Gry nieskończone i gry parzystości

Maksymilian Zawartko

Gra

składa się z areny i warunku zwycięstwa.

Arena

$A = (V_0, V_1, E)$

V_0 i V_1 - rozłączne zbiory odpowiednio 0-wierzchołków i 1-wierzchołków

$E \subseteq (V_0 \cup V_1) \times (V_0 \cup V_1)$ - relacja krawędzi (edge relation), zwana także zbiorem ruchów

$V = V_0 \cup V_1$, $E \subseteq V \times V$

$vE = \{v' \in V \mid (v, v') \in E\}$ - zbiór następników v

$v \in V$ może mieć dowolnie dużo następników, a (V, E) nie musi być grafem dwudzielnym z podziałem (rozłącznymi zbiorami wierzchołków) V_0 i V_1.

Gracze

0 i 1 lub ogólniej σ, gdzie $\sigma \in \{0, 1\}$ i σ', gdzie $\sigma' = 1 - \sigma$.

Rozgrywka

Na początku token jest kładziony (ustalany) na jakimś v.

$v \in V_0$ - ruch gracza 0 do $v' \in vE$

$v \in V_1$ - ruch gracza 1 do $v' \in vE$

Ogólniej jeśli $v \in V\sigma$, to jest ruch gracza σ.

Gra trwa w nieskończoność lub do momentu, gdy token jest na $v\varepsilon$, takim że

$v\varepsilon E = \varnothing$ - martwy koniec (dead end).

Rozgrywka formalnie

$\pi = v_0 v_1 \ldots \in V^\omega$, gdzie $v_{i+1} \in v_i E$ dla wszystkich $i \in \omega$

lub

$\pi = v_0 v_1 \ldots vl \in V^+$, gdzie $v_{i+1} \in v_i E$ dla wszystkich $i < l$, a $v_l E = \varnothing$

W intuicyjny sposób można zdefiniować prefiks rozgrywki.

Zbiór wygrywający

jest częścią gry: (A, Win)

$Win \subseteq V^\omega$

Gracz 0 jest zwycięzcą rozgrywki π w grze G, wtedy i tylko wtedy, gdy

- π jest skończoną grą $\pi = v_0 v_1 \ldots v_l \in V^+$, $v_l \in V1$ i $v_l E = \varnothing$

  lub

- π jest nieskończoną grą i $\pi \in Win$.

Gracz 1 wygrywa jeśli gracz 0 nie wygrywa.

Warunki zwycięstwa

$X : V \to C$ - funkcja kolorująca

$X(\pi) = X(v_0)X(v_1)\dots$ dla $\pi = v_0v_1\dots$

Jeśli C to stan skończonego ω-automatu, a Acc - warunek zwycięstwa tego automatu, to $WX(Acc)$ jest zbiorem wygrywającym wszystkich nieskończonym rozgrywek π, gdzie $X(\pi)$ jest akceptowany przez Acc.

Przykłady warunków zwycięstwa

- Muller condition ($\mathrm{Acc} = \mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}_0(C)$): $\pi \in W_\chi(\mathrm{Acc})$ iff $\mathrm{Inf}(\chi(\pi)) \in \mathcal{F}$.
- Rabin condition ($\mathrm{Acc} = \{(E_0, F_0), (E_1, F_1), \ldots, (E_{m-1}, F_{m-1})\}$):
  $\pi \in W_\chi(\mathrm{Acc})$ iff $\exists k \in [m]$ such that $\mathrm{Inf}(\chi(\pi)) \cap E_k = \emptyset$ and $\mathrm{Inf}(\chi(\pi)) \cap F_k \neq \emptyset$,
- Streett condition ($\mathrm{Acc} = \{(E_0, F_0), (E_1, F_1), \ldots, (E_{m-1}, F_{m-1})\}$):
  $\pi \in W_\chi(\mathrm{Acc})$ iff $\forall k \in [m].(\mathrm{Inf}(\chi(\pi)) \cap E_k \neq \emptyset \ \vee \ \mathrm{Inf}(\chi(\pi)) \cap F_k = \emptyset)$,
- Rabin chain condition ($\mathrm{Acc} = \{(E_0, F_0), (E_1, F_1), \ldots, (E_{m-1}, F_{m-1})\}$ where $E_0 \subset F_0 \subset E_1 \subset F_1 \subset \ldots \subset E_{m-1} \subset F_{m-1}$): like the Rabin condition.
- Parity conditions (the colour set C is a finite subset of the integers):
  - max-parity condition: $\pi \in W_\chi(\mathrm{Acc})$ iff $\max(\mathrm{Inf}(\chi(\pi)))$ is even.
  - min-parity condition: $\pi \in W_\chi(\mathrm{Acc})$ iff $\min(\mathrm{Inf}(\chi(\pi)))$ is even.
- Büchi condition ($\mathrm{Acc} = F \subseteq C$): $\pi \in W_\chi(\mathrm{Acc})$ iff $\mathrm{Inf}(\chi(\pi)) \cap F \neq \emptyset$.
- 1-winning ($\mathrm{Acc} = F \subseteq C$): $\pi \in W_\chi(\mathrm{Acc})$ iff $\mathrm{Occ}(\chi(\pi)) \cap F \neq \emptyset$.

Warunek Mullera jest najbardziej ogólny, można do niego sprowadzić wszystkie inne warunki.

Dla uproszczenia (A, X, Acc) zamiast $(A, WX(Acc))$. Mówiąc o grach Mullera, Rabina itd. mam na myśli gry z ich warunkami zwycięstwa.

Gra jest regularna, jeśli jej zbiór wygrywający to $WX(Acc)$ dla jakiegoś X i dowolnego warunku zwycięstwa z poprzedniego slajdu, poza 1-winning.

Przykład gry

$V_0 = \{z_1, z_2, z_5, z_6\}$

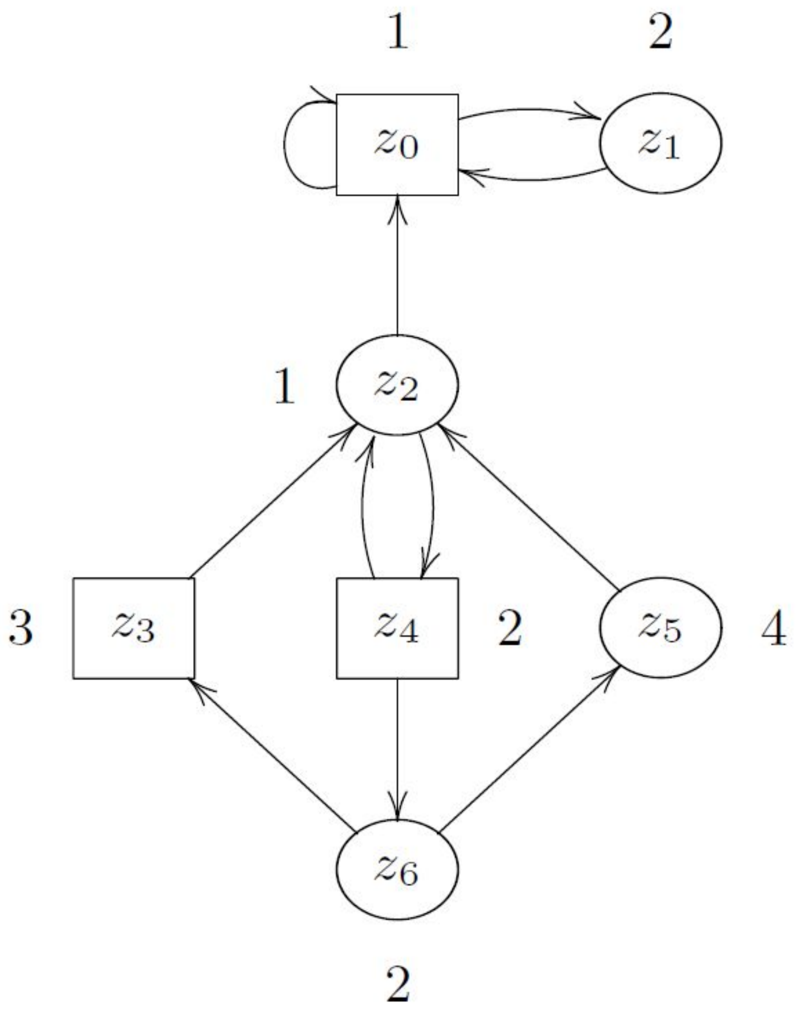
$V_1 = \{z_0, z_3, z_4\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

No dead end.

Warunek zwycięstwa Mullera:

$F = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$



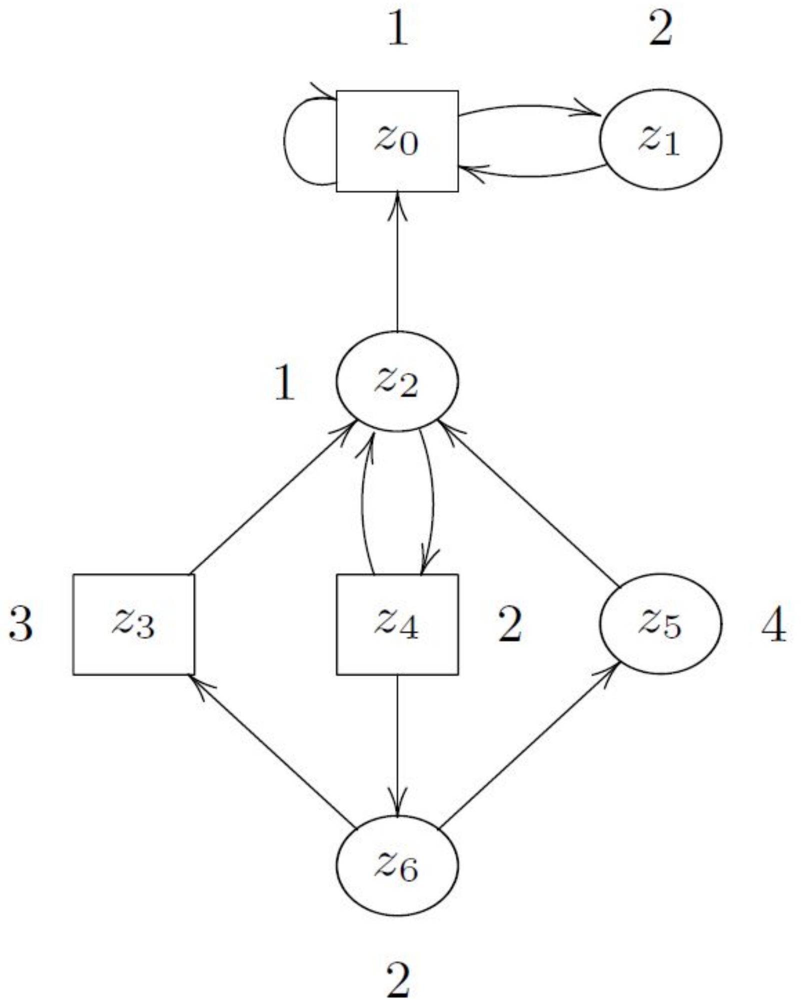
Przykład gry

$\pi = z_6 z_3 z_2 z_4 z_2 z_4 z_6 z_5 (z_2 z_4)^\omega$

$X(\pi) = 23121224(12)^\omega$

$Inf(X(\pi)) = \{1, 2\} \in F$

Gracz 0 wygrywa.



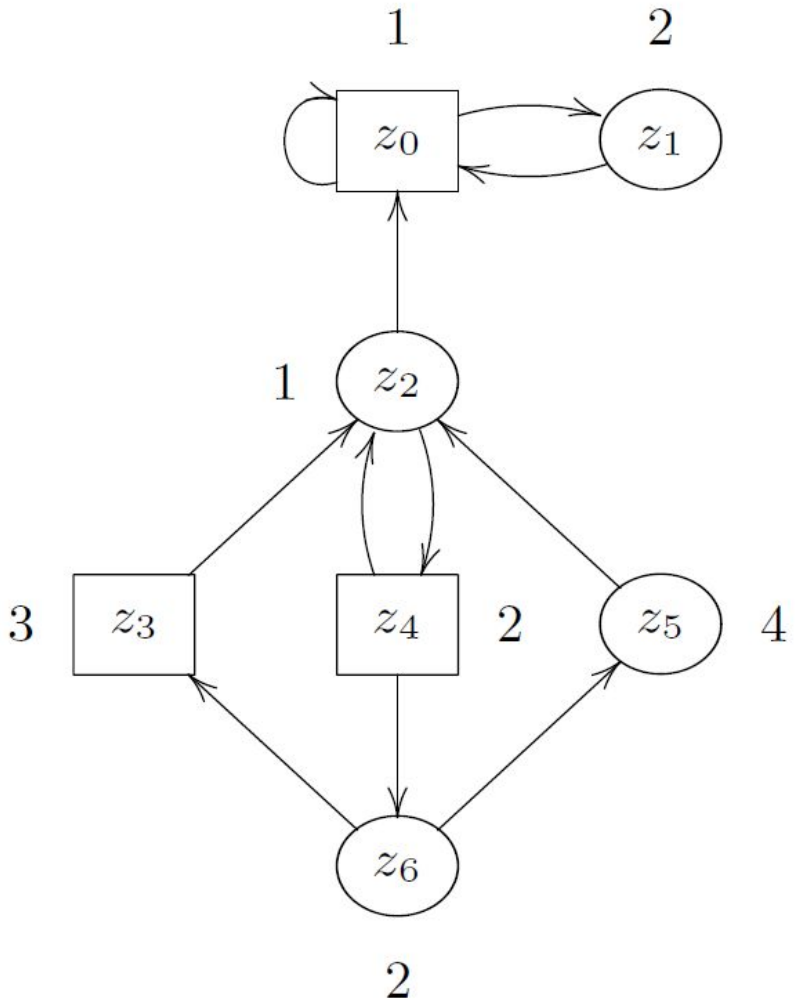
Przykład gry

$\pi' = (z_2 z_4 z_6 z_3)^\omega$

$X(\pi') = (1223)^\omega$

$Inf(X(\pi')) = \{1, 2, 3\} \notin F$

Gracz 1 wygrywa.



Zainicjalizowana gra

(G, v_I)

v_I - wierzchołek startowy

Strategie i determinacja

Strategia

$f\sigma : V^*V\sigma \rightarrow V$ - funkcja częściowa (niezdefiniowana dla części ciągów z $V^*V\sigma$)

$\sigma \in \{0, 1\}$

Prefiks rozgrywki $\pi = v_0 v_1 \cdot \cdot \cdot v_l$ jest zgodny (conform) z $f\sigma$ jeśli dla wszystkich i, takich że $0 \leq i < l$ i $v_i \in V\sigma$, $f\sigma$ jest zdefiniowana dla $v_0 \ldots v_i$ i $v_{i+1} = f\sigma(v_0 \ldots v_i)$.

