

24. Математичне сподівання випадкової величини. Означення.

Нехай $X(\omega)$ – дискретна випадкова величина, яка набуває значень $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ відповідно. Тобто

$$P\{\omega: X(\omega) = x_i\} = p_i, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Означення 1.1. Математичним сподіванням MX дискретної випадкової величини $X(\omega)$ називають число

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad (1.1)$$

якщо ряд збігається абсолютно.

Якщо ряд не збігається абсолютно, то його сума залежить від порядку сумування його доданків і характеристика MX втрачає свій сенс.

Якщо $X(\omega)$ набуває скінченної кількості значень x_1, x_2, \dots, x_n , то сума в (1.1) скінченна

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (1.2)$$

Щоб краще зрозуміти суть характеристики – математичне сподівання, використаємо таку інтерпретацію. Нехай відомий закон розподілу випадкової величини $X(\omega)$

$X(\omega)$	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

Вважатимемо, що на осі абсцис у точках з координатами x_1, x_2, \dots, x_n зосереджено відповідно маси $m_1 = p_1, m_2 = p_2, \dots, m_n = p_n$. Маємо

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Позначимо

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = MX.$$

Отже, MX – абсциса центра мас даної системи тіл, тобто деяке середнє значення, навколо якого групуються всі можливі значення випадкової величини $X(\omega)$. Тому математичне сподівання випадкової величини часто ще називають середнім значенням.

Зазначимо, що математичне сподівання існує не для будь-якої випадкової величини, оскільки ряд (1.1) може не збігатися або збігатися умовно.

Нехай, наприклад, випадкова величина $X(\omega)$ задана законом розподілу

$$P\{\omega: X(\omega) = \frac{(-1)^i 2^i}{i}\} = \frac{1}{2^i}, i = 1, 2, 3, \dots$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i 2^i}{i} \cdot \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}.$$

Одержали суму знакозмінного ряду (члени ряду почергово змінюють знак), який збігається умовно, а ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

– це розбіжний гармонічний ряд. Отже, математичного сподівання цієї випадкової величини не існує.

Для випадкової величини неперервного типу, для якої відома щільність розподілу $f_X(x)$, математичне сподівання визначається за допомогою інтеграла.

Означення 1.2. Математичним сподіванням випадкової величини неперервного типу називається число

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1.3)$$

за умови

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < \infty. \quad (1.4)$$

Умова (1.4) означає, що інтеграл (1.3) збігається абсолютно.

Якщо умова (1.4) не справджується, тобто інтеграл (1.3) не збігається абсолютно, то вважають, що математичного сподівання такої випадкової величини не існує.

Зауваження. Означення 1.1 та означення 1.2 – часткові випадки єдиного загального означення математичного сподівання випадкової величини. Це загальне означення ґрунтується на понятті інтеграла Стільтьєса або інтеграла за мірою. Вивчення таких інтегралів не входить до обов’язкових розділів курсу вищої математики і тому ми не даємо загального означення.

Якщо вважати, що $f_X(x)$ – щільність розподілу маси на числовій осі (безмежний стрижень) або частини цієї числової осі (стрижень), то, як впливає з теоретичних основ механіки та властивостей щільності розподілу випадкової величини, MX – абсциса центра мас відповідного стрижня.

25. Приклади обчислення математичного сподівання.

Приклад 1.1. Нехай випадкова величина розподілена за законом

$X(\omega)$	0	1
P	$1 - p$	p

$0 < p < 1$. Знайти математичне MX сподівання цієї випадкової величини.

Розв’язання.

$$MX = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Приклад 1.2. Стрілець має чотири набой і стріляє в ціль до першого влучення. Імовірність влучення за кожного пострілу дорівнює $p = 0,6$. Обчислити математичне сподівання MX кількості пострілів.

Розв’язання. Позначимо через $X(\omega)$ випадкову величину, яка означає кількість пострілів у даному стохастичному експерименті. Ця випадкова величина може набувати значення 1, 2, 3 або 4. Отже, можемо визначити такі події: $\{\omega: X(\omega) = 1\}$ – стрілець влучив у ціль з першого пострілу; $\{\omega: X(\omega) = 2\}$ – стрілець влучив у ціль з другого пострілу, тобто за першим пострілом промахнувся і змушений стріляти ще раз; $\{\omega: X(\omega) = 3\}$ – стрілець влучив у ціль за третім пострілом, тобто за першого і другого пострілів промахнувся; $\{\omega: X(\omega) = 4\}$ – стрілець промахнувся, стріляючи тричі, і змушений стріляти четвертий раз (зверніть увагу, що в цьому стохастичному експерименті **ми не можемо стверджувати**, що стрілець влучить **напевно** в ціль, зробивши чотири постріли).

Знайдемо ймовірності вказаних вище подій:

$$P\{\omega: X(\omega) = 1\} = 0,6; P\{\omega: X(\omega) = 2\} = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24;$$

$$P\{\omega: X(\omega) = 3\} = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,096;$$

$$P\{\omega: X(\omega) = 4\} = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини $X(\omega)$ має вигляд

$X(\omega)$	1	2	3	4
P	0,6	0,24	0,096	0,064

Обчислимо математичне сподівання

$$MX = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,096 + 4 \cdot 0,064 = 1,624.$$

Зауважимо, що випадкова величина набуває цілих додатних значень, а математичне сподівання – не ціле число.

26. Властивості математичного сподівання

Вкажемо без доведення найважливіші властивості математичного сподівання випадкової величини.

Властивість 1.1. Математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій.

Сталу величину C можемо вважати дискретною випадковою величиною $X(\omega)$, яка набуває лише одне значення $X(\omega) = C$ з ймовірністю 1, тобто $P\{\omega: X(\omega) = C\} = 1$. Тому

$$MX = C. \quad (1.5)$$

Властивість 1.2. Якщо математичні сподівання випадкових величин $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ існують, то математичне сподівання суми цих випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто

$$M(X(\omega) + Y(\omega)) = MX + MY. \quad (1.6)$$

Для дискретних випадкових величин $X(\omega)$ і $Y(\omega)$, таких, що $P\{\omega: X(\omega) = x_m\} = p_m$ і $P\{\omega: Y(\omega) = y_n\} = q_n$, вказану властивість легко довести. Позначимо $p_{mn} = P\{\omega: X(\omega) + Y(\omega) = x_m + y_n\}$. Як бачимо,

$$\sum_n p_{mn} = p_m, \quad \sum_m q_{mn} = q_n.$$

Тому

$$\begin{aligned} M(X(\omega) + Y(\omega)) &= \sum_n \sum_m (x_m + y_n) p_{mn} = \\ &= \sum_n \sum_m x_m p_{mn} + \sum_n \sum_m y_n p_{mn} = \\ &= \sum_m x_m \sum_n p_{mn} + \sum_n y_n \sum_m p_{mn} = \\ &= \sum_m x_m p_m + \sum_n y_n q_n = MX + MY. \end{aligned}$$

Властивість 1.3. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX) = CMX. \quad (1.7)$$

Властивість 1.4 (Наслідок властивостей 1.2 і 1.3).

$$M \sum_{k=1}^n C_k X_k(\omega) = \sum_{k=1}^n C_k M X_k(\omega), \quad (1.8)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n – довільні сталі.

Вкажемо ще на деякі важливі властивості математичного сподівання, які не очевидні.

Властивість 1.5. Якщо математичні сподівання випадкових величин $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ існують, випадкові величини $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ **незалежні**, то існує математичне сподівання добутку $X(\omega)Y(\omega)$ і

$$M(X(\omega)Y(\omega)) = MXMY. \quad (1.9)$$

Нехай $X(\omega)$ – випадкова величина, для якої відомий розподіл у тій або іншій формі, і нехай $g(x)$ – деяка функція, задана на множині дійсних чисел. Виявляється, що для обчислення математичного сподівання випадкової величини $Y(\omega) = g(X(\omega))$ не обов'язково визначати закон розподілу $Y(\omega)$, а можна виразити MY за допомогою значень функції $g(x)$ та закону розподілу випадкової величини $X(\omega)$.

Властивість 1.6. Якщо $X(\omega)$ – дискретна випадкова величина із законом розподілу $P\{\omega: X(\omega) = x_i\} = p_i$, а $Y(\omega) = g(X(\omega))$, то

$$MY = \sum_i g(x_i) p_i. \quad (1.10)$$

Якщо ж $X(\omega)$ – випадкова величина неперервного типу зі щільністю розподілу $f_X(x)$, то

$$MY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (1.11)$$

Зрозуміло, вважаємо, що ряд (1.10) та інтеграл (1.11) збігаються абсолютно.

