Projeto 2 - Computação Científica

Rodrigo Mendes Palmeira
rpalmeira1999@poli.ufrj.br

Mayara Azevedo Aragão
mayaraaragao@poli.ufrj.br

28 de fevereiro de 2022

1. Podemos observar que a integral definida $I(g) = \int_{-1}^{1} g(t)dt$ é uma aplicação linear no espaço $\mathcal{F}$, logo em Pol_{n-1} a partir da verificação das seguintes propriedades:

   (a) Considerando que $\forall f, g \in \mathcal{F}$, podemos definir a integral $I(f+g)$ como $I(f) + I(g)$. De fato, seguindo as propriedades da integral, temos que a integral da soma , é a soma de integrais. Sendo assim, temos que:

   $$I(f+g) = \int_{-1}^{1} f(t) + g(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} g(t)dt = I(f) + I(g)$$

   (b) Considerando que para $g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos definir a integral $I(\alpha g)$ como $\alpha \cdot I(f)$. De fato, seguindo as propriedades da integral, temos que a constante multiplicativa pode ser retirada do integrando. Sendo assim, temos que:

   $$I(\alpha g) = \int_{-1}^{1} \alpha g(t)dt = \alpha \cdot \int_{-1}^{1} g(t)dt = \alpha \cdot I(g)$$

   Sendo assim, mostramos que a integral definida é uma aplicação linear de $\mathcal{F}$, logo em P_{n-1} considerando as notações de interpolação polinomial.

2. Para provar que, para $g \in P_{n-1}$ com coeficientes g_j,

$$I(g) = \int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}$$

Podemos provar que a derivada da integral $I(g)$ é igual a g, ou seja:

$$\frac{d(I(g))}{dt} = \frac{d(\int_{-1}^{1} g(t)dt)}{dt} = g(t)$$

Para isso, podemos representar o polinômio $g(t) = g_0 + g_1 t + ... + g_{n-1} t^{n-1}$ como um somatório com os coeficientes g_j:

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot t^j$$

A integral do polinômio $g(t)$ deve seguir a seguinte lógica

$$\int g(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j \cdot t^{j+1}}{j+1}$$

Pois ao aplicar a derivada, obtemos:

$$\frac{d(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j \cdot t^{j+1}}{j+1})}{dt} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j \cdot (\cancel{j+1}) \cdot t^{j+\cancel{1}-\cancel{1}}}{\cancel{j+1}} = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot t^j = g(t)$$

Sendo assim, ao considerar o intervalo $[-1, 1]$ fornecido temos que a integral nesse intervalo, de modo que a derivada seja igual ao polinômio g, deve ser:

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j \cdot t^{j+1}}{j+1} \Bigg|_{t=-1}^{t=1}$$

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \frac{(1)^{j+1}}{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \frac{(-1)^{j+1}}{j+1}$$

Colocando em evidência:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j}{j+1} \cdot \left(1^{j+1} - (-1)^{j+1}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j}{j+1} \cdot \left(1^{\cancel{j+1}} - (-1)^{j+1}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}$$

Sendo assim, a integral $I(g)$ dentro do intervalo fornecido, pode ser representada pelo somatório:

$$I(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}$$

3. Sabendo que a aplicação linear $L_X : \mathcal{F} \to Pol_{n-1}$ e a aplicação linear da integral $I : g \mapsto \int_{-1}^{1} g(t)dt$ em um polinômio interpolador $I : Pol_{n-1} \to \mathcal{R}$.