Rozgrywka (skończona lub nieskończona) jest zgodna z $f\sigma$ jeśli wszystkie jej prefiksy są zgodne z $f\sigma$.

f_σ jest strategią dla gracza σ na $U \subseteq V$, jeśli jest zdefiniowana dla każdego prefiksu rozgrywki, który

- jest z nią zgodny,
- zaczyna się wierzchołkiem z U,

  i

- nie kończy się martwym końcem dla gracza σ.

Jeśli $U = \{v\}$, to f_σ jest strategią dla gracza σ w v.

f_σ jest strategią wygrywającą dla gracza σ na $U \subseteq V$, jeśli wszystkie rozgrywki zgodne z f_σ zaczynające się w wierzchołku z U są zwycięstwami gracza σ.

Przykład gry

$V_0 = \{z_1, z_2, z_5, z_6\}$

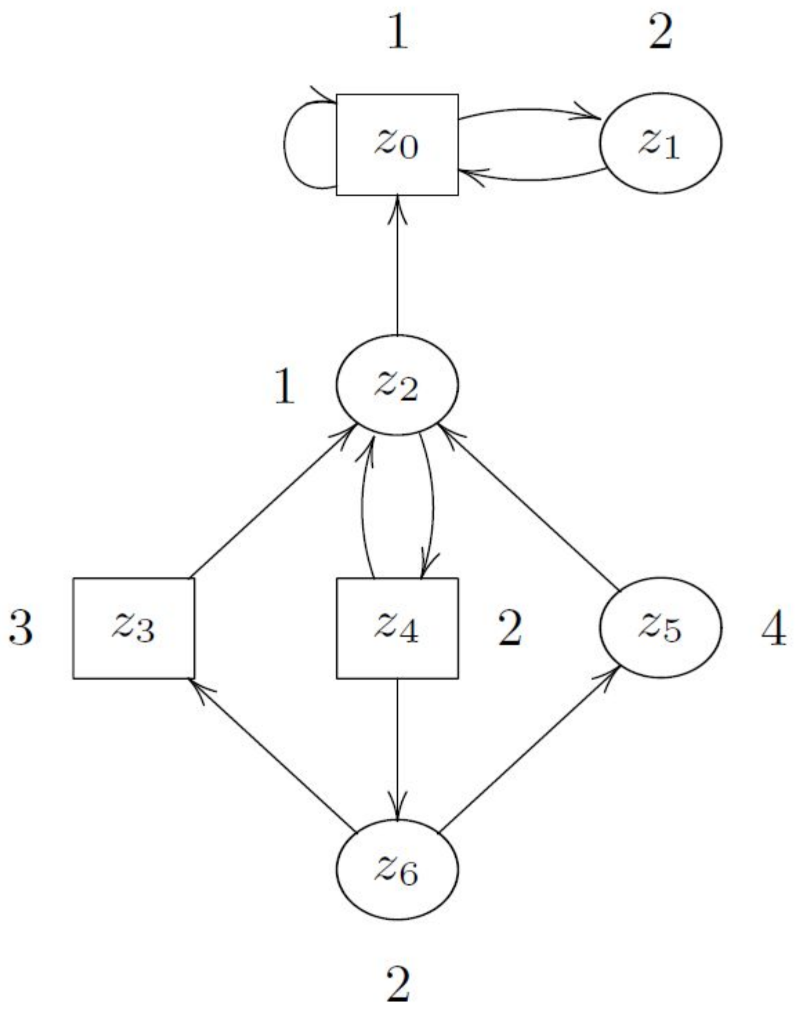
$V_1 = \{z_0, z_3, z_4\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

No dead end.

Warunek zwycięstwa Mullera:

$F = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$

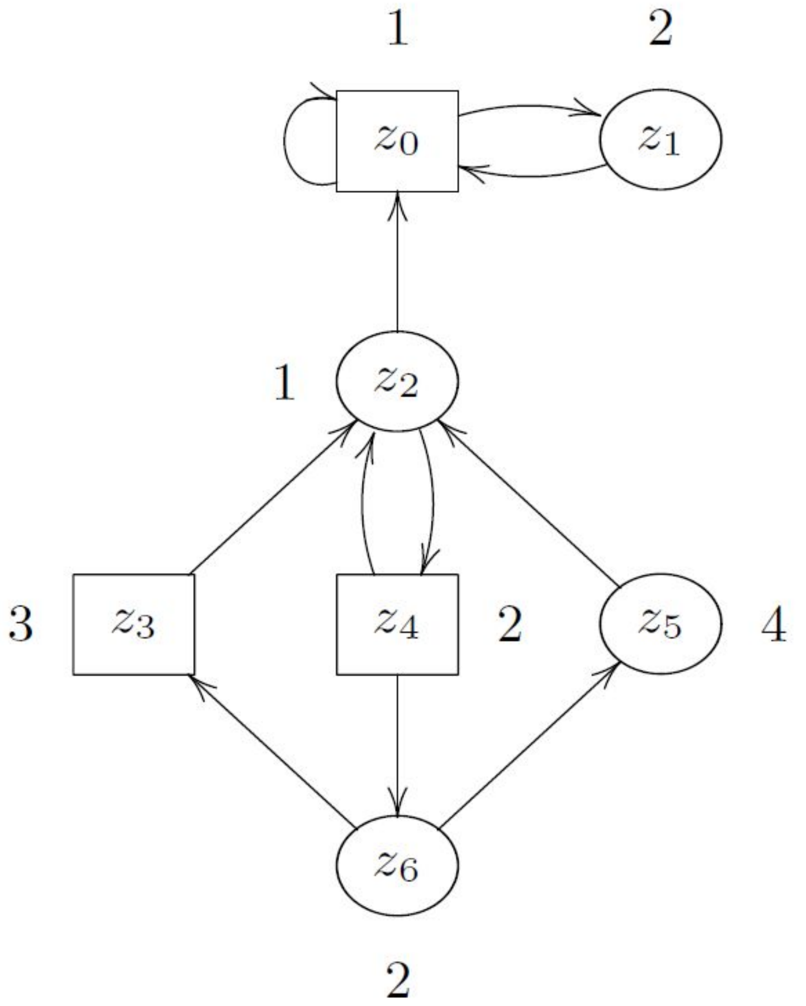


Przykład strategii

Jeśli gracz 1 przechodzi z z_0 do z_0 zawsze, gdy token jest na z_0, to wygra każdą rozgrywkę, w której dochodzi się do z_0.

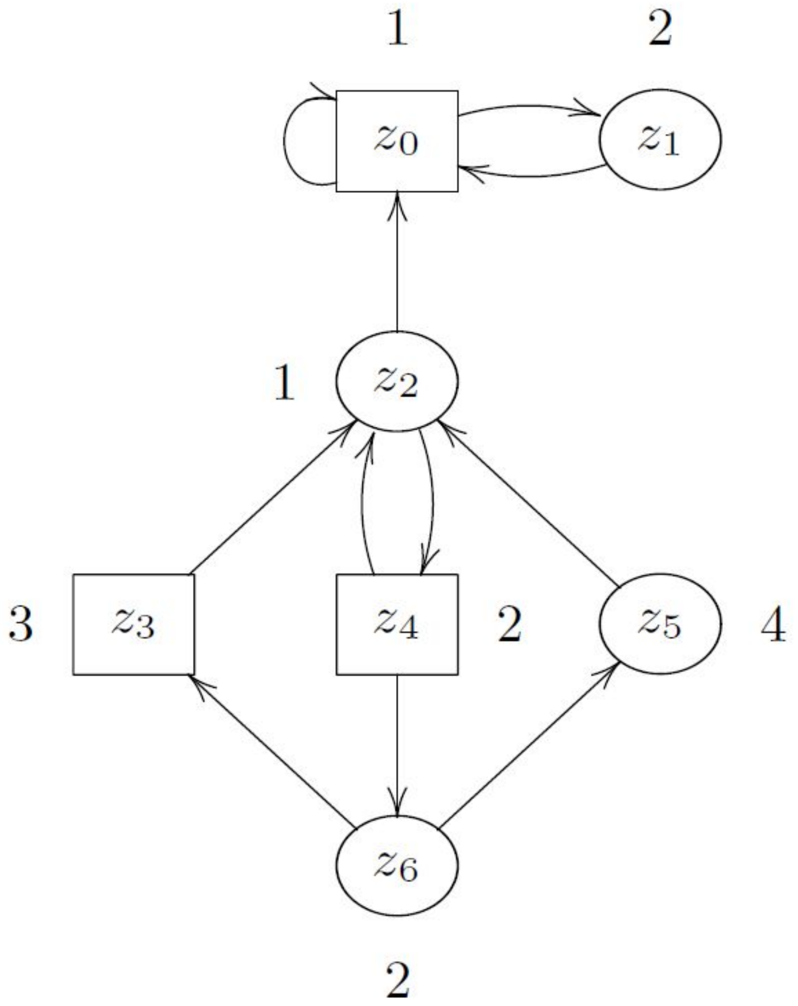
$f1(yz_0) = z_0$

f1 jest strategią wygrywającą dla gracza 1 na $W1 = \{z_0, z_1\}$.



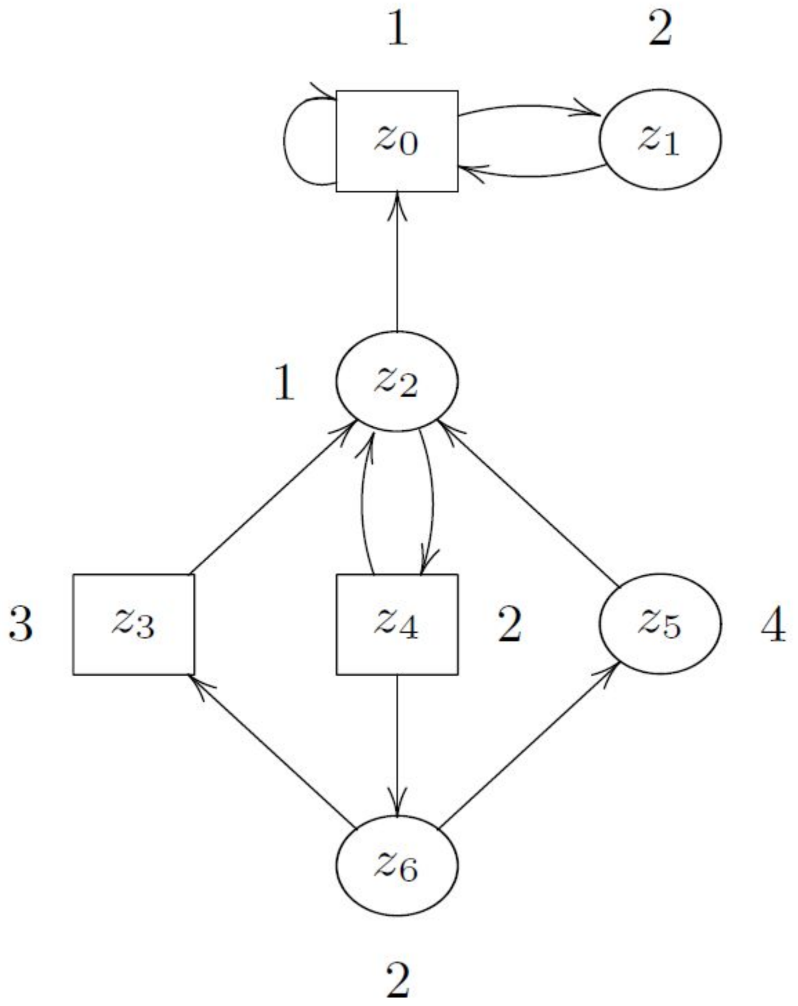
Przykład strategii

Jeśli rozgrywka nie zaczyna się w W1, to odwiedza z_2. Jeśli wtedy gracz 0 przejdzie do z_0, a gracz 1 użyje opisanej strategii, to gracz 0 przegra. Powinien zatem pójść do z_4.



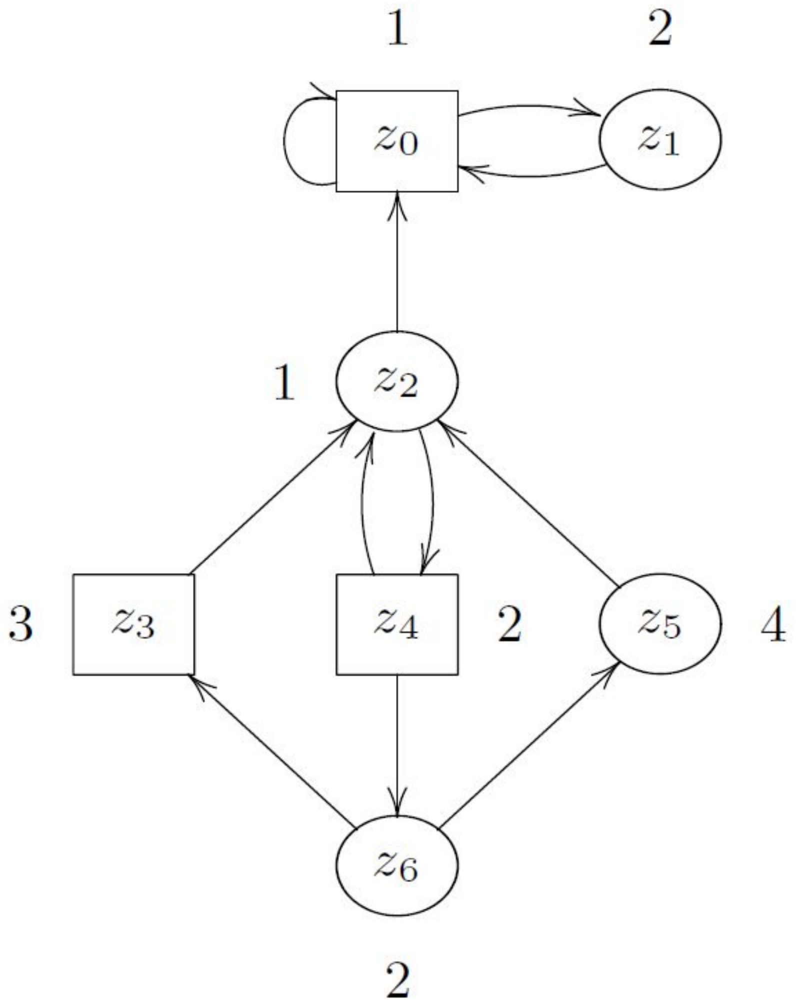
Przykład strategii

W z_4 gracz 1 nie powinien zawsze wybierać z_2, bo sufiks $(z_2 z_4)^\omega$ jest wygrywający dla gracza 0.



Przykład strategii

W z_6 gracz 0 powinien wybierać na zmianę z_3 i z_5, żeby wygrać (1234).

