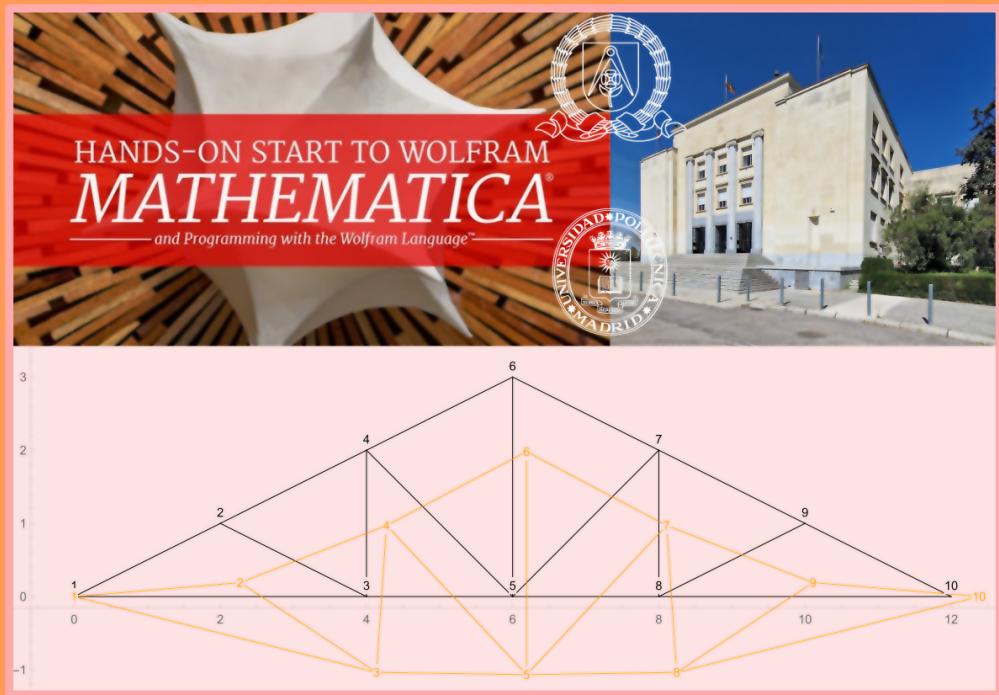


# CÁLCULO ELÁSTICO-LINEAL DE ESTRUCTURAS, DE BARRAS ARTICULADAS, HACIENDO USO DE Wolfram Language



Enrique M. Moreno Pérez





# CÁLCULO ELÁSTICO-LINEAL DE ESTRUCTURAS

*Enrique Manuel Moreno Pérez*

ESTRUCTURAS DE BARRAS ARTICULADAS CALCULADAS HACIENDO USO  
DE WOLFRAM LANGUAGE

Primera edición: 13 de Noviembre de 2023

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Reconocimiento-NoCommercial-CompartirIgual 4.0 Internacional”.



Descarga tu copia digital gratis en: <https://www.bubok.es/>



a Emilio José Rodríguez Vargas



## PREFACIO

**E**l cálculo matricial de estructuras es un componente vital en la formación de los alumnos de arquitectura, proporcionando una base sólida para comprender y diseñar estructuras eficientes y seguras.

La premisa de que la única forma efectiva de aprender es involucrarse de manera activa encuentra una convergencia natural con la adopción de métodos pedagógicos innovadores, como el aula invertida. En este paradigma educativo, se reconoce la necesidad de que los estudiantes asuman un papel activo en su proceso de aprendizaje. Más allá de la tradicional pasividad asociada con la mera asistencia a clases, el enfoque del aula invertida coloca al estudiante en el centro de la experiencia educativa.

En un aula invertida, la responsabilidad del aprendizaje recae en el estudiante, quien previamente revisa material de estudio en casa, generalmente a través de recursos multimedia o lecturas asignadas. Durante las sesiones en el aula, el tiempo se dedica a la aplicación práctica del conocimiento, discusiones interactivas, resolución de problemas y actividades colaborativas. Aquí, el docente actúa como guía y facilitador, brindando apoyo y claridad donde sea necesario, en lugar de ser el único transmisor de información.

Este enfoque impulsa la participación activa, la autodirección y el compromiso individual, ya que los estudiantes deben llegar preparados, formular preguntas y participar en diálogos significativos. Así, se promueve

un aprendizaje más profundo y duradero, ya que los estudiantes no solo reciben información, sino que también la aplican y la integran de manera activa en su comprensión.

En este sentido, el aula invertida ejemplifica cómo la innovación pedagógica puede alinearse con la idea de que el estudiante es el principal actor en su proceso de aprendizaje. Este enfoque busca no solo transferir conocimientos, sino también cultivar habilidades críticas, pensamiento independiente y la capacidad de aprender de forma autónoma, lo cual es esencial en un mundo en constante cambio y evolución.

En la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), especialmente en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura (ETSAM) [2], se ha adoptado una perspectiva que va más allá de la mera excelencia académica. Aquí, se ha abrazado el enfoque del aula invertida y la integración efectiva de asignaturas como física y estructuras. Este planteamiento holístico no solo se centra en la enseñanza tradicional, sino que también promueve el autoaprendizaje, creando una proyección y conexión sinérgicas entre estos campos y fortaleciendo la formación de los futuros arquitectos.

En este contexto, el aula invertida se convierte en un recurso valioso que no solo fomenta la participación activa de los estudiantes durante las clases, sino que también impulsa su compromiso en procesos de autoaprendizaje. Antes de las sesiones en el aula, los estudiantes revisan y estudian material relacionado con física y estructuras por sí mismos, preparándose para participar activamente en discusiones, resolver problemas y colaborar durante las clases.

Los docentes en la ETSAM desempeñan el papel de guías y facilitadores, enfocándose en apoyar y clarificar mientras los estudiantes, como principales actores de su propio aprendizaje, construyen su comprensión de manera activa. Esta sinergia entre el aula invertida, la integración de asignaturas y el fomento del autoaprendizaje contribuye a una experiencia educativa integral, donde la conexión entre la física y las estructuras se convierte en una parte fundamental del aprendizaje arquitectónico. Este enfoque prepara a los estudiantes para ser arquitectos autónomos y adaptables, capaces de enfrentar desafíos complejos en su futura práctica profesional.

En este contexto educativo avanzado, se presenta la oportunidad de explorar y aplicar el código abierto como una herramienta pedagógica. La capacidad de visualizar y comprender el código fuente de programas específicos amplía las fronteras del aprendizaje interactivo. Este prefacio marca el inicio de un viaje educativo donde los alumnos no solo utilizan programas sencillos pero potentes para el cálculo de estructuras, sino que también tienen acceso a la esencia misma de estos programas.

Este texto introductorio sirve como puente entre la teoría y la práctica, permitiendo a los alumnos de arquitectura explorar, comprender y aplicar principios de elasticidad de primer orden en el diseño y análisis de estructuras. La metodología de aula invertida se convierte en el vehículo que facilita este viaje, donde los estudiantes se sumergen activamente en el proceso de aprendizaje, participando en discusiones significativas y aplicando conceptos en proyectos prácticos.

A lo largo de estas páginas, se abrirá una ventana al mundo del cálculo matricial de estructuras, donde la simplicidad de los programas se combina con su potencia intrínseca. Este prefacio invita a los estudiantes a explorar nuevas fronteras, a cuestionar y a descubrir, proporcionando las herramientas necesarias para enfrentar los desafíos del diseño estructural con confianza y competencia.

En última instancia, esta iniciativa busca no solo cultivar habilidades técnicas, sino también fomentar una mentalidad crítica y creativa. Al adoptar un enfoque integrado que une la física y las estructuras, los alumnos de la ETSAM de la UPM se embarcan en un viaje educativo que no solo los prepara para los desafíos prácticos, sino que también los empodera como arquitectos visionarios capaces de moldear el entorno construido con inteligencia y elegancia. ¡Bienvenidos a esta travesía educativa en el fascinante mundo del cálculo matricial de estructuras!



# Índice general

Prefacio	III
1 Fundamentos	1
1.1. Introducción histórica . . . . .	1
1.2. Introducción al cálculo elástico-lineal de estructuras de barras articuladas . . . . .	14
1.3. Concepto de estructura en general . . . . .	16
2 Formulación matemática del problema	32
2.1. Formulación del problema . . . . .	32
2.2. Matrices tridiagonales y el método TDMA . . . . .	43
2.3. Una formulación particular del método matricial . . . . .	46
3 Instrucciones de uso general	57
3.1. Número de Nudos, Barras y Diferencia Máxima: Pilares para un Análisis Estructural Efectivo . . . . .	57
3.2. Entradas . . . . .	70
4 Código fuente de Art2D	76
4.1. Introducción . . . . .	76
4.2. Índice principal ( <i>cuerpo.nb</i> ) . . . . .	77
4.3. Entrada de datos principales ( <i>entradas.nb</i> ) . . . . .	80
4.4. Verificación de entradas por ploteo ( <i>verificador.nb</i> ) . . . . .	87
4.5. Resolución del sistema . . . . .	89
4.6. Ilustración de las deformadas (Zoom x100) . . . . .	96

4.7.	Resultados numéricos: deformaciones y esfuerzos . . . . .	100
5	Código fuente de Art3D	107
5.1.	Introducción . . . . .	107
5.2.	Índice principal ( <i>cuerpo.nb</i> ) . . . . .	108
5.3.	Entradas ( <i>entradas.nb</i> ) . . . . .	109
5.4.	Verificación de entradas por ploteo ( <i>verificador.nb</i> ) . . . . .	116
5.5.	Resolución del sistema . . . . .	119
5.6.	Deformaciones y esfuerzos (Zoom x70) . . . . .	125
5.7.	Resultados numéricos: deformaciones y esfuerzos . . . . .	129
6	Apéndices	134
6.1.	Factorización de Cholesky . . . . .	134
6.2.	TDMA:Tridiagonal Matrix Algorithm, explicado . . . . .	137
	Bibliografía	141

# 1

## FUNDAMENTOS

### 1.1. Introducción histórica

**E**l primer tratado de ingeniería de estructuras conocido es “De Architectura” (Sobre Arquitectura), escrito por Marco Vitruvio Polión [30], un arquitecto y escritor romano que vivió en el siglo I a.C. Vitruvio era arquitecto y ingeniero, y su obra es un compendio que aborda diversos temas relacionados con la arquitectura, incluyendo la construcción de estructuras.

“De Architectura” es una obra en diez libros donde Vitruvio cubre una amplia gama de temas, desde los principios fundamentales de diseño y la elección de materiales hasta las técnicas de construcción. Aunque no se centra exclusivamente en ingeniería de estructuras, contiene valiosos principios y directrices que han influido en la ingeniería y la arquitectura a lo largo de los siglos.

Este tratado antiguo es una referencia clave para comprender los conocimientos y enfoques de la ingeniería de estructuras en la antigüedad y es considerado uno de los textos más influyentes en la historia de la arquitectura e ingeniería.

Determinar la “primera estructura articulada de la historia” es un desafío, ya que las estructuras articuladas han existido en diversas formas a lo

largo de la historia humana. Sin embargo, una de las estructuras más antiguas y notables que incorporaba ciertos principios de articulación es el Coloso de Rodas [4].



*Figura 1.1: Escultura de Colosos de Rodas. Después de la muerte de Alejandro Magno, el antiguo imperio se dividió en varios territorios, y Rodas quedó bajo el control de Ptolomeo I, quien controlaba el comercio en la parte oriental del Mar Mediterráneo. Antígonon I el Tuerto intentó tomar la ciudad en el año 305 a.C., pero el astuto ejército de Ptolomeo I frustró el intento. Para conmemorar la victoria, el pueblo de Rodas construyó una estatua monumental de bronce de su dios patrón Helios, utilizando materiales dejados por el ejército de Antígonon. La estatua alcanzó aproximadamente 50 metros de altura, con una estructura de mármol y bronce [1].*

El Coloso de Rodas fue una estatua monumental de bronce erigida en la isla griega de Rodas entre el 292 y el 280 a.C. La estatua representaba al dios griego Helios y fue esculpida por el escultor Cares de Lindos. Lo que hace que el Coloso sea relevante en el contexto de las estructuras articuladas es la forma en que se construyó.

La estatua estaba formada por bloques de bronce unidos mediante técnicas de ensamblaje y articulación. Se cree que las partes de la estatua estaban conectadas mediante pernos y barras, permitiendo cierta movilidad entre ellas. Aunque no se trataba de una estructura articulada en el sentido moderno, sí incorporaba ciertos elementos de articulación para unir las diferentes partes de la estatua.

Si bien el Coloso de Rodas no existe en la actualidad (fue destruido en un terremoto en el 226 a.C.), su construcción proporciona un ejemplo temprano de cómo los antiguos ingenieros y escultores utilizaron técnicas de articulación para crear estructuras monumentales.

Además tenemos Tiwanaku [23, 24, 25, 26, 27], que es un importante sitio arqueológico ubicado en Bolivia cerca del lago Titicaca. Tiwanaku es famoso por sus monumentales estructuras arquitectónicas y su avanzada tecnología constructiva. Entre sus contribuciones más notables a la arquitectura antigua se encuentran las estructuras articuladas, consideradas una de las primeras de su tipo en la humanidad. Estas estructuras se caracterizan por el uso de grandes bloques de piedra ensamblados con grapas de metal de manera precisa y sin mortero, como muestra la figura 1.2, lo que les confiere una notable estabilidad y durabilidad. El desarrollo



Figura 1.2: Grapa arquitectónica, excavada del muro de la pirámide Pumapunku, Tiwanaku, Bolivia [23, 24, 25, 26, 27].

y uso del bronce en el Área Andina fue un fenómeno crucial del Horizonte Medio (600-1000 d.C.). Durante este período, las sociedades andinas

realizaron importantes avances en la explotación de menas complejas de cobre, arsénico, estaño y níquel, y en la producción de bronces a gran escala. Este logro tecnológico marcó una era distintiva en la historia de la metalurgia andina.

El término “bronce” se refiere a aleaciones de cobre con otros metales. El “bronce clásico”, comúnmente una aleación de cobre y estaño, fue utilizado extensivamente durante el Imperio incaico. Sin embargo, investigaciones recientes han demostrado que el bronce estañífero ya se producía mucho antes, durante el Horizonte Medio, desafiando la creencia de que su uso se limitaba a épocas posteriores [23, 24, 25, 26, 27]. En los Andes, además del bronce estañífero, se desarrollaron otras aleaciones que también se consideran bronces. Estas incluyen el “bronce arsenical” (una aleación de cobre y arsénico) y una aleación ternaria compuesta de cobre, arsénico y níquel. A pesar de sus diferencias en composición, estudios de laboratorio han mostrado que las propiedades mecánicas de estas aleaciones son bastante similares. No obstante, cada tipo de bronce presenta diferencias en ductilidad y color, lo cual influenciaba su uso y valor estético en las culturas andinas.

La combinación de avanzadas técnicas arquitectónicas, como las estructuras articuladas de Tiwanaku, y el desarrollo sofisticado de la metalurgia del bronce, subraya la ingeniosidad de las civilizaciones andinas durante el Horizonte Medio. Estas innovaciones no solo reflejan un alto grado de conocimiento técnico y artístico, sino también una capacidad notable para adaptarse y aprovechar los recursos disponibles en su entorno, dejando un legado duradero que continúa fascinando a arqueólogos e historiadores.

**Pero, tanto hablar de estructuras articuladas da pie a preguntarse ¿qué son las estructuras articuladas?**

Las estructuras de barras articuladas [34] son sistemas compuestos por barras rectas conectadas entre sí mediante articulaciones o nodos, donde estas uniones permiten el movimiento relativo de las barras. Estas estructuras se utilizan comúnmente en ingeniería para una variedad de aplicaciones, y existen varios tipos según su configuración y propósitos. Aquí hay algunos tipos comunes de estructuras de barras articuladas:

1. Cerchas:

- Descripción: Red bidimensional o tridimensional de barras conectadas en nodos.
- Características: Diseño triangular para proporcionar estabilidad y resistencia eficientes.
- Aplicaciones: Puentes, torres de transmisión, cubiertas.

2. Celosías:

- Descripción: Estructuras reticuladas formadas por barras rectas en un plano.
- Características: Configuración reticular para soportar cargas en varias direcciones.
- Aplicaciones: Puentes, cubiertas, torres de comunicación.

3. Porticos:

- Descripción: Estructuras tridimensionales formadas por barras y nodos.
- Características: Proporciona estabilidad lateral y capacidad para resistir momentos.
- Aplicaciones: Marcos de edificios, pórticos industriales.

4. Armaduras:

- Descripción: Estructuras planas formadas por barras conectadas en nodos.
- Características: Configuración reticular, utilizada para soportar cargas en un plano.
- Aplicaciones: Techos, puentes colgantes.

5. Pórticos Espaciales:

- Descripción: Estructuras tridimensionales compuestas por barras y nodos.

- Características: Proporciona resistencia en tres dimensiones.
- Aplicaciones: Estructuras arquitectónicas, cobertizos.

#### 6. Marquesinas:

- Descripción: Estructuras de barras utilizadas para proporcionar sombra o protección.
- Características: Diseño ligero, a menudo con barras inclinadas.
- Aplicaciones: Áreas de estacionamiento, entradas de edificios.

Estos son solo algunos ejemplos, y la elección del tipo de estructura de barras articuladas depende de los requisitos específicos de cada proyecto, incluidas las cargas, la geometría y las limitaciones del sitio.

La cercha es uno de los tipos de estructuras de barras articuladas más antiguos y ha sido utilizada a lo largo de la historia en diversas culturas y civilizaciones. Su diseño triangular proporciona estabilidad y resistencia, lo que las hace eficientes para soportar cargas en puentes y otras aplicaciones.

Un ejemplo histórico significativo de cerchas es el Puente de Trezzo sull'Adda[38], ubicado en Italia. Este puente medieval data del siglo XIV y presenta un diseño de cercha. A lo largo de los siglos, las cerchas se han utilizado en diferentes formas y estilos arquitectónicos en todo el mundo.

Si bien las cerchas son antiguas, es importante señalar que las estructuras de barras articuladas en diversas formas han sido utilizadas por muchas culturas a lo largo de la historia. La elección del tipo de estructura a menudo depende de la disponibilidad de materiales, la tecnología de construcción y las necesidades específicas del proyecto.

Las cerchas, en el contexto de la ingeniería estructural, han sido utilizadas durante siglos en diversas formas y estilos arquitectónicos. Sin embargo, la formalización y desarrollo sistemático de métodos para el

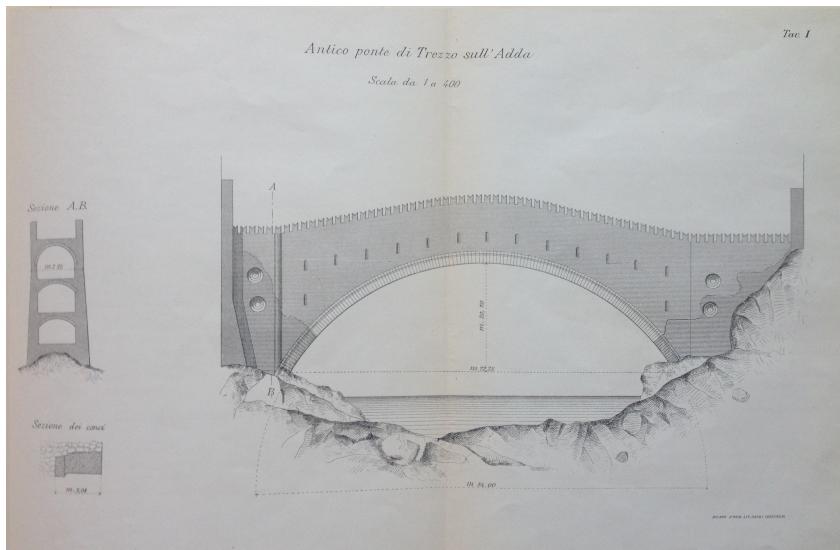


Figura 1.3: Puente de Trezzo sull'Adda, una joya arquitectónica que cruza el río Adda en Italia. Construido en el siglo XIV, este puente medieval destaca por su elegante estructura de arco y su significativo valor histórico como parte integral del patrimonio local [12].

diseño y cálculo de cerchas se intensificaron en los siglos XIX y XX [35] con el avance de la ingeniería estructural y la teoría de estructuras.

Uno de los pioneros en el estudio y desarrollo de cerchas fue el ingeniero y arquitecto estadounidense Caleb y Thomas Pratt. En 1844, Caleb y Thomas Pratt patentaron una trama estructural conocida como “Truss Pratt” [37], una forma específica de cercha que se convirtió en una de las más utilizadas en puentes durante el siglo XIX. Esta trama presentaba diagonales inclinadas hacia adentro y verticales paralelas, y fue diseñada para ser eficiente en términos de materiales y resistencia.

A lo largo del tiempo, otros ingenieros y teóricos de estructuras, como William John M. Rankine, Otto Mohr, y otros, contribuyeron al desarrollo de teorías y métodos para el análisis de cerchas. El cálculo de cerchas se benefició significativamente del avance de la teoría de estructuras y la aplicación de la mecánica de materiales.

No hay un único “padre” del cálculo de cerchas, ya que fue un proceso

evolutivo que involucró contribuciones de varios ingenieros a lo largo del tiempo. La formalización de métodos de análisis y diseño de cerchas se integró con el crecimiento general de la ingeniería estructural como disciplina a lo largo del siglo XIX y principios del XX. No obstante, algunos de los ejemplos más notables son:

1. Gustave Eiffel: fue un ingeniero francés conocido por diseñar la Torre Eiffel para la Exposición Universal de París en 1889. La Torre Eiffel incorpora elementos de cerchas en su estructura [29].
2. William Le Baron Jenney fue un ingeniero y arquitecto estadounidense, pionero en el diseño de rascacielos. Es conocido por utilizar estructuras de cerchas en algunos de sus diseños, como el Home Insurance Building, considerado uno de los primeros rascacielos [5].
3. Santiago Calatrava es un ingeniero y arquitecto español conocido por sus diseños arquitectónicos y de ingeniería estructural que a menudo incorporan cerchas y elementos esbeltos. Ejemplos incluyen el Puente de la Mujer en Buenos Aires y el Auditorio de Tenerife [18].
4. Thomas Telford fue un ingeniero civil escocés conocido por sus contribuciones a la ingeniería de puentes en el siglo XIX. Diseñó puentes que incorporaban cerchas, como el Puente Menai en Gales [31].
5. William Howe fue un ingeniero estadounidense que patentó la cercha Howe [21], un tipo específico de cercha utilizado en puentes. Su diseño fue ampliamente adoptado en la construcción de puentes durante el siglo XIX.
6. Isambard Kingdom Brunel fue un ingeniero británico conocido por sus logros en la ingeniería ferroviaria y de puentes en el siglo XIX. Diseñó puentes ferroviarios que incorporaban elementos de cerchas [22].

## How the First Skyscraper Came to Be Built.

THE HOME INSURANCE BUILDING  
THE FIRST SKELETON CONSTRUCTION BUILDING IN AMERICA

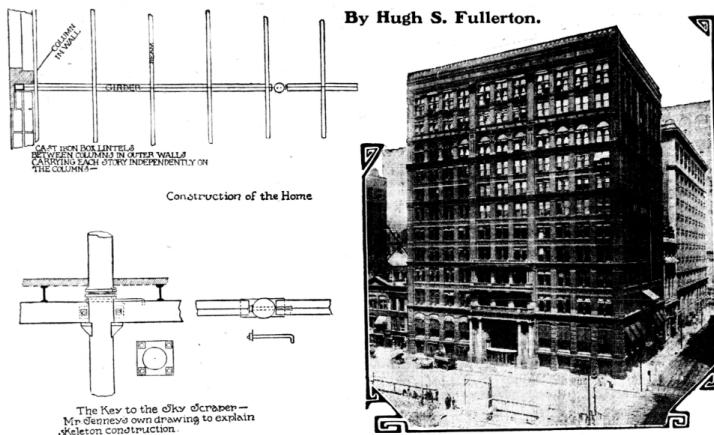


Figura 1.4: Esqueleto del Home Insurance Building, considerado el primer rascacielos del mundo. Diseñado por William Le Baron Jenney y construido en 1884 en Chicago, este innovador edificio marcó el comienzo de la arquitectura de rascacielos, presentando una estructura de acero que permitió alcanzar alturas nunca antes vistas en la época [3].

Estos son solo algunos ejemplos, y muchos otros ingenieros y arquitectos notables han utilizado cerchas en sus obras. La elección de la cercha como elemento estructural ha sido una práctica común en la historia de la ingeniería y la arquitectura debido a su eficiencia y capacidad para resistir cargas.

### Tipos de cerchas

Existen varios tipos de cerchas utilizadas en ingeniería civil y arquitectura, cada una con características específicas diseñadas para satisfacer diferentes necesidades estructurales. Aquí hay una lista de algunos tipos comunes de cerchas:

1. Cercha Pratt: También conocida como cercha recta, consiste en miembros diagonales inclinados hacia adentro y conectados por vigas horizontales [10, 28].
2. Cercha Howe: Similar a la cercha Pratt, pero con los miembros diagonales inclinados hacia afuera en lugar de hacia adentro [10, 28].
3. Cercha Warren: Caracterizada por una disposición alternante de miembros diagonales inclinados hacia adentro y hacia afuera, conectados por vigas horizontales [10, 28].
4. Cercha King Post: Consta de un único poste vertical central que divide las vigas horizontales y se conecta a los miembros diagonales [10, 28].
5. Cercha Queen Post: Similar a la cercha King Post, pero con dos postes verticales que dividen las vigas horizontales.
6. Cercha Pratt Modified: Una variante de la cercha Pratt que tiene un diseño modificado para mejorar la distribución de cargas [10, 28].
7. Cercha Bowstring: Tiene una forma curva y se utiliza comúnmente en la construcción de techos de arco [10, 28].
8. Cercha Poligonal: Se caracteriza por tener miembros diagonales y horizontales que forman un patrón poligonal [10, 28].
9. Cercha Fink: Diseñada con miembros diagonales cortos y vigas horizontales largas, creando una estructura triangular [10, 28].
10. Cercha Howe Modified: Una variante modificada de la cercha Howe para adaptarse a requisitos específicos de carga y diseño [10, 28].
11. Cercha Pratt Double: Una cercha Pratt con dos conjuntos de miembros diagonales [10, 28].

12. Cercha Warren Double: Similar a la cercha Warren, pero con dos conjuntos de miembros diagonales [10, 28].

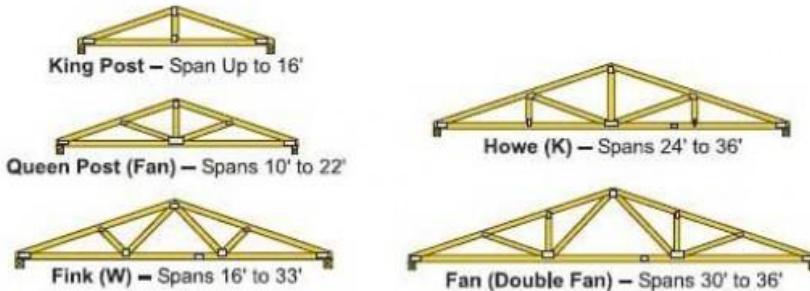


Figura 1.5: Cerchas Planas Emblemáticas: Representación visual de algunas de las cerchas planas más conocidas en la ingeniería estructural. Estos diseños icónicos, como las cerchas Pratt, Warren y Howe, han sido fundamentales en la construcción de puentes y techos, demostrando su eficacia y versatilidad a lo largo de la historia de la ingeniería [10, 28].

Estos son solo algunos ejemplos y hay muchas otras variaciones y combinaciones posibles según las necesidades específicas de diseño y carga de una estructura particular.

### Tipos de estructuras articuladas tridimensionales

En el ámbito de las estructuras articuladas tridimensionales, hay una variedad de tipos y formas, cada una diseñada para cumplir con necesidades específicas en ingeniería y arquitectura. Aquí tienes una lista de algunas de las estructuras tridimensionales más comunes:

1. **Marco Espacial**: Un conjunto tridimensional de barras conectadas en juntas articuladas que forman un marco estructural [14].
2. **Torres y Torres de Comunicación**: Estructuras tridimensionales utilizadas para soportar antenas de comunicación y equipos relacionados [33].

3. Estructuras de Pórtico Tridimensional: Compuestas por columnas, vigas y diagonales en tres dimensiones, proporcionando estabilidad y resistencia [8].
4. Estructuras de Celosía Tridimensional: Redes tridimensionales de barras conectadas en nodos, utilizadas para cubrir grandes áreas con mínima masa [8].
5. Cerchas Tridimensionales: Variantes de cerchas diseñadas para soportar cargas en tres dimensiones, comúnmente utilizadas en la construcción de techos y puentes [9].
6. Mallas Estructurales: Redes tridimensionales que forman superficies o volúmenes, utilizadas en estructuras arquitectónicas y de ingeniería [9].
7. Estructuras de Cúpula: Formadas por arcos o cerchas que se conectan para crear una envoltura tridimensional, como las cúpulas geodésicas [20].
8. Estructuras de Estadio: Estructuras que soportan gradas y techos de estadios, a menudo con una combinación de vigas, columnas y arcos [13].
9. Estructuras de Puente Tridimensional: Puentes que utilizan una variedad de formas tridimensionales para atravesar obstáculos como ríos y carreteras [38].
10. Estructuras de Soporte de Techos: Utilizadas en grandes espacios arquitectónicos para soportar techos o cubiertas, a menudo formadas por una combinación de elementos estructurales [36].
11. Estructuras de Soporte de Torres de Energía Eólica: Torres tridimensionales que sostienen los generadores de energía eólica [39].

Estos son solo algunos ejemplos, y la diversidad de estructuras tridimensionales es amplia y variada. Cada tipo de estructura tiene aplicaciones específicas en función de los requisitos de carga, diseño arquitectónico y condiciones del sitio.

## **Clasificación cronológica de Cerchas tridimensionales**

La clasificación cronológica exacta de los tipos específicos de cerchas tridimensionales puede ser difícil, ya que la evolución de los diseños de estructuras está influenciada por diversas variables y contextos de ingeniería. Sin embargo, puedo proporcionar una lista de algunas cerchas tridimensionales significativas que han surgido a lo largo del tiempo:

1. Cerchas de Acero Convencionales: Las cerchas de acero en tres dimensiones han sido utilizadas en diversas formas desde finales del siglo XIX, adaptándose a diferentes aplicaciones y estilos arquitectónicos.
2. Cerchas Espaciales de Buckminster Fuller: Richard Buckminster Fuller introdujo la cúpula geodésica en la década de 1950, una estructura tridimensional icónica que utiliza cerchas espaciales para crear formas geodésicas.
3. Cerchas Bowstring: A lo largo de las décadas de 1950 y 1960, las cerchas bowstring, con su forma curva distintiva, se utilizaron en diversos proyectos arquitectónicos.
4. Cerchas Pratt y Warren Tridimensionales: Las variantes tridimensionales de las cerchas Pratt y Warren han sido aplicadas en la construcción de puentes y otros proyectos de ingeniería civil.
5. Cerchas de Estadio Modernas: Estructuras tridimensionales innovadoras utilizadas en la construcción de estadios, como el Estadio Nacional de Pekín (Nido de Pájaro) construido para los Juegos Olímpicos de 2008.

6. Cerchas para Torres de Energía Eólica: Con el aumento de la energía eólica, se han desarrollado cerchas tridimensionales específicas para soportar los generadores de turbinas eólicas.

Hay que tener en cuenta que esta lista proporciona ejemplos generales y no pretende ser exhaustiva ni específica en términos cronológicos precisos. La evolución de las cerchas tridimensionales es continua, y nuevos diseños y aplicaciones siguen surgiendo en la ingeniería estructural moderna.

## **1.2. Introducción al cálculo elástico-lineal de estructuras de barras articuladas**

El cálculo elástico-lineal [32] de estructuras de barras articuladas es un enfoque utilizado en ingeniería estructural para analizar y diseñar estructuras simples, como puentes y marcos, bajo cargas aplicadas. En este contexto, el término “elástico-lineal” se refiere a suposiciones simplificadas sobre el comportamiento elástico de los materiales estructurales y la linearidad de las deformaciones. La teoría asume que las deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas y que el material vuelve a su forma original una vez que se retiran las cargas.

WOLFRAM LANGUAGE MATHEMATICA®[17] es un lenguaje de programación de alto nivel desarrollado por Wolfram Research. Se utiliza para una variedad de propósitos, incluido el cálculo simbólico y numérico, la visualización de datos, la programación funcional y la manipulación simbólica de expresiones matemáticas. Puedes utilizar Wolfram Language para realizar cálculos elástico-lineales en estructuras de barras articuladas mediante la formulación de ecuaciones y la resolución simbólica o numérica.

Wolfram Language es parte del sistema más amplio Wolfram Mathematica [17], que es un software comercial desarrollado por Wolfram Research. Wolfram Research ofrece una versión gratuita y en línea llamada Wolfram Alpha, que permite realizar cálculos y obtener respuestas a preguntas matemáticas y científicas de manera interactiva.

Sin embargo, si estás interesado en utilizar Wolfram Language de forma más extensa, especialmente para programación y desarrollo, generalmente requerirás una licencia de Wolfram Mathematica [17]. El uso de Mathematica está sujeto a licencias y puede variar según el propósito del uso (personal, académico o comercial). Wolfram Research ofrece diferentes tipos de licencias, y los precios pueden variar.

