



ÁRVORE BINÁRIA DE BUSCA BALANCEADA (AVL)¹

-- TEORIA --

Introdução

Uma árvore é dita balanceada quando, para todos os seus nós externos (nós-folha), a diferença de nível em relação ao nó raiz é, em módulo, no máximo de 1 entre todos eles.

Estando balanceada, a busca de qualquer elemento que esteja na situação de pior caso (nó-folha) tem o mesmo custo para todos eles.

Porque ocorre o desbalanceamento

O desbalanceamento ocorre à medida que novos dados são inseridos na árvore de forma aleatória.

Exemplo

Se a sequência de dados a ser inserida for

10 - 12 - 16 - 7 - 19 - 5 - 22 - 8 - 20

A árvore ficará da seguinte maneira

¹ Sigla dos nomes dos criadores deste modelo (dois russos no início da década de 1960):

Georgy Maximovich **Adelson-Velsky**

Evgenii Mikhailovich **Landis**.

Professor Marcio Feitosa

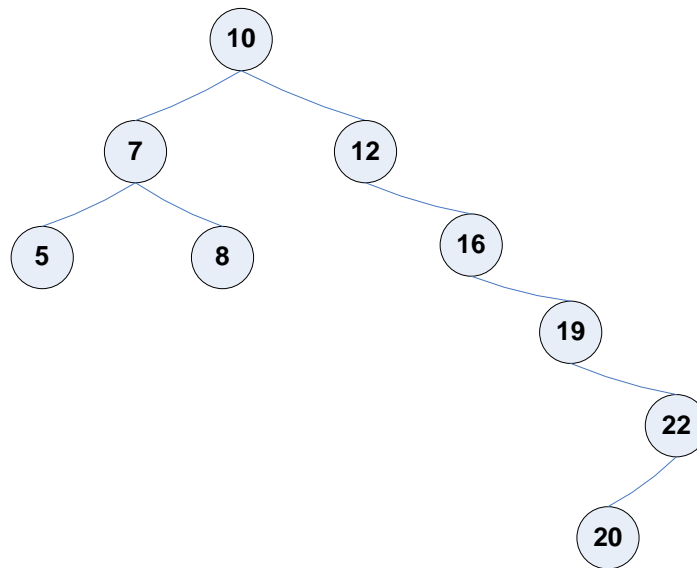


Figura 1

No exemplo da Figura 1 temos 3 nós-folha: 5, 8 e 20. Os nós 5 e 8 estão ambos no nível 2 (considerando que o raiz seja nível 0) e o 20 está em 5. Diferença de 3 níveis.

Pelo conceito do balanceamento esta árvore está desbalanceada, pois a diferença entre os níveis dos nós externos excede 1.

Fator de balanço

Em linhas gerais, o balanceamento pode ser analisado a partir de um nó genérico. Ou seja, um nó é considerado balanceado se em toda a sua árvore não houver diferença de nível maior que 1 entre todos os seus nós-folha.

O fator de balanço de um dado nó é um indicador mais genérico que representa a diferença entre o nível mais profundo da sua árvore esquerda em relação ao nível mais profundo da sua árvore direita (por convenção, a subárvore esquerda tem sinal negativo e a direita positivo). Se a diferença for -1, 0 ou 1, o nó é dito **regulado**, mas não necessariamente balanceado.

Para que a árvore, a partir de um dado nó, seja considerada balanceada, todos os seus nós têm que estar regulados.

