1. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Приклади

У кожній науці існують базові поняття, які потрібно сприйняти більшою мірою інтуїтивно, ніж формально. В геометрії, наприклад, це поняття точки, прямої лінії та ін. Відштовхуючись від таких понять, за певними правилами вводять у розгляд нові поняття, формалізуючи їх достатньою мірою, нові об'єкти, зв'язки між ними. У такий спосіб будують моделі (формальні або неформальні), які ставлять у відповідність природним явищам або процесам.

Первинне поняття теорії ймовірностей – поняття **стохастичного** (ймовірнісного) **експерименту**.

Стохастичним називають експеримент, результати якого заздалегідь передбачити точно неможливо.

Наприклад, при підкиданні монети навряд чи може хто-небудь передбачити, якою стороною вона впаде на горизонтальну площину.

Прикладом стохастичного експерименту є також розіграш лотереї. До розіграшу не можна напевно передбачити, який виграш випаде на даний лотерейний квиток і чи випаде взагалі.

Поняття стохастичного експерименту широке. До таких експериментів можна віднести і явища, які не залежать від людської діяльності. Наприклад, певна система об'єктивних умов може спричинити або не спричинити випадання дощу на якійсь певній території.

У подальшому нас цікавитимуть лише результати такого стохастичного експерименту. Ці результати можуть відрізнятися між собою "структурно". Розглянемо експеримент, який полягає в підкиданні грального кубика, на гранях якого написано числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 (на кожній грані інше число). В результаті експерименту кубик падає на гладку горизонтальну площину і на верхній грані можна прочитати число. Наведемо кілька результатів експерименту:

а) на верхній грані – число 3;
б) на верхній грані – число 1;
в) на верхній грані – парне число;

г) на верхній грані – число більше, ніж 4.

Результати а) та б) є такими, що не можуть бути описані за допомогою простіших результатів. Від них “структурно” відрізняються результати в) та г). Результат в) можна описати за допомогою простіших результатів: на верхній грані або число 2, або число 4, або число 6. Результат г) можна описати за допомогою двох простіших: на верхній грані число 5 або число 6. Отже, результати в) і г) можна розкласти на простіші.

Усі результати стохастичного експерименту, які неможливо подати за допомогою простіших результатів, назвемо **елементарними**.

Множину **всіх** елементарних подій, пов’язаних зі стохастичним експериментом, називатимемо **простором елементарних подій**.

Простір елементарних подій позначатимемо Ω, а його елементи (елементарні події) – або малими буквами ω, або малими буквами ω з певним індексом – ω_j.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1.1. Стохастичний експеримент полягає в підкиданні грального кубика. Тоді $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тут $\omega_j = j$ означає, що на верхній грані кубика – число j, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Приклад 1.2. Стохастичний експеримент полягає у двократному підкиданні монети.

Після підкидання на видимій стороні монети може появитися герб (елементарна подія – Г) або число (елементарна подія – Ч). Після двократного підкидання монети простір елементарних подій матиме вигляд

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\text{ГГ}, \text{ГЧ}, \text{ЧГ}, \text{ЧЧ}\},$$

де, наприклад, $\omega_2 = \text{ГЧ}$ означає, що при першому підкиданні на видимій стороні монети виявився герб, а при другому підкиданні – число.

Приклад 1.3. Стохастичний експеримент полягає у підкиданні монети доти, поки на її видимій стороні не появиться герб. У цьому випадку простір елементарних подій

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots\} = \{\text{Г}, \text{ЧГ}, \text{ЧЧГ}, \dots, \text{ЧЧЧ} \dots \text{ЧГ}, \dots\},$$

де, наприклад, ω_3 означає, що герб появився після третього підкидання.

Приклад 1.4. Стохастичний експеримент – стрільба по мішені. Результат експерименту – попадання в конкретну точку мішені. Крім цього, введемо ще одну елементарну подію, яка відповідатиме випадку, коли в мішень не попали, тобто промах. Отже, простір елементарних подій Ω містить усі точки мішені й ще одну точку, яка асоціюється з промахом.

Уведені в розгляд поняття стохастичного експерименту та простору Ω – елементарних подій, пов'язаних з цим експериментом, базові в теорії ймовірностей. Зазначимо, що простір елементарних подій може містити скінченну або нескінченну кількість елементарних подій.

2. Випадкова подія. Операції з подіями. Сумісні і несумісні події

При проведенні стохастичного експерименту, крім елементарних, можуть відбуватися й інші події, які називаються "складеними подіями". Вони можуть бути описані за допомогою певних елементарних подій. Наприклад, при підкиданні грального кубика, як ми бачили, простором елементарних подій є множина

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

і подія "на верхній грані появилось число, яке ділиться без остачі на 3" легко описується за допомогою двох елементарних подій: ω_3="на верхній грані появилось число 3" та ω_6= "на верхній грані появилось число 6".

Елементарні події ω_3та ω_6 називають або елементарними подіями, які спричиняють подію "на верхній грані появилось число, яке ділиться без остачі на 3", або елементарними подіями, які викликають згадану подію, або елементарними подіями, які сприяють вказаній події.

Випадкові події ми позначатимемо великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, D, \ldots$ без індексів або $A_1, B_5, C_i, D_j, \ldots$ з індексами.

Ми переконалися також, що елементарні події можна зобразити одноточковими підмножинами множини Ω, а більш складні події – підмножинами елементарних подій множини Ω, сприятливих їм. У наведеному вище прикладі події

$$A = \{\text{на верхній грані появилося число, яке без остачі ділиться на 3}\}$$

потрібно поставити у відповідність підмножину $\{\omega_3, \omega_6\} \subset \Omega$. У стохастичному експерименті: підкидання монети до першого випадання герба, випадковій події

$$B = \{\text{Герб випав не раніше другого і не пізніше четвертого підкидань}\}$$

треба ставити у відповідність підмножину $\{\text{ЧГ}, \text{ЧЧГ}, \text{ЧЧЧГ}\} \subset \Omega$, де

$$\Omega = \{\text{Г}, \text{ЧГ}, \text{ЧЧГ}, \ldots, \text{ЧЧ} \ldots \text{ЧГ}, \ldots\}.$$

Нижче випадкову подію ми формально ототожнюватимемо з підмножиною елементарних подій, які сприяють цій події (підмножиною сприятливих елементарних подій). Тепер можемо дати формальне означення випадкової події.

Випадковою подією в стохастичному експерименті називається підмножина сприятливих їй елементарних подій простору Ω, пов’язаного з цим стохастичним експериментом.

Подія A **відбувається**, якщо відбувається одна з елементарних подій відповідної підмножини.

Зауважимо, що простір елементарних подій – підмножина множини Ω. Відповідна подія відбувається за кожної реалізації стохастичного експерименту, оскільки Ω містить усі елементарні події. Тому цю подію називають **достовірною** (іноді **вірогідною**) подією. Для такої події кожна елементарна подія сприятлива.

Підмножиною кожної множини вважають порожню множину. Порожня підмножина множини Ω не містить жодної елементарної події. Тому відповідна подія називається **неможливою**. Для неї немає сприятливих елементарних подій.

На відміну від інших подій для позначення достовірної і неможливої подій, як правило, використовуються позначення Ω і $\emptyset$ відповідно.

Розглянемо відношення між подіями, операції з подіями та відповідними підмножинами простору елементарних подій.

Означення 2.1. Кажуть, що подія B випливає з події A і записується $A \subset B$, якщо множина елементарних подій, які сприяють події A, є підмножиною елементарних подій, які сприяють події B.

Іншими словами, якщо подія A відбувається, то обов'язково відбувається подія B, тобто подія A – окремий випадок події B.

Зрозуміло, що для будь-якої події A та достовірної події Ω правильне відношення $A \subset \Omega$. Правильним потрібно вважати й відношення $\emptyset \subset \Omega$.

Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то події A і B відбуваються або не відбуваються одночасно. Цей факт ми позначатимемо відношенням $A = B$.

Означення 2.2. Сумою двох подій A та B називають подію C, множина сприятливих елементарних подій якої є теоретико-множинне об'єднання відповідних множин для подій A та B, що записується $C = A \cup B$ або $C = A + B$.

Зрозуміло, що подія C відбувається, якщо відбувається хоча б одна з подій A або B. Вона не відбувається, якщо не відбувається ні A, ні B.

Правильні відношення:

$$A \cup B = B \cup A, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cup A = A, \emptyset \cup A = A, \Omega \cup A = \Omega,$$

які випливають з відповідних відношень між множинами сприятливих елементарних подій.

Означення 2.3. Добутком двох подій A та B називають подію C, множина сприятливих елементарних подій якої є теоретико-множинним перерізом відповідних множин для подій A та B і записується $C = A \cap B$ або $C = AB$.

Відповідно до означення перерізу множин, подія $C = A \cap B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються і A, і B.

Легко зрозуміти, що

$$A \cap B = B \cap A, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), A \cap A = A,$$
$$\emptyset \cap A = \emptyset, \Omega \cap A = A.$$

Аналіз теоретико-множинних операцій об'єднання та перерізу множин, розподільчі закони перерізу відносно об'єднання множин і об'єднання множин відносно перерізу дозволяють записати такі відношення між подіями A, B, C:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Означення 2.4. Протилежною подією $\bar{A}$ до події A називається подія, множина сприятливих елементарних подій якої є доповненням до Ω множини сприятливих елементарних подій для події A.

Подія $\bar{A}$ відбувається тоді і лише тоді, коли A не відбувається.

Зрозумілі такі відношення:

$$\overline{\emptyset} = \Omega, \overline{\Omega} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A, A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Легко перевірити також, що

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Доведення. Покажемо, наприклад, справедливість відношення $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Нехай відбувається подія $\overline{A \cup B}$. З означення 2.4 випливає, що подія $A \cup B$ не відбувається, а тому не відбуваються ні A, ні B. Отже, відбувається і $\bar{A}$, і $\bar{B}$. Тобто відбувається $\bar{A} \cap \bar{B}$. Ми одержали $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

Нехай тепер відбувається подія $\bar{A} \cap \bar{B}$. Це означає, що відбуваються події і $\bar{A}$, і $\bar{B}$. Тому не відбуваються ні A, ні B, як не відбувається $A \cup B$. Отже, відбувається протилежна подія $\overline{A \cup B}$. Маємо $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Одержані відношення дозволяють стверджувати, що $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Введені вище операції дають можливість із простіших подій будувати більш складні.

Іноді розглядають ще деякі операції.

Зокрема, різницею двох подій A і B називається подія

$$C = A \backslash B = A \cap \bar{B}.$$

Симетричною різницею двох подій A і B називається подія

$$C = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

Зазначимо, що $\bar{A} = \Omega \backslash A$, а симетрична різниця двох подій A і B – це подія, яка полягає в тому, що результатом стохастичного експерименту буде тільки одна з подій: або A, або B.

Дві події А та В називають ***сумісними***, якщо поява одної з них не виключає появи другої. Наприклад, підкидають два гральні кубики. Подія А – випадання 2 очок на першому кубику, подія В – випадання 4 очок на другому. А та В – події сумісні.

Дві події А та В називають ***несумісними***, якщо поява однієї з них виключає появу другої(якщо $A \cap B = \emptyset$.) Наприклад, стрілець робить постріл по мішені. Подія А – стрілець вибив 5 очок, подія В – стрілець вибив 8 очок. Події А та В – несумісні.

3. Деякі класи випадкових подій(спадковий клас, алгебра, σ -алгебра)

Нехай множина Ω – простір елементарних подій у деякому стохастичному експерименті. Будь-якій підмножині множини Ω ставиться у відповідність випадкова подія. Якщо множина Ω скінченна (містить скінченне число n елементарних подій), то кількість усіх її підмножин, враховуючи й порожню, дорівнює 2^n. Отже, в такому експерименті можна розглядати 2^n випадкових подій, якщо врахувати й неможливу подію $\emptyset$.

Означення 3.1. Клас усіх підмножин множини Ω називається **спадковим класом множин** множини Ω.

Спадковий клас множин простору елементарних подій Ω породжує **спадковий клас подій**, які можуть відбуватися (або не відбуватися) у стохастичному експерименті.

Спадковий клас подій – це найширший клас подій, які можна пов'язати зі стохастичним експериментом.

Досить широкі, але вужчі, ніж спадковий клас, деякі інші класи подій, достатні для побудови теорії ймовірностей.

Означення 3.2. Клас $\mathfrak{A}$ подій називається **алгеброю подій**, якщо

$\mathcal{A}1)$ $\Omega \in \mathfrak{A}$;
$\mathcal{A}2)$ якщо $A \in \mathfrak{A}$, то $\bar{A} \in \mathfrak{A}$;
$\mathcal{A}3)$ якщо $A \in \mathfrak{A}$ і $B \in \mathfrak{A}$, то $A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Алгебра – це не порожній клас подій, що забезпечує умова $\mathcal{A}1)$. Умови $\mathcal{A}2)$ і $\mathcal{A}3)$ вказують, що алгебра містить суми та добутки скінченної кількості подій, а також різниці подій.

Найпростіша алгебра подій – алгебра $\mathfrak{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Якщо A – випадкова подія у стохастичному експерименті з простором елементарних подій Ω, то клас

$$\mathfrak{A}_2 = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$$

є алгеброю подій.

Спадковий клас подій у стохастичному експерименті – найширша алгебра подій, пов'язаних із цим експериментом.

Якщо спадковий клас подій містить нескінченну кількість подій, то природно розглядати події, які є сумою або добутком нескінченної кількості подій. Такі події вже можуть не бути елементами алгебри подій.

Означення 3.3. Клас $\mathfrak{F}$ подій називається σ-алгеброю (сигма-алгеброю) подій у разі виконання умов:

$\mathfrak{F}$1) $\Omega \in \mathfrak{F}$;
$\mathfrak{F}$2) якщо $A \in \mathfrak{F}$, то $\bar{A} \in \mathfrak{F}$;
$\mathfrak{F}$3) якщо $A_j \in \mathfrak{F},\ j = 1,2, \dots , n, \dots$,то

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{F}.$$

Зрозуміло, що σ-алгебра подій – алгебра подій, але не кожна алгебра подій є σ-алгеброю.

Можна довести, що алгебра $\mathfrak{A}$ подій є σ-алгеброю, якщо справджуються такі умови:

1) для будь-якої послідовності подій $\{A_j\}$, такої, що
$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_j \subset A_{j+1} \subset \cdots,$$

з умови $A_j \in \mathfrak{A}$ випливає

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A} ;$$

2) для будь-якої послідовності подій $\{A_j\}$, такої, що

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \cdots,$$
з умови $A_j \in \mathfrak{A}$, випливає

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}.$$

Якщо розглядається стохастичний експеримент із простором елементарних подій Ω і σ-алгебра $\mathfrak{F}$ подій у цьому стохастичному експерименті, то кажуть, що побудовано **ймовірнісну модель** $\{\Omega,\mathfrak{F}\}$. Елементи σ-алгебри $\mathfrak{F}$ і тільки вони називаються спостережуваними подіями в цій імовірнісній моделі. Інші елементи, які не належать $\mathfrak{F}$, в даній моделі не розглядаються. Вибір σ-алгебри залежить від природи простору елементарних подій Ω (тобто природи стохастичного експерименту) і від задачі, яка розв'язується (проблеми, яка розглядається).

4. Частота випадкової події. Властивості частоти

У першому параграфі ми відмічали, що в теорії ймовірностей до стохастичного експерименту ставиться вимога масовості, тобто можливості відтворення його за однакових умов. Нехай такий експеримент проведено n разів і A подія, за якою велось спостереження в кожному з експериментів. Позначимо $k_n(A)$ кількість експериментів, в яких подія A відбулася.

Означення 4.1. Відношення

$$\nu_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

називають **частотою** події A в серії з n експериментів.

Оскільки для будь-якої події A $0 \le k_n(A) \le n$, то $0 \le \nu_n(A) \le 1$.

Достовірна подія Ω відбувається в кожному експерименті, тому $\nu_n(\Omega) = 1$. Цілком зрозуміло, що для неможливої події $k_n(\emptyset) = 0$, а значить $\nu_n(\emptyset) = 0$.

Якщо події A і B несумісні ($A \cap B = \emptyset$), то $k_n(A \cup B) = k_n(A) + k_n(B)$. Для таких подій

$$\nu_n(A \cup B) = \frac{k_n(A \cup B)}{n} = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

Інтуїтивно зрозуміло, що частота події числова характеристика, за допомогою якої можна було б кількісно оцінити прогноз про те, чи відбудеться подія в стохастичному експерименті. Однак ця характеристика може бути обчислена лише після проведення серії випробувань (експериментів). Крім того, вона напевно зміниться, якщо провести іншу серію такої ж кількості випробувань або якщо змінити кількість випробувань. Тому ця характеристика незручна, бо на її основі трудно побудувати логічно досконалу теорію.

Теорія ймовірностей вивчає лише такі події, частота яких має властивість стійкості. Ця властивість полягає в тому, що $\nu_n(A)$ за досить великих значень числа n мало відрізнятиметься від деякої сталої. Це можна трактувати як існування границі частоти за n, що прямує до нескінченності.

В навчальній літературі наведена велика кількість прикладів проведення стохастичних експериментів і обчислення частоти подій. Наприклад, у наведеній нижче таблиці подано результати трьох серій стохастичних експериментів, пов'язаних з підкиданням монети.

Експериментатор	Кількість підкидань	Кількість випадань герба	Частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0.5080
К. Пірсон	12000	6019	0.5016
К. Пірсон	24000	12012	0.5005

Як видно з таблиці, частота появи герба в наведених серіях мало відрізняється від 0,5.

Якщо за великих значень n частота $\nu_n(A)$ події A мало відрізняється від числа $P(A)$, то кажуть, що подія A **стохастично стійка**, а число $P(A)$, є її **ймовірністю**.

Враховуючи властивості частоти, приходимо до висновку, що число $P(A)$, мало б задовольняти вимоги:

1) $P(\Omega) = 1$;
2) $0 \leq P(A) \leq 1$;
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ для несумісних A та B.