   Dado que foi provado na questão 1 e o que foi fornecido nas notações de interpolação polinômial, tanto L_X quanto I são aplicações lineares. Logo, temos que a aplicação composta $I_X : \mathcal{F} \to \mathcal{R} : f \mapsto \int_{-1}^{1} \left(L_x(f)\right)(t)dt$ que calcula a integral de uma aplicação L_X de $\mathcal{F}$ em Pol_{n-1}, ou seja, calcula a integral do polinômio interpolador de f, (dadas as abscissas $x_i \in X$) pode ser escrita como a seguinte composição:

$$I_X = I(L_X(f)) = (I \circ L_X)(f)$$

   e garantimos que

$$I_X : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$$

4. Como vimos na questão anterior, $I_X(f) = (I \circ L_X)(f) = \int_{-1}^{1}(L_X(f))(t)dt$, dessa forma podemos notar, já que o intervalo é previamente definido, que o valor da integral só depende do Pol_{n-1} resultante de $L_X(f)$. Sabemos também pela definição de L_X e de interpolação que o polinômio resultante só depende do valor de f nos pontos x_i, pois eles definem unicamente um polinômio Pol_{n-1} que passa por todos eles, assim depende apenas de π_X que é o vetor formado pelos valores de f nos pontos x_i, tendo em vista que, portanto, qualquer função com o mesmo π_X terá o mesmo L_X. Assim, a $I_X(f)$ só depende de π_X de f.

5. Sabemos que:
$$I_X(f) = \int_{-1}^{1}(L_X(f))(t)dt$$
Bem e sabemos que $L_X(f)$ é um polinômio Pol_{n-1}, assim com $d \leq n-1$
$$I_X(f) = \int_{-1}^{1}(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + ... + \alpha_d \cdot t^d)dt$$
$$= \int_{-1}^{1}\alpha_0 dt + \int_{-1}^{1}\alpha_1 \cdot t dt + ... + \int_{-1}^{1}\alpha_d \cdot t^d dt$$
Assim sabendo que a Integral de polinômios de grau zero até d(e, para os valores entre d e (n-1), $w_i = 0$) é sempre bem definida nesse intervalo, ou seja, dá um valor real qualquer, podemos fazer:
$$w_i f(x_i) = \int_{-1}^{1}\alpha_i t^i$$
$$w_i f(x_i) = \alpha_i \int_{-1}^{1} t^i$$
$$w_i f(x_i) = \alpha_i \cdot \frac{t^{i+1}}{i+1}\bigg|_{t=-1}^{t=1}$$
$$w_i = \frac{f(x_i)}{\alpha_i} \cdot \frac{t^{i+1}}{i+1}\bigg|_{t=-1}^{t=1}$$

Logo

$$I_X(f) = \int_{-1}^{1} \alpha_0 dt + \int_{-1}^{1} \alpha_1 \cdot t dt + ... + \int_{-1}^{1} \alpha_d \cdot t^d dt = \sum w_i \cdot f(x_i)$$

6. Como vimos em sala, para calcular a equação matricial que determina os coeficientes g_j, basta resolver o seguinte sistema linear, para cada x_i:

$$M \cdot g = \pi_X$$

De modo que, M é a matriz de Vandermonde para definir o polinômio interpolador para cada ponto x_i:

$$\begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_2^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Logo, ao multiplicar cada linha da matriz M pelo vetor de coeficientes g_j, o resultado obtido é justamente $f(x_i)$ para cada ponto x_i aplicado.

$$\begin{bmatrix} x_i^0 & x_i^1 & x_i^2 & \cdots & x_i^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = g_o x_i^0 + g_1 x_i^1 + g_2 x_i^2 + \cdots + g_{n-1} x_i^{n-1} = f(x_i)$$

Lembrando que para uma interpolação a partir de n pontos, o polinômio interpolador pode ter grau até $n-1$. Sendo assim, para encontrarmos os coeficientes g_j, precisamos apenas da matriz M e do valor dos $f(x_i)$ ao resolver o seguinte sistema linear:

$$\cancel{M^{-1}} \cdot \cancel{M} \cdot g = M^{-1} \cdot \pi_X$$

$$g = M^{-1} \cdot \pi_X$$

Assim, resta provar que a matriz M de Vandermonde é inversível, o que podemos fazer ao provar que as colunas da matriz M são linearmente independentes.