Es importante revisar los términos de uso y las políticas de licencia específicas proporcionadas por Wolfram Research para asegurarte de cumplir con sus requisitos. Puedes obtener información detallada sobre las opciones de licencia y los precios en el sitio web oficial de Wolfram Research. Sin embargo está la opción Player. Me explico, existe **Wolfram Player** que es una aplicación desarrollada por Wolfram Research. Es una herramienta gratuita que permite a los usuarios interactuar con documentos interactivos creados con Wolfram Mathematica [17]. Aquí hay algunos puntos clave sobre Wolfram Player:

### 1. Interactividad con Documentos de Mathematica [17]:

- Wolfram Player permite la interacción con cuadernos de Mathematica (archivos .nb) sin la necesidad de tener una licencia completa de Mathematica [17].
- Los cuadernos de Mathematica [17] pueden contener código, gráficos interactivos, visualizaciones, texto explicativo y más.

### 2. Exploración y Manipulación de Contenido:

- Los usuarios pueden abrir y explorar documentos interactivos creados por otros usuarios con Mathematica [17]. La aplicación permite la manipulación de parámetros y variables dentro de los cuadernos para ver cómo afectan al contenido.

### 3. Disponibilidad:

- Wolfram Player está disponible de forma gratuita para su descarga en el sitio web de Wolfram Research. Puedes ejecutar cuadernos interactivos con Wolfram Player en plataformas como Windows, macOS y Linux.

4. Limitaciones en Comparación con Mathematica [17] Completo:

- Aunque Wolfram Player es una herramienta poderosa para interactuar con cuadernos de Mathematica [17], tiene ciertas limitaciones en comparación con la versión completa de Mathematica [17]. Por ejemplo, no se pueden realizar nuevas evaluaciones de celdas de código en Wolfram Player, y algunas funciones avanzadas pueden no estar disponibles.

5. Creación de Contenido con Mathematica [17]:

- Para crear documentos interactivos, realizar cálculos y utilizar todas las capacidades de Mathematica [17], generalmente necesitarás una licencia completa de Wolfram Mathematica [17].

6. Aplicaciones y Casos de Uso:

- Wolfram Player es útil para compartir y distribuir documentos interactivos sin la necesidad de proporcionar a los usuarios una licencia completa de Mathematica [17].
- Puede ser utilizado en entornos educativos, presentaciones interactivas, demostraciones técnicas y más.

Se recomienda verificar el sitio web oficial de Wolfram Research para obtener la información más reciente sobre Wolfram Player y sus características.

### **1.3. Concepto de estructura en general**

Se denominado estructura a todo conjunto de sólidos, unidos entre si, de modo que este conjunto sea capaz de soportar las cargas aplicadas al mismo, sin experimentar movimientos relativos entre si. Son el esqueleto de las edificaciones arquitectónicas y no se puede concebir ningún tipo de solución habitacional que no contemple este elemento como un fundamento esencial de tal, por motivos eminentemente prácticos y

de seguridad. La estructura es un bloque conexo de elementos que en realidad, puede experimentar pequeños movimientos, (compatibles con las condiciones de equilibrio impuesto), que por razones geodinámicas y meteorológicas impliquen un reacondicionamiento de la multitud de ligaduras (estabilidad hiperestática) a que la estructura está sometida. Aquí estudiaremos las estructuras mediante la teoría elástica de primer orden. Evidentemente este concepto necesita ser aclarado.

La teoría elástica de primer orden, también conocida como región lineal, es una aproximación simplificada en el estudio de la elasticidad de los materiales. Esta teoría se aplica a deformaciones pequeñas, donde se asume que las relaciones entre las fuerzas aplicadas y las deformaciones resultantes son lineales y proporcionales.

Aquí hay algunos puntos clave para entender la teoría elástica de primer orden de manera sencilla:

### 1. Deformaciones Pequeñas:

- La teoría elástica de primer orden [32] se aplica cuando las deformaciones en un material son pequeñas. Esto significa que los cambios en la forma del material son pequeños en comparación con sus dimensiones originales.

### 2. Ley de Hooke [16]:

- En la región lineal, se utiliza la ley de Hooke para describir la relación entre el esfuerzo (fuerza aplicada por unidad de área) y la deformación (cambio relativo en longitud).
- La ley de Hooke establece que esta relación es proporcional y lineal. Es decir, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación.

### 3. Constantes Elásticas:

- En la teoría elástica de primer orden, los materiales se caracterizan por constantes elásticas, como el módulo de elasticidad. Estas constantes representan la rigidez del material [7] y cómo responde a las fuerzas externas.

#### 4. Región Lineal:

- La región lineal es una parte específica de la curva esfuerzo-deformación para un material elástico. En esta región, la relación entre esfuerzo y deformación es lineal, y la ley de Hooke se cumple.

#### 5. Simplicidad en los Cálculos:

- La ventaja de utilizar la teoría elástica de primer orden es que simplifica los cálculos en comparación con enfoques más avanzados que consideran deformaciones grandes o no lineales.

En resumen, la teoría elástica de primer orden es una aproximación útil cuando estamos trabajando con materiales que responden elásticamente a pequeñas deformaciones. Esta teoría proporciona una descripción simple y práctica del comportamiento de los materiales en la región lineal de su respuesta elástica.

Además de todo lo anterior consideraremos materiales que son isótropos. En la teoría elástica de primer orden, la isotropía juega un papel importante al describir las propiedades elásticas de un material. La isotropía se refiere a la propiedad de un material de tener las mismas propiedades mecánicas en todas las direcciones. En otras palabras, no importa en qué dirección se aplique una carga o una deformación, las propiedades del material no cambian.

El rol de la isotropía en la teoría elástica de primer orden se puede entender de la siguiente manera:

##### 1. Simplicidad de las Ecuaciones:

- La isotropía simplifica las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento elástico del material. En un material isotrópico, las ecuaciones pueden expresarse de manera más simple y general, lo que facilita los cálculos y análisis.

##### 2. Constantes Elásticas Independientes de la Dirección:

- En un material isotrópico [19], las constantes elásticas, como el módulo de elasticidad, son independientes de la dirección en la que se aplican las fuerzas o deformaciones. Esto simplifica la formulación de las leyes de Hooke para la relación esfuerzo-deformación.

### 3. Definición del Tensor de Elasticidad:

- En la teoría elástica, las propiedades elásticas se describen a menudo mediante un tensor de elasticidad. En un material isotrópico, este tensor se reduce a una forma más simple, ya que muchos de sus componentes son iguales.

### 4. Homogeneidad en Todas las Direcciones:

- La isotropía implica que el material tiene una estructura homogénea en todas las direcciones. Esto significa que las características mecánicas, como la rigidez y la resistencia, son las mismas en cualquier orientación.

Así en la teoría elástica de primer orden la isotropía simplifica la descripción matemática del comportamiento elástico de los materiales. Facilita los cálculos y el análisis al permitir que las propiedades mecánicas se definan de manera más general y homogénea, sin depender de la dirección en la que se apliquen las fuerzas o deformaciones.

En este proyecto pedagógico, nos enfocaremos en analizar desplazamientos que se encuentran dentro de la zona de Hooke o elástica lineal, lo que implica deformaciones inferiores al 0.5 %. Esto nos permite simplificar el análisis y utilizar la teoría elástica lineal, que asume una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación en los materiales, válida para deformaciones pequeñas.

Los elementos estructurales que consideraremos en este contexto son barras alargadas y rectas, todas hechas de un mismo material. Es importante destacar que esta elección facilita la aplicación de una teoría uniforme, pero en la práctica, se podría extender fácilmente a materiales

diferentes. La conexión entre estas barras se realiza mediante articulaciones en los extremos, siguiendo dos casos principales: uno en 2D con pasadores sin fricción o charnelas, y otro en 3D con rótulas libres, ambos asumidos sin rozamiento y sin rigideces al giro. Este tipo de estructura se conoce como armadura articulada en 3D o celosía en 2D.

Las barras conectadas en las articulaciones definen puntos específicos llamados “nudos”. En el caso de que todas las barras de la estructura sean coplanarias, la estructura se denomina plana y estará en un plano bidimensional. La primera parte de este proyecto se centrará en este tipo de estructuras, permitiendo una simplificación en el análisis al considerar únicamente fuerzas y desplazamientos en un plano.

En el presente trabajo, se persigue el objetivo de cumplir con los siguientes objetivos:

1. Exponer de manera clara y accesible un conjunto de rutinas utilizando Mathematica[17] destinadas a la resolución de problemas relacionados con estructuras de barras articuladas.
2. Asegurar que la aplicación de estas rutinas sea lo más general posible, especialmente en el marco de la física de medios elásticos, lineales, homogéneos e isótropos. Esto implica abordar una amplia variedad de situaciones y contextos en los que estas estructuras puedan aplicarse.
3. Servir como un núcleo sólido, fácilmente comprensible y modificable, que pueda ser utilizado como base para la creación de otros proyectos en el entorno de Mathematica [17]. Este núcleo está diseñado para facilitar el desarrollo de proyectos adicionales, específicamente en el ámbito del dimensionamiento automático de elementos estructurales reales.

En el proyecto, se ha tomado la decisión deliberada de abordar únicamente la esencia del cálculo automático de estructuras, que se centra en el análisis de esfuerzos. Esta elección implica renunciar al desarrollo de dos componentes esenciales en el proceso de análisis estructural: el preprocesador gráfico y el posprocesador gráfico.

En el caso del preprocesador gráfico, esta parte del proyecto generalmente se encarga de preparar los datos de manera interactiva, proporcionando una interfaz intuitiva y cómoda para el diseñador o proyectista. Usualmente, incluye la capacidad de visualizar en pantalla el croquis de la estructura, permitiendo al usuario verificar, corregir y modificar los datos introducidos de manera paramétrica. Esto significa que el proyectista puede ajustar las coordenadas de nudos, incidencias de barras, datos de cargas, tipos de ligaduras en los apoyos, secciones de barras, entre otros, sin tener que ingresar manualmente cada uno de estos datos. La renuncia a esta fase implica que el enfoque del proyecto estará más centrado en el análisis de esfuerzos propiamente dicho.

De manera similar, la renuncia al desarrollo del posprocesador gráfico implica prescindir de una fase posterior al análisis de esfuerzos. El posprocesador gráfico, en un proyecto de esta índole, sería responsable de realizar combinaciones de esfuerzos provenientes de diferentes hipótesis, calcular esfuerzos y desplazamientos en puntos intermedios de las barras, obtener envolventes de esfuerzos, identificar valores máximos y mínimos para el dimensionamiento, realizar dicho dimensionamiento en las secciones elegidas como características, y finalmente, llevar a cabo el armado de las piezas estructurales. Además, esta fase incluiría la generación de croquis o incluso planos detallados del armado de la estructura. Finalmente, el posprocesador se encargaría de establecer pedidos-presupuestos para la construcción de la estructura. Al renunciar a esta etapa, el proyecto simplifica su alcance y se concentra en proporcionar un análisis de esfuerzos sólido y eficiente.

Esta decisión estratégica permite enfocarse en el aspecto fundamental del diseño estructural, proporcionando una herramienta especializada y eficaz para el análisis de esfuerzos, sin las capas adicionales de complejidad asociadas al preprocesamiento y posprocesamiento gráfico.

## Objetivos

El proyecto tiene como objeto principal introducir a los estudiantes de arquitectura en el fascinante mundo del Análisis Matricial de

Estructuras de barras. En términos más específicos, busca no solo proporcionar una base teórica sólida, sino también facilitar la comprensión y aplicación práctica de los métodos matriciales del equilibrio.

1. Enfoque y Alcance:

Precisando más, nuestro enfoque se centra en la ejecución práctica del cálculo de movimientos en los nudos y esfuerzos en los arranques de las barras. Este proceso se realiza utilizando el método matricial del equilibrio, una herramienta poderosa que nos permite abordar estructuras tanto planas como tridimensionales.

2. Características de las Estructuras Consideradas:

Las estructuras de interés en este proyecto están compuestas por barras rectas de sección constante. Estas barras, que conforman tanto estructuras planas como tridimensionales, proporcionan un lienzo ideal para explorar y comprender los fundamentos del análisis estructural.

3. Contexto Elástico de Primer Orden:

Es crucial señalar que nuestro enfoque se sitúa en el ámbito de las teorías elásticas de primer orden, específicamente en la región lineal del comportamiento elástico. Esto implica considerar deformaciones que son pequeñas y proporcionales a las dimensiones originales de la estructura.

4. Anotación Teórica:

Es importante destacar que, aunque una hipótesis de carga puede no producir deformaciones unitarias no lineales, la superposición de varias hipótesis podría llevar a deformaciones no lineales. No obstante, sería sencillo postprocesar una solución de superposición para asegurar que está dentro de la zona lineal. Esto se lograría indicando simplemente el porcentaje máximo de deformación aceptable para el material. Por ejemplo, podríamos establecer un límite del 0.5 % de la longitud del material.

Vamos a profundizar en las hipótesis fundamentales que guiarán nuestro análisis estructural. En un primer paso, consideraremos una estructura articulada plana compuesta por una serie de barras rectas interconectadas en los nudos. Específicamente, asumiremos que las uniones entre las barras, es decir, los nudos, actúan como articulaciones perfectas, lo que implica que son incapaces de transmitir momentos. Esta característica simplifica significativamente el análisis, ya que nos permite enfocarnos exclusivamente en los esfuerzos axiles que actúan sobre las barras, garantizando así un equilibrio adecuado.

En términos prácticos, se consideran estructuras articuladas aquellas que pueden modelarse como cerchas y celosías trianguladas. Estas pueden ser tanto isostáticas como hiperestáticas, siempre y cuando, al considerar sus nudos articulados, no se conviertan en mecanismos libremente deformables. Esto significa que, aunque las barras pueden estar unidas rígidamente a los nudos, el sistema en su conjunto conserva la capacidad de mantenerse estable y estático.

Un aspecto crucial que subrayaremos es que, incluso cuando las barras están unidas rígidamente a los nudos, los esfuerzos axiles siguen siendo predominantes en estas estructuras. Esto se debe a la alta rigidez frente a la deformación axial en comparación con la rigidez frente a la deformación por flexión. En consecuencia, podemos afirmar con confianza que **los momentos y cortantes pueden considerarse esfuerzos secundarios**, y por lo tanto, pueden despreciarse en el análisis sin comprometer la precisión de los resultados.

En resumen, estas hipótesis proporcionan un marco simplificado pero riguroso para el análisis de estructuras articuladas, destacando la importancia de los esfuerzos axiles y permitiendo una aproximación efectiva en el diseño y cálculo de estas estructuras en la práctica ingenieril.

## Las ligaduras

Antes de entrar en detalles debemos comprender qué es un grado de libertad y qué una ligadura.

*Ligadura:*

En el contexto de estructuras y sistemas mecánicos, una ligadura se refiere a una restricción que impide ciertos movimientos o deformaciones en un sistema. Imagina que tienes una viga apoyada en un extremo, la cual no puede moverse hacia arriba o hacia abajo. En este caso, se dice que hay una ligadura vertical en ese extremo, ya que la viga está “ligada” o restringida en su movimiento vertical.

Las ligaduras son esenciales para modelar con precisión el comportamiento de las estructuras y sistemas físicos, ya que reflejan las condiciones reales de apoyo y restricciones que existen en el mundo físico.

### **Grado de Libertad:**

En el mismo contexto, un grado de libertad es una dirección o modo en el cual un punto o un nodo de una estructura puede moverse. Cada grado de libertad representa una forma en que un punto puede experimentar desplazamiento o rotación. Por ejemplo, si consideras un nodo en una estructura, este puede tener grados de libertad de desplazamiento en las direcciones X, Y y Z, así como grados de libertad de rotación alrededor de los ejes X, Y, y Z.

Contar los grados de libertad es importante para comprender la complejidad del sistema y para determinar cuántas restricciones o ligaduras son necesarias para describir completamente el comportamiento del sistema. En general, cada grado de libertad necesita ser considerado al analizar o modelar una estructura o sistema mecánico.

Los apoyos son ligaduras (nudos en los que alguno de los posibles movimientos está coartado). Estas coacciones pueden ser rígidas (movimientos completamente impedidos) o elásticas (movimientos a los que se oponen reacciones que crecen proporcionalmente con los mismos). En cada apoyo puede especificarse cualquier combinación de movimientos libres y coartados elástica o rígidamente.

Las acciones o cargas a las que pueden estar sometidas estas estructuras son fuerzas en los nudos. Obviamente en coherencia con los grados de libertad correspondientes; cargas puntuales y movimientos impuestos a los apoyos según los grados de libertad que han sido coartados rígidamente en los mismos.

Las coacciones en los apoyos deben imponerse según las direcciones

de los posibles movimientos de esos apoyos, que coinciden con las de los ejes generales de la estructura. El cálculo se realiza admitiendo las hipótesis básicas habituales de la Resistencia de Materiales elemental.

### **Hipótesis:**

1. Las cargas son estacionarias en el sentido de que no cambian ni su dirección ni su sentido a lo largo del tiempo.
2. Las cargas se localizan en la región lineal (no se consideran la elástica no lineal ni la zona de fluencia).
3. Las deformaciones son pequeñas (región de Hooke). Ello equivale a admitir la teoría de primer orden, en la que las condiciones de equilibrio y de compatibilidad se refieren a la geometría de la estructura antes de la deformación.
4. Las rigideces axiles vienen dadas por

$$k = \frac{EA}{L}$$

donde E es el módulo de rigidez común a todas las barras, A el área de cada barra y L la longitud de la misma.

5. Las barras son rectas, de sección constante y simétricas internamente (eje axial).
6. Se supone que las dimensiones transversales de las piezas son pequeñas en relación con las longitudinales, es decir, se puede trabajar sustituyendo la estructura real por la figura formada por las directrices de dichas piezas.

Vamos a aclarar un poco las cosas. Cuando se dice que las cargas son estacionarias en el sentido de que no cambian ni su dirección ni su sentido a lo largo del tiempo, significa que las fuerzas externas aplicadas a una estructura permanecen constantes en términos de magnitud, dirección y sentido durante el período de análisis o estudio.

En el contexto del análisis estructural, las cargas pueden clasificarse

como estacionarias si su valor y dirección no varían significativamente con el tiempo. Esto implica que las fuerzas externas aplicadas a la estructura se consideran constantes y no experimentan cambios dinámicos durante el período bajo consideración.

Por ejemplo, en una estructura estática donde se aplica una carga constante, como el peso propio de la estructura o una carga aplicada de manera constante, se puede considerar que las cargas son estacionarias. En contraste, si las cargas cambian en el tiempo, ya sea en magnitud, dirección o sentido, se considerarían cargas dinámicas.

La asunción de cargas estacionarias es común en el análisis estático de estructuras, simplificando el proceso de cálculo y permitiendo el uso de métodos estáticos para determinar las respuestas estructurales. Es importante considerar la naturaleza de las cargas al abordar análisis estructurales para seleccionar el enfoque de modelado y cálculo más apropiado.

Además se menciona que las cargas se localizan en la región lineal y no se considera la elástica no lineal ni la zona de fluencia. Se está haciendo referencia a la aplicación de cargas dentro del rango elástico de un material. Este enfoque implica que las deformaciones inducidas por las cargas aplicadas no son lo suficientemente grandes como para entrar en las regiones de comportamiento no lineal o de fluencia del material.

En términos más simples:

1. **Región Lineal (Elasticidad Lineal):** En esta región, la relación entre el esfuerzo (fuerza por unidad de área) y la deformación (cambio en la longitud original) del material es proporcional y sigue la ley de Hooke. En otras palabras, el material se deforma de manera elástica y vuelve a su forma original cuando se retira la carga. Este comportamiento es lineal y predecible dentro de ciertos límites de carga.
2. **Elastica No Lineal:** Más allá de la región lineal, algunas cargas pueden provocar deformaciones no lineales, donde la relación esfuerzo-deformación ya no sigue estrictamente la ley de Hooke. Esto podría deberse a que el material está alcanzando su límite de

elasticidad y comienza a comportarse de manera no lineal antes de entrar en la zona de fluencia.

3. Zona de Fluencia: La zona de fluencia es el rango en el cual el material comienza a experimentar deformaciones permanentes o plásticas. En este punto, la deformación no es completamente reversible al retirar la carga, y el material puede experimentar cambios estructurales permanentes.

Por lo tanto, cuando se dice que las cargas se localizan en la región lineal y no se considera la elástica no lineal ni la zona de fluencia, implica que las fuerzas aplicadas son lo suficientemente pequeñas como para mantener el comportamiento lineal y elástico del material, sin entrar en deformaciones plásticas significativas ni comportamientos no lineales. Esto simplifica el análisis estructural al utilizar relaciones lineales de esfuerzo-deformación y leyes de material elástico dentro de los límites de la región lineal. Nótese que en la región lineal de deformación de un elemento estructural, la superposición es un concepto fundamental y poderoso. La superposición se refiere a la capacidad de combinar o sumar los efectos de múltiples cargas o fuerzas aplicadas de manera independiente. Este principio es particularmente valioso cuando se analizan estructuras sometidas a cargas variables o múltiples cargas simultáneas. En el contexto de la región lineal de deformación, donde la ley de Hooke es aplicable, la superposición se basa en la propiedad de proporcionalidad directa entre esfuerzo y deformación. Esta propiedad implica que la respuesta del material a una carga se puede predecir y entender, y los efectos de diferentes cargas se pueden analizar por separado y luego combinar.

Aquí hay algunas consideraciones clave sobre la importancia de la superposición en la región lineal:

1. Linealidad: La propiedad lineal de los materiales en la región elástica permite la superposición. Si una carga produce una cierta deformación, y otra carga se aplica de manera independiente, los efectos de ambas cargas se pueden sumar para obtener la deformación total.

2. Análisis Eficiente: La superposición facilita el análisis eficiente de estructuras sujetas a diversas cargas. En lugar de realizar un análisis completo para cada carga, se pueden analizar por separado y luego superponer los resultados.
3. Cargas Variables: Cuando las cargas cambian con el tiempo o cuando se aplican múltiples cargas de manera simultánea, la superposición permite evaluar el efecto de cada carga por separado y luego combinarlos para obtener la respuesta total.
4. Validación de Resultados: La superposición proporciona una herramienta para validar y verificar resultados. Al comparar los resultados obtenidos a través de la superposición con soluciones analíticas o experimentales, se puede verificar la validez del análisis.

En la región lineal de deformación, la superposición es esencial para simplificar y mejorar el análisis de estructuras sometidas a cargas múltiples o variables, aprovechando la linealidad de los materiales para sumar efectos independientes de manera precisa y eficiente.

La rigidez axial ( $k$ ) es una medida de la resistencia de la barra a la deformación bajo una carga axial (fuerza a lo largo del eje de la barra). La fórmula para calcular la rigidez axial ( $k$ ) se presenta de la siguiente manera:

$$k = \frac{E \cdot A}{L}$$

Donde: -  $E$  es el módulo de elasticidad del material de la barra. Este módulo representa la rigidez del material y su capacidad para resistir deformaciones elásticas. -  $A$  es el área de la sección transversal de la barra. La sección transversal es la forma geométrica que resulta de cortar perpendicularmente a la longitud de la barra. -  $L$  es la longitud de la barra. La rigidez axial ( $k$ ) se expresa en términos de fuerza por unidad de deformación (o longitud) y se mide en unidades de fuerza por unidad de longitud (por ejemplo, newtons por metro o libras por pulgada). Cuanto mayor sea la rigidez axial, menos deformación experimentará la barra bajo una carga axial.

Esta fórmula se basa en la ley de Hooke para materiales lineales elásticos, que establece que la deformación es proporcional al esfuerzo aplicado. En el contexto de barras estructurales, esta relación describe cómo la barra se deforma axialmente bajo la aplicación de una fuerza, y la rigidez axial es una medida de esa resistencia a la deformación. Es importante considerar que en el análisis de cerchas, se suelen considerar barras rectas, de sección constante y simétricas internamente por varias razones que simplifican el análisis estructural y proporcionan una representación precisa de la realidad en muchos casos prácticos:

1. Simplicidad Matemática: El uso de barras rectas simplifica enormemente los cálculos matemáticos asociados con el análisis de fuerzas y deformaciones en la cercha. Las propiedades geométricas y de material de las barras rectas son más fáciles de manejar desde el punto de vista matemático.
2. Comportamiento Lineal: Las barras rectas son consistentes con el enfoque lineal en la teoría de estructuras. Dentro de la región elástica, la relación entre el esfuerzo y la deformación es lineal, y las barras rectas son una representación razonable de este comportamiento.
3. Trabes Idealizadas: Las cerchas, en esencia, son una idealización de estructuras más complejas. Representar las barras como rectas y de sección constante permite una modelización simplificada y práctica de las cerchas, sin perder precisión en muchos casos de ingeniería civil y estructural.
4. Análisis Estático y Métodos Matriciales: La asunción de barras rectas es coherente con muchos métodos de análisis estructural, como el método de los nodos o el método de las fuerzas. Además, facilita la aplicación de métodos matriciales y de elementos finitos, que son fundamentales en el análisis estructural moderno.
5. Representación Razonable: En muchos casos prácticos, las cerchas en la realidad consisten en barras rectas conectadas en nodos.

Esta simplificación sigue siendo una representación razonable y precisa de la estructura, especialmente cuando las deformaciones son pequeñas y las cargas son aplicadas de manera axial.

6. **Efectos Axiales Predominantes:** En cerchas bien diseñadas, los esfuerzos axiales son predominantes en comparación con los esfuerzos de flexión y cortantes. Esto justifica el uso de barras rectas, ya que los momentos y cortantes pueden considerarse esfuerzos secundarios, simplificando así el análisis.

Con lo cual el uso de barras rectas, de sección constante y simétricas internamente en el análisis de cerchas proporciona una simplificación práctica que facilita los cálculos, sin comprometer significativamente la precisión en situaciones prácticas y en el rango elástico de los materiales estructurales.

La hipótesis de que las dimensiones transversales de las piezas son pequeñas en relación con las longitudinales es comúnmente conocida como la hipótesis de esbeltez o esbeltez geométrica en el contexto de estructuras. Esta hipótesis se utiliza en el análisis estructural para simplificar los cálculos y modelar estructuras más fácilmente. Sin embargo, si no hacemos esta hipótesis y las dimensiones transversales no son pequeñas en comparación con las longitudinales, varios efectos pueden surgir:

1. **Efectos de Torsión:** En estructuras con dimensiones no despreciables en la dirección transversal, pueden surgir efectos significativos de torsión, especialmente cuando las cargas aplicadas no están alineadas con los ejes principales de inercia de la sección transversal.
2. **Flexión Fuera del Plano:** En lugar de comportarse predominantemente en el plano, las piezas pueden experimentar deformaciones considerables fuera del plano de carga, lo que se conoce como flexión fuera del plano. Esto puede complicar el análisis, ya que ahora se deben considerar deformaciones y esfuerzos en tres dimensiones.

3. Influencia de Efectos de Segundo Orden: Las estructuras con dimensiones significativas en la dirección transversal pueden experimentar efectos de segundo orden más pronunciados, lo que significa que las deformaciones y esfuerzos pueden ser significativamente diferentes de los predichos por el análisis de primer orden.
4. Estabilidad Global: La esbeltez geométrica también está relacionada con la estabilidad global de la estructura. Si las dimensiones transversales son grandes en comparación con las longitudinales, la estructura puede volverse más propensa a fenómenos de inestabilidad global, como pandeo lateral<sup>1</sup>.

Importante considerar que, no hacer la hipótesis de esbeltez geométrica puede conducir a un modelo más realista, pero también a un análisis estructural más complicado y a la necesidad de considerar efectos adicionales como torsión, flexión fuera del plano y estabilidad global. En la práctica, la hipótesis de esbeltez se utiliza a menudo como una aproximación razonable cuando las dimensiones transversales son pequeñas en comparación con las longitudinales, simplificando así el análisis sin perder precisión en muchas aplicaciones de ingeniería.

---

<sup>1</sup>El pandeo lateral, también conocido como pandeo lateral por flexión, es un fenómeno de inestabilidad estructural que ocurre cuando una columna/barra/viga delgada está sometida a cargas axiales de compresión. Este fenómeno implica la pérdida de estabilidad de la barra, lo que resulta en un movimiento lateral incontrolado de la misma. El pandeo lateral generalmente ocurre en estructuras esbeltas donde las fuerzas de compresión pueden superar la capacidad de la columna para resistir la flexión lateral.

# 2

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

### 2.1. Formulación del problema

En el análisis moderno de cerchas, el método matricial se utiliza para expresar las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de manera más eficiente. Esto implica representar las fuerzas y desplazamientos en forma matricial [15, 6, 14]. Aquí hay una explicación general de cómo se realiza este proceso:

#### 1. Representación Matricial de Fuerzas:

##### a) Fuerzas en los Nodos:

Se define un vector de fuerzas nodales que representa las fuerzas en todos los nodos de la cercha. Cada componente del vector corresponde a una dirección específica (por ejemplo, horizontal y vertical).

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Donde  $F_i$  es la fuerza en el nodo  $i$ .

b) Matriz de Rígidez:

Se utiliza una matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) que relaciona los desplazamientos nodales ( $\mathbf{U}$ ) con las fuerzas nodales ( $\mathbf{F}$ ) a través de la ecuación  $\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$ .

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

Donde  $\mathbf{U}$  es el vector de desplazamientos nodales.

2. Representación Matricial de Desplazamientos:

a) 1. Desplazamientos en los Nodos:

Se define un vector de desplazamientos nodales que representa los desplazamientos en todos los nodos de la cercha. Cada componente del vector corresponde a una dirección específica.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Donde  $U_i$  es el desplazamiento en el nodo  $i$ .

b) Matriz de Deformación:

Se utiliza una matriz de deformación ( $\mathbf{B}$ ) que relaciona los desplazamientos nodales ( $\mathbf{U}$ ) con las deformaciones nodales ( $\varepsilon$ ) a través de la ecuación  $\varepsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}$ .

$$\varepsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}$$

Donde  $\varepsilon$  es el vector de deformaciones nodales.

### 3. Ecuaciones de Equilibrio:

Se aplican las ecuaciones de equilibrio [11], y el sistema de ecuaciones resultante se expresa en forma matricial utilizando las relaciones mencionadas anteriormente.

### 4. Resolución del Sistema:

El sistema de ecuaciones matriciales se resuelve para encontrar los desplazamientos nodales ( $\mathbf{U}$ ) y, por lo tanto, las fuerzas nodales ( $\mathbf{F}$ ).

Expliquemos mejor las ecuaciones del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio en forma matricial para una estructura se derivan del principio de equilibrio estático, que establece que la suma de las fuerzas y momentos en cualquier estructura debe ser igual a cero para que esté en equilibrio. Estas ecuaciones se expresan comúnmente utilizando matrices y vectores. Supongamos que tenemos  $n$  nodos en la estructura, cada uno con  $m$  grados de libertad, donde  $m$  es la cantidad de direcciones en las que un nodo puede desplazarse (por ejemplo,  $m = 2$  para un plano bidimensional).

Las ecuaciones de equilibrio en forma matricial para una estructura se pueden expresar como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

Donde:

- $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas externas aplicadas a la estructura.
- $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez de la estructura.
- $\mathbf{U}$  es el vector de desplazamientos nodales.

El vector de fuerzas  $\mathbf{F}$  y el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{U}$  están relacionados por la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Esta matriz contiene información sobre la rigidez relativa de cada elemento estructural y su disposición en

la estructura.

Las dimensiones de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{K}$ , y  $\mathbf{U}$  estarán determinadas por la cantidad de nodos y grados de libertad en la estructura. En términos matriciales, el sistema de ecuaciones resultante sería:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1mn} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{mn1} & k_{mn2} & \cdots & k_{mnmn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{mn} \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones representan nuevamente la relación entre las fuerzas aplicadas y los desplazamientos nodales en la estructura, y se utilizan en el análisis estructural para resolver y determinar los desplazamientos y las fuerzas internas en los elementos de la estructura.

## Las ligaduras

En el contexto de análisis matricial de estructuras, las ligaduras (o restricciones) se introducen mediante la aplicación de condiciones de contorno que limitan ciertos desplazamientos nodales. Estas condiciones reflejan la conexión o apoyo de la estructura en sus puntos de apoyo o en aquellos lugares donde se desea imponer restricciones.

Supongamos que tienes un sistema de ecuaciones matriciales  $\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$  que describe la relación entre las fuerzas ( $\mathbf{F}$ ), la matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ), y los desplazamientos nodales ( $\mathbf{U}$ ). Si deseas introducir ligaduras en la forma de restricciones en ciertos desplazamientos nodales, puedes hacerlo modificando la matriz de rigidez y el vector de fuerzas.

Por ejemplo, consideremos un caso en el que queremos fijar el nodo  $i$  en todas las direcciones. Esto se puede lograr estableciendo los desplazamientos nodales correspondientes ( $U_i$ ) a cero. En términos matriciales, esto se representa como:

$$\mathbf{K}_{ii} \cdot U_i = 0$$

Esto impone la restricción de que el desplazamiento en el nodo  $i$  es cero en todas las direcciones.

Si tienes varias restricciones de este tipo, puedes incorporarlas directamente en la matriz de rigidez y el vector de fuerzas. Por ejemplo, si deseas fijar el nodo  $i$  en las direcciones  $x, y, y z$ , puedes hacer lo siguiente:

1. Establecer los elementos correspondientes de la fila  $i$  y columna  $i$  de la matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) a cero.
2. Establecer el valor correspondiente de la fuerza aplicada ( $F_i$ ) en cero.

Esto reflejará las restricciones impuestas en el nodo  $i$  en el sistema matricial de ecuaciones, y el método de solución dará cuenta automáticamente de estas restricciones al calcular los desplazamientos nodales y las fuerzas internas de la estructura.

Es importante ver que cuando en la matriz de rigidez  $i \neq j$ , representa la contribución de un elemento a la rigidez entre dos nodos diferentes  $i$  y  $j$  en la estructura. En términos físicos, esta parte de la matriz de rigidez modela la influencia que tiene un nodo sobre el otro en términos de rigidez estructural.

La matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) generalmente se compone de bloques, y cada bloque  $K_{ij}$  está asociado con la rigidez entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ . Estos bloques pueden ser diferentes dependiendo de la orientación y tipo de elemento estructural entre los nodos.

Cuando  $i \neq j$ , los elementos fuera de la diagonal principal ( $K_{ij}$ ) indican las interacciones de rigidez entre los nodos  $i$  y  $j$ . Esto es especialmente evidente en estructuras tridimensionales, donde cada elemento de la matriz de rigidez puede afectar tanto a la dirección local como a la global de la estructura.

Los términos fuera de la diagonal principal de la matriz de rigidez representan las interacciones de rigidez entre diferentes nodos de la estructura, y su magnitud y orientación dependen de la geometría y la disposición de los elementos estructurales en la estructura.

La expresión  $\mathbf{K}_{ii} \cdot U_i = 0$  indica una ligadura o restricción en el nodo  $i$  en una estructura. Vamos a desglosar por qué esto representa una ligadura y qué sucede si los índices son diferentes.

1.  $K_{ii}$ : Este término representa el coeficiente de rigidez en el nodo  $i$ . En otras palabras, es la contribución de la rigidez del nodo  $i$  a sí mismo.
2.  $U_i$ : Este término representa los desplazamientos nodales en el nodo  $i$ .

Cuando decimos  $K_{ii} \cdot U_i = 0$ , estamos estableciendo que los desplazamientos nodales en el nodo  $i$  multiplicados por su propia rigidez deben ser igual a cero. En términos prácticos, esto significa que no hay desplazamientos nodales permitidos en el nodo  $i$ .

Si los índices fueran diferentes, por ejemplo,  $K_{ij} \cdot U_i = 0$  con  $i \neq j$ , estaríamos estableciendo una restricción entre los nodos  $i$  y  $j$ , indicando que los desplazamientos nodales en el nodo  $i$  debido a la rigidez del nodo  $j$  deben ser igual a cero. Esto implica que los nodos  $i$  y  $j$  están vinculados de alguna manera y no se permiten desplazamientos relativos entre ellos. En resumen, la expresión  $K_{ii} \cdot U_i = 0$  representa la restricción de desplazamientos nodales en el nodo  $i$ , y si los índices son diferentes, se estaría imponiendo una restricción entre los nodos  $i$  y  $j$ .

## Ángulos pequeños

Imaginemos que en el cálculo matricial de estructuras tras aplicar las fuerzas se produce una ciertas deformaciones. Estas deformaciones modifican de alguna forma los ángulos que las barras forman en una cercha. ¿Cómo sabemos que esas modificaciones en los ángulos no cambian la dirección en la que se aplican las fuerzas y por tanto la resolución? En el contexto del análisis estructural, cuando se producen deformaciones en una cercha debido a la aplicación de fuerzas, es importante considerar cómo estas deformaciones afectan los ángulos entre las barras y, por lo tanto, la dirección de las fuerzas.

Para abordar esto, se hace uso del concepto de deformaciones pequeñas o desplazamientos infinitesimales. La idea es que las deformaciones y desplazamientos son lo suficientemente pequeños como para que las relaciones trigonométricas entre las barras de la cercha no cambien significativamente.

En el método de nudos, se asume que las deformaciones son pequeñas y, por lo tanto, se pueden expresar linealmente. En otras palabras, las ecuaciones que relacionan las fuerzas y los desplazamientos son válidas dentro de la región lineal de comportamiento elástico.

Cuando las deformaciones son pequeñas, las ecuaciones que rigen el equilibrio en cada nudo (considerando las fuerzas y desplazamientos) pueden expresarse en una forma linealizada. Esto implica que las variaciones en los ángulos de las barras, que se pueden derivar de las deformaciones, no afectarán significativamente las direcciones de las fuerzas. La suposición de deformaciones pequeñas y el enfoque linealizado en el método de nudos permiten asumir que las modificaciones en los ángulos debido a las deformaciones no alteran significativamente las direcciones de las fuerzas. Esta suposición es válida mientras las deformaciones se mantengan en la región lineal y las relaciones trigonométricas sean aproximadamente lineales en esa región.

En el método matricial de resolución de cerchas, cada barra individual se modela como un elemento axial y se utiliza un sistema de referencia local para describir sus propiedades geométricas y de material. Este sistema de referencia local está asociado con la barra y tiene su origen en uno de los extremos de la misma. Por lo general, se establece de manera que el eje local  $x$  coincida con el eje axial de la barra.

Para conectar el sistema de referencia local con el sistema de referencia global, se utilizan transformaciones de coordenadas. Estas transformaciones permiten expresar las fuerzas y desplazamientos en el sistema de referencia global en términos del sistema de referencia local y viceversa. La matriz de transformación de coordenadas, comúnmente denominada como  $T$ , se utiliza para realizar esta conexión.

La matriz de transformación  $T$  relaciona los vectores de fuerza y desplazamiento en el sistema de referencia local con los vectores correspondientes en el sistema de referencia global. La relación se expresa mediante la siguiente ecuación generalizada:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_{\text{global}} = T \cdot \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_{\text{local}}$$

Aquí,  $F_x, F_y, F_z$  son las fuerzas en los ejes global  $x, y, z$ , y  $M_x, M_y, M_z$  son los momentos alrededor de los ejes global  $x, y, z$ .

La matriz de rigidez  $K$  de una barra en el sistema de referencia local se transforma al sistema de referencia global utilizando la matriz de transformación de coordenadas  $T$ . La relación es:

$$K_{\text{global}} = T^T \cdot K_{\text{local}} \cdot T$$

Aquí,  $K_{\text{global}}$  es la matriz de rigidez en el sistema de referencia global,  $K_{\text{local}}$  es la matriz de rigidez en el sistema de referencia local, y  $T^T$  representa la transpuesta de la matriz  $T$ .

En resumen, la conexión entre el sistema de referencia local y el global en el método matricial de resolución de cerchas se logra mediante el uso de matrices de transformación de coordenadas. Estas matrices afectan la forma de la matriz de rigidez, permitiendo la descripción de las fuerzas y desplazamientos en términos del sistema de referencia global.

Para una cercha plana, que es un sistema bidimensional, la matriz de transformación  $T$  se utiliza para relacionar las fuerzas y desplazamientos en el sistema de referencia local con los del sistema de referencia global. Supongamos que tenemos una cercha en el plano  $xy$ , y el sistema de referencia local tiene su eje  $x$  coincidiendo con el eje axial de la cercha. La matriz de transformación  $T$  para una cercha plana general se define como:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Donde:

- $\theta$  es el ángulo entre el eje global  $x$  y el eje local  $x$  de la cercha.
- Los primeros dos elementos de la primera columna representan la dirección del eje local  $x$  en términos de los ejes globales  $x$  e  $y$ .
- Los dos siguientes elementos de la segunda columna representan la dirección del eje local  $y$ .
- La matriz  $T$  es de tamaño  $4 \times 4$  porque estamos tratando con un sistema bidimensional.

Cuando aplicas esta matriz de transformación a la matriz de rigidez  $K_{\text{local}}$  de la cercha en el sistema de referencia local, obtienes la matriz de rigidez  $K_{\text{global}}$  en el sistema de referencia global:

$$K_{\text{global}} = T^T \cdot K_{\text{local}} \cdot T$$

Esta matriz de transformación permite relacionar las fuerzas y desplazamientos en el sistema global con los del sistema local, teniendo en cuenta la orientación de la cercha en el plano.

Para una cercha tridimensional en un sistema de coordenadas cartesianas globales, la matriz de transformación  $T$  se utiliza para relacionar las fuerzas y desplazamientos en el sistema de referencia local con los del sistema de referencia global. Supongamos que tenemos una cercha tridimensional, y el sistema de referencia local tiene su eje  $x$  coincidiendo con el eje axial de la cercha.

La matriz de transformación  $T$  para una cercha tridimensional general se define como:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

- $\theta$  es el ángulo de inclinación de la cercha en el plano  $xy$ .
- $\phi$  es el ángulo de inclinación de la cercha respecto al plano  $xy$  (girando alrededor del eje  $z$ ).
- Los primeros tres elementos de la primera columna representan la dirección del eje local  $x$  en términos de los ejes globales  $x, y$  y  $z$ .
- Los dos siguientes elementos de la cuarta columna representan la dirección del eje local  $y$ .
- Los dos últimos elementos de la sexta columna representan la dirección del eje local  $z$ .
- La matriz  $T$  es de tamaño  $6 \times 6$  porque estamos tratando con un sistema tridimensional.

Cuando aplicas esta matriz de transformación a la matriz de rigidez  $K_{\text{local}}$  de la cercha en el sistema de referencia local, obtienes la matriz de rigidez  $K_{\text{global}}$  en el sistema de referencia global:

$$K_{\text{global}} = T^T \cdot K_{\text{local}} \cdot T$$

Esta matriz de transformación permite relacionar las fuerzas y desplazamientos en el sistema global con los del sistema local, teniendo en cuenta la orientación tridimensional de la cercha.

En el contexto de cerchas bidimensionales y tridimensionales, los elementos de la matriz de rigidez local siguen la misma forma funcional, pero su disposición en la matriz puede variar según la dimensionalidad de la cercha.

La matriz de rigidez local ( $K_{\text{local}}$ ) de un elemento de cercha representa la relación entre las fuerzas y los desplazamientos locales en el sistema de coordenadas locales del elemento. Los elementos de esta matriz dependen de las propiedades del material y de la geometría del elemento.

Para una cercha bidimensional, la matriz de rigidez local general tiene la forma:

$$K_{\text{local}}^{2D} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde:

- $E$  es el módulo de elasticidad del material de una barra.
- $A$  es el área de la sección transversal de la barra considerada en la cercha.
- $L$  es la longitud de la barra considerada.

Para una cercha tridimensional, la matriz de rigidez local general tiene la forma:

$$K_{\text{local}}^{3D} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma funcional de los elementos sigue siendo similar, pero la disposición cambia para adaptarse a la dimensionalidad de la cercha (bidimensional o tridimensional). Además, ten en cuenta que estas son formas generales y pueden variar según la definición específica de las coordenadas locales y la orientación del elemento en un software o en un enfoque particular.

Es importante ver que si cada barra tiene una sección diferente y un módulo de Young diferente, la matriz de rigidez local ( $K_{\text{local}}$ ) se ajustará para reflejar estas variaciones en las propiedades de cada barra. La forma general de la matriz de rigidez local sigue siendo la misma, pero los valores numéricos en ella dependerán de las propiedades específicas de cada barra.

Para una cercha bidimensional con barras de secciones, longitud y módulos de Young diferentes, la matriz de rigidez local para un elemento genérico puede expresarse como:

$$\text{Barra}_\ell K_{\text{local}}^{2D} = \frac{E_\ell A_\ell}{L_\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde:

- $E_\ell$  es el módulo de elasticidad del material de la barra  $\ell$ .
- $A_\ell$  es el área de la sección transversal total de la barra  $\ell$ .
- $L_\ell$  es la longitud de la barra  $\ell$ .

Análogo sería el caso para una estructura articulada tridimensional.

## 2.2. Matrices tridiagonales y el método TDMA

Vamos a suponer que en una cercha plana, la matriz de rigidez tridiagonal se puede construir considerando la relación entre los desplazamientos nodales y las fuerzas en cada elemento de la cercha.

Supongamos que tienes un elemento de cercha con dos nodos, y estos nodos tienen un desplazamiento axial  $u$  y  $v$  respectivamente. La matriz de rigidez del elemento en dirección axial puede expresarse como:

$$k_{\text{elemento}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

- $E$  es el módulo de elasticidad del material de una barra.
- $A$  es el área de la sección transversal de la barra considerada en la cercha.

- $L$  es la longitud de la barra considerada.

Luego, si tienes una cercha plana compuesta por elementos tridiagonales, la matriz de rigidez global  $K$  puede construirse ensamblando las matrices de rigidez de cada elemento en la matriz global. Supongamos que tienes  $n$  nodos que conectan las barras, entonces la matriz global  $K$  tendrá la forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

En esta matriz tridiagonal, los elementos diagonales ( $k_1, k_2, \dots, k_n$ ) corresponden a las rigideces axiales de los nudos individuales, y los elementos fuera de la diagonal ( $-k_1, -k_2, \dots, -k_{n-1}$ ) corresponden a las interacciones entre los nodos adyacentes.

Estas matrices presentan estructuras tridiagonales. Una matriz tridiagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal y las dos diagonales adyacentes están establecidos en cero. En otras palabras, una matriz tridiagonal tiene elementos no nulos solo en la diagonal principal y en las dos diagonales que la rodean inmediatamente por encima y por debajo.

La forma general de una matriz tridiagonal  $n \times n$  se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Donde  $a_i, b_i, c_i$  son coeficientes que definen los elementos de la matriz. Estas matrices son comunes las cerchas.

El método TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm) es un algoritmo eficiente utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices tridiagonales. Una matriz tridiagonal es aquella en la que los elementos distintos de cero están ubicados únicamente en la diagonal principal y las dos diagonales adyacentes a ella, es decir, los elementos fuera de estas tres diagonales son cero.

En el contexto de métodos matriciales aplicados a estructuras articuladas, el método TDMA se utiliza comúnmente en la fase de resolución del sistema de ecuaciones lineales que surge al aplicar el método de rigidez directa para analizar las estructuras.

Después de formular las ecuaciones de equilibrio y ensamblar la matriz de rigidez global, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. La matriz de rigidez global tiende a ser tridiagonal debido a la naturaleza conectada de las barras en una estructura articulada. Cada nudo conecta solo con sus nodos vecinos a través de las barras, dando lugar a una matriz tridiagonal en el sistema de ecuaciones.

El método TDMA es particularmente eficiente para resolver sistemas tridiagonales porque explota la estructura específica de estas matrices, evitando cálculos innecesarios y reduciendo la complejidad computacional. En el contexto de análisis de estructuras articuladas, donde la matriz de rigidez global a menudo tiene una estructura tridiagonal, el método TDMA puede acelerar significativamente la solución numérica del sistema de ecuaciones resultante. Esto es especialmente útil en problemas grandes y complejos, donde la eficiencia computacional es esencial.

Es por ello que en la resolución emplearemos la palabra *banded* que está relacionada con matrices bandadas. En el contexto de LinearSolve en MATHEMATICA®, la opción Method->“Banded” se utiliza para resolver sistemas lineales donde la matriz es bandada, lo que significa que tiene muchas entradas cero fuera de un cierto rango alrededor de la diagonal principal.

El método “Banded” de LinearSolve es eficiente para resolver sistemas lineales con matrices bandadas porque aprovecha la estructura de la matriz para realizar cálculos de manera más eficiente que los métodos de resolución de sistemas lineales convencionales. Esto puede ser beneficio-

so en términos de uso de recursos y tiempo de ejecución, especialmente cuando se trata de matrices grandes y bandadas.

En cuanto a la relación con el método TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm), aunque ambos implican matrices con cierta estructura especial, no son idénticos. El método TDMA específicamente se utiliza para sistemas tridiagonales, donde solo las diagonales principal y las diagonales adyacentes contienen elementos no nulos. El método “Banded” en LinearSolve es más general y puede manejar matrices con bandas más anchas.

Lo que sucede es que una cierta convergencia entre los métodos cuando las estructuras matriciales coinciden.

## 2.3. Una formulación particular del método matricial

En este contexto estructural, la determinación de los ángulos que las barras forman con el sistema de referencia global se basa en una metodología directa y eficaz. La clave reside en la diferencia de coordenadas entre los dos nodos conectados por cada barra. Al considerar las coordenadas de ambos extremos de la barra, podemos calcular la inclinación o ángulo que la barra forma con respecto al sistema global.

Este enfoque proporciona una manera intuitiva de comprender y visualizar la orientación de las barras dentro de la estructura, ya que utiliza la información geométrica de los nodos extremos para determinar los ángulos relativos. La simplicidad de este método contribuye a una interpretación clara y directa de la disposición angular de las barras en relación con el sistema de referencia global.

La expresión matemática asociada con esta determinación angular es:

$$\alpha = \arctan \left( \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \right)$$

donde  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$  representan las coordenadas de los dos nodos extremos de la barra, y  $\alpha$  es el ángulo en radianes que la barra forma

con el sistema de referencia global. Este enunciado matemático refleja la relación trigonométrica fundamental utilizada en el cálculo de los ángulos asociados con las barras en la estructura [15, 6, 14].

La siguiente figura 2.1 ilustra visualmente el correspondiente cálculo de una  $\alpha$ , correspondiente a una barra arbitraria.

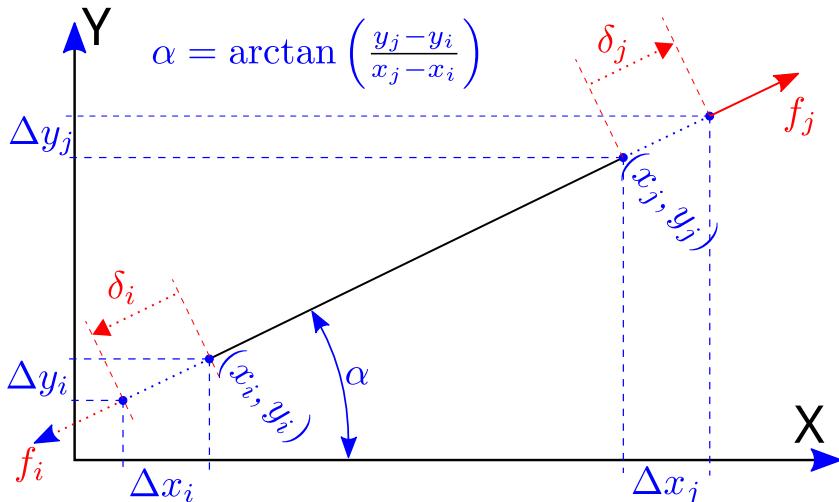


Figura 2.1: En la representación matricial de estructuras, los elementos en color azul se refieren a ejes globales, mientras que aquellos en color rojo están asociados a ejes locales. Esta convención de colores proporciona una clara distinción entre las coordenadas de los elementos en el sistema global y local, facilitando la interpretación y comprensión de la disposición estructural.

En el análisis estructural, la conexión entre las fuerzas locales aplicadas sobre cada barra y las fuerzas globales expresadas en el sistema de referencia global se logra mediante matrices de transformación. Para visualizar y comprender este proceso, empleamos un código de colores, donde el rojo representa el sistema de referencia local sobre las barras, y el azul representa el sistema de referencia global.

La matriz de transformación, que relaciona las fuerzas locales  $\mathbf{f} =$

$\begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$  con las fuerzas globales  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{bmatrix}$ , se expresa como:

$$\begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_j \end{pmatrix}$$

Aquí,  $\alpha$  representa el ángulo que la barra forma con el sistema de referencia global. La matriz de transformación permite expresar las fuerzas locales  $f$  en términos de las fuerzas globales  $\mathbf{F}$ , considerando la orientación de la barra.

El uso del código de colores resalta visualmente este proceso: el rojo indica las fuerzas locales en el sistema de referencia local de la barra, mientras que el azul representa las fuerzas resultantes en el sistema de referencia global. Esta representación facilita la interpretación y comprensión de la transferencia de fuerzas entre sistemas de referencia. Vamos a explicar cada paso para llegar a la expresión final para la conexión entre desplazamientos, fuerzas locales y globales en una Barra:

### 1. Relación entre Fuerzas Locales y Desplazamientos Locales:

La relación entre las fuerzas locales  $f_i, f_j$  y los desplazamientos locales  $\delta_i, \delta_j$  está dada por la expresión:

$$\begin{pmatrix} f_i \\ f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix}$$

Donde  $k$  es el coeficiente de rigidez de la barra, definido como  $k = \frac{EA}{L}$ , con  $E$  siendo el módulo de elasticidad,  $A$  el área de la sección transversal, y  $L$  la longitud de la barra.

### 2. Relación entre Deformaciones Locales y Desplazamientos Locales:

La relación entre las deformaciones locales  $\delta_i, \delta_j$  y los desplazamientos locales  $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta x_j, \Delta y_j$  se expresa mediante la matriz de transformación:

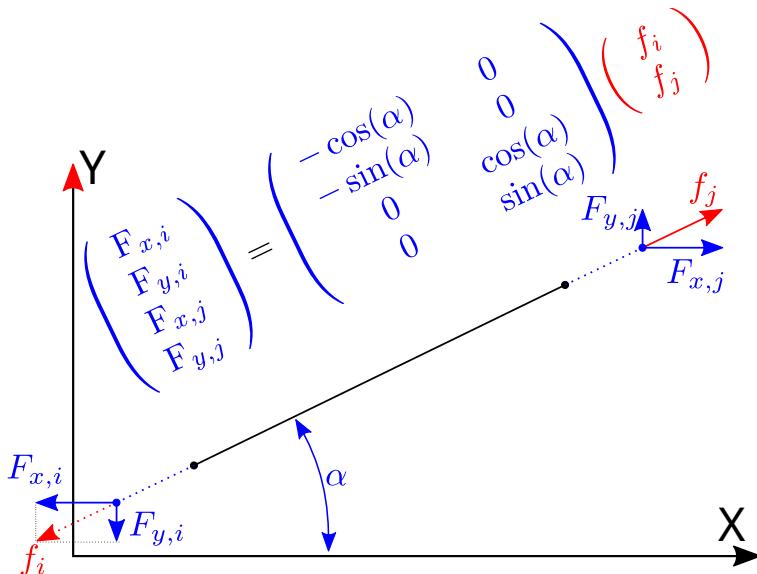


Figura 2.2: En la figura presentada, se ilustra la transformación de coordenadas de fuerzas desde el sistema local al global. Los elementos coloreados en azul representan fuerzas y ángulos referidos al sistema de coordenadas global, proporcionando una visualización clara de las magnitudes y direcciones en el contexto global. Por otro lado, los elementos en rojo representan las fuerzas locales aplicadas sobre la barra, permitiendo una distinción visual entre las magnitudes y direcciones en el sistema de coordenadas local asociado a la barra. Esta convención de colores facilita la interpretación de las relaciones de fuerzas en diferentes sistemas de referencia.

$$\begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}$$

3. Conexión entre Fuerzas Locales y Desplazamientos Globales: La conexión entre las fuerzas en ejes globales  $F_{x,i}, F_{y,i}, F_{x,j}, F_{y,j}$  y las deformaciones expresadas en ejes locales se describe mediante

la expresión:

$$\begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}$$

Simplificando esta expresión, llegamos a la forma final:

$$\begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \cos^2(\alpha) & -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 2k \cos^2(\alpha) & k \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & -k \sin^2(\alpha) & k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & k \sin^2(\alpha) \\ k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & k \sin^2(\alpha) & -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & -k \sin^2(\alpha) \\ k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & k \sin^2(\alpha) & -2k \cos^2(\alpha) & -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}$$

Esta es la expresión final que relaciona las fuerzas globales con los desplazamientos globales teniendo en cuenta las propiedades de la barra y la transformación de coordenadas.

Nótese a partir de aquí que lo que haremos será invertir la forma matricial de toda la cercha. Esta inversión para una simple barra sería, partiendo de la relación de fuerzas y desplazamientos expresada como  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\Delta$ , donde:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{pmatrix}; \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -2k \cos^2(\alpha) & -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 2k \cos^2(\alpha) & k \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & -k \sin^2(\alpha) & k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & k \sin^2(\alpha) \\ k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & k \sin^2(\alpha) & -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & -k \sin^2(\alpha) \\ k \sin(\alpha) \cos(\alpha) & k \sin^2(\alpha) & -2k \cos^2(\alpha) & -k \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Para encontrar  $\Delta$  en función de  $\mathbf{F}$ , necesitas invertir la matriz  $\mathbf{K}$ . La matriz inversa se denota por  $\mathbf{K}^{-1}$ , y la ecuación se convierte en  $\Delta = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ .

Podemos calcular la inversa de la matriz  $\mathbf{K}$  de forma interna en MATHEMATICA®. La forma invertida de la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \begin{pmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{pmatrix}$$

## Estructuras articuladas tridimensionales

Vayamos un paso mas allá. Vamos a ver ahora la conexión entre desplazamientos, fuerzas locales y globales en una barra tridimensional. En una cercha tridimensional, la conexión entre los desplazamientos locales  $\delta_i, \delta_j$  y las fuerzas locales  $f_i^x, f_i^y, f_i^z, f_j^x, f_j^y, f_j^z$  se establece mediante la matriz de rigidez  $k$  y la matriz de transformación tridimensional.

### 1. Relación entre Fuerzas Locales y Desplazamientos Locales:

La relación entre las fuerzas locales y los desplazamientos locales se describe mediante la matriz de rigidez tridimensional  $k$ :

$$\begin{pmatrix} f_i^x \\ f_i^y \\ f_i^z \\ f_j^x \\ f_j^y \\ f_j^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & -k \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i^x \\ \delta_i^y \\ \delta_i^z \\ \delta_j^x \\ \delta_j^y \\ \delta_j^z \end{pmatrix}$$

Aquí,  $k$  es el coeficiente de rigidez tridimensional de la barra.

### 2. Relación entre Deformaciones Locales y Desplazamientos Locales:

La relación entre las deformaciones locales  $\delta_i, \delta_j$  y los desplazamientos locales  $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j$  se expresa mediante la matriz de transformación tridimensional:

$$\begin{pmatrix} \delta_i^x \\ \delta_i^y \\ \delta_i^z \\ \delta_j^x \\ \delta_j^y \\ \delta_j^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & 0 & 0 & -\cos(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) & 0 & 0 & -\sin(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{pmatrix}$$

Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  representan los ángulos de orientación de la barra en el sistema global. Cuando se habla de  $\alpha$  y  $\beta$  como los ángulos de orientación, se está describiendo cómo la barra se orienta en relación con estos ejes globales. Aquí hay una explicación más detallada:

a)  $\alpha$  y  $\beta$  en el plano xy:

- $\alpha$  podría representar el ángulo de rotación de la barra en el plano xy alrededor del eje z. Es decir, si tienes un objeto en el plano xy y lo rotas alrededor del eje z, eso sería  $\alpha$ .
- $\beta$  podría representar el ángulo de inclinación en el plano xy. Si la barra se inclina hacia arriba o hacia abajo en el plano xy, eso sería  $\beta$ .

b)  $\alpha$  y  $\beta$  en el plano xz:

- $\alpha$  también podría representar el ángulo de rotación de la barra en el plano xz alrededor del eje y. Es decir, si giras la barra en el plano xz alrededor del eje y, eso sería  $\alpha$ .

- $\beta$  en este caso podría representar el ángulo de inclinación en el plano xz. Si la barra se inclina hacia arriba o hacia abajo en el plano xz, eso sería  $\beta$ .

c)  $\alpha$  y  $\beta$  en el plano yz:

- $\alpha$  podría representar el ángulo de rotación de la barra en el plano yz alrededor del eje x. Si giras la barra en el plano yz alrededor del eje x, eso sería  $\alpha$ .
- $\beta$  podría representar el ángulo de inclinación en el plano yz. Si la barra se inclina hacia arriba o hacia abajo en el plano yz, eso sería  $\beta$ .

Así que podemos decir que  $\alpha$  y  $\beta$  describen cómo la barra se orienta en cada uno de los planos xy, xz, y yz en relación con los ejes globales. Estos ángulos son cruciales para definir la posición y orientación tridimensional de la barra en el espacio global.

### 3. Conexión entre fuerzas locales y desplazamientos globales:

La relación entre las fuerzas en ejes globales y los desplazamientos globales se obtiene combinando las matrices anteriores:

$$\begin{pmatrix} F_i^x \\ F_i^y \\ F_i^z \\ F_j^x \\ F_j^y \\ F_j^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & -k \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & 0 & 0 & -\cos(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) & 0 & 0 & -\sin(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{pmatrix}$$

Esta matriz de transformación tridimensional tiene en cuenta las componentes  $x, y, z$  y la orientación de la barra en el sistema global.

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se obtiene al multiplicar las dos matrices de rigidez y transformación de coordenadas:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & -k \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & 0 & 0 & -\cos(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) & 0 & 0 & -\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

Dado que esta multiplicación es grande y puede volverse compleja, resulta útil dividirla en bloques y calcular cada bloque por separado.

La matriz resultante tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{K}_{11} = k \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = k \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21} = -k \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = -k \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Simplificando cada uno de estos bloques, obtenemos:

$$\mathbf{K}_{11} = k \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = k \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21} = -k \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = k \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez simplificada sería:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k \cos(\alpha) & k \sin(\alpha) & 0 & -k \cos(\alpha) & -k \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & k \cos(\beta) & 0 & 0 & -k \cos(\beta) \\ 0 & 0 & k \sin(\beta) & 0 & 0 & -k \sin(\beta) \\ -k \cos(\alpha) & -k \sin(\alpha) & 0 & k \cos(\alpha) & k \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -k \cos(\beta) & 0 & 0 & k \cos(\beta) \\ 0 & 0 & -k \sin(\beta) & 0 & 0 & k \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

Esto representa la matriz de rigidez simplificada para el sistema dado. En el próximo capítulo, nos sumergiremos en el código del programa, centrándonos específicamente en el procedimiento para la introducción de datos necesarios en la resolución de cerchas. Este programa está diseñado para abordar tanto cerchas bidimensionales como tridimensionales, proporcionando una herramienta versátil para el análisis estructural.

### 1. Comentarios en el Código:

Antes de adentrarnos en el proceso de entrada de información, es fundamental comprender la estructura del código. Los comentarios a lo largo del programa actúan como guías explicativas, proporcionando detalles sobre la lógica detrás de cada sección y la función de bloques específicos. Estos comentarios facilitan la comprensión del código, mejorando la legibilidad y permitiendo

a los usuarios comprender rápidamente cómo interactuar con el programa.

## 2. Procedimiento de Entrada de Datos:

El procedimiento para introducir información es crucial para el éxito del análisis estructural. En el caso de cerchas bidimensionales, se deben especificar parámetros como las coordenadas de los nodos, las características de los elementos y las condiciones de carga. Para cerchas tridimensionales, esta información se extiende para abordar el espacio tridimensional, considerando además ángulos de inclinación y orientación.

## 3. Coordenadas de los Nodos:

Para ambas cerchas, se deben ingresar las coordenadas de los nodos que definen la geometría de la estructura. Estas coordenadas son esenciales para establecer la posición espacial de los elementos.

## 4. Características de los Elementos:

Es necesario especificar las propiedades de los elementos, como la rigidez y longitud, para que el programa pueda realizar cálculos precisos. En el caso de cerchas tridimensionales, también se deben ingresar ángulos de orientación.

## 5. Condiciones de Carga:

Se deben introducir las condiciones de carga que actúan sobre la estructura. Estas cargas pueden incluir fuerzas aplicadas en nodos específicos o distribuidas a lo largo de los elementos.

Siguiendo estos pasos de entrada de datos, el programa estará equipado para realizar un análisis estructural completo, proporcionando resultados precisos y significativos.

De modo que en el próximo capítulo exploraremos la claridad en la comprensión del código y la correcta introducción de datos como pilares fundamentales para aprovechar al máximo la funcionalidad del programa en el análisis de cerchas bidimensionales y tridimensionales.

# 3

## INSTRUCCIONES DE USO GENERAL

### **3.1. Número de Nudos, Barras y Diferencia Máxima: Pilares para un Análisis Estructural Efectivo**

**L**El análisis estructural se fundamenta en la comprensión integral del “Número de Nudos”, el “Número de Barras” y la “Diferencia Máxima”. Estos elementos son cruciales para definir la geometría, conectividad y limitaciones prácticas del sistema estructural en estudio.

1. Número de Nudos: Definición y Correspondencia:
  - El “Número de Nudos” representa la cantidad total de puntos de conexión, incluyendo tanto los nodos físicos como los puntos de apoyo en la estructura. Esta cantidad debe coincidir con el número de abscisas y de ordenadas, estableciendo así la posición espacial precisa de cada nudo en el sistema tridimensional. La numeración correlativa de los nudos mejora la claridad del modelo.

#### 2. Número de Barras: Enlaces Estructurales:

Por otro lado, el “Número de Barras” se refiere a la cantidad de elementos de conexión en la estructura. Cada barra conecta dos

nudos y contribuye a la integridad estructural. La relación entre el número de nudos y el número de barras es esencial para establecer la conectividad adecuada en la estructura.

3. Diferencia Máxima: Impacto en la Memoria del Ordenador:  
La “Diferencia Máxima” es la mayor separación entre los números de nudos extremo y origen de las barras. Esta diferencia puede tener implicaciones prácticas, ya que estructuras con grandes diferencias pueden desbordar la memoria del ordenador. Actualmente, se observa que estructuras superiores a 10,000 nudos pueden condicionar la capacidad de la memoria del PC.
  
4. Recomendación para Numeración Eficiente:  
Para mitigar posibles desafíos de memoria, se recomienda numerar los nudos durante la preparación del croquis de la estructura de manera que la “Diferencia Máxima” sea lo menor posible. Esta práctica no solo favorece la eficiencia en el uso de la memoria del ordenador sino que también simplifica la entrada de datos y mejora la comprensión de la estructura.

La correlatividad en la numeración de nudos, la adecuada distribución de barras y la consideración de la “Diferencia Máxima” son elementos esenciales para garantizar un análisis preciso y eficiente de la estructura. Estos fundamentos no solo contribuyen a la integridad de los cálculos sino que también abordan limitaciones prácticas relacionadas con los recursos de memoria del ordenador.

## **Entrada de los medios materiales**

El parámetro de entrada mas importante relativo a una propiedad del material de que están hechas la barras es el “Módulo de Elasticidad” ( $E$ ), también conocido como módulo de Young. Este parámetro es esencial en el análisis estructural, ya que representa la medida de la rigidez de un material y su capacidad para deformarse bajo la influencia de fuerzas externas.