Австрійський математик Р. Мізес дав означення ймовірності події A як границі послідовності частоти

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n\,(A).$$

Побудова математичної теорії на основі такого визначення, як ми вже зауважували, пов'язана зі значними труднощами. Однак ми й надалі дотримуватимемося думки про те, що ймовірність – це число, яке близьке до частоти і має властивості частоти.

Щоб перейти до формального визначення ймовірності, потрібно аксіоматизувати властивості ймовірності, намагаючись зберегти природничо-науковий зміст поняття ймовірності.

5. Класичне означення ймовірності та його узагальнення. Приклади

Побудуємо найпростішу, так звану класичну ймовірнісну модель. Нехай простір елементарних подій Ω скінченний, тобто містить скінченну кількість елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Вважатимемо також, що всі елементарні події ω_i, $i = \overline{1, n}$ рівноправні (рівноможливі). Рівноможливість не можна означити формально. Це поняття сприймається інтуїтивно й означає, що немає підстав вважати одну з елементарних подій більш імовірною, ніж будь-яку іншу.

Наприклад, якщо підкидати “правильну” не погнуту монету, то не можна надати переваги випаданню герба або числа.

Якщо експеримент полягає у підкиданні геометрично правильного грального кубика, виготовленого з однорідного матеріалу, то всі шість елементарних результатів потрібно вважати рівноможливими.

Імовірнісна модель цього стохастичного експерименту – пара $\{\Omega, \mathfrak{F}\}$, де $\mathfrak{F}$ – спадковий клас (σ-алгебра) подій. Знаємо, що спадковий клас (σ-алгебра) в даному випадку містить 2^n різних подій. Позначимо $P(A)$ ймовірність події A і дамо **класичне визначення** ймовірності події $A \subset \mathfrak{F}$:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{5.1}$$

де $m = |A|$ – кількість елементарних подій, які сприяють появі події A, а n – кількість елементарних подій простору Ω.

Наведемо деякі приклади використання формули (5.1).

Приклад 5.1. Підкидається правильний гральний кубик. Яка ймовірність події $A -$ {на верхній грані кубика випаде число, яке при діленні на чотири дає остачу, що дорівнює 1}?

Розв’язання. Простір Ω елементарних подій має вигляд $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ і містить шість елементарних подій, тобто $n = 6$. Оскільки кубик правильний, то ці події рівноможливі. Події A сприяють елементарні події, які складають множину $A = \{1,\ 5\}$. Отже, $m = 2$ (кількість елементарних подій, які сприяють появі події A). Тому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 5.2. На залік з теорії ймовірностей винесено 30 задач, з яких випадковим способом студенту запропоновано дві. Студент вміє розв’язувати 25 задач, а залік вважається складеним, якщо правильно будуть розв’язані обидві одержані ним задачі. Знайти ймовірність події $A =${студент склав залік}.

Розв'язання. Простір Ω елементарних подій складається з усіх можливих наборів по дві задачі з відомих 30 задач. Таких наборів

$$n = C_{30}^{2} = \frac{30!}{2!\,28!} = 29 \cdot 15 = 435.$$

.

Слова "випадковим способом запропоновано дві задачі" означають, що всі варіанти рівноможливі. Сприятливими для події A вважаються лише ті варіанти, коли студент одержує дві з двадцяти п'яти задач, які він вміє розв'язувати. Таких варіантів

$$m = C_{25}^{2} = \frac{25!}{2!\,23!} = 12 \cdot 25 = 300.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{300}{435} = \frac{60}{87} \approx 0{,}69.$$

Обчислення ймовірності $P(A)$ за формулою (5.1) у рамках класичної моделі зводиться до визначення загальної кількості n елементарних подій та кількості m сприятливих для події A елементарних подій. У переважній більшості задач ці числа n і m обчислюються за допомогою відомих формул та законів комбінаторики, розділу курсу "Дискретна математика".

Розглянемо тепер іншу модель. Нехай стохастичний експеримент має зліченну множину різних елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$, а σ-алгебра $\mathfrak{F}$, як і раніше, спадковий клас подій. Тепер цей клас містить нескінченну кількість подій. Крім цього, для деяких спостережуваних подій кількість сприятливих для них подій може також бути нескінченною. Отже, використати формулу (5.1) неможливо. Тому пропонуємо наступний підхід для обчислення ймовірності події $A \subset \mathfrak{F}$.

Кожній елементарній події ω_i ставимо у відповідність число p_i, таке, що:

1) $p_i \geq 0$ для всіх i, $i = 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$;
2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Тоді **ймовірністю $P(A)$ події A називають** число

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i, \tag{5.2}$$

тобто ймовірністю події A називають суму таких p_i, де відповідні ω_i сприятливі для події A.

Теорія ймовірностей не вчить тому, як визначати числа p_i – ймовірності елементарних подій. Вибір цих чисел значною мірою визначається досвідом та інтуїцією дослідника й часто ґрунтується на уявленні про p_i як частоту елементарної події ω_i. Теорія ймовірностей відповідає тільки на питання, як обчислювати ймовірності "складених" подій, знаючи ймовірності елементарних подій.

Приклад 5.3. Нехай правильна монета підкидається доти, поки не випаде герб. Яка ймовірність події A=**{**герб випаде після третього підкидання}?

Розв'язання. В цьому експерименті теоретично потрібно припустити, що герб може й ніколи не випасти. Отже, Ω містить зліченну кількість елементарних подій

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}.$$

Кожна елементарна подія ω_i має вигляд
$\omega_i = \text{ЧЧ}\ldots\text{ЧГ}$,
де буква Ч означає, що при одному підкиданні монети на верхній її стороні появиться число (номінальна вартість монети), а буква Г – появиться герб, причому кількість букв Ч дорівнює $i-1$, $i = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$. Тому

$$\Omega = \{\text{Г}, \text{ЧГ}, \text{ЧЧГ}, \ldots, \text{ЧЧ}\ldots\text{ЧГ}, \ldots\}.$$

Оскільки монета правильна, то потрібно покласти у відповідність елементарній події $\omega_i = \underbrace{\text{ЧЧ}\ldots\text{Ч}}\text{Г}$ число

$$p_i = \frac{1}{2^i}.$$

Маємо

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Події A відповідає множина елементарних подій

$$A = \{\text{ЧЧЧГ}, \text{ЧЧЧЧГ}, \ldots\}.$$

Тому, за формулою (5.2), одержуємо

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots = \sum_{i=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{2^4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{16} \, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}.$$

Викладений вище підхід (формулу (5.2)) можна використати й у випадку скінченної кількості рівноможливих елементарних подій. Звичайно, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, бо події рівноможливі.
Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = np = 1.$$

Звідси

$$p = p_i = \frac{1}{n}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Якщо для події A сприятливі рівноможливі елементарні події $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}$, тобто $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}$, то, використовуючи формулу (5.2),

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m} = m \cdot p = \frac{m}{n}.$$

Ми одержали формулу (5.1).

Формула (5.2) може бути використана й у випадку скінченного простору нерівноможливих елементарних подій.

Приклад 5.4 Стохастичний експеримент полягає в підкиданні геометрично правильного грального кубика. Нехай гральний кубик виготовлено з неоднорідного матеріалу (нечесна гра) і його центр мас (ваги) зміщено в напрямку грані, на якій написана цифра 1. Отже, на верхній грані появлятиметься цифра 6 з більшою частотою, ніж цифра 1. Нехай інші грані (з цифрами 2, 3, 4 і 5) рівноправні.

Тоді

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Припустимо, що

$$p_1 = \frac{1}{12},\ p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{6}, p_6 = \frac{1}{4}.$$

Маємо

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.$$

Якщо в такому стохастичному експерименті знайдемо ймовірність події A з прикладу 5.1, то одержимо

$$P(A) = p_1 + p_5 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Аналіз наведених у даному параграфі означень імовірності (5.1) або (5.2) дає можливість зробити висновок, що так визначена ймовірність має вказані в 1.4 властивості частоти:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, якщо $A \cap B = \emptyset$.

Легко також встановити, що:
4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
5) $P(\emptyset) = 0$;
6) якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$;
7) для будь-яких спостережуваних в експерименті подій

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ми побачимо, що такі властивості правильні й у більш загальних моделях.

6. Геометрична ймовірність. Приклади

Простір Ω елементарних подій, породжений деяким стохастичним експериментом, може бути й незліченним. Як і раніше, вважаємо, що всі елементарні події "однаково можливі". Тепер уже неможливо приписати однакові ймовірності кожній з елементарних подій. Імовірності можна приписати лише деяким "складеним подіям" з класу подій, які відповідають так званим вимірним підмножинам множини Ω. Як правило $\Omega \subset R^n$. Під "вимірністю" ми розумітимемо можливість обчислити довжину інтервалу або відрізка ($n = 1$), або площу ($n = 2$), або об'єм ($n = 3$) відповідної події A множини сприятливих елементарних подій. Такий клас "вимірних" множин повинен утворювати σ-алгебру підмножин множини Ω. Якщо такий клас "вимірних" множин виділено, то кожній з цих множин, а отже, і відповідних подій A ставиться у відповідність "міра" $\mu(A)$.

Означення 6.1 (Геометрична ймовірність). Імовірністю події A називається число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{6.1}$$

Приклад 6.1. Відрізок довжиною l поділили на три частини, вибираючи точки поділу навмання. Яка ймовірність того, що з трьох одержаних відрізків можна побудувати трикутник **(подія $\boldsymbol{C}$)**?

Розв'язання. Позначимо довжини одержаних двох частин x і y. Тоді довжина третьої частини дорівнює $l - x - y$.

Зрозуміло також, що $0 < x < l,\ 0 < y < l,\ 0 < x + y < l.$ Результат стохастичного експерименту повністю визначається двома числами x і y, які задовольняють перераховані вище умови. Отже, простір елементарних подій – підмножина з R^2, яку можна формально визначити так:

$$\Omega = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < l, x + y < l\}.$$

Такі вимоги задовольняють внутрішні точки трикутника Δ*OAB* на рис. 6.1.

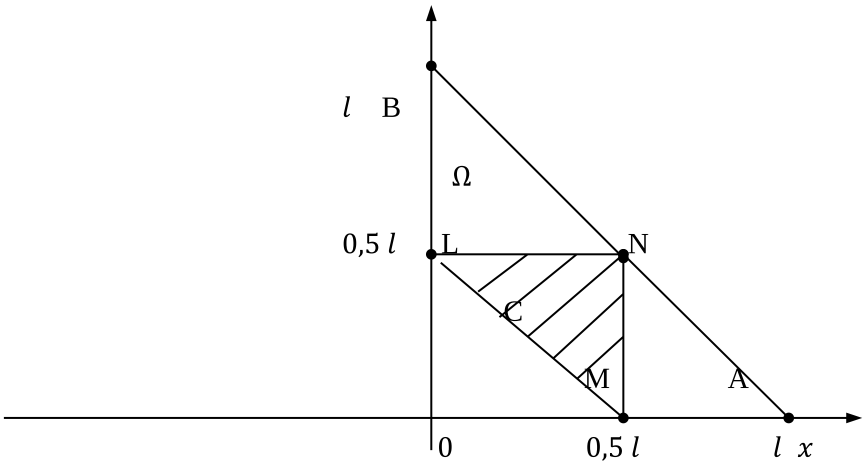


Рис. 6.1

Оскільки $\Omega \subset R^2$, то як міру використовуватимемо площу

$$\mu(\Omega) = S_{\Delta \mathrm{OAB}} = \frac{1}{2} l^2.$$

З одержаних частин можна побудувати трикутник лише тоді, коли довжина кожної з них менша від суми довжин двох інших, тобто

$$\begin{cases} x < l - (x + y) + y \\ y < x + l - (x + y) \\ l - (x + y) < x + y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < \dfrac{l}{2}, \\ y < \dfrac{l}{2}, \\ x + y > \dfrac{l}{2}. \end{cases}$$

Позначимо

$$G = \left\{(x, y)\colon\ x < \frac{l}{2}, y < \frac{l}{2}, x + y > \frac{l}{2}\right\}.$$

Тоді подія C визначається множиною точок $C = \{(x, y)\colon (x, y) \in \Omega \cap G)\}$. Одержані умови справджуються тільки у внутрішніх точках трикутника ΔMNL (див. рис. 6.1):

$$\mu(G) = S_{\Delta MNL} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} l^2.$$

Використовуючи формулу (6.1), одержуємо

$$P(C) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 6.2. Коефіцієнти p і q квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ вибираються навмання з відрізка [0, a]. Знайти ймовірність того, що корені рівняння дійсні (подія D).

Розв'язання. Простір Ω елементарних подій – підмножина точок (p, q) з простору $R^2 \supset \Omega = \{(p, q)\colon 0 \le p \le a,$ $0 \le q \le a\}$. Це точки квадрата OABC на рис. 6.2.

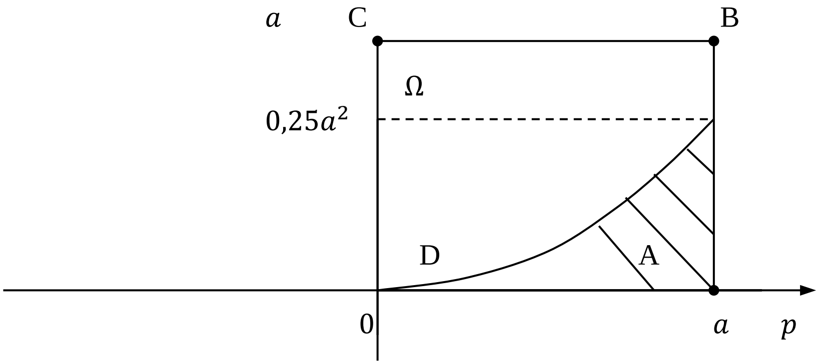


Рис. 6.2

Корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ дійсні, якщо справджується умова $p^2 - 4q \geq 0$, тобто

$$q \leq \frac{1}{4}p^2.$$

Якщо позначимо

$$G = \left\{(p, q):\ q \leq \frac{1}{4}p^2\right\},$$

то $D = \{(p, q): (p, q) \in \Omega \cap G\}$. Ця подія відповідає заштрихованій на рис. 6.2 множині точок під параболою

$$q \leq \frac{1}{4}p^2,$$

якщо $a \leq 4$.

У цьому випадку $\mu(\Omega) = a^2$,

$$\mu(\mathrm{D}) = \int_0^a \frac{1}{4}p^2 dp = \frac{1}{12}a^3,$$

$$P(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)} = \frac{a}{12}.$$

Якщо ж $a > 4$, то події D відповідає множина, заштрихована на рис. 6.3.

Як і раніше, $\mu(\Omega) = a^2$. Однак

$$\mu(\mathrm{D}) = \int_0^{2\sqrt{a}} \frac{1}{4}p^2 dp + a\left(a - 2\sqrt{a}\right) = \frac{2}{3}a\sqrt{a} + a^2 -$$

$$-2a\sqrt{a} = a^2 - \frac{4}{3}a\sqrt{a}.$$

Тому в цьому випадку

$$P(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)} = 1 - \frac{4}{3\sqrt{a}} = 1 - \frac{4\sqrt{a}}{3a}.$$

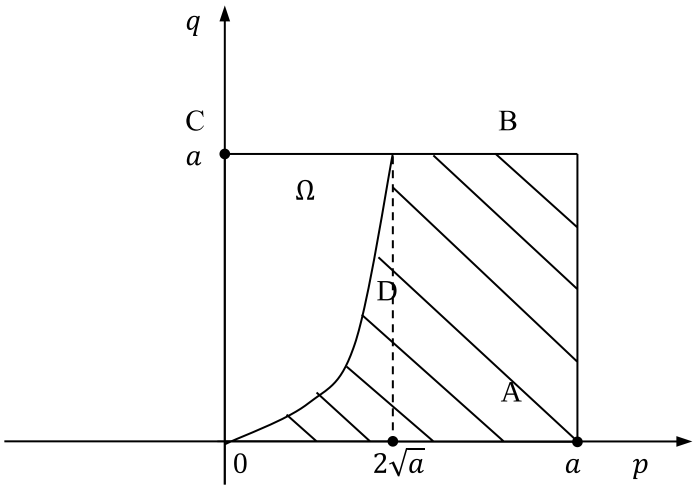


Рис. 6.3

Враховуючи обидва випадки, можемо записати

$$P(D)=\begin{cases}\dfrac{a}{12}, & \textit{якщо } a\le 4,\\ 1-\dfrac{4\sqrt{a}}{3a}, & \textit{якщо } a>4.\end{cases}$$

Неважко зрозуміти, що за такого визначення геометричної ймовірності з використанням запропонованих “мір” зазначені в попередніх параграфах властивості ймовірності (класичне визначення та його узагальнення) зберігаються.

7. Аксіоми теорії ймовірностей. Імовірнісний простір. Властивості ймовірності

Згідно із сучасними вимогами щодо математичної строгості найдоцільніше будувати теорію ймовірностей на основі аксіом. Така система аксіом, як ми вже зазначали, запропонована А.М. Колмогоровим. Відправною точкою цієї аксіоматики є поняття простору елементарних подій Ω, породжених стохастичним експериментом. Вважається, що в стохастичному експерименті виділена система подій (система підмножин множини Ω), яка є σ-алгеброю $\mathfrak{F}$ подій. Це означає, що аксіоматично виділяється клас подій $\mathfrak{F}$, який є σ-алгеброю:

$\mathfrak{F}$1) $\Omega \in \mathfrak{F}$;
$\mathfrak{F}$2) якщо $A \in \mathfrak{F}$, то $\bar{A} \in \mathfrak{F}$;
$\mathfrak{F}$3) якщо $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}.$$

Множини із $\mathfrak{F}$, і тільки вони, називаються подіями, спостережуваними в стохастичному експерименті.

