Lista de Exercícios 05

1) Escreva um programa que faça a integração numérica de uma função f(x) no intervalo [a,b] que permita o uso (escolha pelo usuário) da integração polinomial ou a Quadratura de Gauss. O programa deve permitir que o usuário escolha o número de pontos de integração, que deve ser entre 1 e 10.

   Obs.: ordenadas e pesos para a Quadratura de Gauss podem ser acessados, por exemplo, em https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html

2) Use o programa desenvolvido para obter o resultado numérico das seguintes integrais:

$$I1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$I2 = \int_0^5 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

3) Usando o seu programa e considerando $S_\sigma(\omega) = RAO(\omega)^2 S_\eta(\omega)$, onde

$$RAO(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

   com $\omega_n = 1.0$ e $\xi = 0.05$ e $S_\eta(\omega) = 2.0$, obtenha m_0 e m_2 dados por:

$$m_0 = \int_0^{10} S_\sigma(\omega)d\omega$$

$$m_2 = \int_0^{10} \omega^2 S_\sigma(\omega)d\omega$$

Obs.: Faça um estudo "numérico" da convergência da solução em função do número de pontos de integração. 10 pontos são suficientes?

4) Repita o exercício anterior considerando $S_\eta(\omega) = \frac{4\pi^3 Hs^2}{\omega^5 Tz^4} \exp\left(-\frac{16\pi^3}{\omega^4 Tz^4}\right)$ com

   Hs=3.0 e Tz=5.0.

5) Com o programa desenvolvido, use o número mínimo de pontos de integração para integrar exatamente a integral abaixo pelos métodos da Integração Polinomial e da Quadratura de Gauss.

$$f(x) = 2 + 2x - x^2 + 3x^3$$

$$A = \int_0^4 f(x)dx$$

6) Use os valores da regra do Ponto médio e do Trapézio para estimar um valor mais aproximado para a integral abaixo. Obtenha também, a partir destes dois valores, qual seria o valor da integral caso tivesse sido usada a Regra de Simpson. Resolva numericamente esta integral com o programa desenvolvido e compare os valores obtidos.

$$A = \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} dx$$

7) A quadratura de Gauss conforme apresentada em aula é usada para integrais com limites de integração conhecidos e é também chamada de Quadratura Gauss-Legendre. Para integrais com um ou ambos limites de integração envolvendo $-\infty$ ou $+\infty$ usa-se a quadratura Gauss-Hermite. Pesquise sobre esta técnica e desenvolva uma rotina (similar ao Exercício 1) para resolver as seguintes integrais:

$$A_1 = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

$$A_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$