки відображення

g — квазінеперервне, то існує H - відкрита і непорожня множина, така, що $H \subseteq V$ і $g(H) \subseteq W$.

Оскільки H — відкрита і f — неперервне, то $f^{-1}(H)$ — відкрите. Позначимо $G = f^{-1}(H) \cap U$. G — відкрита як перетин двох відкритих множин, та непорожня, оскільки f — сюр'єктивна. Окрім того, $h(G) = g(f(f^{-1}(H) \cap U)) = g(H) \subseteq W$. Отже, для довільного W — околу точки $z_0 = h(x_0)$ і довільного U — околу точки x_0 існує G — відкрита і непорожня, така, що $G \subseteq U$ і $h(G) \subseteq W$. Ми отримали, що h є квазінеперервною в точці x_0. $\square$

Теорема 5.3.4. *Нехай $f : (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ – функція, $D(f) \subseteq x_0$ та $y_0 = f(x_0) \notin [\underline{l} =, \bar{l}$. Тоді*

$$d(f, K_{x_0}^- = \frac{1}{2} \min\{|\ \underline{l} - y_0\ |, |\ \bar{l} - y_0\ |\} = \Delta$$

.

Доведення. Позначимо $h = f \circ \varphi$, де $\varphi(x) = 2x_0 - x$ — неперервна, сюр'єктивна і відкрита функція на $\mathbb{R}$. Знайдемо $h(x_0)$, $\overline{h}(x_0 + 0)$ та $\underline{h}(x_0 + 0)$:

$$h(x_0) = f(\varphi(x_0)) = f(x_0) = y_0$$

$$\overline{h}(x_0 + 0) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x_0 < x < x_0 + \delta} h(x) =$$

$$= \inf_{\delta > 0} \sup_{x_0 < x < x_0 + \delta} f(\varphi(x)) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x_0 - \delta < \varphi(x) < x_0} f(\varphi(x)) = \overline{f}(x_0 - 0);$$

оскільки при $x_0 < x < x_0 + \delta$, $x_0 - \delta < \varphi(x) < x_0$.

Аналогічно :

$$\underline{h}(x_0 + 0) = \sup_{\delta > 0} \inf_{x_0 < x < x_0 + \delta} h(x) =$$

$$= \sup_{\delta > 0} \inf_{x_0 < x < x_0 + \delta} f(\varphi(x)) = \sup_{\delta > 0} \inf_{x_0 - \delta < \varphi(x) < x_0} f(\varphi(x)) = \overline{f}(x_0 - 0).$$

Згідно з теоремою 5.3.3 маємо, що :

$$d(h, K_{x_0}^+) = \frac{1}{2} \min |h(x_0) - \overline{h}(x_0 + 0)|, |h(x_0) - \underline{h}(x_0 + 0)| =$$

$$= \frac{1}{2} \min |\ \underline{l} - y_0\ |, |\ \bar{l} - y_0\ | = \Delta.$$

Виберемо довільну $g \in K^+_{x_0}$, та порахуємо $d(h, g)$:

$$d(h, g) = \sup_{x \in [x_0, +\infty)} |h(x) - g(x)| = \sup_{x^* \in (-\infty, x_0]} |h(\varphi(x)) - g(\varphi(x))| =$$

$$= \sup_{x^* \in (-\infty, x_0]} |f(x^*) - g^*(x^*)| = d(f, g^*),$$

де $g^* = g \circ \varphi : (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ - квазінеперервна за лемою 5.3.3, $g^* \in K^-_{x_0}$.

Отже, для довільної $g \in K^+_{x_0}$ $d(h, g) = d(f, g^*)$, де $g^* = g \circ \varphi \in K^-_{x_0}$.

З даної ріності маємо, що

$$d(f, K^-_{x_0}) = d(h, K^+_{x_0}) = \Delta.$$

□

Означення Позначимо через $K^*_{x_0}(\mathbb{R})$ сукупність усіх двосторонньо квазінеперервних в точці x_0 функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5.4. Граничні множини та рівномірна відстань до $K(X)$.

Означення Нехай X — метричний прочтір, $A \subseteq X$, $\delta > 0$. Замкненим δ-околом множини A називається множина всіх $x \in X$ таких, що $d(x, A) \leq \delta$, і позначається $V_\delta[A]$.

