

**ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIR PADA PENYEBARAN COVID-  
19 DI DKI JAKARTA DENGAN VAKSINASI**

**TUGAS AKHIR SKRIPSI**

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



Oleh  
Maya Maryanah  
NIM 17305144008

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA  
2021**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIR PADA PENYEBARAN COVID-19 DI DKI JAKARTA DENGAN VAKSINASI**

**TUGAS AKHIR SKRIPSI**

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



Oleh  
Maya Maryanah  
NIM 17305144008

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA  
2021**

# **ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIR PADA PENYEBARAN COVID-19 DI DKI JAKARTA DENGAN VAKSINASI**

Oleh:

Maya Maryanah  
NIM 17305144008

## **ABSTRAK**

Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan model matematika SEIR pada penyebaran COVID-19 dan menjelaskan kestabilan titik ekuilibrium model SEIR pada penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dengan vaksinasi.

Penelitian ini menggunakan data kasus COVID-19 di DKI Jakarta pada rentang tanggal 13 Januari 2021 sampai dengan tanggal 29 September 2021. Model SEIR menggunakan model persamaan diferensial dalam bentuk proporsi. Model yang sudah terbentuk selanjutnya dilakukan analisis matematika dan simulasi numerik yang melibatkan parameter kematian atau kelahiran alami ( $\mu$ ), laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi ( $\beta$ ), laju individu terpapar menjadi individu terinfeksi ( $\sigma$ ), laju individu terinfeksi menjadi individu sembuh ( $\gamma$ ), dan laju proporsi vaksinasi ( $p$ ). Dimana parameter  $\beta$  dan  $p$  divariasikan untuk melihat titik ekuilibrium bebas COVID-19 dan titik ekuilibrium endemik COVID-19.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa model SEIR pada penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dengan vaksinasi berupa sistem persamaan diferensial nonlinear yang terdiri dari 4 persamaan. Berdasarkan simulasi numerik terlihat jika nilai proporsi vaksinasi ( $p$ ) semakin besar dan nilai laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi ( $\beta$ ) yang semakin kecil maka akan didapatkan titik ekuilibrium bebas COVID-19 dengan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) sekitar 0,001 hingga 0.132 yang artinya rata-rata setiap individu terinfeksi akan menginfeksi kurang dari satu individu baru, sehingga COVID-19 tidak akan menyebar. Sedangkan jika nilai proporsi vaksinasi ( $p$ ) semakin kecil dan nilai laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi ( $\beta$ ) yang semakin besar maka akan didapatkan titik ekuilibrium endemik COVID-19 dengan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) sekitar 1.03 hingga 1.5 yang artinya setiap individu terinfeksi COVID-19 akan menginfeksi satu individu baru, sehingga COVID-19 akan menyebar dan menjadi endemik. Dari pemodelan SEIR ini, disimpulkan bahwa untuk menekan laju penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta perlu dilakukan vaksinasi dengan rentang proporsi vaksinasi  $5.87 \times 10^{-4} - 1.87 \times 10^{-3}$ .

Kata Kunci : COVID-19, model SEIR, titik ekuilibrium, vaksinasi

# **STABILITY ANALYSIS OF SEIR MODELS ON THE SPREAD OF COVID-19 IN DKI JAKARTA WITH VACCINATION**

By:

Maya Maryanah  
NIM 17305144008

## **ABSTRACT**

*This study was aimed to explain the SEIR mathematical model and explained stability of the equilibrium point of the SEIR model on the COVID-19 spreading in DKI Jakarta with vaccination.*

*This study used data of COVID-19 cases in DKI Jakarta from 13th January 2021 untill 29th September 2021. The SEIR model used a differential equation model in form of proportions. The model that had been formed was then carried out by mathematical analysis and numerical simulation involving death or natural birth ( $\mu$ ) parameter, the rate of susceptible individuals became exposed individuals after interacting with infected individuals ( $\beta$ ), the rate of exposed individuals becoming infected individuals ( $\sigma$ ), infected individuals rate became recovered individuals ( $\gamma$ ), and vaccination proportion rate ( $p$ ). Where the  $\beta$  parameters and  $p$  are varied to see the COVID-19-free equilibrium point and the COVID-19 endemic equilibrium point.*

*The findings indicated that the SEIR model on the spread of COVID-19 in DKI Jakarta with vaccination was in the form of a four-equation non-linear differential equation system. According to numerical simulations, the value of the proportion of vaccination ( $p$ ) was increasing while the rate of susceptible individuals becoming exposed individuals after contact with infected individuals ( $\beta$ ) was decreasing. As a result, a COVID-19 free equilibrium points with a basic reproduction number ( $R_0$ ) ranging from 0.001 to 0.132 would exist. It indicated that, on average, each infected individual would infect fewer than one new individual, implying that COVID-19 will not spread. Whereas the value of the proportion of vaccination ( $p$ ) was decreasing, the rate of susceptible people becoming infected after contact with infected people ( $\beta$ ) was increasing. Then COVID-19 would reach an endemic equilibrium point with a basic reproductive number ( $R_0$ ) of around 1.03 to 1.5, implying that each individual infected with COVID-19 will infect one new individual, causing COVID-19 to spread and become endemic. According to the SEIR modeling, it was needed to vaccinate with a vaccination proportion range of  $5.87 \times 10^{-4} - 1.87 \times 10^{-3}$  to limit the rate of transmission of COVID-19 in DKI Jakarta.*

**Keywords:** COVID-19, SEIR model, equilibrium point, vaccination

## **SURAT PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Maya Maryanah  
NIM : 17305144008  
Program Studi : Matematika  
Judul TAS : Analisis Kestabilan Model SEIR Pada Penyebaran  
COVID-19 Di DKI Jakarta Dengan Vaksinasi

menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan kutipan dengan mengikuti tata penulisan katya yang telah lazim.

Cirebon, 12 Oktober 2021

Yang menyatakan,



Maya Maryanah

NIM. 17305144008

## **LEMBAR PERSETUJUAN**

Tugas Akhir Skripsi dengan Judul

### **ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIR PADA PENYEBARAN COVID-19 DI DKI JAKARTA DENGAN VAKSINASI**

Disusun oleh:

Maya Maryanah  
NIM 17305144008

Telah memenuhi syarat dan disetujui oleh Dosen Pembimbing untuk dilaksanakan  
Ujian Akhir Tugas Skripsi bagi yang bersangkutan

Yogyakarta, 12 Oktober 2021

Mengetahui,  
Ketua Program Studi



Dr. Sri Andayani, M.Kom.  
NIP. 1972204261997022001

Menyetujui,  
Dosen Pembimbing



Dr. Hartono, M.Si.  
NIP. 196203291987021002

## HALAMAN PENGESAHAN

Tugas Akhir Skripsi


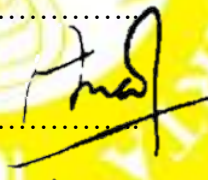

### ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIR PADA PENYEBARAN COVID-19 DI DKI JAKARTA DENGAN VAKSINASI

Disusun oleh:

Maya Maryanah  
NIM 17305144008

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji Tugas Akhir Skripsi  
Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
Pada tanggal 28 Oktober 2021

#### TIM PENGUJI

Nama/Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Dr. Hartono, M.Si. Ketua Penguji/Pembimbing		28 Oktober 2021
Fitriana Yuli Saptaningtyas, M.Si. Penguji I		4 November 2021
Kus Prihantoso Krisnawan, M.S.i. Penguji II		3 November 2021

Yogyakarta, 5 November 2021  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
Dekan,



Prof. Dr. Ariswan, M.Si.  
NIP. 195909141988031003

## MOTTO

“Yā ayyuhallażīna āmanū iżā qīla lakum tafassaḥu fil-majālisi fafsahū yafsahillāhu lakum, wa iżā qīlansyuzū fansyuzū yarfa'illāhullażīna āmanū mingkum wallażīna ʔtul-'ilma darajāṭ, wallāhu bimā ta'malūna khabīr” ~Al-Mujadilah ayat 11

“Khairukum man ta'allamal Qur'aana wa 'allamahu” ~ H.R. Bukhori

“Apa yang melewatkanmu tidak akan pernah menjadi takdirmu, dan apa yang ditakdirkan untukmu tidak akan pernah melewatkanmu.” ~ Umar bin Khottob

"اللَّهُمَّ إِنَّكَ تَعْلَمُ أَنَّ هَذِهِ الْقُلُوبَ قَدْ اجْتَمَعَتْ عَلَى مَحَبَّتِكَ وَالتَّقَاتِ عَلَى طَاعَتِكَ وَتَوَحَّدَتْ عَلَى دَعْوَتِكَ وَتَعَاهَدَتْ عَلَى نُصْرَةِ شَرِيعَتِكَ فَوَيْقُ اللَّهُمَّ رَابِطَتَهَا وَأَيْدٍ وَدَّهَا وَاهْدِهَا سُبُلَهَا وَامْلَأْهَا بِنُورِكَ الَّذِي لَا يَخْبُوا وَاشْرَحْ صُدُورَهَا بِقَيْضِ الْإِيمَانِ بِكَ وَجَمِّلِ التَّوَكُّلَ عَلَيْكَ وَأَحْيِهَا بِمَعْرِفَتِكَ وَآمِنْهَا عَلَى الشَّهَادَةِ فِي سَبِيلِكَ إِنَّكَ نِعَمَ الْمَوْلَى وَنِعَمَ النَّصِيرِ اللَّهُمَّ آمِينَ" ~Robithoh



## HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur *Alhamdulillah bini'matihi tatimmush sholihaat Laa haula wa laa quwwata illaa billaahil 'aliyyil azhimi* kepada Allaah SWT, saya persembahkan skripsi ini untuk:

1. Kedua orang tua, Bapak Uba dan Ibu Yayah yang tak pernah lepas dan berhenti memberikan doa terbaik untuk penulis
2. Kaka Siti Sholiha dan adik yang semoga Allaah memudahkan menghafal dan menjaga hafalan Al-Qurannya Ririn Riyani, serta kedua keponakan penulis Sarah dan Nadya yang menjadi penghibur dikala penat.
3. Keluarga besar Abah Atamah dan Abah Dasma atas dukungan moril dan materil selama ini.
4. Keluarga Besar Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta, Bapak dan Ibu dosen, serta teman-teman seperjuangan di Matematika.
5. Untuk teman-teman penulis yang menjadi tenaga kesehatan dan para nakes di Indonesia yang telah berusaha sebaik mungkin untuk menjadi garda terdepan dalam melawan pandemi COVID-19, semoga Allaah lindungi kalian dan kita semua. Aamiin
6. Untuk penulis, *Alhamdulillah wa inna ilaihi roji'un, mabruk wa barakallaah* atas perjuangan hati dan fisik untuk menyelesaikan S1 Matematika. Kamu hebat!

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas berkat rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir Skripsi dengan judul “Analisis Kestabilan Model SEIR Pada Penyebaran COVID-19 Di DKI Jakarta Dengan Vaksinasi” dalam rangka untuk memenuhi sebagian persyaratan untuk mendapatkan gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Tugas Akhir Skripsi ini dapat diselesaikan tidak lepas dari bantuan dan Kerjasama dengan banyak pihak. Berkenaan dengan hal tersebut, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada yang terhotmat:

1. Bapak Dr. Hartono, M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan dukungan selama proses penyusunan Tugas Akhir Skripsi.
2. Ibu Dr. Sri Andayani, M.Kom. selaku Kajurdik dan Kaprodi matematika FMIPA UNY beserta seluruh dosen dan staff yang telah memberikan bantuan dan fasilitas selama proses penyusunan Tugas Akhir Skripsi.
3. Bapak Prof. Dr. Ariswan, M.Si. selaku Dekan FMIPA UNY yang memberikan persetujuan pada pelaksanaan Tugas Akhir Skripsi.
4. dr. Verry Adrian, dr. Ngabila Salma, dr. Wulan Liasari, Mba Tia dan seluruh staff di Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta yang telah membantu dan mengizinkan penggunaan data COVID-19 di DKI Jakarta.
5. Bapak, Ibu, Tete, Sabrin, Sarah, Nadya, Bapak Aban, Tete Nunung, Keluarga Atamah dan Keluarga Dasma tersayang yang senantiasa memberikan do'a, dukungan, dan semangat.
6. Marwah, Sofi, Neni, Berli, Umi, Mba Mira, Kak Syifa dan Rani yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi.
7. Teman-teman Matematika E 2017 yang selalu memberikan semangat dan motivasi.

8. Teman-teman RQ Jami At-Taqlwa yang sudah memberikan semangat.
9. Semua pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung, yang telah membantu selama proses penyusunan Tugas Akhir Skripsi ini.

Akhirnya, semoga segala bantuan yang telah diberikan semua pihak di atas menjadi amalan yang bermanfaat dan mendapatkan balasan dari Allaah SWT dan Tugas Akhir Skripsi ini menjadi informasi bermanfaat bagi pembaca atau pihak lain yang membutuhkan.

Cirebon, 20 September 2021

Penulis,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Maya Maryanah' in a stylized, cursive script.

Maya Maryanah

NIM. 17305144008

## DAFTAR ISI

ABSTRAK .....	ii
ABSTRACT.....	iii
SURAT PERNYATAAN.....	iv
LEMBAR PERSETUJUAN.....	v
HALAMAN PENGESAHAN.....	vi
MOTTO .....	vii
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	viii
KATA PENGANTAR .....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
DAFTAR SIMBOL.....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
A. Latar Belakang .....	1
B. Identifikasi Masalah .....	4
C. Batasan Masalah.....	4
D. Rumusan Masalah .....	5
E. Tujuan Penelitian.....	5
F. Manfaat Penelitian.....	5
<b>BAB II KAJIAN TEORI .....</b>	<b>7</b>
A. Persamaan Diferensial .....	7
B. Solusi Persamaan Diferensial.....	8
C. Sistem Persamaan Diferensial .....	10
D. Model Matematika .....	12
E. Model <i>Susceptible Exposed Infected Recovered</i> (SEIR).....	13
F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	14
G. Titik Ekuilibrium.....	16
H. Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear .....	17

I. Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	22
J. Kriteria Routh-Hurwitz .....	24
K. <i>Basic Reproduction Number (<math>R_0</math>)</i> .....	25
L. COVID-19.....	28
M. Maple.....	31
N. Penelitian-Penelitian Terdahulu .....	31
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>33</b>
A. Deskripsi Data Penelitian .....	33
B. Langkah-langkah Penelitian.....	34
<b>BAB IV PEMBAHASAN.....</b>	<b>36</b>
A. Asumsi Model .....	36
B. Variabel dan Parameter .....	37
C. Penyebaran COVID-19 .....	38
D. Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar.....	41
E. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	46
F. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik .....	47
G. Nilai-Nilai Parameter .....	50
H. Perhitungan Numerik dan Simulasi Model .....	51
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>66</b>
A. Kesimpulan.....	66
B. Saran.....	67
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>69</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>72</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Tabel Routh-Hurwitz .....	24
Tabel 4. 1 Daftar variabel model penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi.....	37
Tabel 4. 2 Daftar parameter model penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi.....	37
Tabel 4. 3 Tabel Routh Hurwitz Endemik .....	49
Tabel 4. 4 Nilai parameter untuk model SEIR dengan vaksinasi .....	50
Tabel 4. 5 Estimasi Nilai Parameter Keadaan Bebas COVID-19.....	51
Tabel 4. 6 Hasil Kombinasi Parameter Keadaan Bebas COVID-19.....	56
Tabel 4. 7 Estimasi Nilai Parameter Endemik COVID-19 .....	58
Tabel 4. 8 Hasil Kombinasi Parameter Keadaan Endemik COVID-19.....	62

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Proses Permodelan Matematika .....	12
Gambar 2. 2 Simulasi kestabilan titik ekuilibrium .....	23
Gambar 3. 1 Skema Penyelesaian Masalah.....	35
Gambar 4. 1 Diagram Transfer Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi .....	38
Gambar 4. 2 Simulasi Sistem (3.3) Keadaan Bebas COVID-19 .....	57
Gambar 4. 3 Simulasi sistem (3.3) dengan $\beta = 9.35 \times 10^{-3}$ dan $p =$ $2.70 \times 10^{-5}$ .....	64

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Program maple untuk  $\beta = 2.35 \times 10^{-4}$  dan  $p = 1.87 \times 10^{-3}$  ..... 72

Lampiran 2 Program maple untuk  $\beta = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p = 2.70 \times 10^{-5}$  ..... 74



## DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$  : Bilangan real

$\lambda$  : Lamda

$\mu$  : Mu

$\gamma$  : Gamma

$\beta$  : Beta

$\sigma$  : Sigma

$\in$  : Elemen dari

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **A. Latar Belakang**

COVID-19 termasuk pandemi baru yang disebarluaskan oleh virus *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (Sars-CoV-2). Virus ini mengincar sistem pernapasan yang dapat menyerang segala kalangan usia dimulai dari bayi baru lahir hingga lansia. *Coronavirus* (CoV) termasuk ke dalam keluarga besar virus yang dapat mengakibatkan flu ringan sampai komplikasi yang parah, sebagaimana yang terjadi pada tahun 2012 yakni *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS-CoV) serta *Severe Acute Respiratory Syndrome* (Sars-CoV) yang terjadi di tahun 2002 (Alberca et al., 2020).

Infeksi COVID-19 perdana muncul di Wuhan, China pada bulan terakhir tahun 2019. Kemudian virus ini meluas dengan pesat ke hampir semua wilayah dunia, pada laman Worldometers per tanggal 17 Oktober 2020 pukul 8.30 WIB virus Corona telah menginfeksi manusia di 217 negara dengan total kasus terkonfirmasi positif sebanyak 39,573,043, kasus kematian mencapai 1,109,070, dan kasus orang dinyatakan sembuh sebanyak 29,653,434 atau 96% tingkat kesembuhannya. Sedangkan kasus positif secara total di DKI Jakarta per 16 Oktober 2020 adalah sebanyak 92.382 dengan total kasus sembuh sebanyak 76,956, total kasus meninggal sebanyak 2,008 kasus dan tingkat kesembuhan sebesar 83,3%. Data SATGAS COVID-19 dari bulan Maret hingga pertengahan Oktober Provinsi DKI Jakarta menunjukkan provinsi dengan kenaikan kasus harian tertinggi, per tanggal 16 Oktober 2020 kasus di DKI Jakarta sampai pada 1,045 kasus dari kasus total per hari di Indonesia sebanyak 4,301 kasus terkonfirmasi positif COVID-19 (Pemprov DKI Jakarta, 2020).