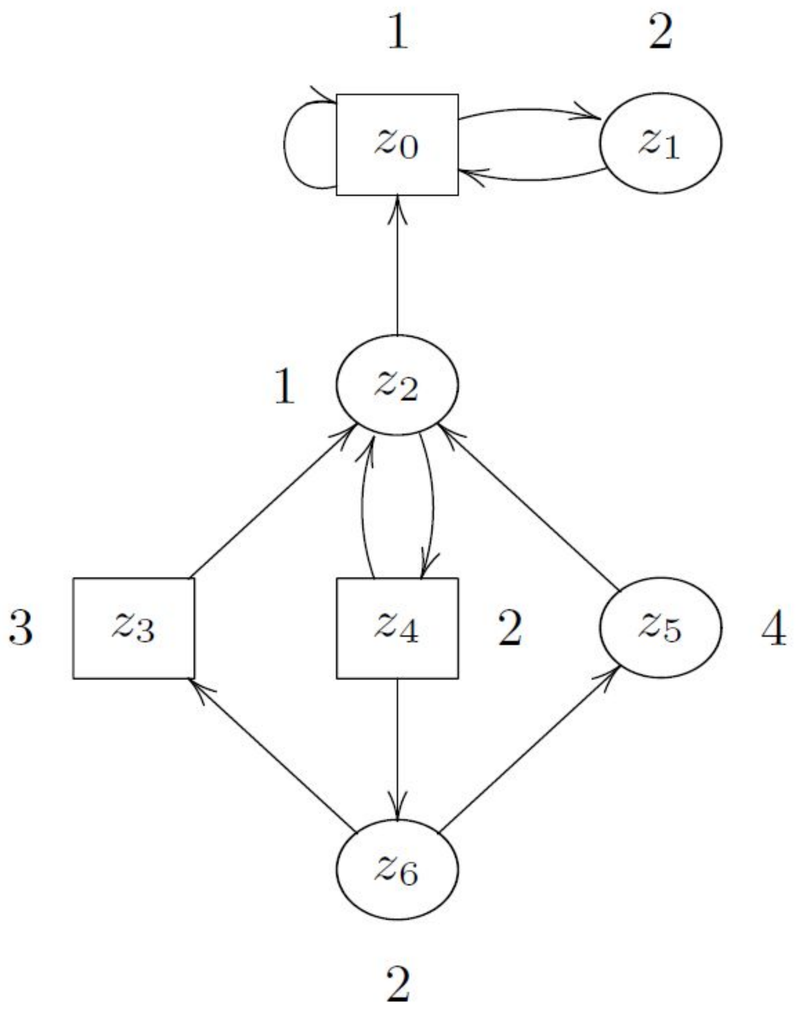


Przykład strategii

$$f_0(\pi) = \begin{cases} z_4 & \text{if } \pi \in V^* z_2 \\ z_3 & \text{if } \pi \in V^* z_5 z_2 z_4 (z_2 z_4)^* z_6 \\ z_5 & \text{if } \pi \in V^* z_3 z_2 z_4 (z_2 z_4)^* z_6 \\ z_3 & \text{if } \pi \in (V \setminus \{z_3, z_5\})^* z_6 \end{cases}$$

Strategia wygrywająca dla gracza 0 na $\{z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$

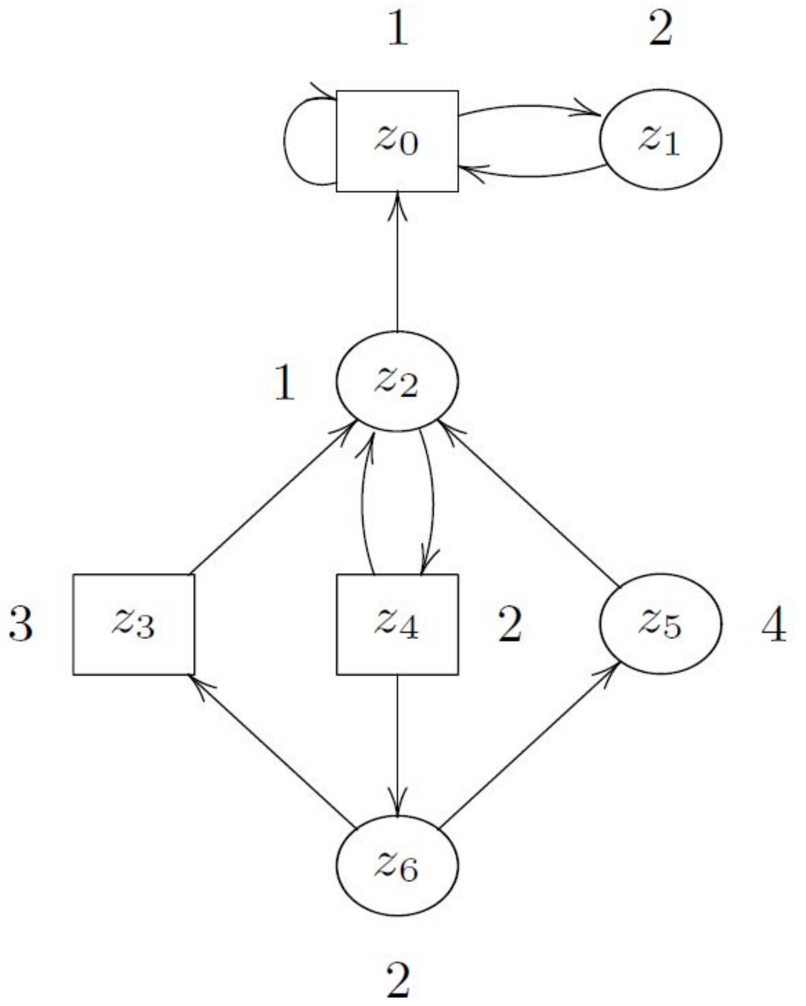
Gracz σ wygrywa rozgrywkę G na U ⊆ W, jeśli ma strategię wygrywającą na U.



Przykład zwycięzców

Gracz 1 wygrywa na $\{z_0, z_1\}$, a gracz 2 na $\{z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$.

Gracz σ wygrywa (G, v_I), jeśli wygrywa G na $\{v_I\}$.



Każda gra ma co najwyżej 1 zwycięzcę: jeśli gracz 0 wygrywa na $U0$, a gracz 1 na $U1$, to $U0 \cap U1 = \emptyset$.

Region zwycięstwa (winning region)

gracza σ, Wσ(G) lub Wσ, to zbiór v, takich że gracz σ wygrywa (G, v).

Gracz σ wygrywa G na Wσ.

Przekształcanie warunków zwycięstwa

Dla każdej gry (A, X, Acc) istnieje warunek zwycięstwa Mullera Acc’, taki że (A, X, Acc) i (A, X, Acc’) mają takie same regiony zwycięstwa.

Dla każdej gry Mullera (A, X, F) istnieje gra parzystości (parity game, o zwycięstwie decyduje parzystość najmniejszego powtarzającego się w nieskończoność koloru) (A’, X’, Acc’) i funkcja $r: V \to V'$, taka że dla wszystkich $v \in V$ gracz σ wygrywa ((A, X, F), v) wtedy i tylko wtedy, gdy wygrywa ((A’, X’, Acc’), r(v)).

Dla każdej gry Mullera (A, X, F) istnieje gra parzystości (parity game) (A', X', Acc') i funkcja r: V → V', taka że dla wszystkich v ∈ V gracz σ wygrywa ((A, X, F), v) wtedy i tylko wtedy, gdy wygrywa ((A', X', Acc'), r(v)).

Proof. The proof will be similar to the transformation of Muller conditions in Rabin conditions for ω-automaton in the previous chapter: We modify the LAR memory with hit position from Transformation 1.20 to contain colours instead of vertices because the acceptance condition for our games was defined for the colour sequence. But we have to keep track of the visited vertices too. This is done in a product construction. We will see that the constructed Rabin condition can be rewritten as Rabin chain or max-parity condition.

Let $(\mathcal{A}, \chi, \mathcal{F})$ be a Muller game, C the (finite) set of colours, and a marker $\natural \notin C$, a symbol not occurring in C. Now set our LAR memory to

$$\widetilde{C} := \{\, w \in (C \cup \{\natural\})^* \mid |w| \geq 2 \wedge |w|_\natural = 1 \wedge \forall a \in C(|w|_a \leq 1) \,\} \; . \tag{2.4}$$

Dla każdej gry Mullera (A, X, F) istnieje gra parzystości (parity game) (A’, X’, Acc’) i funkcja r: V → V’, taka że dla wszystkich $v \in V$ gracz σ wygrywa ((A, X, F), v) wtedy i tylko wtedy, gdy wygrywa ((A’, X’, Acc’), r(v)).

$\widetilde{C}$ is the set of all words w over the alphabet $C \cup \{\natural\}$ where $\natural$ and at least one colour are infixes of w and each colour appears at most once.

Now we can define our game $(\mathcal{A}', \chi', \mathrm{Acc}')$. As vertices we choose

$$V' := V_0' \cup V_1' \text{ with } V_0' := V_0 \times \widetilde{C} \text{ and } V_1' := V_1 \times \widetilde{C} \ . \tag{2.5}$$

Dla każdej gry Mullera (A, X, F) istnieje gra parzystości (parity game) (A', X', Acc') i funkcja r: V → V', taka że dla wszystkich v ∈ V gracz σ wygrywa ((A, X, F), v) wtedy i tylko wtedy, gdy wygrywa ((A', X', Acc'), r(v)).

The set of edges is given by

$$E' := \{\, ((v,q),(v',\varphi(v',q))) \mid v \in V,\ \ v' \in vE,\ \ q \in \widetilde{C} \,\} \tag{2.6}$$

where $\varphi\colon V \times \widetilde{C} \to \widetilde{C}$ is the memory update function that deletes the marker, replaces the colour $c := \chi(v')$ of the given vertex v' by the marker and finally appends c. Formally, φ is defined as

$$\varphi(v',q) := \begin{cases} x\natural yzc & \text{if } q = xcy\natural z \\ xy\natural zc & \text{if } q = x\natural ycz \\ qc & \text{else } (c \text{ is not an infix of } q) \end{cases} \tag{2.7}$$

for each $v' \in V$ and each $q \in \widetilde{C}$ with $c := \chi(v')$. The function that transforms the initial vertex can be set to

$$r(v) := (v, \natural\chi(v)) \ . \tag{2.8}$$

Dla każdej gry Mullera (A, X, F) istnieje gra parzystości (parity game) (A’, X’, Acc’) i funkcja r: V → V’, taka że dla wszystkich v ∈ V gracz σ wygrywa ((A, X, F), v) wtedy i tylko wtedy, gdy wygrywa ((A’, X’, Acc’), r(v)).

The new colouring function $\chi' \colon V' \to \omega$ is defined by

$$\chi'(v, x\natural y) := \begin{cases} 2 * |y| - 1 & \text{if } \{\, c \in C \mid c \text{ infix of } y \,\} \notin \mathcal{F} \\ 2 * |y| & \text{otherwise} \end{cases} . \tag{2.9}$$

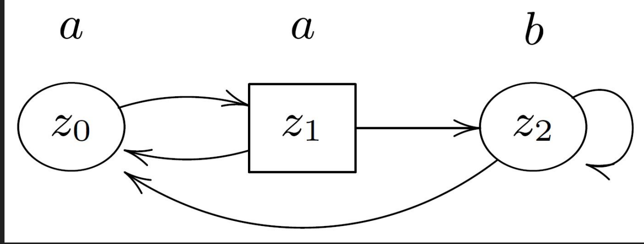
We conclude the description of the construction by declaring Acc$'$ to be a max-parity condition.

Dla każdej gry Mullera (A, X, F) istnieje gra parzystości (parity game) (A', X', Acc') i funkcja r: V → V', taka że dla wszystkich v ∈ V gracz σ wygrywa ((A, X, F), v) wtedy i tylko wtedy, gdy wygrywa ((A', X', Acc'), r(v)).

Now we have to prove the correctness of this construction which is similar to Lemma 1.21 in the previous chapter. Let $\pi = v_0 v_1 \dots \in V^\omega$ be an infinite play in $\mathcal{A}$. The corresponding play π' in $\mathcal{A}'$ is uniquely determined: The projection onto the first component $p_1(\pi') = \pi$ is our original play, and the second component is $p_2(\pi') = q_0 q_1 \dots \in \widetilde{C}^\omega$ with $q_i = x_i \natural y_i$ defined by $q_0 := \natural\chi(v_0)$ and $q_{i+1} := \varphi(v_{i+1}, q_i)$ for each $i \in \omega$. Let $F := \mathrm{Inf}(\chi(\pi))$ be the set of infinitely often visited colours in the play π. Hence, from some point $j \in \omega$ on the marker $\natural$ stays within the last $|F|+1$ positions: $\forall i \geq j \ |y_i| \leq |F|$. Second, the marker must infinitely often occur in position $|F|+1$, positions numbered from right to left, because each colour from F is infinitely often moved to the end. That is, $\{ k \geq j \mid |y_k| = |F| \text{ and } y_k \text{ forms the set } F \}$ is infinite. Thus, by construction of χ', we have that the highest colour visited infinitely often in π' has the even value $2 \cdot |F|$ if $F \in \mathcal{F}$ and the odd value $2 \cdot |F| - 1$ otherwise. For finite plays, the situation is even simpler.

In summary, a play π is winning for Player 0 in $\mathcal{A}$ if and only if π' is winning for him in $\mathcal{A}'$. Conversely, every play π' in $\mathcal{A}'$ starting in a vertex $r(v)$ corresponds to a play π in $\mathcal{A}$, for which the same holds. So, Player 0 wins the initialized game $(\mathcal{A}, v)$ if and only if he wins $(\mathcal{A}', r(v))$. □

Przykład przekształcenia



Warunek zwycięstwa Mullera $F = \{\{b\}\}$

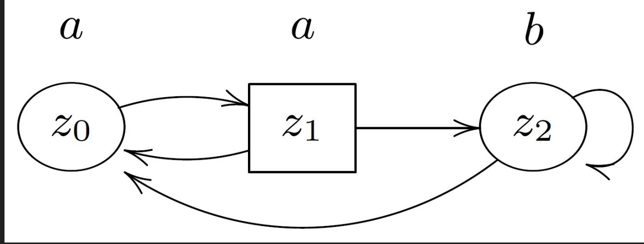
$\pi = z_1 z_2 z_0 z_1 (z_2)^\omega$

Gracz 0 wygrywa.