Доведемо наступні властивості δ-околів множин:

Лема 5.4.1. *Нехай $A \subseteq X$. Тоді $V_\delta[A]$ — замкнена.*

Доведення. Позначимо $f(x) = d(x, A) : X \to \mathbb{R}$ — функція з X. Оскільки для кожного $x', x'' \in X$:

$$|f(x') - f(x'')| = |d(x', A) - d(x'', A)| \leq d(x', x'') = |x' - x''|,$$

то f - ріномірно неперервна на X, а отже і неперервна на X. Оскільки $[0, \delta]$ — замкнена в $\mathbb{R}$ то $f^{-1}([0, \delta]) = \{x \in X : d(x, A) = f(x) \leq \delta\} = V_\delta[A]$ — замкнена в X як прообраз замкненої при неперервному відображенні. □

Лема 5.4.2. *Нехай $A, B \subseteq X$. Тоді, якщо $A \subseteq V_\delta[B]$, то $\overline{A} \subseteq V_\delta[\overline{B}]$.*

Доведення. Оскільки $V_\delta[B] \subseteq V_\delta[\overline{B}]$, і $V_\delta[B]$ — замкнена, то з того, що $A \subseteq V_\delta[B]$ випливає, що $A \subseteq V_\delta[B] \subseteq V_\delta[\overline{B}] \Rightarrow \overline{A} \subseteq V_\delta[\overline{B}]$. □

Лема 5.4.3. *Нехай X — обмежений секвенціально-компактний метричний простір, A_n — замкнені і $A_n \downarrow A$. Тоді*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_\delta[A_n] = V_\delta[A]$$

.

Доведення. Нехай $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_\delta[A_n]$. Тоді $x \in V_\delta[A_n]$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, а отже, $d(x, A_n) \leq \delta$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Існує $x_n \in A_n$, такий, що $d(x, x_n) \leq \delta + \frac{1}{n}$. Тоді послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — обмежена, а звідси, оскільки X — обмежений секвенціально-компактний, то існує $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ — підпослідовність елементів з $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, таких, що $x_{n_k} \to a$.

Оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$ $n_k \geq k$, то $n_k \geq m$ для всіх $m \leq k$. А тоді $x_{n_k} \in A_{n_k} \subseteq A_m$ (оскільки при $k \geq m$ $A_k \subseteq A_m$). Отже, $x_{n_k} \in A_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і для всіх $k \geq m$, а отже, окільки A_m - замкнений, то $a \in A_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. А тому, $a \in A$.

Оскільки $d(x, x_{n_k}) \leq \delta + \frac{1}{n_k}$, то спрямовуючи $k \to \infty$, маємо, що $d(x, a) \leq \delta$. Оскільки $a \in A$, то $x \in V_\delta[A_n]$, а звідси випливає, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_\delta[A_n] \subseteq V_\delta[A]$.

З іншого боку, оскільки $A \subseteq A_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $V_\delta[A_n] \supseteq V_\delta[A]$, звідси випливає, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_\delta[A_n] \supseteq V_\delta[A]$. Таким чином, маємо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_\delta[A_n] = V_\delta[A]$. □

Означення Нехай X і Y — топологічні простори, $D \subseteq X$, $x_0 \in \overline{D}, \mathcal{U}_{x_0}$ — система всіх околів точки x_0 в X і $f : D \to Y$ — відображення. Перетин $C(f, x_0) = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(U \cap D)}$ називається граничною множиною відображення f у точці x_0.

Для $f : X \to Y$ і точки $x_0 \in X$ ($x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$), покладемо $\dot{f} = f|_{X \setminus \{x_0\}}$ і $\dot{U} = U \setminus \{x_0\}$. Будемо розглядати граничні множини:

$$C(\dot{f}, x_0) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} f(\dot{U})$$

.