Penyakit COVID-19 merupakan pandemi yang melanda sistem pernapasan. Kasus-kasus yang terjadi sebagian besar adalah infeksi pernapasan ringan, layaknya flu. Selain itu, virus tersebut dapat mengakibatkan infeksi sistem pernapasan akut, layaknya infeksi paru-paru (pneumonia). Ciri-ciri umum yang sering terjadi adalah

sesak napas, batuk kering, maupun demam. Adapun beberapa indikasi lain yaitu sakit kepala, diare, konjungtivitis, ruam di kulit, hilangnya daya indra pengecap maupun penciuman, dan merasa sakit pada beberapa bagian tubuh seperti pinggang. Gejala-gejala yang telah disebutkan dapat terlihat dalam waktu 48 jam sampai 2 minggu pasca terinfeksi virus. COVID-19 ditularkan melewati bermacam-macam cara seperti bersinggungan dengan percikan ludah dari seseorang yang telah terinfeksi melalui batuk ataupun bersin, menyentuh hidung ataupun mulut dengan tidak membersihkan tangan, dan kontak erat dengan penderita. Virus ini mampu menjangkit siapa saja terutama untuk kalangan usia lanjut, perokok, dan orang yang memiliki penyakit penyerta tahunan (Pane, 2020).

Penanganan pencegahan penyebaran COVID-19 yang tepat adalah dengan menjalani gaya hidup bersih dan sehat, menjaga jarak, *contact tracing* dan *testing*, menghentikan penyebaran virus dengan membatasi mobilitas warga, dan meminimalisir tingkat kematian (WHO, 2020). Strategi Dinkes DKI Jakarta dalam memutus rantai pandemic COVID-19 antara lain dengan melakukan pemeriksaan secara massif dengan *active cases finding*, dimana Dinkes DKI Jakarta secara aktif mencari dan berupaya untuk menjangkit para warga yang berstatus Orang Tanpa Gejala lebih awal. Strategi lain yang dilakukan adalah penerapan PSBB dan PKKM di DKI Jakarta yang bertujuan untuk melakukan pembatasan mobilitas warga. Dinkes DKI berupaya menciptakan aplikasi cek gejala mandiri yang diberi nama Corona Likelihood Metric yang berguna sebagai rekomendasi medis kepada warga yang memiliki gejala mirip kasus COVID-19 serta aplikasi Corona Likelihood Metric berguna untuk pihak Dinkes dalam melakukan pemantauan (*tracing*) serta mendeteksi kelompok atau wilayah yang masih termasuk dalam risiko tinggi penyebaran COVID-19 (Hanggara, 2020).

Namun dengan tidak efektifnya upaya penanganan pencegahan penyebaran COVID-19, dimana DKI Jakarta sering menduduki peringkat dengan kasus terkonfirmasi positif tertinggi di Indonesia, maka vaksinasi menjadi salah satu jalan yang perlu ditempuh dalam mempercepat penyembuhan penyakit dengan mengurangi banyaknya individu yang rentan dan memiliki risiko terpapar serta

meminimalisir angka kematian. Berdasarkan pusat data COVID-19 Kementerian Kesehatan pada tanggal 27 September 2021, DKI Jakarta menempati peringkat pertama cakupan vaksinasi tertinggi di Indonesia. Cakupan dosis pertama vaksin di DKI Jakarta telah mencapai 10.385.570 dosis dan 7.655.342 dosis untuk cakupan dosis kedua (Pemprov DKI Jakarta, 2021).

Penyebaran suatu penyakit dapat digambarkan dengan semakin berkembangnya ilmu pengetahuan khususnya pada ilmu matematika yang memiliki peranan penting dan turut andil dalam memberikan pengaruh kepada suatu negara atau lembaga untuk mengambil kebijakan dalam menanggulangi penyebaran suatu penyakit. Model matematika dapat menampilkan fenomena penyebaran suatu penyakit yang merepresentasikan suatu permasalahan yang nyata.

Model matematika sangat penting dalam ilmu pengetahuan alam, termasuk biologi dan epidemiologi. Permodelan matematika membantu dalam hal mendapatkan pemahaman baru tentang suatu sistem, mengatur, dan memahami data biologi, memperoleh respon dari perilaku sistem, mencari kinerja optimal dan strategi intervensi, serta membuat prediksi sistem. Model SEIR adalah salah satu model epidemiologi klasik yang mencakup kompartemen individu yang terpapar (*Exposed*)  $E(t)$ , dimana terdapat individu terinfeksi tetapi tidak menular (Martcheva, 2015).

Penelitian terhadap penyebaran COVID-19 telah banyak dilakukan, diantaranya adalah “A *SIR model assumption for spread of COVID-19 in different communities*” dimana model SIR menyediakan kerangka teoretis untuk menyelidiki penyebaran dalam komunitas dengan mengakomodasi lonjakan populasi yang rentan terinfeksi (Cooper et al., 2020).

Model kompartemen SEIR yang merupakan pengembangan dari model SIR, dalam jurnal “*Application of a generalized SEIR model for covid-19 in Algeria*” penelitian ini menggunakan model kompartemen SEIRDP dengan kompartemen *Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, Death*, dan *Insusceptible*. Penelitian ini menyimpulkan bahwa model SEIR klasik meremehkan kematian kumulatif

berdasarkan perbandingan model SEIR dan SEIRDP yang dilakukan menggunakan data penyebaran COVID-19 di Algeria (Lounis & Azevedo, 2020).

Penelitian lain yang menggunakan SEIR model dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi dan isolasi sebagai parameter yaitu “*Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia*”. Penelitian ini menggunakan matriks *next generation* dalam menentukan bilangan reproduksi dasarnya. Dari simulasi yang telah dilakukan, diperoleh bahwa vaksin dapat menyegerakan penyembuhan COVID-19 dan waktu yang dihabiskan selama isolasi dapat melambatkan penyebaran virus tersebut di Indonesia (Annas et al., 2020).

Berdasarkan penjabaran tersebut, maka dalam skripsi ini akan dibangun model SEIR dalam penyebaran COVID-19 dengan data kasus COVID-19 di DKI Jakarta dengan intervensi vaksinasi.

## **B. Identifikasi Masalah**

Berlandaskan latar belakang yang dijelaskan, teridentifikasi berbagai permasalahan antara lain :

1. COVID-19 merupakan penyakit menular yang masih terjadi di DKI Jakarta.
2. DKI Jakarta merupakan provinsi dengan kasus tertinggi selama bulan Maret hingga Oktober 2020.
3. Cakupan vaksinasi COVID-19 di DKI Jakarta tergolong tinggi namun kasus COVID-19 di DKI Jakarta masih terjadi.
4. Perlunya model matematika dengan intervensi vaksinasi dalam penanganan kasus COVID-19 di DKI Jakarta dikarenakan vaksin merupakan strategi penanganan pandemic COVID-19.

## **C. Batasan Masalah**

Masalah yang teridentifikasi selanjutnya akan dikerucutkan menjadi beberapa hal yaitu:

1. Metode penyelesaian menggunakan model kompartemen SEIR dengan vaksinasi.
2. Nilai parameter proporsi vaksinasi dan laju individu dari rentan ke terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi divariasikan untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar  $> 1$ .
3. Data kasus penyebaran berasal dari kasus penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta.
4. Data yang dipergunakan bersumber dari *website* Pemprov DKI Jakarta (<https://corona.jakarta.go.id/id>) pada 13 Januari 2021 - 29 September 2021.

#### **D. Rumusan Masalah**

Berlandaskan latar belakang, identifikasi masalah dan pembatasan masalah maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut.

1. Bagaimana pemodelan matematika penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dengan Vaksinasi?
2. Bagaimana analisis kestabilan titik ekuilibrium model SEIR untuk penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dengan vaksinasi?

#### **E. Tujuan Penelitian**

Penulisan tugas akhir skripsi ini bertujuan untuk:

1. Menjelaskan pemodelan matematika penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi.
2. Menjelaskan kestabilan titik ekuilibrium model SEIR untuk penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dengan vaksinasi.

#### **F. Manfaat Penelitian**

Penelitian ini diharapkan mampu memberi manfaat sebagai berikut :

1. Manfaat Teoretis

Tugas akhir skripsi ini diharapkan mampu menambah pengetahuan serta wawasan juga menjadi literatur terkait model SEIR pada penyebaran COVID-19 bagi peneliti, penulis, dan masyarakat.

## 2. Manfaat Praktis

Manfaat praktis dari tugas akhir skripsi ini ialah memberikan gambaran model SEIR pada penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dengan vaksinasi secara matematis.

## BAB II

### KAJIAN TEORI

#### A. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap variabel bebas. Berdasarkan turunan fungsi terhadap variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. (Campbell & Haberman, 2008)

##### 1. Persamaan Diferensial Biasa

**Definisi 2.1 :** (Campbell & Haberman, 2008)

*Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas.*

##### Contoh 2.1

1.  $xy \frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$ , variabel  $y$  ialah variabel terikat serta variabel  $x$  ialah variabel bebas
2.  $\frac{dx}{dy} = e^y + \sin y$ , variabel  $y$  adalah variabel bebas serta variabel  $x$  adalah variabel terikat

##### 2. Persamaan Diferensial Parsial

**Definisi 2.2 :** (Ross, 2004)

*Persamaan diferensial parsial merupakan suatu persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.*

##### Contoh 2.2

1.  $\frac{\partial u}{\partial x} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , variabel  $x$  dan  $y$  ialah variabel bebas sedangkan  $u$  ialah variabel terikat dengan  $u = g(x, y)$



2.  $\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \sin(x + t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  , variabel  $x$  ,  $y$  dan  $t$  adalah variabel bebas serta  $u$  adalah variabel terikat dengan  $u = g(x, y, t)$

## B. Solusi Persamaan Diferensial

**Definisi 2.3** (Ross, 2004)

*Diberikan suatu persamaan diferensial orde- $n$  sebagai berikut:*

$$F \left[ x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} \right] \quad (2.1)$$

*dengan  $F$  adalah fungsi real.*

1. *Misalkan  $f$  adalah fungsi bilangan real yang terdeteksi untuk semua  $x$  dalam interval  $I$  dan mempunyai turunan ke- $n$  untuk semua  $x \in I$ . Fungsi  $f$  disebut solusi eksplisit dari (2.1) dalam interval  $I$  jika fungsi  $f$  memenuhi syarat berikut:*

- a.  $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)]$ , terdefinisi  $\forall x \in I$
- b.  $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)] = 0, \forall x \in I$

*Hal ini berarti bahwa substitusi  $f(x)$  dan variasi turunan  $y$  dan turunannya yang berkorespondensi ke (2.1) akan membuat (2.1) menjadi suatu identitas di interval  $I$ .*

2. *Suatu relasi  $g(x, y) = 0$  disebut solusi implisit dari persamaan (2.1) jika relasi ini mendefinisikan sedikitnya satu fungsi bilangan real  $f$  dengan variabel  $x$  di interval  $I$ .*
3. *Solusi eksplisit dan solusi implisit biasa disebut sebagai solusi sederhana.*

**Hipotesis 1** (Ross, 2004)

*Perhatikan persamaan diferensial berikut*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.1a)$$

*dimana*

1. *fungsi  $f$  adalah fungsi kontinu dari  $x$  dan  $y$  pada sebarang domain  $D$  dari bidang  $xy$ .*
2. *turuna parsial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  juga merupakan fungsi kontinu dari  $x$  dan  $y$  pada  $D$ ; dan  $(x_0, y_0)$  adalah titik di  $D$ .*

Terdapat sebuah solusi khusus  $\phi$  dari (2.1a) terdefinisi pada interval  $|x - x_0| \leq h$ , dimana  $h$  cukup kecil, sehingga memenuhi kondisi

$$\phi(x_0) = y_0$$

### Contoh 2.3

Carilah solusi persamaan diferensial berikut

$$y^2 \frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy = 0, y(1) = 1$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Misalkan  $y = ux$ , maka  $dy = x du + u dx$

Sehingga

$$\frac{x du + u dx}{dx} = u^2 + 2u$$

$$x du + u dx = (u^2 + 2u)dx$$

$$x du = (u^2 + u)dx$$

$$\frac{du}{(u^2 + u)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{(u^2 + u)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \ln x + c$$

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln cx$$

$$\ln u - \ln(u+1) = \ln cx$$

$$\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) = \ln cx$$

$$\ln\left(\frac{y/x}{y/x+1}\right) = \ln cx$$

$$\ln\left(\frac{y}{y+x}\right) = \ln cx$$

$$\frac{y}{y+x} = cx$$

$$y(1 - cx) = cx^2$$

$$y = \frac{cx^2}{1 - cx}$$

$$y(1) = 1 \leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Jadi solusi umum dari persamaan diferensial di atas adalah  $y = \frac{x^2}{1-x}$

### C. Sistem Persamaan Diferensial

**Definisi 2.4 :** (Ross, 2004)

*Dimisalkan sistem persamaan diferensial*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\end{aligned}$$

*Sistem persamaan diferensial tersebut dapat dituliskan sebagai*

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

Dengan  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $E$  merupakan himpunan terbuka dan kondisi awal  $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) \in E$ , sehingga notasi  $x_t = x(x_0, t)$  adalah solusi sistem (2.2) yang dimulai dari  $x_0$ .

#### 1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear orde satu yang memiliki variabel tak bebas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  serta variabel bebas  $t$ , dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + g_n(t)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Jika  $g_i, i = 1, 2, \dots, n$  bernilai nol, maka sistem persamaan diferensial linear tersebut homogen, namun untuk  $g_i, i = 1, 2, \dots, n$  bernilai tak nol disebut sistem persamaan diferensial linear non homogen.

Sistem persamaan diferensial tersebut dapat dituliskan dalam suatu persamaan berikut

$$\dot{x} = Ax + G(t) \quad (2.4)$$

dengan  $A$  melambangkan matriks koefisien  $n \times n$  dari variabel tak bebas  $x \in \mathbb{R}^n$ , dengan  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$  dan  $G(t)$  melambangkan matriks  $n \times 1$  yang merupakan fungsi dari  $t$ ,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

#### Contoh 2.4

1. Sistem homogen

$$\frac{dx}{dy} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 6y$$

2. Sistem non homogen

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y - 5t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 6y - 4$$

#### 2. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

**Definisi 2.5** (Ross, 2004)

*Persamaan diferensial biasa yang tak linear disebut persamaan diferensial nonlinear. Persamaan diferensial tersebut dikatakan nonlinear jika memenuhi paling sedikit satu dari kriteria-kriteria berikut:*

1. Terdapat variabel tak bebas dari turunan-turunannya yang berpangkat selain satu.
2. Memuat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
3. Memuat fungsi transcendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

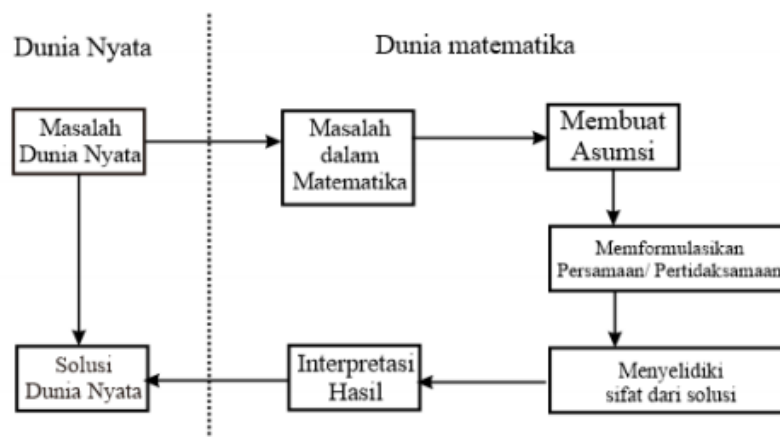
### Contoh 2.5

1.  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$
2.  $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$
3.  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

### D. Model Matematika

Model matematika adalah sebuah abstrak, penyederhanaan, konstruksi matematika yang berkaitan dengan bagian dari realita dan dibentuk untuk suatu tujuan khusus (Bender, 1978).

Manfaat dan kelebihan dari permodelan matematika antara lain matematika adalah bahasa yang tepat untuk membantu memformulasikan ide dan identifikasi yang mendasarkan asumsi, matematika adalah bahasa yang ringkas, terdefinisi dengan baik untuk memanipulasi, telah terbukti oleh para ahli matematika, dan dapat menggunakan bantuan komputer untuk melakukan kalkulasi numerik (Marion, 2008). Tahapan membuat model matematika yaitu menerjemahkan permasalahan nyata ke bahasa matematika (Widowati& Sutimin, 2007). Tahapan permodelan tersebut dapat dijabarkan melalui diagram berikut.



**Gambar 2. 1 Proses Permodelan Matematika**

Sumber : Widowati dan Sutimin (2007)

Keterangan:

1. Memodelkan masalah ke dalam bahasa matematika

Hal pertama yang harus dilakukan dalam proses permodelan matematika yaitu dengan memodelkan permasalahan tersebut ke bahasa matematika. Hal tersebut mencakup pemahaman mendalam pada spesifik permasalahan, identifikasi dan pembatasan masalah, membuat parameter-parameter yang menggambarkan beberapa keterkaitan antara variabel-variabel, serta merinci masing-masing variabel dan persamaan tersebut menjadi sebuah model matematika.

2. Membangun asumsi

Asumsi dibuat untuk merefleksikan proses berpikir bagaimana model matematika tersebut dapat berhasil.

3. Memformulasikan persamaan ataupun pertidaksamaan

Setelah membuat asumsi serta mengetahui keterkaitan antar variabelnya, selanjutnya merumuskan hal tersebut ke dalam bentuk persamaan atau sistem persamaan.

4. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan

Setelah memformulasikan model tersebut ke dalam persamaan/pertidaksamaan, maka langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan tersebut.

5. Menginterpretasikan hasil

Interpretasi dari sebuah solusi matematika merupakan proses yang menerjemahkan bahasa matematika kembali ke permasalahan nyatanya. Interpretasinya dapat disajikan dalam bentuk grafik yang menggambarkan solusi apa yang dapat diterapkan.

**E. Model *Susceptible Exposed Infected Recovered* (SEIR)**

Salah satu permodelan matematika yang banyak dipilih dalam menganalisis bagaimana perluasan suatu penyakit ialah model SEIR, dimana model ini mengelompokkan populasi ke dalam empat kelompok populasi menjadi kelompok populasi *susceptible* (S), kelompok populasi *exposed* (E), kelompok populasi *infected* (I), serta kelompok populasi *recovered* (R) (Hurint et al., 2017).