Professor Marcio Feitosa

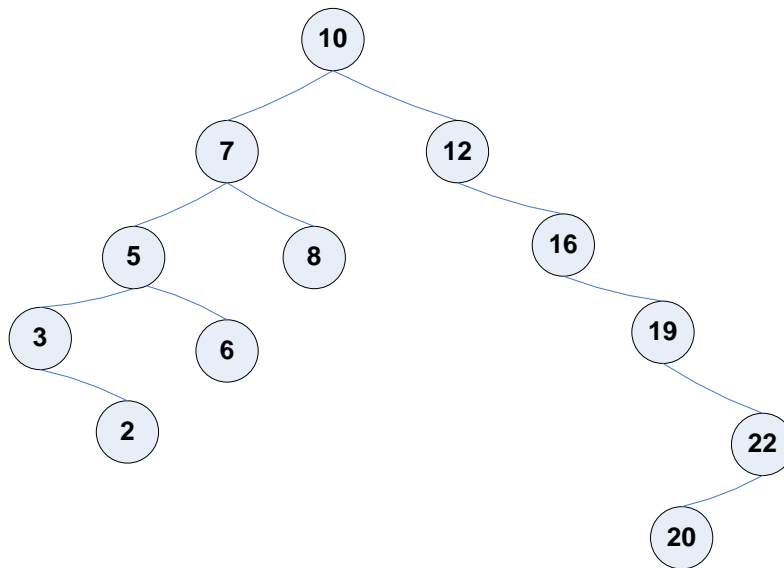


Figura 2

Na árvore da Figura 2, o nó 10 (raiz) é um nó regulado, pois a diferença entre a profundidade máxima da sua subárvore esquerda (4) e a da sua subárvore direita (5) é 1.

Já o nó 7 não é um nó regulado, pois sua árvore esquerda tem profundidade máxima de 3 e a direita de 1, ou seja, a diferença é -2.

Os nós-folha são sempre regulados: $0 - 0 = 0$

Algoritmos

Para se saber se um nó está **regulado** é necessário determinar a profundidade de sua subárvore esquerda e a de sua subárvore direita e comparar as duas. Para que a profundidade de uma subárvore seja determinada é necessário visitar todos os nós da subárvore.

Deve-se, portanto, fazer um percurso (em ordem, pós-ordem ou pré-ordem) a partir de cada um dos nós filhos do nó raiz.

Caso algum nó da subárvore apresente fator de balanço 2 ou -2, o balanceamento deverá ser corrigido. A técnica utilizada envolve as rotações e são 4 os tipos de rotação.

Rotações

Professor Marcio Feitosa



Rotação à esquerda

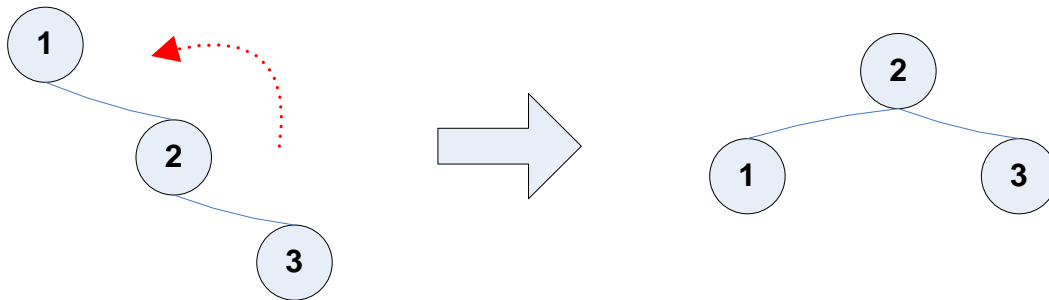


Figura 3

1. O filho da direita passa a ser a nova raiz
2. A raiz original passa a ser o filho da esquerda da nova raiz.

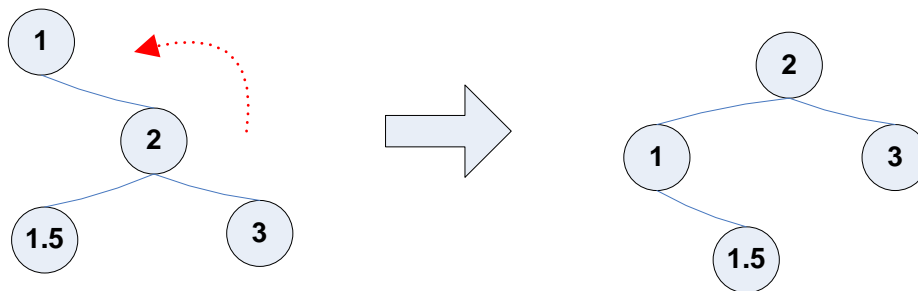


Figura 4

1. O filho da direita passa a ser a nova raiz
2. A raiz original passa a ser o filho da esquerda da nova raiz.
3. Se o filho à direita tiver um filho à esquerda, este passa a ser filho direito da raiz original.