Властивість 1.7. Якщо існують математичні сподівання випадкових величин $X(\omega)$ і $Y(\omega)$, то з нерівності $X(\omega) < Y(\omega)$ випливає нерівність $MX < MY$.

Властивість 1.8. Якщо існує математичне сподівання випадкової величини $X(\omega)$ і $X(\omega) \geq 0$, то для будь-якого дійсного числа $\varepsilon > 0$ справджується нерівність

$$P\{\omega: X(\omega) \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} MX. \quad (1.12)$$

Нерівність (1.12) називається нерівністю Маркова або першою нерівністю Чебишова.

Вказані вище властивості математичного сподівання використовуються в різних дослідженнях. Зокрема, вони полегшують обчислення в деяких випадках математичного сподівання. Використовуючи **приклад 1.1** і **властивість 1.4**, можна простіше знайти математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за законом Я. Бернуллі (схема незалежних випробувань). Дійсно, розглянемо випадкову величину

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо в } i - \text{му випробуванні подія відбулася;} \\ 0, & \text{якщо в } i - \text{му випробуванні ця подія не відбулася.} \end{cases}$$

Нехай p – імовірність появи події в одному випробуванні та проведено n випробувань. Тоді, якщо випадкова величина $X(\omega)$ – кількість випробувань, в яких подія відбулася, то

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega).$$

Розподіли випадкових величин $X_i(\omega)$ відомі:

$X_i(\omega)$	0	1
P	$1 - p$	p

Математичні сподівання цих дискретних випадкових величин $MX_i = p$. За **властивістю 1.4** легко знаходимо

$$MX = MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n = p + p + \dots + p = np.$$

27. Моменти випадкової величини. Означення.

Нехай $m > 0$ – ціле число, $X(\omega)$ – випадкова величина. Припустимо, що існує математичне сподівання $M(X(\omega))^m = \alpha_m$.

Означення 2.1. Якщо існує $M(X(\omega))^m = \alpha_m$, то α_m називається початковим моментом m -го порядку випадкової величини $X(\omega)$.

Зрозуміло, що число α_m існує, якщо існує число $M|X(\omega)|^m$, яке називається **абсолютним початковим моментом** порядку m випадкової величини $X(\omega)$.

Означення 2.2. Моменти випадкової величини $X(\omega) - MX$ називаються **центральною моментами** й позначаються μ_m .

$$\text{Отже, } \mu_m = M(X(\omega) - MX)^m.$$

Із цих означень зрозуміло, як увести абсолютні центральні моменти випадкової величини.

Зазначимо, що $M(X(\omega)) = \alpha_1$, а центральні моменти можна легко виразити через початкові, використовуючи властивості математичного сподівання.

$$\begin{aligned}\mu_1 &= M(X(\omega) - MX) = MX(\omega) - MX = MX - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0, \\ \mu_2 &= M(X(\omega) - MX)^2 = M(X^2(\omega) - 2X(\omega)\alpha_1 + \alpha_1^2) = \\ &= \alpha_2 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \\ \mu_3 &= M(X(\omega) - MX)^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \\ \mu_4 &= M(X(\omega) - MX)^4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

28. Дисперсія випадкової величини. Означення

Означення 2.3. Центральний момент другого порядку $\mu_2 = M(X(\omega) - MX)^2$ називається дисперсією випадкової величини $X(\omega)$ і позначається $DX(\omega) = DX$.

Означення 2.4. \sqrt{DX} називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини $X(\omega)$ і позначається σ_X .

Отже, дисперсія DX характеризує розсіювання значень випадкової величини $X(\omega)$ відносно її математичного сподівання, а σ_X є середнім квадратичним відхиленням значень випадкової величини $X(\omega)$ від MX .

Використовуючи означення дисперсії та властивості математичного сподівання, отримуємо $DX = M(X(\omega) - MX)^2 = M(X^2(\omega) - (MX)^2)$.

Якщо $X(\omega)$ – дискретна випадкова величина, яка має розподіл

$$P\{\omega: X(\omega) = x_k\} = p_k, k = 1, 2, 3, \dots,$$

то для обчислення дисперсії одержуємо формулу

$$DX = \sum_k (x_k - MX)^2 p_k = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k \right)^2. \quad (2.1)$$

Якщо $X(\omega)$ – випадкова величина неперервного типу зі щільністю розподілу $f_X(x)$, то дисперсію цієї випадкової величини можна знайти так:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (u - MX)^2 f_X(u) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_X(u) du - \left(\int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du \right)^2. \quad (2.2)$$

29. Приклади обчислення дисперсії

Знайдемо дисперсії деяких випадкових величин.

Приклад 2.1. Нехай випадкова величина розподілена за законом

$X(\omega)$	0	1
P	$1-p$	p

Розв'язання. Обчислимо спочатку MX і $MX^2(\omega)$. Маємо $MX = p$, $MX^2(\omega) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$. Тепер застосуємо формулу для обчислення дисперсії $DX = MX^2(\omega) - (MX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

Приклад 2.2. Нехай випадкова величина розподілена за законом

$X(\omega)$	1	2	3	4
P	0.6	0.24	0.096	0.064

Розв'язання. Раніше ми знайшли, що $MX = 1,624$. Обчислимо $MX^2(\omega)$

$$\begin{aligned} MX^2(\omega) &= 1^2 \cdot 0,6 + 2^2 \cdot 0,24 + 3^2 \cdot 0,096 + 4^2 \cdot 0,064 = \\ &= 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,24 + 9 \cdot 0,096 + 16 \cdot 0,064 = 3,448. \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсію

$$DX = MX^2(\omega) - (MX)^2 = 3,448 - 2,637376 = 0,810624 \cong 0,811.$$

Приклад 2.3. Нехай випадкова величина $X(\omega)$ розподілена рівномірно на відрізку $[a, b]$, тобто відома її щільність розподілу

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Знайти дисперсію DX цієї випадкової величини.

Розв'язання. В попередньому параграфі ми з'ясували, що

$$MX = \frac{a+b}{2}.$$

Для обчислення $MX^2(\omega)$ використаємо **властивість 1.6** математичного сподівання. Одержуємо

$$\begin{aligned} MX^2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} DX &= MX^2(\omega) - (MX)^2 = \\ &= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} = \end{aligned}$$

$$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Тому дисперсію рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$ випадкової величини $X(\omega)$ обчислюємо за формулою

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.3)$$

Приклад 2.4. Випадкова величина $X(\omega)$ розподілена за нормальним законом $N(a, \sigma^2)$ з параметрами a та σ^2 . Знайти дисперсію DX даної випадкової величини $X(\omega)$.

Розв'язання. Щільність розподілу цієї випадкової величини має вигляд

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$$

У попередньому параграфі ми встановили, що $MX = a$. Дисперсію знайдемо за формулою

$$\begin{aligned} DX &= M(X(\omega) - MX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f_X(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінної інтегрування

$$t = \frac{x-a}{\sigma}.$$

Одержуємо

$$DX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t de^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тепер застосуємо формулу інтегрування частинами й те, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Маємо

$$DX = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 - \sqrt{2\pi}) = \sigma^2.$$

Отже, $DX = \sigma^2$. Воднораз ми з'ясували зміст параметрів нормального розподілу $N(a, \sigma^2)$, а саме параметр a – математичне сподівання, параметр σ – середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини.

30. Властивості дисперсії випадкової величини

Вкажемо основні властивості дисперсії.

Властивість 2.1. Дисперсія сталої дорівнює нулеві. Тобто, якщо $P\{\omega: X(\omega) = C\} = 1$, то $DX = 0$.

Доведення. Дійсно, за вказаних умов $P\{\omega: (X(\omega) - C) = 0\} = 1$. Тому внаслідок властивостей математичного сподівання $DX = M((X(\omega) - C)^2) = 0$.

Властивість 2.2. Якщо C – стала, то

$$D(CX(\omega)) = C^2 DX. \quad (2.4)$$

Доведення. Рівність (2.4) означає, що сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата. Дійсно, $M(CX(\omega)) = CMX$. Тому

$$\begin{aligned} D(CX(\omega)) &= M(CX(\omega) - M(CX(\omega)))^2 = M(CX(\omega) - CMX)^2 = \\ &= MC^2(X(\omega) - MX)^2 = C^2 M(X(\omega) - MX)^2 = C^2 DX. \end{aligned}$$

Зауваження. Властивість 2.2 дисперсії справджується, як легко переконатися, також для випадкової величини $Y(\omega) = CX(\omega) + d$, якщо d – будь-яка стала

$$DY = D(CX(\omega) + d) = C^2 DX. \quad (2.5)$$

Властивість 2.3. Дисперсія випадкової величини невід’ємна.