Аксіоми $\mathfrak{F}1$, $\mathfrak{F}2$, $\mathfrak{F}3$ визначають клас подій, які розглядають у стохастичному експерименті. Аксіома $\mathfrak{F}1$ вказує, що клас подій непорожній, а аксіоми $\mathfrak{F}2$ та $\mathfrak{F}3$ підкреслюють, що цей клас багатий, тобто він містить багато різноманітних подій, пов'язаних зі стохастичним експериментом. Окрім події A, за властивістю $\mathfrak{F}2$, до $\mathfrak{F}$ входить і $\bar{A}$. Далі, як випливає з означень операцій над подіями, законів алгебри Буля та властивостей $\mathfrak{F}2$ і $\mathfrak{F}3$, до класу $\mathfrak{F}$ спостережуваних випадкових подій входять скінченні та нескінченні суми та добутки подій з $\mathfrak{F}$, різниці подій та ін.

Наступна група з трьох аксіом гарантує існування для кожної події $A \subset \mathfrak{F}$ числа $P(A)$, яке задовольняє умови:

P1) $P(A) \geq 0$ для будь-якої події $A \in \mathfrak{F}$;

P2) $P(\Omega) = 1$;

P3) якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – послідовність попарно несумісних подій ($A_i \cap A_j = \emptyset,\ i, j = 1, 2, 3, \ldots, i \neq j$)), то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup\ \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Число $P(A)$ називається ймовірністю випадкової події A із σ-алгебри подій $\mathfrak{F}$.

Твердження $\mathfrak{F}1$, $\mathfrak{F}2$, $\mathfrak{F}3$, P1, P2, P3 й складають систему аксіом теорії ймовірностей, запропоновану А.М. Колмогоровим.

Отже, формально при побудові теорії ймовірностей потрібно вважати, що разом зі стохастичним експериментом (простором елементарних подій Ω) уже задана σ-алгебра випадкових подій $\mathfrak{F}$ і для кожної події $A \subset \mathfrak{F}$ визначена ймовірність $P(A)$.

Однак при розгляді конкретних стохастичних експериментів треба будувати Ω, $\mathfrak{F}$ та пропонувати, згідно з природничо-науковим змістом випадкових подій, функцію $P(A)$, яка задовольняє вимоги аксіом P1, P2, P3.

Якщо побудовано Ω, $\mathfrak{F}$ і $P(A)$, то кажуть, що побудовано **ймовірнісний простір** $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Аксіоми А.М. Колмогорова гарантують наявність уже побудованого ймовірнісного простору.

Доведено, що аксіому Р3 можна замінити еквівалентною їй **аксіомою неперервності:** якщо послідовність подій $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ така, що $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ і $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \emptyset$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Ми не доводитимемо цей відомий факт, але використаємо його в подальшому.

На основі аксіом можна одержати певні властивості ймовірності.

Властивість 7.1. Імовірність події $\bar{A}$, протилежної до події A, можна обчислити за формулою

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{7.1}$$

Доведення. Дійсно, $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ і за властивостями Р3 та Р2 одержуємо

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1.$$

Звідси $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Наслідок 7.1. $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Властивість 7.2. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ і $A \subset B$, то

$$P(B\backslash A) = P(B) - P(A). \tag{7.2}$$

Доведення. Оскільки $A \subset B$, то $B = A \cup (B\backslash A)$, а також $A \cap (B\backslash A) = \emptyset$. Тоді за аксіомою Р3

$$P(B) = P(A) + P(B\backslash A).$$

Звідси випливає (7.2).

Наслідок 7.2. Якщо A, B – події і $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Доведення випливає зі співвідношення (7.2), якщо застосувати аксіому Р1.

Наслідок 7.3. Для будь-якої події $A \in \mathfrak{F}$

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{7.3}$$

Доведення. Для довільної події маємо $A \subset \Omega$. Тому за наслідком 7.2 $P(A) \leq P(\Omega) = 1$. Використовуючи аксіому Р1, остаточно одержуємо нерівності (7.3).

Властивість 7.3. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{7.4}$$

Доведення. Очевидно, що

$$(A \cup B) = (A \backslash (A \cap B)) \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Враховуючи те, що доданки в правій частині попарно несумісні і те, що $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, використовуючи аксіому Р3 та властивість В2, маємо

$$P(A \cup B) = P(A \backslash (A \cap B)) + P(B \backslash (A \cap B)) + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Властивість доведена.

Якщо події A і B несумісні, то $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ і

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{7.5}$$

Зауваження. Співвідношення (7.4) і (7.5) називаються теоремами додавання ймовірностей для будь-яких подій і несумісних подій відповідно.

Властивість 7.3 легко поширити на суму будь-якої скінченної кількості доданків. Зокрема, для трьох доданків матимемо

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \tag{7.6}$$

Наведемо без доведень ще кілька властивостей.

Властивість 7.4. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$– події, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{7.7}$$

Властивість 7.5. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ – події, то

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i). \tag{7.8}$$

Зауважимо, що властивості 7.4 і 7.5 правильні й для зліченної кількості подій $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$.

Властивість 7.6. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – послідовність випадкових подій, таких, що

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ \dots,$$

то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \dots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \tag{7.9}$$

Властивість 7.7. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – послідовність випадкових подій, таких, що

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ \dots,$$

то

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1} \cap \dots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \tag{7.10}$$

Властивості 7.6 і 7.7 еквівалентні аксіомі Р3, а отже й аксіомі неперервності.

8. Умовна ймовірність. Приклади. Незалежність випадкових подій

Означення випадкової події пов'язано з поняттям стохастичного експерименту, тобто певним комплексом умов, за якого спостерігаються події. Цей комплекс умов зумовлює простір елементарних подій. Якщо ніяких інших умов не додається, то ймовірності $P(A)$ спостережуваних подій називаються безумовними.

Однак досить часто накладають певну додаткову умову, яка полягає в тому, що відбулася деяка спостережувана в стохастичному експерименті подія B ненульової ймовірності.

Означення 8.1. Імовірність події A за умови, що відбулася подія B, називають **умовною** й позначають $P(A|B)$.

Розглянемо кілька простих прикладів.

Приклад 8.1. Нехай підкидається гральний кубик. Спостерігаються події:

$$A = \{\text{На верхній } \textit{грані парне число}\},$$
$$B = \{\textit{На верхній грані число, більше ніж } 3\}.$$

Маємо $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{4, 6\}$. Тоді

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Якщо відомо, що подія B відбулася, то простір елементарних подій звужується до множини B, яка містить усього три події. Серед них сприятливі для події A дві елементарні події $\omega_4 = 4$ і $\omega_6 = 6$. Отже, тепер

$$P(A|B) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A).$$

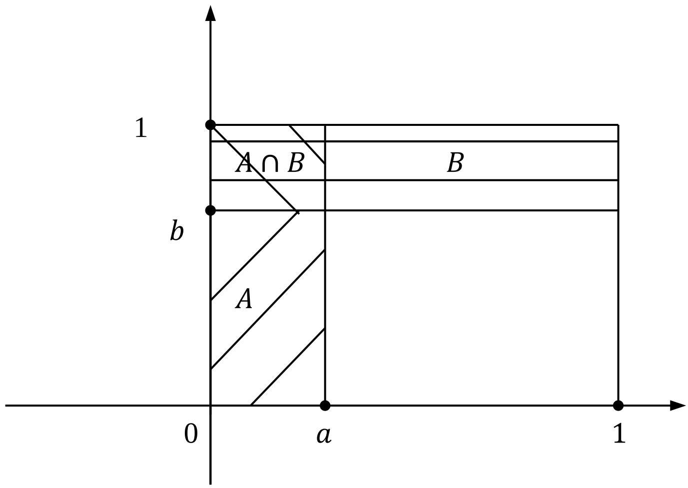


Рис. 8.1

Приклад 8.2. Проводиться стохастичний експеримент: з одиничного квадрата (рис. 8.1) навмання вибирається точка (x, y). Простір елементарних $\Omega = \{(x, y)\colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Нехай $0 < a < 1$ і $0 < b < 1$. Розглянемо події:

$$A = \{\textit{Абсциса вибраної точки менша від } a\},$$
$$B = \{\textit{Ордината вибраної точки більша від } b\}.$$

Для обчислення ймовірностей подій A і B логічно використати геометричний підхід.

$$\mu(\Omega) = S_\Omega = 1, \mu(A) = S_A = a \cdot 1 = a,$$

$$\mu(B) = S_B = (1 - b) \cdot 1 = 1 - b,$$

$$\mu(A \cap B) = S_{A \cap B} = a \cdot (1 - b).$$

Тому

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = a, P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = 1 - b,$$
$$P(A \cap B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(\Omega)} = a \cdot (1 - b).$$

Якщо подія B відбулася, то простір можливих елементарних подій звузився до множини B, а множиною сприятливих подій для події A буде $A \cap B$. Тому

$$P(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} = \frac{a \cdot (1 - b)}{1 - b} = a.$$

Як бачимо, в прикладі 8.1 $P(A|B) \neq P(A)$, а в прикладі 8.2 $P(A|B) = P(A)$. Проте, як легко переконатися, в обох прикладах

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Означення 8.2. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – імовірнісний простір, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, $P(B) > 0$. **Умовною ймовірністю** події A за умови, що подія B відбулася, називається число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{8.1}$$

Легко переконатися, що

1) $P(A|B) \geq 0$;
2) $P(\Omega|B) = 1$;
3) $P(B|B) = 1$.

Формулу (8.1) можна записати у вигляді

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

Аналогічно, якщо $P(A) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Отже, якщо $P(A) > 0$ і $P(B) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{8.2}$$

Співвідношення (8.2) називають ще **формулами множення ймовірностей** або **теоремою множення ймовірностей**. Ці формули легко узагальнити на будь-яку скінченну кількість подій. Наприклад, для чотирьох подій ця формула набуває вигляду

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)P(B|A)P(C|(A \cap B))P(D|(A \cap B \cap C)).$$

В останній формулі, оскільки $A \cap B \cap C \subset A \cap B \subset A$, достатня умова існування умовних імовірностей така:

$$P(A \cap B \cap C) > 0.$$

Означення 8.3. Випадкові події A і B називаються **незалежними**, якщо

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{8.3}$$

Виправданням такого означення є

Твердження 8.1. Нехай задано $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – імовірнісний простір, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, $P(B) > 0$. Випадкові події A і B незалежні тоді і тільки тоді, коли

$$P(A|B) = P(A), \tag{8.4}$$

тобто, коли умовна ймовірність дорівнює безумовній.

Доведення. Дійсно, нехай A, B незалежні і $P(B) > 0$. Тоді існує $P(A|B)$ і, за означенням 8.1,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Навпаки, нехай

$$P(A|B) = P(A).$$

Тоді $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(B)P(A)$, що завершує доведення твердження 8.1.

Використовувати означення 8.1 у формі (8.2) зручно, бо не потрібно зважати на нерівність нулю ймовірностей $P(A)$ або $P(B)$.

Зауважимо, що сумісні події можуть бути незалежними або залежними, про що свідчать приклади 8.1 і 8.2. Несумісні ж події ненульової ймовірності завжди залежні, бо $A \cap B = \emptyset$ і $P(A \cap B) = 0$.

Зазначимо також, що неможлива подія $\emptyset$ й будь-яка інша подія A незалежні. Незалежні також достовірна подія Ω та будь-яка інша подія.

Дійсно,

$$\emptyset \cap A = \emptyset,\ P(\emptyset) = 0 \text{ і } P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset)P(A) = 0,$$
$$\Omega \cap A = A,\ P(\Omega) = 1 \text{ і } P(\Omega \cap A) = P(\Omega)P(A) = P(A).$$

Легко перевірити правильність нижченаведених тверджень.

Твердження 8.2. Якщо події A і B незалежні, то події A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$ також незалежні.

Твердження 8.3. Якщо події A і B_1, A і B_2, незалежні, а події B_1 і B_2 – несумісні, то події A і $B_1 \cup B_2$ незалежні.

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – події, тобто елементи σ-алгебри $\mathfrak{F}$ ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Означення 8.4. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **попарно незалежними**, якщо $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Означення 8.5. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **незалежними в сукупності**, якщо для будь-якого k, $2 \leq k \leq n$ і для будь-якого набору індексів $i_1, i_2, \dots, i_k$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Зрозуміло, що з незалежності подій у сукупності випливає їх попарна незалежність. Однак із попарної незалежності подій не випливає незалежність цих подій у сукупності. Про це свідчить наступний приклад.

Приклад 8.3. (Приклад С.Н. Бернштейна). Стохастичний експеримент полягає в підкиданні тетраедра, на всі чотири грані якого нанесено цифри: на одну грань – цифру 1, на іншу – цифру 2, на ще одну – цифру 3, а на четверту грань – всі три цифри 1, 2, 3.

Розглянемо події

$$A_i = \{\textit{Тетраедр впав на пощину гранню, на яку нанесено цифру } i\},$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Усі грані тетраедра рівноправні, тому події A_1, A_2, A_3 рівноможливі. Кожна цифра нанесена на дві грані. Тому

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Дві цифри є тільки на одній грані. Отже,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

і тому $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$. Це означає, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні.

Усі три цифри є тільки на одній грані. Тому

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

Це свідчить про те, що події A_1, A_2, A_3 залежні в сукупності.

Зазначені в попередньому параграфі властивості ймовірності, незалежність подій та поняття умовної ймовірності допомагають розв’язати широкий клас задач. Наведемо тільки два приклади.

Приклад 8.4. Три стрільці здійснюють одиничний залповий постріл у мішень. Імовірність влучити в мішень i-му стрільцю (подія A_i) дорівнює:

$$P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.7, P(A_3) = 0.9.$$

Знайти ймовірності подій:

$$B = \{\text{У мішень не менше двох влучень}\},$$
$$C = \{\text{У мішень хоча б одне влучення}\}.$$

Розв’язання. Подію B можна подати так:

$$B = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Справа у цій сумі всі доданки несумісні, а події A_1, A_2, A_3 незалежні в сукупності. Тому одержуємо

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + +P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + +0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 =$$

$$= 0{,}056 + 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}504 = 0{,}902.$$

Знайдемо ймовірність події C. Запишемо протилежну до події C подію

$$\bar{C} = \{\text{Немає жодного влучення в мішень}\}.$$

Оскільки $\bar{C} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$, то

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006.$$

Отже, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$

Приклад 8.5. Серед N екзаменаційних білетів з теорії ймовірностей n “щасливих”. Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність взяти “щасливий” білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Розв’язання. Уведемо події

$$A_1 = \{\textit{Щасливий білет узяв студент, який підійшов першим}\},$$
$$A_2 = \{\text{Щасливий білет узяв студент, який підійшов другим}\}.$$

Імовірність першої події знайдемо за класичним означенням

$$P(A_1) = \frac{n}{N}.$$

Далі обчислимо ймовірність події A_2. Зрозуміло, що події A_1 і A_2 залежні, причому $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$. Доданки $(A_2 \cap A_1)$ і $(A_2 \cap \bar{A}_1)$ несумісні. Тому

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \bar{A}_1) =$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1).$$

Імовірності всіх подій тут легко знайти за класичним означенням.

$$P(\bar{A}_1) = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N},$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{n-1}{N-1},$$

$$P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{n}{N-1}.$$

Отже,

$$P(A_2) = \frac{n}{N} \cdot \frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{N-1} \cdot \frac{n-1+N-n}{N} = \\ = \frac{n}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{n}{N}.$$

Звідси,

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{n}{N},$$

тобто обидві ймовірності однакові.

9. Формула повної ймовірності

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ і події A, $H_1, H_2, \dots, H_n$, тобто $A \in \mathfrak{F}$, $H_i \in \mathfrak{F}$, $i = \overline{1,\ n}$.

Означення 9.1. Якщо $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$ і $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то кажуть, що набір подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна група подій.

Твердження 9.1. Якщо $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна група подій і $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,\ n}$, то

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \tag{9.1}$$

Доведення. Дійсно,

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup\ H_n) =$$
$$= (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Оскільки події

$$(A \cap H_1), (A \cap H_2), \ldots, (A \cap H_n)$$

попарно несумісні, то

$$P(A) = P((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i),$$

що завершує доведення **твердження 9.1**.

Зауважимо, що вимога повноти групи подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$ необов'язкова. Достатньо вимагати, щоб справджувалися умови $H_i \cap H_j = \emptyset,\ i, j = \overline{1, n},\ \ i \neq j,\ P(H_i) > 0,\ i = \overline{1,\ n}$, а також щоб

$$A \subset H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup\ H_n.$$

За цих умов

$$A = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup\ H_n),$$

а тому формула (9.1) справджується.

Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називаються **гіпотезами** відносно події A. Зрозуміло, що подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли підтверджується одна і тільки одна з гіпотез.

Формула (9.1) називається **формулою повної ймовірності**. За її допомогою значно спрощується розв'язування багатьох задач.

Приклад 9.1. Однакові комп'ютери виготовляються на двох різних заводах певної корпорації. Відділом контролю відібрано для перевірки партію комп'ютерів, причому відомо, що дві третини з них виготовлено на першому заводі. Відомо також, що серед комп'ютерів, зібраних на першому заводі, 1 % браку, а серед комп'ютерів, зібраних на другому, – 2 % браку. Навмання вибрано один комп'ютер. Яка ймовірність того, що він не бракований?

Розв'язання. Розглянемо події

$$A = \{\textit{Вибраний комп'ютер не бракований}\},$$
$$H_1 = \{\textit{Вибраний комп'ютер виготовлено на першому заводі}\},$$
$$H_2 = \{\textit{Вибраний комп'ютер виготовлено на другому заводі}\}.$$

Події H_1 і H_2 утворюють повну групу подій. За умовою задачі маємо ймовірності цих подій:

$$P(H_1) = \frac{2}{3},$$
$$P(H_2) = \frac{1}{3}.$$

Відомо також умовні ймовірності: $P(A|H_1) = 0{,}99$, $P(A|H_2) = 0{,}98$. Імовірність $P(A)$ події A знайдемо за формулою (9.1)

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}99 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}98 =$$
$$= \frac{2 \cdot 0{,}99 + 1 \cdot 0{,}98}{3} = \frac{2{,}96}{3} \approx 0{,}9867.$$

10. Формули Бейєса

Твердження 9.2. Нехай набір подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна група подій, причому $P(H_i) > 0$, для кожного $i = \overline{1,\ n}$. Тоді для будь-якої події A, такої, що $P(A) > 0$, справджуються рівності

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} P(H_k)P(A|H_k)}, i = \overline{1, n}. \tag{9.2}$$

Доведення. Для доведення (9.2) застосуємо формулу множення і формулу повної ймовірності. Маємо

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}, i = \overline{1, n}.$$

Оскільки

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k),$$

то підставляючи $P(A)$ у попередню формулу одержимо (9.2).