*Susceptible* atau suspek adalah populasi yang mungkin dapat terinfeksi, *exposed* menunjukkan populasi yang terpapar ataupun terinfeksi namun tidak menunjukkan gejala dikarenakan masih dalam tahap inkubasi, *infected* adalah populasi yang terinfeksi dan sudah jatuh sakit dan membutuhkan perawatan, sedangkan *recovered* adalah populasi yang sudah dinyatakan sembuh.

Populasi *susceptible* menjadi *exposed* disebabkan adanya interaksi dengan populasi yang telah terinfeksi (*infected*) dengan laju  $\alpha$ . Laju  $\beta$  melambangkan perubahan populasi *exposed* menjadi *infected* sedangkan individu *infected* menjadi *recovered* dengan laju  $\sigma$ .

Model SEIR dengan jumlah total populasi  $N = S + E + I + R$  konstan dan  $\mu$  merupakan laju kelahiran serta kematian alami yang diasumsikan konstan maka diperoleh model sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\alpha IS}{N} - \mu S,$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\alpha IS}{N} - \beta E,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - \mu I - \sigma I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \sigma I - \mu R.$$

## F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 2.6** (Anton, 1987)

Jika  $B$  adalah matriks  $n \times n$ , maka vektor tak nol  $x$  dalam  $\mathbb{R}^n$  dinamakan vektor eigen dari  $B$  jika  $Bx$  adalah kelipatan skalar dari  $x$  yaitu

$$Bx = \lambda x \tag{2.5}$$

untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $B$  dan  $x$  dikatakan vektor eigen yang berpadanan dengan  $\lambda$ . Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut

$$Bx = \lambda x$$

$$Bx = \lambda Ix$$

$$(\lambda I - B)x = 0 \quad (2.6)$$

dengan  $I$  adalah matriks identitas. Persamaan (2.5) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - B) = 0. \quad (2.7)$$

Persamaan (2.4) dinamakan persamaan karakteristik dari  $B$  dan skalar yang memenuhi persamaan (2.4) adalah nilai eigen dari  $B$ .

Dimisalkan  $B$  ialah matriks  $n \times n$ , maka polinomial karakteristik memenuhi persamaan bentuk

$$\det(\lambda I - B) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n.$$

Sehingga persamaan karakteristik  $B$  menjadi

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

dengan  $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ .

### Contoh 2.6

Dimisalkan matriks  $B = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

a. Nilai eigen dari matriks  $B$

Dari persamaan (2.6) diperoleh

$$\det(\lambda I - B) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 9 & -2 \\ -5 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda - 10 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 10) = 0$$

sehingga didapatkan nilai eigen  $\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = 10$ .

b. Vektor-vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen dari matriks  $B$

Untuk  $\lambda_1 = -1$  disubstitusikan ke persamaan (2.6)

$$(\lambda I - B)x = 0$$



$$\begin{bmatrix} -10 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

lalu dilakukan eliminasi Gauss sehingga diperoleh matriks linearisasi berikut.

$$\left( \begin{array}{cc|c} -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow -5x_1 - x_2 = 0$$

diperoleh  $x_2 = -5x_1$  dan  $x_1 = x_1$  sehingga solusi umumnya  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -5x_1 \end{pmatrix}$ . Jika

dipilih  $x_1 = 1$ , maka  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$  ialah vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen  $\lambda_1$ .

Selanjutnya untuk  $\lambda_2 = 10$  disubstitusikan ke persamaan (2.6)

$$(\lambda I - B)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

dan dilakukan eliminasi Gauss sehingga diperoleh matriks linearisasi berikut

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow x_1 - 2x_2 = 0$$

diperoleh  $x_1 = 2x_2$  dan  $x_2 = x_2$  sehingga solusi umumnya  $x = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Jika

dipilih  $x_2 = 1$ , maka  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  merupakan vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen  $\lambda_2$ .

## G. Titik Ekuilibrium

**Definisi 2.7 :** (Tu, 1994)

*Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan ialah titik yang tidak berubah dalam periode waktu tertentu. Terdapat sistem persamaan diferensial  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x)$ .*

*Titik  $\bar{x}$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , merupakan titik ekuilibrium apabila  $f(\bar{x}) = 0$ .*

### Contoh 2.6

Dimisalkan sistem persamaan diferensial  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 + x_2^2 \end{cases}$ , misalkan

$\dot{x} = f(x)$ , maka sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 + x_2^2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Untuk memperoleh titik ekuilibrium dari  $f(x)$ , maka akan dicari  $\bar{x}$  yang membuat  $f(\bar{x}) = 0$ ,

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + x_2^2 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan metode substitusi didapatkan  $x_2 = 0$  atau  $x_2 = \frac{2}{5}$

1. untuk  $x_2 = 0$  maka  $x_1 = 0$  dan titik ekuilibriumnya menjadi  $(0,0)^T$ ,
2. untuk  $x_2 = \frac{2}{5}$  maka  $x_1 = \frac{12}{25}$  dan titik ekuilibriumnya menjadi  $\left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T$ .

sehingga diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu  $(0,0)^T$  dan  $\left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T$ .

## H. Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Metode pengubahan sebuah sistem nonlinear menjadi suatu sistem linear disebut linearisasi dan bertujuan guna mencapai aproksimasi yang tepat. Linearisasi dijalankan pada sistem persamaan nonlinear guna melihat bagaimana perilakunya di sekitar titik ekuilibrium.

Dimisalkan sistem persamaan diferensial nonlinear (2.1) dengan  $y \in L \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  fungsi nonlinear dan kontinu. Dimisalkan  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  merupakan sebuah titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial (2.1), maka pendekatan linearnya didapatkan melalui ekspansi Taylor pada titik ekuilibrium  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T$  yaitu

$$\begin{aligned} &f_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\ &= f_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_1 - \bar{y}_1) + \dots \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_n - \bar{y}_n) + R_{f_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\
& = f_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_1 - \bar{y}_1) + \dots \\
& + \frac{\partial f_{12}}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_n - \bar{y}_n) + R_{f_2} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_n(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\
& = f_n(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_1 - \bar{y}_1) + \dots \\
& + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_n - \bar{y}_n) + R_{f_n}
\end{aligned}$$

Pendekatan untuk sistem di atas

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 & = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_1 - \bar{y}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_2 - \bar{y}_2) + \dots \\
& + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_n - \bar{y}_n) + R_{f_1} \\
\dot{y}_2 & = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_1 - \bar{y}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_2 - \bar{y}_2) + \dots \\
& + \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_n - \bar{y}_n) + R_{f_2} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_n & = \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_1 - \bar{y}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_2 - \bar{y}_2) + \dots \\
& + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T(y_n - \bar{y}_n) + R_{f_n}
\end{aligned}$$

dengan  $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$  menyatakan suku-suku sisa yang melambangkan beda polinomial Taylor derajat ke- $n$  terhadap fungsi non linearnya. Semakin baik pendekatan linearnya, maka semakin kecil nilai suku sisanya, atau dapat dikatakan bahwa suku sisanya mendekati nol. Dengan demikian, suku-suku sisa

dapat dihilangkan karena nilai  $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$  yang mendekati nol. Selanjutnya sistem pendekatan di atas dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1 - \bar{y}_1) \\ (y_2 - \bar{y}_1) \\ \vdots \\ (y_3 - \bar{y}_1) \end{bmatrix}.$$

Diberikan  $z_1 = y_1 - \bar{y}_1$ ,  $z_2 = y_2 - \bar{y}_2$ , ...,  $z_n = y_n - \bar{y}_n$ , sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z_1) \\ (z_2) \\ \vdots \\ (z_3) \end{bmatrix}$$

dengan

$$J(f(\bar{y})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T \end{bmatrix}$$

merupakan matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_3)$ .

Jika  $J(f(\bar{y}))$  tidak mempunyai nilai eigen bernilai nol pada bagian realnya, maka sifat kestabilan sistem persamaan diatas dapat terlihat dari  $\dot{z} = J(f(\bar{y}))z$  atau yang dinamakan sebagai hasil linearisasi dari sistem persamaan (2.1).

Sesudah sistem  $\dot{y} = f(y)$  dilinearisasi, perilaku kestabilan di titik ekuilibriumnya dapat diperiksa dengan melakukan linearisasi di sekitar titik yang sama apakah merupakan titik kesetimbangan hiperbolik.

**Definisi 2.8** (Perko, 2000)

Pada titik  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  dinamakan titik kesetimbangan atau titik kritis dari  $\dot{x} = f(x)$  sehingga  $f(x_0) = 0$ .  $x_0$  dinamakan titik kesetimbangan hiperbolik dari  $\dot{x} = f(x)$  jika tidak memuat nilai eigen yang bagian real nya bernilai nol. Sistem linear  $\dot{x} = Ax$  dengan matriks  $A = Df(x_0)$  adalah linearisasi dari  $\dot{x} = f(x)$  saat  $x_0$ .

**Teorema 2.1 :** (Perko, 2000)

Sebuah titik ekuilibrium  $x_0$  dari  $\dot{x} = f(x)$  adalah source jika semua nilai eigen dari  $Df(x_0)$  memiliki bagian real positif; sink apabila semua nilai eigen dari  $Df(x_0)$  memiliki bagian real bernilai negatif; dan saddle jika sebuah titik ekuilibrium hiperbolik yang memiliki sekurang-kurangnya satu nilai eigen dengan bagian real bernilai positif dan sekurang-kurangnya bagian real bernilai negatif.

**Contoh 2.7**

Dimisalkan sistem persamaan diferensial nonlinear berikut.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

Sistem tersebut memiliki dua titik ekuilibrium yaitu  $(0,0)^T$  dan  $\left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T$ .

Maka matriks Jacobian untuk sistem  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 + x_2^2 \end{cases}$  adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x)^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 + 2x_2 \\ 3 & -4 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian untuk  $\bar{x}_1 = (0,0)^T$  adalah  $J(f(0,0)^T) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$  dan akan dicari nilai eigen untuk  $J(f(0,0)^T)$ .

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2 - \lambda)(-4 - \lambda) - 6 = 0$$

$$8 + 6\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 3)^2 - 9 + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{7}$$

Dari perhitungan di atas maka diperoleh dua nilai eigen, yaitu  $\lambda_1 = -3 + \sqrt{7}$  dan  $\lambda_2 = -3 - \sqrt{7}$  serta titik ekuilibrium  $\bar{x}_1 = (0,0)^T$  merupakan titik ekuilibrium hiperbolik sebab tak memiliki nilai eigen yang memiliki nilai nol pada bagian realnya serta merupakan titik ekuilibrium *saddle* karena mempunyai sekurang-kurangnya satu nilai eigen dengan bagian real bernilai positif dan sekurang-kurangnya bagian real bernilai negatif.

Matriks Jacobian untuk  $\bar{x}_2 = \left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T$  adalah  $J\left(f\left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T\right) = \begin{bmatrix} -2 & \frac{14}{5} \\ 3 & -\frac{16}{5} \end{bmatrix}$  dan akan dicari nilai eigen untuk  $J\left(f\left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T\right)$ .

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & \frac{14}{5} \\ 3 & -\frac{16}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2 - \lambda)\left(\frac{16}{5} - \lambda\right) - \frac{42}{5} = 0$$

$$\frac{32}{5} + 2\lambda + \frac{16}{5}\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{26}{5}\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{26}{5} \pm \sqrt{\frac{676}{25} + 8}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{26}{10} \pm \frac{\sqrt{876}}{10}$$

Dari perhitungan diatas maka diperoleh dua nilai eigen, yaitu  $\lambda_1 = -\frac{26}{10} + \frac{\sqrt{876}}{10}$  dan  $\lambda_2 = -\frac{26}{10} - \frac{\sqrt{876}}{10}$  serta titik ekuilibrium  $\bar{x}_2 = \left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T$  merupakan titik ekuilibrium hiperbolik sebab tak memiliki nilai eigen yang bagian realnya bernilai nol serta merupakan titik ekuilibrium *saddle* karena mempunyai sekurang-kurangnya satu nilai eigen dengan bagian real bernilai positif dan sekurang-kurangnya bagian real bernilai negatif. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa perilaku kestabilan di sekitar titik ekuilibrium  $\bar{x}_2 = \left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T$  serupa dengan perilaku kestabilan persamaan nonlinearnya.

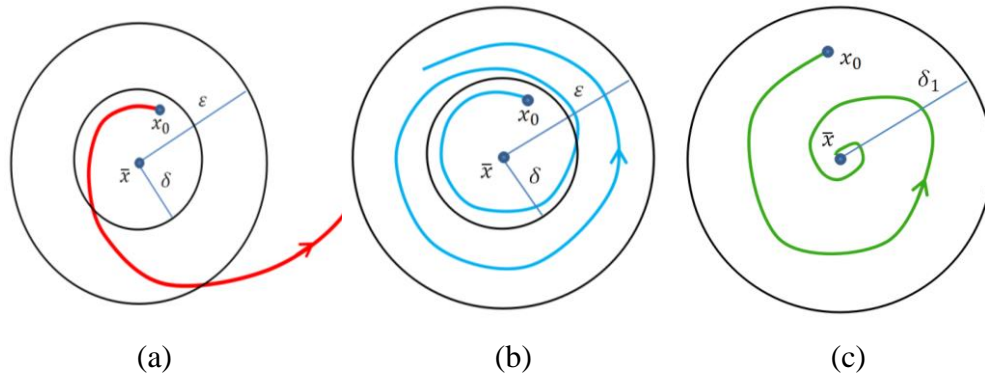
## I. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan sistem dinamik linear dapat diketahui dengan mengamati perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium.

**Definisi 2.9** (Olsder & Woude, 1994)

*Diberikan sistem dinamik linear orde satu  $\dot{x} = f(x)$  yang memiliki solusi  $x_{x_0}(t)$  pada waktu  $t$  memberikan kondisi awal  $x(0) = x_0$ . Berikut beberapa kondisi kestabilan titik ekuilibrium suatu system persamaan.*

1. *Vektor  $\bar{x}$  yang memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$  disebut sebagai titik ekuilibrium.*
2. *Titik ekuilibrium  $\bar{x}$  disebut titik stabil jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sehingga, jika  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ , maka  $\|x_{x_0}(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ , untuk semua  $t \geq 0$ .*
3. *Titik ekuilibrium  $\bar{x}$  disebut titik stabil asimtotik jika titik ekuilibrium itu stabil dan ada  $\delta > 0$  sedemikian sehingga jika  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ , maka  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{x_0}(t) - \bar{x}\| = 0$ .*
4. *Titik ekuilibrium  $\bar{x}$  disebut titik tidak stabil apabila tidak memenuhi kondisi 1.*



**Gambar 2. 2 Simulasi kestabilan titik ekuilibrium**

Stabil (a), tidak stabil (b), dan stabil asimtotik (c)

**Teorema 2.2 :** (Olsder & Woude, 1994)

Diberikan matriks Jacobian  $Jf(\bar{x})$  dari sistem nonlinear  $\dot{x} = f(x)$ , dengan nilai eigen yaitu  $\lambda$ .

1. Jika semua bilangan real nilai eigen dari matriks  $Jf(\bar{x})$  bernilai negatif, maka titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dari sistem nonlinear  $\dot{x} = f(x)$  stabil lokal asimtotik.
2. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dari matriks  $Jf(\bar{x})$  yang bagian realnya bernilai positif, maka dapat dikatakan bahwa titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dari sistem nonlinear  $\dot{x} = f(x)$  adalah tidak stabil.

### Contoh 2.8

Dari contoh 2.7 diperoleh bahwa titik ekuilibrium  $\bar{x}_1 = (0,0)^T$  memiliki dua nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = -3 + \sqrt{7}$  dan  $\lambda_2 = -3 - \sqrt{7}$ , maka kestabilan titik ekuilibrium  $\bar{x}_1 = (0,0)^T$  adalah stabil lokal asimtotik.

Sedangkan titik ekuilibrium  $\bar{x}_2 = \left(\frac{12}{25}, \frac{2}{5}\right)^T$  memiliki dua nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = -\frac{26}{10} + \frac{\sqrt{876}}{10}$  dan  $\lambda_2 = -\frac{26}{10} - \frac{\sqrt{876}}{10}$ , maka kestabilan titik ekuilibriumnya adalah tidak stabil.



## J. Kriteria Routh-Hurwitz

Kestabilan titik ekuilibrium dapat dilihat berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian. Permasalahan yang sering terjadi saat menentukan titik kestabilan sistem menggunakan nilai eigen adalah Ketika mencari akar-akar persamaan berorde tinggi. Sehingga, diperlukan suatu kriteria yang dapat menjamin akar-akar persamaan bernilai negatif atau terdapat akar persamaan bernilai positif. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan tanda bagian real dari nilai-nilai eigen.

**Teorema 2.3 :** (Olsder & Woude, 1994)

Diberikan polinomial  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ , dengan koefisien  $a_i$  merupakan konstanta dan  $i = 1, 2, \dots, n$ , maka tabel Routh-Hurwitz dari polinomial tersebut ialah:

**Tabel 2. 1** Tabel Routh-Hurwitz

$a_0$	$a_2$	$a_4$	$\dots$
$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\dots$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

imana koefisien  $b_1, b_2, c_1, c_2$  didefinisikan sebagai

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1},$$

perhitungan pada tabel Routh-Hurwitz terus dilakukan sampai semua kolom pertama menghasilkan perhitungan sama dengan nol. Matriks  $A_{n \times n}$  dikatakan stabil jika semua bagian real dari nilai eigen bernilai negatif. Dalam kriteria Routh-Hurwitz hal ini ditunjukkan dengan tidak adanya perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz.

### Contoh 2.9

Misal  $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 6$ , maka untuk  $n = 3$ ,  $a_1 = 4 > 0$ ,  $a_3 = 6 > 0$  dan  $a_1 a_2 > a_3 \leftrightarrow 4 \times 2 = 8 > 6$ . Dengan demikian, maka determinan semua matriks Hurwitznya bernilai positif dan semua akar-akar dari polinomial tersebut bernilai negatif atau memiliki bagian real negatif. Sehingga dapat disimpulkan berdasarkan Teorema 2.2, titik ekuilibrium yang memiliki persamaan karakteristik  $P(\lambda)$  dari nilai-nilai eigennya merupakan titik ekuilibrium stabil lokal asimtotik.