Доведення. Дійсно, $(X(\omega) - MX)^2 \geq 0$. Тоді, за властивостями 1.1 та 1.7 математичного сподівання, якщо існує дисперсія випадкової величини $X(\omega)$, то

$$DX = M(X(\omega) - MX)^2 \geq 0. \quad (2.6)$$

Властивість 2.4. Якщо випадкові величини $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ незалежні та існують дисперсії DX і DY , то дисперсія суми цих випадкових величин дорівнює сумі дисперсій. Тобто

$$D(X(\omega) + Y(\omega)) = DX + DY. \quad (2.7)$$

Наслідком цієї властивості є наступна властивість дисперсії.

Властивість 2.5. Якщо $X_i(\omega)$, $i = \overline{1, n}$, – попарно незалежні випадкові величини та існують дисперсії DX_i , то

$$D \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \sum_{i=1}^n DX_i. \quad (2.8)$$

Властивість 2.6. Якщо існує дисперсія випадкової величини $X(\omega)$, то

$$DX \leq MX^2(\omega). \quad (2.9)$$

Доведення. Нерівність (2.9) випливає з того, що

$$DX = MX^2(\omega) - (MX)^2.$$

З нерівності $DX = MX^2(\omega) - (MX)^2 \geq 0$ випливає також нерівність

$$|MX| \leq \sqrt{MX^2(\omega)}.$$

Властивість 2.7. Якщо існує дисперсія випадкової величини $X(\omega)$ і $\varepsilon > 0$ – будь-яке число, то

$$P\{\omega: |X(\omega) - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (2.10)$$

Доведення. За нерівністю Маркова (першою нерівністю Чебишова), маємо

$$P\{\omega: |X(\omega) - MX| \geq \varepsilon\} = P\{\omega: (X(\omega) - MX)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq$$

$$\leq \frac{M(X(\omega) - MX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

звідки випливає нерівність (2.10).

Нерівність (2.10) ще називають другою нерівністю Чебишова й часто використовують для оцінки ймовірності відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання.

Використовуючи **властивості 2.4 і 2.5** дисперсії, можемо досить просто знайти дисперсію випадкової величини $X(\omega)$, яка розподілена за законом Я. Бернуллі:

$$P\{\omega: X(\omega) = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, 0 < p < 1, q = 1 - p, \\ m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Випадкову величину $X(\omega)$ подамо у вигляді

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega),$$

де $X_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, – попарно незалежні випадкові величини із законами розподілу

X_i	0	1
P	q	p

Раніше ми встановили, що $MX_i(\omega) = p$, $DX_i(\omega) = pq$, а $MX = np$.

За **властивістю 2.5** дисперсії, одержуємо

$$DX = DX_1(\omega) + DX_2(\omega) + \dots + DX_n(\omega) = pq + pq + \dots + pq = npq.$$

Отже, $DX = npq$ і $\sigma_X = \sqrt{npq}$.

Нагадаємо, що в локальній та інтегральній теоремах Муавра – Лапласа, з якими ми знайомилися, вивчаючи схему незалежних випробувань з двома результатами, уже зустрічалися з виразами np , npq і \sqrt{npq} . Тепер їхній зміст нам зрозумілий. Це відповідно математичне сподівання, дисперсія й середнє квадратичне відхилення випадкової події – m успіхів, якщо проведено n незалежних випробувань.

31. Коваріація і коефіцієнт кореляції двох випадкових величин.

Нехай $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ – випадкові величини, задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Тобто на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задано двовимірний випадковий вектор. Нехай існують математичні сподівання MX та MY . Випадкові величини $\overset{\circ}{X}(\omega) = X(\omega) - MX$ і $\overset{\circ}{Y}(\omega) = Y(\omega) - MY$ називаються відповідними центрованими величинами. Якщо $X(\omega)$, $Y(\omega)$ – незалежні випадкові величини, то $\overset{\circ}{X}(\omega)$, $\overset{\circ}{Y}(\omega)$ також незалежні й

$$M(\overset{\circ}{X}(\omega)\overset{\circ}{Y}(\omega)) = M((X(\omega) - MX)(Y(\omega) - MY)) = \\ = M(X(\omega) - MX)M(Y(\omega) - MY) = 0.$$

Якщо ж $X(\omega)$, $Y(\omega)$ – залежні випадкові величини, то, взагалі кажучи, $M(\overset{\circ}{X}(\omega)\overset{\circ}{Y}(\omega))$ не дорівнює нулю й може, мабуть, виконувати роль міри залежності випадкових величин $X(\omega)$ та $Y(\omega)$.

Означення 3.1. Число

$$cov(X, Y) = M(\overset{\circ}{X}(\omega)\overset{\circ}{Y}(\omega)) \quad (3.1)$$

називається **коваріацією** випадкових величин $X(\omega)$ та $Y(\omega)$.

Як ми зазначали, $cov(X, Y)$ може набувати довільних дійсних значень, але для незалежних випадкових величин $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ $cov(X, Y) = 0$. Крім цього, коваріація – симетрична функція, тобто $cov(X, Y) = cov(Y, X)$.

Нехай існують відмінні від нуля дисперсії DX і DY . Тоді можемо ввести в розгляд відповідні стандартизовані випадкові величини

$$\begin{aligned}\bar{X}(\omega) &= \frac{X(\omega) - MX}{\sigma_X}, \\ \bar{Y}(\omega) &= \frac{Y(\omega) - MY}{\sigma_Y}, \\ \bar{X}(\omega) &= \frac{\overset{\circ}{X}(\omega)}{\sqrt{DX}} = \frac{X(\omega) - MX}{\sigma_X}, \bar{Y}(\omega) = \frac{\overset{\circ}{Y}(\omega)}{\sqrt{DY}} = \frac{Y(\omega) - MY}{\sigma_Y}.\end{aligned}$$

Для цих випадкових величин $M\bar{X}(\omega) = 0$, $D\bar{X}(\omega) = 1$, $M\bar{Y}(\omega) = 0$, $D\bar{Y}(\omega) = 1$.

Означення 3.2. Число

$$r(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y} M(\overset{\circ}{X}(\omega) \overset{\circ}{Y}(\omega))$$

називається **коефіцієнтом кореляції** випадкових величин $X(\omega)$ та $Y(\omega)$.

Зрозуміло, що

$$r(X, Y) = M(\bar{X}(\omega) \bar{Y}(\omega)) = M\left(\frac{X(\omega) - MX}{\sigma_X} \cdot \frac{Y(\omega) - MY}{\sigma_Y}\right). \quad (3.2)$$

У зв'язку зі згаданою вище стандартизацією саме коефіцієнт кореляції вважають мірою залежності між двома випадковими величинами.

32. Теорема про коефіцієнт кореляції

Наведемо кілька основних властивостей коефіцієнта кореляції.

Властивість 3.1. Якщо випадкові величини $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ незалежні, то

$$r(X, Y) = 0.$$

Означення 3.3. Випадкові величини $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ називаються некорельованими, якщо коефіцієнт кореляції $r(X, Y) = 0$.

З властивості 3.1 випливає, що незалежні випадкові величини некорельовані. Однак зворотне твердження не завжди справджується, тобто некорельовані випадкові величини не обов'язково незалежні.

Властивість 3.2.

$$r(X, Y) = r(Y, X).$$

Властивості 3.1 і 3.2 очевидні й випливають з означення $cov(X, Y)$.

Властивість 3.3. Якщо $DX > 0$ і $DY > 0$, то $|r(X, Y)| \leq 1$.

Доведення. Справді, $D(X(\omega) + t Y(\omega)) \geq 0$ для будь-якого дійсного числа t . Тому

$$\begin{aligned}& M\left((X(\omega) + t Y(\omega)) - (MX + tMY)\right)^2 = \\&= M((X(\omega) - MX) + t(Y(\omega) - MY))^2 = \\&= M((X(\omega) - MX)^2 + 2t(X(\omega) - MX)(Y(\omega) - MY) + t^2(Y(\omega) - MY)^2) = \\&= DX + 2tcov(X, Y) + t^2DY \geq 0.\end{aligned}$$

Остання нерівність означає, що квадратний тричлен відносно змінної t не може набувати від'ємних значень, а отже, його дискримінант не додатний. Тобто отримуємо

$$4cov^2(X, Y) - 4DXDY \leq 0$$

або

$$cov^2(X, Y) \leq DXY. \quad (3.3)$$

Одержана нерівність еквівалентна нерівності

$$\frac{|cov(X, Y)|}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \leq 1.$$

Звідки й випливає властивість 3.3.

