0. Modelo de demanda dependiente del precio

Se modela la demanda del producto q en la tienda l durante el periodo t como una variable aleatoria normal, cuya media depende del precio de venta:

$$s_{qlt} \sim \mathcal{N}(\mu_{qlt}(p_{qlt}), \sigma^2_{qlt})$$

donde la media está dada por:

$$\mu_{qlt}(p_{qlt}) = \gamma_{qlt} \cdot \rho_{qlt} \cdot e^{-\alpha_{qlt} \cdot p_{qlt}}$$

Descripción de parámetros

- γ_{qlt}: Factor de estacionalidad para el producto q, tienda l, periodo t.
- ρ_{qlt}: Demanda base del producto q en la tienda l en el periodo t.
- α_{qlt}: Coeficiente de sensibilidad al precio (elasticidad).
- p_{qlt}: Precio de venta del producto q en la tienda l durante el periodo t.
- σ^2_{qlt}: Varianza de la demanda estimada para el producto q en la tienda l en el periodo t.

1 Conjuntos, Parámetros y Variables

Table 1: Conjuntos

Símbolo	**Descripción**
q	Conjunto de productos: $\{1, \ldots, Q\}$
l	Conjunto de tiendas: $\{1, \ldots, L\}$
t	Conjunto de períodos de tiempo: $\{1, \ldots, T\}$

Table 2: Parámetros de la función de demanda

Símbolo	**Descripción**
μ_{qlt}	Valor esperado de la demanda para el producto q en tienda l en el período t
σ^2_{qlt}	Varianza de la demanda para el producto q en tienda l en el período t

Table 3: Parámetros del modelo

Símbolo	**Descripción**
s_{qlt}	Demanda del producto q en tienda l en el período t
c_q	Costo unitario del producto q
K_q	Costo fijo por emitir una orden del producto q
dl_{qlt}	Penalización por unidad de demanda insatisfecha
w_{ql}	Valor residual por unidad en inventario al final del horizonte
$\bar{h}_q$	Costo de mantener inventario por unidad y período
IF_l	Capacidad máxima de almacenamiento en la tienda l
$pmin_{ql}$	Precio mínimo permitido para el producto q en tienda l
$pmax_{ql}$	Precio máximo permitido para el producto q en tienda l
$Transp_{vw}$	Diferencia máxima de precios permitida entre tiendas v y w
τ_{ql}	Porcentaje de la demanda insatisfecha que se considera perdida

Table 4: Variables de decisión

Símbolo	**Descripción**
o_{qlt}	Cantidad a ordenar del producto q en tienda l al inicio del período t
p_{qlt}	Precio del producto q en tienda l durante el período t

Table 5: Variables auxiliares

Símbolo	**Descripción**
I_{qlt}	Inventario disponible del producto q en tienda l al inicio del período t
y_{qlt}	Variable binaria: vale 1 si se realiza una orden en el período t, 0 en caso contrario

2 Modelo de optimización

Función objetivo:

$$\max_{o,p} \; Ben(o,p)$$

Sujeto a:

$$0 \leq I_{ql(t-1)} + o_{qlt} \leq IF_l \qquad \forall q,l,t \tag{1}$$

$$-Transp_{vw} \leq p_{qvt} - p_{qwt} \leq Transp_{vw} \qquad \forall q,t,v,w,\ v \neq w \tag{2}$$

$$pmin_{ql} \leq p_{qlt} \leq pmax_{ql} \qquad \forall q,l,t \tag{3}$$

$$\begin{aligned} o_{qlt} \leq I_{qlt} - I_{ql(t-1)} &+ \int_{-\infty}^{I_{ql(t-1)}+o_{qlt}} s_{qlt} f_{qlt}(s \mid p_{qlt})\, ds \\ &+ \tau_{ql} \int_{I_{ql(t-1)}+o_{qlt}}^{+\infty} s_{qlt} f_{qlt}(s \mid p_{qlt})\, ds \qquad \forall q,l,t \end{aligned} \tag{4}$$

$$o_{qlt} \leq M y_{ql(t-1)} \qquad \forall q,l,t \tag{5}$$

$$p_{qlt}, o_{qlt}, I_{qlt} \geq 0 \qquad \forall q,l,t \tag{6}$$

Beneficio esperado:

$$\begin{aligned} Ben(o,p) = &\sum_q \sum_l \sum_{t=1}^{T-1} \Bigg(\int_{-\infty}^{I_{ql(t-1)}+o_{qlt}} s f_{qlt}(s \mid p_{qlt})\, ds \\ &\cdot (p_{qlt} - c_q \cdot o_{qlt} - K_q \cdot y_{qlt}) \\ &- I_{qlt} \cdot \bar{h}q - \tau ql \cdot dl_{qlt} \\ &\cdot \int_{+\infty}^{I_{ql(t-1)}+o_{qlt}} s f_{qlt}(s \mid p_{qlt})\, ds \Bigg) \\ &+ \sum_q \sum_l \Bigg(\int_{-\infty}^{I_{ql(T-1)}+o_{qlT}} s f_{qlT}(s \mid p_{qlT})\, ds \\ &\cdot (p_{qlT} - c_q \cdot o_{qlT} - K_q \cdot y_{qlT}) \\ &+ I_{qlT} \cdot w_{ql} - \tau_{ql} \cdot dl_{qlt} \\ &\cdot \int_{+\infty}^{I_{ql(T-1)}+o_{qlT}} s f_{qlT}(s \mid p_{qlT})\, ds \Bigg) \end{aligned}$$