Твердження 9.2 доведено.

Формули (9.2) **називаються формулами Бейєса**. Схема їх застосування така. Нехай подія A може відбуватися за умов, відносно яких можна висловити n гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$. Нехай відомі ймовірності цих гіпотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, які називаються апріорними ймовірностями. Відомі також умовні ймовірності $P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$. Нехай проведено стохастичний експеримент, в якому відбулася подія A. Це повинно зумовити переоцінку ймовірностей гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$. Формули (9.2) й дають можливість це зробити, тобто знайти умовні ймовірності $P(H_i|A)$, $i = \overline{1, n}$ (ці ймовірності називаються апостеріорними ймовірностями).

Приклад 9.2. Розглянемо умову прикладу 9.1 і припустимо, що взятий навмання комп'ютер виявився не бракованим (подія A відбулася). Переоцінити гіпотези, тобто знайти апостеріорні ймовірності гіпотез H_1 і H_2.

Розв'язання. Застосовуючи формули (9.2), одержуємо

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{2 \cdot 0{,}99}{3} \cdot \frac{1}{0{,}9867} = \frac{1{,}98}{2{,}9601} \approx 0{,}6689,$$
$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 0{,}98}{3} \cdot \frac{1}{0{,}9867} = \frac{0{,}98}{2{,}9601} \approx 0{,}3311.$$

Зауважимо, що сума апостеріорних імовірностей гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ завжди дорівнює 1, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1,$$

що легко перевірити, підсумувавши рівності (9.2).

11. Моделювання випадкової події. Приклади

Розвиток комп'ютерної техніки, програмування та обчислювальної математики надав можливість будувати імітаційні моделі найрізноманітніших явищ і процесів. Особливо вигідна побудова імітаційних моделей у двох таких випадках: 1) використання реальної моделі пов'язано або з її руйнуванням, або випробування реальної моделі пов'язано зі значними матеріальними затратами на її побудову; 2) формальна математична модель виявляється надто складною і громіздкою, вимагає значних теоретичних зусиль як при її створенні, так і при дослідженні.

Важливий елемент імітаційної моделі – можливість імітації (моделювання) випадкової події або системи випадкових подій. Викладемо суть основної ідеї моделювання випадкової події A, яка спостерігається в стохастичному експерименті. Ми вважаємо, що відомо простір елементарних подій Ω, побудовано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, тобто відомо, що $A \in \mathfrak{F}$, і, отже, відомо $P(A)$. Крім цього, вважаємо, що реально реалізувати такий стохастичний експеримент неможливо (реалізація матеріально надто затратна, вимагає значних зусиль тощо).

Припустимо, що можна розробити комп'ютерну обчислювальну процедуру (імітаційну модель цього стохастичного експерименту). Безумовно, тут уже буде інший простір елементарних подій Ω_1, який не збігається з простором елементарних подій Ω. Нехай нам вдалося виділити σ-алгебру спостережуваних подій $\mathfrak{F}_1$ та ввести ймовірність P_1, тобто побудувати ймовірнісний простір $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$ імітаційної моделі стохастичного експерименту.

Припустимо тепер, що в імовірнісному просторі $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$ імовірність деякої події $B \in \mathfrak{F}_1$ дорівнює ймовірності події $A \in \mathfrak{F}$:

$$P_1(B) = P(A). \tag{10.1}$$

Тоді природно називати подію B моделлю (імітацією) події A і вважати, що в стохастичному експерименті Ω подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли в стохастичному експерименті Ω_1 відбувається подія B.

Зрозуміло, що навіть тоді, коли ймовірнісні простори $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ та $\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$ збігаються, з рівності (10.1) не випливає рівність $A = B$. У цьому легко переконатися, розглянувши простий приклад.

Приклад 10.1. Нехай проводиться стохастичний експеримент: з інтервалу $(0; 5)$ навмання вибирається точка. Нехай A і B – такі події:

$$A = \{Вибрана\ точка\ x \in (1, 3]\},$$
$$B = \{Вибрана\ точка\ y \in [3; 5)\}.$$

Застосовуючи поняття геометричної ймовірності, маємо

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{5}.$$

Проте очевидно, що $A \neq B$. Є лише одна елементарна подія $\omega = \{3\}$, яка сприяє і події A, і події B.

Принагідно зазначимо, що з властивостей імовірності випливає $P(\emptyset) = 0$, однак з рівності $P(C) = 0$ неможливо зробити висновок, що $C = \emptyset$. Дійсно, в наведеному прикладі 10.1 подія $C = \{\textit{Вибрана точка } x = 3\}$ – можлива подія, але $P(C) = 0$.

Повернемося до питання про моделювання випадкової події. Те, що події A і B задовольняють рівності (10.1), означає, що "міра достовірності" їх появи у відповідних стохастичних експериментах однакова. Саме в такому розумінні подію B вважають моделлю події A. Це означає, що частоти появ цих подій за проведення достатньо великої кількості експериментів повинні бути близькими.

До складу програмного забезпечення комп'ютера, як правило, входить процедура "вибору навмання" дійсного числа з інтервалу $(0;\ 1)$. Такий "вибір навмання" здійснюється на основі детермінованого алгоритму. Однак частотні характеристики подій, пов'язаних з таким вибором, дозволяють з достатньою мірою адекватності вважати, що реалізується деякий "стохастичний експеримент". У цьому "стохастичному експерименті" ймовірність події

$$B = \{\textit{Вибрано число } x, \textit{таке, що } 0 \leq \alpha \leq x < \beta \leq 1\}$$

Дорівнює, за геометричним означенням імовірності, $\beta - \alpha$, тобто

$$P(B) = P\{\omega\colon 0 \leq \alpha \leq x < \beta\} = \beta - \alpha. \qquad (10.2)$$

Існує досить багато різних алгоритмів побудови згаданої процедури "випадкового" вибору. Ми не зупинятимемося на їхній побудові, тільки ще раз підкреслимо, що вони детерміновані, а тому події, пов'язані з їхньою реалізацією, називатимемо, як прийнято, "псевдовипадковими". Усі відомі назви цих процедур пов'язані зі словом **random** – випадковий. Розглянемо кілька прикладів моделювання випадкових подій.

Приклад 10.2. Моделювання події A з імовірністю $P(A) = p,\, 0 < p < 1$.

Розв'язання. Для моделювання події A на $(0, 1)$ виділимо інтервал $(\alpha, \alpha + p)$. Без втрати загальності можна вважати, що $\alpha = 0$.

За модель події A виберемо подію

$B = \{$*За процедурою* $random$ *вибрано число* x, *таке, що* $\alpha < x < \alpha + p\}$.

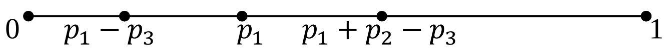
Якщо відбулася подія B, то вважаємо, що подія A відбулася.

Приклад 10.3. Моделювання двох несумісних подій A_1 і A_2, таких, що $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$, $p_1 + p_2 \leq 1$.

Розв'язання. На $(0, 1)$ виділимо два інтервали $(\alpha, \alpha + p_1)$ і $(\beta, \beta + p_2)$, які не перетинаються $(\alpha \geq 0, \beta > \alpha + p_1, \beta + p_2 < 1)$. Тут, як і раніше, можемо вважати, що $\alpha = 0$. Звернувшись до процедури **random**, одержимо число x. Якщо $\alpha < x < \alpha + p_1$, то відбулася подія A_1. Якщо ж $\beta \leq x < \beta + p_2$, то відбулася подія A_2. В інших випадках жодна з подій A_1 і A_2 не відбудеться.

Приклад 10.4. Моделювання двох сумісних подій A_1 і A_2, таких, що $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_1 \cap A_2) = p_3$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, 3$, $0 < p_1 + p_2 < 1$, $p_3 < p_1$, $p_3 < p_2$.

Розв'язання. На $(0, 1)$ відмічаємо три числа: $p_1 - p_3$, p_1, $p_1 + p_2 - p_3$



Звертаємося до процедури **random**. Одержимо число x.

Якщо $0 < x < p_1 - p_3$, то відбулася тільки подія A_1.

Якщо $p_1 < x < p_1 + p_2 - p_3$, то відбулася тільки подія A_2.

Якщо $p_1 - p_3 < x < p_1$, то відбулися і подія A_1, і подія A_2.

Якщо ж $p_1 + p_2 - p_3 < x < 1$, то не відбулися ні подія A_1, ні подія A_2.

Моделювання більшої кількості подій, які, можливо, сумісні, технічно й алгоритмічно дещо складніше.

Приклад 10.5. Моделювання повної групи попарно несумісних подій $A_1,\ A_2, \dots, A_n$. Тобто таких, що

$$A_1 \cup\ A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset, i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$
$$P(A_i) = p_i > 0, p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Розв'язання. Розіб'ємо $(0, 1)$ на інтервали $I_1 = (0, p_1]$, $I_2 = (p_1, p_1 + p_2]$, $I_3 = (p_1 + p_2,\ p_1 + p_2 + p_3]$, $\dots$, $I_n = (\,p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{n-1}, 1)$. Зрозуміло, що, звертаючись до процедури **random**, ми одержуємо $0 < x < 1$. Якщо виявиться $x \in I_j$, то це означає, що відбулася подія A_j.

12. Послідовність незалежних випробувань. Закон Я. Бернуллі

Нехай проводиться серія незалежних випробувань, у кожному з яких спостережувана подія A може відбутися з імовірністю $P(A) = p$. Той факт, що подія A у випробуванні відбулася, позначимо буквою У (випробування "успішне"). Якщо ж подія у випробуванні не відбулася, то випробування вважатимемо неуспішним і позначатимемо цей факт буквою Н (випробування "неуспішне"). Нехай проводиться серія з n випробувань. Елементарною випадковою подією в такому стохастичному експерименті потрібно вважати набір "успіхів" і "неуспіхів". Наприклад, якщо проведено серію з трьох випробувань, то простір елементарних подій Ω складається з восьми елементарних подій і є такою множиною:

$$\Omega = \{\text{ННН}, \text{ННУ}, \text{НУН}, \text{УНН}, \text{НУУ}, \text{УНУ}, \text{УУН}, \text{УУУ}\}.$$

Тут елементарна подія $\omega_6 = \text{УНУ}$ означає, що в першому випробуванні подія A відбулася, у другому – не відбулася і у третьому – відбулася.

Часто замість У використовують цифру 1, а замість Н – цифру 0. Тоді

$$\Omega = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}.$$

Як бачимо, за n випробувань простір Ω складається з 2^n елементарних подій вигляду УУННУ ... УНН, де буква У повторюється m разів – $(0 \leq m \leq n)$, а буква Н – $n - m$ разів.

Імовірність "успіху" в будь-якому випробуванні дорівнює p, а "неуспіху" – $q = 1 - p$. Використовуючи незалежність випробувань, згаданій вище елементарній події $\omega_m =$ УУННУ ... УНН природно поставити у відповідність число $P_n(\omega_m) = p^m q^{n-m}$. Кількість елементарних подій з однаковою кількістю m "успіхів" у просторі елементарних подій Ω дорівнює

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Найпростіша задача у схемі Я. Бернуллі – це задача про обчислення ймовірності $P_n(m)$ того, що в n випробуваннях подія A відбудеться m разів, $(0 \leq m \leq n)$. Згідно з теоремою додавання ймовірностей, ця ймовірність може бути знайдена за формулою

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{1.1}$$

оскільки всі елементарні події, які сприяють події

$B = \{$*Подія A за n незалежних випробувань відбулася m разів*$\}$,

незалежні, а їх кількість дорівнює C_n^m.

Формула (1.1) має назву – **формула Я. Бернуллі.** Сукупність імовірностей $P_n(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$, часто називають **біноміальним (біномним) розподілом імовірностей.**

Використовуючи формулу бінома Ньютона, легко отримати

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1^n = 1. \qquad (1.2)$$

Формула (1.1) використовується для розв'язування різних задач, пов'язаних зі схемою незалежних випробувань. Розглянемо приклади.

Приклад 1.1. Гральний кубик підкидають чотири рази. Знайти ймовірність події

$$B = \{\textit{Цифра } 5 \textit{ появиться на верхній грані } 3 \textit{ рази}\}.$$

Розв'язання. Тут $n = 4$, $m = 3$. Імовірність появи цифри 5 на верхній грані при одному підкиданні

$$p = \frac{1}{6}.$$

Тому

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{4!}{3!\,1!} \frac{1}{6^3} \frac{5}{6} = \frac{5}{9 \cdot 36} = \frac{5}{324} \cong 0{,}0154.$$

Приклад 1.2. Імовірність появи події A у будь-якому з п'яти випробувань дорівнює $p = 0{,}8$. Яка ймовірність того, що подія A відбудеться

1) менше ніж два рази?
2) не більше ніж 4 рази?

Розв'язання. Позначимо A_i подію, яка полягає в тому, що подія A відбудеться рівно i разів.

Уведемо події

$$B = \{\textit{Подія A відбудеться менше ніж два рази}\},$$
$$C = \{\textit{Подія A відбудеться не більше ніж } 4 \textit{ рази}\}.$$

Маємо $B = A_0 \cup A_1$, $C = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Використаємо теорему додавання ймовірностей

$$P(B) = P(A_0) + P(A_1) = P_5(0) + P_5(1).$$

Аналогічно, $P(C) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) + P_5(4).$

Або

$$P(C) = P(\bar{A}_5) = 1 - P(A_5) = 1 - P_5(A_5).$$

Отже, остаточно отримуємо:

1) $P(B) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p^1 q^4 = (0{,}2)^5 + 5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^4 = 0{,}00032 + 5 \cdot 0{,}00128 = 0{,}00672.$

2) $P(C) = 1 - P_5(5) = 1 - C_5^5 p^0 q^5 = 1 - (0{,}8)^5 = 1 - 0{,}32678 = 0{,}67322.$

Формулу Я. Бернуллі (1.1) легко узагальнити на випадок, коли в кожному з n випробувань може відбутися одна і тільки одна з подій A_1, A_2, …, A_k, причому $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, …, $P(A_k) = p_k$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Імовірність $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ того, що за n випробувань подія A_1 відбудеться m_1 разів, подія A_2 – m_2 разів, …, подія A_k – m_k разів, можна обчислити за формулою

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}. \quad (1.3)$$

Зрозуміло, що $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Набір імовірностей $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ називається **поліноміальним розподілом імовірностей.**

Розглянемо ще такий стохастичний експеримент: серія незалежних випробувань проводиться до першого настання події A, яка в кожному з випробувань може відбутися з імовірністю p. Тоді простір елементарних подій такий:

$$\Omega = \{\text{У}, \text{НУ}, \text{ННУ}, \dots, \text{НН} \dots \text{НУ}, \dots\}.$$

Цей простір містить зліченну кількість елементарних подій $\omega_k = \text{НН} \ldots \text{НУ}$, де перед буквою $У$ є k букв Н. У даному випадку природно елементарній події ω_k поставити у відповідність імовірність $q^k p$. Набір імовірностей $q^k p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, називають **геометричним розподілом імовірностей**.

Число $q^k p$ визначає ймовірність події, яка полягає в тому, що до першої появи "успіху" потрібно провести k випробувань.

Зазначимо, що формули (1.1), (1.3) через громіздкість обчислень важко застосовувати вже за значень $n, m, m_1, m_2, \ldots, m_k$ навіть у межах першої сотні. Наприклад, якщо $n = 100$, $m = 20$, $p = 0{,}4$, то обчислити ймовірність

$$P_{100}(20) = \frac{100!}{20!\,80!}(0{,}4)^{20}(0{,}6)^{80}$$

неможливо, не розробивши спеціального алгоритму виконання обчислень навіть з використанням комп'ютера, оскільки виникають надто малі й надто великі числа. У таких випадках використовуються теоретичні результати, на основі яких можна обчислити такі ймовірності за великих значень n наближено з достатньою точністю. З цими результатами ми ознайомимося в наступних параграфах.

13. Найімовірніше число у схемі незалежних випробувань

Нехай імовірність появи події A у кожному з n незалежних випробувань стала і дорівнює p. Тоді $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Це скінченний набір імовірностей, який можна досить ефективно проаналізувати. Розглянемо відношення

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{C_n^m}{C_n^{m-1}} \cdot \frac{p}{q} =$$
$$= \frac{n!\,(m-1)!\,(n-m+1)!}{m!\,(n-m)!\,n!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n+1-m}{m} \cdot \frac{p}{q}.$$

Отже,

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{n+1-m}{m} \cdot \frac{p}{q}. \qquad (2.1)$$

Звідси одержуємо, що

$$P_n(m) > P_n(m-1), \textit{якщо } \frac{n+1-m}{m} \cdot \frac{p}{q} > 1,$$
$$P_n(m) = P_n(m-1), \textit{якщо } \frac{n+1-m}{m} \cdot \frac{p}{q} = 1,$$
$$P_n(m) < P_n(m-1), \textit{якщо } \frac{n+1-m}{m} \cdot \frac{p}{q} < 1.$$

Оскільки нерівність

$$\frac{n+1-m}{m} \cdot \frac{p}{q} > 1$$

рівносильна нерівності $m < (n+1)p$, то маємо

$$P_n(m) > P_n(m-1), \textit{якщо } m < (n+1)p,$$
$$P_n(m) = P_n(m-1), \textit{якщо } m = (n+1)p, \qquad (2.2)$$
$$P_n(m) < P_n(m-1), \textit{якщо } m > (n+1)p.$$

Нагадаємо, що в цих співвідношеннях m – ціле число й цілою частиною числа x називається число $[x]$, яке дорівнює цілому числу, не більшому за x. Наприклад, $[-2{,}4] = -3$, $[4] = 4$, $[5{,}9] = 5$.