Дійсно,

$$\frac{|cov(X, Y)|}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \left| \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \right| = |r(X, Y)| \leq 1. \quad (3.4)$$

Властивість 3.4. $|r(X, Y)| = 1$ тоді і тільки тоді, коли існують такі сталі $a \neq 0$ і b , що з імовірністю одиниця $Y(\omega) = aX(\omega) + b$. Крім цього,

$$r(X, Y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a > 0, \\ -1, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Доведення. Достатність. Нехай існують сталі $a \neq 0$ і b такі, що $Y(\omega) = aX(\omega) + b$ з імовірністю 1. Знайдемо $r(X, Y)$, використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії.

$$\begin{aligned} r(X, Y) &= M \left(\frac{X(\omega) - MX}{\sigma_X} \cdot \frac{Y(\omega) - MY}{\sigma_Y} \right) = \\ r(X, Y) &= M \left(\frac{X(\omega) - MX}{\sigma_X} \cdot \frac{aX(\omega) + b - aMX - b}{\sqrt{a^2 DX}} \right) = \\ &= \frac{aM(X(\omega) - MX)^2}{|a|\sigma_X^2} = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{DX}{DX} = \frac{a}{|a|}. \end{aligned}$$

Маємо, що

$$r(X, Y) = \frac{a}{|a|}.$$

Звідси й випливає **достатність** твердження даної властивості.

Необхідність. Нехай, навпаки, $|r(X, Y)| = 1$. Це означає, що нерівності (3.3), (3.4) перетворюються в рівності, а дискримінант тричлена

$$DX + 2tcov(X, Y) + t^2DY$$

дорівнює нулю й рівняння $DX + 2tcov(X, Y) + t^2DY = 0$ має двократний корінь

$$t = -\frac{cov(X, Y)}{DY}$$

і

$$D(X(\omega) - \frac{cov(X, Y)}{DY}Y(\omega)) = 0.$$

Остання рівність означає, що існує така стала c , що з імовірністю 1

$$X(\omega) - \frac{cov(X, Y)}{DY}Y(\omega) = c.$$

Звідси одержуємо

$$Y(\omega) = \frac{DY}{cov(X, Y)} X(\omega) - \frac{DY}{cov(X, Y)} \cdot c.$$

Необхідність доведена.

З **властивості 3.4** випливає, що найтіснішим зв'язком між двома випадковими величинами $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ виявляється лінійний зв'язок $Y(\omega) = aX(\omega) + b$. Якщо за зростання $X(\omega)$ зростає й $Y(\omega)$, тобто $a > 0$, то характеристика тісноти зв'язку $r(X, Y)$ дорівнює 1. Якщо ж за зростання $X(\omega)$ випадкова величина $Y(\omega)$ спадає ($a < 0$), то ця характеристика $r(X, Y) = -1$.

Нагадаємо, що в **параграфі 3.3.6** було введено в розгляд випадковий вектор $(X(\omega), Y(\omega))$, розподілений нормально (за законом Гаусса) з параметрами $a_1, \sigma_1, a_2, \sigma_2, r$. Щільність сумісного розподілу $f_{XY}(x, y)$ такого вектора має вигляд

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}. \quad (3.5)$$

Провівши необхідні обчислення, можна одержати $a_1 = MX, \sigma_1 = \sigma_X, a_2 = MY, \sigma_2 = \sigma_Y, r = r(X, Y)$.

Вище ми зазначили, що з незалежності випадкових величин випливає їх некорельованість ($r = r(X, Y) = 0$). Виявляється, що коли випадкові величини $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ мають сумісний нормальний розподіл, то з некорельованості випливає їх незалежність. Дійсно, з (3.5) у цьому разі випливає

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

33. Коваріаційна і кореляційна матриці

Для характеристики тісноти зв'язку між компонентами випадкового вектора $(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ розмірності n використовують **коваріаційну матрицю**, яку ще називають узагальненою дисперсією.

Означення 3.4. Коваріаційною матрицею називають симетричну матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

де $c_{ij} = cov(X_i, X_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Зрозуміло, що $c_{ii} = DX_i, i = \overline{1, n}$ та $c_{ij} = c_{ji}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Іноді використовують кореляційну матрицю

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$r_{ij} = r(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} = \frac{c_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}.$$

Зрозуміло, що $r_{ii} = 1, i = \overline{1, n}, r_{ij} = r_{ji}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.
Легко також переконатися, що справджуються рівності

i

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}.$$

34. Поняття про закон великих чисел

У практичній діяльності людини велике значення мають події, ймовірності яких близькі до одиниці або до нуля. Такі події можна вважати майже достовірними або майже неможливими відповідно. Встановлення таких подій чи закономірностей – одне з найважливіших завдань теорії ймовірностей. Особлива увага приділяється закономірностям, які є результатами накладання дій великої кількості незалежних випадкових факторів. У теорії ймовірностей такі закономірності встановлюються **законом великих чисел**.

Нехай $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ – послідовність випадкових величин, визначених на ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{F}, P) . **Законом великих чисел** називають твердження про те, що випадкова величина

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M X_k$$

прямує до нуля за **ймовірністю** при $n \rightarrow \infty$. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \omega: \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M X_k \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Важливу роль у доведенні таких тверджень відіграє друга нерівність Чебишова (**властивість 2.6 дисперсії**).

35. Теорема Чебишова(закон великих чисел)

Твердження 4.1 (теорема Чебишова). Якщо $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, для яких існують скінченні дисперсії, обмежені однією і тією ж сталою C ,

$$D X_1 \leq C, D X_2 \leq C, \dots, D X_n \leq C, \dots,$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \omega: \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M X_k \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (4.1)$$

Доведення. Дійсно, використовуючи попарну незалежність випадкових величин і обмеженість їхніх дисперсій, маємо

$$D \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D X_k \leq \frac{1}{n^2} C \cdot n = \frac{C}{n}.$$

Далі, згідно із другою нерівністю Чебишова

$$\begin{aligned} & P \left\{ \omega: \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M X_k \right| < \varepsilon \right\} = \\ & = 1 - P \left\{ \omega: \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M X_k \right| \geq \varepsilon \right\} \geq \\ & \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} D \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) \right) \geq 1 - \frac{C}{n \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Тобто

$$P \left\{ \omega: \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M X_k \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{C}{n \varepsilon^2}.$$

Якщо в останній нерівності перейдемо до границі за $n \rightarrow \infty$ і використаємо те, що ймовірність будь-якої події не перевищує 1, то одержимо рівність (4.1).

36. Теорема Я. Бернуллі та її наслідок(закон великих чисел)

Частковий випадок попереднього твердження – відома **теорема Я. Бернуллі**, яка стосується схеми незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається зі сталою ймовірністю p . Цю теорему ми сформулюємо як

Твердження 4.2. Нехай m – кількість появи події A в n незалежних випробуваннях, а p – ймовірність появи A в кожному окремому випробуванні. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \omega: \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (4.2)$$

Доведення. Розглянемо, як і в параграфі 4.2, випадкову величину

$$X_k(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ якщо подія } A \text{ відбулася в } k - \text{му випробуванні,} \\ 0, \text{ якщо подія } A \text{ не відбулася в } k - \text{му випробуванні.} \end{cases}$$

Знаємо, що

$X_k(\omega)$	0	1
P	$1 - p$	p

$$M X_k = p, D X_k = p q < 1,$$

$$m = X(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega).$$

Тому

$$P\left\{\omega: \left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\omega: \left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n MX_k\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Перехід до границі за $n \rightarrow \infty$ завершує доведення даного твердження.

Суть **твердження 4.2** полягає в тому, що за великої кількості випробувань частота події A з великою ймовірністю мало відрізняється від ймовірності події A .

Важливий наслідок **теорема Я. Бернуллі**.

Твердження 4.3. Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ така, що $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = a \dots$ і $DX_1 \leq C, DX_2 \leq C, \dots, DX_n \leq C, \dots$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\omega: \left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Це твердження лежить в основі правила середнього арифметичного, суть якого в тому, що за достатньо великої кількості вимірювань (великої кількості реалізацій X_1, X_2, \dots, X_n випадкової величини $X(\omega)$) з ймовірністю близькою до одиниці, можна вважати, що

$$MX \cong \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

Відомо багато різних тверджень, які стосуються закону великих чисел. Сформулюємо, наприклад, твердження, в якому умова обмеженості дисперсій замінена іншою умовою.