Rotação à direita

Segue as mesmas regras da rotação à esquerda de forma "espelhada".

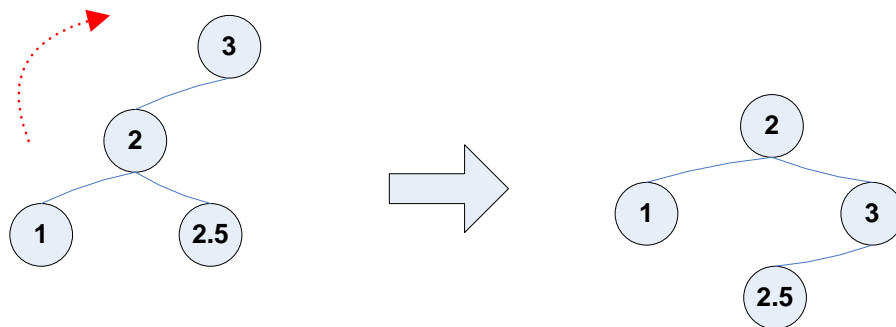


Figura 5

1. O filho da esquerda passa a ser a nova raiz.
2. A raiz original passa a ser o filho da direita da nova raiz.
3. Se o filho da esquerda tiver um filho à direita, este passa a ser filho esquerdo da raiz original.

Rotação dupla à esquerda

Há a necessidade de se fazer a dupla rotação quando o conjunto de nós forma um "joelho".