### K. *Basic Reproduction Number* ( $\mathcal{R}_0$ )

$\mathcal{R}_0$  atau bilangan reproduksi dasar disajikan untuk model kompartemen umum penularan penyakit berdasarkan sistem persamaan diferensial biasa. Ini menunjukkan bahwa, dimana  $\mathcal{R}_0$  kurang dari 1 berarti titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal serta virus tidak akan bertahan hidup dalam populasi, sedangkan  $\mathcal{R}_0$  lebih besar dari 1 berarti titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil serta virus berpeluang besar tetap bertahan dan terus meluas dalam populasi. Maka  $\mathcal{R}_0$  adalah parameter threshold untuk modelnya (Van Den Driessche & Watmough, 2002).

Penyakit memiliki beberapa tahap antara lain yaitu tahap asimtomatik infeksi dimana individu yang terinfeksi tidak menunjukkan gejala. Tahap pre-asimtomatik adalah tahap dimana individu yang terinfeksi belum menunjukkan gejala dan akan menunjukkan gejala, sedangkan tahap simptomatik adalah individu yang terinfeksi menunjukkan gejala dari infeksi penyakit.

**Definisi 2.10 :** (Van Den Driessche & Watmough, 2002)

*Misalkan terdapat  $n$  kelas terinfeksi dan  $m$  kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan  $x$  menyatakan sub populasi kelas terinfeksi dan  $y$  menyatakan subpopulasi tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $y \in \mathbb{R}^m$ , untuk  $m, n \in \mathbb{N}$ , sehingga*

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{y} = \eta_j(x, y), \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m$$

dengan  $\varphi_i$  adalah laju infeksi sekunder yang menambah pada kelas terinfeksi dan  $\psi_i$  adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (basic reproduction number) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang mendekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan  $F$  dan  $V$  adalah matriks berukuran  $n \times n$  dan  $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$  dan  $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ . Selanjutnya didefinisikan matriks  $K$  sebagai berikut :

$$K = FV^{-1}$$

dengan  $K$  merupakan matriks next generation. Sehingga besar nilai dari infeksi sekunder dalam kelompok populasi rentan ialah radius spektral atau nilai eigen dominan dari matriks  $K$ . Sehingga didapatkan rumus mencari nilai  $\mathcal{R}_0$  yakni

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}).$$

### Contoh 2.10

Dari model SEIR di atas dengan  $N = S + E + I + R$  diasumsikan konstan maka diperoleh model sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\alpha I S}{N} - \mu S,$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\alpha I S}{N} - \beta E,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - \mu I - \sigma I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \sigma I - \mu R,$$

selanjutnya diperoleh model persamaan berikut setelah dinormalisasi

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \alpha is - \mu s,$$

$$\frac{de}{dt} = \alpha is - \beta e,$$

$$\frac{di}{dt} = \beta e - \mu i - \sigma i,$$

$$\frac{dr}{dt} = \sigma i - \mu r,$$

maka diperoleh kelompok  $x = \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}$  menyatakan populasi kelas terinfeksi sementara  $y = \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}$  menyatakan populasi tidak terinfeksi.

Selanjutnya diperoleh  $F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dan  $V = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\beta & \mu + \sigma \end{pmatrix}$  dari persamaan di atas yang memenuhi  $\dot{x} = (F - V)x$ . Kemudian  $F$  dievaluasi di titik ekuilibrium bebas penyakit saat  $i = 0$ ,  $\frac{ds}{dt} = 0$  dan didapatkan  $s = 1$  sehingga  $F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$V^{-1} = \frac{1}{\beta(\mu + \sigma)} \begin{pmatrix} \mu + \sigma & 0 \\ \beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ \frac{1}{\mu + \sigma} & \frac{1}{\mu + \sigma} \end{pmatrix}$$

$$K = FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ \frac{1}{\mu + \sigma} & \frac{1}{\mu + \sigma} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\mu + \sigma} & \frac{\alpha}{\mu + \sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah  $\lambda_1 = \frac{\alpha}{\mu+\sigma}$  dan  $\lambda_2 = 0$  karena  $K$  adalah matriks segitiga atas. Nilai  $\rho$  merupakan radius spektral yang menyatakan nilai eigen dominan dari matriks  $K$  yaitu  $\lambda_1 = \frac{\alpha}{\mu+\sigma}$ , maka diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha}{\mu+\sigma}.$$

## L. COVID-19

Pada 11 Februari 2020, WHO mempublikasikan istilah terkini yakni *Coronavirus Disease* (COVID-19) yang dikenal lebih dahulu dengan nama *novel Coronavirus* 2019 (nCov-2019), virus *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-CoV-2) ialah penyebab penyakit ini (WHO, 2020).

Kasus COVID-19 perdana ditemukan di Wuhan, Provinsi Hubei, Cina di bulan terakhir di tahun 2019. Kasusnya kemudian berkembang pesat dan meluas ke berbagai provinsi di Cina hingga seluruh dunia.

Definisi operasional kasus COVID-19 menurut Perhimpunan Dokter Paru Indonesia yaitu suspek, *probable*, konfirmasi, dan kontak erat (Burhan et al., n.d.). Berikut penjelasan setiap kategorinya:

### 1. Kasus Suspek

Seseorang dikategorikan sebagai kasus suspek apabila mempunyai salah satu kriteria berikut:

#### a. Memenuhi salah satu dari kriteria epidemiologis dan salah satu kriteria klinis:

Kriteria Klinis:

- 1) Demam tinggi ( $\geq 38^\circ\text{C}$ ) atau memiliki riwayat batuk dan demam atau
- 2) Memiliki tiga atau lebih indikasi berikut: kelelahan (*fatigue*), anoreksia/mual/muntah, coryza/pilek/hidung tersumbat, sakit kepala, diare, demam atau memiliki riwayat demam, myalgia, batuk, nyeri tenggorokan, sesak nafas, dan penurunan kesadaran.

Kriteria Epidemiologis:

- 1) Mempunyai riwayat bekerja maupun tinggal di wilayah yang memiliki risiko tinggi penularan pada 2 minggu belakangan sebelum muncul gejala;
  - 2) Mempunyai riwayat bepergian ataupun tinggal di negara Indonesia yang melaporkan transmisi lokal pada 2 minggu belakangan sebelum muncul gejala;
  - 3) Berprofesi dalam lingkup pelayanan kesehatan, seperti memberikan pelayanan non-medis maupun medis, ataupun menjadi pihak yang menjalankan aktivitas penyelidikan, pemantauan bahkan berhubungan langsung pada 2 minggu belakangan sebelum muncul gejala;
  - 4) Mempunyai riwayat kontak dengan kasus konfirmasi maupun *probable* COVID-19 pada 2 minggu terakhir sebelum muncul gejala.
- b. Seseorang yang mengidap infeksi saluran pernapasan akut
  - c. Seseorang dengan ageusia yaitu hilangnya kemampuan indra perasa atau gejala anosmia akut yaitu kemampuan indra penciuman yang menghilang dengan tak ditemukannya sebab lain.
2. Kasus *Probable*

Seorang suspek yang memiliki keterangan klinis terjangkit COVID-19 namun telah meninggal serta tergolong dalam salah satu kriteria:

    - a. Tak melewati pengecekan laboratorium RT-PCR;
    - b. Dari hasil pengecekan dinyatakan negatif serta tidak melewati pengecekan untuk kedua kalinya.
  3. Kasus Konfirmasi

Kasus konfirmasi yaitu seseorang yang telah melakukan pengecekan laboratorium RT-PCR dan ditetapkan positif terjangkit virus COVID-19. Terdapat dua jenis kasus konfirmasi yaitu:

    - a. Kasus konfirmasi tanpa gejala (asimptomatik)
    - b. Kasus konfirmasi dengan gejala (simptomatik)
  4. Kontak Erat

Kontak erat yaitu kasus seseorang dengan riwayat berhubungan langsung dengan kasus *probable* maupun kasus konfirmasi. Riwayat berhubungan langsung yang didefinisikan mencakup:

- a. Melakukan tatap muka dan berdekatan dengan kasus *probable* maupun kasus konfirmasi dengan jarak satu meter dalam periode setidaknya 15 menit.
- b. Bersinggungan fisik secara langsung dengan kasus *probable* ataupun konfirmasi.
- c. Melakukan perawatan secara langsung kepada seorang dengan kasus *probable* maupun konfirmasi dengan tidak mengenakan APD standar.
- d. Keadaan lain yang menandakan adanya kontak yang didasarkan oleh penilaian risiko lokal yang ditekankan oleh tim penyelidikan epidemiologi.

SARS-CoV-2 ditransmisikan lewat kontak langsung, tak langsung, maupun kontak erat dengan orang yang terjangkit lewat cairan sekresi layaknya air liur juga sekresi sistem pernapasan maupun cipratan saluran pernapasan yang mencuat saat batuk, berbicara, menyanyi ataupun bersin. Cipratan saluran pernapasan mempunyai diameter lebih dari 5 – 10  $\mu m$  sedangkan cipratan yang berdiameter kurang dari 5  $\mu m$  dinamakan droplet nuclei atau disebut juga aerosol. Ketika individu sedang berkontak erat dengan individu terjangkit yang menunjukkan gejala-gejala masalah saluran pernapasan, virus tertransmisi melalui cipratan saluran pernapasan tersebut dan mencapai mulut, hidung, maupun mata individu yang rentan tersebut (World Health Organization, 2020).

RNA SARS-CoV-2 dapat ditemukan pada seorang individu dalam kurun waktu maksimal 72 jam sebelum gejalanya mulai tampak (onset). Bobot virus tertinggi berdasarkan pemeriksaan RT-PCR yang dipantau, berada pada hari pertama saat gejalanya mulai tampak dan selanjutnya bobotnya mengalami penurunan seiring berjalannya waktu. Positivitas RT-PCR berlaku selama satu sampai dua minggu bagi individu terjangkit tanpa gejala dan akan berlaku hingga 3 minggu atau lebih bagi individu dengan tingkat infeksi ringan hingga sedang. Sedangkan pada individu dengan tingkat infeksi COVID-19 yang tinggi, durasi ini dapat berlangsung jauh lebih lama (World Health Organization, 2020).

## M. Maple

Maple adalah piranti lunak yang banyak digunakan untuk simulasi permodelan matematika. Maple dikembangkan secara komersial oleh perusahaan Maplesoft. Piranti lunak ini sangat membantu dalam hal komputasi numerik, komputasi simbolik maupun visualisasi.

Maple memiliki beberapa kelebihan yakni mampu menyederhanakan suatu sistem persamaan diferensial yang rumit dilakukan secara manual hingga mencapai suatu solusi penyelesaian serta mampu menyajikannya dalam bentuk animasi grafik dengan menambahkan nilai awal maupun kendala-kendala lainnya dari suatu sistem persamaan diferensial.

## N. Penelitian-Penelitian Terdahulu

Terdapat beberapa studi ilmiah yang telah dikaji terkait permodelan matematika terutama model SEIR pada penyebaran COVID-19 yang dapat menjadi rujukan penulis, antara lain:

1. Penelitian mengenai aplikasi dari model SEIR pada COVID-19 dan efek dari *lockdown* dalam menurunkan jumlah kasus aktif (Putra & Abidin, 2020).

Berikut persamaan model kompartemennya:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= i_S - d_S S - \beta SI \\ \frac{dS}{dt} &= \beta SI - \alpha E + i_E E - d_E E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - \gamma I + i_I I + d_I I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + i_R R - d_R R \\ \alpha &= \frac{1}{T_{inkubasi}} = \text{periode inkubasi} \\ \beta &= \frac{\mathcal{R}_0}{\text{periode penyembuhan}} = \mathcal{R}_0 \cdot \gamma\end{aligned}$$



2. Penelitian model SEIR untuk analisis kestabilan dan simulasi numerik dari pandemic COVID-19 di Indonesia dengan intervensi vaksinasi (Annas et al., 2020).

Berikut persamaan model kompartemennya:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - (\alpha I + \mu + v)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha IS - (\beta + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - (\mu_i + \delta + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + vS - \mu R$$

3. Penelitian mengenai model SEIR dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi dan isolasi (Teimouri, 2020).

Berikut persamaan model kompartemennya:

$$S'(t) = \mu N - (\alpha I + \mu + v)S$$

$$E'(t) = \alpha IS - (\beta + \mu)E$$

$$I(t) = \beta E - (\mu_i + \delta + \mu)I$$

$$R'(t) = \delta I + vS - \mu R$$

Keterangan :

$\mu_i$  = laju kematian yang disebabkan COVID-19

$\delta$  = laju perubahan dari  $I$  ke  $R$

$v$  = kelompok individu  $S$  yang diberikan vaksin

### **BAB III**

#### **METODE PENELITIAN**

##### **A. Deskripsi Data Penelitian**

###### **1. Jenis Penelitian**

Jenis penelitian yang dijalankan ialah penelitian secara teori maupun terapan, yaitu penelitian yang dijalankan untuk memperoleh informasi yang dapat dimanfaatkan sebagai pemecahan masalah dengan didahului merumuskan konsep-konsep yang berpadanan dengan penelitian ini. Penulis melakukan pengambilan data penyebaran COVID-19 pada tahun 2021 di Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta.

Penelitian ini menggunakan data kuantitatif meliputi jumlah kasus positif, jumlah populasi warga DKI Jakarta, jumlah kematian diakibatkan COVID-19, jumlah kasus suspek, jumlah kasus *probable*, jumlah kasus sembuh COVID-19, angka kelahiran dari populasi manusia, dan angka kematian alami. Data tersebut diambil dari data kependudukan dan dinas Kesehatan DKI Jakarta.

Data yang digunakan adalah data periode 13 Januari 2021 – 29 September 2021. Data diambil dari halaman *website* milik Dinas Kependudukan Provinsi DKI Jakarta (<https://kependudukancapil.jakarta.go.id/>) dan *website* Jakarta Tanggap COVID-19 milik Dinas Kesehatan DKI Jakarta (<https://corona.jakarta.go.id/>) .

###### **2. Objek Kajian**

Penelitian ini bersifat kajian literatur yaitu dimulai dari tahapan pengumpulan data sekunder dan berlanjut ke analisis data sekunder tersebut mengacu pada literatur yang tersedia dari Perpustakaan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta juga dari literatur-literatur lain yang bersesuaian dengan permodelan matematika, COVID-19, dan materi-materi prasyarat lainnya.

## **B. Langkah-langkah Penelitian**

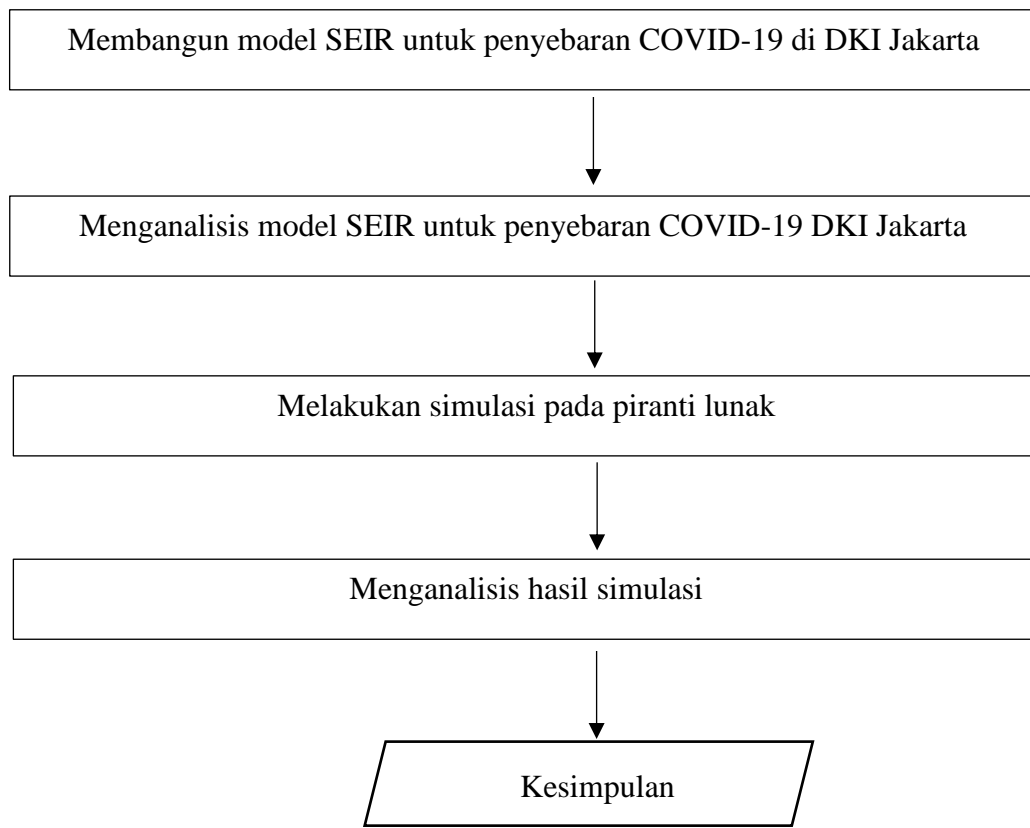
### **1. Prosedur Penelitian**

Prosedur penelitian yang diterapkan dalam penelitian ini guna mencapai tujuan penelitian, adalah sebagai berikut :

- a. Membangun model SEIR untuk penyebaran penyakit COVID-19 di DKI Jakarta
  - 1) Mengasumsikan variabel dan parameter model SEIR
  - 2) Membentuk model SEIR
- b. Menganalisis model SEIR untuk penyebaran penyakit COVID-19 di DKI Jakarta
  - 1) Menentukan titik ekuilibrium model SEIR
  - 2) Menentukan tipe kestabilan titik ekuilibrium berdasarkan nilai eigen
  - 3) Menentukan bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ )
- c. Mengimplementasikan hasil simulasi penyebaran penyakit COVID-19 dengan menggunakan Maple
  - 1) Mengumpulkan data pasien yang terkena COVID-19 dari Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta
  - 2) Menginput data pasien yang terkena COVID-19 dari Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta
  - 3) Menginput hasil analisis model ke dalam piranti lunak
  - 4) Menganalisis hasil simulasi
  - 5) Menarik kesimpulan

### **2. Skema Penyelesaian Masalah**

Langkah-langkah diatas dapat digambarkan secara skematik pada gambar sebagai berikut :



**Gambar 3. 1 Skema Penyelesaian Masalah**

## **BAB IV**

### **PEMBAHASAN**

#### **A. Asumsi Model**

Model yang digunakan dalam penyebaran penyakit COVID-19 adalah model SEIR (*Susceptible Exposed Infected Recovered*) dengan populasi yang terbagi menjadi empat kompartemen : Susceptible (S) yaitu individu yang rentan terkena penyakit, Exposed (E) yaitu individu yang tertular penyakit tetapi belum menularkan penyakit, Infected (I) yaitu individu yang terjangkit COVID-19 dan dapat menularkan, dan Recovered (R) yaitu individu yang telah sembuh dari penyakit COVID-19. Model SEIR penyebaran COVID-19 ini menggunakan intervensi vaksinasi. Asumsi pembentukan model matematika dari penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi dapat disusun sebagai berikut :

1. Virus yang menyebabkan penyakit COVID-19 adalah virus SARS-CoV-2 (Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2)
2. Populasi diasumsikan tertutup, artinya tidak ada individu masuk kedalam populasi atau keluar dari populasi (tidak ada migrasi). Total populasi diasumsikan konstan.
3. Individu lahir diasumsikan sehat namun rentan untuk terinfeksi
4. Jumlah kelahiran dan kematian tiap satuan waktu diasumsikan sama.
5. Populasi diasumsikan bercampur secara homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang yang sama untuk kontak dengan individu lain.
6. Individu yang belum/tidak divaksinasi masuk ke dalam kompartemen individu *Susceptible* (S).
7. Individu yang divaksinasi akan kebal terhadap penyakit COVID-19. Keampuhan vaksinasi adalah 100% dan kekebalan akibat vaksinasi bersifat permanen. Diasumsikan hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
8. Infeksi virus terjadi ketika terjadi kontak dengan individu yang terinfeksi.
9. Individu yang terinfeksi virus dapat sembuh dari penyakit.
10. Individu yang telah sembuh mempunyai kekebalan terhadap penyakit.