37. Теорема Хінчина (формулювання). Наближене обчислення інтегралів

Твердження 4.4 (теорема Хінчина). Нехай $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ – послідовність однаково розподілених попарно незалежних випадкових величин, для яких існує $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = a \dots$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\omega: \left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - a\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad (4.4)$$

У цьому твердженні умова обмеженості дисперсій замінена умовою, що випадкові величини однаково розподілені.

Зазначимо також, що закон великих чисел – теоретична основа багатьох алгоритмів імітаційного моделювання. Так називають методи статистичних випробувань або методи Монте-Карло.

Припустимо, наприклад, що потрібно обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 g(x) dx,$$

де $g(x)$ – неперервна функція.

Щоб обчислити цей інтеграл, наведемо такі міркування. Нехай $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ – послідовність незалежних випадкових величин, розподілених рівномірно на $[0,1]$, а $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – їх реалізації.

Ми знаємо, що щільності розподілу цих випадкових величин мають вигляд

$$f_{X_k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1], \\ 1, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини $g(X_k(\omega))$. Маємо

$$M(g(X_k(\omega))) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X_k}(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = I.$$

Оскільки випадкові величини $g(X_k(\omega)), g(X_k(\omega)), \dots, g(X_k(\omega)), \dots$ – однаково розподілені, то, згідно із **твердженням 4.4**, з великою ймовірністю можемо стверджувати, що

$$I = \int_0^1 g(x)dx \cong \frac{g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n)}{n}$$

для досить великих n .

Якщо потрібно обчислити

$$I = \int_a^b g(x)dx,$$

то треба зробити заміну змінної інтегрування $x = a + t(b - a)$. Одержимо

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(x)dx = (b - a) \int_0^1 g(a + t(b - a))dt \cong \\ &\cong \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^n g(a + x_k(b - a)). \end{aligned}$$

Аналогічні підходи застосовуються для розв'язання багатьох інших задач методом імітаційного моделювання (розв'язування систем алгебричних рівнянь, розв'язування диференціальних рівнянь тощо).

38. Характеристична функція випадкової величини. Означення.

Багато задач теорії ймовірностей, особливо таких, що пов'язані з розподілами сум незалежних випадкових величин, вдалося розв'язати за допомогою **характеристичних функцій**, теорія яких розвинена в математичному аналізі й має назву **перетворення Фур'є**.

Означення 5.1. Характеристичною функцією $\varphi_X(t)$ випадкової величини $X(\omega)$ називається математичне сподівання комплексно значної випадкової величини

$$e^{iX(\omega)t} = \cos(X(\omega)t) + i \sin(X(\omega)t),$$

Тобто

$$\varphi_X(t) = M e^{iX(\omega)t} = M \cos(X(\omega)t) + iM \sin(X(\omega)t). \quad (5.1)$$

Зауважимо, що t – дійсна змінна, а i – уявна одиниця, тобто $i^2 = -1$.

З того, що $|e^{iX(\omega)t}| = 1$ для всіх дійсних t , випливає, що характеристична функція $\varphi_X(t)$ існує для будь-якої випадкової величини $X(\omega)$.

39. Властивості характеристичних функцій

Вкажемо на деякі найпростіші властивості характеристичних функцій.

Властивість 5.1. Характеристична функція $\varphi_X(t)$ рівномірно неперервна на всій числовій осі і задовольняє умови

$$\varphi_X(0) = 1, \quad |\varphi_X(t)| = |Me^{iX(\omega)t}| = 1, \quad -\infty < t < \infty. \quad (5.2)$$

Властивість 5.2. Якщо $Y(\omega) = kX(\omega) + c$, де k і c – сталі, то

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(kt)e^{ict}. \quad (5.3)$$

Властивість 5.3. Характеристична функція суми двох незалежних випадкових величин $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ дорівнює добуткові характеристичних функцій цих випадкових величин. Тобто

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \quad (5.4)$$

Переконатися у правильності формул (5.2), (5.3), (5.4) можна перевіркою на основі означення 5.1.

Важлива наступна

Властивість 5.4. Якщо існує $M|X(\omega)|^n$, то характеристична функція $\varphi_X(t)$ диференційована n разів у нулі й за $k \leq n$

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k M X^k(\omega). \quad (5.5)$$

Використовуючи (5.5), можна одержати

$$MX = -i \frac{d\varphi_X(t)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad (5.6)$$

$$DX = M(X^2(\omega)) - (MX)^2 = -\frac{d^2\varphi_X(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} + \left(\frac{d\varphi_X(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right)^2. \quad (5.7)$$

З (5.1) за відомим розподілом випадкової величини $X(\omega)$ однозначно визначимо $\varphi_X(t)$. Дуже важливе значення має відома в математичному аналізі теорема єдиності, яка стосується оберненого перетворення Фур'є. Стосовно характеристичних функцій ця теорема може бути сформульована як

Властивість 5.5. Функція розподілу $F_X(x)$ випадкової величини $X(\omega)$ однозначно визначається за характеристичною функцією $\varphi_X(t)$ цієї випадкової величини.

З цієї властивості випливає, що розподіл випадкової величини, тобто її функція розподілу, повністю визначається характеристичною функцією. Отже, характеристична функція випадкової величини однозначно визначає закон розподілу.

Доведення багатьох граничних теорем теорії ймовірностей ґрунтується на основі прямої та оберненої граничних теорем, суть яких викладено в наступних властивостях 5.6 і 5.7.

Властивість 5.6. Якщо послідовність функцій розподілу $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots, F_{X_n}(x), \dots$ випадкових величин $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ збігається до функції розподілу $F_X(x)$ випадкової величини $X(\omega)$ в кожній точці неперервності $F_X(x)$, то послідовність відповідних характеристичних функцій $\varphi_{X_1}(t), \varphi_{X_2}(t), \dots, \varphi_{X_n}(t), \dots$ збігається рівномірно на всій осі до характеристичної функції $\varphi_X(t)$.

Властивість 5.7. Якщо послідовність характеристичних функцій $\varphi_{X_1}(t), \varphi_{X_2}(t), \dots, \varphi_{X_n}(t), \dots$ випадкових величин $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ збігається до характеристичної функції $\varphi_X(t)$ випадкової величини $X(\omega)$, то послідовність відповідних функцій розподілу $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots, F_{X_n}(x), \dots$ збігається до функції розподілу $F_X(x)$ у кожній точці неперервності $F_X(x)$.

40. Приклади обчислення характеристичних функцій

Розглянемо приклади знаходження характеристичних функцій.

Приклад 5.1. Нехай

$X(\omega)$	0	1
P	q	p

$0 < p < 1, q = 1 - p$. Тоді

$$\varphi_X(t) = M e^{iX(\omega)t} = e^{i \cdot 0 \cdot t} q + e^{i \cdot 1 \cdot t} p = q + e^{it} p.$$

Приклад 5.2. Нехай $X(\omega)$ розподілена рівномірно на $[0, 1]$. Знайдемо характеристичну функцію

$$\varphi_X(t) = M e^{iX(\omega)t} = \int_0^1 e^{itx} \cdot 1 dx = \frac{1}{it} e^{itx} \Big|_0^1 = \frac{1}{it} (e^{it} - 1).$$

Приклад 5.3. Нехай $X(\omega)$ розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda > 0$. Тобто

$$P\{\omega: X(\omega) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= M e^{iX(\omega)t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it} \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e^{it} \lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}. \quad (5.8)$$

Приклад 5.4. Нехай $X(\omega)$ розподілена нормально з параметрами 0 і 1, тобто

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Тоді

$$\varphi_X(t) = M e^{iX(\omega)t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_X(t)}{dt} &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} it e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t \varphi_X(t). \end{aligned}$$

Враховуючи **властивість 5.1**, для визначення $\varphi_X(t)$ розв'яжемо задачу Коші:

$$\frac{d\varphi_X(t)}{dt} = -t \varphi_X(t), \quad \varphi_X(0) = 1.$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (5.9)$$

Якщо ж випадкова величина $Y(\omega)$ розподілена нормально з параметрами a і σ^2 , то $Y(\omega) = \sigma X(\omega) + a$. Враховуючи (5.9) і **властивість 5.2**, матимемо

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(\sigma t) e^{iat} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{iat}.$$

Тобто

$$\varphi_Y(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \quad (5.10)$$

Використовуючи розглянуті приклади та властивості характеристичних функцій, легко встановлюємо два наступних твердження.

