b) beta function : $\beta(p \mid a,b) = p^{a-1}(1-p)^{b-1} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $\quad \underline{\qquad} \; 1/\beta(a,b)$

$E(x) = \frac{a}{a+b}$

證明看pdf.

$Var(x) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

* Assume 成功机率 p 我們試驗為 binomial 試驗 N 次 成功 m 次，likelihood (机率) 為 $\binom{N}{m} p^m (1-p)^{(N-m)}$

prior 假設為 beta function，試 a+b 次，成功 a 次

分佈 $p^{a-1}(1-p)^{b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

其机率為 $\frac{\text{likelihood} \times \text{prior}}{\text{marginal}}$

posterior

$$P(\theta, \text{event}) = \frac{\binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m} \, p^{a-1}(1-p)^{b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}{\int_0^1 \binom{N}{m} \theta^m (1-\theta)^{N-m} \, \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \, d\theta}.$$

$$= \frac{p^{m+a-1}(1-p)^{N-m+b-1}}{\underline{\int_0^1 \theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1} \, d\theta} = \frac{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)}{\Gamma(N+m+b)}.}$$

$$= p^{m+a-1}(1-p)^{N-m+b-1} \times \frac{\Gamma(N+m+b)}{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)}$$

$$\Rightarrow \beta(p, \overset{\#\text{sucess}}{a+m}, \overset{\#\text{fail}}{b+N-m})$$

$$\begin{cases} \text{prior} = \text{Beta}(p \mid a,b) \\ \text{likelihood} = \text{Binomial}(p \mid N,m) \end{cases}$$