Vamos chamar cada coluna da matriz M de um vetor m_i . Logo,

$$m_i = (x_0^i, x_1^i, \cdots, x_n^i)$$

Então, vamos assumir que existem coeficientes c_i reais de modo que o somatório de todos os vetores coluna vezes o coeficiente c_i correspondente, resulte em um vetor de zeros:

$$c_0 m_0 + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \cdots + c_n m_{n-1} = \vec{0}$$

Analisando a coordenada i especificamente, temos que:

$$c_0 x_i^0 + c_1 x_i^1 + c_2 x_i^2 + \cdots + c_n x_i^{n-1} = 0$$

$$c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \cdots + c_n x_i^{n-1} = 0$$

Logo, para que essa equação resulte em 0, significa que x_i é raiz do polinômio acima. Contudo, temos n pontos diferentes, e o polinômio possui grau máximo de $n-1$. Logo, possuimos mais pontos que raizes, então para que o polinômio correspondente a cada coordenada i resulte em 0, temos que $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Sendo assim, provamos que os vetores colunas de M são linearmente independentes, então a matriz M é inversível e conseguimos obter os coeficientes g_j a partir da sua inversa:

$$g = M^{-1} \cdot \pi_X$$

7. Pela definição:

$$I(g) = \int_{-1}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{1} \left(\sum_j g_j \cdot t^j \right) dt$$

Pelas propriedades da integral:

$$= \sum_j \int_{-1}^{1} g_j \cdot t^j dt = \sum_j g_j \int_{-1}^{1} t^j dt = \sum_j g_j \frac{t^{j+1}}{j+1}\Bigg|_{t=-1}^{t=1}$$

Logo tendo que $g = (g_j) = (g_0, ..., g_{d-1})$ e $ts = \left(\frac{t^1}{1}\Big|_{t=-1}^{t=1}, ..., \frac{t^{d+1}}{d+1}\Big|_{t=-1}^{t=1} \right)$, temos que :

$$\sum_j g_j \frac{t^{j+1}}{j+1}\Bigg|_{t=-1}^{t=1} = \langle (g_j), ts \rangle$$

Assim fazendo $v = ts$, temos que:

$$I(g) = \langle (g_j), v \rangle$$

8. Como vimos na questão anterior $I(g) = \langle (g_j), v \rangle$, assim temos:

$$I(g) = \langle (g_j), v \rangle$$

E como $\gamma = (g_j)$ é solução do sistema linear $M\gamma = \pi_X(f)$, temos:

$$I(g) = \langle (g_j), v \rangle = \langle \gamma, v \rangle = \left\langle M^{-1}\pi_X(f), v \right\rangle$$

$$= \left(M^{-1}\pi_X(f) \right)^T v = \pi_X^T (M^{-1})^T v$$

$$= \left\langle \pi_X(f), (M^{-1})^T v \right\rangle$$

9. Sabemos pela definição de I_X, que:

$$I_X(f) = \int_{-1}^{1} (L_X(f))(t) dt$$

Como g é um polinômico interpolador de Lagrange e L_X é uma projeção temos que:

$$I_X(f) = \int_{-1}^{1} (L_X(f))(t) dt = \int_{-1}^{1} g(t) dt = I(g)$$

$$I(g) = \left\langle \pi_X(f), (M^{-1})^T v \right\rangle$$

Chamando $(M^{-1})^T v = \eta$, temos pela definição de produto escalar que:

$$I(g) = \langle \pi_X(f), \eta \rangle = \sum_i \eta_i f(x_i)$$

E pela 5, temos que $I_X(f) = \sum_i w_i f(x_i)$, logo:

$$I_X(f) = \sum_i w_i f(x_i) = I(g) = \sum_i \eta_i f(x_i)$$

Dessa forma temos que:

$$w = \eta = (M^{-1})^T v$$

10. Como provado anteriormente, temos que L_X só depende de x_i e $f(x_i)$. Logo, a partir do polinômio interpolador de f, podemos calcular a integral para limites $[a, b]$ modificando os últimos passos da questão 2, assim, temos que a integral do polinômio $g(t)$ será:

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j \cdot t^{j+1}}{j+1} \Bigg|_{t=a}^{t=b}$$

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \frac{(b)^{j+1}}{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} g_j \cdot \frac{(a)^{j+1}}{j+1}$$

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j}{j+1} \cdot (b^{j+1} - a^{j+1})$$