Твердження 5.1. Якщо $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ – незалежні випадкові величини, розподілені за законом Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно, то їх сума $X(\omega) + Y(\omega)$ розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Дійсно, $\varphi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}$, $\varphi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$. За властивістю 5.3,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

Отже, характеристична функція має вигляд (5.8) і закон розподілу доданків зберігається. Змінюється лише параметр розподілу, який дорівнює $\lambda_1 + \lambda_2$.

Твердження 5.2. Якщо $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ – незалежні випадкові величини, розподілені за законами $N(a_1, \sigma_1^2)$ і $N(a_2, \sigma_2^2)$ відповідно, то їх сума $X(\omega) + Y(\omega)$ розподілена за законом

$$N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= e^{ia_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}, \varphi_Y(t) = e^{ia_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}, \\ \varphi_{X+Y}(t) &= e^{ia_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{ia_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{i(a_1+a_2)t - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Характеристична функція $\varphi_{X+Y}(t)$ має вигляд (5.10). За **властивістю 5.5**, це означає, що випадкова величина $X(\omega) + Y(\omega)$ розподілена за нормальним законом. Параметри розподілу числа $a = a_1 + a_2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Отже, й у цьому випадку тип розподілу зберігається.

Зауважимо, що це не завжди так. Нагадаємо, що в параграфі 3.7 у прикладі 7.1 ми визначали, як розподілена сума двох незалежних рівномірно розподілених на відріжку $[a, b]$ випадкових величин. З'ясувалося, що ця сума має розподіл Сімпсона, тобто розподіл відмінний від рівномірного розподілу.

Твердження 5.1 і **5.2** обґрунтовують результати, одержані в прикладах 3.7.3 та 3.7.4 відповідно, тобто прикладах 7.3 та 7.4 з розділу 3.

Зазначимо також, що для вивчення невід'ємних цілочислових випадкових величин $X(\omega)$ часто користуються так званими твірними функціями

$$\psi_X(\lambda) = M\lambda^{X(\omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \lambda^k,$$

які визначені для комплексного λ , такого, що $|\lambda| \leq 1$ і де $p_k = P\{\omega: X(\omega) = k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Оскільки $|e^{it}| = 1$, то визначена функція $\psi_X(e^{it})$. Тому $\varphi_X(t) = \psi_X(e^{it})$.

41. Центральна гранична теорема.

У схемі незалежних випробувань (параграф 3 розділу 2) розглядалися деякі твердження, що стосуються випадкової величини $X(\omega)$, розподіленої за законом Я. Бернуллі

$$P\{\omega: X(\omega) = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, 0 < p < 1, q = 1 - p, \\ m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Крім цього, ми вже використовували той факт, що випадкову величину $X(\omega)$ можна подати у вигляді $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$, де випадкові величини $X_i(\omega), i = \overline{1, n}$, незалежні й однаково розподілені за законом

$X(\omega)$	0	1
P	q	p

У **твердженні 2.2.3** (інтегральна теорема Муавра–Лапласа), по суті, проголошено, що розподіл випадкової величини $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ за $n \rightarrow \infty$ стає нормальним розподілом, а границя послідовності функцій розподілу стандартизованої випадкової величини $\bar{X}(\omega)$

$$\bar{X}(\omega) = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n MX_k}{\sum_{k=1}^n DX_k}$$

– це функція розподілу випадкової величини, яка має нормальний розподіл з параметрами 0 і 1, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\omega: \frac{X(\omega) - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Постає питання: за яких умов розподіл суми випадкових величин $X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ матиме нормальний розподіл граничним розподілом? Нижче ми сформулюємо один із найпростіших результатів, одержаних у цьому напрямку, і вкажемо на можливість використання теорії характеристичних функцій для обґрунтування цього результату, отриманого Чебишовим.

Твердження 6.1. Якщо $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ – послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин із математичними сподіваннями $MX_k = 0$ і дисперсією $DX_k = 1$, то за $n \rightarrow \infty$ функція розподілу випадкової величини

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$$

збігається до функції нормального розподілу з параметрами 0 і 1.

Доведення. Дійсно, оскільки всі випадкові величини $X_k(\omega)$ однаково розподілені, то їхні характеристичні функції однакові. Позначимо

$$Z_n(\omega) = \sqrt{n}Y_n(\omega), \varphi_{X_k}(t) = \varphi(t).$$

Знаємо, що характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку характеристичних функцій доданків, тобто

$$\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t).$$

За властивостями характеристичних функцій,

$$\varphi(0) = 1, \frac{d\varphi(0)}{dt} = iMX_k = 0, \frac{d^2\varphi(0)}{dt^2} = i^2MX_k^2 = -DX_k = -1.$$

Тут використані такі позначення:

$$\frac{d^j \varphi(0)}{dt^j} = \frac{d^j \varphi(t)}{dt^j} \Big|_{t=0}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Припустимо, що випадкові величини $X_k(\omega)$ мають моменти третього порядку, тобто існують MX_k^3 . Тоді характеристичні функції мають обмежені в околі $t = 0$ похідні третього порядку

$$\frac{d^3 \varphi(t)}{dt^3}.$$

Згідно із формулою Маклорена,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{d\varphi(0)}{dt}t + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi(0)}{dt^2} + \alpha(t) \right) t^2,$$

де $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Отже,

$$\varphi(t) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \alpha(t) \right) t^2,$$

а

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \alpha(t) \right) t^2 \right)^n.$$

Стандартизуємо випадкову величину $Z_n(\omega)$, перейшовши до

$$Y_n(\omega) = \frac{Z_n(\omega)}{\sqrt{n}}.$$

Тоді, використовуючи властивість 2 характеристичних функцій, маємо

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) \frac{t^2}{n} \right)^n$$

або

$$\ln \varphi_{Y_n}(t) = n \ln(1 - \beta_n),$$

де

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) \frac{t^2}{n}.$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0,$$

то $\ln(1 - \beta_n) \sim -\beta_n$. Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \varphi_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(-\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{t^2}{2} + \alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) t^2 \right) = \\ &= -\frac{t^2}{2} + t^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2} + t^2 \cdot 0 = -\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Одержали,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функція

$$e^{-\frac{x^2}{2}}$$

— характеристична функція випадкової величини, розподіленої за законом $N(0,1)$. Тому за **властивістю 5.7** характеристичних функцій, приходимо до висновку, що випадкова величина $Y_n(\omega)$ має розподіл $N(0,1)$.

Зауважимо, що вперше строго центральну граничну теорему за ширших умов, які накладаються на випадкові величини $X_k(\omega)$, за допомогою характеристичних функцій довів О.М. Ляпунов.

Центральна гранична теорема пояснює велике значення нормального закону розподілу. Вона вказує на те, що сумарний вплив багатьох незалежних випадкових величин, від кожної з яких доволі незначно залежить той чи інший процес, еквівалентний впливові певної нормально розподіленої випадкової величини.

Зазначимо також, що швидкість збіжності до нормального розподілу досить висока й уже при $n > 10$ можна вважати, що

$$\sum_{k=1}^n X_k(\omega)$$

розподілена нормально.

42. Моделювання нормально розподіленої випадкової величини

Центральну граничну теорему можна використати для моделювання нормально розподіленої випадкової величини. Дійсно, реалізації x_k незалежних випадкових величин $X_k(\omega)$, які рівномірно розподілені на $[0,1]$, можна одержати, використовуючи генератор псевдовипадкових чисел. Знаємо, що

$$MX_k = \frac{1}{2}, DX_k = \frac{1}{12}.$$

За центральною граничною теоремою випадкова величина

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$$

при $n > 10$ розподілена за законом, близьким до нормального, причому

$$MY_n = \frac{n}{2}, DY_n = \frac{n}{12}.$$

Виберемо $n = 12$. Одержуємо, що випадкова величина

$$Y_{12}(\omega) = \sum_{k=1}^{12} X_k(\omega)$$

має розподіл, близький до $N(6,1)$. Тобто випадкова величина

$$\bar{Y}_{12}(\omega) = \sum_{k=1}^{12} X_k(\omega) - 6 \quad (6.1)$$

розподілена за законом близьким до $N(0,1)$, а значення

$$y = \sum_{k=1}^{12} x_k(\omega) - 6$$

є її реалізаціями.