11. Kematian akibat penyakit diabaikan, hanya terjadi kematian alami pada setiap subpopulasi.

## B. Variabel dan Parameter

Variabel dan parameter yang digunakan dalam model penyebaran penyakit COVID-19 dengan vaksinasi dinyatakan dalam Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

**Tabel 4. 1 Daftar variabel model penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi**

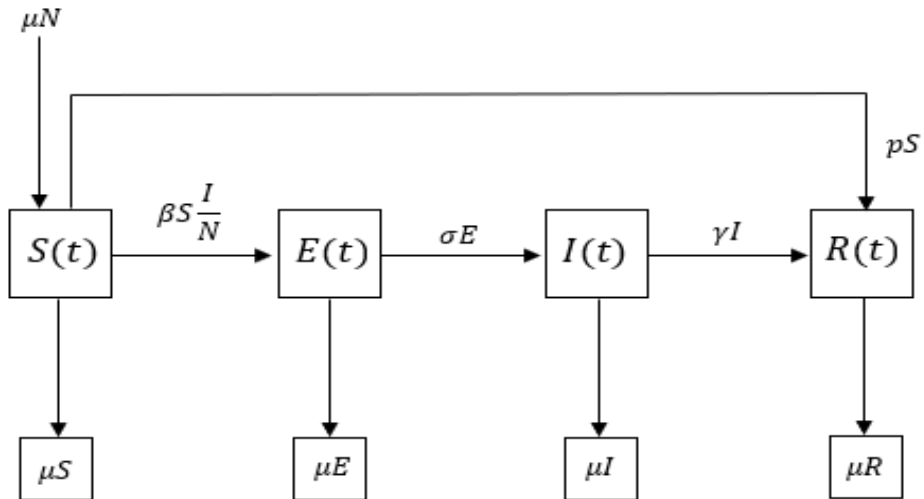
No.	Variabel	Definisi	Syarat	Satuan
1.	$N(t)$	Jumlah populasi individu pada waktu ke-t	$N(t) \geq 0$	Individu
2.	$S(t)$	Jumlah individu rentan terinfeksi pada waktu ke-t	$S(t) \geq 0$	Individu
3.	$E(t)$	Jumlah individu terpapar pada waktu ke-t	$E(t) \geq 0$	Individu
4.	$I(t)$	Jumlah individu terinfeksi dan dapat menularkan pada waktu ke-t	$I(t) \geq 0$	Individu
5.	$R(t)$	Jumlah individu sembuh pada waktu ke-t	$R(t) \geq 0$	Individu

**Tabel 4. 2 Daftar parameter model penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi**

No.	Variabel	Definisi	Syarat	Satuan
1.	$\mu$	Laju kelahiran/kematian alami	$\mu \geq 0$	<b>1/hari</b>
2.	$\beta$	Laju individu rentan ke terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi	$\beta \geq 0$	<b>1/hari</b>
3.	$p$	Proporsi vaksinasi	$p \geq 0$	<b>1/hari</b>
4.	$\sigma$	Laju individu terpapar menjadi individu terinfeksi	$\sigma \geq 0$	<b>1/hari</b>
5.	$\gamma$	Laju individu terinfeksi menjadi individu sembuh	$\gamma \geq 0$	<b>1/hari</b>

### C. Penyebaran COVID-19

Secara sistematis proses penyebaran penyakit COVID-19 dengan vaksinasi dalam suatu populasi dapat disajikan dalam diagram transfer pada Gambar 3.1 berikut.



**Gambar 4. 1 Diagram Transfer Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi**

Berdasarkan diagram transfer Gambar 3.1. populasi individu dibagi menjadi empat kompartemen, yaitu: kompartemen individu rentan ( $S$ ), kompartemen individu terpapar ( $E$ ), kompartemen individu terinfeksi ( $I$ ), dan kompartemen individu sembuh ( $R$ ). Setiap individu lahir akan masuk ke kompartemen ( $S$ ) untuk mencegah individu terinfeksi virus maka individu didalam populasi akan diberikan vaksinasi dengan laju  $0 \leq p \leq 1$  dan jika  $p = 0$  maka tidak terjadi vaksinasi di dalam populasi. Individu rentan yang tidak divaksinasi berpeluang untuk terinfeksi virus jika berinteraksi dengan individu terinfeksi dan akan menjadi individu terpapar ( $E$ ) dengan laju  $\beta$ . Individu terpapar akan menjadi individu terinfeksi dengan laju  $\sigma$ . Individu terinfeksi dan kemudian sembuh dengan laju  $\gamma$ . Individu rentan yang divaksinasi tidak terkena virus akan langsung masuk ke kompartemen  $R$ . Di setiap kompartemen akan ada kematian alami yang lajunya disamakan dengan kelahiran alami dengan laju  $\mu$ .

Himpunan persamaan diferensial dari diagram kompartemen di atas adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - pS - \beta S \frac{I}{N} \\
\frac{dE}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \mu E - \sigma E \\
\frac{dI}{dt} &= \sigma E - \mu I - \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I + pS - \mu R
\end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan nilai  $N = S + E + I + R$ . Sistem (3.1) dapat dibentuk dalam model non-dimensional, untuk menyederhanakan sistem (3.1) proporsi banyaknya individu masing-masing kompartemen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}. \tag{3.2}$$

Dari persamaan (3.2) maka sistem persamaan (3.1) dapat dibentuk dalam model non-dimensional menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \mu - \mu s - ps - \beta si \\
\frac{de}{dt} &= \beta si - \mu e - \sigma e = \beta si - (\mu + \sigma)e \\
\frac{di}{dt} &= \sigma e - \mu i - \gamma i = \sigma e - (\mu + \gamma)i \\
\frac{dr}{dt} &= \gamma i + ps - \mu r.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sistem (3.3) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear yang lebih sederhana dari sistem (3.1) yang merepresentasikan model penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi.

Selanjutnya akan dicari penyelesaian terbatas dari sistem (3.3). Dengan melakukan substitusi persamaan (3.3), diperoleh

$$\frac{dn}{dt} = \mu - \mu s - ps - \beta si + \beta si - \mu e - \sigma e + \sigma e - \mu i - \gamma i + \gamma i + ps - \mu r$$



$$\frac{dn}{dt} = \mu - (s + e + i + r)\mu$$

$$\frac{dn}{dt} = \mu - \mu n \quad (3.3a)$$

Persamaan (3.3a) bentuk persamaan diferensial linear tingkat satu, maka penyelesaian dari persamaan tersebut adalah sebagai berikut

$$\frac{dn}{dt} = \mu - \mu n$$

$$\int \frac{dn}{\mu - \mu n} = \int dt$$

Misal

$$u = \mu - \mu n$$

$$du = -\mu dn$$

$$dn = \frac{-du}{\mu} \quad (3.3b)$$

Bentuk (3.3b) selanjutnya menjadi

$$\int \left(\frac{-1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{u}\right) du = \int dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\mu} \ln|u| = t + \ln C$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| = -\mu t - \mu \ln C$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| + \mu \ln C = -\mu t$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| + \ln C^\mu = -\mu t$$

$$\Leftrightarrow \ln(uC^\mu) = -\mu t$$

$$\Leftrightarrow uC^\mu = e^{-\mu t}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{e^{-\mu t}}{C^\mu}$$

$$\Leftrightarrow u = C e^{-\mu t}$$

Substitusi  $u = \mu - \mu n$ , diperoleh

$$\Leftrightarrow \mu - \mu n = C e^{-\mu t}$$

$$\Leftrightarrow \mu n = \mu - C e^{-\mu t}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\mu}{\mu} - \frac{C e^{-\mu t}}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow n = 1 - \frac{C e^{-\mu t}}{\mu} \quad (3.3c)$$

Disini nilai  $n$  berubah terhadap  $t$ . Artinya semakin besar nilai  $t$  maka nilai  $\frac{C e^{-\mu t}}{\mu}$  semakin kecil.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{C e^{-\mu t}}{\mu} \right) = 1$$

Maka diperoleh  $n \leq 1$ , dimana  $n \leq 1$  menunjukkan jumlah populasi terbatas.

#### D. Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Sistem (3.3) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu, titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Berdasarkan Definisi 2.7 sistem (3.3) dapat ditulis menjadi:

$$\mu - \mu s - ps - \beta si = 0 \quad (3.4)$$

$$\beta si - (\mu + \sigma)e = 0 \quad (3.5)$$

$$\sigma e - (\mu + \gamma)i = 0 \quad (3.6)$$

$$\gamma i + ps - \mu r = 0 \quad (3.7)$$

##### 1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium pada saat tidak ada penyakit dalam populasi, sehingga  $i = 0$ . Selanjutnya substitusi  $i = 0$  ke persamaan (3.4), sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \mu - \mu s - ps - \beta si = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - \mu s - ps - \beta s(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - (\mu + p)s = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mu + p)s = \mu$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{\mu}{(\mu+p)}.$$

Selanjutnya substitusi  $i = 0$  ke persamaan (3.5), diperoleh,

$$\Leftrightarrow \beta si - (\mu + \sigma)e = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta s(0) - (\mu + \sigma)e = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\mu + \sigma)e = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 0.$$

Selanjutnya substitusi  $i = 0$  ke persamaan (3.7), diperoleh,

$$\Leftrightarrow \gamma i + ps - \mu r = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) + ps - \mu r = 0$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{ps}{\mu}.$$

Substitusi nilai  $s = \frac{\mu}{(\mu+p)}$  ke  $r = \frac{ps}{\mu}$ , sehingga diperoleh,

$$r = \frac{p}{\mu+p}.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sistem 3.3 yaitu

$$TE_0(s, e, i, r) = \left( \frac{\mu}{(\mu+p)}, 0, 0, \frac{p}{\mu+p} \right). \quad (3.8)$$

## 2. Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik adalah titik ekuilibrium saat kelas terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi. Endemik penyakit artinya di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit, sehingga diperoleh  $I$  pada titik ekuilibrium endemik penyakit  $I^* > 0$ .

Dari persamaan (3.5) diperoleh

$$\beta si - (\mu + \sigma)e = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta si = (\mu + \sigma)e$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta si}{(\mu + \sigma)} = e \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.6) diperoleh

$$\begin{aligned}
\sigma e - (\mu + \gamma)i &= 0 \\
\leftrightarrow \sigma e &= (\mu + \gamma)i \\
\leftrightarrow e &= \frac{(\mu + \gamma)i}{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Persamaan (3.9) disubstitusikan ke persamaan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\beta si}{(\mu + \sigma)} &= \frac{(\mu + \gamma)i}{\sigma} \\
\leftrightarrow \frac{\beta s}{(\mu + \sigma)} &= \frac{(\mu + \gamma)}{\sigma} \\
\leftrightarrow s &= \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) disubstitusikan ke persamaan (3.4) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mu - \mu \left( \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} \right) - p \left( \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} \right) - \beta \left( \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} \right) i &= 0 \\
\leftrightarrow \mu - \mu \left( \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} \right) - p \left( \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} \right) &= \beta \left( \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} \right) i \\
\leftrightarrow \frac{\mu \beta \sigma}{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)} - \mu - p &= \beta i \\
\leftrightarrow \frac{\mu \sigma}{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)} - \frac{\mu}{\beta} - \frac{p}{\beta} &= i \\
\leftrightarrow i &= \frac{\mu \beta \sigma - \mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma) - p(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)\beta} \\
\leftrightarrow i &= \frac{-\mu^3 - (p + \sigma + \gamma)\mu^2 - (\gamma p - \beta \sigma + \gamma \sigma + p \sigma)\mu - \gamma p \sigma}{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)\beta}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Persamaan (3.12) disubstitusikan ke persamaan (3.10) diperoleh (3.7) diperoleh

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow e &= \frac{(\mu + \gamma)}{\sigma} \left( \frac{\mu \beta \sigma - \gamma \mu^2 - \gamma \mu p - \gamma \mu \sigma - \gamma p \sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2 \sigma - \mu p \sigma}{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)\beta} \right) \\
\leftrightarrow e &= \frac{\mu \beta \sigma - \gamma \mu^2 - \gamma \mu p - \gamma \mu \sigma - \gamma p \sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2 \sigma - \mu p \sigma}{\sigma(\mu + \sigma)\beta} \\
\leftrightarrow e &= \frac{-\mu^3 + (-p - \gamma - \sigma)\mu^2 + ((-p + \beta - \gamma)\sigma - p\gamma)\mu - p\sigma\gamma}{\sigma(\sigma + \mu)\beta}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) disubstitusikan ke persamaan diperoleh

$$\begin{aligned}
\gamma i + p s - \mu r &= 0 \\
\leftrightarrow \gamma \left( \frac{\mu \beta \sigma - \gamma \mu^2 - \gamma \mu p - \gamma \mu \sigma - \gamma p \sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2 \sigma - \mu p \sigma}{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)\beta} \right) + p \left( \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} \right) - \mu r &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow \mu r &= \gamma \left( \frac{\mu\beta\sigma - \gamma\mu^2 - \gamma\mu p - \gamma\mu\sigma - \gamma p\sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2\sigma - \mu p\sigma}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)\beta} \right) + p \left( \frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\beta\sigma} \right) \\
\leftrightarrow r &= \frac{\gamma}{\mu} \left( \frac{\mu\beta\sigma - \gamma\mu^2 - \gamma\mu p - \gamma\mu\sigma - \gamma p\sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2\sigma - \mu p\sigma}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)\beta} \right) + \frac{p}{\mu} \left( \frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\beta\sigma} \right) \\
\leftrightarrow r &= \frac{((- \gamma + p)\mu - \gamma(\gamma - p - \beta))\sigma^2 + ((- \gamma + 2p)\mu + p\gamma)(\gamma + \mu)\sigma + \mu p(\gamma + \mu)^2}{\beta\sigma(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

### 3. Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dari sistem (3.3) dengan mencari nilai eigen maksimum yang diperoleh dari Matriks Generasi Selanjutnya. Matriks Generasi Selanjutnya dapat diperoleh dari model persamaan subsistem terinfeksi. Langkah-langkah penentuan bilangan reproduksi dasar sistem (3.3), yaitu :

1. Menggunakan persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus infeksi baru dan perubahan dalam kompartemen infeksi dari sistem. Selanjutnya sistem ini disebut subsistem terinfeksi. Pada sistem (3.3), subsistem yang terinfeksi adalah  $e$  dan  $i$ .

Sistem (3.3) didefinisikan menjadi

$$\begin{aligned}
f_1(s, e, i, r) &= \mu - \mu s - ps - \beta si \\
f_2(s, e, i, r) &= \beta si - (\mu + \sigma)e \\
f_3(s, e, i, r) &= \sigma e - (\mu + \gamma)i \\
f_4(s, e, i, r) &= \gamma i + ps - \mu r
\end{aligned} \quad (3.15)$$

2. Melakukan pelinieran terhadap subsistem terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Sistem linear ini direpresentasikan dengan matriks Jacobi ( $J$ ) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2(s, e, i, r)}{\partial e} & \frac{\partial f_2(s, e, i, r)}{\partial i} \\ \frac{\partial f_3(s, e, i, r)}{\partial e} & \frac{\partial f_3(s, e, i, r)}{\partial i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu + \sigma) & \beta s \\ \sigma & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

dengan nilai  $s = \frac{\mu}{\mu+p}$  sehingga diperoleh,

$$J_{(s,e,i,r)} = \begin{bmatrix} -(\mu + \sigma) & \frac{\beta\mu}{\mu+p} \\ \sigma & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}.$$

3. Dekomposisi matriks Jacobi ( $J$ ) menjadi  $J = \mathcal{F} - V$ , dengan  $\mathcal{F}$  adalah matriks transmisi non-linear dan  $V$  adalah matriks transmisi linear sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\mu}{\mu+p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \mu+\sigma & 0 \\ -\sigma & \mu+\gamma \end{bmatrix}.$$

Kemudian menentukan matriks  $V^{-1}$ ,

$$V^{-1} = \frac{1}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} \begin{pmatrix} \mu+\gamma & 0 \\ \sigma & \mu+\sigma \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu+\sigma)} & 0 \\ \frac{\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} & \frac{1}{\mu+\gamma} \end{bmatrix}.$$

4. Menghitung  $R_0$  dengan  $R_0 = \rho(FV^{-1})$ .

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\mu}{\mu+p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu+\sigma)} & 0 \\ \frac{\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} & \frac{1}{\mu+\gamma} \end{bmatrix}$$

5. Menghitung  $R_0$  dengan  $R_0 = \rho(FV^{-1})$ .

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\mu}{\mu+p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks  $(FV^{-1})$  diperoleh dari persamaan berikut.

$$\det(\lambda I - FV^{-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} & -\frac{\beta\mu}{(\mu+\gamma)(\mu+p)} \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{\beta\lambda\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0$$

Sehingga diperoleh  $\lambda_1 = 0$  dan  $\lambda_2 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)}$ . Karena bilangan reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral atau nilai terbesar dari nilai-nilai eigen, maka didapat  $R_0$  sebagai berikut.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} \quad (3.16)$$