Тепер можемо зробити деякі висновки, розглядаючи співвідношення (2.2). Нехай $(n+1)p$ неціле число. Якщо m збільшується, набуваючи цілих значень, то й $P_n(m)$ збільшується ($P_n(m) > P_n(m-1)$) доти, поки $m < (n+1)p$ або $m \leq [(n+1)p]$. Отже, число $m_0 = [(n+1)p]$ буде таким, за якого $P_n(m)$ набуватиме найбільшого значення.

Якщо ж $(n+1)p$ – ціле число, то m може набути значення $(n+1)p$ і тоді справджуватиметься рівність $P_n(m_0) = P_n(m_0 - 1)$, $m_0 = (n+1)p$. Отже, існує два числа $m_0 - 1$ і m_0, за яких імовірність $P_n(m)$ набуває однакових значень і вони будуть найбільшими в наборі чисел $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Цей набір чисел містить $n+1$ число, а відносно цих чисел можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 2.1. Нехай $(n+1)p$ – неціле число. Тоді зі зміною m від 0 до n імовірність $P_n(m)$ спочатку монотонно зростає, а потім монотонно спадає, досягаючи найбільшого значення за $m_0 = [(n+1)p]$. Якщо ж $(n+1)p$ – ціле число, то $P_n(m_0) = P_n(m_0 - 1)$, де $m_0 = (n+1)p$, і за $m < m_0 - 1$ імовірність $P_n(m)$ монотонно зростає, а при $m > m_0$ монотонно спадає.

Отже, серед чисел $P_n(m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ є принаймні одне найбільше число. Крім цього, легко встановити, використовуючи **твердження 2.1**, що $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

Означення 2.1. Число m_0, за якого ймовірність $P_n(m)$ набуває найбільшого значення, називається **найімовірнішим (найбільш імовірним) числом** кількості успіхів у системі незалежних випробувань за схемою Бернуллі.

Ми визначили, що набір чисел $P_n(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, має певні властивості, використовуючи які, можна наочно зобразити цей набір геометрично на площині у вигляді ламаної, вершини якої – точки з координатами $(m, P_n(m))$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Розглянемо випадок $n = 5$ і припустимо, що p – імовірність появи події A в одному випробуванні, $(n+1)p$ – неціле число та $m_0 = [(n+1)p] = 3$. Тоді ламану можна зобразити, наприклад, так:

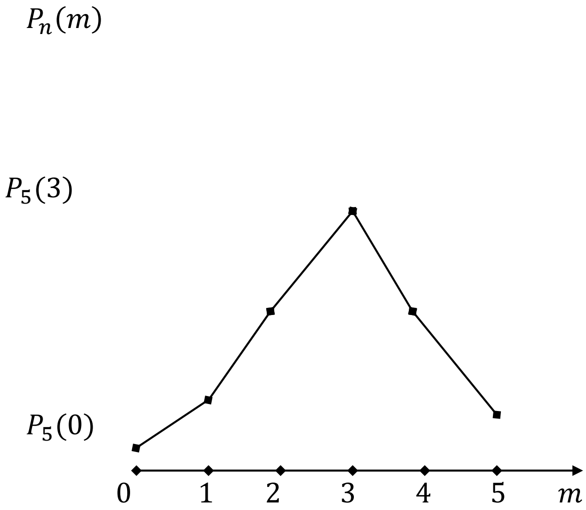


Рис. 2.1. Полігон імовірностей

Ламана, наведена на рис. 2.1, називається полігоном імовірностей.

Розглянемо кілька простих прикладів.

Приклад 2.1. Для стрільця-початківця ймовірність влучити в мішень дорівнює $p = 0{,}4$. Якою виявиться найімовірніша кількість влучень за п'яти пострілів у мішень? Яка ймовірність відповідної події?

Розв'язання. Обчислимо число $(n+1)p = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$. Це число не ціле. Отже, $m_0 = [(n+1)p] = [2{,}4] = 2$.

Знайдемо $P_5(2)$.

$$P_5(2) = C_5^2(0{,}4)^2(0{,}6)^3 = 10 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}216 = 0{,}3456.$$

Приклад 2.2. Знайти кількість незалежних випробувань, які потрібно провести для того, щоб найімовірніша кількість появ події дорівнювала 20, якщо $p = 0{,}8$.

Розв'язання. Ми встановили, що $np - q \le m_0 \le np + p$. У нашому випадку $0{,}8 \cdot n - 0{,}2 \le 20 \le n \cdot 0{,}8 + 0{,}8$. Нерівність $0{,}8 \cdot n - 0{,}2 \le 20$ дає

$$n \leq \frac{20{,}2}{0{,}8} = 25{,}25.$$

З нерівності $20 \leq n \cdot 0{,}8 + 0{,}8$ одержуємо

$$n \geq \frac{19{,}2}{0{,}8} = 24{,}0.$$

Отже, $24{,}0 \leq n \leq 25{,}25$. Тому $n = 24$ або $n = 25$.

14. Локальна теорема Муавра–Лапласа

У параграфі 2.1 ми зазначали, що застосовувати формулу Я. Бернуллі для обчислення ймовірностей $P_n(m)$ за великих значень n практично неможливо. Тому потрібні формули, які надавали б можливість хоча б наближено, але достатньо просто обчислювати ці ймовірності. Такі формули – наслідки тверджень, які сформулювали й довели математики Муавр, Лаплас та Пуассон.

Ми не доводитимемо ці твердження, що пов'язано не так з теоретичними труднощами, як із громіздкістю викладень. Їх сформулюємо нижче, розглянемо приклади та обговоримо методику використання цих тверджень.

Отже, нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися з імовірністю $P(A) = p$ і не відбутися з імовірністю $P(\bar{A}) = q = 1 - p$. Тоді ймовірність того, що подія A відбудеться m разів $(0 \leq m \leq n)$, дорівнює $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Позначимо

$$x_{n,m} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (3.1)$$

Твердження 3.1 (Локальна теорема Муавра–Лапласа). Якщо існує стала C, така, що $\left|x_{n,m}\right| \leq C$ для всіх n і m, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}\,P_n(m)}{e^{-\frac{x_{n,m}{}^2}{2}}} = 1. \tag{3.2}$$

Отже, співвідношення (3.2) стверджує, що $P_n(m)$ і

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_{n,m}{}^2}{2}}$$

еквівалентні змінні в процесі $n \to \infty$.

Це означає, що за досить великих n значення однієї з них можна замінити з певною точністю значенням іншої. Тобто

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_{n,m}{}^2}{2}}. \tag{3.3}$$

На практиці використовується формула

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(x_{n,m}\right), \tag{3.4}$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

і значення функції $\varphi(x)$ знаходяться за таблицею, яка, як правило, подається в кожному підручнику (посібнику) з теорії ймовірностей (**додаток 3**).

Аналіз доведення **твердження 3.1** показує, що похибка формули (3.3) за $n \to \infty$ має такий же порядок малості, як і змінна

$$\frac{1}{\sqrt{npq}},$$

а практика використання (3.3) свідчить про те, що цю формулу можна використовувати вже при $\sqrt{npq} > 4$.

Якщо

$$p = \frac{1}{2},$$

то формулу (3.3) можна використати при $n > 64$.

У випадку, коли ймовірність p близька до нуля, наприклад $p \leq 0{,}02$, або близька до 1, наприклад $p \geq 0{,}95$, то нерівність $\sqrt{npq} \geq 4$ задовольнятиметься за великих значень n.

Приклад 3.1. Обчислити ймовірність того, що за підкидань грального кубика $n = 180$ разів грань з кількістю очок 6 випаде $m = 35$ разів.

Розв'язання. У нашому випадку маємо

$$p = \frac{1}{6}$$

і

$$\sqrt{npq} = \sqrt{\frac{180 \cdot 5}{6 \cdot 6}} = 5, x_{n,m} = \frac{35 - 180 \cdot \frac{1}{6}}{5} = 1.$$

Тому

$$P_{180}(35) \cong \frac{1}{5}\varphi(1) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}242 = 0{,}0484.$$

Зауважимо, що за великих значень n імовірності $P_n(m)$, як правило, малі. У нашому прикладі найімовірніше число

$$m_0 = [(n+1)p] = \left[(180+1)\cdot\frac{1}{6}\right] = 30,$$

і його ймовірність теж досить мала:

$$P_n(m_0) = P_{180}(30) \cong \frac{1}{5}\varphi(0) = \frac{1}{5}\cdot 0{,}3989 = 0{,}0798.$$

Формулу (3.3) можна використовувати й для обчислення ймовірностей того, що кількість подій в серії незалежних випробувань знаходиться між заданими двома числами. Наприклад, ймовірність того, що за умови попереднього прикладу подія відбудеться в серії випробувань не менше 30 разів і не більше 33 разів, дорівнює

$$P_{180}(30 \le m \le 33) = P_{180}(30) + P_{180}(31) + P_{180}(32) + P_{180}(33).$$

15. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

Твердження 3.2 (Інтегральна теорема Муавра–Лапласа). Нехай справджуються умови **твердження 3.1.** Тоді для будь-яких $-\infty < a < b < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P_n\{\omega: a \le x_{n,m} \le b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \qquad (3.5)$$

Якщо n достатньо велике число, то (3.5) дає робочу формулу для наближеного обчислення ймовірності

$$P_n(a \le x_{n,m} \le b) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \qquad (3.6)$$

Використання цієї формули найчастіше зумовлюється тим, що збігаються такі події:

$$\{\omega: m_1 \le m < m_2\} = \{\omega: m_1 - np \le m - np < m_2 - np\} =$$
$$= \left\{\omega: \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right\} = \{\omega: a \le x_{n,m} < b\},$$

де

$$a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

і рівні їхні ймовірності.

Тому

$$P\{\omega: m_1 \le m < m_2\} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du, \tag{3.7}$$

де, наголошуємо ще раз,

$$a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Оскільки ймовірності $P_n(m)$ малі за великих значень n, то це зумовлює використання формули (3.5) для обчислення в межах достатньої точності таких ймовірностей:

$$P\{\omega: m_1 \le m \le m_2\}, P\{\omega: m_1 < m \le m_2\}, P\{\omega: m_1 < m < m_2\}.$$

Зауважимо, що інтеграл у правій частині (3.5) неможливо точно обчислити за допомогою елементарних функцій. Однак існують таблиці, за допомогою яких можна знайти значення цього інтеграла (**додаток 4**).

Приклад 3.2. Знайти ймовірність того, що при проведенні $n = 200$ випробувань подія A, імовірність появи якої в кожному випробуванні дорівнює 0,5, відбудеться:

1) не менше 93 і не більше 109 разів;
2) не менше 110 разів;
3) не більше 92 разів.

Розв'язання. Отже, потрібно обчислити ймовірності

$P_{200}(93 \le m < 109)$, $P_{200}(110 \le m \le 200)$, $P_{200}(0 \le m \le 92)$.

Кожну з цих ймовірностей можна знайти за формулою (3.5). Знайдемо відповідні сталі. Маємо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{50} \cong 7{,}07,\ np = 200 \cdot 0{,}5 = 100,$$
$$\frac{0 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-100}{7{,}07} \cong -14{,}4;\ \frac{92 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-8}{7{,}07} \cong -1{,}13;$$
$$\frac{93 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-7}{7{,}07} \cong -0{,}99;\ \frac{0 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{9}{7{,}07} \cong 1{,}27;$$
$$\frac{110 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10}{7{,}07} \cong 1{,}41;\ \frac{200 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100}{7{,}07} \cong 14{,}4.$$

Отже,

$$P_{200}(93 \le m \le 109) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0{,}99}^{1{,}27} e^{-\frac{u^2}{2}} du \cong 0{,}74;$$

$$P_{200}(110 \le m \le 200) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1{,}41}^{14{,}4} e^{-\frac{u^2}{2}} du \cong 0{,}08;$$

$$P_{200}(0 \le m \le 92) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-14{,}4}^{-1{,}13} e^{-\frac{u^2}{2}} du \cong 0{,}13.$$

Зауважимо, що за рахунок похибок обчислень сума одержаних імовірностей не дорівнює 1, хоча за умовою задачі потрібно знайти ймовірності повної групи подій.

Ми вже зазначали, що за малих (близьких до нуля) та великих (близьких до одиниці) ймовірностей p можна використовувати вищенаведені твердження, якщо n набуває досить великих значень. Якщо p близьке до одиниці, то ми можемо перейти до розгляду протилежної події й одержимо малі ймовірності.

16. Теорема Пуассона

Для малих ймовірностей Пуассон довів теорему, яку ми сформулюємо як

Твердження 3.3 (Теорема Пуассона, або теорема про рідкісні події). Якщо $np < C$, де C – довільна стала, то для всіх m

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(m)m!\, e^{np}}{(np)^m} = 1.$$

Якщо справджуються умови цього твердження, то для наближеного обчислення ймовірності $P_n(m)$ маємо

$$P_n(m) \cong \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \tag{3.8}$$

Приклад 3.3. Обчислити ймовірність того, що серед $n = 1000$ деталей буде 5 бракованих, якщо ймовірність того, що деталь бракована, дорівнює $p = 0{,}002$.

Розв'язання. Оскільки в нашому випадку $\sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998} = \sqrt{1{,}996} < 4$, то застосовувати (3.3) не можна. Проте $np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$ і, за формулою (3.8),

$$P_{1000}(5) \cong \frac{(2)^5}{5!} e^{-2} \cong 0{,}036.$$

Для обчислення ймовірностей за формулою (3.8) використовують таблиці значень виразу

$$P(\lambda, m) \cong \frac{(\lambda)^m}{m!} e^{-\lambda}$$

для різних значень λ та m (**додаток 1**).

Бачимо, що

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(\lambda, m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = 1.$$

Набір чисел

$$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

називають розподілом імовірностей Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

17. Використання граничних теорем у схемі Я. Бернуллі. Теорема Я. Бернуллі

Розв’язування прикладів попереднього параграфа було можливим за наявності таблиць деяких функцій та виразів. Зокрема, для того, щоб використати твердження 3.1, потрібно обчислювати значення функції

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Це парна функція ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), графік якої наведено на рис. 4.1.

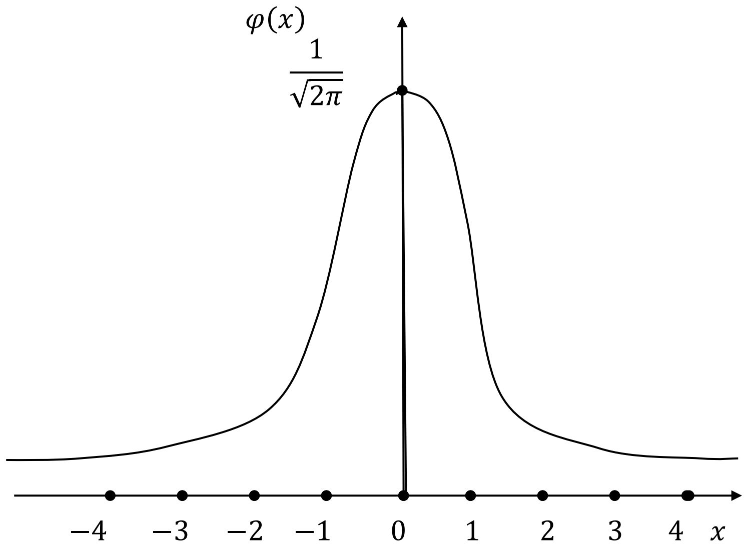


Рис. 4.1. Графік функції $\varphi(x)$

Таблиця значень цієї функції (**додаток 3**), як правило, подається для $x \in (-4;\ 4)$ з кроком, що дорівнює $0,01$. Якщо $|x| > 4$, то значення функції $\varphi(x)$ не перевищують 0,00001.

Для обчислення інтеграла

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

на основі **твердження 3.2** використовують таблицю значень функції

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{4.1}$$

Ця функція неперервна, непарна ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), монотонно зростаюча. Відомо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{1}{2}.$$

Графік цієї функції зображено на рис. 4.2.

Якщо $x > 4$, то різниця $0,5 - \Phi(x) < 0{,}0001$. Таблиця значень $\Phi(x)$ з кроком $0,01$ для $x \in [0;\ 4]$ подається в кожному підручнику з теорії ймовірностей (**додаток 4**).

Легко зрозуміти, що у випадку $0 \le a < b < +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Якщо $-\infty < a < b \le 0$, то

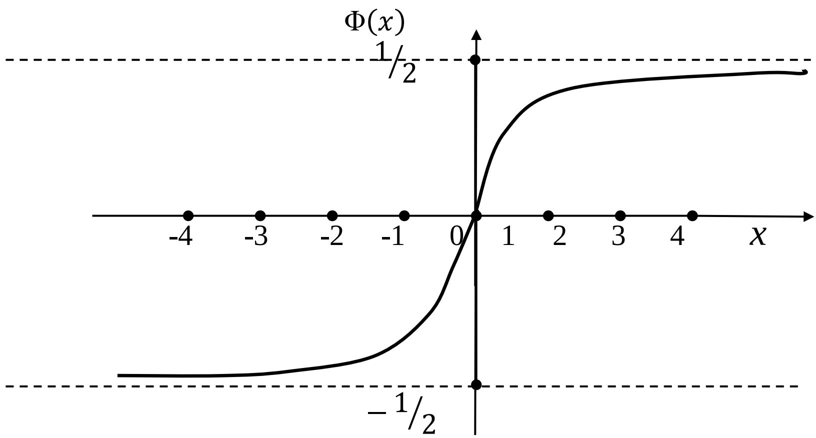


Рис. 4.2. Графік функції $\Phi(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Phi(|a|) - \Phi(|b|).$$

Якщо ж $-\infty < a < 0 \leq b < +\infty$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Phi(b) + \Phi(|a|).$$

Зауважимо, що в деяких підручниках для $x \in [-4; 0]$ подається таблиця значень функції

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Це не викликає ніяких непорозумінь, бо $\Phi^*(x) = -\Phi(|x|)$ через непарність $\Phi(x)$.