Якщо ж потрібно моделювати випадкову величину, розподілену за нормальним законом $N(a, \sigma^2)$, то близьким до такого розподілу буде закон розподілу випадкової величини

$$Z(\omega) = \sigma \bar{Y}_{12}(\omega) + a = \sigma \left(\sum_{k=1}^{12} X_k(\omega) - 6 \right) + a. \quad (6.2)$$

Реалізації цієї випадкової величини одержуються за формулою

$$z = \sigma \left(\sum_{k=1}^{12} x_k(\omega) - 6 \right) + a,$$

тобто для одного значення нормально розподіленої випадкової величини потрібно використати 12 значень випадкової величини, яка рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$.

43. Щільність розподілу випадкових величин, розподілених за показниковим законом розподілу

Приклад 3.2. Кажуть, що випадкова величина, яка набуває додатних значень, розподілена за показниковим законом із параметром $\lambda > 0$, якщо

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Графіки $F_X(x)$ і $f_X(x)$ при $\lambda = 1$ зображено на рис. 3.3 і 3.4 відповідно.

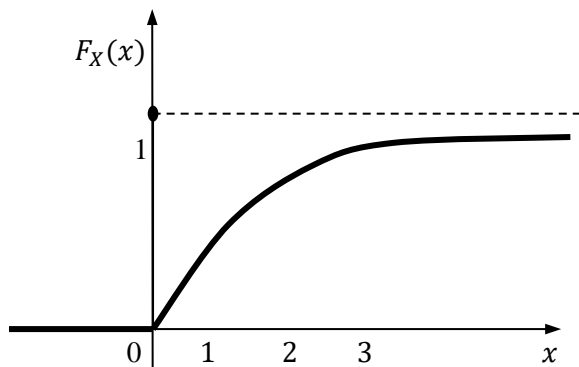


Рис. 3.3

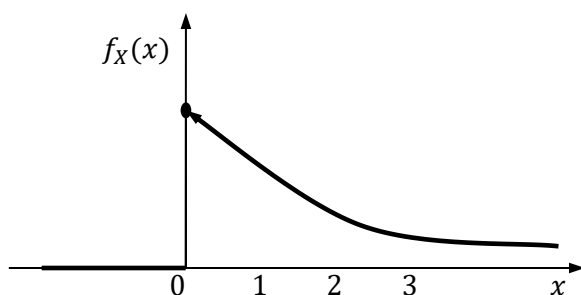


Рис. 3.4

Приклад 3.3. Дуже важливу роль у теорії ймовірностей відіграє випадкова величина, яка розподілена за **нормальним законом (законом Гаусса)**. Функція розподілу і щільність розподілу цієї випадкової величини визначаються відповідно за формулами

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.3)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.4)$$

Дійсні числа a і σ – параметри нормального розподілу, причому $\sigma > 0$. Зміст цих параметрів ми з'ясуємо пізніше.

Якщо $F_X(x)$ і $f_X(x)$ мають відповідно вигляд (3.3) і (3.4), то часто кажуть, що випадкова величина $X(\omega)$ розподілена за законом $N(a, \sigma^2)$. Ця випадкова величина може набувати будь-яких дійсних значень. Наведемо графіки цих функцій.

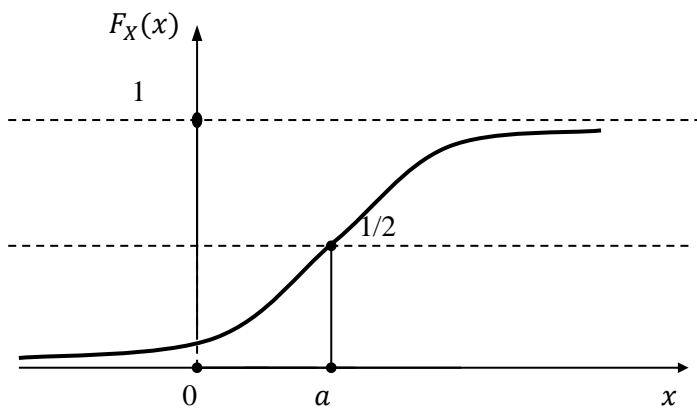


Рис. 3.5

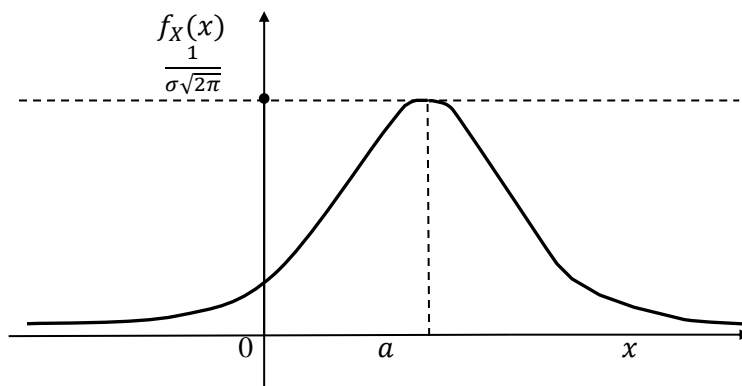


Рис. 3.6. Графік функції $f_X(x)$

44. Математичне сподівання випадкових величин, розподілених за законами розподілу: показниковим, нормальним, рівномірним, Бернуллі та Пуассона

Приклад 1.3 Нехай випадкова величина $X(\omega)$ розподілена за законом Я. Бернуллі, тобто

$$P\{\omega: X(\omega) = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, 0 < p < 1, q = 1 - p, \\ m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Знайти математичне сподівання.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{m=0}^n m P\{\omega: X(\omega) = m\} = \sum_{m=0}^n m C_n^m p^m q^{n-m} = \\ &= n \sum_{m=0}^n \frac{m}{n} C_n^m p^m q^{n-m} = n \sum_{m=0}^n \frac{m}{n} \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m q^{n-m} = \\ &= np \sum_{m=1}^n \frac{(n-1)!}{(m-1)! (n-m)!} p^{m-1} q^{n-1-(m-1)} = \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k! (n-1-k)!} p^k q^{n-1-k} = np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Тут ми використали відому формулу бінома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$$

і те, що $p+q=1$.

Приклад 1.4. Випадкова величина $X(\omega)$, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda > 0$, тобто

$$P\{\omega: X(\omega) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини $X(\omega)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{k=0}^{\infty} k P\{\omega: X(\omega) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

(Ми використали розклад функції e^x в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!},$$

який збігається абсолютно на всій числовій осі).

Приклад 1.5. Випадкова величина $X(\omega)$ розподілена рівномірно на відрізок $[a, b]$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $X(\omega)$.

Розв'язання. $X(\omega)$ – випадкова величина неперервного типу зі щільністю розподілу

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Використаємо формулу (1.3). Маємо

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Отже, математичне сподівання рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$ випадкової величини $X(\omega)$ збігається з серединою відрізка $[a, b]$.

Приклад 1.6. Випадкова величина $X(\omega)$ розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda > 0$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $X(\omega)$.

Розв'язання. У цьому випадку

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

За формулою (1.3),

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} = - x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Тут ми використали те, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0 \text{ і } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\lambda x} = 0.$$

Приклад 1.7. Випадкова величина $X(\omega)$ розподілена за нормальним законом $N(a, \sigma^2)$ з параметрами a та σ^2 . Знайти математичне сподівання випадкової величини $X(\omega)$.

Розв'язання. Щільність розподілу цієї випадкової величини має вигляд

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Отже,

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Зробимо заміну змінної інтегрування

$$t = \frac{x-a}{\sigma}.$$

Одержимо

$$\begin{aligned} MX &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

називається інтегралом Пуассона й відомо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Обчислимо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(-\frac{t^2}{2}\right) = -e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Тому $MX = a$.

45. Властивості ймовірності. Теорема додавання

Властивість 7.1. Імовірність події \bar{A} , протилежної до події A , можна обчислити за формулою

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (7.1)$$

Доведення. Дійсно, $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ і за властивостями P3 та P2 одержуємо

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1.$$

Звідси $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Наслідок 7.1. $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Властивість 7.2. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ і $A \subset B$, то

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \quad (7.2)$$

Доведення. Оскільки $A \subset B$, то $B = A \cup (B \setminus A)$, а також $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Тоді за аксіомою P3

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Звідси випливає (7.2).

Наслідок 7.2. Якщо A, B – події і $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Доведення випливає зі співвідношення (7.2), якщо застосувати аксіому P1.

Наслідок 7.3. Для будь-якої події $A \in \mathfrak{F}$

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (7.3)$$

Доведення. Для довільної події маємо $A \subset \Omega$. Тому за наслідком 7.2 $P(A) \leq P(\Omega) = 1$. Використовуючи аксіому P1, остаточно одержуємо нерівності (7.3).