### E. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Sistem (3.3) merupakan sistem nonlinear. Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi sistem di sekitar titik ekuilibrium. Matriks Jacobian sistem (3.10) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$J_{TE0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(f_1(s, e, i, r))}{\partial s} & \frac{\partial(f_1(s, e, i, r))}{\partial e} & \frac{\partial(f_1(s, e, i, r))}{\partial i} & \frac{\partial(f_1(s, e, i, r))}{\partial r} \\ \frac{\partial(f_2(s, e, i, r))}{\partial s} & \frac{\partial(f_2(s, e, i, r))}{\partial e} & \frac{\partial(f_2(s, e, i, r))}{\partial i} & \frac{\partial(f_2(s, e, i, r))}{\partial r} \\ \frac{\partial(f_3(s, e, i, r))}{\partial s} & \frac{\partial(f_3(s, e, i, r))}{\partial e} & \frac{\partial(f_3(s, e, i, r))}{\partial i} & \frac{\partial(f_3(s, e, i, r))}{\partial r} \\ \frac{\partial(f_4(s, e, i, r))}{\partial s} & \frac{\partial(f_4(s, e, i, r))}{\partial e} & \frac{\partial(f_4(s, e, i, r))}{\partial i} & \frac{\partial(f_4(s, e, i, r))}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$J_{TE0} = \begin{bmatrix} -(\mu + p + \beta i) & 0 & -\beta s & 0 \\ \beta i & -(\mu + \sigma) & \beta s & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma) & 0 \\ p & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

di mana nilai  $s = \frac{\mu}{\mu+p}$  dan  $i = 0$ ,

$$J_{TE0} = \begin{bmatrix} -(\mu + p) & 0 & -\frac{\beta\mu}{\mu+p} & 0 \\ 0 & -(\mu + \sigma) & \frac{\beta\mu}{\mu+p} & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma) & 0 \\ p & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya mencari nilai eigen matriks  $J_{TE0}$  diperoleh dari persamaan berikut

$$\det(\lambda I - J_{TE0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} -(\mu + p) & 0 & -\frac{\beta\mu}{\mu+p} & 0 \\ 0 & -(\mu + \sigma) & \frac{\beta\mu}{\mu+p} & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma) & 0 \\ p & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + \mu + p & 0 & \frac{\beta\mu}{\mu + p} & 0 \\ 0 & \lambda + \mu + \sigma & -\frac{\beta\mu}{\mu + p} & 0 \\ 0 & \sigma & \lambda + \mu + \gamma & 0 \\ -p & 0 & -\gamma & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik untuk  $J_{TE1}$  adalah

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu + p)(\lambda + \mu + \sigma)(\lambda + \mu + \gamma)(\lambda + \mu) + (\lambda + \mu + p)\frac{\beta\mu\sigma}{\mu + p}(\lambda + \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + p)((\mu + p)\lambda^2 + (2\mu + \gamma + \sigma)(\mu + p)\lambda + \mu^3 + \gamma\mu^2 + \sigma\mu^2 + \sigma\gamma\mu + p\mu^2 + p\gamma\mu + p\sigma\gamma + p\sigma\mu + \beta\sigma\mu) = 0 \quad (3.17)$$

dengan nilai-nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -\mu - p$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2(\mu + p)}(-p\gamma - p\sigma - 2p\mu - \gamma\mu - \sigma\mu - 2\mu^2 - \sqrt{\mu + p}) \quad (3.18)$$

$$\sqrt{\gamma^2 p + 4\beta\mu\sigma - 2\gamma p\sigma + p\sigma^2 + \gamma^2\mu - 2\gamma\mu\sigma + \mu\sigma^2})$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2(\mu + p)}(-p\gamma - p\sigma - 2p\mu - \gamma\mu - \sigma\mu - 2\mu^2 + \sqrt{\mu + p})$$

$$\sqrt{\gamma^2 p + 4\beta\mu\sigma - 2\gamma p\sigma + p\sigma^2 + \gamma^2\mu - 2\gamma\mu\sigma + \mu\sigma^2})$$

Dari persamaan (3.17) diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_2 = -\mu - p$  dan  $\lambda_3 < 0$ . Agar sistem (3.3) stabil asimtotik lokal di titik ekuilibrium bebas COVID-19 maka  $\lambda_4 < 0$ .

## F. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Sama halnya dengan titik ekuilibrium bebas penyakit, analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik pun menggunakan bantuan matriks Jacobi untuk mendapatkan nilai-nilai eigen yang selanjutnya dapat menunjukkan kestabilan dari titik ekuilibrium endemik tersebut. Titik ekuilibrium endemik terjadi saat nilai



$$s = \frac{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu)}{\sigma\beta}$$

$$e = \frac{-\mu^3+(-p-\gamma-\sigma)\mu^2+((-p+\beta-\gamma)\sigma-p\gamma)\mu-p\sigma\gamma}{\sigma(\sigma+\mu)\beta}$$

$$i = \frac{-\mu^3-(p+\sigma+\gamma)\mu^2-(\gamma p-\beta\sigma+\gamma\sigma+p\sigma)\mu-\gamma p\sigma}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)\beta}$$

$$r = \frac{((- \gamma + p)\mu - \gamma(\gamma - p - \beta))\sigma^2 + ((-\gamma + 2p)\mu + p\gamma)(\gamma + \mu)\sigma + \mu p(\gamma + \mu)^2}{\beta\sigma(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)}$$

maka diperoleh matriks Jacobian dari titik ekuilibrium endemik sebagai berikut.

$$J_{TE1} = \begin{bmatrix} -\mu - p - \frac{\beta\mu\sigma - \gamma\mu^2 - \gamma\mu p - \gamma\mu\sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2\sigma - \mu p\sigma}{\gamma\mu + \gamma\sigma + \mu^2 + \mu\sigma} & 0 & -\frac{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)}{\sigma} & 0 \\ \frac{\beta\mu\sigma - \gamma\mu^2 - \gamma\mu p - \gamma\mu\sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2\sigma - \mu p\sigma}{\gamma\mu + \gamma\sigma + \mu^2 + \mu\sigma} & -(\mu + \sigma) & \frac{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)}{\sigma} & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma) & 0 \\ p & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mempermudah penentuan kriteria Routh-Hurwitz dilakukan pengasumsian sebagai berikut

$$a = \mu + p + \frac{\beta\mu\sigma - \gamma\mu^2 - \gamma\mu p - \gamma\mu\sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2\sigma - \mu p\sigma}{\gamma\mu + \gamma\sigma + \mu^2 + \mu\sigma}$$

$$b = \frac{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)}{\sigma}$$

$$c = \frac{\beta\mu\sigma - \gamma\mu^2 - \gamma\mu p - \gamma\mu\sigma - \mu^3 - \mu^2 p - \mu^2\sigma - \mu p\sigma}{\gamma\mu + \gamma\sigma + \mu^2 + \mu\sigma}$$

$$d = \mu + \sigma$$

$$e = \sigma$$

$$f = \mu + \gamma$$

$$g = p$$

$$h = \gamma$$

$$i = \mu$$

Sehingga didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut

$$J_{TE1} = \begin{bmatrix} -a & 0 & -b & 0 \\ c & -d & b & 0 \\ 0 & e & -f & 0 \\ g & 0 & h & -i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai eigen matriks  $J_{TE1}$  diperoleh dari persamaan berikut

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J_{TE1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -(a + \lambda) & 0 & -b & 0 \\ c & -(d + \lambda) & b & 0 \\ 0 & e & -(f + \lambda) & 0 \\ g & 0 & h & -(i + \lambda) \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik untuk  $J_{TE1}$  adalah

$$\Leftrightarrow \lambda^4 + (a + d + i)\lambda^3 + (fi + ai + di + af + df + ad - be)\lambda^2 + (afi + dfi + adi - bei + adf + bce - abe)\lambda + adfi - abei + bcei = 0 \quad (3.19)$$

Berdasarkan Teorema 2.3 titik kesetimbangan endemik dikatakan stabil jika dan hanya jika akar-akar persamaan karakteristik di atas mempunyai nilai real negatif. Untuk menentukan syarat agar akar-akar persamaan karakteristik memiliki nilai real negatif, digunakan kriteria Routh Hurwitz. Persamaan dapat dituliskan dalam tabel Routh Hurwitz sebagai berikut :

**Tabel 4. 3 Tabel Routh Hurwitz Endemik**

$$\begin{array}{l|ll} \lambda^4 & a_0 & a_2 & a_4 \\ \lambda^3 & a_1 & a_3 & \\ \lambda^2 & b_1 & b_2 & \\ \lambda^1 & c_1 & & \\ \lambda^0 & d_1 & & \end{array}$$

Dengan,

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a + d + i$$

$$a_2 = fi + ai + di + af + df + ad - be$$

$$a_3 = afi + dfi + adi - bei + adf + bce - abe$$

$$a_4 = adfi - abei + bcei$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0(0)}{a_1} = a_4$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1(0)}{c_1}$$

Pada kriteria Routh Hurwitz sistem stabil asimtotik lokal di titik ekuilibrium endemik COVID-19 jika kolom pertama pada tabel Routh Hurwitz bertanda sama, yang berarti bahwa nilai  $a_1 > 0$ ,  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ ,  $b_1 a_3 > a_1 b_2$ , dan dikatakan stabil jika  $R_0 > 1$ .

#### G. Nilai-Nilai Parameter

Nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini diambil dari data kasus COVID-19 di DKI Jakarta. Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan sebagai berikut :

**Tabel 4. 4 Nilai parameter untuk model SEIR dengan vaksinasi**

No.	Parameter	Perkiraan Nilai
1.	$s(0)$	Banyaknya individu rentan $s(0) = n - (e(0) + i(0) + r(0))$ $s(0) = 1 - (0.000534553 + 0.000329102 + 0.000280248)$ $s(0) = 0.998856097$
2.	$e(0)$	Diperoleh dari banyaknya orang terpapar pada 13 Januari 2021 $e(0) = 0.000534553$
3.	$i(0)$	Diperoleh dari banyaknya orang terinfeksi COVID-19 pada 13 Januari 2021 $i(0) = 0.000329102$
4.	$r(0)$	Diperoleh dari banyaknya individu yang sembuh dari COVID-19 pada 13 Januari 2021 $r(0) = 0.000280248$

5.	$\mu$	Laju kelahiran/kematian alami dihitung berdasarkan data Dinas Kependudukan DKI Jakarta Tahun 2020 $\mu = \frac{137161 \text{ Individu}}{10562088 \text{ Individu} \times 365 \text{ hari}} = 3,557 \times 10^{-5} / \text{hari}$
7.	$\sigma$	Diperoleh dari kasus terinfeksi COVID-19 dibagi dengan hasil kali kasus terpapar dengan hari $\sigma = \frac{646364 \text{ individu}}{2507421 \text{ individu} \times 261 \text{ hari}} = 9,88 \times 10^{-4} / \text{hari}$
8.	$\gamma$	Diperoleh dari kasus sembuh dibagi dengan hasil kali kasus terinfeksi dengan hari $\gamma = \frac{653661 \text{ individu}}{646364 \text{ individu} \times 261 \text{ hari}} = 3,875 \times 10^{-3} / \text{hari}$

## H. Perhitungan Numerik dan Simulasi Model

Pada bagian ini akan dibahas mengenai perhitungan numerik dan simulasi model untuk melihat gambaran model SEIR dalam penyebaran COVID-19 dengan intervensi vaksinasi menggunakan parameter dan nilai awal tertentu. Simulasi dilakukan menggunakan *software* Maple.

### 1. Simulasi model keadaan bebas COVID-19

Berikut merupakan estimasi parameter keadaan bebas COVID-19 dengan memvariaskani nilai proporsi vaksinasi ( $p$ ) dan laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi ( $\beta$ ) untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar  $< 1$ .

**Tabel 4. 5 Estimasi Nilai Parameter Keadaan Bebas COVID-19**

No.	Parameter	Nilai Parameter
1.	$\mu$	$\mu = 3.557 \times 10^{-5} / \text{hari}$
2.	$\beta$	$\beta_1 = 2.35 \times 10^{-4} / \text{hari}$ $\beta_2 = 1.35 \times 10^{-4} / \text{hari}$ $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3} / \text{hari}$
3.	$\sigma$	$\sigma = 9.88 \times 10^{-4} / \text{hari}$
4.	$\gamma$	$\gamma = 3.875 \times 10^{-3} / \text{hari}$

5.	$p$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-3}/hari$ $p_2 = 9.87 \times 10^{-4}/hari$ $p_3 = 5.87 \times 10^{-4}/hari$
----	-----	--

Dilakukan kombinasi  $p$  perhitungan untuk masing-masing parameter  $\beta$  dan  $p$  diperoleh sebagai berikut :

1) Untuk  $\beta_1 = 2.35 \times 10^{-4}$  dan  $p_1 = 1.87 \times 10^{-3}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.01866633081, 0, 0, 0.9813336692)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00190557$$

$$\lambda_3 = -0.0038215277$$

$$\lambda_4 = -0.001022066985$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.001084131068$$

2) Untuk  $\beta_1 = 2,35 \times 10^{-4}$  dan  $p_2 = 9.87 \times 10^{-4}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.03478470, 0, 0, 0.9652150953)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00102257$$

$$\lambda_3 = -0.003824353118$$

$$\lambda_4 = -0.001020770375$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.002020289701$$

- 3) Untuk  $\beta_1 = 2,35 \times 10^{-4}$  dan  $p_3 = 5.87 \times 10^{-4}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.057134113753, 0, 0, 0.9428658625)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00062257$$

$$\lambda_3 = -0.003828261017$$

$$\lambda_4 = -0.001018974481$$

Karena  $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.003318321858$$

- 4) Untuk  $\beta_2 = 1.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_1 = 1.87 \times 10^{-3}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.01866633081, 0, 0, 0.9813336692)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00190557$$

$$\lambda_3 = -0.003829083615$$

$$\lambda_4 = -0.001014956896$$

Karena  $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.006227986988$$

- 5) Untuk  $\beta_2 = 1.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_2 = 9.87 \times 10^{-4}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.03478490470, 0, 0, 0.9652150953)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00102257$$

$$\lambda_3 = -0.003838371250$$

$$\lambda_4 = -0.001007560355$$

Karena  $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.01160591956$$

6) Untuk  $\beta_2 = 1.35 \times 10^{-3}$  dan  $p = 5.87 \times 10^{-4}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.05713413753, 0, 0, 0.9428658625)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00062257$$

$$\lambda_3 = -0.003851146106$$

$$\lambda_4 = -0.0009973663628$$

Karena  $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.01906270004$$

7) Untuk  $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_1 = 1.87 \times 10^{-3}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.01866633081, 0, 0, 0.9813336692)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00190557$$

$$\lambda_3 = -0.003882115797$$

$$\lambda_4 = -0.0009649311001$$

Karena  $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.04313457654$$

8) Untuk  $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_2 = 9.87 \times 10^{-4}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.03478490470, 0, 0, 0.9652150953)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00102257$$

$$\lambda_3 = -0.003935035831$$

$$\lambda_4 = -0.0009160813846$$

Karena  $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.08038173918$$

9) Untuk  $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_3 = 5.87 \times 10^{-4}$

$$E_0(s, e, i, r) = (0.05713413753, 0, 0, 0.9428658625)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00003557$$

$$\lambda_2 = -0.00062257$$

$$\lambda_3 = -0.004005407928$$

$$\lambda_4 = -0.0008507934554$$

Karena  $\mathcal{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium bebas COVID-19 stabil asimtotik lokal, dengan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 0.1320268484$$

Hasil kombinasi parameter proporsi vaksinasi ( $p$ ) dengan parameter laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi ( $\beta$ ) disajikan dalam tabel 4.6.

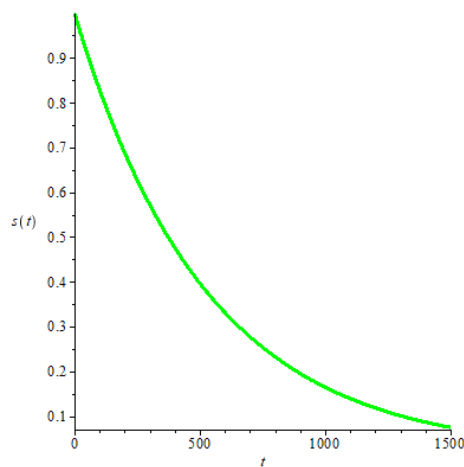


**Tabel 4. 6 Hasil Kombinasi Parameter Keadaan Bebas COVID-19**

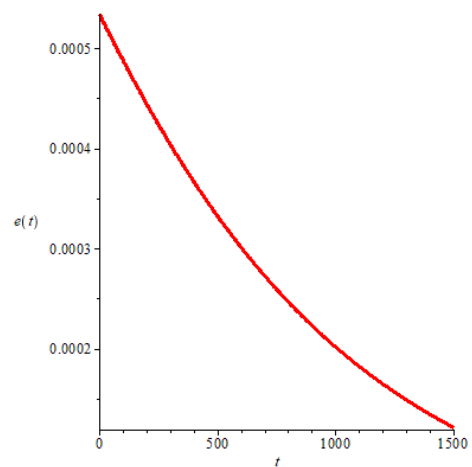
$\beta$	$p$	$R_0$	Kestabilan
$\beta_1 = 2.35 \times 10^{-4}$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-3}$	0.001084131068	Stabil
$\beta_1 = 2.35 \times 10^{-4}$	$p_2 = 9.87 \times 10^{-4}$	0.002020289701	Stabil
$\beta_1 = 2.35 \times 10^{-4}$	$p_3 = 5.87 \times 10^{-4}$	0.05807940106	Stabil
$\beta_2 = 1.35 \times 10^{-3}$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-3}$	0.006227986988	Stabil
$\beta_2 = 1.35 \times 10^{-3}$	$p_2 = 9.87 \times 10^{-4}$	0.01160591956	Stabil
$\beta_2 = 1.35 \times 10^{-3}$	$p_3 = 5.87 \times 10^{-4}$	0.01906270004	Stabil
$\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-3}$	0.04313457654	Stabil
$\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$	$p_2 = 9.87 \times 10^{-4}$	0.08038173918	Stabil
$\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$	$p_3 = 5.87 \times 10^{-4}$	0.1320268484	Stabil

Tabel menunjukkan simulasi numerik titik ekuilibrium bebas COVID-19, bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta kurang dari satu. Artinya rata-rata setiap individu yang terinfeksi akan menginfeksi kurang dari satu individu baru dan pada kondisi ini sistem dalam kondisi stabil.