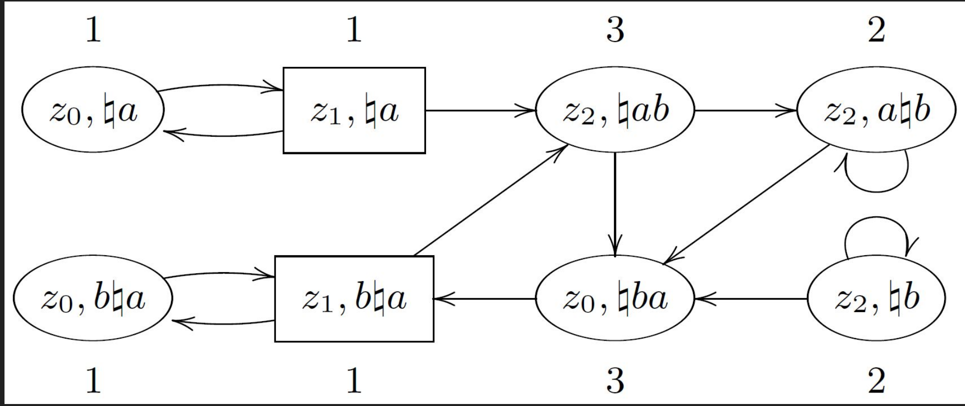
Regiony zwycięstwa:

$W_0 = \{z_2\}$, $W_1 = \{z_0, z_1\}$

Przykład przekształcenia



Skonstruowana gra A' maksymalnej parzystości (max-parity game)



$\pi' = (z_1, \natural a)(z_2, \natural ab)(z_0, \natural ba)(z_1, b\natural a)(z_2, \natural ab)(z_2, a\natural b)^\omega$

$X'(\pi') = 133132^\omega$

Gracz 0 wygrywa.

W_0' to wierzchołki z z_2, $W_1' = V' \setminus W_0'$.

Determinacja

Gra jest zdeterminowana, jeśli regiony zwycięstwa obu graczy sumują się do V.

Każda gra parzystości jest zdeterminowana.

Każda gra regularna jest zdeterminowana.

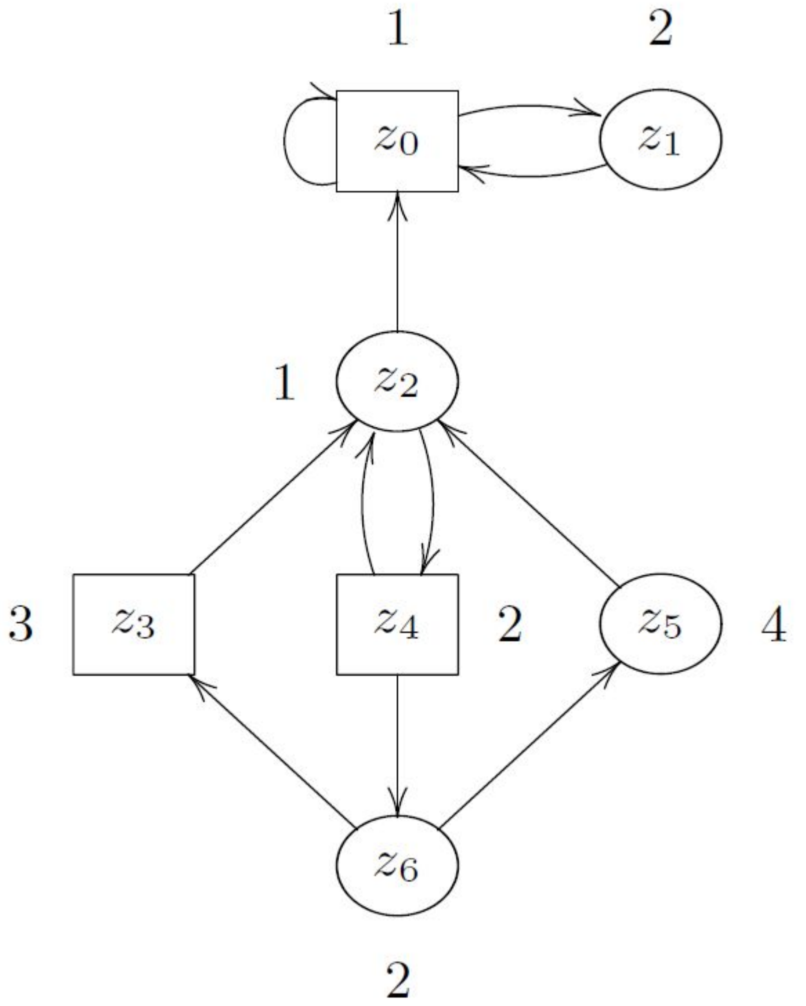
Strategie zapominające (forgetful) i bez pamięci (memoryless)

Przykład strategii zapominającej

$$f_0(\pi) = \begin{cases} z_4 & \text{if } \pi \in V^* z_2 \\ z_3 & \text{if } \pi \in V^* z_5 z_2 z_4 (z_2 z_4)^* z_6 \\ z_5 & \text{if } \pi \in V^* z_3 z_2 z_4 (z_2 z_4)^* z_6 \\ z_3 & \text{if } \pi \in (V \setminus \{z_3, z_5\})^* z_6 \end{cases}$$

Strategia wygrywająca dla gracza 0 na $\{z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$.

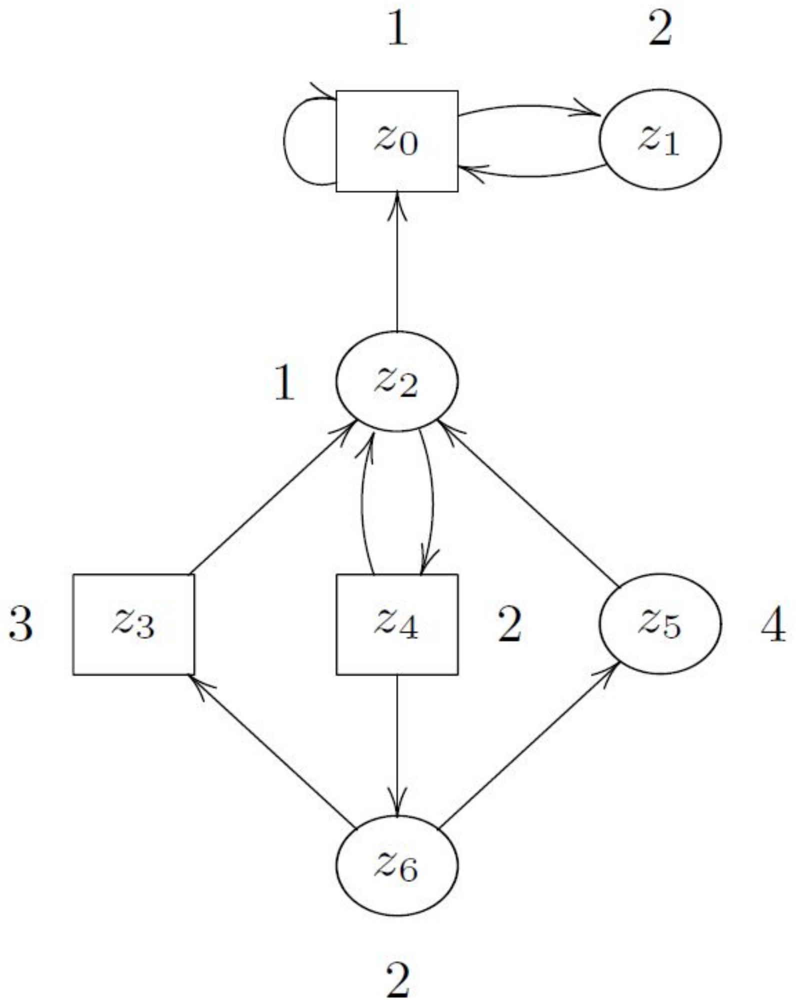
Strategia zapominająca potrzebuje skończonej pamięci (tu 1 bit).



Przykład strategii bez pamięci

$f1(yz_0) = z_0$

f1 jest strategią wygrywającą dla gracza 1 na $W1 = \{z_0, z_1\}$.



Strategia skończonej pamięci (finite memory), czyli zapominająca

$f\sigma$ jest zapominająca, jeśli istnieje skończony zbiór M, element $m_I \in M$ i funkcje $\delta: V \times M \to M$ i $g: V \times M \to V$, takie że jeśli $\pi = v_0 v_1 \ldots v_{k-1}$ jest prefiksem rozgrywki w dziedzinie $f\sigma$ i sekwencja $m_0, m_1, \ldots, m_k$ jest zdeterminowana przez $m_0 = m_I$ oraz $m_{i+1} = \delta(v_i, m_i)$, to $f\sigma(\pi) = g(v_k, m_k)$.

Strategia bez pamięci, czyli pozycyjna (positional)

to strategia zapominająca, w której M jest singletonem.

Jeśli f_σ jest zdefiniowana dla πv i $\pi' v$, to $f_\sigma(\pi v) = f_\sigma(\pi' v)$.

Można myśleć, że strategie pozycyjne to funkcje częściowe $V_\sigma \to V$.

Przykład strategii bez pamięci

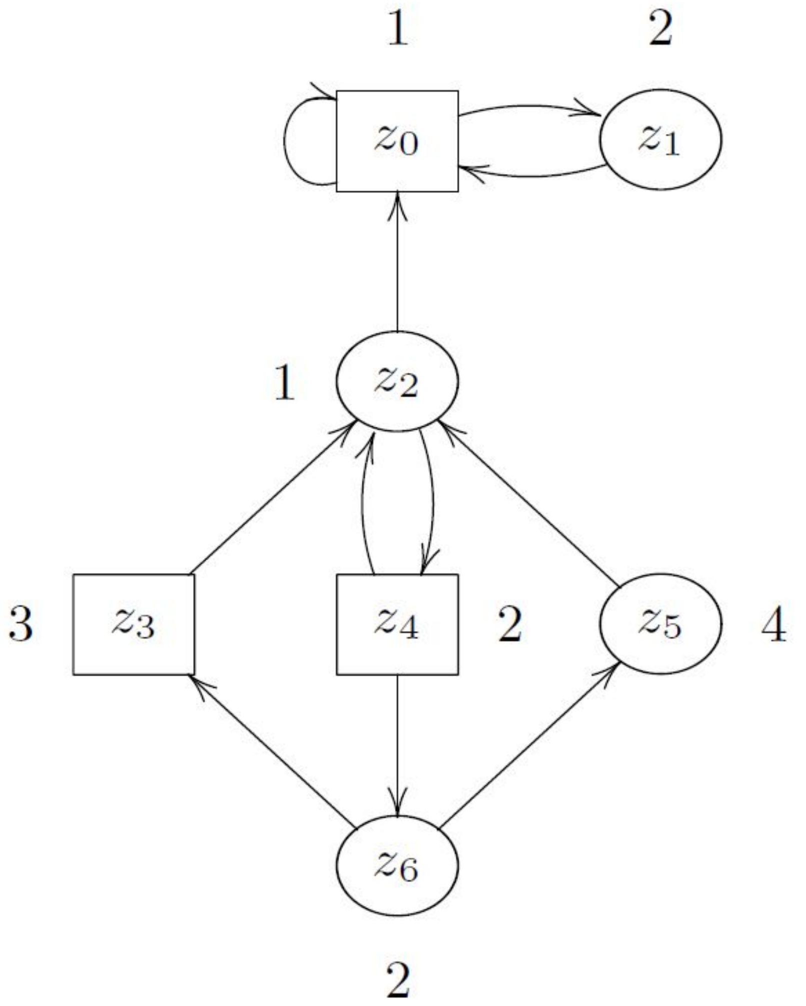
$M = \{m\}$

$g(z_0, m) = z_0$

$g(z_3, m) = g(z_4, m) = z_2$

$f1(z_0) = z_0$

$f1(z_3) = f1(z_4) = z_2$

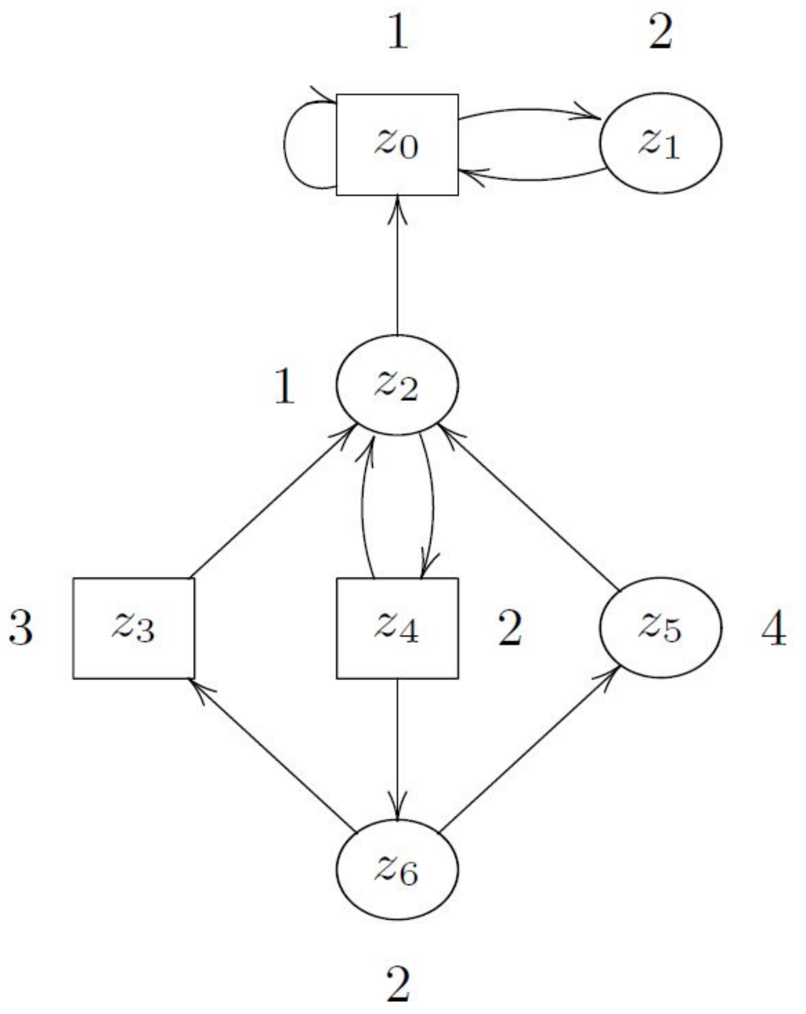


Przykład strategii zapominającej

$M = \{3, 4\}$

$$\delta(v, m) = \begin{cases} 3 & \text{if } v = z_3 \\ 4 & \text{if } v = z_5 \\ m & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g(v, m) = \begin{cases} z_4 & \text{if } v = z_2 \\ z_3 & \text{if } v = z_6 \text{ and } m = 4 \\ z_5 & \text{if } v = z_6 \text{ and } m = 3 \end{cases}$$



Gracz σ wygrywa zapominając, jeśli ma zapominającą strategię dla każdego wierzchołka ze swojego regionu zwycięstwa. Podobnie zdefiniowane jest zwycięstwo ze skończoną pamięcią, bez pamięci i pozycyjne.

Niech $G = (A, Win)$ będzie dowolną grą z przeliczalnym V,

$V^*Win \subseteq Win$ i $Win/V^* \subseteq Win$,

gdzie $Win/V^* = \{\eta \in V^\omega \mid \exists w \in V^* \mid w\eta \in Win\}$ jest zbiorem wszystkich sufiksów Win. Niech U będzie zbiorem wierzchołków, takich że gracz σ ma pozycyjną strategię wygrywającą dla każdego elementu U. Wtedy gracz σ ma pozycyjną strategię wygrywającą na U.