Властивість 7.3. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (7.4)$$

Доведення. Очевидно, що

$$(A \cup B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Враховуючи те, що доданки в правій частині попарно несумісні і те, що $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, використовуючи аксіому P3 та властивість B2, маємо

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Властивість доведена.

Якщо події A і B несумісні, то $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ і

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (7.5)$$

Зауваження. Співвідношення (7.4) і (7.5) називаються теоремами додавання ймовірностей для будь-яких подій і несумісних подій відповідно.

Властивість 7.3 легко поширити на суму будь-якої скінченної кількості доданків. Зокрема, для трьох доданків матимемо

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Наведемо без доведень ще кілька властивостей.

Властивість 7.4. Якщо A_1, A_2, \dots, A_n – події, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (7.7)$$

Властивість 7.5. Якщо A_1, A_2, \dots, A_n – події, то

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i). \quad (7.8)$$

Зауважимо, що властивості 7.4 і 7.5 правильні й для зліченної кількості подій $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$.

Властивість 7.6. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – послідовність випадкових подій, таких, що

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots,$$

то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \quad (7.9)$$

Властивість 7.7. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – послідовність випадкових подій, таких, що

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots,$$

то

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1} \cap \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \quad (7.10)$$

46. Теорема множення для залежних і незалежних подій

Означення 8.2. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – імовірнісний простір, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, $P(B) > 0$. Умовною ймовірністю події A за умови, що подія B відбулася, називається число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (8.1)$$

Легко переконатися, що

- 1) $P(A|B) \geq 0$;
- 2) $P(\Omega|B) = 1$;
- 3) $P(B|B) = 1$.

Формулу (8.1) можна записати у вигляді

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

Аналогічно, якщо $P(A) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Отже, якщо $P(A) > 0$ і $P(B) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \quad (8.2)$$

Співвідношення (8.2) називають ще **формулами множення ймовірностей** або **теоремою множення ймовірностей**. Ці формули легко узагальнити на будь-яку скінченну кількість подій. Наприклад, для чотирьох подій ця формула набуває вигляду

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)P(B|A)P(C|(A \cap B))P(D|(A \cap B \cap C)).$$

В останній формулі, оскільки $A \cap B \cap C \subset A \cap B \subset A$, достатня умова існування умовних ймовірностей така:

$$P(A \cap B \cap C) > 0.$$

Означення 8.3. Випадкові події A і B називаються **незалежними**, якщо

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (8.3)$$

Виправданням такого означення є

Твердження 8.1. Нехай задано $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – імовірнісний простір, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, $P(B) > 0$. Випадкові події A і B незалежні тоді і тільки тоді, коли

$$P(A|B) = P(A), \quad (8.4)$$

тобто, коли умовна ймовірність дорівнює безумовній.

Доведення. Дійсно, нехай A, B незалежні і $P(B) > 0$. Тоді існує $P(A|B)$ і, за означенням 8.1,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Навпаки, нехай

$$P(A|B) = P(A).$$

Тоді $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(B)P(A)$, що завершує доведення твердження 8.1.

Використовувати означення 8.1 у формі (8.2) зручно, бо не потрібно зважати на нерівність нулю ймовірностей $P(A)$ або $P(B)$.

Зауважимо, що сумісні події можуть бути незалежними або залежними, про що свідчать приклади 8.1 і 8.2. Несумісні ж події ненульової ймовірності завжди залежні, бо $A \cap B = \emptyset$ і $P(A \cap B) = 0$.

Значимо також, що неможлива подія \emptyset й будь-яка інша подія A незалежні. Незалежні також достовірні подія Ω та будь-яка інша подія.

Дійсно,

$$\begin{aligned} \emptyset \cap A &= \emptyset, P(\emptyset) = 0 \text{ і } P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset)P(A) = 0, \\ \Omega \cap A &= A, P(\Omega) = 1 \text{ і } P(\Omega \cap A) = P(\Omega)P(A) = P(A). \end{aligned}$$

Легко перевірити правильність нижченаведених тверджень.

Твердження 8.2. Якщо події A і B незалежні, то події A і \bar{B} , \bar{A} і B , \bar{A} і \bar{B} також незалежні.

Твердження 8.3. Якщо події A і B_1 , A і B_2 , незалежні, а події B_1 і B_2 – несумісні, то події A і $B_1 \cup B_2$ незалежні.

47. Попарно незалежні події. Події, незалежні в сукупності. Приклад Бернштейна

Нехай A_1, A_2, \dots, A_n – події, тобто елементи σ -алгебри \mathfrak{F} ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Означення 8.4. Події A_1, A_2, \dots, A_n називаються **попарно незалежними**, якщо $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Означення 8.5. Події A_1, A_2, \dots, A_n називаються **незалежними в сукупності**, якщо для будь-якого $k, 2 \leq k \leq n$ і для будь-якого набору індексів $i_1, i_2, \dots, i_k, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Зрозуміло, що з незалежності подій у сукупності випливає їх попарна незалежність. Однак із попарної незалежності подій не випливає незалежність цих подій у сукупності. Про це свідчить наступний приклад.

Приклад 8.3. (Приклад С.Н. Бернштейна). Стохастичний експеримент полягає в підкиданні тетраедра, на всі чотири грані якого нанесено цифри: на одну грань – цифру 1, на іншу – цифру 2, на ще одну – цифру 3, а на четверту грань – всі три цифри 1, 2, 3.

Розглянемо події

$$A_i = \{\text{Тетраedr впав на пощину гранню, на яку нанесено цифру } i\}, \\ i = 1, 2, 3.$$

Усі грані тетраедра рівноправні, тому події A_1, A_2, A_3 рівноможливі. Кожна цифра нанесена на дві грані. Тому

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Дві цифри є тільки на одній грані. Отже,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

і тому $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$. Це означає, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні.

Усі три цифри є тільки на одній грані. Тому

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

Це свідчить про те, що події A_1, A_2, A_3 залежні в сукупності.

Зазначені в попередньому параграфі властивості ймовірності, незалежність подій та поняття умовної ймовірності допомагають розв'язати широкий клас задач. Наведемо тільки два приклади.

Приклад 8.4. Три стрільці здійснюють одиничний залповий постріл у мішень. Ймовірність влучити в мішень i -му стрільцю (подія A_i) дорівнює:

$$P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.7, P(A_3) = 0.9.$$

Знайти ймовірності подій:

$$\begin{aligned} B &= \{\text{У мішень не менше двох влучень}\}, \\ C &= \{\text{У мішень хоча б одне влучення}\}. \end{aligned}$$

Розв'язання. Подію B можна подати так:

$$B = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Справа у цій сумі всі доданки несумісні, а події A_1, A_2, A_3 незалежні в сукупності. Тому одержуємо

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + \\ &+ P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + \\ &+ 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = \\ &= 0,056 + 0,216 + 0,126 + 0,504 = 0,902. \end{aligned}$$

Знайдемо ймовірність події C . Запишемо протилежну до події C подію

$$\bar{C} = \{\text{Немає жодного влучення в мішень}\}.$$

Оскільки $\bar{C} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$, то

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,006.$$

Отже, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,006 = 0,994$.

Приклад 8.5. Серед N екзаменаційних білетів з теорії ймовірностей n “щасливих”. Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність взяти “щасливий” білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Розв'язання. Уведемо події

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{Щасливий білет узяв студент, який підійшов першим}\}, \\ A_2 &= \{\text{Щасливий білет узяв студент, який підійшов другим}\}. \end{aligned}$$

Ймовірність першої події знайдемо за класичним означенням

$$P(A_1) = \frac{n}{N}.$$

Далі обчислимо ймовірність події A_2 . Зрозуміло, що події A_1 і A_2 залежні, причому $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$. Dodанки $(A_2 \cap A_1)$ і $(A_2 \cap \bar{A}_1)$ несумісні. Тому

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \bar{A}_1) = \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1). \end{aligned}$$

Ймовірності всіх подій тут легко знайти за класичним означенням.

$$P(\bar{A}_1) = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N - n}{N},$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{n - 1}{N - 1},$$

$$P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{n}{N - 1}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \frac{n}{N} \cdot \frac{n - 1}{N - 1} + \frac{N - n}{N} \cdot \frac{n}{N - 1} = \frac{n}{N - 1} \cdot \frac{n - 1 + N - n}{N} = \\ &= \frac{n}{N - 1} \cdot \frac{N - 1}{N} = \frac{n}{N}. \end{aligned}$$

Звідси,

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{n}{N},$$

тобто обидві ймовірності однакові.