Розв'яжемо задачу про оцінку відхилення в схемі незалежних випробувань частоти

$$\nu(A) = \frac{m}{n}$$

події A від імовірності $P(A) = p$ цієї події. Для цього ми зробимо так. Виберемо будь-яке як завгодно мале число $\varepsilon > 0$ і обчислимо (оцінимо) ймовірність події, яка полягає в тому, що $|\nu(A) - p| \leq \varepsilon$. Ми вважатимемо числове значення ймовірності p та кількість випробувань n такими, що число $\sqrt{npq}$ досить велике й можна застосувати асимптотичну формулу (3.5). Маємо

$$P(|\nu(A) - p| \leq \varepsilon) = P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(-\varepsilon \le \frac{m-np}{n} \le \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

За твердженням 3.2 (інтегральна теорема Муавра–Лапласа), одержуємо

$$P(|\nu(A)-p| \le \varepsilon) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Тому

$$P(|\nu(A)-p| \le \varepsilon) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\nu(A)-p| \le \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Одержаний результат виражає теорему Я. Бернуллі, а саме найпростішу форму так званого **закону великих чисел**. Сформулюємо цю теорему.

Теорема (Я. Бернуллі). Якщо в кожному з незалежних випробувань випадкова подія настає з однією і тією ж імовірністю p, то за досить великої кількості випробувань n з імовірністю, як завгодно близькою до 1, частота цієї події відрізнятиметься від її ймовірності менше, ніж як завгодно мале наперед задане число $\varepsilon > 0$.

Ця **теорема** дуже важлива. Вона підтверджує нашу інтуїтивну впевненість у тому, що за великої кількості випробувань повинна справджуватися наближена рівність

$$\nu(A) = \frac{m}{n} \cong p = P(A).$$

Одержану вище наближену рівність

$$P(|\nu(A) - p| \leq \varepsilon) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

використаємо для обчислення кількості незалежних випробувань, яка необхідна для того, щоб частота відрізнялася від імовірності не більше, ніж задане число.

Приклад 4.1. Скільки разів потрібно підкинути гральний кубик, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,9, частота появи шести очок відрізнялася від імовірності не більше ніж на $\varepsilon = 0{,}01$?

Розв'язання. Отже, нам потрібно знайти (оцінити) n з нерівності

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| \leq 0{,}01\right) \geq 0{,}9$$

або з нерівності

$$2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) \geq 0{,}9.$$

Тобто

$$\Phi\left(0{,}06\sqrt{\frac{n}{5}}\right) \geq 0{,}45.$$

Згідно з таблицею значень функції $\Phi(x)$, нерівність $\Phi(x) \geq 0{,}45$ еквівалентна нерівності $x \geq 1{,}65$.

Маємо

$$0{,}06 \cdot \sqrt{\frac{n}{5}} \geq 1{,}65$$

або

$$n \geq 5 \cdot \frac{(1{,}65)^2}{(0{,}06)^2} \cong 3782.$$

Отже, якщо $n \geq 3782$, то частота події відрізнятиметься від імовірності

$$p = \frac{1}{6}$$

не більше ніж на $0{,}01$.

18. Поняття випадкової величини та її функції розподілу. Приклади

Нехай розглядається деякий стохастичний експеримент і побудовано відповідний імовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. **Випадкова величина** – це величина, яка набуває тих або інших значень, у залежності від випадку. Значенням випадкової величини ми називатимемо дійсне число x, яке ставиться у відповідність можливому результатові стохастичного експерименту. Оскільки результати такого експерименту описуються елементарними подіями, то природно випадкову величину розглядати як функцію $X = X(\omega)$, визначену на просторі Ω елементарних подій ω.

Щоб мати можливість характеризувати змінну величину, в тому числі й $X(\omega)$, важливо мати змогу відповідати на такі запитання:

– чи може змінна величина набути значення, що дорівнює заданому числу a?

– належить значення змінної величини заданому проміжку чи не належить?

Оскільки значення $X(\omega)$ випадкові (ω – елементарна випадкова подія), то сказане вище означає, що ми матимемо можливість визначати ймовірності подій вигляду:

$$A = \{\omega : X(\omega) = a\} = \{X(\omega) \text{ *набуде значення* } a\},$$
$$B = \{\omega : a \le X(\omega) \le b\} =$$
$$\{\text{*значення* } X(\omega) \text{*належать відрізку* } [a, b]\},$$
$$C = \{\omega : a \le X(\omega) < b\} =$$
$$= \{\text{*значення* } X(\omega) \text{*належать напівінтервалові* } [a, b)\},$$
$$D = \{\omega : X(\omega) < a\} = \{\text{*значення* } X(\omega) \text{ *менше від* } a\},$$
$$E = \{\omega : X(\omega) \ge b\} = \{\text{*значення* } X(\omega) \text{ *не менше від* } b\}$$

тощо.

Для можливості обчислення ймовірностей таких подій потрібно, щоб ці події були елементами σ-алгебри $\mathfrak{F}$ імовірнісного простору, тобто, щоб $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, $C \in \mathfrak{F}$, $D \in \mathfrak{F}$, $E \in \mathfrak{F}$ і т. д.

Можна довести, що ці події взаємно пов’язані – події одного типу можна виразити за допомогою подій іншого типу. Зокрема, всі події можна виразити за допомогою подій вигляду події D. Наприклад,

$$C = \{\omega : a \le X(\omega) < b\} = \{\omega : X(\omega) < b\} \setminus \{\omega : X(\omega) < a\},$$
$$E = \{\omega : X(\omega) \ge b\} = \Omega \setminus \{\omega : X(\omega) < b\}$$

і т. ін.

У зв’язку з цим, надалі ми розглядатимемо тільки такі функції $X(\omega)$, що $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$, і на основі цієї вимоги сформулюємо

Означення 1.1. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – імовірнісний простір. Функція $X(\omega)$, яка набуває дійсних значень, визначена на Ω і така, що для будь-якого дійсного x

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F} \tag{1.1}$$

називається **випадковою величиною** на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Отже, важливе поняття випадкової величини вводиться в розгляд за допомогою вже відомого поняття випадкової події. Бачимо, що, згідно означення 1.1, вимога (1.1) справджується для всіх дійсних x. Тому для всіх дійсних x визначена ймовірність $P\{\omega: X(\omega) < x\}$.

Означення 1.2. Визначена на всій числовій осі функція

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) < x\} \tag{1.2}$$

називається **функцією розподілу** випадкової величини $X = X(\omega)$.

Наведемо приклади.

Приклад 1.1. Розглянемо стохастичний експеримент – підкидання монети двічі. Нехай випадкова величина – кількість випадань герба. Знайти події, породжені цією випадковою величиною і функцію розподілу цієї випадкової величини.

Розв'язання. У цьому експерименті

$$\Omega = \{ЧЧ, ЧГ, ГЧ, ГГ\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

σ-алгебра подій – спадковий клас підмножин множини Ω. Імовірність події визначатимемо за класичним означенням.

Випадкова величина може набувати три різних значення: 0, 1 або 2. Нехай $x \leq 0$. Тоді $\{\omega: X(\omega) < x\} = \emptyset \in \mathfrak{F}$.

Якщо $0 < x \leq 1$, то

$$\{\omega: X(\omega) < x\} = \{\omega: X(\omega) = 0\} = \{\omega_1\} = \{\text{ЧЧ}\} \in \mathfrak{F}.$$

Якщо ж $1 < x \leq 2$, то

$$\{\omega: X(\omega) < x\} = \{\omega: X(\omega) = 0\} \cup \{\omega: X(\omega) = 1\} =$$
$$= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\text{ЧЧ}, \text{ЧГ}, \text{ГЧ}\} \in \mathfrak{F}.$$

Нарешті, у випадку $x > 2$, маємо

$$\{\omega: X(\omega) < x\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\text{ЧЧ}, \text{ЧГ}, \text{ГЧ}, \text{ГГ}\} \in \mathfrak{F}$$

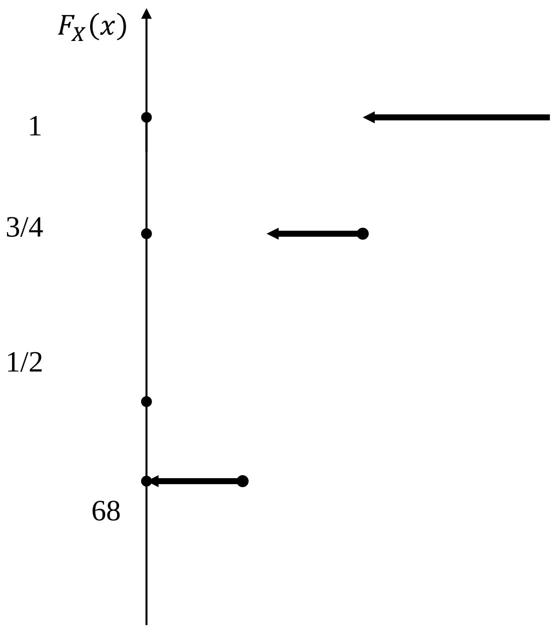
і

$$F_X(x) = P\{\omega\colon X(\omega) < x\} = \begin{cases} P(\emptyset), \text{якщо } x \le 0, \\ P(\text{ЧЧ}), \text{якщо } 0 < x \le 1, \\ P(\text{ЧЧ}, \text{ЧГ}, \text{ГЧ}), \text{якщо } 1 < x \le 2, \\ P(\Omega), \text{якщо } x > 2.. \end{cases}$$

Отже, для функції розподілу одержуємо

$$F_X(x) = \sum_{i:X(\omega_i)<x} p_i = \begin{cases} 0\,, \quad \text{якщо } x \le 0, \\ \frac{1}{4}, \text{якщо } 0 < x \le 1, \\ \frac{3}{4}, \text{якщо } 1 < x \le 2, \\ 1, \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції.



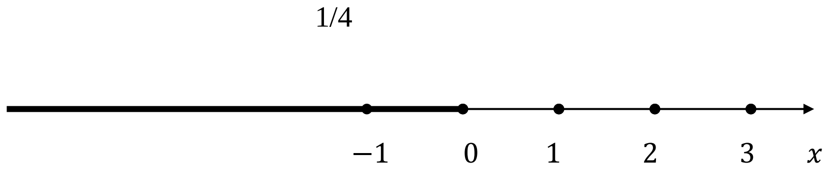


Рис. 1.1. Графік функції розподілу $F_X(x)$ (**приклад 1.1**)

Цю випадкову величину можна задати за допомогою таблиці

$X(\omega)$	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

У першому рядку таблиці записані всі можливі значення випадкової величини $X(\omega)$, а в другому – імовірності, з якими випадкова величина набуває відповідних значень. Ця таблиця ще називається **рядом розподілу** випадкової величини. Такий спосіб опису випадкової величини $X(\omega)$ рівносильний тому, що задана функція розподілу $F_X(x)$.

Приклад 1.2. Випадкова величина набуває одне зі значень $-1{,}1{,}2{,}3$ з ймовірностями 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 відповідно, тобто задається таблицею

$X(\omega)$	-1	1	2	3
P	0.1	0.2	0.3	0.4

Знайти функцію розподілу $F_X(x)$ і побудувати її графік.

Розв’язання. У цьому випадку маємо

$$F_X(x) = \sum_{i:X(\omega_i)<x} p_i = \begin{cases} 0\,, & \text{якщо } x \le -1, \\ 0.1, & \text{якщо } -1 < x \le 1, \\ 0.3, & \text{якщо } 1 < x \le 2, \\ 0.6, & \text{якщо } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

Графік функції розподілу подано на рис. 1.2.

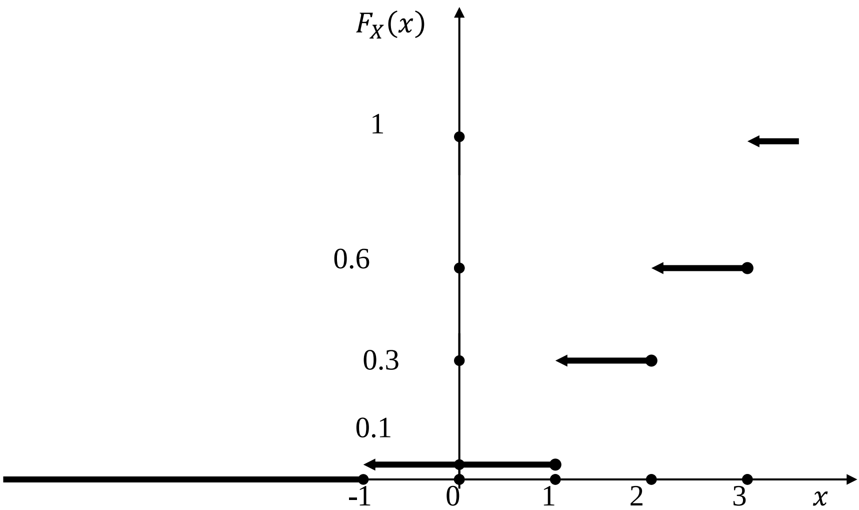


Рис. 1.2. Графік функції розподілу $F_X(x)$ (**приклад 1.2**)

Приклад 1.3 (Рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$).

На відрізку $[a, b]$ навмання вибирається точка. Вважаємо, що вибрати будь-яку точку відрізка рівно можливо. Простір елементарних подій $\Omega = [a, b]$. Визначимо випадкову величину $X(\omega) = \omega$ як координату вибраної на відрізку $[a, b]$ точки. Імовірність події $\{\omega: X(\omega) < x\}$ обчислюватимемо за геометричним означенням імовірності, що цілком логічно. Маємо

$$\{\omega: X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \textit{якщо } x \le a, \\ [a, x), & \textit{якщо } a < x \le b, \\ \Omega = [a, b], & \textit{якщо } x > b. \end{cases}$$

Отже,

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) < x\} =$$
$$= \begin{cases} P(\emptyset), & x \le a, \\ P\{\omega: a \le X(\omega) < x\}, & \\ P(\Omega), & x > b, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 1.3.

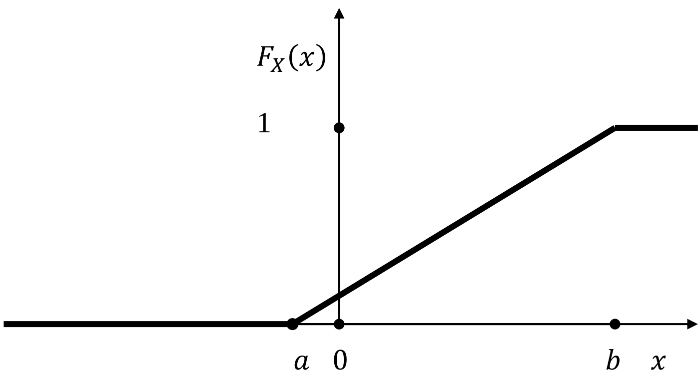


Рис. 1.3. Графік функції рівномірного розподілу на відрізку $[a, b]$

Наостанок наведемо без доведення кілька важливих тверджень.

Твердження 3.1. Якщо $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ – випадкові величини на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, то $X(\omega) + Y(\omega)$, $X(\omega) - Y(\omega)$, $X(\omega) \cdot Y(\omega)$ – випадкові величини.

Твердження 3.2. Якщо $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ – випадкові величини на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ і $P\{\omega: Y(\omega) \neq 0\} = 1$, то

$$\frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$$

– випадкова величина.

Твердження 3.3. Якщо $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ – випадкові величини на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, a, b – довільні сталі, то

$$\{\omega: X(\omega) = Y(\omega)\} \in \mathfrak{F}, \{\omega: X(\omega) \leq Y(\omega)\} \in \mathfrak{F},$$
$$\{\omega: X(\omega) < Y(\omega)\} \in \mathfrak{F},$$
$$\{\omega: X(\omega) < a, Y(\omega) < b\} \in \mathfrak{F}, \{\omega: X(\omega) \leq a, Y(\omega) > b\} \in \mathfrak{F}$$

тощо.

Твердження 3.4. Різні випадкові величини можуть мати однакові функції розподілу. Наприклад, нехай задано розподіл випадкової величини $X(\omega)$

$X(\omega)$	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Тоді

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Випадкова величина $Y(\omega) = 1 - X(\omega)$ задається такою ж таблицею

$Y(\omega)$	0	1
P		

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

і тому

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Як бачимо, $F_X(x) = F_Y(x)$, проте $X(\omega) \ne Y(\omega)$.

Зауваження 1.1. У подальшому ми часто для скорочення опускатимемо символ ω у записах подій, пов'язаних із випадковою величиною $X(\omega)$. Наприклад, замість $\{\omega: X(\omega) < x\}$ писатимемо $(X(\omega) < x)$, а замість $\{\omega: X(\omega) \le Y(\omega)\}$ використовуватимемо запис $(X \le Y)$.

Іноді писатимемо $F(x)$ замість $F_X(x)$.

Зауваження 1.2. У деяких підручниках і посібниках з теорії ймовірностей функцію розподілу визначають по-іншому, а саме:

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) \le x\}.$$

Властивості так визначеної функції розподілу відрізняються від властивостей функції розподілу, визначеної за **означенням 1.2**. Тому, використовуючи різні підручники та розв'язуючи задачі, потрібно бути уважним і з'ясовувати, яким означенням користується автор.

19. Властивості функції розподілу

За означенням 1.2, функція розподілу випадкової величини $X(\omega)$ визначена на всій числовій осі й

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{2.1}$$

як імовірність події $\{\omega : X(\omega) < x\}$.

У прикладах, розглянутих у попередньому параграфі, ми бачили, що ці функції не спадні, неперервні зліва, їхні границі в процесі $x \to -\infty$ дорівнюють 0, а в процесі $x \to +\infty$ дорівнюють 1. Виявляється, що такими властивостями володіє функція розподілу будь-якої випадкової величини. Сформулюємо ці властивості.

Властивість 2.1. Функція розподілу випадкової величини – **неспадна функція**, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то

$$F(x_1) \leq F(x_2). \tag{2.2}$$

Властивість 2.2.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Властивість 2.3. Функція розподілу випадкової величини неперервна зліва, тобто для будь-якого дійсного числа x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0). \tag{2.4}$$

Ці три властивості можна вважати **визначальними властивостями** функції розподілу випадкової величини, завдяки наступному твердженню.