Dowód

Proof. The proof uses the axiom of choice. For every $u \in U$, let $f_\sigma^u\colon V_\sigma \to V$ be a partial function which is a memoryless winning strategy for Player σ on u. Without loss of generality, we assume that for every $u \in U$ the domain of f_σ^u, denoted D_u, is minimal with respect to set inclusion.

Let $<$ be a well-ordering on U (therefore we choose V to be countable) and $D := \bigcup_{u \in U} D_u$. We have to define a memoryless winning strategy $f_\sigma\colon D \to V$.

For each $v \in D$, let $u(v)$ be the minimal vertex in U (with respect to the well-ordering) with $v \in D_{u(v)}$, and set $f_\sigma(v) := f_\sigma^{u(v)}(v)$. Clearly, f_σ is well defined and memoryless. We have to show that f_σ is a winning strategy on U.

Dowód

Assume $\pi = v_0 v_1 \cdots$ is a play starting in U and conform with f_σ. In each σ-vertex v_j of the play π, Player σ has to choose the strategy $f_\sigma^{u(v_j)}$. Let i be such that $u(v_i)$ is minimal (with respect to the well-ordering) in the set $\{\, u(v_j) \mid j \in \omega \text{ and } v_j \in D \,\}$. Then, from this moment i on, the strategy f_σ follows the strategy $f_\sigma^{u(v_i)}$. The domain $D_{u(v_i)}$ was minimal with respect to set inclusion, thus, the play $v_i v_{i+1} \cdots$ is a suffix of a play that starts in $u(v_i)$, visits v_i, and is conform to $f_\sigma^{u(v_i)}$. Hence, $\pi \in V^*(\mathrm{Win}/V^*) \subseteq \mathrm{Win}$ by our two conditions, which completes the proof. $\square$

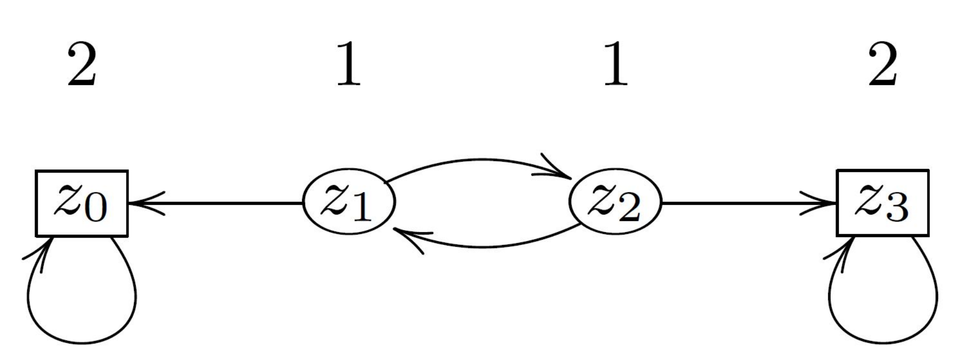
Przykład strategii pozycyjnej

Gracz 0 wygrywa na każdym $v \in U = \{z_1, z_2\}$ strategiami pozycyjnymi.

$f^{z1}(z_1) = z_2$, $f^{z1}(z_2) = z_3$

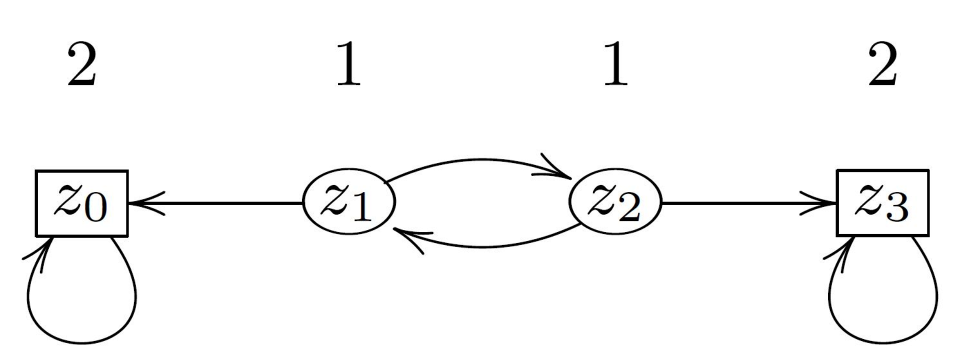
$f^{z2}(z_2) = z_1$, $f^{z2}(z_1) = z_0$

Nie można po prostu złączyć strategii dla punktu startowego z_1 i z_2.



Przykład strategii pozycyjnej

Żeby znaleźć strategię pozycyjną na U, $f(z_1) \neq f^{z1}(z_1)$ i $f(z_2) \neq f^{z2}(z_2)$, bo wtedy inaczej nieskończona pętla między z_1 a z_2 i gracz 0 by przegrał. Jeśli $z_1 < z_2$ (dobry porządek na U), to $f \equiv f^{z1}$.



Pozycyjna determinacja gier parzystości

W każdej grze parzystości obaj gracze wygrywają bez pamięci.

Determinacja skończonej pamięci gier regularnych

W każdej grze regularnej obaj gracze wygrywają zapominająco.

W każdej grze regularnej obaj gracze wygrywają zapominająco.

Proof. Let $(\mathcal{A}, \chi, \mathcal{F})$ be a Muller game, $\mathcal{A}'$ the max-parity game as constructed in the proof of Theorem 2.7, and V‘ $= V \times \widetilde{C}$ the set of vertices of $\mathcal{A}'$ with $\widetilde{C}$ defined in Equation 2.4. The memoryless determinacy of parity games yields memoryless winning strategies f_0' and f_1' on the winning regions W_0' and W_1' with $W_0' \cup W_1' = V'$.

W każdej grze regularnej obaj gracze wygrywają zapominająco.

Now the observations in the proof of Theorem 2.7 allow us to construct forgetful strategies in $\mathcal{A}$. The winning regions are $W_\sigma = \{ v \in V \mid (v, \natural\chi(v)) \in W'_\sigma \}$ for $\sigma \in \{0, 1\}$. We can use the finite memory $M = \widetilde{C}$ for both strategies. As initial memory state of $(\mathcal{A}, v)$ we choose $m_I = \natural\chi(v)$. The memory update function δ is equal to φ from Equation 2.7. The forgetful strategies g_0 and g_1 are defined by

$$g_\sigma(v, q) := f'_\sigma((v, q)) \tag{2.14}$$

for $\sigma \in \{0, 1\}$, $v \in V_\sigma \cap W_\sigma$, and $q \in \widetilde{C}$.

Clearly, these strategies are forgetful winning strategies because g_σ simulates f'_σ. $\square$

Można pokazać, że w pewnych grach Mullera obaj gracze potrzebują pamięci, żeby wygrać.

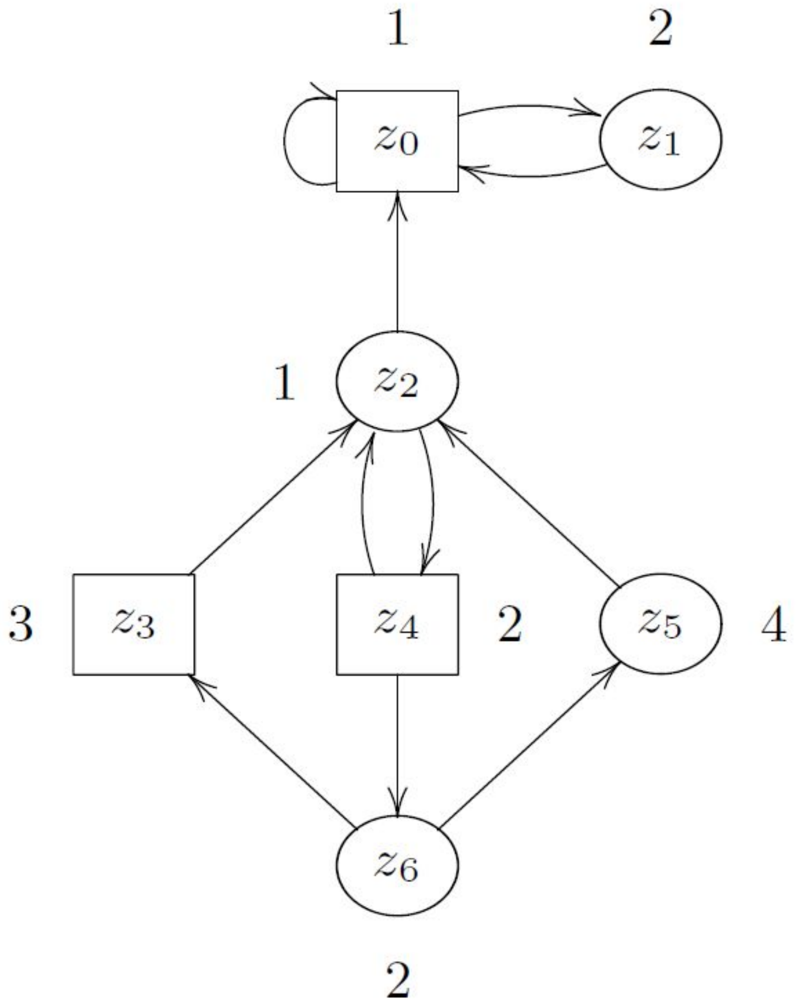
W każdej grze Rabina gracz 0 ma pozycyjną strategię wygrywającą na swoim regionie wygrywającym. W grach Streetta - gracz 1.

Warunek zwycięstwa Mullera (F_0, F_1) może być wyrażony jako warunek Rabina wtedy i tylko wtedy, gdy F_1 jest zamknięty na operację sumy.

Przykład

Warunek zwycięstwa Mullera:

$F = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

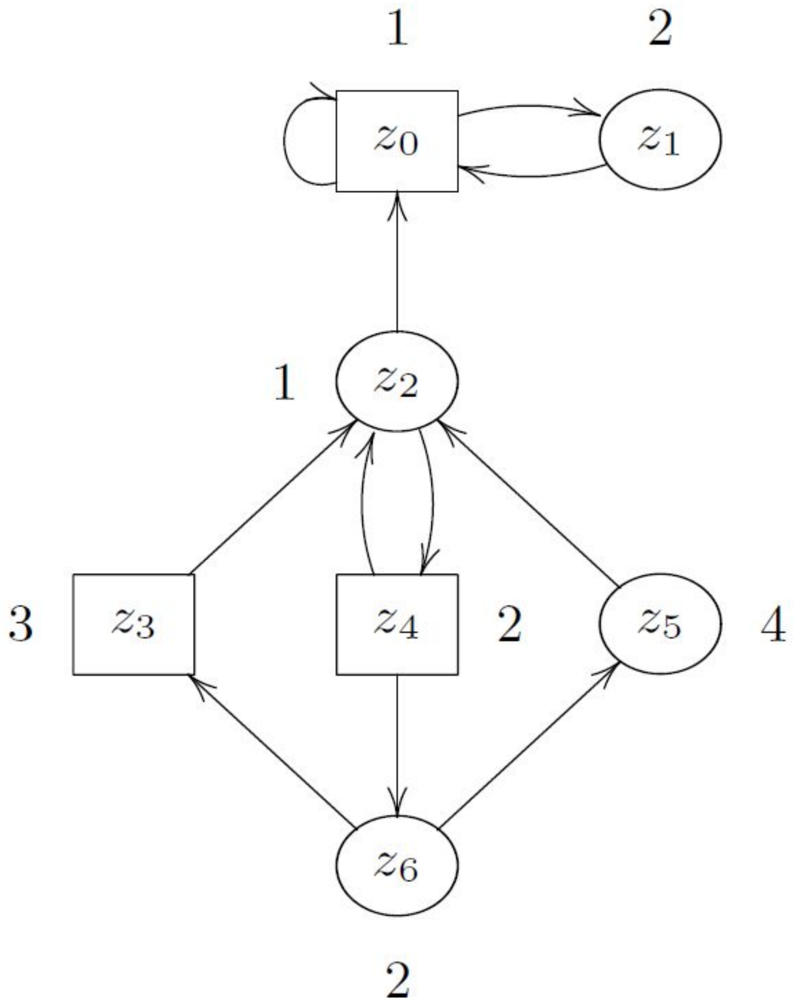


Przykład

Warunek zwycięstwa Rabina dla gracza 1:

{({3}, {4}), ({4}, {3}), ({1}, {2})}.

Gracz 1 wygrywa, jeśli rozgrywka zapętla się skończoną ilość razy przez jeden z kolorów {3, 4} i nieskończoną przez drugi z nich. Warunek zwycięstwa nie może być wyrażony jako warunek parzystości (parity condition), czyli warunek łańcuchowy Rabina (Rabin chain condition) (na tym samym grafie).



Rozwiązywanie gier z prostymi warunkami zwycięstwa

Gry osiągalności (reachability games)

$A = (V_0, V_1, E)$

$X \subseteq V$

$R(A, X)$

Gracz 0 wygrywa, jeśli w rozgrywce pojawi się wierzchołek z X, lub martwy koniec dla gracza 1. Martwy koniec gracza 0 nie oznacza jego porażki. Strategie dla gracza 0 nie muszą być zdefiniowane dla argumentów, które kończą się w wierzchołku z X.

Gry osiągalności są pozycyjnie zdeterminowane

Gry osiągalności są pozycyjnie zdeterminowane

Proof. The proof is constructive in the sense that on finite graphs it can be immediately turned into an algorithm which computes the winning regions and the memoryless winning strategies.

Gry osiągalności są pozycyjnie zdeterminowane

Let $\mathcal{A}$ be an arena as usual and $X \subseteq V$. The winning region for Player 0 in $R(\mathcal{A}, X)$ and a memoryless winning strategy for Player 0 are defined inductively. In the inductive step, we use the function $pre\colon \mathscr{P}(V) \to \mathscr{P}(V)$ defined by

$$pre(Y) = \{ v \in V_0 \mid vE \cap Y \neq \emptyset \} \cup \{ v \in V_1 \mid vE \subseteq Y \} \tag{2.15}$$

Inductively, we set $X^0 = X$,

$$X^{\nu+1} = X^\nu \cup pre(X^\nu) \tag{2.16}$$

for all ordinals ν, and

$$X^\xi = \bigcup_{\nu<\xi} X^\nu \tag{2.17}$$

for each limit ordinal ξ. Let ξ be the smallest ordinal such that $X^\xi = X^{\xi+1}$. We claim that $W := X^\xi$ is Player 0's winning region. Clearly, for every $v \in W \setminus X$ there exists a unique ordinal $\xi_v < \xi$ such that $v \in X^{\xi_v+1} \setminus X^{\xi_v}$. By the above definition, we furthermore know that for every $v \in W \cap V_0 \setminus X$ there exists $v' \in vE$ such that $v' \in X^{\xi_v}$. We set $f_0(v) = v'$ and claim that f_0 is a memoryless strategy for Player 0 on W. This can be easily proved by transfinite induction: One shows that f_0 is winning for Player 0 on X^ν for every $\nu \leq \xi$. Hence, $W \subseteq W_0$.