Лема 5.4.4. *Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір, $x_0 \in X$, $f : X \to Y$ — функція і $C(\dot{f}, x_0)$ — гранична множина функції $\dot{f} = f|_{X\setminus\{x_0\}} : X \setminus \{x_0\} \to Y$. Тоді для довільної відкритої множини $W \supseteq C(\dot{f}, x_0)$ існує окіл $U \in \mathcal{U}_{x_0}$, такий, що $\overline{f(\dot{U})} \subseteq W$.*

Доведення. Нехай $\overline{f(\dot{U})} \nsubseteq W$ для довільного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Позначимо $F_U = \overline{f(\dot{U})} \setminus W \neq \emptyset$. Оскільки при $U = U_1 \cap ... \cap U_n$ (де $U_1, ..., U_n$ — околи з$\mathcal{U}_{x_0}$) $F_{U_1} \cap ... F_{U_n} \supseteq F_U \neq \emptyset$, то $\{F_U : U \in \mathcal{U}_{x_0}\}$ — центрована система замкнених множин в компактному просторі Y. А отже, $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} F_U$. Проте маємо, що:

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} F_U = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} (\overline{f(\dot{U})} \setminus W) = C(\dot{f}, x_0) \setminus W = \emptyset$$

ми отримали суперечність. А отже, існує $U \in \mathcal{U}_{x_0} | \overline{f(\dot{U})} \subseteq W$. □

Теорема 5.4.1. *Нехай X — топологічний простір, $x_0 \in X$, $\{x_0\}$ — замкнена множина в X, $x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$, $f : X \to \mathbb{R}$ — деяка функція і $C(\dot{f}, x_0)$ — гранична множина функції $\dot{f} = f|_{X\setminus\{x_0\}} : X \setminus \to \{x_0\}\mathbb{R}$ зі значеннями в розширеній числовій прямій $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Тоді:*

а) Якщо $D(f) \subseteq \{x_0\}$ і $f(x_0) \in C(\dot{f}, x_0)$, то $f \in K_{x_0}(X)$;

б) Якщо $f(x_0) \notin C(\dot{f}, x_0)$, то $f \notin K_{x_0}(X)$.

Доведення. а) Припустимо, що $y_0 = f(x_0) \in C(\dot{f}, x_0)$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і $V = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ — окіл точки y_0. Нехай U — довільний окіл x_0 в X, U_1 — відкритий окіл точки x_0, такий, що $U_1 \subseteq U$. Очевидно, що оскільки $y_0 \in C(\dot{f}, x_0)$, то $y_0 \in \overline{f(\dot{U}_1)}$, а тому, оскільки V — відкрита, то $V \cap f(\dot{U}_1) \neq \emptyset$. Отже, існує $a \in \dot{U}_1$, така, що $f(a) = \dot{f}(a) \in V$. Звідси $|f(a) - y_0| < \varepsilon$. Позначимо $\varepsilon_0 = \varepsilon - |f(a) - y_0| > 0$. Оскільки $a \neq x_0$, то функція f неперервна в точці a, а отже, існує U_2 — відкритий окіл точки a, що для кожного $x \in U_2 | f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$. Оскільки $\{x_0\}$ — замкнена в X, то $\dot{U}_2 = U_2 \setminus \{x_0\}$ - відкрита в X, як різниця відкритої і замкненої множин. Позначимо $G = U_1 \cap \dot{U}_2$ — відкрита (як перетин двох відкритих множин) та непорожня ($a \in U_1$ і $a \in U_2$). Крім того, для довільного $x \in G$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(x_0)| < \varepsilon_0 + |f(a) - y_0| =$$

$$= \varepsilon - |f(a) - y_0| + |f(a) - y_0| = \varepsilon,$$

отже, $f(x) \in V$.

Таким чином, для довільного V — околу точки $f(x_0)$ і довільного околу U точки x_0 існує $G \subseteq U$ — відкрита і непорожня, така, що $f(G) \subseteq V$. Тоді маємо, що f — квазінеперервна в точці x_0.

б) Припустимо, що $f(x_0) \notin C(\dot{f}, x_0)$. Позначимо $V = \mathbb{R} \setminus C(\dot{f}, x_0)$. Оскільки $C(\dot{f}, x_0)$ — замкнена в $\overline{\mathbb{R}}$, то V — відкрита в $\overline{\mathbb{R}}$, а значить і в $\mathbb{R}$, бо $V \subseteq \mathbb{R}$ і $\mathbb{R}$ — відкрита в $\overline{\mathbb{R}}$. Отже, оскільки $f(x_0) \in V$, то існує $\varepsilon > 0 | [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq V$. Позначимо $W = \overline{\mathbb{R}} \setminus [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ — відкрита множина в $\overline{\mathbb{R}}$. Очевидно, що $W \supseteq \overline{\mathbb{R}} \setminus V = C(\dot{f}, x_0)$. За лемою 5.4.3 маємо, що існує окіл $U \in \mathcal{U}_{x_0}$, такий, що $\overline{f(\dot{U})} \subseteq W$. Окрім того, $f(x_0) \notin W$.