Твердження 2.1. Якщо для всіх дійсних x визначена функція $\Phi(x)$, яка не спадна, неперервна зліва,

$$\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1,$$

то існують такий імовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ та випадкова величина $X(\omega)$ на цьому просторі, що $F_X(x) = \Phi(x)$.

Доведення цього твердження та властивостей функції розподілу нескладні, але виходять за рамки даного курсу лекцій. Наприклад, властивість 2.1 – наслідок властивостей імовірності. Дійсно, із $x_1 < x_2$ випливає

$$A = \{\omega : X(\omega) < x_1\} \subset B = \{\omega : X(\omega) < x_2\}.$$

Тому

$$P(A) = P\{\omega : X(\omega) < x_1\} = F_X(x_1) \le \\ \le P(B) = P\{\omega : X(\omega) < x_2\} = F_X(x_2).$$

Сформулюємо ще кілька властивостей.

Властивість 2.4. Якщо $a < b$, то

$$P\{\omega : a \le X(\omega) < b\} = F_X(b) - F_X(a). \tag{2.5}$$

Властивість 2.5.

$$P\{\omega : X(\omega) \le x\} = F_X(x + 0). \tag{2.6}$$

Властивість 2.6.

$$P\{\omega : X(\omega) = x\} = F_X(x + 0) - F_X(x). \tag{2.7}$$

Наведені властивості ефективно використовуються для розв'язування задач.

Зазначимо, що коли $F_X(x)$ неперервна, то за властивістю 2.6, $P\{\omega : X(\omega) = x_0\} = 0$ для будь-якого x_0 з області визначення функції $F_X(x)$, оскільки $F_X(x_0 + 0) = F_X(x_0)$. Звідси випливає такий факт: рівність нулю ймовірності деякої події не означає, що ця подія неможлива.

У класичній теорії ймовірностей вивчають не всі можливі випадкові величини, а тільки два їх типи.

Означення 2.1. Випадкова величина $X(\omega)$ називається **дискретною випадковою величиною**, якщо вона може набувати значення, яке належить скінченній або зліченній множині можливих значень.

Приклад 2.1. Нехай монета підкидається двічі. Кількість появ герба є випадковою величиною $X(\omega)$, яка може набувати будь-якого значення зі скінченної множини $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0, 1, 2\}$. Ця випадкова величина повністю задається таблицею

$X(\omega)$	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Приклад 2.2. Нехай у кожному випробуванні серії n незалежних випробувань деяка подія A відбувається з імовірністю p і випадкова величина $X(\omega)$ – кількість випробувань, в яких відбудеться подія A. Випадкова величина $X(\omega)$ може набувати значень із множини

$$\{x_0, x_1, \ldots,\ x_{n-1}, x_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}.$$

Зрозуміло, що випадкова величина задається такою таблицею:

$X(\omega)$	0	1	2	…	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(n)$

або за допомогою формули

$$P\{\omega: X(\omega) = m\} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Кажуть, що ця випадкова величина розподілена за законом Я. Бернуллі (за біномним законом).

Приклад 2.3. Нехай незалежні випробування проводяться доти, поки вперше відбудеться подія A, а $X(\omega)$ – випадкова величина, яка дорівнює кількості випробувань до першої появи цієї події. Тоді кажуть, що $X(\omega)$ розподілена за геометричним законом розподілу. Ця випадкова величина набуває значень зі зліченної множини $\{0, 1, 2, \ldots, m-1, m, \ldots\}$ і її розподіл задається формулою

$$P\{\omega: X(\omega) = m\} = P(m) = pq^m, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Приклад 2.4. Якщо розподіл випадкової величини задається формулою

$$P\{\omega: X(\omega) = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, m = 0, 1, 2, \ldots; \ \lambda > 0,$$

то кажуть, що $X(\omega)$ розподілена за **законом Пуассона з параметром $\boldsymbol{\lambda}$**.

У кожному з наведених прикладів можна знайти функцію розподілу й побудувати її графік. Легко переконатися, що знайдені функції розподілу, звичайно, мають усі вказані вище властивості. Окремо зазначимо той факт, що функція розподілу дискретної випадкової величини кусково-стала. Точками розриву такої функції розподілу є кожна з точок x_k множини можливих значень. Стрибки функції розподілу в цих точках дорівнюють відповідним імовірностям $P\{\omega: X(\omega) = x_k\}$. Деякі графіки функцій розподілу дискретних випадкових величин наведені в попередньому параграфі (рис. 1.1, рис. 1.2).

20. Щільність розподілу випадкової величини та її властивості

Означення 2.2. Випадкова величина $X(\omega)$ називається **випадковою величиною неперервного типу (неперервною випадковою величиною)**, якщо існує визначена на всій числовій осі функція $f_X(x)$, така, що

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du. \tag{2.8}$$

Функція $f_X(x)$ називається **щільністю розподілу випадкової величини** $X(\omega)$.

Зразу ж зауважимо, що щільність розподілу визначається неоднозначно, бо зміна значень підінтегральної функції $f_X(u)$ у зліченній кількості точок не змінює значення інтеграла.

Наприклад, якщо $X(\omega)$ розподілена рівномірно на $[a, b]$, то

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x \le b, \\ 1, x > b \end{cases}$$

і як щільність цього розподілу можна використовувати функцію

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, x \in [a, b] \end{cases}$$

або функцію

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x \notin (a, b), \\ \dfrac{1}{b-a}, x \in (a, b). \end{cases}$$

За відомою властивістю інтегралів, якщо $f_X(x)$ – неперервна, то $F_X(x)$ – диференційовна і

$$F'_X(x) = f_X(x). \tag{2.9}$$

Тому $f_X(x)$ називають також **диференціальною функцією розподілу** випадкової величини $X(\omega)$.

Наслідками властивостей функції розподілу є властивості щільності розподілу неперервної випадкової величини:

$$f_X(x) \ge 0, \tag{2.10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1, \tag{2.11}$$

$$P\{\omega: a \le X(\omega) < b\} = \int_{a}^{b} f_X(u)du. \tag{2.12}$$

Якщо $f_X(x)$ неперервна, то очевидні рівності

$$\lim_{x \to -\infty} f_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f_X(x) = 0.$$

Неперервна випадкова величина $X(\omega)$ задається функцією розподілу або щільністю розподілу. Площа криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox і графіком щільності розподілу за формулою (2.11), дорівнює 1 (рис. 2.1).

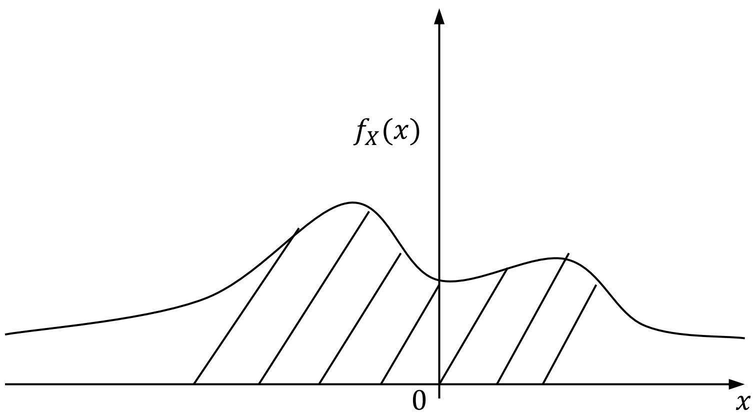


Рис. 2.1.

Імовірність $P\{\omega: a \leq X(\omega) < b\}$ дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена віссю Ox та лініями $y = f_X(x)$, $x = a, y = b$ (рис. 2.2)

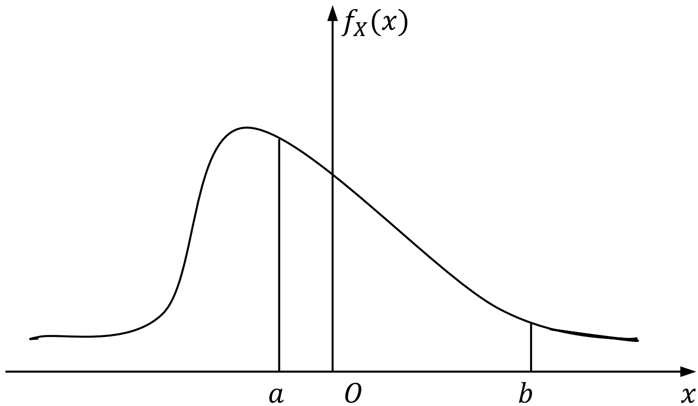


Рис. 2.2.

21. Приклади деяких розподілів випадкової величини неперервного типу

Приклад 3.1. Ми вже виписували функції та щільності розподілу деяких випадкових величин неперервного типу. Наприклад, якщо

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b \end{cases} \quad \text{і} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \end{cases}$$

то кажуть, що випадкова величини $X(\omega)$ розподілена рівномірно на $[a,b]$.

Якщо $a = 0$, $b = 1$, то

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1], \\ 1, & x \in [0,1]. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Графіки цих функцій зображено на рис. 3.1 і рис. 3.2 відповідно

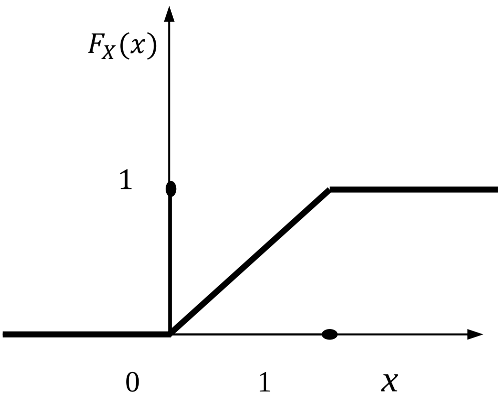
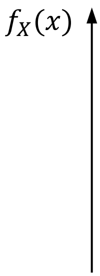


Рис. 3.1



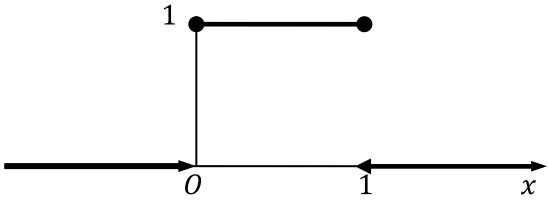


Рис. 3.2

Приклад 3.2. Кажуть, що випадкова величина, яка набуває додатних значень, розподілена за **показниковим законом** із параметром $\boldsymbol{\lambda} > 0$, якщо

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Графіки $F_X(x)$ і $f_X(x)$ при $\lambda = 1$ зображено на рис. 3.3 і 3.4 відповідно.

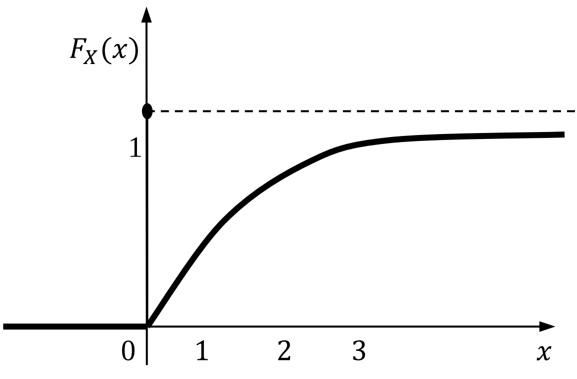


Рис. 3.3

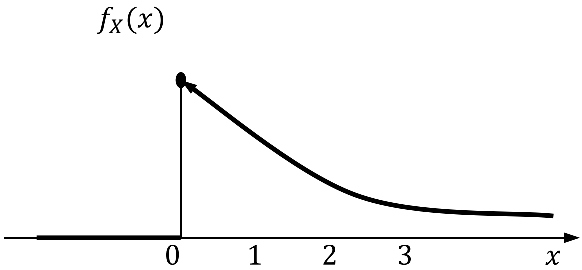


Рис. 3.4

Приклад 3.3. Дуже важливу роль у теорії ймовірностей відіграє випадкова величина, яка розподілена за **нормальним законом (законом Гаусса)**. Функція розподілу і щільність розподілу цієї випадкової величини визначаються відповідно за формулами

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du\,, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{3.3}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{3.4}$$

Дійсні числа a і σ – параметри нормального розподілу, причому $\sigma > 0$. Зміст цих параметрів ми з'ясуємо пізніше.

Якщо $F_X(x)$ і $f_X(x)$ мають відповідно вигляд (3.3) і (3.4), то часто кажуть, що випадкова величина $X(\omega)$ розподілена за законом $N(a, \sigma^2)$. Ця випадкова величина може набувати будь-яких дійсних значень. Наведемо графіки цих функцій.

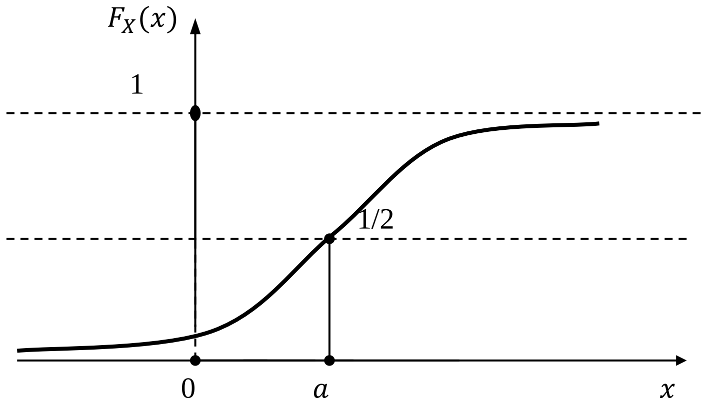


Рис. 3.5

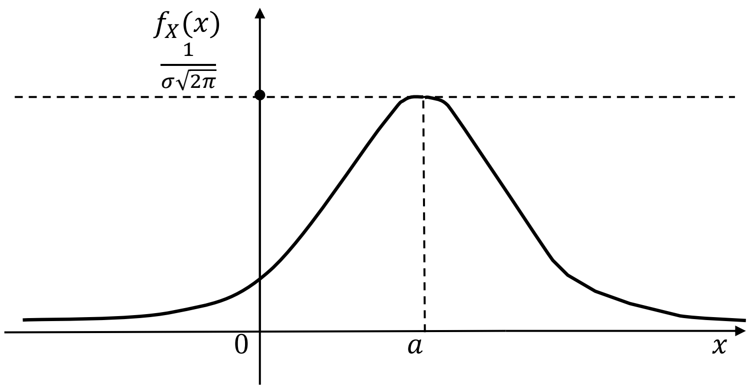


Рис. 3.6. Графік функції $f_X(x)$

Якщо параметри функції розподілу $a = 0$ і $\sigma = 1$, то кажуть, що $X(\omega)$ розподілена за **стандартним нормальним законом** $N(0, 1)$. Тоді

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \; f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Зазначимо, що такого типу функції фігурують у граничних теоремах Муавра–Лапласа і, як ми могли переконатися, їх значення можна знаходити, використовуючи таблиці.

Розглянемо ще кілька прикладів випадкових величин неперервного типу.

Приклад 3.4. Нехай $\Phi(x) = Aarctg\, x + B$, де A, B – дійсні числа. Ця функція визначена за всіх дійсних x, неперервна, монотонно зростаюча, якщо $A > 0$. У випадку, коли ще й

$$\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0, \; \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1,$$

то $\Phi(x)$ – функція розподілу випадкової величини $X(\omega)$. Визначимо A, B так, щоб справджувалися вказані вище умови

$$\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = \lim_{x \to -\infty} (Aarctg\, x + B) = -A\frac{\pi}{2} + B,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \lim_{x \to +\infty} (Aarctg\, x + B) = A\frac{\pi}{2} + B,$$

а для визначення коефіцієнтів A, B маємо систему

$$\begin{cases} -A\frac{\pi}{2} + B = 0, \\ A\frac{\pi}{2} + B = 1. \end{cases}$$

Звідси

$$A = \frac{1}{\pi}, B = \frac{1}{2}.$$

Отже, функція

$$F_X(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

є функцією розподілу деякої випадкової величини $X(\omega)$. Ця випадкова величина може набувати будь-яких дійсних значень. Щільність розподілу цієї випадкової величини має вигляд

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}. \tag{3.6}$$

Кажуть, що ця випадкова величина **розподілена за законом Коші (законом арктангенса)**.

Часто **розподілом Коші** називають розподіл із функцією розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{2}{\pi} arctg\, x, & x > 0 \end{cases}$$

і щільністю –

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Така випадкова величина набуває значень з інтервалу $(0, +\infty)$.

Ще один приклад для того, щоб проілюструвати властивості щільності розподілу.

Приклад 3.5. З'ясувати, якого значення має набувати параметр $a > 0$ для того, щоб функція

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, a), \\ 2 - x, & x \in (0, a) \end{cases}$$

була щільністю розподілу деякої випадкової величини $X(\omega)$, яка набуває значень з інтервалу $(0, a)$.

Розв'язання. Ми знаємо, що щільність розподілу $f_X(x)$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = 1.$$

У нашому випадку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{a} (2-u)du + \int_{a}^{+\infty} 0du =$$

$$= \int_{0}^{a} (2-u)du = 2a - \frac{a^2}{2}.$$

Для визначення параметра a одержуємо

$$2a - \frac{a^2}{2} = 1$$

або $a^2 - 4a + 2 = 0$. Останнє рівняння має два дійсних розв'язки: $a_1 = 2 - \sqrt{2}, a_2 = 2 + \sqrt{2}$.