En el contexto del texto proporcionado, el módulo de elasticidad ( $E$ ) se

considera un parámetro de entrada que debe ser definido antes de realizar el análisis estructural. Aquí hay algunos puntos clave relacionados con el módulo de elasticidad:

1. Definición de  $E$ :

El módulo de elasticidad ( $E$ ) se define como el cociente entre las tensiones y deformaciones unitarias del material de la estructura. Es una medida de la rigidez del material y su capacidad para recuperarse después de ser sometido a fuerzas externas.

2. Unidades Recomendadas:

Se recomienda expresar el módulo de elasticidad en unidades coherentes con el sistema métrico, sugiriendo metros para la longitud y toneladas para la fuerza.

3. Coherencia de Unidades:

Las unidades elegidas para expresar  $E$  deben ser coherentes con las unidades de longitud y fuerza utilizadas para los demás datos. Esto incluye las coordenadas de los nudos, áreas, cargas, desplazamientos de los nudos y esfuerzos axiles.

4. Relación con el Área (EA):

En el cálculo, el módulo de elasticidad ( $E$ ) está asociado al área ( $A$ ) de las barras en el producto  $EA$ . Para facilitar la entrada de datos, se sugiere multiplicar las áreas de las barras por 10 y dividir el valor de  $E$  por 10.

5. Materiales con Módulos Diferentes ( $E'$ ):

En el caso de estructuras que contienen barras de materiales con diferentes módulos de elasticidad ( $E$  y  $E'$ ), se asigna a la estructura el módulo  $E$ . Las áreas de las barras del segundo material se multiplican por la relación  $n = E/E'$ .

Así pues el módulo de elasticidad ( $E$ ) es un parámetro clave que influye en el comportamiento de la estructura, y su definición y aplicación deben seguir las recomendaciones específicas para asegurar un análisis estructural preciso y coherente.

## Introducir las coordenadas de los nudos

En el proceso de modelado y análisis de cerchas, uno de los parámetros esenciales que el usuario debe proporcionar son las “Coordenadas de los Nodos”. Estas coordenadas son vitales para establecer la geometría y la disposición espacial de la cercha en el sistema.

### 1. Definición de Coordenadas:

Las “Coordenadas” se representan mediante una matriz de dos columnas y tantas filas como nodos en la cercha. Cada fila de esta matriz contiene las coordenadas de un nodo específico. En el contexto de una cercha, un nodo se refiere a un punto de conexión entre barras, y las coordenadas de esos nodos determinan su posición en el espacio tridimensional.

### 2. Estructura de la Matriz:

La matriz de coordenadas tiene dos columnas, la primera para las coordenadas en el eje  $x$  (horizontal) y la segunda para las coordenadas en el eje  $y$  (vertical). Cada fila de la matriz corresponde a un nodo y contiene las coordenadas respectivas en el sistema de referencia elegido.

### 3. Interpretación Práctica:

Cuando el usuario ingresa las coordenadas de los nodos, está definiendo la ubicación precisa de cada punto de conexión en la cercha. Estas coordenadas son fundamentales para la generación del modelo y tienen un impacto directo en la representación visual de la estructura.

### 4. Ejemplo Práctico:

Supongamos que se tiene una cercha con cuatro nodos. La matriz de coordenadas podría lucir así:

$$\text{Coordenadas} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

Aquí,  $x_i$  y  $y_i$  representan las coordenadas en  $x$  e  $y$  del nodo  $i$ . Cada fila en la matriz define la posición de un nodo específico en el espacio.

##### 5. Consideraciones Finales:

La precisión en la definición de estas coordenadas es crucial, ya que afecta directamente la representación física y el comportamiento estructural de la cercha. La correcta entrada de estas coordenadas es un paso esencial para garantizar un análisis estructural preciso y confiable.

Es importante notar, las coordenadas de los nodos son un componente clave en la definición de la cercha, permitiendo al usuario especificar la disposición espacial precisa de la estructura tridimensional. Estas coordenadas sirven como la base sobre la cual se construye y analiza la cercha en el contexto del modelo estructural.

Pero, ¿qué pasa en el caso tridimensional?

La definición precisa de las coordenadas de los nodos cobra aún más importancia al considerar estructuras articuladas tridimensionales. Estas estructuras, que pueden tener nodos conectados por barras en tres direcciones (longitudinal, transversal y vertical), requieren una entrada cuidadosa de coordenadas para capturar la complejidad tridimensional del sistema.

##### 1. Matriz de Coordenadas Tridimensionales:

La matriz de coordenadas para estructuras articuladas tridimensionales es una extensión de la versión bidimensional. Ahora, se necesitan tres columnas en lugar de dos. La primera columna representa las coordenadas en el eje  $x$ , la segunda en el eje  $y$ , y la tercera en el eje  $z$ . Cada fila de la matriz sigue asociándose con un nodo específico.

$$\text{Coordenadas} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

Estas coordenadas tridimensionales permiten situar cada nodo en el espacio de manera única, abarcando la complejidad espacial de la estructura articulada.

### 2. Significado Práctico de las Coordenadas Tridimensionales:

La entrada de las coordenadas en estructuras articuladas tridimensionales tiene un significado práctico significativo. Define no solo la posición horizontal (eje  $x$ ) y vertical (eje  $y$ ), sino también la posición en profundidad (eje  $z$ ). Esto es esencial para abordar la variabilidad tridimensional en las conexiones entre nodos.

### 3. Ejemplo Práctico:

Consideremos una estructura articulada tridimensional con cuatro nodos. La matriz de coordenadas podría ser similar a la siguiente:

Primera parte:

$$\text{Coordenadas} = \begin{pmatrix} -4500 & 0 & 0 \\ -2250 & 3900 & 0 \\ -2250 & -3900 & 0 \\ 2250 & 3900 & 0 \\ 2250 & -3900 & 0 \\ 4500 & 0 & 0 \\ -4250 & 0 & 1500 \\ -2120 & 3680 & 1500 \\ -2120 & -3680 & 1500 \\ 2120 & 3680 & 1500 \\ 2120 & -3680 & 1500 \\ 4250 & 0 & 1500 \\ -3750 & 0 & 2500 \\ -1875 & 3250 & 2500 \\ -1875 & -3250 & 2500 \end{pmatrix}$$

Y la segunda parte:

$$\text{Coordenadas} = \begin{pmatrix} 1875 & 3250 & 2500 \\ 1875 & -3250 & 2500 \\ 3750 & 0 & 2500 \\ -2820 & 0 & 3500 \\ -1410 & 2440 & 3500 \\ -1410 & -2440 & 3500 \end{pmatrix}$$

Donde cada fila representa las coordenadas tridimensionales de un nodo específico.

#### 4. Consideraciones Adicionales:

La entrada de coordenadas para estructuras articuladas tridimensionales debe abordar las particularidades de las conexiones espaciales. La representación precisa de la geometría en todas las direcciones es esencial para capturar adecuadamente el comportamiento tridimensional de la estructura.

#### 5. Importancia en el Análisis:

Las coordenadas en nodos son la base sobre la cual se desarrolla el análisis de estructuras articuladas tridimensionales. La precisión en la definición de estas coordenadas es crucial para garantizar que el modelo represente de manera fiel la geometría y las conexiones espaciales.

Con lo que la entrada de coordenadas en estructuras articuladas tridimensionales es un paso clave que refleja la complejidad espacial del sistema. Estas coordenadas sirven como puntos de referencia esenciales para la construcción y el análisis preciso de estructuras articuladas en tres dimensiones.

### **El tipo de barra**

Habitualmente las barras suelen estar construidas con el mismo material acero de un mismo tipo y lo que varía suele ser la sección de tales barras. Así nace el siguiente parámetro llamado Número de Barras por

Tipo.

El parámetro “Número de Barras por Tipo” es fundamental en la descripción de la variabilidad de secciones dentro de la estructura. Este valor representa la cantidad de secciones distintas presentes en las barras de la estructura, y su rango se define desde 1 hasta el número total de barras clasificadas por tipo. Este enfoque permite la flexibilidad de asignar diferentes propiedades de sección a distintos conjuntos de barras, reflejando la diversidad estructural en términos de dimensiones, forma y material. Para cada una de estas secciones, se proporcionarán, de manera ordenada, las características específicas de la sección. En este contexto, se destaca particularmente el “Área” ( $A$ ), expresada en metros cuadrados ( $m^2$ ). El área de la sección es un parámetro crítico que influye directamente en la capacidad de carga y resistencia de cada barra. Por lo tanto, la información proporcionada para cada tipo de barra incluirá, de manera sistemática, el área de su sección transversal.

Esta estructura organizativa facilita un enfoque claro y metódico para la definición de las propiedades de las barras. A través de la asignación ordenada de áreas a cada tipo de barra, se logra una representación completa y detallada de la variabilidad estructural. Este enfoque es esencial para abordar la heterogeneidad de las barras dentro de la estructura y para asegurar que cada componente contribuya de manera precisa al comportamiento global de la misma.

En resumen, el concepto de “Número de Barras por Tipo” y la descripción detallada de las características de la sección, con un enfoque particular en el área, son elementos esenciales para capturar la complejidad y diversidad en la composición de las barras dentro de la estructura. Esta información no solo contribuye a la precisión del modelo, sino que también proporciona los cimientos necesarios para un análisis estructural riguroso y confiable.

## **La matriz croquis**

La matriz croquis es un componente esencial en el proceso de modelado de estructuras, siendo la piedra angular que define las características

fundamentales de las barras que componen la cercha. En esta matriz, se establece la conexión entre los nudos y se determina el tipo de cada barra, brindando una representación sistemática de la geometría estructural. Para cada barra en la matriz croquis, se especifican tres datos clave:

1. Nudo Origen (i):

Este es el nodo de numeración más baja y es vital para la identificación única de la barra. Su número debe estar en el rango de 1 a Nudos, asegurando una correlatividad adecuada con los puntos de conexión en la estructura.

2. Nudo Extremo (j):

Representa el nodo de numeración más alta y debe cumplir con dos condiciones cruciales. Primero, debe estar en el rango entre  $i + 1$  y Nudos. Segundo,  $j$  debe ser menor que  $i + \text{Dif}$ , donde Dif se refiere a la máxima diferencia entre el origen y el extremo de las barras.

3. Tipo de Barra:

Este dato indica el número de la barra tipo que determina la sección transversal de la barra. Es un componente esencial para definir las propiedades físicas de la barra en términos de su área y material.

El orden de entrada de las barras en la matriz croquis puede elegirse libremente, pero se recomienda seguir un orden alfabético. Esto implica introducir las barras ordenadas por valores de  $i$  crecientes, y para cada valor de  $i$ , por valores de  $j$  crecientes. Este enfoque facilita la búsqueda y la interpretación de barras específicas en los resultados, mejorando la legibilidad de los listados de salida.

Es importante destacar que cada nudo debe estar conectado al menos a una barra, ya sea como origen o extremo. Esto asegura que todos los nudos estén vinculados al sistema estructural y evita que se vuelvan libres, lo que resultaría en un sistema de ecuaciones indeterminado.

En resumen, la matriz croquis proporciona una descripción estructurada y detallada de la conectividad de las barras en la cercha, estableciendo

las bases para un modelado preciso y un análisis estructural confiable. La elección cuidadosa de los datos en esta matriz es esencial para garantizar la coherencia y la representación precisa de la geometría y las propiedades de las barras en la estructura.

## La matriz de áreas

La matriz de áreas despliega un papel esencial en la representación de las secciones transversales de las barras en el sistema estructural. En el contexto de la cercha, donde cada barra puede tener una sección única, esta matriz organiza de manera ordenada y sistemática las distintas áreas correspondientes a cada tipo de barra.

La estructura de la matriz de áreas es fundamentalmente sencilla. Se compone de una sola columna que enumera las áreas de las barras por orden. Estos valores numéricos representan índices asociados a la tercera columna de la matriz croquis, que a su vez determina el tipo de barra y, por ende, la sección transversal que le corresponde.

Cuando se establece la conexión entre la matriz croquis y la matriz de áreas, se asigna a cada barra un índice específico que indica la posición de su área correspondiente en la matriz de áreas. Esto crea un enlace directo entre la información de conectividad en la cercha y las propiedades físicas específicas de cada barra.

En síntesis, la matriz de áreas proporciona una lista ordenada de las distintas áreas de las barras del sistema. Esta estructura indexada facilita la asignación eficiente de secciones transversales a cada barra, asegurando que las propiedades físicas asociadas se reflejen con precisión en el análisis estructural. La coherencia entre la matriz croquis, que especifica las conexiones de los nodos y los tipos de barras, y la matriz de áreas, que detalla las secciones transversales, es esencial para garantizar la representación precisa de la geometría y las características materiales de la cercha.

## Introducir los apoyos

La definición de los apoyos en una estructura es un aspecto crucial que influye directamente en su comportamiento y capacidad de resistencia. En teoría, un apoyo se considera un nudo donde alguno de los posibles movimientos está coartado, ya sea de manera rígida o elástica. La precisión en la definición de apoyos es esencial para modelar con precisión la interacción entre la estructura y sus condiciones de soporte. Los datos necesarios para la definición de los apoyos incluyen dos elementos fundamentales:

1. Número de Apoyos (Núm. de apoyos):

Este parámetro indica la cantidad de nudos en los que se coarta alguno de los posibles movimientos. Es un entero positivo entre 1 y el total de nudos (*Nudos*). La presencia de al menos un apoyo es crucial, ya que una estructura completamente libremente deformable no tendría restricciones.

2. Matriz de Apoyos (Apoyos):

Esta matriz organiza la información sobre los apoyos de la siguiente manera:

- Número del Apoyo (*i*):  
Representa el número del nudo definido como apoyo. El orden de lectura de los apoyos puede ser arbitrario.
- $C, C'$  (Coacciones en direcciones X, Y):  
Estos valores indican las restricciones en las direcciones X e Y, respectivamente. Se definen según el siguiente convenio:
  - $C = 0$  para movimiento rígidamente coartado.
  - $C = 1$  para movimiento completamente libre.
  - $C = k$  para movimiento elásticamente coartado con rigidez  $k$ .

La rigidez  $k$  de un apoyo elástico se define como la relación entre la reacción en el apoyo y el movimiento correspondiente. También

se conoce como la constante de muelle del apoyo. Es importante destacar que  $k$  no puede ser precisamente 1, ya que esto se interpretaría como un apoyo libre. Si se desea introducir  $k = 1$ , se puede proporcionar un número tan cercano a la unidad como se desee, pero diferente de ella (por ejemplo, 0,99999999).

Esta detallada definición de apoyos proporciona la base necesaria para abordar con precisión las condiciones de soporte en una estructura, asegurando que el modelo refleje fielmente las restricciones y comportamientos esperados.

## La matriz de cargas

La introducción de cargas en una estructura es un paso esencial para evaluar su respuesta bajo condiciones específicas de carga. En este contexto, la matriz de cargas se convierte en un instrumento crucial que permite especificar y organizar sistemáticamente las fuerzas aplicadas en los nudos del sistema. Este proceso facilita la modelización precisa de las condiciones de carga y contribuye a un análisis estructural detallado. El concepto de Número de Nudos Cargados (*Núm.nudoscargados*) es fundamental para determinar la cantidad de nudos que experimentarán fuerzas aplicadas. Este número es un entero comprendido entre 0 y el total de nudos (*Nudos*). Si se introduce un valor de 0, el programa avanza directamente a la siguiente hipótesis, indicando que no hay nudos cargados. La flexibilidad en la selección del número de nudos cargados permite adaptar el modelo a una variedad de situaciones.

La Matriz de Cargas (Cargas) organiza la información sobre las fuerzas aplicadas en los nudos de la estructura. Se define de la siguiente manera:

- Número del Nudo (*i*):<sup>\*\*</sup> Representa el número del nudo cargado y debe estar entre 1 y *Nudos*. El orden de lectura de las cargas puede ser arbitrario.
- $F_x, F_y$ :<sup>\*\*</sup> Son las componentes de la carga a lo largo de las direcciones X e Y de los ejes generales de la estructura. Estas componentes

deben tener unidades coherentes con el resto de los datos, siendo recomendables las toneladas de fuerza. Los signos positivos coinciden con las direcciones positivas de los ejes, y los valores numéricos indican la magnitud de las fuerzas aplicadas.

La Matriz de Cargas proporciona la información necesaria para simular las condiciones de carga específicas en cada nudo de la estructura. Esta organización sistemática permite una entrada clara y precisa de las fuerzas aplicadas, facilitando la interpretación de los resultados y contribuyendo a un análisis estructural riguroso.

En el contexto de estructuras articuladas tridimensionales, la matriz de cargas desempeña un papel esencial al introducir y organizar las fuerzas aplicadas en los nodos del sistema. Este componente fundamental facilita la representación detallada de las condiciones de carga en las tres dimensiones del espacio, permitiendo un análisis estructural completo y preciso.

El Número de Nudos Cargados (*Núm.nudoscargados*) sigue siendo un parámetro clave que indica la cantidad de nudos que experimentarán fuerzas aplicadas. Este número es un entero comprendido entre 0 y el total de nudos (*Nudos*), y su flexibilidad permite adaptar el modelo a diversas configuraciones tridimensionales.

La Matriz de Cargas (Cargas) se define de manera extendida para estructuras tridimensionales, incorporando las componentes de carga en las tres direcciones espaciales:

- Número del Nudo (*i*): Representa el número del nudo cargado y debe estar entre 1 y *Nudos*. El orden de lectura de las cargas puede ser arbitrario.
- $F_x, F_y, F_z$ : Son las componentes de la carga a lo largo de las direcciones X, Y y Z de los ejes generales de la estructura. Estas componentes deben tener unidades coherentes con el resto de los datos, siendo recomendables las toneladas de fuerza. Los signos positivos coinciden con las direcciones positivas de los ejes, y los valores numéricos indican la magnitud de las fuerzas aplicadas.

La adaptación de la Matriz de Cargas para estructuras tridimensionales amplía la capacidad de modelar y analizar el comportamiento de la estructura en todas las dimensiones del espacio. Esta organización sistemática de las fuerzas aplicadas en cada nudo contribuye a un análisis estructural detallado, proporcionando información esencial para comprender la respuesta global de la estructura ante diversas condiciones de carga en el entorno tridimensional.

Hasta este punto, hemos establecido los fundamentos mediante la introducción de conceptos y descripciones vinculadas al programa. En la siguiente fase, nos sumergiremos en un análisis detallado de la sección de entradas, la cual ostenta un papel central en este manuscrito. Es en esta sección donde concluye nuestra exploración. No obstante, antes de cerrar, se proporcionarán los enlaces correspondientes al conjunto de cuadernos de matemáticas esenciales para el cálculo de estructuras articuladas, tanto bidimensionales como tridimensionales.

**CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS PLANAS DE BARRAS ARTICULADAS, HACIENDO USO DE Wolfram Language: LINK Art2D.rar**

<https://github.com/maxwellfree/EstructurasArticuladas/blob/main/Art2D.rar>

**CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS ESPACIALES DE BARRAS ARTICULADAS, HACIENDO USO DE Wolfram Language: LINK Art3D.rar**

<https://github.com/maxwellfree/EstructurasArticuladas/blob/main/Art3D.rar>

### 3.2. Entradas

Comentarios a la entrada de estructuras bidimensionales.

- `nudos=25;`: Define el número de nudos en el sistema como 25.

- `barras=78;`: Establece el número de barras en el sistema como 78.
- `tipos=3;`: Indica que hay 3 tipos diferentes de barras según sus secciones.
- `ligaduras=6;`: Representa el número de apoyos en el sistema.
- `hipotesis=3;`: Define el número de hipótesis de carga como 3.
- `e=21000000;`: Establece el módulo de elasticidad del material utilizado en el sistema como 21,000,000.
- `path=NotebookDirectory[]; SetDirectory[path];`: Establece el directorio de trabajo actual para el directorio del cuaderno de MATHEMATICA®. Luego se leen las coordenadas y croquis desde archivos externos ubicados en este directorio.
- `coordenadas=ReadList["coordenadas.dat",Number,RecordLists->True];`: Lee las coordenadas de los nudos desde un archivo llamado “coordenadas.dat”.
- `croquis=ReadList["croquis.dat",Number,RecordLists->True];`: Lee el croquis (la representación gráfica) del sistema desde un archivo llamado “croquis.dat”.
- `areas={0.01,0.005,0.0025};`: Define las áreas de las distintas barras en metros cuadrados.
- `apoyos=...;`: Define las condiciones de apoyo en los nodos del sistema. En este caso, parece que todos los nodos están fijos en la dirección x, y, y z.

- Se especifican las cargas en diferentes nodos del sistema.
- `hipo[1]=...;`: Carga de viento en nodos específicos.
- `hipo[2]=...;`: Carga de nieve en nodos específicos.
- `hipo[3]=Union[hipo[1],hipo[2]];;`: Combina las cargas de viento y nieve en una única hipótesis de carga.
- `cargas={hipo[1],hipo[2],hipo[3]};;`: Crea una lista que contiene todas las hipótesis de carga.

#### VOLVER AL CUERPO DEL PROYECTO->LINK0

- `nudos=25;;`: Define el número de nudos en el sistema como 25.
- `barras=78;;`: Establece el número de barras en el sistema como 78.
- `tipos=3;;`: Indica que hay 3 tipos diferentes de barras según sus secciones.
- `ligaduras=6;;`: Representa el número de apoyos en el sistema.
- `hipotesis=3;;`: Define el número de hipótesis de carga como 3.
- `e=21000000;;`: Establece el módulo de elasticidad del material utilizado en el sistema como 21,000,000.
- `path=NotebookDirectory[] ; SetDirectory[path] ;`: Establece el directorio de trabajo actual para el directorio del cuaderno de MATHEMATICA®. Luego se leen las coordenadas y croquis desde archivos externos ubicados en este directorio.

- `coordenadas=ReadList["coordenadas.dat",Number,RecordLists->True]` ;: Lee las coordenadas de los nudos desde un archivo llamado “coordenadas.dat”.
- `croquis=ReadList["croquis.dat",Number,RecordLists->True]` ;: Lee el croquis (la representación gráfica) del sistema desde un archivo llamado “croquis.dat”.
- `areas={0.01,0.005,0.0025}` ;: Define las áreas de las distintas barras en metros cuadrados.
- `apoyos=...` : Define las condiciones de apoyo en los nodos del sistema. En este caso, parece que todos los nodos están fijos en la dirección x, y, y z.
- Se especifican las cargas en diferentes nodos del sistema.
- `hipo[1]=...` : Carga de viento en nodos específicos.
- `hipo[2]=...` : Carga de nieve en nodos específicos.
- `hipo[3]=Union[hipo[1],hipo[2]]` ;: Combina las cargas de viento y nieve en una única hipótesis de carga.
- `cargas={hipo[1],hipo[2],hipo[3]}` ;: Crea una lista que contiene todas las hipótesis de carga.

Comentarios a la entrada de estructuras tridimensionales.

El código de entradas 3D escrito en MATHEMATICA® se centra en la entrada de datos para el análisis de estructuras. A continuación, proporciona una breve descripción y comentarios sobre cada sección:

## 1. Datos Principales:

- ‘nudos’: Número de nudos en el sistema.
- ‘barras’: Número de barras en el sistema.
- ‘tipos’: Número de tipos de barras basadas en sus secciones.
- ‘ligaduras’: Número de apoyos en el sistema.
- ‘hipotesis’: Número de hipótesis de carga.
- ‘e’: Módulo de elasticidad del material.

## 2. Datos de Segundo Orden o Morfológicos:

- ‘path’: Ruta donde se encuentran los archivos ‘coordenadas.dat’ y ‘croquis.dat’.
- Lectura de coordenadas desde el archivo ‘coordenadas.dat’.
- Lectura de croquis desde el archivo ‘croquis.dat’.
- ‘areas’: Lista de áreas de las distintas barras en  $m^2$ .

## 3. Apoyos del Sistema:

- Definición de los apoyos del sistema mediante la matriz ‘apoyos’. Cada fila representa un apoyo, con el primer valor indicando el número del nudo y los siguientes tres valores (cada conjunto de tres valores) especificando las restricciones en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

## 4. Nudos Cargados:

- Definición de las hipótesis de carga (‘hipo[1]’, ‘hipo[2]’, y ‘hipo[3]’) donde cada fila representa una carga. Los primeros tres valores indican el número del nudo y las siguientes tres componentes representan las cargas en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. Las hipótesis de carga se unen en ‘hipo[3]’.

- La matriz ‘cargas’ contiene todas las hipótesis de carga.

## 5. Volver al Cuerpo del Proyecto:

- Este es un comentario que indica la posibilidad de volver al cuerpo principal del proyecto mediante un enlace (LINK1).

Este código se enfoca en la organización y entrada de datos esenciales para realizar análisis estructurales, incluyendo información sobre nudos, barras, apoyos y cargas. La utilización de listas y matrices facilita la estructuración y manipulación eficiente de estos datos en el entorno de MATHEMATICA®.

# 4

## CÓDIGO FUENTE DE ART2D

### 4.1. Introducción

En el presente capítulo, se presenta, detalla y explica el código fuente implementado en WOLFRAM MATHEMATICA® para un programa de cálculo de estructuras articuladas bidimensionales mediante el método matricial. Este programa proporciona una herramienta analítica poderosa para el estudio y análisis de dichas estructuras, permitiendo una comprensión más profunda de su comportamiento bajo diversas cargas y condiciones de ligadura. A través de ejemplos ilustrativos y explicaciones detalladas, se busca facilitar la comprensión y utilización eficiente de este recurso, brindando a los usuarios una plataforma práctica para el análisis estructural en el entorno matemático de Wolfram.

El lector puede descargar el código fuente de los programas para el cálculo matricial de estructuras planas de barras articuladas desde los siguientes enlaces:

CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS PLANAS DE BARRAS ARTICULADAS, HACIENDO USO DE Wolfram Language: [LINK](#)  
Art2D.rar

<https://github.com/maxwellfree/EstructurasArticuladas/blob/main/Art2D.rar>

Los archivos RAR contienen el código fuente de los programas en Wolfram Language y permiten a los usuarios explorar, comprender y utilizar las herramientas de cálculo matricial para el análisis de estructuras articuladas en el ámbito bidimensional.

## 4.2. Índice principal (*cuerpo.nb*)

Con ayuda de los hipervínculos de MATHEMATICA® partimos de una interfaz distributiva para la ejecución secuencial del código/programa. Pero ¿qué es un hipervínculo?

En MATHEMATICA®, un hipervínculo es un enlace interactivo que te permite navegar entre diferentes partes de un cuaderno (notebook en inglés)<sup>2</sup>, abrir otros cuadernos, acceder a páginas web u otro tipo de documentos externos (incluidos otros cuadernos). Los hipervínculos son útiles para organizar y estructurar tu trabajo, permitiéndote crear documentos dinámicos y navegables.

Para crear un hipervínculo en MATHEMATICA®, puedes utilizar la función “Hyperlink”. Esta función toma dos argumentos: el texto que quieras que aparezca como enlace y la dirección a la que quieras que lleve el hipervínculo. Aquí tienes un ejemplo básico:

```
Hyperlink ["Haz clic aquí", "https://www.ejemplo.com"]
```

Cuando evalúas esta expresión en un cuaderno de MATHEMATICA®, obtendrás un enlace que dice “Haz clic aquí”. Si haces clic en este enlace, se abrirá tu navegador web predefinido y te dirigirá a la URL especificada, en este caso, “<https://www.ejemplo.com>”.

---

<sup>2</sup> En MATHEMATICA®, un notebook es un cuaderno digital multifuncional que sirve como la interfaz principal para interactuar con el software, permitiendo realizar cálculos simbólicos y numéricos, visualizar gráficos y escribir textos de manera organizada. Los notebooks permiten la entrada y salida de datos de forma interactiva, modificación de parámetros y recálculo instantáneo, así como la inclusión de texto enriquecido para documentar el proceso y explicar los resultados. Además, soportan gráficos en 2D y 3D, animaciones y manipulaciones interactivas, integrando también la capacidad de contener scripts y fragmentos de código en Wolfram Language para tareas complejas. Organizados en celdas que pueden plegarse y desplegarse, los notebooks facilitan la navegación y estructura del documento. Estos cuadernos pueden ser compartidos con otros usuarios de MATHEMATICA® y exportados a varios formatos, lo que facilita la colaboración y difusión del trabajo realizado, siendo una herramienta poderosa para científicos, ingenieros, matemáticos y cualquier profesional que necesite un entorno interactivo para el análisis y la presentación de datos.

Los hipervínculos son especialmente útiles para agregar referencias, enlaces a recursos adicionales o para organizar tu cuaderno de manera más interactiva. Puedes incluso usarlos para crear índices o tablas de contenido que permitan una navegación más fácil dentro de tu cuaderno de MATHEMATICA®.

En MATHEMATICA®, además de crear hipervínculos a páginas web externas, también puedes crear hipervínculos entre archivos locales para facilitar el proceso de cálculo en varios archivos. Esto es especialmente útil cuando trabajas en proyectos grandes y deseas dividir tu trabajo en varios archivos para una mejor organización y modularidad.

Para crear un hipervínculo a un archivo local en MATHEMATICA®, puedes utilizar la función “Hyperlink” de la misma manera que lo harías para un enlace web, pero en lugar de proporcionar una URL externa, proporcionas la ruta del archivo local.

Aquí tienes un ejemplo:

```
Hyperlink ["Haz clic aquí para abrir otro archivo",
"file:///ruta/del/archivo.nb"]
```

En este ejemplo:

- “Haz clic aquí para abrir otro archivo” es el texto que aparecerá como el enlace.
- “file:///ruta/del/archivo.nb” es la ruta del archivo local que deseas vincular. Asegúrate de proporcionar la ruta completa y correcta del archivo, incluyendo la extensión ‘.nb’ para los cuadernos de MATHEMATICA®.

Al hacer clic en este enlace en tu cuaderno de MATHEMATICA®, se abrirá el archivo local especificado en una nueva pestaña o ventana, dependiendo de la configuración de tu entorno de trabajo.

Este enfoque te permite organizar tus cálculos en varios archivos y navegar fácilmente entre ellos mediante hipervínculos, lo que facilita la gestión y la colaboración en proyectos grandes y complejos en MATHEMATICA®.

Además de todo esto esta la estrategia de insertar un hipervínculo a partir de un texto seleccionado. Así se creó el archivo “cuerpo.nb” cuya interface se muestra en la figura 4.1 y que es tremadamente útil para navegar por las distintas partes de los programas. En la figura 4.1 se puede ver que la secuencia de cálculo comienza con el paso de “Entrada de datos”, donde se recopilan y se ingresan los datos necesarios para el análisis. Luego, avanza al “Proceso de verificado de datos mediante visualización”, donde se emplean técnicas visuales para examinar y validar la calidad de los datos recolectados. Posteriormente, se procede a la “Resolución de la estructura para las distintas hipótesis de carga”, etapa en la que se realizan cálculos y análisis para explorar diferentes cargas y sus efectos en la estructura. Continuando, se accede al paso de “Ver soluciones numéricas”, donde se obtienen resultados cuantitativos mediante métodos numéricos y se evalúan las soluciones. Finalmente, el programa culmina con la “Presentación de soluciones y muestra de diagramas de deformación del sistema”, ofreciendo una presentación visual y detallada de los resultados obtenidos, junto con la exhibición de los diagramas que ilustran las deformaciones del sistema analizado.

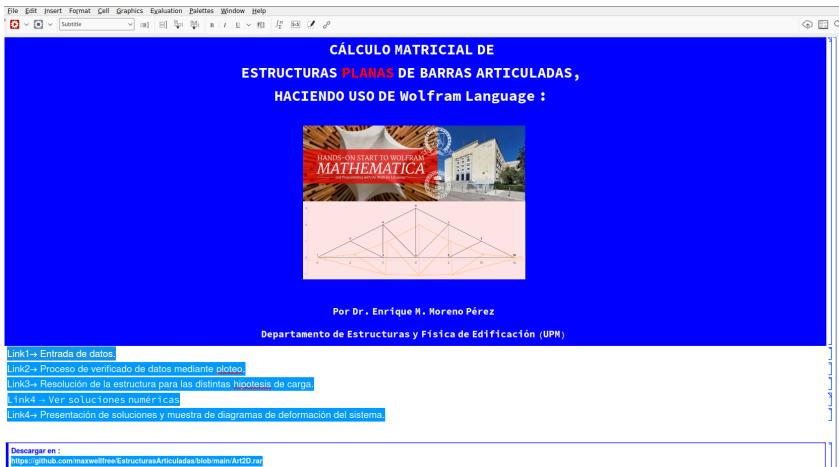


Figura 4.1: La figura muestra la secuencia definida para llevar a cabo su tarea.

En lo que sigue comenzaremos por entender la importancia de la “Entrada de datos”, donde aprenderemos a recopilar y registrar la información necesaria para nuestro análisis.

A continuación, nos sumergiremos en el fascinante mundo del “Proceso de verificado de datos mediante visualización”. Aquí, aprenderemos a utilizar técnicas de visualización de datos para validar y asegurar la calidad de nuestra información antes de avanzar en el análisis.

Posteriormente, nos adentraremos en la fase crucial de la “Resolución de la estructura para las distintas hipótesis de carga”. A través de ejemplos prácticos, exploraremos cómo evaluar diferentes escenarios de carga y su impacto en la estructura.

Seguidamente, nos sumergiremos en el mundo de las “Soluciones numéricas”, donde descubriremos cómo utilizar métodos numéricos para obtener resultados precisos y significativos para nuestro análisis.

Finalmente, concluiremos nuestra sesión con la emocionante etapa de “Presentación de soluciones y muestra de diagramas de deformación del sistema”. Aquí, aprenderemos a comunicar efectivamente los resultados de nuestro análisis, utilizando diagramas de deformación para visualizar y comprender mejor el comportamiento estructural.

¡Prepárense para una experiencia de aprendizaje inmersiva y enriquecedora mientras exploramos juntos el fascinante mundo del análisis estructural computacional!