Виберемо $G \subseteq U$ — непорожню відкриту множину в X. Нехай $x_0 \notin G$. Тоді існує $a \in G | a \neq x_0$. Якщо ж $x_0 \in G$, то G — окіл точки x_0. А тоді, оскільки $x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$, то $G \cap (X \setminus \{x_0\}) = G \cap \dot{X} \neq \emptyset$. Тобто, існує $a \in G \cap \dot{X}$, $a \in G$ та $a \neq x_0$.

Отже, існує $a \in G \setminus \{x_0\}$. Оскільки $a \neq x_0$, то $a \in \dot{U}$, а тоді $f(a) \in f(\dot{U}) \subseteq \overline{f(\dot{U})} \subseteq W$. Тоді $f(a) \notin (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) = V_0$, а отже, $f(G) \nsubseteq V_0$ (бо $a \in G$).

Таким чином, існує V_0 — окіл точки $f(x_0)$ та U — окіл точки x_0 такі, що для довільної відкритої множини G околу U, $f(G) \nsubseteq V$. Отже, маємо, що f не є квазінеперервною в точці x_0. □

Теорема 5.4.2. *Нехай X — топологічний простір з першою аксіомою зліченності, x_0 — неізольована точка в X, для якої множина $\{x_0\}$ — замкнена, і $f : X \to \mathbb{R}$ — обмежена функція, для якої $D(f) \subseteq \{x_0\}$, та $\dot{f} = f|_{X \setminus \{x_0\}}$. Тоді:*

$$d(f, K_{x_0}(X)) = \frac{1}{2}\rho(f(x_0), C(\dot{f}, x_0)) = \delta$$

Доведення. Оскільки $C(\dot{f}, x_0))$ — компактна, то існує $v_0 \in C(\dot{f}, x_0))$ — така, що $\rho(y_0, C(\dot{f}, x_0)) = \inf\{|y_0 - v| : v \in C(\dot{f}, x_0))\} = \min\limits_{v \in C(\dot{f}, x_0))} |y_0 - v| = |y_0 - v_0|$. Очевидно, що $|y_0 - v_0| = 2\delta$ і $v_0 \in \overline{f(\dot{U})}$ для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$.

Відповідно визначимо функцію g_0 наступним чином — при $y_0 > v_0$ $g_0(x) = f(x) + \delta$ коли $x \neq x_0$ та $g_0(x) = y_0 - \delta$ коли $x = x_0$; а при $y_0 < v_0$ $g_0(x) = f(x) - \delta$ коли $x \neq x_0$ та $g_0(x) = y_0 + \delta$ коли $x = x_0$. Оскільки $|f(x) - g_0(x)| = \delta$ для довільного $x \in X$, то $||f - g_0|| = \delta$.

Доведемо, що для довільного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $g_0(x_0) \in \overline{g_0(\dot{U})}$. Якщо $y_0 > v_0$, то

$$\overline{g_0(\dot{U})} = \overline{(f+\delta)(\dot{U})} = \overline{f(\dot{U}) + \delta} = \overline{f(\dot{U})} + \delta$$

. Оскільки $y_0 - v_0 = 2\delta$, то $y_0 - \delta = v_0 + \delta$, а $g_0(x_0) = f(x_0) - \delta = y_0 - \delta = v_0 + \delta$. Зауважимо, що $v_0 \in \overline{f(\dot{U})}$ адже $v_0 \in C(\dot{f}, x_0))$. Тому

$$g_0(x_0) = v_0 + \delta \in \overline{f(\dot{U})} + \delta = \overline{g_0(\dot{U})}$$

.