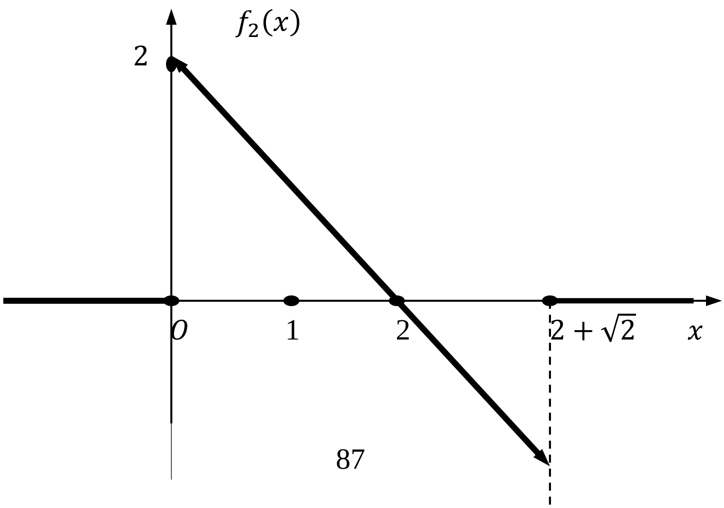


Рис. 3.7

Розглянемо відповідно дві функції

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0;\ 2-\sqrt{2}\right), \\ 2-x, & x \in (0;\ 2-\sqrt{2}) \end{cases}$$

і

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0;\ 2+\sqrt{2}\right), \\ 2-x, & x \in \left(0;\ 2+\sqrt{2}\right). \end{cases}$$

Графік функції $f_2(x)$ зображено на рис. 3.7. На інтервалі $\left(0, 2+\sqrt{2}\right)$ ця функція набуває додатних і від'ємних значень. Оскільки щільність розподілу за її властивостями не може набувати від'ємних значень, то приходимо до висновку, що функція $f_2(x)$ не може бути щільністю розподілу випадкової величини.

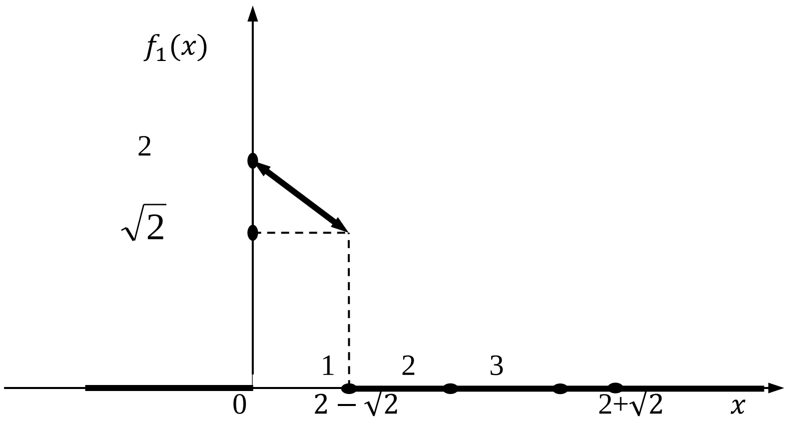


Рис. 3.8

Виберемо тепер значення параметра $a = a_1 = 2 - \sqrt{2}$ і проаналізуємо поведінку функції $f_1(x)$. Графік функції $f_1(x)$ має вигляд, зображений на рис. 3.8.

Отже, функція $f_X(x) = f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0;\ 2-\sqrt{2}\right), \\ 2-x, & x \in \left(0;\ 2-\sqrt{2}\right) \end{cases}$

може бути щільністю розподілу деякої випадкової величини $X(\omega)$, яка набуває значень з інтервалу $(0; a) = (0; 2 - \sqrt{2})$.

Для цієї випадкової величини легко знайти функцію розподілу:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ \int_0^x (2-u)du, 0 \leq x < 2-\sqrt{2}, \\ 1, \ \ x > 2-\sqrt{2}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ 2x - \dfrac{x^2}{2}, 0 < x \leq 2-\sqrt{2}, \\ 1, x > 2-\sqrt{2}. \end{cases}$$

У подальшому ми використовуватимемо деякі інші закони розподілу. Тоді функції розподілу або щільності розподілу задаватимемо відповідними формулами.

22. Визначення функцій розподілу функцій випадкових величин

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задана випадкова величина $X(\omega)$ і $F_X(x)$, її функція розподілу. Нехай $Y(\omega) = \varphi(X(\omega))$, де $\varphi(x)$ належить до досить широкого класу функцій. Наприклад, нехай $\varphi(x)$ – визначена на всій числовій осі, неперервна й монотонна. Тоді $Y(\omega)$ теж випадкова величина на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. За відомою функцією $F_X(x)$ можна побудувати функцію розподілу $F_Y(x)$ випадкової величини $Y(\omega)$. Якщо $\varphi(x)$ – функція, яка має згадані вище властивості, то існує $\varphi^{-1}(x)$, обернена до $\varphi(x)$ функція. Тому

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\{\omega: \varphi(X(\omega)) < x\} =$$
$$= P\{\omega: X(\omega) < \varphi^{-1}(x)\} = F_X\big(\varphi^{-1}(x)\big).$$

Наведемо кілька простих прикладів.

Приклад 4.1. Нехай $Y(\omega) = aX(\omega) + b$, де a, b – деякі сталі і $a \neq 0$. Знайти функцію розподілу випадкової $Y(\omega)$, якщо відома функція розподілу $F_X(x)$ випадкової величини $X(\omega)$.

Розв'язання. Якщо $a > 0$, то

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\{\omega: aX(\omega) + b < x\} =$$
$$= P\left\{\omega: X(\omega) < \frac{x-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Якщо ж $a < 0$, то

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\{\omega: aX(\omega) + b < x\} =$$
$$= P\left\{\omega: X(\omega) > \frac{x-b}{a}\right\} = 1 - P\left\{\omega: X(\omega) \leq \frac{x-b}{a}\right\} =$$
$$= 1 - P\left\{\omega: X(\omega) < \frac{x-b}{a}\right\} - P\left\{\omega: X(\omega) = \frac{x-b}{a}\right\} =$$
$$= 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) - \left(F_X\left(\frac{x-b}{a} + 0\right) - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) =$$
$$= 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a} + 0\right).$$

Ми одержали

$$F_Y(x) = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right), \textit{якщо } a > 0, \\ 1 - F_X\left(\dfrac{x-b}{a} + 0\right), \textit{якщо } a < 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Для того, щоб одержати співвідношення (4.1), ми використали властивість 2.6 функцій розподілу, а саме формулу (2.7).

В окремому випадку, коли випадкова величина $X(\omega)$ розподілена рівномірно на відрізку $[0, 1]$ і $Y(\omega) = -2X(\omega) + 3$, матимемо

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x, \quad 0 \le x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Використовуючи (4.1) і те, що в цьому випадку $a = -2 < 0, b = 3$, одержуємо

$$F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{x-3}{-2} + 0\right).$$

Нам відомо, що функція розподілу $F_X(x)$ рівномірно розподіленої випадкової величини – неперервна функція. Тому

$$F_X\left(\frac{x-3}{-2} + 0\right) = F_X\left(\frac{x-3}{-2}\right) = F_X\left(\frac{3-x}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \dfrac{3-x}{2} < 0, \\ \dfrac{3-x}{2}, & 0 \le \dfrac{3-x}{2} \le 1, \\ 1, & \dfrac{3-x}{2} > 1, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x > 3, \\ \dfrac{3-x}{2}, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x < 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & x < 1, \\ \dfrac{3-x}{2}, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Отже,

$$F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{x-3}{-2} + 0\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-3}{-2}\right) =$$

$$= 1 - \begin{cases} 1, & x < 1, \\ \dfrac{3-x}{2}, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < \\ 1 - \dfrac{3-x}{2}, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Тобто

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вигляд функції розподілу випадкової величини $Y(\omega) = -2X(\omega) + 3$ дає можливість стверджувати, що ця випадкова величина розподілена рівномірно на відрізку $[1,\ 3]$.

Приклад 4.2. Нехай відома функція розподілу $F_X(x)$ випадкової величини $X(\omega)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $Y(\omega) = |X(\omega)|$.

Розв'язання. За означенням функції розподілу, маємо

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\{\omega: |X(\omega| < x\}.$$

Якщо $x \le 0$, то подія $\{\omega: |X(\omega| < x\}$ неможлива. Тому в цьому випадку

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\{\omega: |X(\omega| < x\} = P(\emptyset) = 0.$$

Нехай $x > 0$. Тоді

$$\begin{gathered} F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\{\omega: |X(\omega| < x\} = \\ = P\{\omega: -x < X(\omega) < x\} = \\ = P\{\omega: -x \le X(\omega) < x\} - P\{\omega: X(\omega) = -x\}. \end{gathered}$$

Використаємо формули (2.5) і (2.7):

$$\begin{gathered} F_Y(x) = P\{\omega: -x \le X(\omega) < x\} - P\{\omega: X(\omega) = -x\} = \\ = F_X(x) - F_X(-x) - \big(F_X(-x+0) - F_X(-x)\big) = \\ = F_X(x) - F_X(-x+0). \end{gathered}$$

Остаточно для випадкової величини $Y(\omega) = |X(\omega)|$ одержуємо функцію розподілу у вигляді

$$\begin{gathered} F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\{\omega: |X(\omega| < x\} = \\ = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ F_X(x) - F_X(-x+0), & x > 0. \end{cases} \end{gathered}$$

Обидва розглянуті приклади ілюстративні. Вони показують, як для простих функцій $\varphi(x)$, використовуючи визначення функції розподілу та її властивості, за відомою функцією $F_X(x)$ можна знайти (побудувати) функцію розподілу випадкової величини $Y(\omega) = \varphi(X(\omega))$.

Наступні два приклади тісно пов'язані з рівномірним розподілом і широко використовуються в імітаційному моделюванні.

Приклад 3.4. Нехай $X(\omega)$ – рівномірно розподілена випадкова величина на відрізку $[0,1]$. Її функція розподілу має вигляд

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадкову величину

$$Y(\omega) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{X(\omega)} = -\frac{1}{\lambda} \ln X(\omega),$$

де $\lambda > 0$. Множина значень цієї випадкової величини збігається з множиною всіх дійсних додатних чисел, тобто $Y(\omega) \in (0, \infty)$. Це означає, що при $x \le 0$

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P(\emptyset) = 0.$$

Нехай $x > 0$. Тоді

$$\begin{gathered} F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\left\{\omega: -\frac{1}{\lambda} \ln X(\omega) < x\right\} = \\ = P\{\omega: \ln X(\omega) > -\lambda x\} = P\left\{\omega: X(\omega) > e^{-\lambda x}\right\} = \\ = 1 - P\left\{\omega: X(\omega) \le e^{-\lambda x}\right\} = \\ = 1 - P\left\{\omega: X(\omega) < e^{-\lambda x}\right\} - P\left\{\omega: X(\omega) = e^{-\lambda x}\right\} = \\ = 1 - F_X\left(e^{-\lambda x}\right) - P\left\{\omega: X(\omega) = e^{-\lambda x}\right\}. \end{gathered}$$

Використаємо те, що $X(\omega)$ – неперервна. Тому $P\left\{\omega: X(\omega) = e^{-\lambda x}\right\} = 0$. Оскільки $e^{-\lambda x} > 0$, то $F_X\left(e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x}$. Отже, остаточно для функції розподілу випадкової величини

$$Y(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln X(\omega)$$

одержуємо

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Це означає, що випадкова величина

$$Y(\omega) = -\frac{1}{\lambda}\ln X(\omega)$$

розподілена за показниковим законом розподілу з параметром $\lambda > 0$.

Приклад 4.4. Нехай функція розподілу $F_X(x)$ випадкової величини $X(\omega)$ – неперервна й монотонно зростаюча функція, а випадкова величина $Y(\omega)$ має вигляд $Y(\omega) = F_X(X(\omega))$. Знайти функцію розподілу $F_Y(x)$ випадкової величини $Y(\omega)$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leq F_Y(x) \leq 1$, то $F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = 0$, якщо $x \leq 0$ і $F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = 1$, при $x > 1$. Розглянемо випадок, коли $0 < x \leq 1$. Позаяк функція $F_X(x)$ неперервна й монотонно зростаюча, то для неї існує обернена. Тобто для будь-якого значення x існує обернена функція $F_X^{-1}(x)$ і $F_X^{-1}\big(F_X(x)\big) = x$. Тому

$$F_Y(x) = P\{\omega: Y(\omega) < x\} = P\big\{\omega: F_X\big(X(\omega)\big) < x\big\} =$$
$$= P\{\omega: X(\omega) < F_X^{-1}(x)\} = F_X\left(F_X^{-1}(x)\right) = x.$$

Остаточно, враховуючи, що функція розподілу випадкової величини $Y(\omega)$ неперервна, маємо

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Отже, випадкова величина $Y(\omega) = F_X(X(\omega))$ рівномірно розподілена на відрізку $[0,\ 1]$. Скористаємося цим результатом пізніше для моделювання випадкових величин.

23. Моделювання випадкових величин

Найважливіша риса імітаційної моделі визначається можливістю імітації впливу випадкових факторів на розвиток процесів, що вивчаються. Як правило, випадкові фактори – це випадкові величини, закони розподілу яких вважаються відомими. Моделювати (імітувати) дію цих факторів – одна з основних складових пропонованої моделі.

Вкажемо на деякі найпростіші методи моделювання випадкових величин. Згадану в параграфі 1.10 процедуру **random** вибору навмання числа з інтервалу $(0, 1)$ можна вважати з досить високим рівнем адекватності процедурою, за допомогою якої отримують значення випадкової величини $X(\omega)$, розподіленої за рівномірним законом розподілу на $[0, 1]$. Тобто функція розподілу $F_X(x)$ і щільність розподілу $f_X(x)$ такої випадкової величини мають відповідно вигляд

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x, 0 \le x \le 1, \\ 1, x > 1, \end{cases} f_X(x = \begin{cases} 0, \notin [0, 1], \\ 1, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Моделювання дискретної випадкової величини. Нехай задано закон розподілу дискретної випадкової величини $Y(\omega)$

$Y(\omega)$	y_1	y_2	…	y_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Поділимо відрізок $[0, 1]$ точками

$$a_0 = 0, a_1 = p_1, a_2 = p_1 + p_2, \ldots, a_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

на n частин. Тоді події $A_i = \{\omega: a_{i-1} \le X(\omega) < a_i\}$ та $B_i = \{\omega: Y(\omega) = y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, $A_n = \{\omega: a_{n-1} \le X(\omega) \le a_n\}$ і $B_n = \{\omega: Y(\omega) = y_n\}$, рівноймовірні, тобто $P(A_1) = P(B_1) = p_1$, $P(A_2) = P(B_2) = p_2$, …, $P(A_n) = P(B_n) = p_n$. Тому за принципом рівної ймовірності, висловленим у 1.10, можемо вважати, що $Y(\omega) = y_i$ тоді і тільки тоді, коли відбудеться подія A_i. Отже, алгоритм моделювання дискретної випадкової величини зводиться до одержання значення псевдовипадкового числа, рівномірно розподіленого на відрізку $[0,1]$, і відшукання номера частини цього відрізка, на яку дане число попаде. Цей номер визначає відповідне значення випадкової величини $Y(\omega)$.

Зазначимо, що у випадку, коли випадкова величина $Y(\omega)$ може набувати значень зі зліченної множини (розподіл Пуассона, геометричний розподіл та ін.), множину значень $y_1, y_2, y_3, \ldots$, як правило, впорядковують за спаданням імовірностей. Тоді, якщо для досить малого наперед заданого $\varepsilon > 0$ виявиться, що $1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \leq \varepsilon$, то випадкову величину $Y(\omega)$ можна апроксимувати (замінити з невеликою похибкою) випадковою величиною $Y^*(\omega)$, яка задається законом розподілу

$Y^*(\omega)$	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n	y_{n+1}
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n	$1 - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$

У процесі моделювання випадкова величина $Y^*(\omega)$ не набуватиме малоймовірних значень $y_{n+2}, y_{n+3}, \ldots$, імовірність значення y_{n+1} може бути не більше ніж $\mathcal{E}$.

Припустимо тепер, що випадкова величина $Y(\omega)$ **неперервна**, наприклад, рівномірно розподілена на відрізку $[a,b]$. Тоді значення $Y(\omega)$ можна одержувати, використавши рівність

$$Y(\omega) = (b - a)X(\omega) + a,$$

де $X(\omega)$ – рівномірно розподілена випадкова величина на відрізку $[0,1]$, значення якої можна одержати за допомогою звернення до процедури **random**. Крім цього, використовуючи означення функції розподілу та її властивості, легко встановити, що випадкова величина $Y(\omega) = (b - a)X(\omega) + a$ рівномірно розподілена на відрізку $[a,b]$.

Моделювання випадкової величини $Y(\omega)$, яка розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda > 0$, як показано в 3.4, зводиться до обчислення значення випадкової величини

$$Y(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln X(\omega),$$

причому значення $X(\omega)$ – результат звернення до процедури **random**.

Розглянемо тепер досить загальний випадок, коли потрібно моделювати випадкову величину $Y(\omega)$, з відомою функцією розподілу. Якщо $F_Y(x)$ – неперервна й монотонно зростаюча функція, то, як свідчить приклад 4.4 попереднього параграфа, $X(\omega) = F_Y(Y(\omega))$ – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0, 1]$. Отже, якщо число $x \in [0, 1]$ – результат звернення до процедури **random**, то розв'язок y рівняння

$$F_Y(y) = x \qquad (5.1)$$

виявиться значенням випадкової величини $Y(\omega)$. Тому процес моделювання випадкової величини $Y(\omega)$ зводиться до розв'язання рівняння (5.1) за кожного звернення до генератора псевдовипадкових чисел **random**. За умов, які вимагаються від функції розподілу $F_Y(x)$, розв'язок рівняння (5.1) існує, причому єдиний. Іноді цей розв'язок вдається знайти точно. Однак, оскільки рівняння (5.1) у загальному випадку нелінійне, доводиться застосовувати наближені числові методи. Серед них – відомі методи: ділення відрізка навпіл, метод січних, метод дотичних і т. ін. Правда, в залежності від $F_Y(y)$, можуть виникнути певні труднощі. Зокрема у випадку, коли корінь рівняння (5.1) не локалізований на скінченному відрізкові (може бути будь-яким дійсним числом). Ці труднощі можуть бути зумовлені й складністю функції $F_Y(y)$. Наприклад, якщо $Y(\omega)$, – нормально розподілена випадкова величина з параметрами a та σ, то рівняння (5.1) набуває вигляду

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = x.$$

Тут невідоме значення y – верхня межа невласного інтеграла, знайти яке непросто. Тому розроблено багато інших методів моделювання випадкових подій та випадкових величин.