## 4.3. Entrada de datos principales (*entradas.nb*)

La entrada de datos se compone de dos partes. En la primera (mostrada en la figura 4.2), tenemos un listado de los elementos esenciales que componen la cercha. Estos

# ENTRADA DE DATOS DEL SISTEMA

---

## DATOS PRINCIPALES:

Número de nudos del sistema:

```
In[1]:= nudos = 10;
```

Número de barras del sistema:

```
In[2]:= barras = 17;
```

Tipos de barras:

```
In[3]:= tipos = 3;
```

Número de apoyos:

```
In[4]:= ligaduras = 2;
```

Numero de hipótesis de carga:

```
In[5]:= hipotesis = 4;
```

Modulo de elasticidad del material empleado :

Este es el denominado modulo de Young

```
In[6]:= e = 21 000 000;
```

Figura 4.2: La figura muestra los elementos de entrada principales de la estructura.

incluyen el número de nudos, el número de barras, los tipos de barras, los tipos de hipótesis de carga (es decir, cuántas hipótesis de cargas se aplicarán sobre la cercha, como cargas verticales o cargas horizontales, como el viento). Luego, tendremos el número de ligaduras, que son los nudos a los cuales les vamos a aplicar algún tipo de restricción al

movimiento, ya sea parcial o total. Finalmente, caracterizaremos las propiedades del material. Dado que solo trabaja mediante compresión y tracción, solo necesitaremos el módulo de Young para caracterizarlo.

La segunda parte comienza por una lista llamada coordenadas que especifica las coordenadas de los nudos del sistema de cercha plana. Aquí está una explicación detallada del código:

- **coordenadas:** Es el nombre de la lista que almacena las coordenadas de los nudos del sistema de cercha plana.
- **{x, y}:** Cada elemento de la lista coordenadas está en el formato {x, y}, donde x representa la coordenada en el eje X y y representa la coordenada en el eje Y.
- Cada par de coordenadas representa la posición de un nudo en el plano cartesiano. Por ejemplo, el primer par {0, 0} indica que el primer nudo está ubicado en la intersección de los ejes X e Y, es decir, en el origen.
- Los siguientes pares de coordenadas especifican la posición de los otros nudos en el sistema. Por ejemplo, {2, 1} indica que hay un nudo ubicado en la posición X=2, Y=1.
- En total, hay 10 nudos definidos en este sistema de cercha plana, cada uno con su respectiva posición en el plano.

La Figura 4.3 muestra cómo se han introducido estas coordenadas en la interfaz de WOLFRAM MATHEMATICA®.

Cuando introducimos una cercha mediante coordenadas, corremos el riesgo de cometer errores. La mejor forma de comprobar que no hemos cometido errores es mediante un dibujo de la cercha y una visualización gráfica de la misma, lo cual permite, de un solo golpe de vista, verificar tres aspectos: primero, que la forma es correcta; segundo, que los tamaños de los elementos son los apropiados; y tercero, que cada una de las barras tiene un color que la identifica de forma única con el área que le corresponde. También es importante considerar que el código de colores que identifica a las barras está relacionado con las áreas de las mismas y no con el material del que están hechas, porque asumiremos que todas las barras poseen las mismas propiedades materiales, dado que están hechas con un mismo material, por ejemplo, acero, y que ese tipo de acero tiene un módulo de Young particular y uniforme para todas las barras.

Las coordenadas de los nudos de la cercha plana se introducen mediante pares de variables reales que se corresponden con la coordenada X y la coordenada Y en el plano. A continuación, se presentan las coordenadas de los nudos del sistema siguiendo las convenciones cartesianas, donde la primera columna representa las coordenadas en el eje X y la segunda columna corresponde a las coordenadas en el eje Y. Como las coordenadas de cada par representan un nodo de la cercha, y estos nodos deben ser unidos para generar barras, es necesaria una variable de tipo matricial que almacene la información

---

## DATOS DE SEGUNDO ORDEN O MORFOLÓGICOS:

Coordenadas de los nudos del sistema:

Observa: Este sistema sigue las convenciones cartesianas, donde la primera columna representa las coordenadas en el eje X y la segunda columna corresponde a las coordenadas en el eje Y.

```
0 0
2 1
4 0
4 2
6 0;
In[4]:= coordenadas =
6 3;
8 2
8 0
10 1
12 0
```

Figura 4.3: Representación gráfica de las coordenadas de los nudos de la cercha introducidas en la interfaz de WOLFRAM MATHEMATICA®. Esta visualización permite verificar que la forma de la cercha es correcta, los tamaños de los elementos son los apropiados y cada una de las barras está identificada por un color que corresponde de manera única a su área. Además, asegura que todas las barras, hechas de un mismo material, poseen las mismas propiedades materiales.

correspondiente a las uniones entre nodos y al tipo de área que tiene la barra que une esos nodos. Esta variable es crucial para definir correctamente la estructura de la cercha. En la Figura 4.4 se muestra la definición de dicha variable en la interfaz de WOLFRAM MATHEMATICA®. Esta matriz no solo especifica qué nodos están conectados, sino también asigna el área correspondiente a cada barra, asegurando así que la cercha se modele de manera precisa y efectiva. Todos los elementos de la variable *croquis*, mencionada en la Figura 4.4, son números naturales que comienzan desde el uno. Aunque las áreas de las barras pueden ser números reales, la variable *croquis* refleja el índice del elemento en la lista de áreas, almacenada en otra variable. Esta otra variable, mostrada en la Figura 4.5, es una lista de números reales que contiene las áreas de las diferentes barras que configuran la cercha.

La Figura 4.6 muestra los apoyos considerados en el ejemplo que se proporciona. Los apoyos en el sistema corresponden a las restricciones que imponemos al analizar la estructura. En la primera columna de la matriz de apoyos, se especifica el nodo al que se aplica la restricción. La segunda columna representa las restricciones en el eje X, y la tercera columna representa las restricciones en el eje Y.

Existen tres escenarios posibles para estas restricciones:

- 1. Valor cero (0):** Indica que el nodo está completamente restringido en esa dirección. Es decir, no puede moverse ni experimentar desplazamiento alguno en esa

### Croquis del sistema:

Nota: La primera columna indica el nudo de origen de una barra, mientras que la segunda columna muestra el nudo de destino de dicha barra. En la tercera columna se especifica el tipo de barra, el cual está relacionado con el área de la misma. De esta manera, se define la geometría del elemento estructural que será objeto de cálculos.

```

1 2 1
2 4 1
4 6 1
6 7 1
7 9 1
9 10 1
1 3 3
3 5 3
:= croquis = { { 5, 8, 3 },
                { 8, 10, 3 },
                { 2, 3, 2 },
                { 3, 4, 2 },
                { 4, 5, 2 },
                { 5, 6, 2 },
                { 5, 7, 2 },
                { 7, 8, 2 },
                { 8, 9, 2 }
}

```

Figura 4.4: Definición de la variable matricial en la interfaz de WOLFRAM MATHEMATICA®, que almacena la información sobre las uniones entre nodos y las áreas de las barras que los conectan. Esta matriz es esencial para representar correctamente la estructura de la cercha, especificando no solo qué nodos están conectados, sino también asignando el área correspondiente a cada barra, lo que asegura una modelación precisa y efectiva de la cercha..

Areas de las distintas barras en  $m^2$ :

Observación: Cada tipo definido en la matriz de croquis tiene su correspondiente valor dentro de esta estructura. El tipo uno se refiere al valor del primer elemento del vector matriz.

Ej : croquis<sub>1,3</sub> = 1  $\Rightarrow$  area<sub>1</sub> donde puede ser area<sub>1</sub> = 0.00214  $m^2$

Ej: croquis<sub>1,3</sub> = 5  $\Rightarrow$  area<sub>5</sub> donde puede ser area<sub>5</sub> = 0.00545  $m^2$

Ej: croquis<sub>23,3</sub> = 2  $\Rightarrow$  area<sub>2</sub> donde puede ser area<sub>2</sub> = 0.00666  $m^2$

```
= areas = {0.005, 0.006, 0.007};
```

Figura 4.5: Variable área en el contexto del análisis de una cercha. Esta variable es una lista de números reales que corresponden a las secciones transversales de las barras que constituyen la cercha en estudio. Cada número real representa el área de una barra específica, lo que es esencial para el análisis estructural y la determinación de las cargas y tensiones en la cercha.

dirección específica.

2. **Valor uno (1):** Indica que el movimiento del nodo es libre en esa dirección. El nodo puede desplazarse sin restricción en la dirección especificada.
3. **Valor diferente de cero o uno:** En este caso, se establece un coeficiente de resorte con el valor dado. Este coeficiente actúa como una fuerza que se opone al movimiento del nodo en la dirección indicada. Cuanto mayor sea el valor del coeficiente, mayor será la resistencia al movimiento en esa dirección.

En resumen, la matriz de apoyos no solo indica si un nodo está restringido o libre en una dirección específica, sino que también permite modelar situaciones intermedias mediante el uso de coeficientes de resorte que proporcionan una resistencia proporcional al valor indicado en la matriz. Esta flexibilidad es crucial para analizar con precisión la respuesta de la estructura bajo diferentes condiciones de carga y restricción.

#### Ayudas del sistema:

**Observación:** Los apoyos en el sistema corresponden a las restricciones que imponemos al analizar la estructura. En la primera columna se especifica el nodo al que se aplica la restricción, la segunda columna representa las restricciones en el eje X, y la tercera en el eje Y. Existen tres escenarios posibles: si el valor es cero, indicamos que el nodo está completamente restringido en esa dirección; si es uno, el movimiento es libre en esa dirección. Finalmente, si el valor es diferente de cero o uno, establecemos un coeficiente de resorte con ese valor que se opone al movimiento del nodo en la dirección indicada por su posición en la matriz de apoyos.

$$\text{apoyos} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix};$$

*Figura 4.6: Matriz de apoyos en el sistema estructural. La primera columna especifica el nodo, la segunda columna las restricciones en el eje X y la tercera las restricciones en el eje Y. Los valores posibles son: 0 (restricción completa), 1 (movimiento libre) y un valor diferente de cero o uno (coeficiente de resorte que proporciona resistencia al movimiento). Esta configuración permite modelar con precisión la respuesta de la estructura bajo diferentes condiciones de carga y restricción.*

La Figura 4.7 muestra la información correspondiente a las cargas. Cada componente del vector de cargas, que es un conjunto de matrices, representa una suposición de carga o aplicación de fuerzas en la estructura que estamos analizando. En cada submatriz, la primera columna identifica el nodo afectado por la carga externa, mientras que la segunda y tercera columna representan las fuerzas en las direcciones X e Y, respectivamente, para dicho nodo en toneladas.

A continuación se presenta un ejemplo en MATHEMATICA® de cómo definir estas suposiciones de carga:

```
(* Definición de las hipótesis de carga *)
hipo[1] = {
```

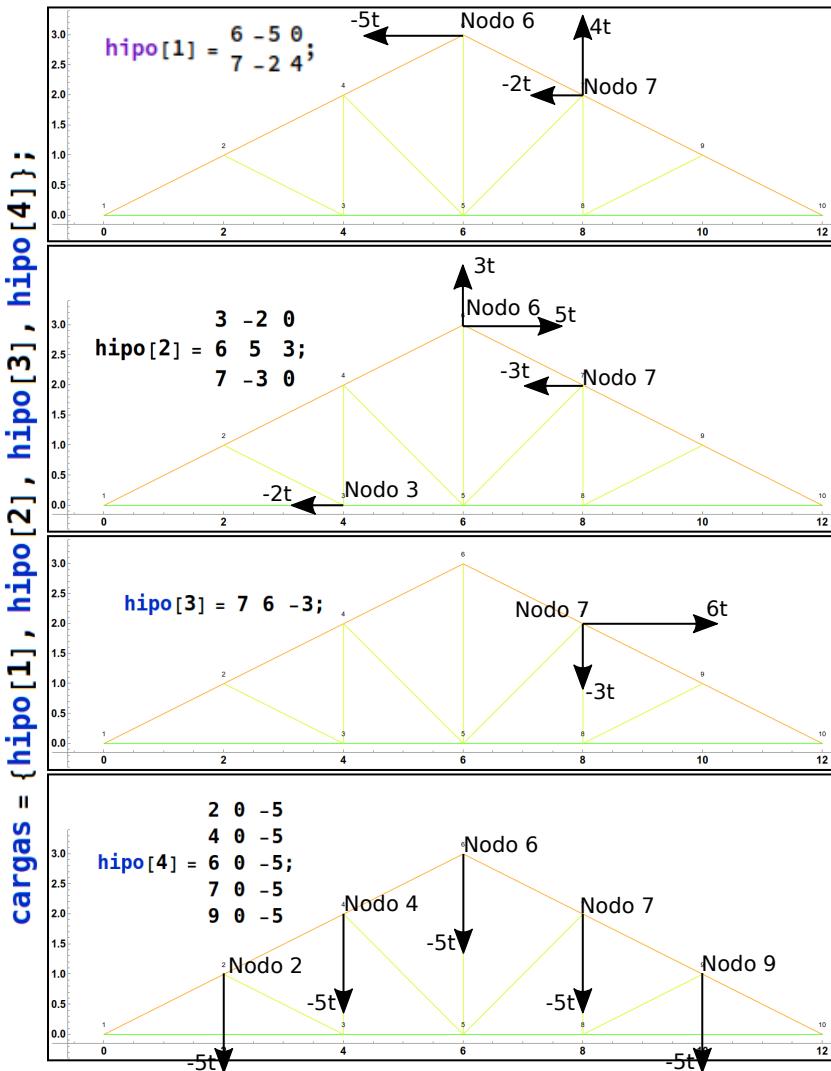


Figura 4.7: Diferentes hipótesis de carga aplicadas a la estructura. Cada hipótesis ( $hipo[1]$ ,  $hipo[2]$ ,  $hipo[3]$ ,  $hipo[4]$ ) representa una combinación específica de fuerzas aplicadas en los nodos de la estructura. Las columnas de cada submatriz indican: nodo afectado, fuerza en la dirección X y fuerza en la dirección Y, respectivamente, todas en toneladas.

```

{6, -5, 0}, (*Nodo 6 con fuerzas -5 en X y 0 en Y *)
{7, -2, 4}   (*Nodo 7 con fuerzas -2 en X y 4 en Y *)
};

hipo[2] = {
{3, -2, 0}, (* Nodo 3 con fuerzas -2 en X y 0 en Y *)
{6, 5, 3},  (* Nodo 6 con fuerzas 5 en X y 3 en Y *)
{7, -3, 0}  (* Nodo 7 con fuerzas -3 en X y 0 en Y *)
};

hipo[3] = {
{7, 6, -3}  (* Nodo 7 con fuerzas 6 en X y -3 en Y *)
};

hipo[4] = {
{2, 0, -5}, (* Nodo 2 con fuerzas 0 en X y -5 en Y *)
{4, 0, -5}, (* Nodo 4 con fuerzas 0 en X y -5 en Y *)
{6, 0, -5}, (* Nodo 6 con fuerzas 0 en X y -5 en Y *)
{7, 0, -5}, (* Nodo 7 con fuerzas 0 en X y -5 en Y *)
{9, 0, -5}  (* Nodo 9 con fuerzas 0 en X y -5 en Y *)
};

(* Conjunto de todas las hipótesis de carga *)
cargas = {hipo[1], hipo[2], hipo[3], hipo[4]};

```

## Explicación Detallada

- **hipo[1]:** Representa la primera suposición de carga. La submatriz

$$\{\{6, -5, 0\}, \{7, -2, 4\}\}$$

indica que el nodo 6 tiene una fuerza de -5 toneladas en la dirección  $X$  y 0 toneladas en la dirección  $Y$ , mientras que el nodo 7 tiene una fuerza de -2 toneladas en  $X$  y 4 toneladas en  $Y$ .

- **hipo[2]:** Representa la segunda suposición de carga. La submatriz

$$\{\{3, -2, 0\}, \{6, 5, 3\}, \{7, -3, 0\}\}$$

indica que el nodo 3 tiene una fuerza de -2 toneladas en  $X$  y 0 toneladas en  $Y$ , el nodo 6 tiene una fuerza de 5 toneladas en  $X$  y 3 toneladas en  $Y$ , y el nodo 7 tiene una fuerza de -3 toneladas en  $X$  y 0 toneladas en  $Y$ .

- **hipo[3]:** Representa la tercera suposición de carga. La submatriz

$$\{\{7, 6, -3\}\}$$

indica que el nodo 7 tiene una fuerza de 6 toneladas en  $X$  y -3 toneladas en  $Y$ .

- **hipo[4]:** Representa la cuarta suposición de carga. La submatriz

$$\{\{2, 0, -5\}, \{4, 0, -5\}, \{6, 0, -5\}, \{7, 0, -5\}, \{9, 0, -5\}\}$$

indica que los nodos 2, 4, 6, 7 y 9 tienen una fuerza de 0 toneladas en  $X$  y -5 toneladas en  $Y$ .

## Conjunto de Hipótesis de Carga

El vector cargas agrupa todas las suposiciones de carga anteriores:

```
cargas = {hipo [1], hipo [2], hipo [3], hipo [4]};
```

Este conjunto de cargas permite analizar la estructura bajo diferentes condiciones de carga, facilitando así el estudio de su comportamiento y la identificación de posibles puntos críticos o de fallo.

## 4.4. Verificación de entradas por ploteo (verificador.nb)

Cuando introducimos una cercha mediante coordenadas, corremos el riesgo de cometer errores. La mejor forma de comprobar que no hemos cometido errores es mediante un dibujo de la cercha y una visualización gráfica de la misma, lo cual permite, de un solo golpe de vista, verificar tres aspectos: primero, que la forma es correcta; segundo, que los tamaños de los elementos son los apropiados; y tercero, que cada una de las barras tiene un color que la identifica de forma única con el área que le corresponde. También es importante considerar que el código de colores que identifica a las barras está relacionado con las áreas de las mismas y no con el material del que están hechas, porque asumiremos que todas las barras poseen las mismas propiedades materiales, dado que están hechas con un mismo material, por ejemplo, acero, y que ese tipo de acero tiene un módulo de Young particular e idéntico para todas las barras.

Las primeras funciones en MATHEMATICA® son:

```
i[ii_] := croquis[[ii, 1]];
j[ii_] := croquis[[ii, 2]];
ntipo[ii_] := croquis[[ii, 3]];
```

Estas funciones se corresponden con unos índices que identifican el principio y el final de cada barra en la cercha, a través de los números de sus nudos sobre dicha cercha. La tercera función `ntipo[ii_]` se corresponde con un índice que identifica, dentro de la matriz de áreas, cuál es el área de la barra que une dichos nudos o nodos.

Las siguientes funciones son:

```
xi[ii_] := coordenadas[[i[ii], 1]];
yi[ii_] := coordenadas[[i[ii], 2]];
xj[ii_] := coordenadas[[j[ii], 1]];
yj[ii_] := coordenadas[[j[ii], 2]];
```

Estas funciones hacen referencia a los valores reales de las coordenadas a partir de las funciones de índices predefinidas anteriormente.

Luego, con el siguiente código:

```
escalax = Abs[Max[coordenadas[[All, 1]]];
- Min[coordenadas[[All, 1]]]];
escalay = Abs[Max[coordenadas[[All, 2]]];
- Min[coordenadas[[All, 2]]]];
```

se define el tamaño del gráfico. Para poder dibujar, se identifica el espacio necesario cogiendo la variación de coordenadas en la horizontal y la vertical.

Para identificar las diferentes áreas de las barras en la cercha, se emplea un código de colores definido por la función:

```
(* FUNCION COLORES *)
colores[k_] := Exp[2 Pi I k/10]
```

Es decir, se asignan diferentes colores a las barras utilizando una función compleja euleriana. Al coger el argumento de dicha función, se puede identificar el color que tiene cada barra:

```
dibujo = Table[{Hue[Rescale[Arg[colores[ntipo[1]]]],
{0, 2 Pi}], Line[{{xi[1], yi[1]}, {xj[1], yj[1]}}]}, {1, 1, barras}];
texto = Table[Text[l, {coordenadas[[l, 1]],
coordenadas[[l, 2]] + escalay/20}], {l, 1, nudos}];
```

Finalmente, se lleva a cabo la generación de la cercha gráfica mediante el siguiente código:

```
Show[
Graphics[dibujo, LabelStyle -> Directive[Black, Bold, 15]],
Graphics[texto], Axes -> True, AxesOrigin -> {-escalax/20,
-escalay/20}, AspectRatio -> Automatic]
Table[Style[{"El area de este color vale", areas[[l]]},
```

```
"\\((\\text{m}\\^2))",FontColor->Hue[Rescale[Arg[colores[1]],  
{0, 2 Pi}]],{1, 1, tipos}  
]
```

Este código genera una visualización gráfica de la cercha, donde cada barra está coloreada de acuerdo con su tipo, utilizando un esquema de colores definido por una función compleja. Además, se añade texto a cada nodo para su identificación, y se muestra la información sobre las áreas de las barras con su respectivo color.

## 4.5. Resolución del sistema

La resolución de cerchas en el caso matricial conduce a matrices de rigidez que son simétricas y de semibanda superior. Esto implica que, para almacenar y manipular dichas matrices, podemos centrarnos únicamente en la diagonal principal y en la parte superior o inferior de la matriz donde se encuentran los elementos no nulos.

### Matriz Simétrica de Semibanda Superior

Una **matriz simétrica de semibanda superior** es un tipo especial de matriz que tiene ciertas propiedades estructurales que hacen que su almacenamiento y manipulación sean más eficientes. A continuación se presenta una explicación detallada:

#### Simetría

Una matriz simétrica  $A$  cumple con la propiedad  $A = A^T$ , lo que significa que el elemento en la posición  $(i, j)$  es igual al elemento en la posición  $(j, i)$ . En otras palabras, la matriz es reflejada a lo largo de su diagonal principal.

#### Semibanda Superior

Una matriz de semibanda superior (también conocida como matriz banda) es aquella en la que todos los elementos que están fuera de una banda diagonal de ancho determinado son cero. Para una matriz simétrica, es suficiente considerar solo la parte superior de la banda (o la parte inferior debido a la simetría). El ancho de la banda,  $k$ , determina cuántas diagonales por encima de la diagonal principal pueden contener elementos no nulos.

Formalmente, una matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$  es una matriz simétrica de semibanda superior de ancho  $k$  si:

$$A_{ij} = 0 \quad \text{para } |i - j| > k$$

y

$$A_{ij} = A_{ji}$$

para todos los  $i, j$ .

## Ejemplo

Considera una matriz  $A$  de tamaño  $5 \times 5$  con una semibanda de ancho  $k = 1$  (es decir, solo la diagonal principal y la primera diagonal superior e inferior pueden tener elementos no nulos):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Aquí, la matriz es simétrica ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) y tiene una banda de ancho 1.

## Aplicaciones y Ventajas

- **Eficiencia de Almacenamiento:** Debido a la estructura de la matriz, no es necesario almacenar todos los elementos, sino solo aquellos dentro de la banda. Esto reduce significativamente el uso de memoria.
- **Algoritmos Optimizados:** Operaciones matriciales, como la factorización de Cholesky (ver apéndices6), se pueden optimizar para matrices de banda, lo que mejora la eficiencia computacional.
- **Sistemas Lineales:** Las matrices de semibanda superior son comunes en la discretización de problemas diferenciales y otros problemas numéricos, donde la estructura de la matriz refleja las relaciones locales entre variables.

## Representación en Código

Aquí hay un ejemplo de cómo se puede representar y trabajar con una matriz simétrica de semibanda superior en MATHEMATICA®:

```
(* Definicion de una matriz simetrica de semibanda
superior *)
n = 5; (* Tamano de la matriz *)
k = 1; (* Ancho de la banda *)

(* Creacion de una matriz con ceros *)
A = ConstantArray[0, {n, n}];

(* Llenado de la banda superior y diagonal principal *)
```

```

Do [
A[[i, j]] = RandomReal[];
A[[j, i]] = A[[i, j]], {i, 1, n}, {j, i, Min[i + k, n]}
];

(* Mostrar la matriz *)
MatrixForm[A]

```

En este código, se crea una matriz de tamaño  $n \times n$  con una semibanda superior de ancho  $k$ . Los elementos de la banda se llenan con valores aleatorios, y la simetría se asegura copiando los valores correspondientes a la parte inferior de la matriz.

En el proceso de resolver el problema de las cerchas articuladas planas elásticas, el primer paso consiste en determinar el tamaño de la región superior simétrica de la matriz de semibanda superior. Esto se hace para reservar la memoria necesaria y construir únicamente los elementos de la matriz de rigidez que no son nulos, limitándonos a la diagonal y la parte superior de la matriz de semibanda superior. Para lograrlo, inicializamos una variable, `dif`, en cero. Luego, recorremos todas las barras y comparamos las posiciones de sus nodos. Si la diferencia entre las posiciones de los nodos es mayor que `dif`, actualizamos `dif` con este nuevo valor. Finalmente, multiplicamos `dif` por dos y le sumamos uno para obtener el tamaño necesario de la región superior simétrica de la matriz de semibanda superior. Esto lo haremos con el código:

```

dif = 0;
For[k = 1, k <= barras, k++,
Which[croquis[[k, 2]] - croquis[[k, 1]] > dif,
dif = croquis[[k, 2]] - croquis[[k, 1]]];
];
dif = 2*(dif + 1);

```

Inicialmente, iniciamos la semibanda superior de la matriz de rigideces como una matriz no cuadrada donde todos los elementos son nulos y su tamaño es igual a  $\text{diff} \times (2 * \text{nodos})$ . Utilizamos la función `Array` para crear una matriz de dimensiones  $2 * \text{nodos} \times \text{diff}$ . Luego, con un bucle anidado, asignamos un valor de cero a cada elemento de esta matriz. El primer bucle recorre las filas de la matriz (de 1 a  $2 * \text{nodos}$ ) y el segundo bucle recorre las columnas (de 1 a `diff`), asignando cero a cada elemento `rigidez[k, 1]`.

El código sería el siguiente:

```

Array[rigidez, {2*nudos, diff}];
Do[Do[rigidez[k, 1] = 0, {l, 1, diff}], {k, 1, 2*nudos}];

```

Este código asigna valores a la semibanda superior no nula de la matriz de rigidez en el contexto de resolver un problema relacionado con cerchas articuladas planas elásticas.

```

For[k = 1, k <= barras, k++,
(* Indices origen:*)

```

```

io = 2*(i[k] - 1) + 1; jo = 2*(j[k] - 1) + 1;
(*Indices destino*)
id = io + 1; jd = jo + 1;
(*Indices diferencia*)
ij = 2*(j[k] - i[k]);
deltax = xj[k] - xi[k]; deltay = yj[k] - yi[k];
longitud = Sqrt[deltax^2 + deltay^2];
cosA = deltax/longitud; sinA = deltay/longitud;
eal = (e*areas[[ntipo[k]]])/longitud;
tension = eal*cosA^2;
rigidez[io, 1] = rigidez[io, 1] + tension;
rigidez[jo, 1] = rigidez[jo, 1] + tension;
rigidez[io, ij + 1] = -tension;
tension = eal*sinA^2;
rigidez[id, 1] = rigidez[id, 1] + tension;
rigidez[jd, 1] = rigidez[jd, 1] + tension;
rigidez[id, ij + 1] = -tension;
tension = eal*cosA*sinA;
rigidez[io, 2] = rigidez[io, 2] + tension;
rigidez[jo, 2] = rigidez[jo, 2] + tension;
rigidez[io, ij + 2] = -tension;
rigidez[id, ij] = -tension;
];

```

Aquí está el código explicado paso a paso:

- Se recorre cada barra de la estructura en un bucle For.
- Se calculan los índices de origen (io, jo), destino (id, jd) y de diferencia (ij) para cada barra.
- Se calculan las diferencias en las coordenadas *x* e *y* (deltax, deltay) y la longitud de la barra.
- Se calculan los valores de coseno y seno del ángulo de la barra (cosA, sinA).
- Se calcula la rigidez axial (eal) de la barra.
- Se calcula la tensión en la barra (tension) en función de la rigidez axial y el ángulo de la barra.
- Se actualizan los valores de la matriz de rigidez para los nodos de origen y destino, así como para los índices de diferencia correspondientes.

Este código es fundamental para el cálculo de la matriz de rigidez en el contexto específico de la resolución de problemas relacionados con cerchas articuladas planas elásticas. La matriz de rigidez debe ser modificada después de construirla para considerar los anclajes o apoyos de la cercha plana. En este caso, existen varias posibilidades:

- La primera es cuando el apoyo es una ligadura total que no permite el movimiento en una dirección específica. En este caso, el valor de la matriz de rigidez se establece como un valor enorme, como 10 elevado a 10. Esto asegura que cuando se calcule el cociente para determinar el desplazamiento, este sea casi nulo. Un desplazamiento casi nulo implica que el nudo no se mueve, que es el comportamiento deseado.
- La segunda posibilidad es cuando el nudo es libre. En este caso, no se modifica el valor de la matriz de rigidez en ese punto.
- Finalmente, existe la posibilidad de un apoyo intermedio, que no es una rigidez total ni está completamente libre. En este caso, se elige un valor intermedio para la rigidez en ese nudo, sumando el valor que presenta el apoyo a la rigidez ya existente en el nudo.

Aquí está el código correspondiente:

```
For [k = 1, k <= ligaduras, k++,
  io = 2*(apoyos[[k, 1]] - 1) + 1;
  jd = io + 1;
  Which[apoyos[[k, 2]] != 1,
  Which[apoyos[[k, 2]] != 0,
    rigidez[io, 1] = rigidez[io, 1] + apoyos[[k, 2]],
    apoyos[[k, 2]] == 0, rigidez[io, 1] = N[e^10]
  ];
  Which[apoyos[[k, 3]] != 1,
  Which[apoyos[[k, 3]] != 0,
    rigidez[jd, 1] = rigidez[jd, 1] + apoyos[[k, 3]],
    apoyos[[k, 3]] == 0, rigidez[jd, 1] = N[e^10]
  ];
];
];
```

Al igual que hacíamos con la matriz de rigidez, procedemos con la matriz de esfuerzos. Inicializamos todos sus elementos a cero utilizando la función **Array**. La matriz de esfuerzos tiene dimensiones  $2 * \text{nudos} \times \text{hipótesis}$ , donde **nudos** representa el número total de nudos en la estructura y **hipótesis** es el número de hipótesis de carga. El siguiente código se encarga de esta inicialización:

```
Array[fuerzas, {2*nudos, hipotesis}];
Do [Do[fuerzas[k, 1] = 0, {k, 1, 2*nudos}],
{1, 1, hipotesis}];
```

En este código, se crea una matriz de dimensiones  $2 * \text{nudos} \times \text{hipótesis}$  utilizando la función **Array**. Luego, con dos bucles **Do** anidados, se asigna el valor de cero a cada elemento de la matriz **fuerzas**. El primer bucle recorre las filas de la matriz (de 1 a  $2 * \text{nudos}$ ) y el segundo bucle recorre las columnas (de 1 a **hipótesis**), asegurando que

todos los elementos se inicialicen correctamente a cero.

Una vez que hemos definido la matriz que corresponderá a los esfuerzos o fuerzas generadas, procedemos a asignar valores a dicha matriz en los nodos correspondientes. Como podemos observar, la matriz no tendrá una sola columna, sino que constará de varias columnas, cada una correspondiente a una hipótesis distinta de carga. El siguiente código lleva a cabo esta tarea:

```
For [k = 1, k <= hipotesis, k++,
  subcarga = cargas[[k]];
  numcargas = Dimensions[cargas[[k]]];
  For [l = 1, l <= numcargas[[1]], l++,
    io = 2*(subcarga[[l, 1]] - 1) + 1;
    fuerzas[io, k] = subcarga[[l, 2]];
    fuerzas[io + 1, k] = subcarga[[l, 3]];
  ]
];
```

En este código, se recorre cada hipótesis de carga. Para cada hipótesis, se extraen las cargas correspondientes y se determina el número de cargas. Posteriormente, se recorren todas las cargas de esa hipótesis y se asignan a la matriz de fuerzas los valores correspondientes en los nodos afectados por esas cargas. Cada columna de la matriz de fuerzas representa una hipótesis de carga diferente.

Como sabemos que resolveremos cerchas relativamente pequeñas y que poseemos una potencia de cálculo considerable, con el único objetivo de hacer más pedagógico y visual el procedimiento, extendemos la matriz de rigideces a su completitud, lo que denominamos matriz de coeficientes, y hacemos lo mismo con las fuerzas, lo que denominamos matriz independiente. Luego, procedemos a utilizar un método de solución que aprovecha el hecho de que la matriz es simétrica. Por eso, usamos el método "Banded". El siguiente código lleva a cabo este proceso:

```
coeficientes = Table[
  Which[
    1 + (k - 1) <= l <= dif + (k - 1), rigidez[k, l - (k - 1)],
    l > dif + (k - 1), 0,
    1 < k < dif + 1, rigidez[l, k - (l - 1)],
    k >= dif + 1, 0
  ],
  {k, 1, 2*nudos}, {l, 1, 2*nudos}
];

independientes = Table[fuerzas[k, 1], {k, 1, 2*nudos},
  {l, 1, hipotesis}];
```

```

tol = 10^-6;
lassoluciones = Table[
Chop[
LinearSolve[coeficientes, independientes[[All, k]],
Method -> "Banded"], tol],
{k, 1, hipotesis}
];

```

En este código, se genera la matriz de coeficientes (`coeficientes`) y la matriz independiente (`independientes`). Luego, se utiliza el método `LinearSolve` con el método "Banded" para resolver el sistema de ecuaciones lineales. Los resultados se almacenan en la lista `lassoluciones`.