Якщо ж $y_0 < v_0$, то $\overline{g_0(\dot{U})} = \overline{(f-\delta)(\dot{U})} = \overline{f(\dot{U}) - \delta} = \overline{f(\dot{U})} - \delta$ та $v_0 + \delta \in \overline{f(\dot{U})} - \delta$. З того, що $v_0 - y_0 = 2\delta$ маємо, що $y_0 + \delta = v_0 - \delta = f(x_0) + \delta = g_0(x_0)$. А тому $g_0(x_0) = v_0 - \delta \in \overline{f(\dot{U})} - \delta = \overline{g_0(\dot{U})}$. Таким чином, $g_0(x_0) \in \overline{g_0(\dot{U})}$ для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Маємо, що $g_0(x_0) \in C(\dot{g}_0, x_0)$, а звідси, за теоремою 5.4.1, маємо, що $g_0(x_0) \in K_{x_0}(X)$.

Таким чином, $d(f, K_{x_0}(X)) \leq ||f - g_0|| = \delta$.

Доведемо тепер, що $d(f, g) \geq \delta$ при довільному $g \in K_{x_0}(X)$.

Нехай $g \in K_{x_0}(X)$. Припустимо, що $g(x) > f(x) + \delta$ для деякого $x \neq x_0$. Тоді:

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq |g(x) - f(x)| = g(x) - f(x) > \delta,$$

бо $g(x) - f(x) > \delta > 0$.

Припустимо, що $g(x) < f(x) - \delta$ для деякого $x \neq x_0$. Тоді:

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq |f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) > \delta,$$

бо $f(x) - g(x) > \delta > 0$.

Нехай тепер $f(x) - \delta \leq g(x) \leq f(x) + \delta$ для кожного $x \neq x_0$. Доведемо, що тоді $|g(x_0) - f(x_0)| \geq \delta$. Оскільки $f(x) - \delta \leq g(x) \leq f(x) + \delta$ для кожного $x \neq x_0$, то $g(x) \in V_\delta[f(x)] = [f(x) - \delta, f(x) + \delta]$ для кожного $x \neq x_0$. Отже, для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $g(\dot{U}) \subseteq V_\delta[f(\dot{U})]$. Згідно з першою частиною леми 5.4.1, тоді $\overline{g(\dot{U})} \subseteq V_\delta[\overline{f(\dot{U})}]$ для всіх $U \in \mathcal{U}_{x_0}$.

Оскільки X — простір з першою аксіомою зліченності, то існує $(U_n)_{n=1}|U_n \supseteq U_{n+1}$ і U_n — окіл точки x_0 для кожного $n \in \mathbb{N}$, така, що $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база околів точки x_0, і U_n — монотонно спадаюча. А отже,

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(\dot{U})} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(\dot{U_n})}.$$

Оскільки f обмежена на $X \backslash x_0$, то і g обмежена на $X \backslash x_0$ (тому що $f(x) - \delta \leq g(x) \leq f(x) + \delta$ для кожного $x \neq x_0$). А тоді $\overline{g(\dot{U})}$ $\overline{f}(\dot{U_n})$ — замкнені і обмежені , а отже і компактні для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$.

Тоді за другою частиною леми 5.4.3, маємо:

$$C(\dot{g}, x_0) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{g(\dot{U})} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g(\dot{U_n})} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} V_\delta[\overline{f(\dot{U_n})}] =$$

$$= V_\delta[\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(\dot{U_n})}] \subseteq V_\delta[\bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(\dot{U})}] = V_\delta[C(\dot{f}, x_0)]$$

Оскільки $\overline{g(\dot{U_n})} \subseteq V_\delta[\overline{f(\dot{U_n})}]$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, $C(\dot{g}, x_0) \subseteq V_\delta[C(\dot{f}, x_0)]$. Оскільки $g \in K_{x_0}(X)$, то за теоремою 5.4.1, $g(x_0) \in C(\dot{g}, x_0)$, а звідси $g(x_0) \in V_\delta[C(\dot{f}, x_0)]$. Тоді

$$\rho(g(x_0), C(\dot{f}, x_0)) \leq \delta,$$

а з іншого боку $\rho(f(x_0), C(\dot{f}, x_0)) \leq 2\delta$.