2.1. Función Objetivo (SAA)

Sets:

- H: Largo del horizonte rodante
- $i \in \{1, \ldots, N\}$: Índice de escenarios SAA

Parámetros:

- $\mu_{qlt}(p_{qlt})$: Demanda esperada (función del precio)
- σ_{qlt}: Desviación estándar de la demanda
- $z_{0.95} \approx 1.645$: Cuantil de la normal estándar para 95%

Maximizar la utilidad esperada:

$$
\begin{aligned}
\max_{p,o} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t'=t}^{t+H} \sum_{q} \sum_{l} \Big[& \min(s_{qlt'}^{(i)}, I_{ql(t'-1)} + o_{qlt'}) \cdot p_{qlt'} \\
& - c_q \cdot o_{qlt'} K_q \cdot y_{qlt'} \bar{h} q \cdot Iqlt' \\
& - dl_{qlt'} \cdot \max\left(s_{qlt'}^{(i)} - I_{ql(t'-1)} - o_{qlt'}, 0\right) \Big]
\end{aligned}
$$

donde $s_{qlt'}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\mu_{qlt'}(p_{qlt'}), \sigma_{qlt'}^2)$

2.2. Restricciones

(1) Capacidad de inventario:	$0 \leq I_{ql(t'-1)} + o_{qlt'} \leq IF_l$	$\forall q, l, t' \in [t, t+H]$	(1)
(2) Rango de precios:	$pmin_{ql} \leq p_{qlt'} \leq pmax_{ql}$	$\forall q, l, t' \in [t, t+H]$	(2)
(3) Arbitraje entre tiendas:	$\lvert p_{qvt'} - p_{qwt'} \rvert \leq Transp_{vw}$	$\forall q, v \neq w, t' \in [t, t+H]$	(3)
(4) Activación binaria:	$o_{qlt'} \leq M \cdot y_{qlt'}$	$\forall q, l, t' \in [t, t+H]$	(4)
(5) No negatividad:	$p_{qlt'}, o_{qlt'}, I_{qlt'} \geq 0$	$\forall q, l, t' \in [t, t+H]$	(5)
(6) Restricción probabilística 95%:	$I_{ql(t'-1)} + o_{qlt'} \geq \mu_{qlt'}(p_{qlt'}) + z_{0.95} \cdot \sigma_{qlt'}$	$\forall q, l, t' \in [t, t+H]$	(6)

3 Algoritmo

Algorithm 1 Optimización de precios con iteración y SAA

Inicializar:

for cada semana t **do**

  Establecer $p_t^{(0)} \leftarrow$ precio histórico promedio del producto

end for

Establecer criterio de parada: ϵ y M (máximo de iteraciones)

$k \leftarrow 0$

while no convergencia y $k < M$ **do**

  Paso 1: Generar demandas simuladas

  for cada semana t **do**

    Generar N muestras $D_t^{(i)} \sim \mathcal{D}(p_t^{(k)})$

  end for

  Paso 2: Resolver Modelo Propuesto con SAA

  Calcular $U^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{4} U_t(p_t^{(k)}, D_t^{(i)})$

  Paso 3: Optimización por coordenadas

  for cada semana t **do**

    Buscar nuevo precio $p_t^{(k+1)} \in$ vecindad de $p_t^{(k)}$

    Mantener fijos los precios $p_j^{(k+1)} = p_j^{(k)}$ para $j \neq t$

    Evaluar utilidad $U_t^{(k+1)}$ usando muestras para $p_t^{(k+1)}$

    if $U^{(k+1)} > U^{(k)}$ **then**

      Aceptar nuevo precio $p_t^{(k+1)}$

    else

      Revertir: $p_t^{(k+1)} \leftarrow p_t^{(k)}$

    end if

  end for

  if $|U^{(k+1)} - U^{(k)}| < \epsilon$ **then**

    Terminar iteración

  end if

  $k \leftarrow k + 1$

end while=0

4. Política de Ejecución

En cada periodo t:

1. Simular N escenarios de demanda futura para los próximos H periodos.

2. Resolver el modelo determinístico con restricciones anteriores.

3. Ejecutar sólo p_{qlt}, o_{qlt}.

4. Avanzar a $t + 1$ y repetir.