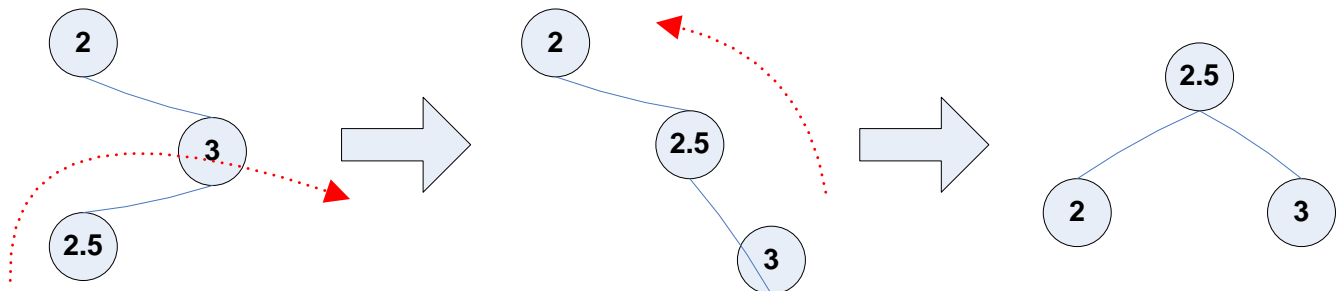


Figura 6

Rotação dupla à direita

Professor Marcio Feitosa

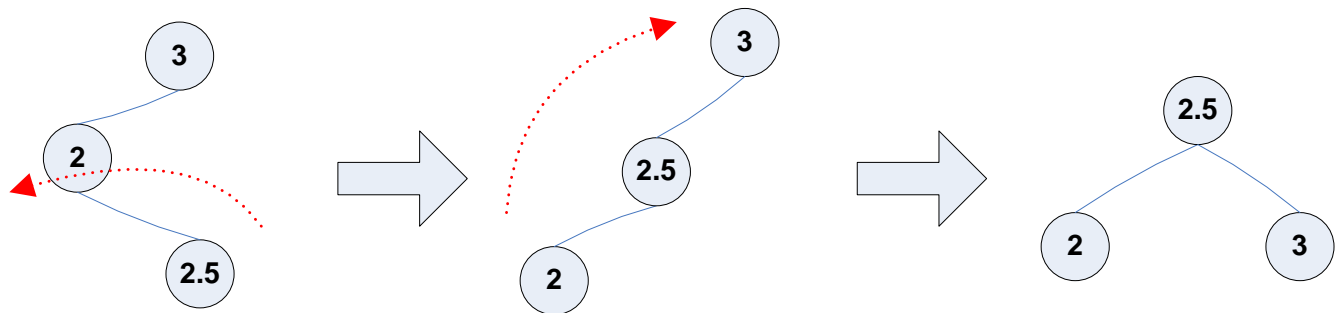


Figura 7

Esse "joelho" nem sempre está evidente da forma como foi apresentado na Figura 6 e na Figura 7. Ele pode estar rodeado de outros nós e não ser identificado dessa forma visual como estamos tratando aqui.

A seguinte rede está balanceada

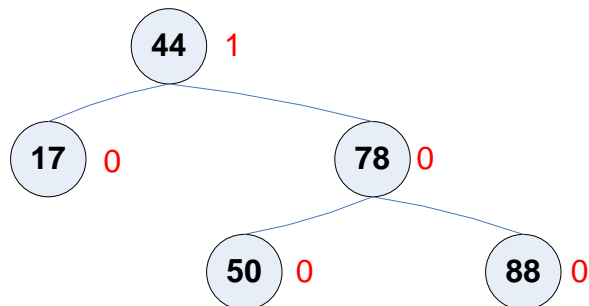


Figura 8

Ao inserirmos o nó 62, teremos

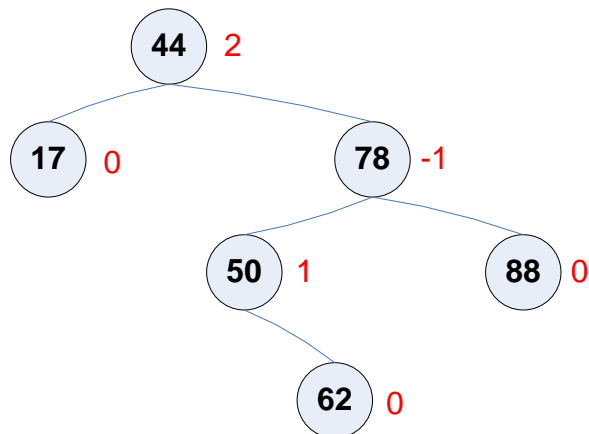


Figura 9

Professor

Marcio Feitosa



O nó 44 ficou desbalanceado com excesso no lado direito (+2). Para corrigir é necessário fazer uma rotação à esquerda para dar mais peso ao lado negativo.

Como não temos, visualmente, a formação de um "joelho", vamos fazer uma rotação simples e ver o que acontece.

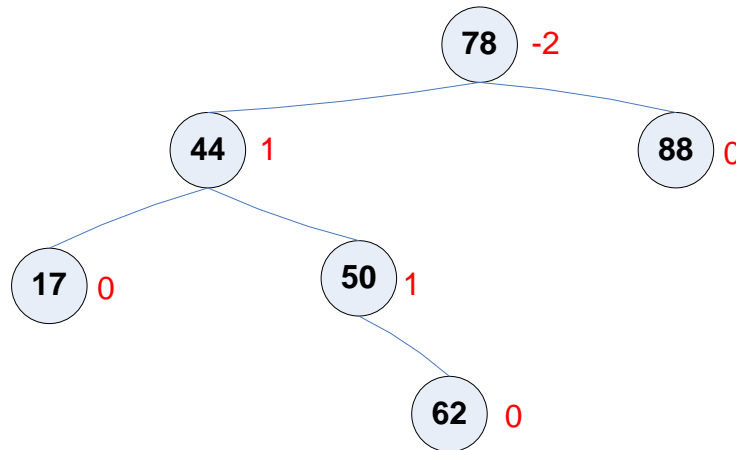


Figura 10

O problema continua, apenas mudou de lado. Isso significa que há um "joelho" na estrutura. Para identificá-lo é só verificarmos o sinal do fator de balanço do nó desregulado.