Отже, існує $b \in C(\dot{f}, x_0)|\rho(g(x_0), b) \leq \delta$. Тоді $-|g(x_0) - b| \geq -\delta$, $|f(x_0) - b| \geq 2\delta$, та:

$$|g(x_0) - f(x_0)| = |f(x_0) - b - (-b + g(x_0))| \geq |f(x_0) - b| - |g(x_0) - b| \geq 2\delta - \delta = \delta.$$

Таким чином, $|g(x_0) - f(x_0)| \geq \delta$, і $d(f, g) \geq |g(x_0) - f(x_0)| \geq \delta$. Отже, для кожного $g \in K_{x_0}(X)$ $d(f, g) \geq \delta$ і $d(f, g) = \delta$. Тоді

$$d(f, K_{x_0}(X)) = \delta.$$

$\square$

5.5. Висновки до розділу 5

У п'ятому розділі розглянуто задачу знаходження відстаней від деяких функцій до просторів функцій з деякими властивостями.

В підрозділі 5.1 розв'язано деякі приклади, повязані з знаходженням відстаней до простору неперервних функцій для деяких конкретних функцій першого класу Бера.

В підрозділі 5.2 доведено, що для довільної функції f на нормальному просторі X рівномірна відстань від неї до простору $C(X)$ всіх неперервних функцій на X рівна половині норми коливання функції f. Для доведення цієї теореми використовується теорема Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова.

В підрозділі 5.3 розглянуто задачу знаходження відстані від функцій до простору односторонньо квазінеперервних функцій. Доведено, що для $f : (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ — функціїї, $D(f) \subseteq x_0$ та $y_0 = f(x_0) \notin [\underline{l} =, \bar{l}$ маємо:

$$d(f, K^-_{x_0}) = \frac{1}{2}\min\{\mid \underline{l} - y_0 \mid, \mid \bar{l} - y_0 \mid\} = \Delta$$

.

В підрозділі 5.4 знайдено відстань до простору квазінеперервних в неізольованій точці x_0 функцій для обмеженої функції f та топологічного простору X з першою аксіомою зліченності. Виявляється, що в даному випадку формула повязана з граничною множиною функції $\dot{f} = f|_{X \setminus x_0}$ в точці x_0, а саме, $d(f, K_{x_0}(X)) = \frac{1}{2}\rho(f(x_0), C(\dot{f}, x_0))$.

ВИСНОВКИ

В дисертації застосовувалися методи загальної теорії функцій.

У дисертаційній роботі отримані такі нові наукові результати:

1) досліджено питання про існування проміжної афінної функції для пари функцій (g, h), де g — вгнута, h — опукла, та $g(x) \leq h(x)$ на векторному просторі X;

2) доведено існування проміжної кусково лінійної функції з даним значенням для пари функцій (g, h), де g — напівнеперервна зверху, h — знизу, та $g(x) < h(x)$ на відрізку;

3) доведено існування проміжної нескінченно диференційовної функції з даним значенням для пари функцій (g, h), де g — напівнеперервна зверху, h — знизу, та $g(x) < h(x)$ на відрізку, невиродженому проміжку та замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$;

4) доведено існування строго проміжної нескінченно диференційовної функції $f : X \to \mathbb{R}$ для строгих пар Гана, заданих на сепарабельних гільбертових просторах з допомогою диференційовних розбиттів одиниці, вписаних в задані відкриті покриття;

5) побудовано строго проміжну диференційовну функцію $f : X \to \mathbb{R}$ для строгих пар Гана, заданих на асплундових просторах з допомогою диференційовних розбиттів одиниці на цих просторах;

6) отримано аналог теореми Гана для певних многозначних відображень з топологічного простору X в $\mathbb{R}$;

7) введено поняття нарізної пари Гана на добутку просторів X та Y і встановлено, що для існування проміжної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ необхідною і достатньою умовою є нормальність простору $(X \times Y, \mathcal{C})$, де $\mathcal{C}$ — хрест-топологія на добутку топологічних просторів;

8) для кожної напівнеперервної знизу функції $\varphi : [a, b] \to [0, +\infty)$ і довільного відрізка $[c, d]$ побудовано нарізно неперервну функцію $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, таку, що нульове найкраще наближення $E_0(f^x) = \varphi(x)$ на $[a, b]$;

9) знайдено рівномірну відстань від довільної функції до простору неперервних на X функцій для нормального простору X;

10) знайдено відстань до простору квазінеперервних в неізольованій точці x_0, функцій заданих на топологічному просторі X з першою аксіомою зліченності для обмеженої функції $f : X \to \mathbb{R}$, у якої $D(f) \subseteq \{x_0\}$.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Усюди в даній роботі заголовні букви X, Y та Z використовуються для позначення топологічних просторів, ε і δ — для додатних чисел. Заголовні літери F, G та H використовуються для позначення многозначних відображень.