Aunque disponemos de una matriz en semi banda superior triagonal, lo que significa que la mayoría de los elementos fuera de la diagonal principal y las dos bandas adyacentes son nulos, y podríamos emplear el método Tridiagonal Matrix Algorithm (TDMA) para resolver eficientemente el sistema de ecuaciones lineales, optamos por construir la matriz completa por razones pedagógicas. Se recomienda ver apéndice matemático 6.2. Construir y resolver una matriz completa ofrece una comprensión más completa del proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Al construir la matriz completa, podemos visualizar mejor la estructura de la matriz de coeficientes y comprender cómo interactúan sus elementos. Además, nos permite utilizar métodos más generales y entender cómo se aplican en diferentes contextos.

Aunque en realidad podríamos utilizar el método TDMA para resolver eficientemente nuestro sistema de ecuaciones lineales, optamos por construir la matriz completa y resolverla utilizando un procedimiento similar a TDMA, pero con una matriz más general. Esto nos permite no solo obtener la solución del sistema, sino también comprender mejor los fundamentos detrás de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

El valor  $tol = 10^{-6}$  establece un umbral de tolerancia igual a  $10^{-6}$ . Este umbral se utiliza para determinar qué valores se consideran suficientemente cercanos a cero como para ser redondeados a cero. En esencia, cualquier valor numérico menor que  $10^{-6}$  se considerará prácticamente cero y será tratado como tal en las operaciones subsiguientes. La función `Chop` se aplica a las soluciones obtenidas después de resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando el método `LinearSolve` con la opción "Banded". `Chop` elimina los valores numéricos muy pequeños, que están por debajo del umbral de tolerancia especificado, y los redondea a cero. Esto se hace para mejorar la precisión numérica y para eliminar cualquier ruido numérico que pueda haber sido introducido durante los cálculos. Así, `Chop` garantiza que las soluciones sean más limpias y estén libres de valores numéricos insignificantes.

## 4.6. Ilustración de las deformadas (Zoom x100)

Para visualizar mejor el efecto de la deformación en la cercha, amplificamos las coordenadas de los nudos con las soluciones de los desplazamientos, usando un factor de escala apropiado. En este caso, elegimos un factor de escala de 100 para asegurarnos de que las deformaciones sean visibles en el dibujo. El código en MATHEMATICA® para esto es el siguiente:

```
(*Factor de amplificacion para visualizar deformaciones*)
amplia = 70;

(* Coordenadas de la cercha deformada *)
xides[k_, ii_] :=
coordenadas[[i[ii],1]] + amplia*solucion[k][[i[ii],1]];
yides[k_, ii_] :=
coordenadas[[i[ii],2]] + amplia*solucion[k][[i[ii],2]];
xjdes[k_, ii_] :=
coordenadas[[j[ii],1]] + amplia*solucion[k][[j[ii],1]];
yjdes[k_, ii_] :=
coordenadas[[j[ii],2]] + amplia*solucion[k][[j[ii],2]];
```

Lo que hacemos es tomar las coordenadas de los nudos que inicialmente presenta la cercha cuando no se ha aplicado ningún esfuerzo y corregir estas localizaciones espaciales con las deformaciones que sufriría tras aplicar los esfuerzos. Por eso, lo que se hace es coger las coordenadas y sumarles la solución del problema, que no es otra cosa que los desplazamientos de los nudos de la cercha. Hecho esto, lo que se obtiene son nuevas coordenadas de una cercha deformada. Sin embargo, para la visualización, como indicábamos anteriormente, se multiplican las soluciones por una amplificación, de modo que al corregir las coordenadas, estas correcciones sean lo suficientemente grandes para que se pueda visualizar en el dibujo hacia dónde ha tenido lugar el movimiento de los nudos y cuál es la deformación que experimenta la cercha.

Para visualizar la cercha sin deformar junto con la cercha deformada, utilizamos el siguiente código de WOLFRAM MATHEMATICA®. Primero, generamos tablas de dibujo para ambas cerchas y luego creamos una animación que las muestra.

```
(* Dibujo de la cercha sin deformar *)
dibujo = Table[Line[{{xi[1], yi[1]}, {xj[1], yj[1]}}], {1, 1, barras}];

(* Dibujo de la cercha deformada *)
dibujodes = Table[
{Hue[Rescale[Arg[colores[1]], {0, 2 Pi}]], Line[{{xides[k, 1], yides[k, 1]}, {xjdes[k, 1],
```

```

yjdes[k, 1]]}]], {l, 1, barras}, {k, 1, hipotesis}];

(* Texto para los nudos de la cercha sin deformar *)
texto = Table[
Text[l, {coordenadas[[l, 1]],
coordenadas[[l, 2]] + escalay/20}],
{l, 1, nudos}
];

(* Texto para los nudos de la cercha deformada *)
textodes = Table[
{Hue[Rescale[Arg[colores[1]], {0, 2 Pi}]], 
Text[l,{coordenadas[[l, 1]] + amplia*solucion[k][[l,1]],
coordenadas[[l, 2]] + amplia*solucion[k][[l, 2]]}],
{l, 1, nudos}, {k, 1, hipotesis}}];

```

La animación no tiene por qué ser dinámica; podemos seleccionar de forma selectiva la hipótesis de carga que nos interesa para ver la deformación que experimenta la cercha bajo dicha hipótesis, y así procedemos (de ahí que elegimos `AnimationRunning ->False`).

```

Animate[
Show[
Graphics[dibujo],
Graphics[dibujodes[[All, k]]],
Graphics[texto],
Graphics[textodes[[All, k]]],
Axes -> True,
AxesOrigin -> {-escalax/20, -escalay/20},
AspectRatio -> Automatic
],
{k, 1, hipotesis, 1},
AnimationRunning -> False
]

```

En el contexto de la visualización de la deformación de una cercha bajo diferentes hipótesis de carga, el siguiente código de MATHEMATICA® crea una animación interactiva que permite ver cómo cambia la estructura en función de las diferentes cargas aplicadas. Vamos a desglosar y explicar cada parte del código anterior.

### Desglose y Explicación

#### 1. `Animate`:

- La función `Animate` crea una animación interactiva en MATHEMATICA®. Esta animación varía el valor de una variable, en este caso `k`, y actualiza el gráfico mostrado en cada paso de la animación.

- El rango de  $k$  va de 1 a hipótesis en incrementos de 1.

2. **Show:**

- La función Show combina múltiples gráficos en una sola visualización.
- Aquí se combinan los gráficos de la cercha sin deformar, la cercha deformada, y los textos de los nudos.

3. **Graphics[dibujo]:** Esto representa el gráfico de la cercha sin deformar. dibujo es una lista de líneas que representan las barras de la cercha en su estado original.
4. **Graphics[dibujodes[[All, k]]]:** Esto representa el gráfico de la cercha deformada para la hipótesis de carga  $k$ . dibujodes es una lista de listas de líneas que representan las barras de la cercha deformada bajo diferentes hipótesis de carga. El [[All,  $k$ ]] selecciona todas las barras para la hipótesis  $k$ .
5. **Graphics[texto]:** Esto representa el texto (etiquetas) para los nudos de la cercha sin deformar.
6. **Graphics[textodes[[All, k]]]:** Esto representa el texto (etiquetas) para los nudos de la cercha deformada para la hipótesis de carga  $k$ . textodes es una lista de listas de textos para diferentes hipótesis de carga. El [[All,  $k$ ]] selecciona todas las etiquetas de los nudos para la hipótesis  $k$ .
7. **Axes ->True:** Añade ejes al gráfico.
8. **AxesOrigin ->{-escalax/20, -escalay/20}:** Establece el origen de los ejes en {-escalax/20, -escalay/20}, lo que ayuda a posicionar mejor el gráfico en el espacio de visualización.
9. **AspectRatio ->Automatic:** Mantiene la proporción automática del gráfico, asegurando que las deformaciones y la estructura se visualicen correctamente sin distorsión.
10. **{k, 1, hipótesis, 1}:** Define el rango de la variable  $k$  que se usará en la animación.  $k$  varía desde 1 hasta hipótesis en incrementos de 1.
11. **AnimationRunning ->False:** Establece que la animación no se ejecutará automáticamente al cargar. En lugar de eso, el usuario puede controlarla manualmente, permitiendo una visualización selectiva de cada hipótesis de carga.

Este código crea una animación interactiva, que se muestra en la Figura 4.8, donde se visualiza la cercha sin deformar junto con su deformación bajo diferentes hipótesis de carga. La animación permite al usuario ver cómo se deforma la estructura al variar la carga aplicada, mostrando tanto las barras deformadas como las etiquetas de los nudos en cada estado. La opción AnimationRunning ->False permite al usuario detener y examinar cada hipótesis de carga de manera individual.

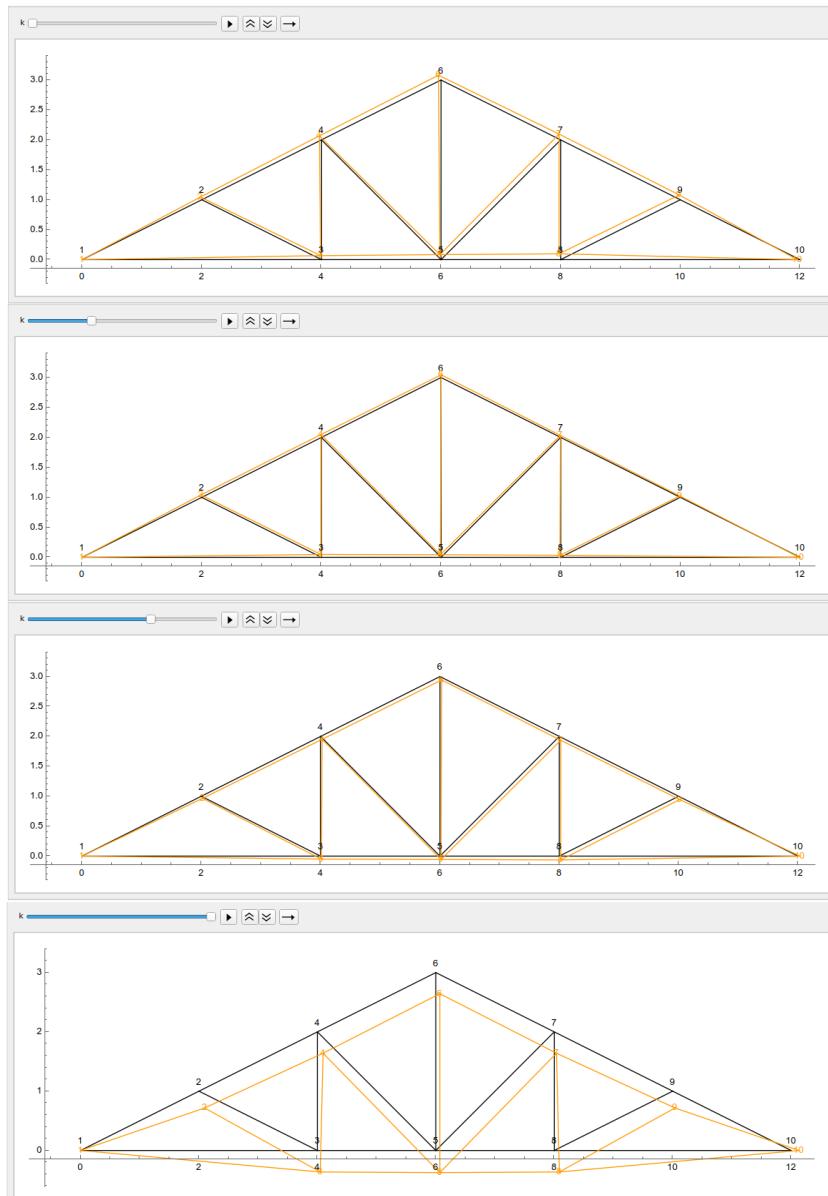


Figura 4.8: La figura muestra las deformaciones de las cerchas planas elásticas junto con la forma que idealmente tendrían si no se aplicara ningún tipo de esfuerzo sobre ellas. De arriba a abajo se muestran las hipótesis uno a cuatro, comenzando por la uno arriba y terminando por la cuatro abajo.

#### 4.7. Resultados numéricos: deformaciones y esfuerzos

Lo que hacemos inicialmente es visualizar la matriz de rigidez que vamos a resolver, donde podemos identificar de forma visual los apoyos como valores muy grandes en esta matriz.

```
Print ["ESTA ES LA MATRIZ DE RIGIDEZ AL COMPLETO : "];
MatrixForm [coeficientes]
```

Lo que obtenemos es la matriz de la Figura 4.9. En la matriz de la Figura 4.9, los elementos

Figura 4.9: Matriz de rigideces.

que representan los apoyos son aquellos con valores muy grandes. Estos valores grandes indican restricciones de movimiento en los nodos correspondientes. En la matriz dada, podemos identificar los apoyos como los elementos con valores muy grandes en la diagonal principal y en las filas y columnas asociadas con los nodos apoyados. Los valores muy grandes en estos elementos representan una gran rigidez en esos nodos, lo que significa que están fuertemente restringidos en términos de movimiento.

Aquí está la matriz de manera más legible:

$$\begin{pmatrix} 1,67 \times 10^{73} & 18782,97 & -37565,94 & \dots \\ 18782,97 & 1,67 \times 10^{73} & -18782,97 & \dots \\ -37565,94 & -18782,97 & 120211,01 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

En esta matriz, los elementos como  $1,67 \times 10^{73}$  y otros valores grandes en la diagonal principal y en las filas y columnas asociadas con los nodos representan los apoyos. Estos valores indican la rigidez extrema en los nodos correspondientes.

Ahora vamos a mostrar en la Figura 4.10 la matriz de esfuerzos donde cada una de las columnas de dicha matriz representa una hipótesis de carga. El código para obtenerla es el siguiente:

```
Print ["ESTA ES LA MATRIZ DE ESFUERZOS : "];
```

```
leyenda = Table[{"Hipótesis", i}, {i, 1, hipótesis}];
TableForm[independientes, TableHeadings -> {None, leyenda},
TableAlignments -> Center]
```

{Hipótesis , 1}	{Hipótesis , 2}	{Hipótesis , 3}	{Hipótesis , 4}
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	-5
0	-2	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	-5
0	0	0	0
0	0	0	0
-5	-4	0	0
0	3	0	-5
-2	-3	-6	0
4	0	1	-5
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	-5
0	0	0	0
0	0	0	0

Figura 4.10: Matriz de cargas sobre la cercha.

La primera solución numérica corresponde a los desplazamientos que experimentan los nudos de la cercha una vez que son sometidos al esfuerzo. En la Figura 4.11 se muestran los desplazamientos para las cuatro hipótesis de carga consideradas. Cada nudo de la cercha sufre desplazamientos respecto a las coordenadas iniciales cuando no hay carga presente. El código utilizado para generar esta tabla es el siguiente:

```
Do [
{Print ["Hipótesis ", i, "DoubleLongRightArrow"],
TableForm[solucionNudo[i],
TableHeadings -> {None, {"Nudo", "Desplazamiento Deltax",
"Desplazamiento Deltay"}},
TableAlignments -> Center]
},
Print [" "],
{i, 1, hipótesis}];
```

La tabla de la Figura 4.11 muestra los desplazamientos ( $\Delta x$  y  $\Delta y$ ) experimentados por cada nudo de la cercha bajo cuatro hipótesis de carga diferentes. Cada hipótesis de carga

está etiquetada del 1 al 4. Para cada hipótesis, se muestran los desplazamientos de cada nudo en las columnas correspondientes.

Los valores en la tabla están en unidades específicas, y se presume que estos desplazamientos son relativos a la posición inicial de cada nudo antes de aplicar la carga. La tabla proporciona una representación clara de cómo varían los desplazamientos en cada nudo bajo diferentes cargas aplicadas. Finalmente, la Figura 4.12 muestra los esfuerzos que

	Nudo	Desplazamiento $\Delta x$	Desplazamiento $\Delta y$		Nudo	Desplazamiento $\Delta x$	Desplazamiento $\Delta y$
Hipotesis 1 =>	1	0	0	Hipotesis 3 =>	1	0	0
	2	-0.00033582	0.000640543		2	0.000257321	-0.000514643
	3	-0.000176871	0.000953965		3	0.000163265	-0.000702755
	4	-0.000503692	0.000953965		4	0.000351377	-0.000702755
	5	-0.000265396	0.00119226		5	0.000244898	-0.000809234
	6	-0.000612251	0.00114464		6	0.000404617	-0.000809234
	7	-0.00037094	0.00138769		7	0.000351377	-0.000915714
	8	-0.000380952	0.00138769		8	0.000326531	-0.000915714
	9	-0.000262812	0.0011514		9	0.000259094	-0.000780841
	10	-0.000612245	0		10	0.000489796	0
<hr/>							
Hipotesis 2 =>	1	0	0	Hipotesis 4 =>	1	0	0
	2	-0.000170636	0.000580851		2	0.0013581	-0.00404719
	3	-0.000122449	0.000677224		3	0.000680272	-0.00518101
	4	-0.000099035	0.000677224		4	0.00137277	-0.00514133
	5	-0.000156463	0.000619795		5	0.000952381	-0.00533724
	6	0.0000375657	0.000643605		6	0.000952381	-0.00509914
	7	-0.000058854	0.000477322		7	0.000531991	-0.00514133
	8	-0.000176871	0.000477322		8	0.00122449	-0.00518101
	9	-0.0000979132	0.000319407		9	0.000546663	-0.00404719
	10	-0.000217687	0		10	0.00190476	0

Figura 4.11: La tabla muestra los desplazamientos ( $\Delta x$  y  $\Delta y$ ) de cada nudo de la cercha bajo cuatro hipótesis de carga diferentes, etiquetadas del 1 al 4. Cada fila de la tabla representa un nudo de la cercha, mientras que las columnas muestran los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$ . Los valores de los desplazamientos están en unidades específicas y son relativos a la posición inicial de cada nudo antes de aplicar la carga. Esta tabla proporciona una clara visualización de cómo varían los desplazamientos en cada nudo bajo diferentes cargas aplicadas.

recorren las barras. Con un signo se especifica si están sufriendo una compresión o una tracción. Si el esfuerzo es positivo, la barra está en tracción; si es negativo, la barra está en compresión y los nudos tienden a acercarse debido a las fuerzas. En el caso contrario, los nudos se alejan.

```

xxi[ii_,k_]:=coordenadas[[i[ii],1]]+solucion[k][[i[ii],1]];
yyi[ii_,k_]:=coordenadas[[i[ii],2]]+solucion[k][[i[ii],2]];
xxj[ii_,k_]:=coordenadas[[j[ii],1]]+solucion[k][[j[ii],1]];
yyj[ii_,k_]:=coordenadas[[j[ii],2]]+solucion[k][[j[ii],2]];
tol = 10^-6;
axil = Table[0, {i, 1, barras}, {j, 1, 5}];
otroOperador = Transpose[lassoluciones];
For[m = 1, m <= hipotesis, m++,

```

Nudo	Origen	Nudo	Destino	Esfuerzo Axil	Tipo	Deformación Unitaria en %
Hipótesis 1 =>	1	2		-0.559017	Compresión	-0.000527183
	2	4		-0.559017	Compresión	-0.000531127
	4	6		-0.559017	Compresión	-0.000531917
	6	7		5.03115	Tracción	0.00479263
	7	9		9.50329	Tracción	0.00985102
	9	10		9.50329	Tracción	0.00996482
	1	3		-6.5	Compresión	-0.00441892
	3	5		-6.5	Compresión	-0.00442106
	5	8		-8.5	Compresión	-0.00578184
	8	10		-8.5	Compresión	-0.00577629
Hipótesis 1 =>	2	3		0	No trabaja	0
	3	4		0	No trabaja	0
	4	5		0	No trabaja	0
	5	6		-2.	Compresión	-0.00158663
	5	7		2.82843	Tracción	0.00224507
	7	8		0	No trabaja	0
	8	9		0	No trabaja	0
	2	3		0	No trabaja	0
	3	4		0	No trabaja	0
	4	5		0	No trabaja	0
Hipótesis 3 =>	5	6		-2.	Compresión	-0.00158663
	5	7		2.82843	Tracción	0.00224507
	7	8		0	No trabaja	0
	8	9		0	No trabaja	0
	1	2		-1.49071	Compresión	-0.00141891
	2	4		-1.49071	Compresión	-0.00141966
	4	6		-1.49071	Compresión	-0.00141965
	6	7		-1.49071	Compresión	-0.00141972
	7	9		3.72678	Tracción	0.00354932
	9	10		3.72678	Tracción	0.00355075
Hipótesis 3 =>	1	3		-4.66667	Compresión	-0.00317432
	3	5		-4.66667	Compresión	-0.00317459
	8	10		-3.33333	Compresión	-0.00226753
	2	3		0	No trabaja	0
	3	4		0	No trabaja	0
	4	5		0	No trabaja	0
	5	6		1.33333	Tracción	0.00105825
	5	7		-1.88562	Compresión	-0.00149642
	7	8		0	No trabaja	0
	8	9		0	No trabaja	0
Hipótesis 4 =>	1	2		-27.9508	Compresión	-0.0264411
	2	4		-22.3607	Compresión	-0.0212862
	4	6		-16.7795	Compresión	-0.0159714
	6	7		-16.7795	Compresión	-0.0159714
	7	9		-22.3607	Compresión	-0.0212862
	9	10		-27.9508	Compresión	-0.0264411
	1	3		25.	Tracción	0.0170997
	3	5		20.	Tracción	0.0136057
	5	8		20.	Tracción	0.0136057
	8	10		25.	Tracción	0.0170997

Figura 4.12: Esfuerzos en las barras, modo de trabajo y deformación relativa a la longitud total de la barra.

```

For[k = 1, k <= barras, k++,
(*Indices origen*)
io = 2*(i[k] - 1) + 1; jo = 2*(j[k] - 1) + 1;
deltax = xj[k] - xi[k]; deltay = yj[k] - yi[k];
deltaxNew = xxj[k, m] - xxi[k, m]; deltayNew = yyj[k, m]
- yyi[k, m];
longitud = Sqrt[deltax^2 + deltay^2];
longitudNew = Sqrt[deltaxNew^2 + deltayNew^2];

cosenoa = deltax/longitud; cosenob = deltay/longitud;
eal = (e*areas[[ntipo[k]]])/longitud;
laX = otroOperador[[jo, m]] - otroOperador[[io, m]];
laY = otroOperador[[jo + 1, m]] - otroOperador[[io + 1, m]];
axil[[k, 3]] = Chop[eal*(laX*cosenoa + laY*cosenob), tol];
axil[[k, 1]] = i[k]; axil[[k, 2]] = j[k];
axil[[k, 4]] =
If[axil[[k, 3]] > 0, "Traccion",
If[axil[[k, 3]] < 0, "Compresion", "No trabaja"]];
axil[[k, 5]] = Chop[(longitudNew - longitud)/longitud*100,
tol*100];
];
axilSalida[m] = axil;
];
Do[{Print["Hipotesis ", k, " \u21d2[DoubleLongRightArrow] ", 
TableForm[axilSalida[k],
TableHeadings -> {None, {"Nudo Origen", "Nudo Destino",
"Esfuerzo Axil", "Tipo", "Deformacion Unitaria en %"}},
TableAlignments -> Center]], Print[""]}
,{k, 1, hipotesis}];
```

También se especifica si la barra va a sufrir un acortamiento o un alargamiento a través de la deformación relativa a la longitud total de la misma expresada en porcentaje. Si la barra se acorta (compresión), el signo de la deformación será negativo, mientras que si se alarga (tracción), el signo de la deformación será positivo.

#### Explicación del código:

- Definición de funciones para calcular las nuevas coordenadas de los nudos:

```

xxi[ii_, k_] := coordenadas[[i[ii], 1]]
+ solucion[k][[i[ii], 1]];
yyi[ii_, k_] := coordenadas[[i[ii], 2]]
+ solucion[k][[i[ii], 2]];
xxj[ii_, k_] := coordenadas[[j[ii], 1]]
+ solucion[k][[j[ii], 1]];
```

```
yyj [ii_,k_] := coordenadas [[j[ii],2]]
    + solucion[k][[j[ii],2]];
```

Estas funciones calculan las nuevas coordenadas de los nudos después de aplicar las hipótesis de carga, sumando los desplazamientos calculados a las coordenadas iniciales.

- **Inicialización de variables:**

```
tol = 10^-6;
axil = Table[0, {i, 1, barras}, {j, 1, 5}];
otroOperador = Transpose[lassoluciones];
```

'tol' es una tolerancia para evitar errores numéricos pequeños. 'axil' es una tabla para almacenar los resultados de los esfuerzos axiales y las deformaciones. 'otroOperador' es la transposición de la matriz de soluciones, facilitando el acceso a los datos.

- **Bucle anidado para calcular los esfuerzos y deformaciones para cada hipótesis de carga y cada barra:**

```
For[m = 1, m <= hipotesis, m++,
For[k = 1, k <= barras, k++,
(*Indices origen:*)
io = 2*(i[k] - 1) + 1; jo = 2*(j[k] - 1) + 1;
deltax = xj[k] - xi[k]; deltay = yj[k] - yi[k];
deltaxNew = xxj[k, m]-xxi[k,m]; deltayNew = yyj[k,m]
- yyi[k, m];
longitud = Sqrt[deltax^2 + deltay^2];
longitudNew = Sqrt[deltaxNew^2 + deltayNew^2];

cosenoa = deltax/longitud; cosenob = deltay/longitud;
eal = (e*areas[[ntipo[k]]])/longitud;
laX = otroOperador[[jo, m]] - otroOperador[[io, m]];
laY = otroOperador[[jo+1,m]]-otroOperador[[io+1,m]];
axil[[k, 3]] = Chop[eal*(laX*cosenoa + laY*cosenob),
tol];
axil[[k, 1]] = i[k]; axil[[k, 2]] = j[k];
axil[[k, 4]] =
If[axil[[k, 3]] > 0, "Traccion",
If[axil[[k, 3]] < 0, "Compresion", "No trabaja"]];
axil[[k, 5]] =
Chop[(longitudNew - longitud)/longitud*100, tol*100];
];
axilSalida[m] = axil;
];
```

En estos bucles, para cada hipótesis de carga ( $m$ ) y para cada barra ( $k$ ):

- Se calculan los índices de origen ('io') y destino ('jo') de la barra.
- Se calculan las diferencias en las coordenadas ('deltax', 'deltay') y las nuevas diferencias ('deltaxNew', 'deltayNew') después de los desplazamientos.
- Se calculan las longitudes original ('longitud') y nueva ('longitudNew') de la barra.
- Se calculan los cosenos de los ángulos ('cosenoa', 'cosenob') y el módulo de elasticidad axial ('eal').
- Se calculan los cambios en las coordenadas ('laX', 'laY').
- Se calcula el esfuerzo axial ('axil[[k, 3]]'), almacenando los índices de los nudos y el tipo de esfuerzo ('axil[[k, 4]]').
- Se calcula la deformación unitaria en porcentaje ('axil[[k, 5]]').

Los resultados se almacenan en 'axilSalida'.

■ **Impresión de los resultados para cada hipótesis de carga:**

```
Do[{Print["Hipotesis ", k, " \[DoubleLongRightArrow] ",
TableForm[axilSalida[k],
TableHeadings -> {None, {"Nudo Origen", "Nudo Destino",
"Esfuerzo Axil", "Tipo", "Deformación Unitaria en %"}},
TableAlignments -> Center]], Print[""]}, {k, 1, hipotesis}];
```

Este bucle imprime los resultados en forma de tabla para cada hipótesis de carga. La tabla muestra los nudos de origen y destino, el esfuerzo axial, el tipo de esfuerzo (tracción o compresión) y la deformación unitaria en porcentaje.

# 5

## CÓDIGO FUENTE DE ART3D

### 5.1. Introducción

Este capítulo ofrece una detallada exposición del código fuente desarrollado en WOLFRAM MATHEMATICA® para un programa especializado en el cálculo de estructuras articuladas tridimensionales mediante el método matricial. Este programa se erige como una herramienta poderosa que facilita el análisis estructural en un entorno tridimensional, permitiendo a los usuarios comprender y evaluar el comportamiento de las estructuras bajo diversas condiciones de carga y configuraciones geométricas.

A lo largo de estas páginas, se presentará de manera ilustrativa el código fuente, acompañado de explicaciones detalladas y ejemplos prácticos que servirán como guía para su comprensión y aplicación efectiva. El objetivo principal es brindar a los estudiantes y profesionales interesados en el análisis estructural una herramienta accesible y completa, basada en Wolfram Language, para abordar el diseño y la evaluación de estructuras articuladas tridimensionales de manera eficiente y precisa:

**CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS ESPACIALES DE BARAS ARTICULADAS, HACIENDO USO DE Wolfram Language:**  
**LINK Art3D.rar**

<https://github.com/maxwellfree/EstructurasArticuladas/blob/main/Art3D.rar>

Los archivos RAR contienen el código fuente necesario para implementar los programas en Wolfram Language y permiten a los usuarios explorar, comprender y utilizar las herramientas de cálculo matricial para el análisis de estructuras articuladas en el ámbito bidimensional y tridimensional.

## 5.2. Índice principal (*cuerpo.nb*)

En la figura 5.1 se puede ver que la secuencia de cálculo comienza con el paso de “**Entrada de datos**”, donde se recopilan y se ingresan los datos necesarios para el análisis. Luego, avanza al “**Proceso de verificado de datos mediante ploteo**”, donde se emplean técnicas visuales para examinar y validar la calidad de los datos recolectados. Posteriormente, se procede a la “**Resolución de la estructura para las distintas hipótesis de carga**”, etapa en la que se realizan cálculos y análisis para explorar diferentes cargas y sus efectos en la estructura. Continuando, se accede al paso de “**Ver soluciones numéricas**”, donde se obtienen resultados cuantitativos mediante métodos numéricos y se evalúan las soluciones. Finalmente, el programa culmina con la “**Presentación de soluciones y muestra de diagramas de deformación del sistema**”, ofreciendo una presentación visual y detallada de los resultados obtenidos, junto con la exhibición de los diagramas que ilustran las deformaciones del sistema analizado.



Figura 5.1: La figura muestra la secuencia definida para llevar a cabo su tarea.

En lo que sigue comenzaremos por entender la importancia de la “Entrada de datos”,

donde aprenderemos a recopilar y registrar la información necesaria para nuestro análisis.

A continuación, nos sumergiremos en el fascinante mundo del “Proceso de verificado de datos mediante ploteo”. Aquí, aprenderemos a utilizar técnicas de visualización de datos para validar y asegurar la calidad de nuestra información antes de avanzar en el análisis.

Posteriormente, nos adentraremos en la fase crucial de la “Resolución de la estructura para las distintas hipótesis de carga”. A través de ejemplos prácticos, exploraremos cómo evaluar diferentes escenarios de carga y su impacto en la estructura.

Seguidamente, nos sumergiremos en el mundo de las “Soluciones numéricas”, donde descubriremos cómo utilizar métodos numéricos para obtener resultados precisos y significativos para nuestro análisis.

Finalmente, concluiremos nuestra sesión con la emocionante etapa de “Presentación de soluciones y muestra de diagramas de deformación del sistema”. Aquí, aprenderemos a comunicar efectivamente los resultados de nuestro análisis, utilizando diagramas de deformación para visualizar y comprender mejor el comportamiento estructural.

### **5.3. Entradas (*entradas.nb*)**

La entrada de datos se compone de dos partes. En la primera, tenemos un listado de los elementos esenciales que componen la cercha. Estos incluyen el número de nudos, el número de barras, los tipos de barras, los tipos de hipótesis de carga (es decir, cuántas hipótesis de cargas se aplicarán sobre la cercha, como cargas verticales o cargas horizontales, como el viento). Luego, tendremos el número de ligaduras, que son los nudos a los cuales les vamos a aplicar algún tipo de restricción al movimiento, ya sea parcial o total: Finalmente, caracterizaremos las propiedades del material. Dado que solo trabaja mediante compresión y tracción, solo necesitaremos el módulo de Young para caracterizarlo.

```
DATOS PRINCIPALES :
(*Numero de nudos del sistema:*)
nudos = 25;
(*Numero de barras del sistema:*)
barras = 78;
(*Tipos de barras atendiendo a sus secciones:*)
tipos = 3;
(*Numero de apoyos:*)
ligaduras = 6;
(*Numero de hipotesis de carga:*)
hipotesis = 3;
(*Modulo de elasticidad del material empleado .
```

```
Este es el denominado modulo de Yound*)
e = 2100000;
```

La segunda parte comienza por una lista llamada coordenadas que especifica las coordenadas de los nudos del sistema de cercha plana. Vamos a complementar y explicar el código proporcionado para importar las coordenadas de los nudos de una cercha tridimensional desde los archivos coordenadas.dat y croquis.dat. Para ello, utilizaremos Mathematica. El código incluye la lectura de archivos y la configuración del directorio.

## Explicación del Código

1. **Establecer el Directorio:** La primera parte del código establece el directorio de trabajo en el mismo lugar donde se encuentra el notebook de Mathematica.
2. **Leer las Coordenadas:** Luego, se leen las coordenadas desde un archivo llamado coordenadas.dat.
3. **Descripción del Contexto:** Se menciona que para las cerchas tridimensionales, las coordenadas son más complejas y normalmente se extraen usando un programa de dibujo que genera un archivo STL.

## Código Completado y Explicado

```
(* Establece el directorio de trabajo al directorio del
notebook *)
path = NotebookDirectory[];
SetDirectory[path];

(* Lee las coordenadas desde el archivo
'coordenadas.dat' *)
coordenadas = ReadList["coordenadas.dat", Number,
RecordLists -> True];

(* Leer el archivo 'croquis.dat' (si es necesario para mas
informacion) *)
croquis = ReadList["croquis.dat", Number,
RecordLists -> True];
```

## Explicación Detallada

- path = NotebookDirectory[]; SetDirectory[path];

- `NotebookDirectory []` devuelve el directorio en el que se encuentra el notebook actual.
- `SetDirectory [path]` establece este directorio como el directorio de trabajo actual.