Gry osiągalności są pozycyjnie zdeterminowane

On the other hand, let $W' = V \setminus W$ and assume $v \in W'$. Then $v \notin X$. If v is a dead end, it must be a dead end of Player 0 because all dead ends of Player 1 belong to X^1. But, on a dead end belonging to Player 0, Player 1 wins immediately. If v is no dead end and belongs to V_0, we have $v' \notin W$ for every $v' \in vE$ because otherwise v would belong to W. Similarly, if v is no dead end and belongs to V_1, there exists $v' \in vE$ such that $v' \notin W$ because otherwise v would belong to W. If we set $f_1(v) = v'$ in this case, then f_1 is clearly a memoryless strategy for Player 1. Every play conform with this strategy and starting in W' has the property that all its vertices belong to W'. Since W' does not contain vertices from X or dead ends of Player 1 this play must be winning for Player 1. Hence, f_1 is a winning strategy for Player 1 on W' and $V \setminus W = W' \subseteq W_1$, that is, $W_0 = W$ and $W_1 = V \setminus W$. $\square$

Atraktory (attractors)

$Attr_{\sigma}(A, X)$ - σ-atraktor - region zwycięstwa gracza σ.

Pozycyjna wygrywająca strategia - strategia atraktorowa (attractor strategy).

σ-pułapka (σ-trap)

to $Y \subseteq V$, taki że $vE \subseteq Y$ dla każdego $v \in Y \cap V\sigma$ i $vE \cap Y \neq \varnothing$ dla każdego $v \in Y \cap V\sigma'$.

Strategia wyłapująca (trapping strategy) dla gracza σ' - funkcja, która dla każdego $v \in Y \cap V\sigma'$ wybiera wierzchołek $v' \in vE \cap Y$.

Dopełnienie σ-atraktora to σ-pułapka

Zatem bez straty ogólności można założyć, że areny nie mają martwych końców.

$A = (V_0, V_1, E)$

(A, Acc) - gra

$U\sigma = Attr_\sigma(A, \varnothing)$

Gracz σ wygrywa na $U\sigma$ bez pamięci.

Dopełnienie σ-atraktora to σ-pułapka

$V_0' = V_0 \setminus (U_0 \cup U_1)$

$V_1' = V_1 \setminus (U_0 \cup U_1)$

$A' = (V_0', V_1', E \cap ((V_0' \cup V_1') \times (V_0' \cup V_1')))$

A' nie ma martwego końca. Dla każdego $v \in V_0' \cup V_1'$ gracz 0 wygrywa (A', Acc, v) wtedy i tylko wtedy, gdy wygrywa (A, Acc, v). Gracz 1 tak samo. Czyli strategie wygrywające dla (A', Acc) mogą być użyte w (A, Acc).

1-gry (gry z 1-akceptacją) są pozycyjnie zdeterminowane

1-gry są pozycyjnie zdeterminowane

Proof. Let $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \chi, F)$ and define Y and V' by $Y = \mathrm{Attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset)$ and $V' = V \backslash Y$. Let $\mathcal{A}' = (V_0 \cap V', V_1 \cap V', E \cap (V' \times V'))$. Observe that $\mathcal{A}'$ does not contain any dead end of Player 0. We claim that $W := \mathrm{Attr}_0(\mathcal{A}', \chi^{-1}(F))$ is the winning region of Player 0 in $\mathcal{G}$.

Clearly, Y is a subset of the winning region of Player 1. Further, $W \subseteq W_0$, because on this set Player 0 can force the game into a dead end of Player 1 or a vertex in $\chi^{-1}(F)$ and go on forever because $\mathcal{A}'$ does not contain any dead end of Player 0. Remember that V' is a 1-trap, that is, Player 1 cannot escape V'. And on both sets, Y and W we have memoryless winning strategies (attractor and trapping strategies) for the respective players. It is now sufficient to show that Player 1 has a memoryless winning strategy on $Z := V' \setminus W$. Since Z is a 0-trap of $\mathcal{A}'$, Player 1 can use his trapping strategy and the token will then stay in Z forever or stay in Z until it is moved to a vertex in Y, which is winning for Player 1 anyway. $\square$

Gry Büchiego są pozycyjnie zdeterminowane

Gry Büchiego są pozycyjnie zdeterminowane

Proof. Like in the other solutions, we first describe how to construct the winning region for Player 0 in a Büchi game $(\mathcal{A}, \chi, F)$.

We set $Y = \chi^{-1}(F)$, and define inductively:

$$Z^0 = V \ , \tag{2.19}$$

$$X^\xi = \mathrm{Attr}_0(\mathcal{A}, Z^\xi) \ , \tag{2.20}$$

$$Y^\xi = pre(X^\xi) \ , \tag{2.21}$$

$$Z^{\xi+1} = Y^\xi \cap Y \ , \tag{2.22}$$

$$Z^\xi = \bigcup_{\nu<\xi} Z^\nu \ , \tag{2.23}$$

where the last equation only applies to limit ordinals ξ. Let ξ be the least ordinal ≥ 1 such that $Z^\xi = Z^{\xi+1}$. We claim $W := \mathrm{Attr}_0(\mathcal{A}, Z^\xi)$ is the winning region of Player 0.

Gry Büchiego są pozycyjnie zdeterminowane

To prove $W \subseteq W_0$, we describe a memoryless winning strategy f_0 for Player 0 on W. For every $v \in V_0 \cap Z^\xi$, there exists $v' \in vE \cap \mathrm{Attr}_0(\mathcal{A}, Z^\xi)$ and we set $f_0(v) = v'$. For every other $v \in V_0 \cap W$, we know $v \in \mathrm{Attr}_0(\mathcal{A}, Z^\xi)$, and thus we set $f_0(v)$ to the value of a respective attractor strategy. Now, the following is easy to see. First, if a finite play starting in W is conform with f_0, then it ends in a dead of Player 1, which means Player 0 wins. Second, if an infinite play starting in W is conform with f_0 it eventually reaches Z^ξ and from this point onwards it will reach Z^ξ over and over again. But since $Z^\xi \subseteq Y$ (this is because $\xi \geq 1$), the play will be winning for Player 0.

To prove that $W_0 = W$, we argue that Player 1 has a memoryless winning strategy on $W' := V \setminus W$. The winning strategy is defined as follows. For every $v \in W'$ there exists a least ν such that $v \in X^\nu \setminus X^{\nu+1}$. (Note that $X^0 = V$ and $X^{\nu'} \subseteq X^{\nu''}$ for all ordinals ν' and ν'' with $\nu'' < \nu'$.) Since $X^{\nu+1}$ is a 0-attractor, $V \setminus X^{\nu+1}$ is a 0-trap. We set $f_1(v)$ to the value of a trapping strategy for Player 1 if $v \notin Y$. Otherwise, it follows that $v \notin pre(X^\nu)$, and thus, there exists some $v' \in vE \cap V \setminus X^\nu$. We set $f_1(v) = v'$. By induction on ν, it is now easy to show that f_1 is a winning strategy for Player 1 on $V \setminus X^\nu$. It follows that f_1 is a winning strategy on W'. $\square$

Pozycyjna determinacja gier parzystości

Podgry (subgames)

$U \subseteq V$

$G[U] = (A|_U, X|_U)$ - podgraf G indukowany przez U

$A|_U = (V_0 \cap U, V_1 \cap U, E \cap (U \times U))$

$X|_U$ - kolorowanie ograniczone do U

Podgry (subgames)

G[U] jest podgrą G, jeśli każdy martwy koniec G[U] jest martwym końcem G, czyli podgra nie wprowadza nowych martwych końców. W przeciwnym przypadku regiony zwycięstwa mogłyby się zmienić.

Przykład podgry

G_{ex}

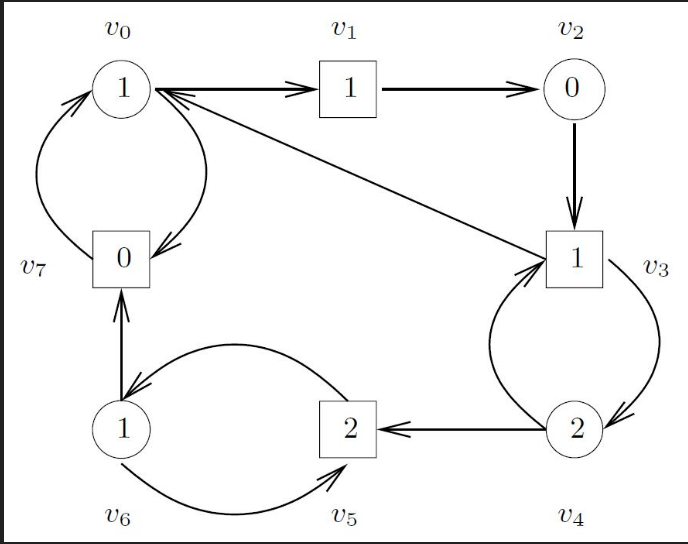
$V = \{v_0, \ldots, v_7\}$

V_0 - kółka

V_1 - kwadraty

$G[\{v_5, v_6\}]$ - podgra

$G[\{v_5, v_6, v_7\}]$ - nie podgra, bo v_7 jest martwym końcem, a w G - nie

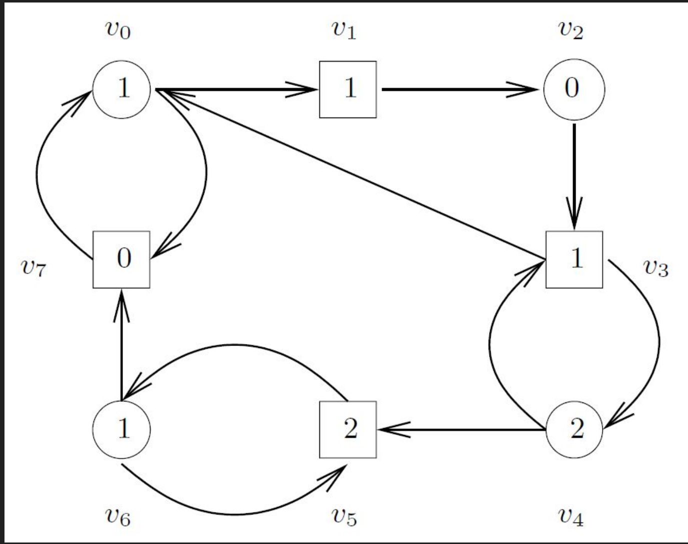


Jeśli $G[U]$ jest podgrą G i $(G[U])[U']$ jest podgrą $G[U]$, to $G[U']$ jest podgrą G.

Przykłady σ-pułapek

$\{v_0, v_2, v_1, v_3, v_7\}$ - 0-pułapka

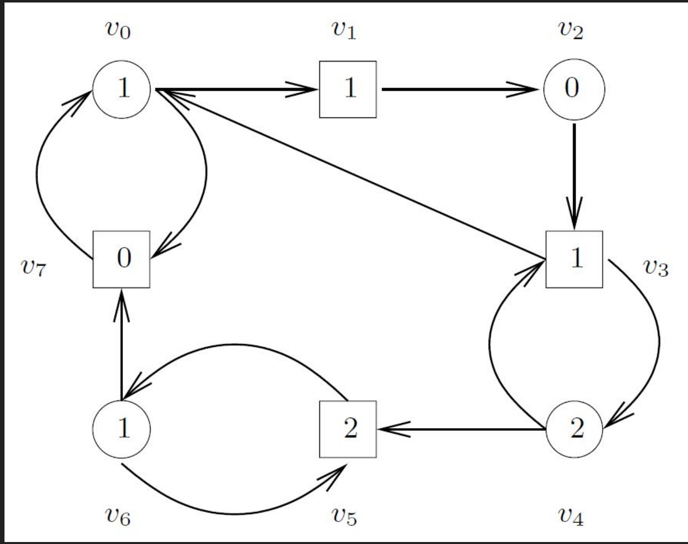
$\{v_0, v_7\}$ - 1-pułapka



Własności σ-pułapek

Dla każdej σ-pułpaki U, G[U] jest podgrą.

W drugą stronę to nie działa. $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ jest podgrą, ale nie jest σ-pułapką.



Własności σ-pułapek

Dla każdej rodziny $\{U_i\}_{i\in I}$ σ-pułapek U_i, $\bigcup_{i\in I} U_i$ jest σ-pułapką.

Własności σ-pułapek

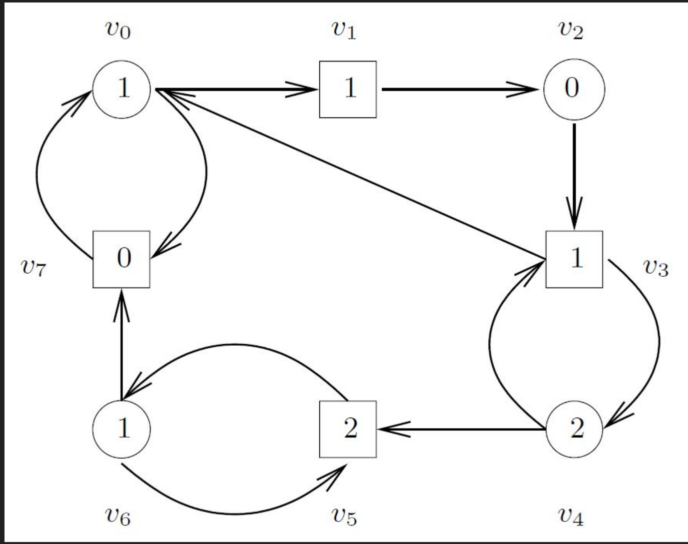
Jeśli X jest σ-pułapką w G i $Y \subseteq X$, to Y jest σ-pułapką w G wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest σ-pułapką w $G[X]$.

To nie działa dla zagnieżdżonych pułapek różnych typów. Jeśli X jest σ-pułapką w G i Y jest σ'-pułapką w $G[X]$, to Y nie musi być żadną pułapką w G.

Atraktory i zbiory atraktorów

$Attr_0(G_{ex}, \{v_2\}) = V$

$Attr_1(G_{ex}, \{v_2\}) = \{v_1, v_2\}$



$V \setminus Attr_\sigma(G, X)$ to σ-pułapka w G.

Jeśli X jest σ-pułapką w G, to $Attr_{\sigma}(G, X)$ też.

Jeśli X jest σ-pułapką w G, to $\mathrm{Attr}_\sigma(G, X)$ też.

ad (2): Let X be a σ-trap. From every vertex in $\mathrm{Attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, X)$, Player $\overline{\sigma}$ has a strategy to force the token into X or a dead end in V_σ. In either case, from then on there is no way for σ to choose a vertex outside of $\mathrm{Attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, X)$. Note that all dead ends in V_σ belong to $\overline{\sigma}$'s attractor set.