У тексті роботи також зустрічаються такі позначення:

ТВП — топологічний векторний простір.

$f|_E$ — звуження функції f на множину E.

$C^n(\mathbb{R})$ — простір усіх n разів неперервно диференційовних функцій на $\mathbb{R}$.

$Q[a, b]$ — множина усіх кусково лінійних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$\mathrm{supp} f$ — носій функції f, множина точок x, в яких $f(x) \neq 0$.

$D(f)$ — множина точок розриву функції f.

$S(\mathbb{R})$ — множина ледь неперервних функцій на $\mathbb{R}$.

$S_0((R))$ — множина ледь неперервних в нулі функцій на $\mathbb{R}$.

$CC(X \times Y, Z)$ — сукупність усіх нарізно неперервних функцій, заданих на добутку $X \times Y$ та зі значеннями в Z.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П.С. Александров, П.С. Урысон // М.: Наука, 1971. – 144с.

2. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Мат. вісн. НТШ. — 2013. — **10**. — С.135-158.

3. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. — М.: Наука, 1975. — 408с.

4. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

5. Маслюченко В.К. *Елементи теорії двоїстості.* — Чернівці: Рута, 2005. — 160 с.

6. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* — М.: ИЛ, 1962. — 896с.

7. *Математическая энциклопедия. Т.1.* — М.:1977. — 1152 ст.

8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 624 с.

9. Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. — Longman Scientific & Technical, 1993. — 359 p.

10. Маслюченко В. К. Лекції з функціонального аналізу. Ч.3. Гільбертові простори. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. — 71 с.

11. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир., 1967, — 203 с.

12. Bonic R., Frampton C., Differentiable functions on certain Banach spaces // Bull. of the Amer. Math. Soc. — 1965, — **71**. № 2. — C. 393-395.

13. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971. — 392 с.

14. Neubrunn T.: Quasi-continuity, Real. Anal. Exch. — **14**. №3 — (1988-1989) — P.259-306.

15. Michael E. Continuous selections I // Ann. of Math. — 1956. — **63**. — P.361–382.

16. Good C., Stares I. New proofs of classical insertion theorems // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 2000. — **41**,№1. — P.139-142.

17. Yamazaki K. The range of maps on classical insertion theorems // Acta Math. Hungar. — 2011. — **132**(1-2). — P.42-48.

18. Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric nonlinear functional analysis. V.1. — Amer.Math.Soc., 2000. — 488p.

19. Hahn H. Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien.Math. —naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

20. Dieudonne J. Une généralisation des espaces compacts // J. de Math. Pyres et Appl. — 1944. — **23**. — P.65-76.

21. Tong H. Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Bull.Amer.Math.Soc. — 1948. — **54**. — P.65.

22. Tong H. Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P.289-292.

23. Мельник В. Знаходження відхилень від функцій першого класу Бера до простору неперервних функцій // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ. 17 - 18 травня 2011. Фіз.-мат. науки. — Чернівці: ЧНУ, 2011. — С. 409 - 410.

24. Katetov M. Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' // Fund.Math. — 1953. — **40**. — P.203-205.

25. Katetov M. On real-valued functions in topological spaces // Fund.Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.

26. Dowker C. H. On countably paracompact spaces // Canad. J. Math. — 1951. — **3**. — P.219-224.

27. Маслюченко В.К., Петей С.П. Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації // Бук. мат. журн. — 2015. — 3,№2. — С.64-71.

28. Cascales B., Marciszewski W., Raja M. Distance to spaces of continuous functions // Topology Appl. — 2006. — **153**,№13. — P.2303–2319.

29. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про відстань до множин квазінеперервних у точці функцій // Буковинський математичний журнал 2 (2-3). — Чернівці: 2014. — С. 154 - 161.

30. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Побудова проміжних диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2018. — 70, № 5. — С. 672-681.

31. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про рівномірну відстань до різних функціональних класів // Тези доповідей IV Міжнародної Ганської конференції — Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2014. — с.110-113.

32. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про модифікацію однієї функції Гана // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге. Тези доповідей. — Чернівці: ЧНУ, 2015. — с.68-69.

33. Маслюченко В.К, Мельник В.С. Теореми про проміжну функцію для опуклих функцій// Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта 24-27 лютого 2016. (тези доповідей), - Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника 2016. - С.98-100.

34. Vasyl Melnyk, Volodymyr Maslyuchenko The development of Hahn's theorem on an intermediate function// International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski - 27 September - 1 October, 2016. — P.

35. V. Maslyuchenko, V.Mel'nyk. Uniform distance to the space of continuous functions // Міжн. конф. "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та її застосування"19 - 23 серпня 2013. - Київ; Інститут математики НАН України, 2013. — http://www.imath.kiev.ua/~complex/conf_2013/index.html

36. Маслюченко В.К, Мельник В.С. Про побудову диференційовних проміжних функцій // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 22 - 25 лютого 2017 р. - Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника 2017. - 138 с.

37. Маслюченко В.К, Мельник В.С. Асплундові простори та проміжні диференційовні функції // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування"присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007) 28 травня - 3 червня 2017 року, Словянськ, Україна: Тезидоповідей. - Словянськ: Донбаський державний педагогічний університе, 2017. - 104 с. http://www.slavdpu.dn.ua/stepconf2017/index.html

38. Melnyk V.C., On the intermediate multivalued function// Doctoral summerschool on Evolutionary Computing in Optimization and Data Mining JUNE 19 - 22, 2017, Alexandru Ioan Cuza University of Iasi, Romania. https://profs.info.uaic.ro/ summerschool/summerschool/public/

39. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Аналог теореми Гана для диференційовних за Фреше функцій // XII-та літня школа АТА, 10-23 липня 2017 р., с. 13-14.

40. V. Maslyuchenko, V.Mel'nyk On the intermediate separately continuous function // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017 http://at.yorku.ca/cgi-bin/abstract/cbnx-01

41. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про проміжну многозначу функцію // Матеріали міжвузівського наукового семінару Прикладні задачі та IT-технології, присвячений 100-річчю з дня народження професора Василя Павловича Рубаника (1917-1993) і 55-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій.

42. Bernstein S.N. Sur probleme inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues // Comp. Rend – 1938. – P. 1520-1523.

43. Бернштейн С.Н. Об одной обратной задаче теории приближения // Собрание сочинений в 4-х т. – М.: Изв-во АН СССР, 1954. – Т.2 – С. 292-294.

44. Васильев А.И. Обратная задача теории наилучшего приближения в F-пространствах // Доклады академии наук. – 1999. – С. 583-585.

45. Волошин Г., Маслюченко В. Узагальнення однієї теореми Бернштейна // Мат. вісн. НТШ. – 2009. – **6**. – С. 62-72.

46. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Функціональне узагальнення однієї теореми Бернштейна // Мат. студії. – 2010. – **33**, №2. – С.220-224.

47. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. Побудова нарізно неперервної функції від n змінних з даною діагоналлю// Мат. студії. –1999. – **12**, №1. – С.101-107.

48. Маслюченко В. К., Лекції с функціонального аналізу: Ч.1. Метричні і нормовані простори. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. — 184 с.

49. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про відстань до множин квазінеперервних у точці функцій // Буковинський математичний журнал 2 (2-3). — Чернівці: 2014. — С. 154 - 161.

50. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України — Київ: Інститут математики НАН України, 2014. — №1 — Т.XI. — с.158-166.

51. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Мельник В.С. Пари Гана і нульова обернена задача // Мат. студії. — 2017. — 48, №1. — С. 74-81.

52. Bernstein S.N. Sur probleme inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues // Comp. Rend – 1938. – P. 1520-1523.

53. Бернштейн С.Н. Об одной обратной задаче теории приближения // Собрание сочинений в 4-х т. – М.: Изв-во АН СССР, 1954. – Т.2 – С. 292-294.