Se for positivo, significa que está desbalanceado à direita. Se o filho à direita for negativo (sinal oposto), significa que há um "joelho" e, portanto, se faz necessária a rotação dupla. Se for positivo (mesmo sinal), não há "joelho" e pode-se aplicar a rotação simples.

A mesma regra vale para o desbalanceamento à esquerda, trocando-se os sinais.

Voltando então à Figura 9, o nó 44 está desbalanceado à direita, mas seu filho à direita está com sinal negativo, ou seja, está desbalanceado à esquerda. Isto é que caracteriza o "joelho". Então, primeiramente, devemos fazer a rotação à direita do nó 50 em relação ao 78². Em seguida faz-se a rotação à esquerda.

² A Figura 11 e a Figura 12 foram editadas erroneamente como nó 73. Onde aparecer 73, leia-se 78.

Professor Marcio Feitosa

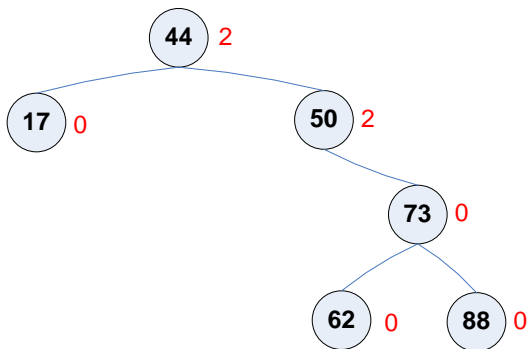


Figura 11

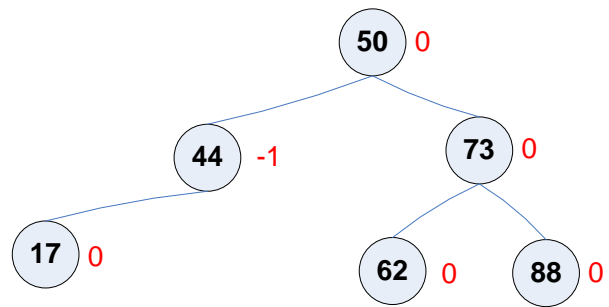


Figura 12

Se ao invés de inserirmos o nó 62, tivéssemos inserido o nó 92.

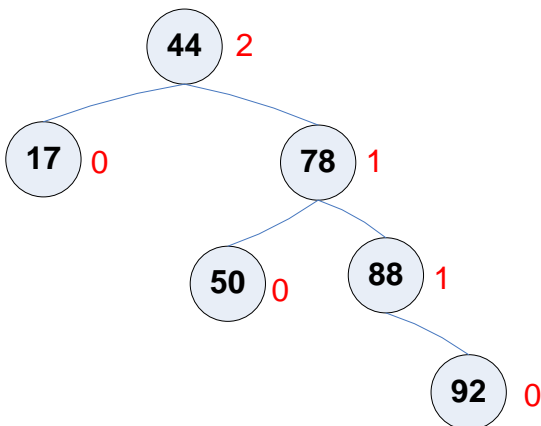


Figura 13

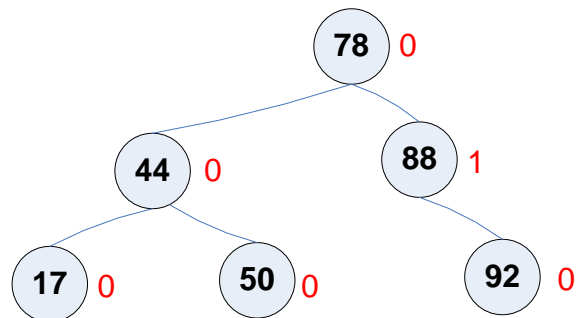


Figura 14

O desbalanceamento em 44 é à direita e seu filho à direita tem o mesmo sinal, logo não há "joelho". Pode-se aplicar diretamente a rotação simples à esquerda (Figura 13 e Figura 14).