X jest σ-pułapką w G wtedy i tylko wtedy, gdy $Attr_\sigma(G, V \setminus X) = V \setminus X$

X jest σ-pułapką w G wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Attr}_\sigma(G, V \setminus X) = V \setminus X$

ad (3): Assume that X is a σ-trap. This means that, starting from some vertex in X, $\overline{\sigma}$ has a strategy to keep the token inside X and that X does not contain a dead end in $V_{\overline{\sigma}}$. Thus, $\mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, V \setminus X) \subseteq V \setminus X$, for otherwise σ would have a way to force the token from some vertex in X into $V \setminus X$. The inclusion in the other direction is trivial.

Conversely, assume $\mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, V \setminus X) = V \setminus X$. By (1), $V \setminus \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, V \setminus X)$ is a σ-trap. Then, $V \setminus (V \setminus X) = X$ shows that X is a σ-trap.

$Attr_\sigma(G, X) = V \setminus U$, gdzie U to największa σ-pułapka zawierająca się w $V \setminus X$; U istnieje, bo $\varnothing$ jest σ-pułapką i z własności σ-pułapek suma mnogościowa σ-pułapek jest σ-pułapką.

$\mathrm{Attr}_\sigma(G, X) = V \setminus U$, gdzie U to największa σ-pułapka zawierająca się w $V \setminus X$; U istnieje, bo $\varnothing$ jest σ-pułapką i z własności σ-pułapek suma mnogościowa σ-pułapek jest σ-pułapką.

ad (4): By definition of U, $X \subseteq V \setminus U$. Hence, $\mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, X) \subseteq \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, V \setminus U)$ (Exercise 2.5). Because U is a σ-trap, (3) implies $\mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, X) \subseteq V \setminus U$. For the converse inclusion, we show that $V \setminus \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, X) \subseteq U$. By (1), $V \setminus \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, X)$ is a σ-trap. Moreover, $X \subseteq \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, X)$ implies $V \setminus \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, X) \subseteq V \setminus X$. Since U is the biggest σ-trap with $U \subseteq V \setminus X$, it follows $V \setminus \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, X) \subseteq U$. $\square$

σ-raj (σ-paradise)

to region (zbiór wierzchołków), z którego gracz σ’ nie może uciec, a gracz σ wygrywa we wszystkich wierzchołkach tego regionu strategią pozycyjną.

$U \subseteq V$ - σ’-pułapka

Istnieje pozycyjna strategia wygrywająca f_σ na U.

σ-raj jest podzbiorem regionu wygrywającego gracza σ.

1. Jeśli U jest σ-rajem, to $Attr_\sigma(G, U)$ też nim jest.
2. Jeśli $\{U_i\}_{i \in I}$ jest rodziną σ-rajów, to $\bigcup_{i \in I} U_i$ też jest σ-rajem.

1. Jeśli U jest σ-rajem, to $\mathrm{Attr}_\sigma(G, U)$ też nim jest.
2. Jeśli $\{U_i\}_{i\in I}$ jest rodziną σ-rajów, to $\bigcup_{i\in I} U_i$ też jest σ-rajem.

Proof. ad (1): By Lemma 6.4, $\mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, U)$ is a $\overline{\sigma}$-trap. A memoryless winning strategy for σ on this attractor set can be obtained as follows: For the vertices $v \in \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}, U) \setminus U$, σ has a memoryless strategy to force the token into U or to a dead end in $V_{\overline{\sigma}}$. In the latter case, σ wins. In the former case, once in U, σ plays according to the memoryless winning strategy for U and wins as well.

ad (2): First note that U is a $\overline{\sigma}$-trap as the union of $\overline{\sigma}$-traps (Lemma 6.3). Let w_i denote the memoryless winning strategy on U_i for σ. A memoryless strategy w on U for σ is constructed in the following way: Fix a well-ordering relation $<$ on I (here we use the axiom of choice to guarantee the existence of such an ordering). Then for $v \in U \cap V_\sigma$, we set $w(v) = w_i(v)$, where i is the least element of I (w.r.t. $<$) such that $v \in U_i$. We need to show that w is a winning strategy on U.

1. Jeśli U jest σ-rajem, to $Attr_\sigma(G, U)$ też nim jest.
2. Jeśli $\{U_i\}_{i\in I}$ jest rodziną σ-rajów, to $\bigcup_{i\in I} U_i$ też jest σ-rajem.

Let $p = v_0 v_1 v_2 \cdots$ be an infinite play conform with w and let, for all k, $i_k = min\{\, i \in I \mid v_k \in U_i \,\}$. Obviously, $v_k \in U_{i_k}$. More importantly, the successor vertex v_{k+1} belongs to U_{i_k} as well (either v_k is an $\overline{\sigma}$-vertex and then all its successors, in particular v_{k+1}, belong to the $\overline{\sigma}$-trap U_{i_k}, or v_k is a σ-vertex and then $v_{k+1} = w(v_k) = w_{i_k}(v_k) \in U_{i_k}$). Moreover, $v_{k+1} \in U_{i_k}$ implies that $i_{k+1} \leq i_k$. Since an infinite non-increasing sequence of elements of a well-ordered set is ultimately constant, we conclude that some suffix of p is conform with one of the strategies w_i. Thus, σ wins p.

Let p be a finite play. The dead end, say v, in p belongs to some U_i. Since all vertices of U_i are winning for σ, we can conclude that $v \in V_{\overline{\sigma}}$. Thus, σ wins p. $\square$

Determinacja

Gry parzystości są zdeterminowane, a zwycięzca gry parzystości ma pozycyjną strategię wygrywającą.

Formalnie, zbiór wierzchołków gry parzystości można podzielić na 0-raj i 1-raj.

Lemat 6.7: jeśli maksymalna parzystość G to 0, to V można podzielić na 0-raj i 1-raj.

Lemat 6.7

Jeśli maksymalna parzystość G to 0, to V można podzielić na 0-raj i 1-raj.

Proof. Since the maximum priority of $\mathcal{G}$ is 0, Player 1 can only win $\mathcal{G}$ on dead ends in V_0 or vertices from which he can force the token to such a dead end. That is, the 1-paradise is the set $\mathrm{Attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset)$ with $\mathrm{attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset)$ as a memoryless winning strategy. Since $V \setminus \mathrm{Attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset)$ is a 1-trap and the maximum priority of $\mathcal{G}$ is 0, it es easy to see that $V \setminus \mathrm{Attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset)$ is a 0-paradise. $\square$

We will now assume that the maximum parity n of $\mathcal{G}$ is at least 1. By induction and Lemma 6.7, we may assume that Theorem 6.6 holds for every parity game with maximum parity less than n. Let

$$\sigma \equiv n \bmod 2 \tag{6.1}$$

be the player that wins if the token visits infinitely often the maximum priority n. Let $X_{\overline{\sigma}}$ be a $\overline{\sigma}$-paradise such that $X_\sigma := V \setminus X_{\overline{\sigma}}$ is a $\overline{\sigma}$-trap. Finally, let

$$N = \{\, v \in X_\sigma \mid \chi(v) = n \,\} \quad \text{and} \quad Z = X_\sigma \setminus \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}[X_\sigma], N). \tag{6.2}$$

Note that since X_σ is a $\overline{\sigma}$-trap, $\mathcal{G}[X_\sigma]$ is a subgame of $\mathcal{G}$. Moreover, as a complement of an attractor set, Z is a σ-trap in $\mathcal{G}[X_\sigma]$, and thus, $\mathcal{G}[X_\sigma][Z]$ is a subgame of $\mathcal{G}[X_\sigma]$. By Lemma 6.2, $\mathcal{G}[Z]$ is a subgame of $\mathcal{G}$. The priorities of $\mathcal{G}[Z]$ are elements of $\{0, \dots, n-1\}$. Thus, by the induction hypothesis, Z is partitioned into a 0-paradise, Z_0, and a 1-paradise, Z_1, say with memoryless winning strategies z_0 and z_1, respectively. The situation described so far is depicted in Figure 6.2.

The set $Z_{\overline{\sigma}}$ is a σ-trap in $\mathcal{G}[Z]$ and Z is a σ-trap in $\mathcal{G}[X_\sigma]$. Thus, according to Lemma 6.3, $Z_{\overline{\sigma}}$ is a σ-trap in $\mathcal{G}[X_\sigma]$. Consequently, $X_{\overline{\sigma}} \cup Z_{\overline{\sigma}}$ is a σ-trap in $\mathcal{G}$: Once in $X_{\overline{\sigma}}$, σ cannot move the token outside this set; although from $Z_{\overline{\sigma}}$, σ can move the token inside $X_{\overline{\sigma}}$, σ cannot move it outside $Z_{\overline{\sigma}}$ in $\mathcal{G}[X_\sigma]$. Moreover, when playing according to $x_{\overline{\sigma}}$ in $X_{\overline{\sigma}}$ and according to $z_{\overline{\sigma}}$ in $Z_{\overline{\sigma}}$ two cases can occur:

(1) At some moment in a play the token hits the set $X_{\overline{\sigma}}$. Then, from this moment on, $\overline{\sigma}$ plays according to $x_{\overline{\sigma}}$ and wins the play.
(2) The token stays forever in $Z_{\overline{\sigma}}$. Since in this set, $\overline{\sigma}$ plays according to $z_{\overline{\sigma}}$, $\overline{\sigma}$ wins as well.

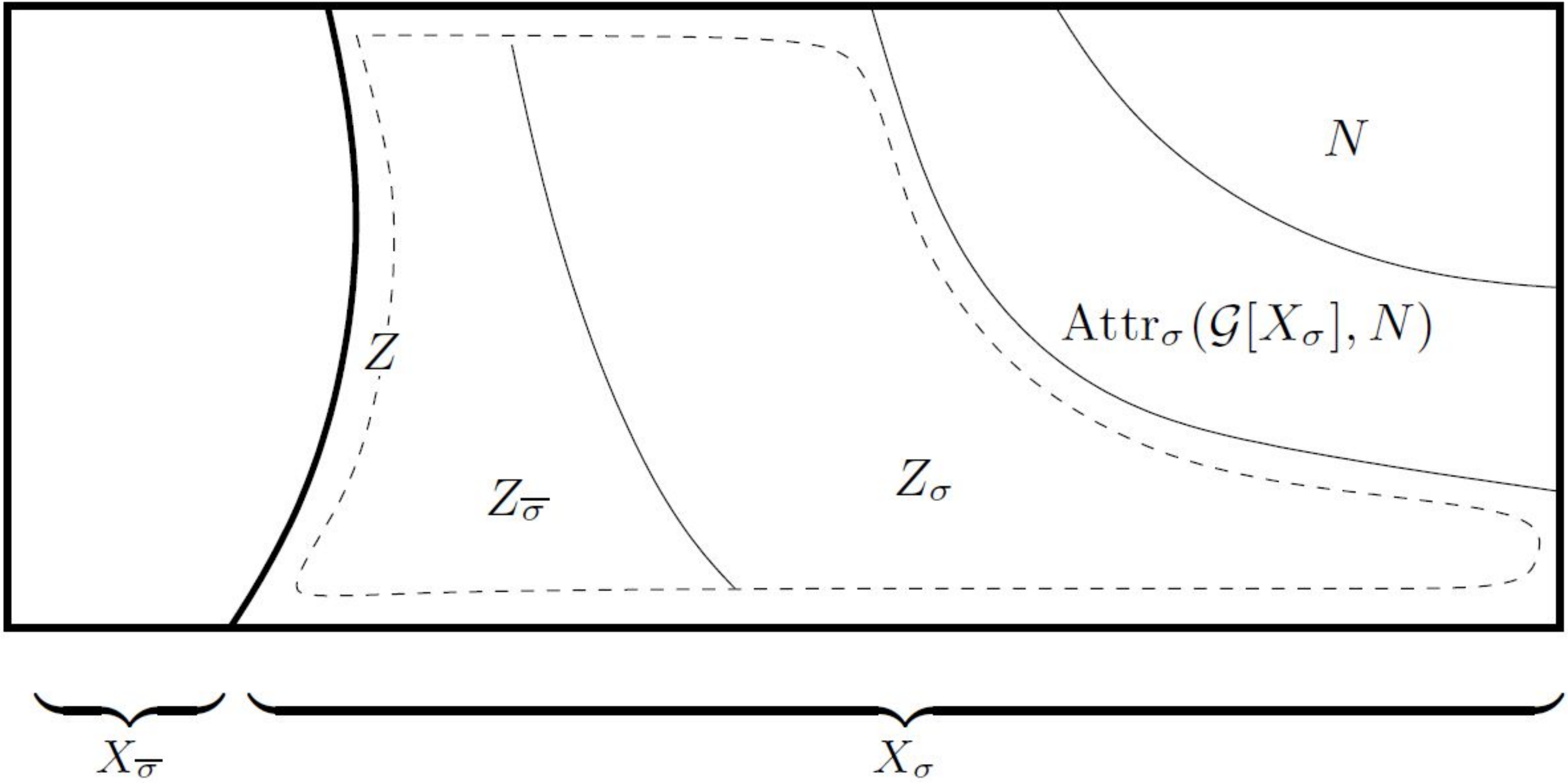


Fig. 6.2. Construction of $X_{\overline{\sigma}}$ and X_σ

This shows:

Lemma 6.8. *The union $X_{\overline{\sigma}} \cup Z_{\overline{\sigma}}$ is a $\overline{\sigma}$-paradise.*

This lemma will later allow us to extend $\overline{\sigma}$-paradises. Conversely, if $X_{\overline{\sigma}}$ cannot be extended in this way, one can show that it is not possible to extend $X_{\overline{\sigma}}$ at all and that X_σ is a σ-paradise:

Lemma 6.9. *If $Z_{\overline{\sigma}} = \emptyset$, then X_σ is a σ-paradise.*

Proof. If $Z_{\overline{\sigma}} = \emptyset$, σ wins everywhere on $\mathcal{G}[Z]$ with z_σ.

To win on X_σ, Player σ plays as follows on X_σ: If the token visits a vertex $v \in N$, then σ moves it to any successor vertex v' inside of his winning region X_σ. Note that there is always at least one such successor vertex since X_σ is a $\overline{\sigma}$-trap. If the token visits $\mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}[X_\sigma], N) \setminus N$, then σ attracts it in a finite number of steps to N or a dead end in $V_{\overline{\sigma}}$. If the token is in Z, then σ plays according to the winning strategy z_σ on Z.

Formally, the winning strategy x_σ for σ on X_σ is defined as follows: for $v \in X_\sigma \cap V_\sigma$ set

$$x_\sigma(v) = \begin{cases} z_\sigma(v) & \text{if } v \in Z, \\ \operatorname{attr}_\sigma(\mathcal{G}[X_\sigma], N)(v) & \text{if } v \in \operatorname{Attr}_\sigma(\mathcal{G}[X_\sigma], N) \setminus N, \\ v' & \text{if } v \in N \text{ and } v' \in vE \cap X_\sigma \end{cases} \tag{6.3}$$

Let p be any play conform with x_σ starting at some vertex in X_σ. Then, three cases can occur. First, from some moment on, the token stays forever inside of Z and in this case some suffix of p is conform with z_σ and Player σ wins. Second, the token is moved to a dead end in $V_{\overline{\sigma}} \cap (\operatorname{Attr}_\sigma(\mathcal{G}[X_\sigma], N) \setminus N)$, in which case σ wins as well. Third, the token visits infinitely often the maximal priority n (i.e, the set N) and σ wins by (6.1). $\square$

Formalnie, zbiór wierzchołków gry parzystości można podzielić na 0-raj i 1-raj.