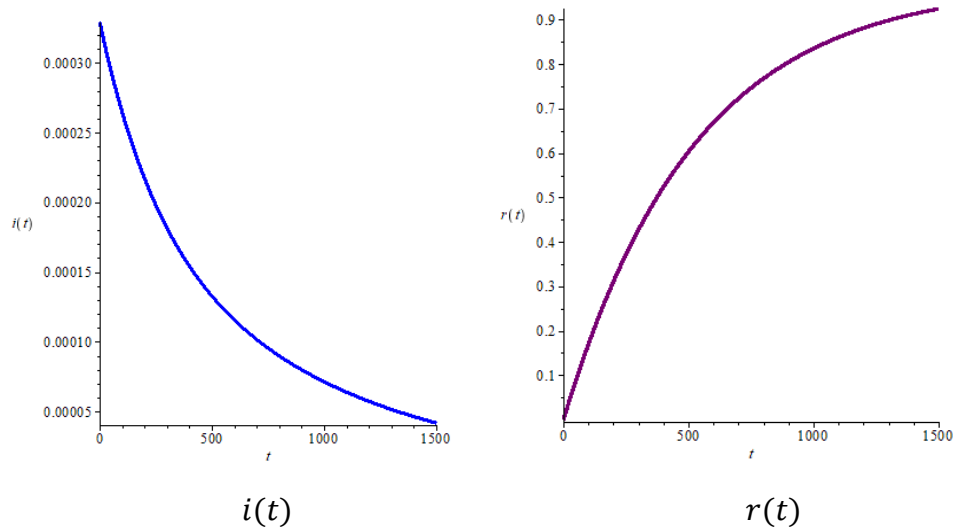
Berikut merupakan simulasi model SEIR menggunakan parameter pada Tabel dan menggunakan nilai awal individu rentan  $s(0) = 0.998856097$ , nilai awal individu terpapar  $e(0) = 0.000534553$ , nilai awal individu terinfeksi  $i(0) = 0.000329102$ , dan individu sembuh  $r(0) = 0.000280248$ .



$s(t)$



$e(t)$



**Gambar 4. 2 Simulasi Sistem (3.3) Keadaan Bebas COVID-19**

Gambar 4.2 merupakan simulasi untuk parameter  $\beta = 2.35 \times 10^{-4}$  dan  $p = 1.87 \times 10^{-3}$  terlihat bahwa individu rentan (Susceptible) terus mengalami penurunan akibat vaksinasi menuju titik 0.01866633081 dan stabil di titik tersebut, populasi individu terpapar mengalami penurunan menuju titik 0 dan stabil di titik tersebut, individu terinfeksi COVID-19 mengalami penurunan menuju titik 0 dan stabil di titik tersebut, sedangkan individu sembuh mengalami kenaikan menuju titik 0.9813336692 yang diakibatkan vaksinasi dan stabil di titik tersebut.

Jumlah populasi untuk penyebaran COVID-19 dari masing-masing kompartemen akan stabil bersamaan di titik ekuilibrium bebas penyakit setelah hari ke-1500, dengan

- a. Jumlah populasi rentan

$$S = s \times N$$

$$S = 0.01866633081 \times 10562088$$

$$S = 197155.428$$

- b. Jumlah populasi sembuh

$$R = r \times N$$

$$R = 0.9813336692 \times 10562088$$

$$R = 10364932.8122$$

## 2. Simulasi model keadaan endemik COVID-19

Berikut merupakan estimasi parameter keadaan endemik COVID-19 dengan memvariasi nilai proporsi vaksinasi ( $p$ ) dan laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi ( $\beta$ ) untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar  $> 1$ .

**Tabel 4. 7 Estimasi Nilai Parameter Endemik COVID-19**

No.	Parameter	Nilai Parameter
1.	$\mu$	$\mu = 3,557 \times 10^{-5}/hari$
2.	$\beta$	$\beta_1 = 7.35 \times 10^{-3}/hari$ $\beta_2 = 8.35 \times 10^{-3}/hari$ $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}/hari$
3.	$\sigma$	$\sigma = 9,88 \times 10^{-4}/hari$
4.	$\gamma$	$\gamma = 3,875 \times 10^{-3}/hari$
5.	$p$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-5}/hari$ $p_2 = 2.65 \times 10^{-5}/hari$ $p_3 = 2.70 \times 10^{-5}/hari$

- 1) Untuk  $\beta_1 = 7.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_1 = 1.87 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) =$$

$$(0.5505004661, 0.005563214732, 0.001407337765, 0.4425289814)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.00023443597668 + 0.0003725616489 I$$

$$\lambda_2 = -0.0000375640739$$

$$\lambda_3 = -0.0004153737571$$

$$\lambda_4 = -0.0003443597668 - 0.0003725616489 I$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.190601300$$

- 2) Untuk  $\beta_1 = 7.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_2 = 2.65 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) =$$

$$(0.5505004661, 0.001368187879, 0.0003461132753, 0.4477852327)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0003933286567 + 0.0004122045889 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003760970282$$

$$\lambda_3 = -0.0003248330547$$

$$\lambda_4 = -0.0003933286567 - 0.0004122045889 I$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.040984897$$

- 3) Untuk  $\beta_1 = 7.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_3 = 2.70 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) =$$

$$(0.5505004661, 0.001099275902, 0.0002780860645, 0.4481221719)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0003958443417 + 0.0004150333989 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003761390419$$

$$\lambda_3 = -0.0003202757124$$

$$\lambda_4 = -0.0003958443417 - 0.0004150333989 I$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.032666335$$

- 4) Untuk  $\beta_2 = 8.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_1 = 1.87 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) = (0.4845722666, 0.009058748393, 0.002291610037, 0.5040773750)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0003024398696 + 0.0004339141132 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003700204022$$

$$\lambda_3 = -0.0005085489306$$

$$\lambda_4 = -0.0003024398696 - 0.0004339141132 I$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.3525887872$$

5) Untuk  $\beta_2 = 8.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_2 = 2.65 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) = (0.4845722666, 0.005366119965, 0.001357478300, 0.5087041351)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0003449186993 + 0.0004558371919 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003703456745$$

$$\lambda_3 = -0.0004310191169$$

$$\lambda_4 = -0.0003449186993 - 0.0004558371919 I$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.182615496$$

6) Untuk  $\beta_2 = 8.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_3 = 2.70 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) = (0.4845722666, 0.005129413015, 0.001297598061, 0.5090007223)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0003475092882 + 0.0004575859756 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003703670424$$

$$\lambda_3 = -0.0004263140314$$

$$\lambda_4 = -0.0003475092882 - 0.0004575859756 I$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.173165156$$

7) Untuk  $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_1 = 1.87 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) =$$

$$(0.4327463557, 0.01180657432, 0.002986733160, 0.5524603368)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0002803601279 + 0.0004872349467 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003669338726$$

$$\lambda_3 = -0.0005618080780$$

$$\lambda_4 = -0.0002803601279 - 0.000487234947 I$$

Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.514574443$$

8) Untuk  $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_2 = 2.65 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) =$$

$$(0.4327463557, 0.008508879412, 0.002152508561, 0.5565922563)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0003154501961 + 0.0005033773087 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003671317806$$

$$\lambda_3 = -0.0004990685238$$

$$\lambda_4 = -0.0003154501961 - 0.0005033773087 I$$

Karena  $\mathcal{R}e(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.324246094$$

9) Untuk  $\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p_3 = 2.70 \times 10^{-5}$

$$E_1(S, E, I, R) =$$

$$(0.4327463557, 0.008297488713, 0.002099032625, 0.556871229)$$

Selanjutnya dilihat kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubstitusikan nilai parameter ke persamaan (3.19) diperoleh

$$\lambda_1 = -0.0003176835180 + 0.0005046144948 I$$

$$\lambda_2 = -0.00003671447093$$

$$\lambda_3 = -0.0004950788160$$

$$\lambda_4 = -0.0003176835180 - 0.0005046144948 I$$

Karena  $\mathcal{R}e(\lambda_1) < 0$  maka titik ekuilibrium endemik COVID-19 stabil asimtotik lokal.

$$R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} = 1.313663977$$

Hasil kombinasi parameter proporsi vaksinasi ( $p$ ) dengan parameter laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi ( $\beta$ ) disajikan dalam tabel 4.8.

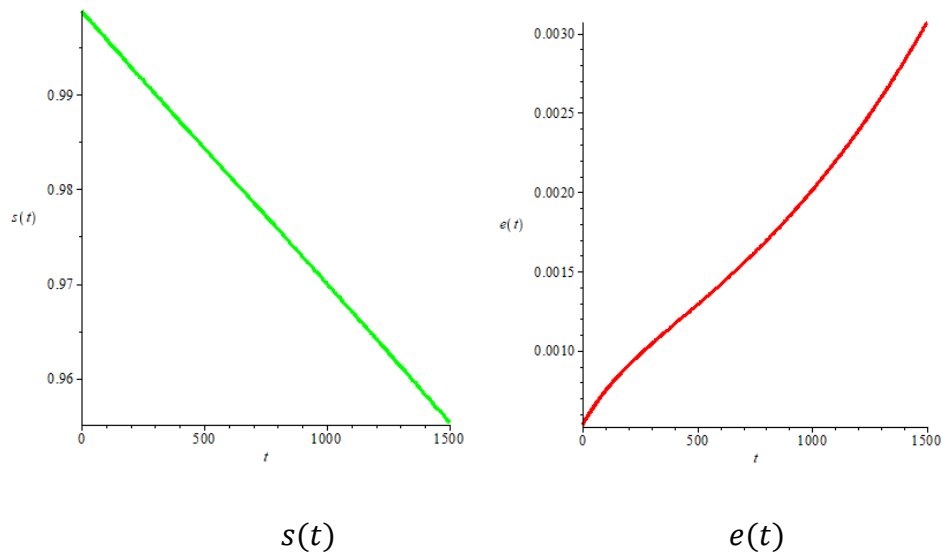
**Tabel 4. 8 Hasil Kombinasi Parameter Keadaan Endemik COVID-19**

$\beta$	$p$	$R_0$	Kestabilan
$\beta_1 = 7.35 \times 10^{-3}$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-5}$	1.190601300	Stabil
$\beta_1 = 7.35 \times 10^{-3}$	$p_2 = 2.65 \times 10^{-5}$	1.040984897	Stabil
$\beta_1 = 7.35 \times 10^{-3}$	$p_3 = 2.70 \times 10^{-5}$	1.03266635	Stabil
$\beta_2 = 8.35 \times 10^{-3}$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-5}$	1.35287872	Stabil
$\beta_2 = 8.35 \times 10^{-3}$	$p_2 = 2.65 \times 10^{-5}$	1.182615496	Stabil

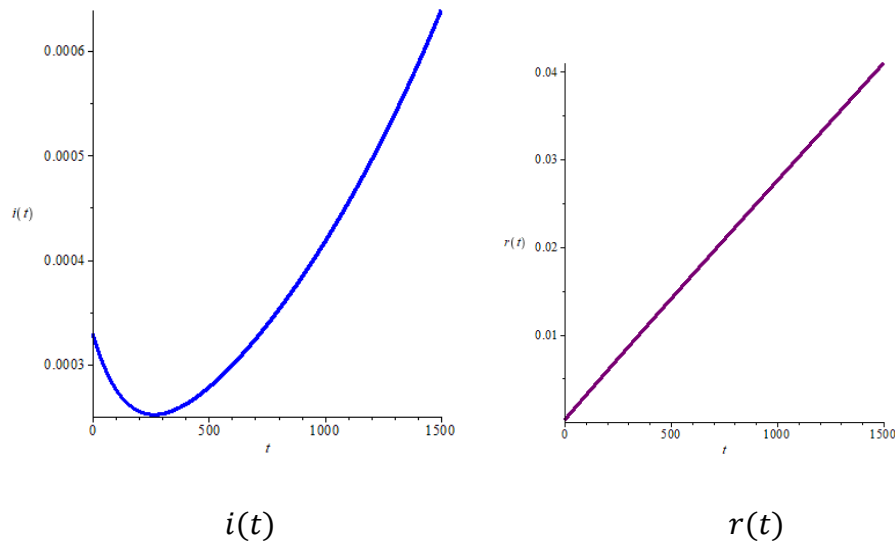
$\beta_2 = 8.35 \times 10^{-3}$	$p_3 = 2.70 \times 10^{-5}$	1.173165156	Stabil
$\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$	$p_1 = 1.87 \times 10^{-5}$	1.514574443	Stabil
$\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$	$p_2 = 2.65 \times 10^{-5}$	1.324246094	Stabil
$\beta_3 = 9.35 \times 10^{-3}$	$p_3 = 2.70 \times 10^{-5}$	1.313663977	Stabil

Tabel 4.8 menunjukkan simulasi numerik titik ekuilibrium endemik COVID-19, bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta lebih dari satu. Artinya rata-rata setiap individu yang terinfeksi akan menginfeksi satu hingga dua individu baru dan pada kondisi ini sistem dalam kondisi stabil.

Berikut merupakan simulasi model SEIR menggunakan parameter pada Tabel dan menggunakan nilai awal individu rentan  $s(0) = 0.998856097$ , nilai awal individu terpapar  $e(0) = 0.000534553$ , nilai awal individu terinfeksi  $i(0) = 0.000329102$ , dan individu sembuh  $r(0) = 0.000280248$ .







**Gambar 4. 3 Simulasi sistem (3.3) dengan  $\beta = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p = 2.70 \times 10^{-5}$**

Gambar menunjukkan bahwa seiring berjalannya waktu individu rentan akan mengalami penurunan ke titik 0.4327463557 dan stabil di titik tersebut, individu terpapar mengalami kenaikan menuju titik 0.008297488713 dan stabil di titik tersebut, individu terinfeksi mengalami penurunan pada hari ke 270 kemudian naik dan stabil di titik 0.002099032625, sedangkan individu sembuh mengalami kenaikan hingga ke titik 0.556871229 dan stabil di titik tersebut.

Maka jumlah populasi untuk penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta masing-masing kompartemen akan stabil bersamaan di titik ekuilibrium endemik sebagai berikut :

- a. Jumlah populasi rentan

$$S = s \times N$$

$$S = 0.4327463557 \times 10562088$$

$$S = 4570705.090 \text{ individu}$$

- b. Jumlah populasi terpapar

$$E = e \times N$$

$$E = 0.008297488713 \times 10562088$$

$$E = 87638,805 \text{ individu}$$

- c. Jumlah populasi terinfeksi

$$I = i \times N$$

$$I = 0.002099032625 \times 10562088$$

$$I = 22170,1673 \text{ individu}$$

- d. Jumlah populasi sembuh

$$R = r \times N$$

$$R = 0.556871229 \times 10562088$$

$$R = 5881722,9253 \text{ individu}$$

Berdasarkan data dan parameter yang digunakan, diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar  $(R_0) < 1$  dan nilai bilangan reproduksi dasar  $(R_0) > 1$ . Pada titik ekuilibrium bebas COVID-19 dengan rentang nilai  $\beta$  dari  $2.35 \times 10^{-4} - 9.35 \times 10^{-3}$  dan rentang nilai parameter  $p$  dari  $5.87 \times 10^{-4} - 1.87 \times 10^{-3}$  diperoleh bilangan reproduksi dasar  $(R_0) < 1$  sekitar 0,001 hingga 0.132 yang artinya rata-rata setiap individu terinfeksi akan menginfeksi kurang dari satu individu baru, sehingga COVID-19 tidak akan menyebar di DKI Jakarta. Penyakit COVID-19 akan menghilang dari populasi jika  $(R_0) < 1$  dimana laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi memiliki nilai kecil dan nilai proporsi vaksinasi yang besar, sedangkan penyakit COVID-19 akan menjadi endemik jika  $(R_0) > 1$  dengan rentang nilai  $\beta$  dari  $7.35 \times 10^{-3} - 9.35 \times 10^{-3}$  dan rentang nilai parameter  $p$  dari  $7.87 \times 10^{-5} - 9.87 \times 10^{-5}$  diperoleh bilangan reproduksi dasar  $(R_0)$  sekitar 1.03 hingga 1.5 yang artinya setiap individu terinfeksi COVID-19 akan menginfeksi satu individu baru, sehingga COVID-19 akan menyebar dan menjadi endemik di DKI Jakarta dimana laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi memiliki nilai besar dan nilai proporsi vaksinasi yang kecil.

## BAB V

### PENUTUP

#### A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis model SEIR pada penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Diperoleh model matematika tipe SEIR pada penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi berupa sistem persamaan diferensial nonlinear yang terdiri dari 4 persamaan. Model yang diperoleh adalah sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - pS - \beta S \frac{I}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \mu E - \sigma E$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \mu I - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + pS - \mu R$$

dengan  $S$  menyatakan banyaknya individu rentan yang berubah seiring dengan berjalannya waktu,  $E$  menyatakan banyaknya individu terpapar,  $I$  menyatakan banyaknya individu terinfeksi,  $R$  menyatakan banyaknya individu sembuh,  $N$  menyatakan total populasi penduduk DKI Jakarta,  $\mu$  menyatakan laju kematian atau kelahiran alami,  $\beta$  menyatakan laju individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi,  $\sigma$  menyatakan laju individu terpapar menjadi individu terinfeksi,  $\gamma$  menyatakan laju individu terinfeksi menjadi individu sembuh, dan  $p$  menyatakan proporsi vaksinasi.

2. Model SEIR pada penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas COVID-19 dan titik ekuilibrium endemik

COVID-19 dengan  $R_0 = \frac{\beta\mu\sigma}{(\mu+p)(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)}$

- a. Untuk titik ekuilibrium bebas COVID-19

Dengan menganalisis sistem persamaan differensial dalam model non-dimensional diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit  $TE_1(s, e, i, r) =$

$\left(\frac{\mu}{(\mu+p)}, 0, 0, \frac{p}{\mu+p}\right)$ . Pada titik ekuilibrium bebas COVID-19 dengan rentang nilai  $\beta$  dari  $2.35 \times 10^{-4} - 9.35 \times 10^{-3}$  dan rentang nilai parameter  $p$  dari  $5.87 \times 10^{-4} - 1.87 \times 10^{-3}$  diperoleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) sekitar 0,001 hingga 0.132 yang artinya rata-rata setiap individu terinfeksi akan menginfeksi kurang dari satu individu baru, sehingga COVID-19 tidak akan menyebar di DKI Jakarta.

b. Untuk titik ekuilibrium endemik COVID-19

Dengan menganalisis sistem persamaan differensial dalam model non-dimensional diperoleh titik ekuilibrium endemik sebagai berikut

$$s = \frac{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu)}{\sigma\beta}$$

$$e = \frac{-\mu^3 + (-p-\gamma-\sigma)\mu^2 + ((-p+\beta-\gamma)\sigma - p\gamma)\mu - p\sigma\gamma}{\sigma(\sigma+\mu)\beta}$$

$$i = \frac{-\mu^3 - (p+\sigma+\gamma)\mu^2 - (\gamma p - \beta\sigma + \gamma\sigma + p\sigma)\mu - \gamma p\sigma}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)\beta}$$

$$r = \frac{((- \gamma + p)\mu - \gamma(\gamma - p - \beta))\sigma^2 + ((- \gamma + 2p)\mu + p\gamma)(\gamma + \mu)\sigma + \mu p(\gamma + \mu)^2}{\beta\sigma(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)}$$

Titik ekuilibrium endemik COVID-19 dengan rentang nilai  $\beta$  dari  $7.35 \times 10^{-3} - 9.35 \times 10^{-3}$  dan rentang nilai parameter  $p$  dari  $7.87 \times 10^{-5} - 9.87 \times 10^{-5}$  diperoleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) sekitar 1.03 hingga 1.5 yang artinya setiap individu terinfeksi COVID-19 akan menginfeksi satu individu baru, sehingga COVID-19 akan menyebar dan menjadi endemik di DKI Jakarta.