Remoção de nós

Assim como desejamos inserir nós na árvore, também pode ser necessário remover. Existem 3 situações possíveis do nó a ser removido:

1. Não tem filhos.
2. Tem apenas um filho.
3. Tem os dois filhos.

Temos duas etapas: (a) excluir e, nos casos 2 e 3, religar os nós que perderam o pai e (b) verificar como ficou o balanceamento.

No caso 1:

Professor Marcio Feitosa



- Se for o nó raiz a árvore se torna vazia.
- Se não for o nó raiz, basta atribuir NULL ao ponteiro do seu pai.

No caso 2:

- Se for o nó raiz, seu filho passa a ser o novo nó raiz.
- Se não for o nó raiz, basta transferir o seu filho para o seu lugar, passando a ser filho do seu pai.

No caso 3:

- Se o nó pertencer à subárvore esquerda, substitui-se pelo nó mais à esquerda da sua subárvore direita.
- Se o nó pertencer à subárvore direita, substitui-se pelo nó mais à direita da sua subárvore esquerda.
- Se o nó for o raiz, promove-se o nó de maior valor na subárvore esquerda ou o de menor valor na subárvore direita.

Controle computacional do fator de balanço de cada nó

Para que se possa fazer a verificação das novas profundidades, uma vez executada uma inserção ou uma remoção, não seria eficiente ter que percorrer todos os ramos abaixo e acima do nó inserido/removido para verificar as novas profundidades e ocorrência de desbalanceamento.

Para melhorar a eficiência deste controle, inserem-se na classe Nó dois indicadores das profundidades dos seus ramos direito e esquerdo. Ou seja, cada um dos nós da árvore terá esses indicadores.

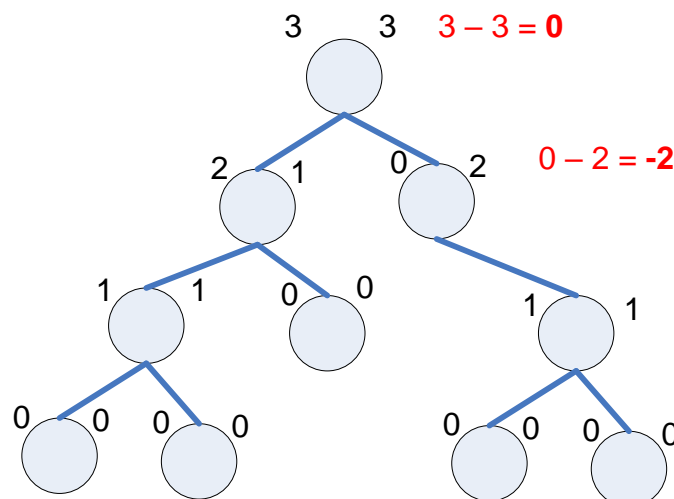


Figura 15

Professor *Marcio Feitosa*



Quando inserir ou remover um nó, implementa-se uma pilha para armazenamento do percurso da raiz até o nó alvo. O desbalanceamento, caso ocorra, sempre se dá neste percurso.

A profundidade direita de um nó sempre será a maior profundidade (esquerda ou direita) do seu filho direito acrescida de uma unidade. Se este o filho for nulo, terá o valor zero.

A profundidade esquerda será a maior profundidade do seu filho esquerdo acrescida de uma unidade. Se este o filho for nulo, terá o valor zero.

Depois de inserido ou removido o nó, o elemento topo da pilha deve estar com as profundidades corretas. A partir deste retorna-se ao fundo, recalculando-se as novas profundidades e verificando-se de algum nó sofreu desbalanceamento.

No caso da inserção, o primeiro nó desbalanceado, uma vez tratado via rotação adequada, elimina os desbalanceamentos que possam ter se propagado para os níveis superiores. No caso da exclusão, no entanto, é necessário subir até a raiz, pois a correções dos níveis inferiores não corrige os eventuais desbalanceamentos superiores.

Mas vamos ao código para completarmos estas explicações!

-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-