Computação Científica I
Projeto 2: Integração usando Álgebra Linear

Professor: Bernardo Costa

19 de fevereiro de 2022

> `gauss quadrature weights and kronron quadrature abscissae and weights as evaluated with 80 decimal digit arithmetic by l. w. fullerton, bell labs, nov. 1981.`
>
> comment on `http://www.netlib.org/quadpack/gk15.f`

Este projeto é uma "continuação" da lista de Álgebra Linear. Ele mostra como calcular métodos de integração numérica usando soluções de sistemas lineares.

Em particular, todos os resultados da lista de Álgebra Linear podem ser livremente utilizados a seguir.

1 Notações de Interpolação polinomial

- $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções contínuas;
- Pol_d, o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a d;
- Um polinômio $g \in \mathrm{Pol}_d$ se escreve $g(z) = \sum g_j z^j$ para coeficientes g_j.
- X é um conjunto de n "nós de interpolação" fixos: $X = \{x_i\}$.
- L_X a aplicação linear de $\mathcal{F}$ em Pol_{n-1}, que dá o polinômio interpolador.
- π_X a aplicação linear de $\mathcal{F}$ em $\mathbf{R}^n$ que a cada função f dá o vetor $(f(x_i))$.
- $\phi_X : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Pol}_{n-1}$ a aplicação inversa de π_X restrita aos polinômios de grau menor do que n.

2 Integração numérica como aplicação linear

Supomos, a menos que seja dito o contrário, que $X \subset [-1, 1]$, o intervalo-padrão para integrais.

1. Mostre que a integral definida $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ é uma aplicação linear no espaço $\mathcal{F}$, logo em Pol_{n-1}.

2. Mostre que, para $g \in \mathrm{Pol}_{n-1}$ com coeficientes (g_j), $I(g) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{1 - (-1)^{1+j}}{1 + j}$.

3. Considere a aplicação $I_X : \mathcal{F} \to \mathbf{R} : f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(L_X(f)\Big)(t)\,dt$, que calcula a integral do polinômio interpolador de f (dadas as abscissas $x_i \in X$) no intervalo $[-1, 1]$. Escreva I_X como a composta de duas aplicações lineares.

4. Use as decomposições de I_X e L_X para mostrar que $I_X(f)$ só depende de $\pi_X(f)$.

5. Deduza que existem reais w_i tais que $I_X(f) = \sum w_i f(x_i)$.

Nesta parte, vamos calcular w_i, para descobrir uma nova regra de integração. Daqui em diante, o polinômio g será o interpolador de Lagrange $L_X(f)$.

6. Escreva a equação matricial que determina os coeficientes g_j a partir dos x_i e dos $f(x_i)$.

7. Escreva a integral $I(g)$ como o produto interno do vetor de coeficientes g_j com um vetor v. Ou seja, encontre v tal que $I(g) = \langle (g_j), v \rangle$.

8. O vetor γ dos coeficientes (g_j) pode ser escrito como a solução de um sistema linear da forma $M\gamma = \pi_X(f)$. Demonstre que $I(g) = \Big\langle \pi_X(f), (M^{-1})^T v \Big\rangle$.

9. Deduza que $w = (M^{-1})^T v$.

Generalizando para um intervalo qualquer $[a, b]$.

10. Que mudanças devem ser feitas para calcular a integral de f em $[a, b]$? Em particular, tente estabelecer uma fórmula que não necessite recalcular w.