## B. Saran

Pada penelitian ini model penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi. Terdapat banyak hal yang dapat dikembangkan dalam pemodelan matematika penyebaran COVID-19, untuk penelitian selanjutnya disarankan

1. Disarankan untuk memodelkan penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan efikasi dan efektivitas vaksin dari berbagai macam vaksin COVID-19.
2. Pada penelitian ini diasumsikan populasi tertutup, yang artinya tidak ada perpindahan antar individu. Disarankan untuk dapat menggunakan asumsi populasi terbuka.

## DAFTAR PUSTAKA

- Alberca, G. G. F., Fernandes, I. G., Sato, M. N., & Alberca, R. W. (2020). What Is COVID-19? *Frontiers for Young Minds*, 8.  
<https://doi.org/10.3389/frym.2020.00074>
- Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 110072.  
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>
- Anton, H. (Drexel U. (1987). *Aljabar Linear Elementer* (I. N. Susila (ed.); Kelima). Erlangga.
- Bender, E. A. (1978). *AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELING*. John Wiley & Sons.
- Burhan, E., Dwi Susanto, A., Nasution, S. A., Ginanjar, E., Wicaksono Pitoyo, C., Susilo, A., Firdaus, I., Santoso, A., Arifa Juzar, D., Kamsul Arif, S., Lolong Wulung, N. G., Adityaningsih, D., Fahrial Syam, A., Rasmin, M., Rengganis, I., Sukrisman, L., Damayanti, T., Heru Wiyono, W., Isbaniah, F., ... Puspitorini, D. (n.d.). *PEDOMAN TATALAKSANA COVID-19 Edisi 2 TIM PENYUSUN*.
- Campbell, S. L., & Haberman, R. (2008). *INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS with Dynamical System*. Princeton University Press.  
[https://www.academia.edu/29983506/INTRODUCTION\\_TO\\_DIFFERENTIAL\\_EQUATIONS](https://www.academia.edu/29983506/INTRODUCTION_TO_DIFFERENTIAL_EQUATIONS)
- Cooper, I., Mondal, A., & Antonopoulos, C. G. (2020). A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 110057. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110057>
- Hanggara, A. G. (2020). *Strategi Dinkes DKI Memutus Rantai Pandemi COVID-19*. <https://corona.jakarta.go.id/id/artikel/strategi-dinkes-dki-memutus-rantai-pandemi-covid-19>
- Hurint, R. U., Ndi, M. Z., Lobo, M., & Matematika, J. (2017). Analisis

- Sensitivitas Model Epidemi SEIR Sensitivity Analysis of Seir Epidemic Model. *Online Journal of Natural Science*, 6(1), 22–28.  
<http://jurnal.untad.ac.id/jurnal/index.php/ejurnalfmipa/article/view/8076>
- Lounis, M., & Azevedo, J. dos S. (2020). Application of a generalized SEIR model for covid-19 in Algeria. *MedRxiv*, 2020.08.10.20172155.  
<https://doi.org/10.1101/2020.08.10.20172155>
- Marion, G. (2008). *An Introduction to Mathematical Modelling*.  
[https://people.maths.bris.ac.uk/~madjl/course\\_text.pdf](https://people.maths.bris.ac.uk/~madjl/course_text.pdf)
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology* (S. Antman, L. Greengard, & P. Holmes (eds.); Volume 61). Springer US.  
<https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7612-3>
- Olsder, G. . (Delft U. of T., & Woude, J. W. van der. (1994). *Mathematical Systems Theory* (Second). Delft University Press. <http://www.vssd.nl/hlf/a003.htm>
- Pane, M. D. C. (2020). *Virus Corona - Gejala, Penyebab, dan Mengobati - Alodokter*. <https://www.alodokter.com/virus-corona>
- Pemprov DKI Jakarta. (2020). *JAKARTA TANGGAP COVID-19*.  
<https://corona.jakarta.go.id/id>
- Pemprov DKI Jakarta. (2021). *Vaksinasi COVID-19 di Jakarta Hari ini*.
- Perko, L. (Northern A. U. (2000). *Differential Equations and Dynamical System* (Third). Springer - Verlag. [http://weber.itn.liu.se/~krzma/DS2020/Perko - Differential equations and dynamical systems - Springer \(3ed\).pdf](http://weber.itn.liu.se/~krzma/DS2020/Perko - Differential equations and dynamical systems - Springer (3ed).pdf)
- Putra, Z. A., & Abidin, S. A. Z. (2020). Application of seir model in covid-19 and the effect of lockdown on reducing the number of active cases. *Indonesian Journal of Science and Technology*, 5(2), 185–192.  
<https://doi.org/10.17509/ijost.v5i2.24432>
- Ross, S. L. (2004). *Differential Equations* (Third). John Willey & Sons.  
[http://mdudde.net/pdf/study\\_material\\_DDE/M.Sc.MAthematics/DIFFERENTIAL EQUATIONS.pdf](http://mdudde.net/pdf/study_material_DDE/M.Sc.MAthematics/DIFFERENTIAL EQUATIONS.pdf)
- Teimouri, A. (2020). An SEIR Model with Contact Tracing and Age-Structured Social Mixing for COVID-19 outbreak. *MedRxiv*, 2020.07.05.20146647.  
<https://doi.org/10.1101/2020.07.05.20146647>

- Tu, P. N. V. (1994). *Dynamical System, An Introduction with Application in Economics and Biology*. Springer - Verlag.
- Van Den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48.  
[https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- WHO. (2020). *Naming the coronavirus disease (COVID-19) and the virus that causes it*. [https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/technical-guidance/naming-the-coronavirus-disease-\(covid-2019\)-and-the-virus-that-causes-it](https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/technical-guidance/naming-the-coronavirus-disease-(covid-2019)-and-the-virus-that-causes-it)
- Widowati, & Sutimin. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*.  
<http://eprints.undip.ac.id/27446/1/184-BA-MIPA-2007.pdf>
- World Health Organization. (2020, July 9). *Transmisi SARS-CoV-2: implikasi terhadap kewaspadaan pencegahan infeksi*.  
[https://www.who.int/docs/default-source/searo/indonesia/covid19/transmisi-sars-cov-2---implikasi-untuk-terhadap-kewaspadaan-pencegahan-infeksi---pernyataan-keilmuan.pdf?sfvrsn=1534d7df\\_4](https://www.who.int/docs/default-source/searo/indonesia/covid19/transmisi-sars-cov-2---implikasi-untuk-terhadap-kewaspadaan-pencegahan-infeksi---pernyataan-keilmuan.pdf?sfvrsn=1534d7df_4)



## LAMPIRAN

### Lampiran 1 Program maple untuk $\beta = 2.35 \times 10^{-4}$ dan $p = 1.87 \times 10^{-3}$

```

> restart;
> with(DEtools) :
> with(plots) :
> ds :=  $\mu - \mu \cdot s - p \cdot s - \beta \cdot s \cdot i$ ;
> de :=  $\beta \cdot s \cdot i - \mu \cdot e - \sigma \cdot e$ ;
> di :=  $\sigma \cdot e - \mu \cdot i - G \cdot i$ ;
> dr :=  $G \cdot i + p \cdot s - \mu \cdot r$ ;
> dsolve({ds, de, di, dr}, {s, e, i, r}) ;
>
 $\mu := 3.557 \cdot 10^{-5}$ ;  $\beta := 2.35 \cdot 10^{-4}$ ;  $\sigma := 9.88 \cdot 10^{-4}$ ;  $G := 3.87 \cdot 10^{-3}$ ;  $p := 1.87 \cdot 10^{-3}$ ;  $K$ 
:= dsolve({ds, de, di, dr}, {s, e, i, r}) ;  $H := \text{evalf}(K)$ ;  $Ro$ 
=  $\frac{\beta \cdot \mu \cdot \sigma}{(\mu + p) \cdot (\mu + \sigma) \cdot (\mu + G)}$ ;  $\text{lamdabebaspenyakit}$ ;  $\lambda\_1 := -\mu$ ;  $\lambda\_2 := -\mu - p$ ;  $\lambda\_3$ 
:=  $\frac{1}{2 \cdot (\mu + p)} \cdot \left( -p \cdot G - p \cdot \sigma - 2 \cdot p \cdot \mu - G \cdot \mu - \sigma \cdot \mu - 2 \cdot \mu^2 - (\mu + p)^{\frac{1}{2}} \cdot (G^2 \cdot p$ 
+  $4 \beta \cdot \mu \cdot \sigma - 2 \cdot G \cdot p \cdot \sigma + \mu \cdot \sigma^2 + G^2 \cdot \mu - 2 \cdot G \cdot \mu \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}} \right)$ ;  $\lambda\_4 := \frac{1}{2(\mu + p)} \cdot \left( -p \cdot G - p$ 
 $\cdot \sigma - 2 \cdot p \cdot \mu - G \cdot \mu - \sigma \cdot \mu - 2 \cdot \mu^2 + (\mu + p)^{\frac{1}{2}} \cdot (G^2 \cdot p + 4 \beta \cdot \mu \cdot \sigma - 2 \cdot G \cdot p \cdot \sigma + p \cdot \sigma^2$ 
+  $G^2 \cdot \mu - 2 \cdot G \cdot \mu \cdot \sigma + \mu \cdot \sigma^2)^{\frac{1}{2}} \right)$ ;

> E1 : display({phaseportrait([D(s)(t) =  $\mu - \mu \cdot s(t) - p \cdot s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$ , D(e)(t) =  $\beta \cdot s(t)$ 
 $\cdot i(t) - \mu \cdot e(t) - \sigma \cdot e(t)$ , D(i)(t) =  $\sigma \cdot e(t) - \mu \cdot i(t) - G \cdot i(t)$ , D(r)(t) =  $G \cdot i(t) + p \cdot s(t)$ 
 $- \mu \cdot r(t)$ ], [s(t), e(t), i(t), r(t)], t = 0 .. 1500, [[s(0) = 0.998856097, e(0) = 0.000534553,
 $i(0) = 0.000329102, r(0) = 0.000280248]], \text{stepsize} = 0.2, \text{scene} = [t, s(t)],$ 
 $\text{linecolour} = \text{green})$ });

> E2 : display({phaseportrait([D(s)(t) =  $\mu - \mu \cdot s(t) - p \cdot s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$ , D(e)(t) =  $\beta \cdot s(t)$ 
 $\cdot i(t) - \mu \cdot e(t) - \sigma \cdot e(t)$ , D(i)(t) =  $\sigma \cdot e(t) - \mu \cdot i(t) - G \cdot i(t)$ , D(r)(t) =  $G \cdot i(t) + p \cdot s(t)$ 
 $- \mu \cdot r(t)$ ], [s(t), e(t), i(t), r(t)], t = 0 .. 1500, [[s(0) = 0.998856097, e(0) = 0.000534553,
 $i(0) = 0.000329102, r(0) = 0.000280248]], \text{stepsize} = 0.2, \text{scene} = [t, e(t)],$ 
 $\text{linecolour} = \text{red})$ });

> E3 : display({phaseportrait([D(s)(t) =  $\mu - \mu \cdot s(t) - p \cdot s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$ , D(e)(t) =  $\beta \cdot s(t)$ 
 $\cdot i(t) - \mu \cdot e(t) - \sigma \cdot e(t)$ , D(i)(t) =  $\sigma \cdot e(t) - \mu \cdot i(t) - G \cdot i(t)$ , D(r)(t) =  $G \cdot i(t) + p \cdot s(t)$ 
 $- \mu \cdot r(t)$ ], [s(t), e(t), i(t), r(t)], t = 0 .. 1500, [[s(0) = 0.998856097, e(0) = 0.000534553,
 $i(0) = 0.000329102, r(0) = 0.000280248]], \text{stepsize} = 0.02, \text{scene} = [t, i(t)],$ 
 $\text{linecolour} = \text{blue})$ });

```

```

> E4 : display( {phaseportrait([D(s)(t) = μ - μ·s(t) - p·s(t) - β·s(t)·i(t), D(e)(t) = β·s(t)
    ·i(t) - μ·e(t) - σ·e(t), D(i)(t) = σ·e(t) - μ·i(t) - G·i(t), D(r)(t) = G·i(t) + p·s(t)
    - μ·r(t)], [s(t), e(t), i(t), r(t)], t = 0 .. 1500, [[s(0) = 0.998856097, e(0) = 0.000534553,
    i(0) = 0.000329102, r(0) = 0.000280248]], stepsize = 0.02, scene = [t, r(t)],
    linecolour = purple) });

```

**Lampiran 2 Program maple untuk  $\beta = 9.35 \times 10^{-3}$  dan  $p = 2.70 \times 10^{-5}$**

```

> restart;
> with(DEtools) :
> with(plots) :
> ds :=  $\mu - \mu \cdot s - p \cdot s - \beta \cdot s \cdot i$ ;
> de :=  $\beta \cdot s \cdot i - \mu \cdot e - \sigma \cdot e$ ;
> di :=  $\sigma \cdot e - \mu \cdot i - G \cdot i$ ;
> dr :=  $G \cdot i + p \cdot s - \mu \cdot r$ ;
>
 $\mu := 3.557 \cdot 10^{-5}$ ;  $\beta := 9.35 \cdot 10^{-3}$ ;  $\sigma := 9.88 \cdot 10^{-4}$ ;  $G := 3.87 \cdot 10^{-3}$ ;  $p := 2.70 \cdot 10^{-5}$ ;  $K$ 
:= dsolve({ds, de, di, dr}, {s, e, i, r}); H := evalf(K); Ro
=  $\frac{\beta \cdot \mu \cdot \sigma}{(\mu + p) \cdot (\mu + \sigma) \cdot (\mu + G)}$ ; lamdabebaspenyakit;  $\lambda_1 := -\mu$ ;  $\lambda_2 := -\mu - p$ ;  $\lambda_3$ 
:=  $\frac{1}{2 \cdot (\mu + p)} \cdot \left( -p \cdot G - p \cdot \sigma - 2 \cdot p \cdot \mu - G \cdot \mu - \sigma \cdot \mu - 2 \cdot \mu^2 - (\mu + p)^{\frac{1}{2}} \cdot (G^2 \cdot p$ 
+  $4 \beta \cdot \mu \cdot \sigma - 2 \cdot G \cdot p \cdot \sigma + \mu \cdot \sigma^2 + G^2 \cdot \mu - 2 \cdot G \cdot \mu \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}} \right)$ ;  $\lambda_4 := \frac{1}{2(\mu + p)} \cdot \left( -p \cdot G - p$ 
 $\cdot \sigma - 2 \cdot p \cdot \mu - G \cdot \mu - \sigma \cdot \mu - 2 \cdot \mu^2 + (\mu + p)^{\frac{1}{2}} \cdot (G^2 \cdot p + 4 \beta \cdot \mu \cdot \sigma - 2 \cdot G \cdot p \cdot \sigma + p \cdot \sigma^2$ 
+  $G^2 \cdot \mu - 2 \cdot G \cdot \mu \cdot \sigma + \mu \cdot \sigma^2)^{\frac{1}{2}} \right)$ ;

> E1 : display({phaseportrait([D(s)(t) =  $\mu - \mu \cdot s(t) - p \cdot s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$ , D(e)(t) =  $\beta \cdot s(t)$ 
 $\cdot i(t) - \mu \cdot e(t) - \sigma \cdot e(t)$ , D(i)(t) =  $\sigma \cdot e(t) - \mu \cdot i(t) - G \cdot i(t)$ , D(r)(t) =  $G \cdot i(t) + p \cdot s(t)$ 
 $- \mu \cdot r(t)$ ], [s(t), e(t), i(t), r(t)], t = 0 .. 1500, [[s(0) = 0.998856097, e(0) = 0.000534553,
 $i(0) = 0.000329102, r(0) = 0.000280248]$ , stepsize = 0.2, scene = [t, s(t)],
linecolour = green)});

> E2 : display({phaseportrait([D(s)(t) =  $\mu - \mu \cdot s(t) - p \cdot s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$ , D(e)(t) =  $\beta \cdot s(t)$ 
 $\cdot i(t) - \mu \cdot e(t) - \sigma \cdot e(t)$ , D(i)(t) =  $\sigma \cdot e(t) - \mu \cdot i(t) - G \cdot i(t)$ , D(r)(t) =  $G \cdot i(t) + p \cdot s(t)$ 
 $- \mu \cdot r(t)$ ], [s(t), e(t), i(t), r(t)], t = 0 .. 1500, [[s(0) = 0.998856097, e(0) = 0.000534553,
 $i(0) = 0.000329102, r(0) = 0.000280248]$ , stepsize = 0.2, scene = [t, e(t)],
linecolour = red)});

> E3 : display({phaseportrait([D(s)(t) =  $\mu - \mu \cdot s(t) - p \cdot s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$ , D(e)(t) =  $\beta \cdot s(t)$ 
 $\cdot i(t) - \mu \cdot e(t) - \sigma \cdot e(t)$ , D(i)(t) =  $\sigma \cdot e(t) - \mu \cdot i(t) - G \cdot i(t)$ , D(r)(t) =  $G \cdot i(t) + p \cdot s(t)$ 
 $- \mu \cdot r(t)$ ], [s(t), e(t), i(t), r(t)], t = 0 .. 1500, [[s(0) = 0.998856097, e(0) = 0.000534553,
 $i(0) = 0.000329102, r(0) = 0.000280248]$ , stepsize = 0.02, scene = [t, i(t)],
linecolour = blue)});

```