■ **Leer las Coordenadas:**

```
croquis = ReadList["croquis.dat", Number,
RecordLists -> True];
```

- `ReadList` lee el contenido del archivo `coordenadas.dat`.
- `Number` especifica que los datos son números.
- `RecordLists -> True` indica que cada línea del archivo se debe leer como una lista separada, creando una lista de listas.

■ **Leer el archivo croquis.dat (opcional):**

```
croquis = ReadList["croquis.dat", Number,
RecordLists -> True];
```

- Similar a la lectura de `coordenadas.dat`, pero se leen cadenas de texto.

■ **Comentarios Explicativos:**

- Se explica que para las cerchas tridimensionales, se utiliza un programa de dibujo para crear y exportar la geometría en un archivo STL.
- Este archivo STL es parseado<sup>3</sup> para extraer las coordenadas de los nudos tridimensionales.

■ **Visualización de Datos:**

- `Print` se utiliza para mostrar las coordenadas y los datos del croquis, si es necesario.

---

<sup>3</sup>Un parseador, también conocido como analizador sintáctico o parser, es un componente de software que se utiliza para analizar una secuencia de entrada (como texto o código) y convertirla en una estructura de datos más manejable, generalmente en forma de árbol sintáctico o estructura similar. Este proceso se denomina “parsing” o “análisis sintáctico”.

## Contexto Adicional

En el contexto de la ingeniería estructural, las cerchas tridimensionales requieren una precisión mayor en la representación de los nudos y las barras. Los programas de dibujo como AutoCAD, SolidWorks o similares pueden ser utilizados para diseñar la estructura tridimensional, y a partir de estos diseños, se generan archivos de mallado (STL) que contienen la información necesaria sobre las posiciones espaciales de cada nudo de la cercha. Este método permite una representación precisa y eficiente de estructuras complejas.

### Variable área

- Esta variable es una lista de números reales que representan las secciones transversales de las barras de la cercha.
- Cada elemento en esta lista corresponde al área de una barra específica, medida en metros cuadrados ( $m^2$ ).
- Por ejemplo, si  $areas = \{0.01, 0.005, 0.0025\}$ , esto significa que:
  - La primera barra tiene un área de  $0,01 m^2$ .
  - La segunda barra tiene un área de  $0,005 m^2$ .
  - La tercera barra tiene un área de  $0,0025 m^2$ .

### Su conexión con la variable *croquis*

- *croquis* es una lista de listas que almacena información sobre como están conectados los nodos.
- Cada sublistas en *croquis* representa un nudo y contiene números naturales que comienzan desde uno, reflejando el índice de los elementos en la lista de áreas.
- Por ejemplo, si *croquis* tiene la estructura  $\{[1, 2, 2], [2, 3, 2], [2, 4, 3]\}$ , esto indica que:
  - Hay una barra que conecta el nudo un con el dos, la barra que une estos nudos presenta una área de tipo dos  $0,005 m^2$ .
  - El nudo dos se conecta al tres, la barra que une estos nudos presenta también una área de tipo dos,  $0,005 m^2$ .
  - Hay una barra que une los nudos 2 y 4. Esta barra presenta un tipo de área tres, con  $0,0025 m^2$ .

## Código

El código proporcionado es el siguiente:

```
areas = {0.01, 0.005, 0.0025};
```

- *areas = {0.01, 0.005, 0.0025};*

- Esta línea define explícitamente las áreas de las distintas barras de la cercha en metros cuadrados.

## Desarrollo de Restricciones en Cerchas Espaciales

En el caso de las cerchas planas, solo se expresaban dos ligaduras. Sin embargo, en cerchas espaciales se expresan tres ligaduras, ya que se deben considerar tres dimensiones en el espacio.

## Apoyos del Sistema

La matriz de apoyos del sistema se define de la siguiente manera:

```
apoyos = {
    {1, 0, 0, 0},
    {2, 0, 0, 0},
    {3, 0, 0, 0},
    {4, 0, 0, 0},
    {5, 0, 0, 0},
    {6, 0, 0, 0}
};
```

El significado es análogo al que se le daba en cerchas planas, pero extendido a tres dimensiones. Los apoyos en el sistema corresponden a las restricciones que imponemos al analizar la estructura. En la primera columna de la matriz de apoyos, se especifica el nodo al que se aplica la restricción. La segunda columna representa las restricciones en el eje *X*, la tercera columna representa las restricciones en el eje *Y*, y la cuarta columna representa las restricciones en el eje *Z*.

## Escenarios de Restricciones

Existen tres escenarios posibles para estas restricciones:

1. **Valor cero (0):** Indica que el nodo está completamente restringido en esa dirección. Es decir, no puede moverse ni experimentar desplazamiento alguno en esa dirección específica.

2. **Valor uno (1):** Indica que el movimiento del nodo es libre en esa dirección. El nodo puede desplazarse sin restricción en la dirección especificada.
3. **Valor diferente de cero o uno:** En este caso, se establece un coeficiente de resorte con el valor dado. Este coeficiente actúa como una fuerza que se opone al movimiento del nodo en la dirección indicada. Cuanto mayor sea el valor del coeficiente, mayor será la resistencia al movimiento en esa dirección.

En las cerchas planas, las componentes de las fuerzas aplicadas solo tenían en cuenta dos direcciones ( $X$  e  $Y$ ). En contraste, en las cerchas espaciales, las componentes de las fuerzas aplicadas se expresan en tres direcciones ( $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ).

Cada componente del vector de cargas, que es un conjunto de matrices, representa una suposición de carga o aplicación de fuerzas en la estructura que estamos analizando. En cada submatriz, la primera columna identifica el nodo afectado por la carga externa, mientras que la segunda, tercera y cuarta columna representan las fuerzas en las direcciones  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente, para dicho nodo en toneladas.

## Nudos Cargados

A continuación, se presentan ejemplos de nudos cargados bajo diferentes hipótesis de carga:

```
(* Carga de viento *)
hipo[1] = {
{7, 25, 0, 0},
{13, 20, 0, 0},
{19, 20, 0, 0},
{25, 5, 0, 0},
{8, 10, 0, 0},
{14, 10, 0, 0},
{20, 10, 0, 0},
{9, 10, 0, 0},
{15, 10, 0, 0},
{21, 10, 0, 0}
};

(* Carga de nieve *)
hipo[2] = {
{13, 0, 0, -10},
{14, 0, 0, -10},
{15, 0, 0, -10},
{16, 0, 0, -10},
{17, 0, 0, -10},
}
```

```

{18, 0, 0, -10},
{19, 0, 0, -25},
{20, 0, 0, -25},
{21, 0, 0, -25},
{22, 0, 0, -25},
{23, 0, 0, -25},
{24, 0, 0, -25},
{25, 0, 0, -27}
};

(* Superposicion *)
hipo[3] = Union[hipo[1], hipo[2]];
cargas = {hipo[1], hipo[2], hipo[3]},
```

En este ejemplo:

- **Carga de viento:** Aplica fuerzas en la dirección  $X$  en varios nodos (hipo[1]).
- **Carga de nieve:** Aplica fuerzas en la dirección  $Z$  (hacia abajo) en varios nodos (hipo[2]).
- **Superposición:** Combina ambas hipótesis de carga (hipo[3]).

En conclusión, al extender el análisis de cerchas planas a cerchas espaciales, se añade una dimensión adicional de complejidad al tener en cuenta las fuerzas en la dirección  $Z$ . Esto permite un análisis más preciso y detallado de la respuesta de la estructura bajo diferentes condiciones de carga y restricción.

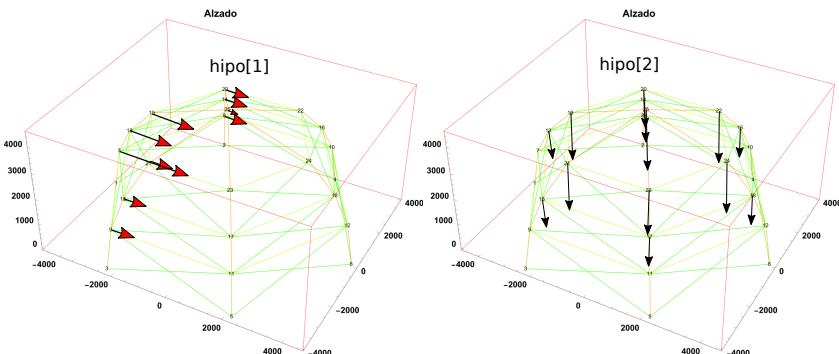


Figura 5.2: Diferentes hipótesis de carga aplicadas a la estructura. Cada hipótesis (`hipo[1]`, `hipo[2]`) representa una combinación específica de fuerzas aplicadas en los nodos de la estructura.

## 5.4. Verificación de entradas por ploteo (verificador.nb)

Cuando introducimos una cercha mediante coordenadas, corremos el riesgo de cometer errores. La mejor forma de comprobar que no hemos cometido errores es mediante un dibujo de la cercha y una visualización gráfica de la misma, lo cual permite, de un solo golpe de vista, verificar tres aspectos: primero, que la forma es correcta; segundo, que los tamaños de los elementos son los apropiados; y tercero, que cada una de las barras tiene un color que la identifica de forma unívoca con el área que le corresponde. También es importante considerar que el código de colores que identifica a las barras está relacionado con las áreas de las mismas y no con el material del que están hechas, porque asumiremos que todas las barras poseen las mismas propiedades materiales, dado que están hechas con un mismo material, por ejemplo, acero, y que ese tipo de acero tiene un módulo de Young particular e idéntico para todas las barras.

Las primeras funciones en MATHEMATICA® son:

```
i[ii_] := croquis[[ii, 1]];
j[ii_] := croquis[[ii, 2]];
ntipo[ii_] := croquis[[ii, 3]];
```

Estas funciones se corresponden con unos índices que identifican el principio y el final de cada barra en la cercha, a través de los números de sus nudos sobre dicha cercha. La tercera función `ntipo[ii_]` se corresponde con un índice que identifica, dentro de la matriz de áreas, cuál es el área de la barra que une dichos nudos o nodos.

Las siguientes funciones son:

```
(*variables xi, yi, zi, xj, yj, zj*)
xi[ii_] := coordenadas[[i[ii], 1]];
yi[ii_] := coordenadas[[i[ii], 2]];
zi[ii_] := coordenadas[[i[ii], 3]];
xj[ii_] := coordenadas[[j[ii], 1]];
yj[ii_] := coordenadas[[j[ii], 2]];
zj[ii_] := coordenadas[[j[ii], 3]];
```

Estas funciones hacen referencia a los valores reales de las coordenadas a partir de las funciones de índices predefinidas anteriormente.

Para identificar las diferentes áreas de las barras en la cercha, se emplea un código de colores definido por la función:

```
(* FUNCION COLORES *)
colores[k_] := Exp[2 Pi I k/10]
```

Es decir, se asignan diferentes colores a las barras utilizando una función compleja euleriana. Al coger el argumento de dicha función, se puede identificar el color que tiene cada barra:

```

(* Define el tamano de la figura *)
figureSize = 750;

(* Genera la lista de graficos para cada barra de
la estructura *)
dibujo = Table[
{
Hue[Rescale[Arg[colores[ntipo[k]]], {0, 2\[Pi]}]],
(* Define
el color de cada barra basado en su tipo *)
Line[{{xi[k], yi[k], zi[k]}, {xj[k], yj[k], zj[k]}}] (*Define
las coordenadas de los extremos de cada barra *)
},
{k, 1, barras} (* Itera sobre todas las barras *)
];

(* Genera la lista de etiquetas de texto para cada nodo de la
estructura *)
texto = Table[
Text[
l, (* El texto muestra el numero del nodo *)
{coordenadas[[l,1]], coordenadas[[l,2]], coordenadas[[l,3]]}
(* Posicion del texto basada en las coordenadas del nodo *)
],
{l, 1, nudos} (* Itera sobre todos los nudos *)
];

(* Genera la vista en planta de la estructura *)
planta = Show[
Graphics3D[dibujo, LabelStyle -> Directive[Black, Bold, 15]],
(* Dibuja las barras con estilo de etiqueta especifico *)
Graphics3D[texto], (* Anade las etiquetas de texto *)
AspectRatio -> Automatic,
ViewPoint -> {0.000, 0.000, 3.990}, (* Define el punto
de vista para la planta *)
BoxStyle -> RGBColor[1, 1, 0], (* Color de la caja que
encierra la figura *)
Axes -> True, (* Muestra los ejes *)
PlotLabel -> "Planta", (* Etiqueta de la vista *)
ImageSize -> figureSize (* Tamano de la imagen *)
];

```

```

(* Genera la vista de perfil derecho de la estructura *)
perdere = Show[
Graphics3D[dibujo, LabelStyle -> Directive[Black, Bold,
15]],
Graphics3D[texto],
AspectRatio -> Automatic,
ViewPoint -> {-3.990, 0.000, -0.000}, (* Define el
punto de vista para el perfil derecho *)
BoxStyle -> RGBColor[1, 1, 0],
Axes -> True,
PlotLabel -> "Perfil_derecho",
ImageSize -> figureSize
];

(* Genera la vista de perfil izquierdo de la
estructura *)
perizq = Show[
Graphics3D[dibujo, LabelStyle -> Directive[Black, Bold,
15]],
Graphics3D[texto],
AspectRatio -> Automatic,
ViewPoint -> {0.000, 3.990, 0.000}, (* Define el punto
de vista para el perfil izquierdo *)
BoxStyle -> RGBColor[1, 1, 0],
Axes -> True,
PlotLabel -> "Perfil_izquierdo",
ImageSize -> figureSize
];

(* Genera la vista de alzado de la estructura *)
alzado = Show[
Graphics3D[dibujo, LabelStyle -> Directive[Black,
Bold, 15]],
Graphics3D[texto],
AspectRatio -> Automatic,
BoxStyle -> RGBColor[1, 0, 0], (* Color de la caja para
la vista de alzado *)
Axes -> True,
PlotLabel -> "Alzado",
ImageSize -> figureSize
];

```

```
(* Muestra las cuatro vistas en una columna *)
{alzado, planta, perdere, perizq} // Column
```

- **figureSize** define el tamaño de las figuras a generar.
- **dibujo** crea una lista de gráficos 3D para las barras de la estructura, coloreando cada barra según su tipo y definiendo las coordenadas de sus extremos.
- **texto** genera una lista de etiquetas de texto para cada nodo, posicionando el texto en las coordenadas del nodo correspondiente.
  - **Planta** (planta): Muestra una vista en planta de la estructura.
  - **Perfil Derecho** (perdere): Muestra una vista desde el perfil derecho.
  - **Perfil Izquierdo** (perizq): Muestra una vista desde el perfil izquierdo.
  - **Alzado** (alzado): Muestra una vista de alzado de la estructura.

Las cuatro vistas (alzado, planta, perdere, perizq) se presentan en una columna para visualización conjunta.

## 5.5. Resolución del sistema

En el proceso de resolver el problema de las cerchas articuladas espaciales elásticas, el primer paso consiste en determinar el tamaño de la región superior simétrica de la matriz de semibanda superior. Esto se hace para reservar la memoria necesaria y construir únicamente los elementos de la matriz de rigidez que no son nulos, limitándonos a la diagonal y la parte superior de la matriz de semibanda superior. Para lograrlo, inicializamos una variable, **dif**, en cero. Luego, recorremos todas las barras y comparamos las posiciones de sus nodos. Si la diferencia entre las posiciones de los nodos es mayor que **dif**, actualizamos **dif** con este nuevo valor. Finalmente, multiplicamos **dif** por tres y le sumamos uno para obtener el tamaño necesario de la región superior simétrica de la matriz de semibanda superior. Esto lo haremos con el código proporcionado a continuación:

```
(Ancho de dif)
dif = 0;
For[k = 1, k <= barras, k++,
  Which[croquis[[k, 2]] - croquis[[k, 1]] > dif,
    dif = croquis[[k, 2]] - croquis[[k, 1]]];
];
dif = 3*(dif + 1);
```

Inicialmente, iniciamos la semibanda superior de la matriz de rigideces como una matriz no cuadrada donde todos los elementos son nulos y su tamaño es igual a  $\text{dif} \times (3 * \text{nudos})$ . Utilizamos la función `Array` para crear una matriz de dimensiones  $3 * \text{nudos} \times \text{dif}$ . Luego, con un bucle anidado, asignamos un valor de cero a cada elemento de esta matriz. El primer bucle recorre las filas de la matriz (de 1 a  $3 * \text{nudos}$ ) y el segundo bucle recorre las columnas (de 1 a  $\text{dif}$ ), asignando cero a cada elemento `rigidez[k, 1]`.

El código sería el siguiente:

```
(*Definicion de la matriz de rigidez*)
Array[rigidez, {3*nudos, dif}];
Do[Do[rigidez[k, 1] = 0, {l, 1, dif}], {k, 1, 3*nudos}];
```

Este código asigna valores a la semibanda superior no nula de la matriz de rigidez en el contexto de resolver un problema relacionado con cerchas articuladas espaciales elásticas.

```
(*MATRIX DE RIGIDEZ "Semibanda simetrica superior")
For[k = 1, k <= barras, k++,
(*Indices: *)
io = 3*(i[k] - 1) + 1;
jo = 3*(j[k] - 1) + 1;
ij = 3*(j[k] - i[k]);
lx = xj[k] - xi[k]; ly = yj[k] - yi[k]; lz = zj[k]
- zi[k];
ll = Sqrt[lx^2 + ly^2 + lz^2];
cosA = lx,ll; sinA = ly,ll; cosC = lz,ll;
eal = (e*areas[[ntipo[k]]])/ll;
tension = eal*cosA^2;
rigidez[io, 1] = rigidez[io, 1] + tension;
rigidez[jo, 1] = rigidez[jo, 1] + tension;
rigidez[io, ij + 1] = -tension;
tension = eal*sinA^2;
rigidez[io + 1, 1] = rigidez[io + 1, 1] + tension;
rigidez[jo + 1, 1] = rigidez[jo + 1, 1] + tension;
rigidez[io + 1, ij + 1] = -tension;
tension = eal*cosC^2;
rigidez[io + 2, 1] = rigidez[io + 2, 1] + tension;
rigidez[jo + 2, 1] = rigidez[jo + 2, 1] + tension;
rigidez[io + 2, ij + 1] = -tension;
tension = eal*cosA*sinA;
rigidez[io, 2] = rigidez[io, 2] + tension;
rigidez[jo, 2] = rigidez[jo, 2] + tension;
rigidez[io, ij + 2] = -tension;
```

```

rigidez[io + 1, ij] = -tension;
tension = eal*cosA*cosC;
rigidez[io, 3] = rigidez[io, 3] + tension;
rigidez[jo, 3] = rigidez[jo, 3] + tension;
rigidez[io, ij + 3] = -tension;
rigidez[io + 2, ij - 1] = -tension;
tension = eal*sinA*cosC;
rigidez[io + 1, 2] = rigidez[io + 1, 2] + tension;
rigidez[jo + 1, 2] = rigidez[jo + 1, 2] + tension;
rigidez[io + 1, ij + 2] = -tension;
rigidez[io + 2, ij] = -tension;
];

```

Aquí está el código explicado paso a paso:

- Se recorre cada barra de la estructura en un bucle For.
- Se calculan los índices de origen (*io*, *jo*), destino (*id*, *jd*) y de diferencia (*ij*) para cada barra.
- Se calculan las diferencias en las coordenadas *x* (*lx*), *y* (*ly*) y *z* (*lz*), así como la longitud de la barra (*ll*).
- Se calculan los valores de coseno y seno del ángulo de la barra con el eje X (*cosA*, *sinA*) y del ángulo con el eje Z (*cosC*).
- Se calcula la rigidez axial (*eal*) de la barra.
- Se calcula la tensión en la barra (*tension*) en función de la rigidez axial y el ángulo de la barra.
- Se actualizan los valores de la matriz de rigidez para los nodos de origen y destino, así como para los índices de diferencia correspondientes.

Este código es fundamental para el cálculo de la matriz de rigidez en el contexto específico de la resolución de problemas relacionados con cerchas articuladas espaciales elásticas.

La matriz de rigidez debe ser modificada después de construirla para considerar los anclajes o apoyos de la cercha espacial elástica. En este caso, existen varias posibilidades:

- La primera es cuando el apoyo es una ligadura total que no permite el movimiento en una dirección específica. En este caso, el valor de la matriz de rigidez se establece como un valor enorme, como  $10^{10}$ . Esto asegura que cuando se calcule el cociente para determinar el desplazamiento, este sea casi nulo. Un desplazamiento casi nulo implica que el nudo no se mueve, que es el comportamiento deseado.
- La segunda posibilidad es cuando el nudo es libre. En este caso, no se modifica el valor de la matriz de rigidez en ese punto.

- Finalmente, existe la posibilidad de un apoyo intermedio, que no es una rigidez total ni está completamente libre. En este caso, se elige un valor intermedio para la rigidez en ese nudo, sumando el valor que presenta el apoyo a la rigidez ya existente en el nudo.

El código sería:

```
(*Modificacion de la matriz de rigidez en funcion de las
ligaduras o apoyos*)
For[k = 1, k <= ligaduras, k++,
  io = 3*(apoyos[[k, 1]] - 1) + 1;
  If[apoyos[[k, 2]] != 1,
    If[apoyos[[k, 2]] != 0,
      rigidez[[io, 1]] = rigidez[[io, 1]] + apoyos[[k, 2]],
      rigidez[[io, 1]] = e^10];
  ];
  If[apoyos[[k, 3]] != 1,
    If[apoyos[[k, 3]] != 0,
      rigidez[[io + 1, 1]] = rigidez[[io + 1, 1]] + apoyos[[k, 3]],
      rigidez[[io + 1, 1]] = e^10];
  ];
  If[apoyos[[k, 4]] != 1,
    If[apoyos[[k, 4]] != 0,
      rigidez[[io + 2, 1]] = rigidez[[io + 2, 1]] + apoyos[[k, 4]],
      rigidez[[io + 2, 1]] = e^10];
  ];
];
```

Al igual que hacíamos con la matriz de rigidez, procedemos con la matriz de esfuerzos. Inicializamos todos sus elementos a cero utilizando la función `Array`. La matriz de esfuerzos tiene dimensiones  $2 * \text{nudos} \times \text{hipótesis}$ , donde `nudos` representa el número total de nudos en la estructura y `hipótesis` es el número de hipótesis de carga. El siguiente código se encarga de esta inicialización:

```
(*Declaracion de la matriz de terminos independientes o
matriz de \
cargas*)
Array[fuerzas, {3*nudos, hipotesis}];
Do[Do[fuerzas[[k, 1]] = 0, {k, 1, 3*nudos}],
{1, 1, hipotesis}];
```

En este código, se crea una matriz de dimensiones  $3 * \text{nudos} \times \text{hipótesis}$  utilizando la función `Array`. Luego, con dos bucles `Do` anidados, se asigna el valor de cero a cada elemento de la matriz `fuerzas`. El primer bucle recorre las filas de la matriz (de 1 a  $3 * \text{nudos}$ ) y el segundo bucle recorre las columnas (de 1 a `hipotesis`), asegurando que

todos los elementos se inicialicen correctamente a cero.

Una vez que hemos definido la matriz que corresponderá a los esfuerzos o fuerzas generadas, procedemos a asignar valores a dicha matriz en los nodos correspondientes. Como podemos observar, la matriz no tendrá una sola columna, sino que constará de varias columnas, cada una correspondiente a una hipótesis distinta de carga. El siguiente código lleva a cabo esta tarea:

```
(*Construcción de la matriz de cargas*)
For[k = 1, k <= hipotesis, k++,
  subcarga = cargas[[k]];
  ncarga = Dimensions[cargas[[k]]][[1]];
  For[r = 1, r <= ncarga, r++,
    l = 3*(subcarga[[r, 1]] - 1) + 1;
    fuerzas[l, k] = subcarga[[r, 2]];
    fuerzas[l + 1, k] = subcarga[[r, 3]];
    fuerzas[l + 2, k] = subcarga[[r, 4]];
  ];
];
];
```

En este código, se recorre cada hipótesis de carga. Para cada hipótesis, se extraen las cargas correspondientes y se determina el número de cargas. Posteriormente, se recorren todas las cargas de esa hipótesis y se asignan a la matriz de fuerzas los valores correspondientes en los nodos afectados por esas cargas. Cada columna de la matriz de fuerzas representa una hipótesis de carga diferente.

Como sabemos que resolveremos cerchas relativamente pequeñas y que poseemos una potencia de cálculo considerable, con el único objetivo de hacer más pedagógico y visual el procedimiento, extendemos la matriz de rigideces a su completitud, lo que denominamos matriz de coeficientes, y hacemos lo mismo con las fuerzas, lo que denominamos matriz independiente. Luego, procedemos a utilizar un método de solución que aprovecha el hecho de que la matriz es simétrica. Por eso, usamos el método "Banded". El siguiente código lleva a cabo este proceso:

```
(*Expresión en una tabla de la matriz de rigidez al
completo*)
coeficientes =
Table[Which[1 + (k - 1) <= l <= dif + (k - 1),
  rigidez[k, l - (k - 1)], l > dif + (k - 1), 0, l < k < dif
+ 1, rigidez[l, k - (l - 1)], k >= dif + 1, 0 ], {k, 1,
3*nudos}, {l, 1, 3*nudos}];

(*Expresión en una tabla de la matriz de cargas*)
independientes =
Table[fuerzas[k, 1], {k, 1, 3*nudos}, {l, 1, hipotesis}];
```

```

tol = 10^-6;
(*Solucionado del sistema y expresion de soluciones en
una tabla*)
lassoluciones = Table[Chop[
LinearSolve[coeficientes, independientes[[All, k]], ,
Method -> "Banded"], tol], {k, 1, hipotesis}];

```

En este código, se genera la matriz de coeficientes (`coeficientes`) y la matriz independiente (`independientes`). Luego, se utiliza el método `LinearSolve` con el método "Banded" para resolver el sistema de ecuaciones lineales. Los resultados se almacenan en la lista `lassoluciones`.

Aunque disponemos de una matriz en semi banda superior tridiagonal, lo que significa que la mayoría de los elementos fuera de la diagonal principal y las dos bandas adyacentes son nulos, y podríamos emplear el método Tridiagonal Matrix Algorithm (TDMA) para resolver eficientemente el sistema de ecuaciones lineales, optamos por construir la matriz completa por razones pedagógicas. Se recomienda ver apéndice matemático 6.2. Construir y resolver una matriz completa ofrece una comprensión más completa del proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Al construir la matriz completa, podemos visualizar mejor la estructura de la matriz de coeficientes y comprender cómo interactúan sus elementos. Además, nos permite utilizar métodos más generales y entender cómo se aplican en diferentes contextos.

Aunque en realidad podríamos utilizar el método TDMA para resolver eficientemente nuestro sistema de ecuaciones lineales, optamos por construir la matriz completa y resolverla utilizando un procedimiento similar a TDMA, pero con una matriz más general. Esto nos permite no solo obtener la solución del sistema, sino también comprender mejor los fundamentos detrás de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

El valor  $tol = 10^{-6}$  establece un umbral de tolerancia igual a  $10^{-6}$ . Este umbral se utiliza para determinar qué valores se consideran suficientemente cercanos a cero como para ser redondeados a cero. En esencia, cualquier valor numérico menor que  $10^{-6}$  se considerará prácticamente cero y será tratado como tal en las operaciones subsiguientes. La función `Chop` se aplica a las soluciones obtenidas después de resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando el método `LinearSolve` con la opción "Banded". `Chop` elimina los valores numéricos muy pequeños, que están por debajo del umbral de tolerancia especificado, y los redondea a cero. Esto se hace para mejorar la precisión numérica y para eliminar cualquier ruido numérico que pueda haber sido introducido durante los cálculos. Así, `Chop` garantiza que las soluciones sean más limpias y estén libres de valores numéricos insignificantes.

## 5.6. Deformaciones y esfuerzos (Zoom x70)

Para visualizar mejor el efecto de la deformación en la cercha, amplificamos las coordenadas de los nudos con las soluciones de los desplazamientos, usando un factor de escala apropiado. En este caso, elegimos un factor de escala de 70 para asegurarnos de que las deformaciones sean visibles en el dibujo. El código en MATHEMATICA® para esto es el siguiente:

```
amplia = 100;

xides[k_, ii_] :=
coordenadas[[i[ii], 1]] + amplia*solucion[k][[i[ii], 1]];
yides[k_, ii_] :=
coordenadas[[i[ii], 2]] + amplia*solucion[k][[i[ii], 2]];
zides[k_, ii_] :=
coordenadas[[i[ii], 3]] + amplia*solucion[k][[i[ii], 3]];
xjdes[k_, ii_] :=
coordenadas[[j[ii], 1]] + amplia*solucion[k][[j[ii], 1]];
yjdes[k_, ii_] :=
coordenadas[[j[ii], 2]] + amplia*solucion[k][[j[ii], 2]];
zjdes[k_, ii_] :=
coordenadas[[j[ii], 3]] + amplia*solucion[k][[j[ii], 3]];
```

Lo que hacemos es tomar las coordenadas de los nudos que inicialmente presenta la cercha cuando no se ha aplicado ningún esfuerzo y corregir estas localizaciones espaciales con las deformaciones que sufriría tras aplicar los esfuerzos. Por eso, lo que se hace es coger las coordenadas y sumarles la solución del problema, que no es otra cosa que los desplazamientos de los nudos de la cercha. Hecho esto, lo que se obtiene son nuevas coordenadas de una cercha deformada. Sin embargo, para la visualización, como indicábamos anteriormente, se multiplican las soluciones por una amplificación, de modo que al corregir las coordenadas, estas correcciones sean lo suficientemente grandes para que se pueda visualizar en el dibujo hacia dónde ha tenido lugar el movimiento de los nudos y cuál es la deformación que experimenta la cercha.

Para visualizar la cercha sin deformar junto con la cercha deformada, utilizamos el siguiente código de WOLFRAM MATHEMATICA®. Primero, generamos tablas de dibujo para ambas cerchas y luego creamos una animación que las muestra.

```
(*Generacion de deformadas*)
dibujo =
Table[Line[{{xi[1], yi[1], zi[1]}, {xj[1], yj[1], zj[1]}}],
{1, 1, barras}];
dibujodes =
Table[{Hue[Rescale[Arg[colores[1]], {0, 2 \[Pi]}]]},
```

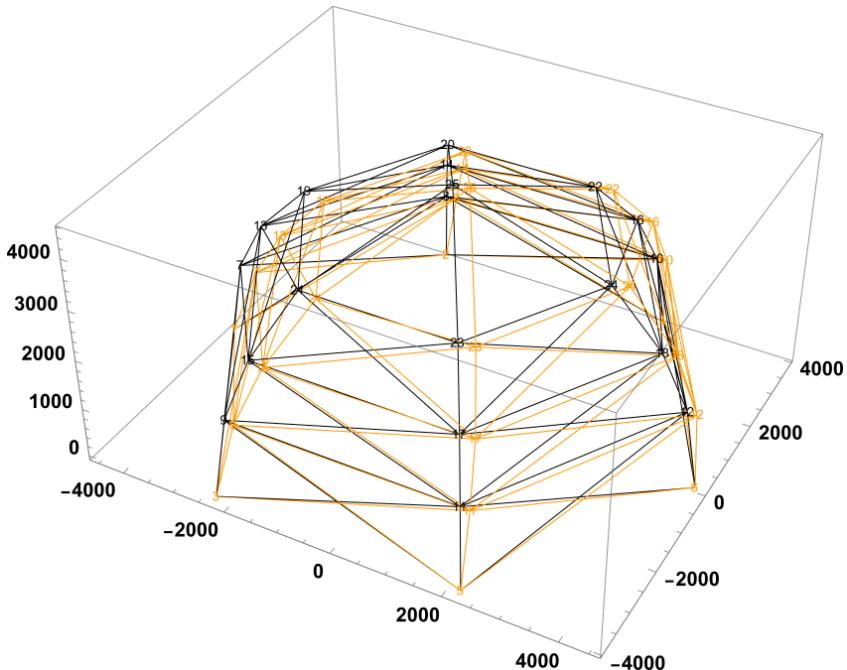


Figura 5.3: La figura muestra las deformaciones de la cercha espacial (cúpula) elástica junto con la forma que idealmente tendría si no se aplicara ningún tipo de esfuerzo sobre ella. Esta figura se corresponde con la primera hipótesis de carga.

```

Line[{{xides[k, 1], yides[k, 1], zides[k, 1]}, 
{xjdes[k, 1], yjdes[k, 1], zjdes[k, 1]}}], 
{1, 1, barras}, {k, 1, hipotesis}]; 
texto = Table[ 
Text[l, {coordenadas[[l, 1]], coordenadas[[l, 2]], 
coordenadas[[l, 3]]}], {l, 1, nudos}]; 
textodes = 
Table[{Hue[Rescale[Arg[colores[1]], {0, 2 \[Pi]}]], 
Text[l, {coordenadas[[l,1]] + amplia*solucion[k][[l,1]], 
coordenadas[[l,2]] + amplia*solucion[k][[l,2]], 
coordenadas[[l,3]] + amplia*solucion[k][[l,3]]}]}, 
{l, 1, nudos}, {k, 1, hipotesis}];
```

La animación no tiene por qué ser dinámica; podemos seleccionar de forma selectiva la hipótesis de carga que nos interesa para ver la deformación que experimenta la cer-

cha bajo dicha hipótesis, y así procedemos (de ahí que elegimos `AnimationRunning ->False`).

```
Animate[Show[
Graphics3D[dibujo, LabelStyle -> Directive[Black, Bold, 15],
ImageSize -> 500], Graphics3D[dibujodes[[All, k]]],
Graphics3D[texto], Graphics3D[textodes[[All, k]]],
Axes -> True], {k, 1, hipotesis, 1}, AnimationRunning -> False]
```

En el contexto de la visualización de la deformación de una cercha bajo diferentes hipótesis de carga, el siguiente código de MATHEMATICA® crea una animación interactiva que permite ver cómo cambia la estructura en función de las diferentes cargas aplicadas. Vamos a desglosar y explicar cada parte del código anterior.