A non-constructive proof of Theorem 6.6. Let n be the maximum priority occurring in $\mathcal{G}$. If n=0, then Theorem 6.6 follows from Lemma 6.7.

Suppose that $n \geq 1$ and let σ be defined as in (6.1). Let $\mathcal{W}_{\overline{\sigma}} = \{W_{\overline{\sigma}}^q\}_{q \in Q}$ be the family of all $\overline{\sigma}$-paradises. Because of Lemma 6.5 we know that $W_{\overline{\sigma}} = \bigcup_{q \in Q} W_{\overline{\sigma}}^q$ is the greatest among these $\overline{\sigma}$-paradises, say with memoryless winning strategy $w_{\overline{\sigma}}$. If we now show that the complement $W_\sigma = V \setminus W_{\overline{\sigma}}$ of $W_{\overline{\sigma}}$ is a σ-paradise, we are done.

We use Lemma 6.8 and 6.9. To this end, we first show that W_σ is a $\overline{\sigma}$-trap. Lemma 6.5 yields that $\mathrm{Attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W_{\overline{\sigma}})$ is a $\overline{\sigma}$-paradise. But since $W_{\overline{\sigma}}$ is the greatest such paradise, we know $\mathrm{Attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W_{\overline{\sigma}}) = W_{\overline{\sigma}}$. Hence, W_σ is a $\overline{\sigma}$-trap, as a complement of a $\overline{\sigma}$-attractor set (Lemma 6.4).

With $X_{\overline{\sigma}} := W_{\overline{\sigma}}$, $X_\sigma := W_\sigma$ we can apply Lemma 6.8 and obtain that $W_{\overline{\sigma}} \cup Z_{\overline{\sigma}}$ is a $\overline{\sigma}$-paradise. However, since $W_{\overline{\sigma}}$ is the greatest $\overline{\sigma}$-paradise it follows $Z_{\overline{\sigma}} = \emptyset$. By Lemma 6.9, we conclude that W_σ is a σ-paradise, which concludes the non-constructive proof of Theorem 6.6. $\square$

Formalnie, zbiór wierzchołków gry parzystości można podzielić na 0-raj i 1-raj.

A constructive proof of Theorem 6.6. The base case, $n = 0$, again follows from Lemma 6.7 and for the induction step we assume $n \geq 1$ and define σ as in (6.1).

We construct by transfinite induction an increasing sequences of $\overline{\sigma}$-paradises $W^{\xi}_{\overline{\sigma}}$. The corresponding memoryless winning strategies are denoted $w^{\xi}_{\overline{\sigma}}$. For $\nu < \xi$, $w^{\xi}_{\overline{\sigma}}$ will be an extension of $w^{\nu}_{\overline{\sigma}}$.

Initially, $W^{0}_{\overline{\sigma}} = \emptyset$. For a limit ordinal ξ we set $W^{\xi}_{\overline{\sigma}} = \bigcup_{\nu<\xi} W^{\nu}_{\overline{\sigma}}$. By Lemma 6.5, $W^{\xi}_{\overline{\sigma}}$ is a $\overline{\sigma}$-paradise. Since, by induction hypothesis, for every $\nu < \nu' < \xi$ the strategy $w^{\nu'}_{\overline{\sigma}}$ is an extension of $w^{\nu}_{\overline{\sigma}}$, we can define $w^{\xi}_{\overline{\sigma}}$ to be the union of the strategies $w^{\nu}_{\overline{\sigma}}$ with $\nu < \xi$. Now, similar to the proof of Lemma 6.5, (2) one can show that $w^{\xi}_{\overline{\sigma}}$ is a winning strategy on $W^{\xi}_{\overline{\sigma}}$.

Formalnie, zbiór wierzchołków gry parzystości można podzielić na 0-raj i 1-raj.

For a nonlimit ordinal $\xi + 1$, we define $W_{\overline{\sigma}}^{\xi+1}$ using Lemma 6.8. But first, we set

$$X^{\xi} = \mathrm{Attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W_{\overline{\sigma}}^{\xi})$$

to be the attractor set for $\overline{\sigma}$ on $W_{\overline{\sigma}}^{\xi}$. Lemma 6.5 ensures that X^{ξ} is a $\overline{\sigma}$-paradise. Moreover, the memoryless winning strategy on X^{ξ}, call it x^{ξ}, extends $w_{\overline{\sigma}}^{\xi}$.

Since X^{ξ} is a $\overline{\sigma}$-attractor set, $V \setminus X^{\xi}$ is a $\overline{\sigma}$-trap and we can apply Lemma 6.8. We define

$$W_{\overline{\sigma}}^{\xi+1} := X^{\xi} \cup Z_{\overline{\sigma}}^{\xi}.$$

The set $W_{\overline{\sigma}}^{\xi+1}$ is a $\overline{\sigma}$-paradise and $w_{\overline{\sigma}}^{\xi+1}$, defined as in the proof of the Lemma 6.8, is a winning strategy on $W_{\overline{\sigma}}^{\xi+1}$, and it extends $w_{\overline{\sigma}}^{\xi}$.

Formalnie, zbiór wierzchołków gry parzystości można podzielić na 0-raj i 1-raj.

This completes the construction of the increasing sequence of $\overline{\sigma}$-paradises $W_{\overline{\sigma}}^{\xi}$. Let ζ be the closure ordinal of the union of the $W_{\overline{\sigma}}^{\xi}$'s, i.e., the smallest ordinal such that

$$W_{\overline{\sigma}}^{\zeta} = W_{\overline{\sigma}}^{\zeta+1}$$

Let $W_{\overline{\sigma}} := W_{\overline{\sigma}}^{\zeta}$. We claim that $W_{\sigma} = V \setminus W_{\overline{\sigma}}$ is a σ-paradise. Since $W_{\overline{\sigma}}$ is a $\overline{\sigma}$-paradise, this would complete the constructive proof of Theorem 6.6.

Formalnie, zbiór wierzchołków gry parzystości można podzielić na 0-raj i 1-raj.

We know $W_{\overline{\sigma}}^{\zeta} \subseteq X^{\zeta} = \mathrm{Attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W_{\overline{\sigma}}^{\zeta}) \subseteq W_{\overline{\sigma}}^{\zeta+1} = W_{\overline{\sigma}}^{\zeta}$, implying that $W_{\overline{\sigma}} = \mathrm{Attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W_{\overline{\sigma}})$. Thus, W_{σ} is a $\overline{\sigma}$-trap, as a complement of a $\overline{\sigma}$-attractor.

With $X_{\overline{\sigma}} := W_{\overline{\sigma}}$, $X_{\sigma} := W_{\sigma}$ we can apply Lemma 6.8 and obtain that $W_{\overline{\sigma}} \cup Z_{\overline{\sigma}}$ is a $\overline{\sigma}$-paradise. By construction of $W_{\overline{\sigma}}$, it follows $W_{\overline{\sigma}} = W_{\overline{\sigma}} \cup Z_{\overline{\sigma}}$. Since $Z_{\overline{\sigma}}$ and $W_{\overline{\sigma}}$ are disjoint, we obtain that $Z_{\overline{\sigma}} = \emptyset$. Finally, Lemma 6.9 implies that W_{σ} is a σ-paradise. $\square$

Pierwsze wyniki złożoności i algorytmiczne

Złożoność

Wins = {(G, v) | G jest skończoną grą parzystości, a v pozycją wygrywającą gracza 0} - problem określenia, czy gracz 0 wygra zainicjalizowaną grę.

Wins $\in$ NP $\cap$ co-NP

Wins $\in$ NP ∩ co-NP

Proof. We first show that WINS $\in$ NP. The following is a non-deterministic polynomial-time algorithm for deciding WINS: (i) Given $\mathcal{G}$ and v, guess a memoryless strategy w; (ii) check whether w is a memoryless winning strategy. We need to show that the second step can be carried out in polynomial time.

The strategy w can be represented by a subgraph $\mathcal{G}_w$ of $\mathcal{G}$. This subgraph coincides with $\mathcal{G}$ except that all edges (v', v'') where v' is a 0-vertex and $v'' \neq w(v')$ are eliminated, i.e., for a 0-vertex we only keep the outgoing edge referred to by w.

Wins $\in$ NP $\cap$ co-NP

Given $\mathcal{G}_w$, we need to check whether there exists a vertex v' reachable from v in $\mathcal{G}_w$ such that a) $\chi(v')$ is odd and b) v' lies on a cycle in $\mathcal{G}_w$ containing only vertices of priority less or equal $\chi(v')$. If, and only if, such a vertex v' does not exist, w is a winning strategy for Player 0. Checking this can be carried out in polynomial time. (We leave the proof as an exercise.) Thus, $\textsc{Wins} \in \mathrm{NP}$.

We now show $\textsc{Wins} \in$ co-NP. By Theorem 6.6, deciding $(\mathcal{G}, v) \notin \textsc{Wins}$ means deciding whether v is a winning position for Player 1. This can be achieved by the above algorithm if we require $\chi(v')$ to be even. (Alternatively, one can apply the above NP-algorithm to the dual game, i.e., the one where 0-vertices and 1-vertices are switched and the priorities are increased by 1). Consequently, $\textsc{Wins} \in$ co-NP. $\square$

Wyliczanie regionów zwycięstwa

Algorytm winning-regions zwraca regiony zwycięstwa i pozycyjne strategie wygrywające dla graczy 0 i 1.

winning-regions($\mathcal{G}$)
  $n := max\{\chi(v) \mid v \in V\}$
  If $n = 0$ then return $((V \setminus \mathrm{Attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset), w_0), (\mathrm{Attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset), \mathrm{attr}_1(\mathcal{G}, \emptyset)))$
    // w_0 is some memoryless strategy for Player 0

// otherwise
  $\sigma := n \bmod 2$

// compute $W_{\overline{\sigma}}$, $w_{\overline{\sigma}}$
  $(W_{\overline{\sigma}}, w_{\overline{\sigma}}) :=$win-opponent$(\mathcal{G}, \sigma, n)$

// compute W_σ, w_σ
  $W_\sigma := V \setminus W_{\overline{\sigma}}$
  $N := \{v \in W_\sigma \mid n \in \chi(v)\}$ // see (6.2)
  $Z := W_\sigma \setminus \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}[W_\sigma], N)$ // see (6.2)
  $((Z_0, z_0), (Z_1, z_1)) :=$winning-regions$(\mathcal{G}[Z])$

  $\forall v \in W_\sigma \cap V_\sigma$: // see (6.3)

$$w_\sigma(v) = \begin{cases} z_\sigma(v) & \text{if } v \in Z, \\ \mathrm{attr}_\sigma(\mathcal{G}[W_\sigma], N)(v) & \text{if } v \in \mathrm{Attr}_\sigma(\mathcal{G}[W_\sigma], N) \setminus N, \\ v' & \text{if } v \in N \text{ and } v' \in vE \cap W_\sigma \end{cases}$$

return $((W_0, w_0), (W_1, w_1))$

Fig. 6.3. A deterministic algorithm computing the winning regions of a parity game

```
win-opponent(𝒢, σ, n)

(W, w) := (∅, ∅)                                   // corresponds to W^0_σ̄ := ∅

Repeat
  (W', w') := (W, w)
  X := Attr_σ̄(𝒢, W)
  ∀v ∈ X ∩ V_σ̄:
```

$$x(v) = \begin{cases} w(v) & \text{if } v \in W, \\ \mathrm{attr}_{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W)(v) & \text{if } v \in X \setminus W. \end{cases}$$

```
  Y := V \ X;
  N := { v ∈ Y | n = χ(v) }                        // see (6.2)
  Z := Y \ Attr_σ(𝒢[Y], N)                         // see (6.2)
  ((Z_0, z_0), (Z_1, z_1)) =winning-regions(𝒢[Z])
  W := X ∪ Z_σ̄
  ∀v ∈ W:
```

$$w(v) = \begin{cases} x(v) & \text{if } v \in X, \\ z_{\overline{\sigma}}(v) & \text{if } v \in Z_{\overline{\sigma}}. \end{cases}$$

```
Until W' = W

return (W, w)
```

Fig. 6.4. A subroutine for winning-regions computing $W_{\overline{\sigma}}$ and $w_{\overline{\sigma}}$

Algorytm winning-regions najpierw ustala najwyższy priorytet n występujący w grze. Jeśli $n = 0$, to zwracane są σ-raje. W przeciwnym przypadku, dla $\sigma = n\%2$, $W\sigma'$ i $w_{\sigma'}$ są wyliczane algorytmem win-opponent. Na końcu wyliczane są $W\sigma$ i w_{σ}.

To analyze the runtime of winning-regions, let l be the number of vertices, m the number of edges, and n the maximum priority in $\mathcal{G}$. Note that, w.l.o.g., we may assume $n \leq l$. We also assume that every vertex has at least one in- or outgoing edge. Thus, $l \leq 2m$.

It is easy to see that all assignments, except for those involving recursive function calls, in winning-regions and win-opponent can be carried out in time $c \cdot m$ where c is some fixed (and big enough) constant: Recall from Exercise 2.6 that attractor sets can be computed in time $\mathcal{O}(l+m)$. If we now denote by $T(l,m,n)$ the worst-case runtime of winning-regions on all inputs $\mathcal{G}$, with $\mathcal{G}$ having the parameters l, m, and n as specified before, and similarly, by $S(l,m,n)$ the worst-case runtime of win-opponent, we obtain the following inequalities:

$$\begin{aligned}
T(l,m,0) &\leq c \cdot m \\
T(l,m,n+1) &\leq c \cdot m + S(l,m,n+1) \\
S(l,m,n+1) &\leq c \cdot m + (l+1) \cdot T(l,m,n)
\end{aligned}$$

Note that win-opponent is only invoked in case $n \geq 1$, thus we do not need to consider $S(l, m, 0)$. More importantly, the recursive call winning-regions($\mathcal{G}[Z]$) in winning-regions is not necessary, since the result of this call coincides with the result of winning-regions($\mathcal{G}[Z]$) in the last iteration step of win-opponent. Consequently, in the inequality for $T(l, m, n+1)$ we can omit the runtime for this call. Solving the above inequality system yields that $T(l, m, n) \in \mathcal{O}(m \cdot l^n)$. This proves the following corollary.

Corollary 6.11. *Computing the winning regions of finite parity games and the corresponding memoryless winning strategies can be carried out in time* $\mathcal{O}(m \cdot l^n)$.