### Desglose y Explicación

#### 1. Animate:

- La función `Animate` crea una animación interactiva en MATHEMATICA®. Esta animación varía el valor de una variable, en este caso `k`, y actualiza el gráfico mostrado en cada paso de la animación.
- El rango de `k` va de 1 a `hipotesis` en incrementos de 1.

#### 2. Show:

- La función `Show` combina múltiples gráficos en una sola visualización.
- Aquí se combinan los gráficos de la cercha sin deformar, la cercha deformada, y los textos de los nudos.

3. **`Graphics[dibujo]`**: Esto representa el gráfico de la cercha sin deformar. `dibujo` es una lista de líneas que representan las barras de la cercha en su estado original.

4. **`Graphics[dibujodes[[All, k]]]`**: Esto representa el gráfico de la cercha deformada para la hipótesis de carga `k`. `dibujodes` es una lista de listas de líneas que representan las barras de la cercha deformada bajo diferentes hipótesis de carga. El `[[All, k]]` selecciona todas las barras para la hipótesis `k`.

5. **`Graphics[texto]`**: Esto representa el texto (etiquetas) para los nudos de la cercha sin deformar.

6. **`Graphics[textodes[[All, k]]]`**: Esto representa el texto (etiquetas) para los nudos de la cercha deformada para la hipótesis de carga `k`. `textodes` es una lista de listas de textos para diferentes hipótesis de carga. El `[[All, k]]` selecciona todas las etiquetas de los nudos para la hipótesis `k`.

7. **`Axes ->True`**: Añade ejes al gráfico.

8. **`AxesOrigin ->{-escalax/20, -escalay/20}`**: Establece el origen de los ejes en `{-escalax/20, -escalay/20}`, lo que ayuda a posicionar mejor el gráfico en el espacio de visualización.

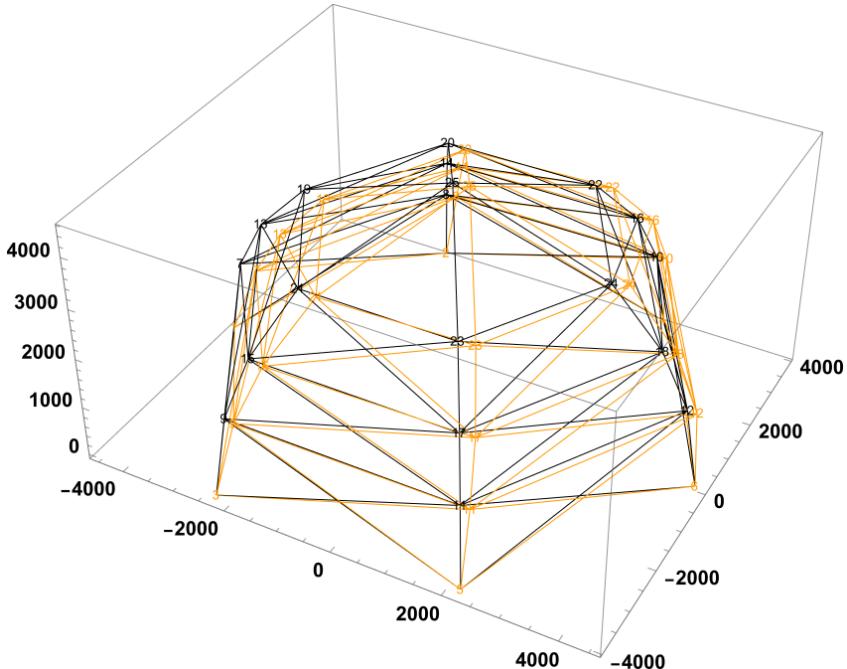


Figura 5.4: La figura muestra las deformaciones de la cercha espacial (cúpula) elástica junto con la forma que idealmente tendría si no se aplicara ningún tipo de esfuerzo sobre ella. Esta figura se corresponde con la segunda hipótesis de carga.

9. **AspectRatio ->Automatic:** Mantiene la proporción automática del gráfico, asegurando que las deformaciones y la estructura se visualicen correctamente sin distorsión.
10. **{k, 1, hipótesis, 1}:** Define el rango de la variable k que se usará en la animación. k varía desde 1 hasta hipótesis en incrementos de 1.
11. **AnimationRunning ->False:** Establece que la animación no se ejecutará automáticamente al cargar. En lugar de eso, el usuario puede controlarla manualmente, permitiendo una visualización selectiva de cada hipótesis de carga.

Este código crea una animación interactiva, que se muestra en las Figuras 5.3-5.5, donde se visualiza la cercha sin deformar junto con su deformación bajo diferentes hipótesis de carga. La animación permite al usuario ver cómo se deforma la estructura al variar la carga aplicada, mostrando tanto las barras deformadas como las etiquetas de los nudos en cada estado. La opción `AnimationRunning ->False` permite al usuario detener y examinar cada hipótesis de carga de manera individual.

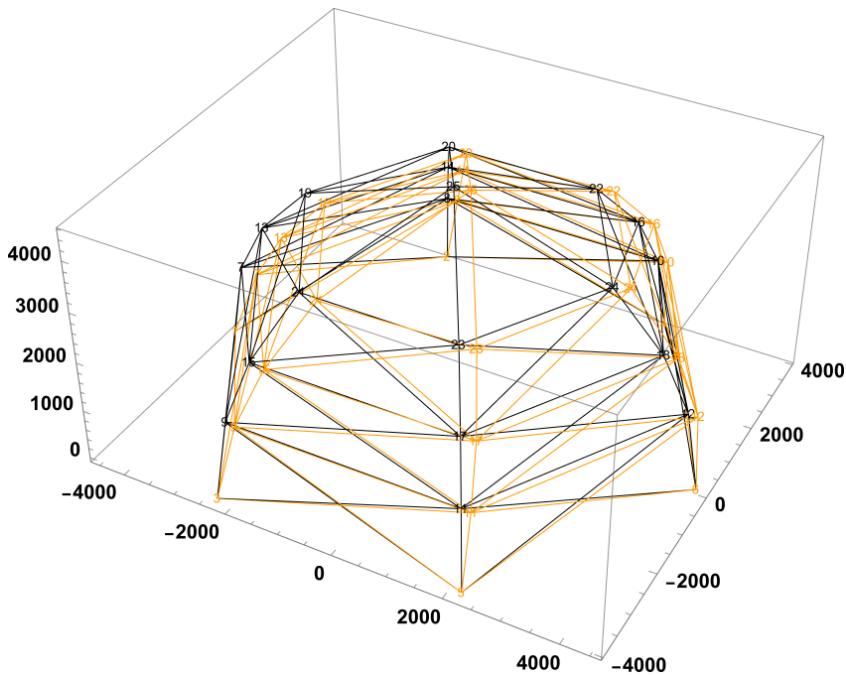


Figura 5.5: La figura muestra las deformaciones de la cercha espacial (cúpula) elástica junto con la forma que idealmente tendría si no se aplicara ningún tipo de esfuerzo sobre ella. Esta figura se corresponde con la tercera hipótesis de carga.

## 5.7. Resultados numéricos: deformaciones y esfuerzos

El código que presenta las soluciones numéricas fue ampliamente explicado en el capítulo anterior y en este es más que análogo, es idéntico, con lo que se prescinde de explicar en detalle y simplemente se presenta.

Las soluciones se muestran en forma de tabla porque, al ser muy extensas, no caben de forma convencional.

En el caso de la hipótesis tercera tendríamos:  
para las otras hipótesis sería de un modo similar.

Nudo	Desplazamiento $\Delta x$	Desplazamiento $\Delta y$	Desplazamiento $\Delta z$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	3.18674	0	-0.462945
8	1.94334	0.272276	-0.0123826
9	1.94334	-0.272276	-0.0123826
10	1.77347	0.209165	0.129113
11	1.77347	-0.209165	0.129113
Hipotesis 1 $\Rightarrow$			
12	1.62331	0	0.104368
13	3.86142	0	-0.821138
14	2.90693	0.333971	-0.138725
15	2.90693	-0.333971	-0.138725
16	2.7815	0.203051	0.361452
17	2.7815	-0.203051	0.361452
18	2.51237	0	0.45414
19	3.75797	0	-0.795089
20	3.30241	0.0869445	-0.420446
21	3.30241	-0.0869445	-0.420446
22	3.08549	0.108401	0.435839
23	3.08549	-0.108401	0.435839
24	3.05197	0	0.856146
25	3.07106	0	0.289763
<hr/>			
Nudo	Desplazamiento $\Delta x$	Desplazamiento $\Delta y$	Desplazamiento $\Delta z$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	-0.385382	0	-0.234411
8	-0.185032	0.323972	-0.235732
9	-0.185032	-0.323972	-0.235732
10	0.185032	0.323972	-0.235732
11	0.185032	-0.323972	-0.235732
Hipotesis 2 $\Rightarrow$			
12	0.385382	0	-0.234411
13	-0.239001	0	-0.579937
14	-0.125712	0.217746	-0.566574
15	-0.125712	-0.217746	-0.566574
16	0.125712	0.217746	-0.566574
17	0.125712	-0.217746	-0.566574
18	0.239001	0	-0.579937
19	0.323358	0	-1.44326
20	0.162902	-0.282874	-1.44853
21	0.162902	0.282874	-1.44853
22	-0.162902	-0.282874	-1.44853
23	-0.162902	0.282874	-1.44853
24	-0.323358	0	-1.44326
25	0	0	-1.10284

Figura 5.6: Desplazamientos de nudos para las hipótesis de carga 1 y 2.

Nudo	Desplazamiento Δx	Desplazamiento Δy	Desplazamiento Δz
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	2.94498	0	-0.460334
8	1.78818	0.274916	-0.0391909
9	1.78818	-0.274916	-0.0391909
10	1.78165	0.492292	-0.0531562
11	1.78165	-0.492292	-0.0531562
Hipotesis 3 =>			
12	1.72222	0	-0.106073
13	3.42973	0	-0.74907
14	2.43134	0.395704	-0.0923063
15	2.43134	-0.395704	-0.0923063
16	2.421	0.340232	-0.183137
17	2.421	-0.340232	-0.183137
18	2.30059	0	-0.127581
19	3.1748	0	-0.607109
20	2.64144	0.12877	-0.310983
21	2.64144	-0.12877	-0.310983
22	2.16688	-0.380241	-1.14616
23	2.16688	0.380241	-1.14616
24	1.9563	0	-0.7991
25	2.51294	0	0.279752

Figura 5.7: Desplazamiento de nudos para la tercera hipótesis de carga.

N. Origen	N. Destino	Axil	Tipo	Deformación en %
12	16	-5.59604	Compresión	-0.0106555
13	19	-7.90052	Compresión	-0.00376192
14	20	11.4708	Tracción	0.00547007
15	23	5.66802	Tracción	0.0107973
17	18	1.15828	Tracción	0.00110356
18	23	-4.62473	Compresión	-0.00880802
20	22	-8.07705	Compresión	-0.00768781
22	25	3.25904	Tracción	0.0015521

Cuadro 5.1: Tabla 3 de 3 de la Hipótesis 1

N. Origen	N. Destino	Axil	Tipo	Deformación en %
1	7	9.28705	Tracción	0.0046465
2	10	19.3795	Tracción	0.0369139
4	10	-7.51887	Compresión	-0.00351125
6	10	-7.97026	Compresión	-0.0151751
7	13	-3.50321	Compresión	-0.00164487
8	14	14.0361	Tracción	0.0067217
9	17	11.4894	Tracción	0.0218846
11	12	2.6129	Tracción	0.00248863
12	17	-5.59604	Compresión	-0.0106555
13	20	-2.93666	Compresión	-0.00559186
14	22	5.66802	Tracción	0.0107973
16	18	1.15828	Tracción	0.00110356
17	21	-10.1186	Compresión	-0.0192718
18	24	-11.2401	Compresión	-0.00534043
20	25	14.0006	Tracción	0.00666991
23	24	2.87217	Tracción	0.00273655
1	8	13.7228	Tracción	0.0261443
3	7	-17.291	Compresión	-0.0329165
4	12	8.32557	Tracción	0.0158631
6	11	-7.97026	Compresión	-0.0151751
7	14	2.27379	Tracción	0.00433179
8	16	11.4894	Tracción	0.0218846
10	12	2.6129	Tracción	0.00248863
11	15	-14.8504	Compresión	-0.0282864
12	18	-15.9196	Compresión	-0.00754452
13	21	-2.93666	Compresión	-0.00559186
15	17	-3.51193	Compresión	-0.00334374
16	20	-10.1186	Compresión	-0.0192718
17	23	1.08799	Tracción	0.000520945
19	20	-5.68773	Compresión	-0.00541479
21	23	-8.07705	Compresión	-0.00768781
23	25	3.25904	Tracción	0.0015521
1	9	13.7228	Tracción	0.0261443
3	9	15.7964	Tracción	0.00760496
5	9	-21.0312	Compresión	-0.0400585

Cuadro 5.2: Tabla 1 de 3 de la Hipótesis 1

N. Origen	N. Destino	Axil	Tipo	Deformación en %
6	12	-22.6369	Compresión	-0.0107229
7	15	2.27379	Tracción	0.00433179
9	11	-4.20667	Compresión	-0.00400628
10	14	-14.8504	Compresión	-0.0282864
11	17	-2.02429	Compresión	-0.00092097
13	14	-5.25272	Compresión	-0.00499743
14	16	-3.51193	Compresión	-0.00334374
15	19	-1.58144	Compresión	-0.00300723
16	22	1.08799	Tracción	0.000520945
17	24	5.94399	Tracción	0.0113227
19	21	-5.68773	Compresión	-0.00541479
21	25	14.0006	Tracción	0.00666991
24	25	-14.5485	Compresión	-0.00692631
2	7	-17.291	Compresión	-0.0329165
3	11	19.3795	Tracción	0.0369139
5	11	-7.51887	Compresión	-0.00351125
7	8	-9.56231	Compresión	-0.00910234
8	10	-4.20667	Compresión	-0.00400628
9	13	-8.95363	Compresión	-0.0170432
10	16	-2.02429	Compresión	-0.00092097
11	18	7.01812	Tracción	0.013369
13	15	-5.25272	Compresión	-0.00499743
14	19	-1.58144	Compresión	-0.00300723
15	21	11.4708	Tracción	0.00547007
16	24	5.94399	Tracción	0.0113227
18	22	-4.62473	Compresión	-0.00880802
19	25	-19.9915	Compresión	-0.009511
22	24	2.87217	Tracción	0.00273655
2	8	15.7964	Tracción	0.00760496
4	8	-21.0312	Compresión	-0.0400585
5	12	8.32557	Tracción	0.0158631
7	9	-9.56231	Compresión	-0.00910234
8	13	-8.95363	Compresión	-0.0170432
9	15	14.0361	Tracción	0.0067217
10	18	7.01812	Tracción	0.013369

Cuadro 5.3: Tabla 2 de 3 de la Hipótesis 1

# 6

## APÉNDICES

En este capítulo se presentan algunas explicaciones matemáticas que complementan la comprensión de este manuscrito.

### 6.1. Factorización de Cholesky

La factorización de Cholesky<sup>4</sup> es una técnica utilizada en álgebra lineal para descomponer una matriz simétrica y definida positiva en el producto de una matriz triangular inferior y su traspuesta. Esta técnica se utiliza ampliamente en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, en la optimización y en la simulación de variables aleatorias multivariadas.

---

<sup>4</sup>El nombre "Cholesky" se origina en el matemático y oficial militar francés André-Louis Cholesky (1875-1918), reconocido por su desarrollo del método de factorización de matrices que lleva su nombre. Cholesky, quien trabajó en el campo de la topografía y la geodesia, desarrolló esta técnica como una herramienta eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales en problemas de ajuste de curvas y mínimos cuadrados. Desafortunadamente, Cholesky falleció en combate durante la Primera Guerra Mundial antes de que su método fuera ampliamente reconocido. La técnica de factorización de Cholesky se ha convertido en una herramienta crucial en matemáticas aplicadas, computación científica y diversas disciplinas que requieren la resolución eficiente de sistemas de ecuaciones lineales, siendo utilizada en la resolución de sistemas lineales, en métodos de optimización y en la simulación de variables aleatorias multivariadas.

## Definición

Dada una matriz simétrica y definida positiva  $A$  de tamaño  $n \times n$ , la factorización de Cholesky encuentra una matriz triangular inferior  $L$  tal que:

$$A = LL^T$$

Aquí,  $L$  es una matriz triangular inferior con elementos no nulos solo en la diagonal y por debajo de ella, y  $L^T$  es su traspuesta.

## Propiedades

- **Simetría y Definida Positiva:**

- La matriz  $A$  debe ser simétrica ( $A = A^T$ ).
- La matriz  $A$  debe ser definida positiva, lo que significa que para cualquier vector no nulo  $x$ ,  $x^T Ax > 0$ .

- **Única:**

- Si  $A$  es definida positiva, la factorización de Cholesky  $A = LL^T$  es única.

## Algoritmo

El algoritmo para encontrar  $L$  implica recorrer cada elemento de la matriz  $A$  y calcular los elementos de  $L$  utilizando las siguientes fórmulas:

Para  $i = 1$  hasta  $n$ :

1.

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$$

2. Para  $j = i + 1$  hasta  $n$ :

$$L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}} \left( A_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} L_{ik} \right)$$

## Ejemplo

Supongamos que tenemos la siguiente matriz simétrica y definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar su factorización de Cholesky,  $A = LL^T$ .

1. Calcular  $L_{11}$ :

$$L_{11} = \sqrt{4} = 2$$

2. Calcular  $L_{21}$ :

$$L_{21} = \frac{12}{2} = 6$$

3. Calcular  $L_{31}$ :

$$L_{31} = \frac{-16}{2} = -8$$

4. Calcular  $L_{22}$ :

$$L_{22} = \sqrt{37 - 6^2} = \sqrt{1} = 1$$

5. Calcular  $L_{32}$ :

$$L_{32} = \frac{-43 - 6 \cdot (-8)}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

6. Calcular  $L_{33}$ :

$$L_{33} = \sqrt{98 - (-8)^2 - 5^2} = \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Entonces, la matriz  $L$  es:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Y verificamos que  $A = LL^T$ .

## Aplicaciones

- **Solución de Sistemas Lineales:** La factorización de Cholesky se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones de la forma  $Ax = b$  de manera eficiente. En lugar de resolver directamente, se resuelven dos sistemas triangulares:

$$Ly = b \quad \text{y luego} \quad L^T x = y$$

- **Optimización:** En métodos de optimización como los métodos de mínimos cuadrados y la regresión lineal, la factorización de Cholesky facilita la resolución de problemas que involucran matrices simétricas y definidas positivas.
- **Simulación:** En simulaciones de variables aleatorias multivariadas, se utiliza la factorización de Cholesky para generar correlaciones específicas entre variables.

## Implementación en Mathematica

Aquí hay un ejemplo de cómo realizar la factorización de Cholesky en Mathematica:

```

(* Definicion de la matriz A *)
A = {{4, 12, -16}, {12, 37, -43}, {-16, -43, 98}};

(* Factorizacion de Cholesky *)
L = CholeskyDecomposition[A];

(* Mostrar la matriz L *)
MatrixForm[L]

```

Este código descompone la matriz  $A$  y muestra la matriz triangular inferior  $L$ .

## 6.2. TDMA:Tridiagonal Matrix Algorithm, explicado

El método TDMA, también conocido como algoritmo de Thomas<sup>5</sup>, es altamente eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices tridiagonales. Este método aprovecha la estructura especial de las matrices tridiagonales para realizar operaciones más eficientes y reducir la complejidad computacional. El algoritmo TDMA viene del inglés Tridiagonal Matrix Algorithm, y es un método numérico utilizado para resolver eficientemente sistemas de

---

<sup>5</sup>Llewellyn Hilleth Thomas, nacido en 1903 y fallecido en 1992, fue un destacado matemático británico cuyas contribuciones en el campo de las matemáticas abarcaron una amplia gama de áreas. Después de completar sus estudios en la Universidad de Gales, donde obtuvo su licenciatura y doctorado en matemáticas, Thomas inició su carrera académica como profesor en la Universidad de Cardiff. Más tarde, se trasladó a la Universidad de Bangor, donde pasó la mayor parte de su carrera, llegando a ser profesor de matemáticas en 1950 hasta su jubilación en 1968.

Una de las contribuciones más significativas de Thomas fue en el campo del álgebra lineal y la teoría de matrices. Es conocido por desarrollar la factorización de matrices de bandas, un método utilizado en el análisis numérico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices estructuradas. Esta técnica, que es especialmente eficiente para matrices con muchas entradas nulas fuera de la diagonal principal, ha sido fundamental en numerosas aplicaciones prácticas y teóricas en matemáticas y disciplinas relacionadas. Además de su trabajo en álgebra lineal, Thomas realizó investigaciones en otros campos de las matemáticas, incluida la teoría de números y la teoría de funciones. A lo largo de su carrera, publicó numerosos artículos y libros académicos que contribuyeron al avance del conocimiento matemático. Su legado continúa siendo reconocido y apreciado por la comunidad académica, y sus contribuciones siguen siendo relevantes en la investigación matemática actual.

ecuaciones lineales cuyas matrices son tridiagonales. Una matriz tridiagonal es aquella en la que los elementos fuera de la diagonal principal y las dos bandas adyacentes son nulos. El algoritmo TDMA es altamente eficiente en situaciones donde estas matrices tridiagonales son de gran tamaño.

El proceso del algoritmo TDMA se puede dividir en tres pasos principales: eliminación hacia adelante, sustitución hacia atrás y eliminación de la banda.

1. **Eliminación hacia adelante:** En esta etapa, se realiza una serie de pasos para eliminar los coeficientes fuera de la diagonal principal de la matriz, dejando una estructura diagonal inferior y superior. Esto se logra mediante una combinación lineal de las ecuaciones del sistema.
2. **Sustitución hacia atrás:** Una vez que la matriz ha sido transformada en una matriz diagonal, se procede a resolver las variables en orden inverso, comenzando desde el final del sistema. Esto se hace mediante una sustitución hacia atrás, donde las soluciones de las variables posteriores se utilizan para calcular las soluciones de las variables anteriores.
3. **Eliminación de la banda:** Finalmente, una vez que se han calculado todas las soluciones, se elimina la banda superior e inferior de la matriz, dejando solo la diagonal principal. Esto es útil para ahorrar memoria y simplificar la representación de la matriz, especialmente en sistemas grandes.

El algoritmo TDMA es altamente eficiente en términos de tiempo de ejecución y uso de recursos computacionales, ya que realiza operaciones en un orden lineal con respecto al tamaño del sistema. Esto lo hace especialmente útil en aplicaciones donde la eficiencia computacional es crucial, como en problemas de difusión, inter-

polación y resolución de ecuaciones diferenciales discretizadas mediante métodos de diferencias finitas.

## Veamos un ejemplo

Este es el problema  $Ax = b$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En Mathematica lo resolvemos como sigue:

```
(* Definicion de la matriz tridiagonal A y el
vector b *)
A = {{2,-1,0,0}, {-1,2,-1,0}, {0,-1,2,-1},
      {0, 0, -1, 2}};
b = {1, 2, 3, 4};

(* Implementacion del algoritmo TDMA *)
n = Length[b];
p = Table[0, {n - 1}];
q = Table[0, {n}];

p[[1]] = -A[[1, 2]]/A[[1, 1]];
q[[1]] = b[[1]]/A[[1, 1]];

Do[
  p[[i]] = -A[[i, i+1]]/(A[[i,i]]+ A[[i,i-1]]
                           *p[[i-1]]);
  q[[i]] = (b[[i]]-A[[i,i-1]]*q[[i-1]])
            /(A[[i,i]]+A[[i,i-1]]*p[[i-1]]);
,{i, 2, n - 1}];
```

```
x = Table[0, {n}];  
x[[n]] = (b[[n]] - A[[n, n-1]]*q[[n-1]])  
/(A[[n, n]]+A[[n, n-1]]*p[[n-1]]);  
  
Do [  
    x[[i]] = p[[i]]*x[[i + 1]] + q[[i]]  
,{i, n - 1, 1, -1}];  
  
(* Mostrar la solucion *)  
x
```

La solución obtenida aquí es  $x = 4, 7, 8, 6$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Coloso de rodas: Construcción y destrucción, <https://recuerdosdepandora.com/monumentos/el-coloso-de-rodas-construcion-y-destruccion/>.
- [2] Escuela técnica superior de arquitectura de madrid (upm) <https://etsamadrid.aq.upm.es/>.
- [3] Home insurance building, <https://chicagology.com/goldenage/goldenage076/>.
- [4] A. Blanc, M. McEvoy, and R. Plank. Architecture and Construction in Steel. Taylor & Francis, 2003.
- [5] Committee Appointed by the Trustees of the Estate of Marshall Field for the Examination of the Structure of the Home Insurance Building and T.E. Tallmadge. The Origin of the Skyscraper: Report of the Committee Appointed by the Trustees of the Estate of Marshall Field for the Examination of the Structure of the Home Insurance Building. R.F. Seymour, Alderbrink Press, 1939.
- [6] F.M. Cabré. Análisis matricial de estructuras en ordenadores personales compatibles. Rueda, 1989.

- [7] W.D. Callister. Introducción a la ciencia e ingeniería de los materiales. II. Number v. 2 in Introducción a la ciencia e ingeniería de los materiales. II. Reverté, 1996.
- [8] F.P. Carballo, J.C. Delgado, and A.F. Canteli. Cálculo matricial de estructuras. Textos universitarios ediuno. Universidad de Oviedo, 2006.
- [9] A. Charleson. La estructura como arquitectura: Formas, detalles y simbolismo. Estudios Universitarios de Arquitectura. Reverté, 2006.
- [10] F.D.K. Ching. A Visual Dictionary of Architecture. Wiley, 2011.
- [11] R.G. Corvera. Estática: Las Leyes del Equilibrio. Ingeniería y Ciencia Básicas. Grupo Editorial Patria, 2014.
- [12] A. Crivelli. Gli Avanzi del Castello di Trezzo: L'Antico ed il l'uovo Ponte sull'Adda. Prem, 1886.
- [13] M.R. de los Santos. Estructura como envolvente: estadio de fútbol. Tesis y disertaciones académicas PUCMM. Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, PUCMM, 2018.
- [14] M. Durán. Análisis matricial de estructuras. Editorial ebooks Patagonia - Editorial Universidad de La Serena, 2021.
- [15] J.F. Fleming. Structural Engineering Analysis on Personal Computers: With Working Programs for the IBM PC and Compatible Systems. Structural Engineering Analysis on Personal Computers: With Working Programs for the IBM PC and Compatible Systems. McGraw-Hill, 1986.
- [16] E. Günay. Elasticity of Materials: Basic Principles and Design of Structures. IntechOpen, 2019.

- [17] C. Hastings, K. Mischo, and M. Morrison. Hands-on Start to Wolfram Mathematica: And Programming with the Wolfram Language. Wolfram Media, 2016.
- [18] J.M.H. Hernández. Santiago Calatrava:. Bellisco, 2007.
- [19] R.C. Hibbeler. Mecanica de Materiales. Pearson Educación, 2006.
- [20] S. Huerta and S.H. Fernández. Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. INST. JUAN HERRERA. Instituto Juan de Herrera, 2004.
- [21] J.O.J. Jiménez. Análisis clásico de estructuras. Colección textos. Universidad Nacional de Colombia, 2004.
- [22] R. Jones. Isambard Kingdom Brunel. Pen & Sword Books, 2011.
- [23] Heather Lechtman. La metalurgia del bronce en los andes sur centrales: Tiwanaku y san pedro de atacama. Boletín del Instituto Francés de Estudios Andinos, 25(3):367–382, 1996.
- [24] Heather Lechtman. La metalurgia del bronce en los andes sur centrales: Tiwanaku y san pedro de atacama. Boletín del Instituto Francés de Estudios Andinos, 26(2):297–313, 1997.
- [25] Heather Lechtman. La metalurgia del bronce en los andes sur centrales: Tiwanaku y san pedro de atacama. Boletín del Instituto Francés de Estudios Andinos, 28(1):91–108, 1999.
- [26] Heather Lechtman. La metalurgia del bronce en los andes sur centrales: Tiwanaku y san pedro de atacama. Boletín del Instituto Francés de Estudios Andinos, 32(3):425–442, 2003.

- [27] Heather Lechtman. La metalurgia del bronce en los andes sur centrales: Tiwanaku y san pedro de atacama. Boletín del Instituto Francés de Estudios Andinos, 33(1):1–18, 2003.
- [28] United States. Bureau of Public Roads. Technical glossary of highway, bridge, and soils engineering terms: Spanish-English, English-Spanish. Gillette Publishing Company, 1955.
- [29] H. Petroski. El éxito a través del fracaso. La paradoja atrevés del diseño. Fondo de Cultura Económica, 2011.
- [30] M.V. Polión and F.M. Cano. Arquitectura II: Libros VI-X. Biblioteca Clásica Gredos. Gredos, 2022.
- [31] A.P. Pons. Analizando la construcción. Arquitectura, urbanisme i edificació. Universitat Politècnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politecnica, 2013.
- [32] L.P. Pook. Linear Elastic Fracture Mechanics for Engineers: Theory and Applications. WIT Press, 2000.
- [33] J. Rui-Wamba. Teoría unificada de estructuras y cimientos: Una mirada transversal. Reverte, 2020.
- [34] M.C. Ruiz and E.B. Díaz. Mecánica de estructuras II. Métodos de análisis. Number v. 2 in Politext (UPC). UPC, S.L., Edicions, 2009.
- [35] R.G. Salinas and P.P. Chust. Arte del siglo XIX (1760-1910). Educació. Sèrie Materials. Publicacions de la Universitat de València, 2021.
- [36] M. Salvadori and R. Heller. Estructuras para arquitectos. CP67, 2021.

- [37] R. Thorne. Structural Iron and Steel, 1850–1900. Studies in the History of Civil Engineering. Taylor & Francis, 2017.
- [38] L.F. Troyano. Bridge Engineering: A Global Perspective. ICE Publishing complete digital collection : Structures and buildings. Thomas Telford, 2003.
- [39] J. van der Tempel. Design of Support Structures for Offshore Wind Turbines. DUWIND, report. Published and distributed by the author, 2006.

## Sobre el autor

Enrique es oriundo de un municipio del cinturón metropolitano de la ciudad de Granada. Obtuvo su primera licenciatura en física aplicada e instrumentación en el Cork Institute of Technology en Irlanda. Posteriormente obtuvo la licenciatura en física fundamental, un máster en métodos y técnicas avanzadas en física y un doctorado en física y matemáticas por la Universidad de Granada. También posee un Máster en COMSOL Multiphysics impartido por la Universidad de Málaga. Los últimos diez años ha trabajado en la aplicación de métodos numéricos. En particular ha trabajado en modelado compacto y numérico de MISFET multipuerta, interruptores fotoconductivos, memristores resisitivos, recepción heterodina basada en diodos cuánticos, generación de haces de Bessel y optimización topológica de antenas.



Ha realizado múltiples estancias posdoctorales en el extranjero, ha trabajado como profesor de matemáticas aplicadas en la Universidad de Alcalá de Henares y actualmente trabaja como profesor en la Universidad Politécnica de Madrid.

## Motivación

La creación de este libro responde a una serie de motivaciones fundamentales, siendo la más destacada la voluntad de simplificar, en la medida de lo posible, la comprensión de las cerchas reales. En particular, se aborda el modelado de estas es-

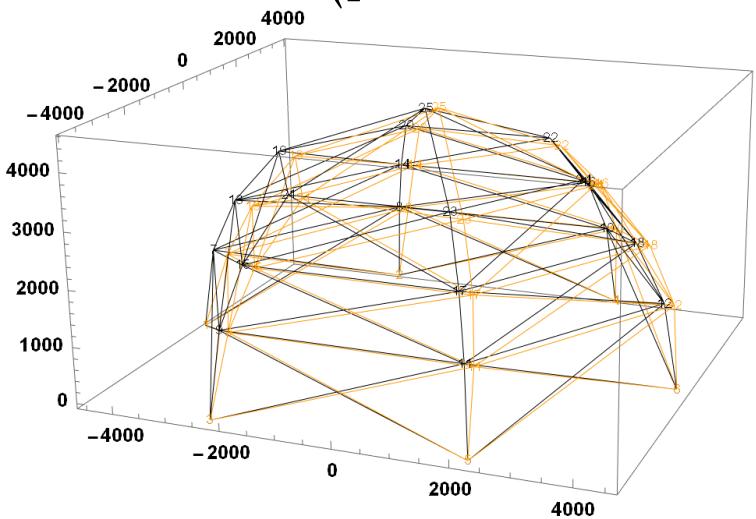
tructuras utilizando el primer orden de la teoría de elasticidad, respaldado por enfoques matriciales para los cálculos asociados.

La razón principal detrás de esta empresa es proporcionar a los lectores una herramienta accesible que les permita comprender de manera más clara y efectiva el comportamiento de las cer-

chas reales. Al emplear la teoría de elasticidad de primer orden y métodos matriciales, se busca facilitar el análisis y el cálculo de estas estructuras, abriendo así las puertas a un enfoque más intuitivo y eficiente en el estudio de las propiedades y respuestas de las cerchas en situaciones del mundo real..



En este manuscrito se ilustra, de un modo pedagógico, el análisis de estructuras articuladas de dos y tres dimensiones. Precisando más, se trata de calcular, por el método matricial del equilibrio, los desplazamientos (por deformación de



tracción o compresión axial de barras) de los nudos así como los esfuerzos axiales de las barras que asumimos, de un material lineal-homogéneo-isotropo, rectas, de sección constante y elásticas de primer orden.